JAMAACADDA
UMMADDA
SOOMAALI YEED

UNIVERSITÀ
NAZIONALE
SOMALA

Fisica Propedeutica

Progetto di propedeutica universitaria

INTRODUZIONE

La Fisica è una scienza sperimentale, cioè si fonda sui risultati degli esperimenti. Alla base della Fisica abbiamo quindi l'osservazione di ciò che accade intorno a noi.

Il primo contatto con il mondo naturale avviene mediante i sensi, che costituiscono quindi i primi strumenti *di indagine del mondo fisico. Tale indagine ci permette di costruire i concetti fondamentali di* spazio, materia *e* tempo.

Vediamo intorno a noi molti oggetti e impariamo a distinguere l'uno dall'altro.

Il concetto di spazio nasce naturalmente nella mente di ciascuno di noi osservando che per toccare certi oggetti basta allungare la mano, per toccare altri oggetti bisogna invece fare qualche passo oppure, in alcuni casi, molti passi. Si dice allora che ogni oggetto occupa un proprio posto o luogo nello spazio *e nascono nel linguaggio i termini vicino e lontano come prima misura della separazione degli oggetti nello spazio, cioè della* distanza tra due oggetti.

Insieme a questi termini nascono quelli di grande e piccolo per indicare l'estensione della regione dello spazio occupata da un oggetto, cioè il suo volume.

Toccando ogni oggetto avvertiamo infine che esso è fatto di qualcosa, cioè che ogni oggetto è costituito di materia *e quindi possiede una propria* massa.

Oltre a queste sensazioni, che ci portano a costruire i concetti di spazio e materia, avvertiamo continuamente la sensazione che il mondo intorno a noi si modifica, cambia. La memoria ci aiuta a ricordare ciò che c'era prima e spesso cerchiamo di immaginare cosa ci sarà dopo. Nasce così il concetto di passato, presente e futuro legato a quello più generale del trascorrere del tempo. Il linguaggio stesso contiene in se questo concetto e lo esprime continuamente usando termini specifici (ieri, oggi, domani) e attraverso i diversi tempi dei verbi (ieri ero ..., oggi sono ..., domani sarò ...).

Molto spesso vediamo che con il passare del tempo molti oggetti cambiano la loro posizione rispetto a noi; diciamo allora che l'oggetto si muove. Il movimento di un oggetto, o più in generale il moto, rappresenta un fenomeno fisico in quanto si ripete sempre con certe caratteristiche. Avvertiamo allora la necessità di cercare di comprendere come e perché esso avviene, cioè quali siano le leggi fisiche che regolano questo fenomeno. Una volta individuate tali leggi sentiamo il desiderio di vedere se esse si possono applicare ad altri moti e se ci permettono di fare delle previsioni su come in generale avviene il moto.

Cominciamo così a costruire delle teorie fisiche che sono valide fino a quando le loro previsioni coincidono con i risultati sperimentali.

In questo Corso cercheremo di studiare in dettaglio il moto degli oggetti.

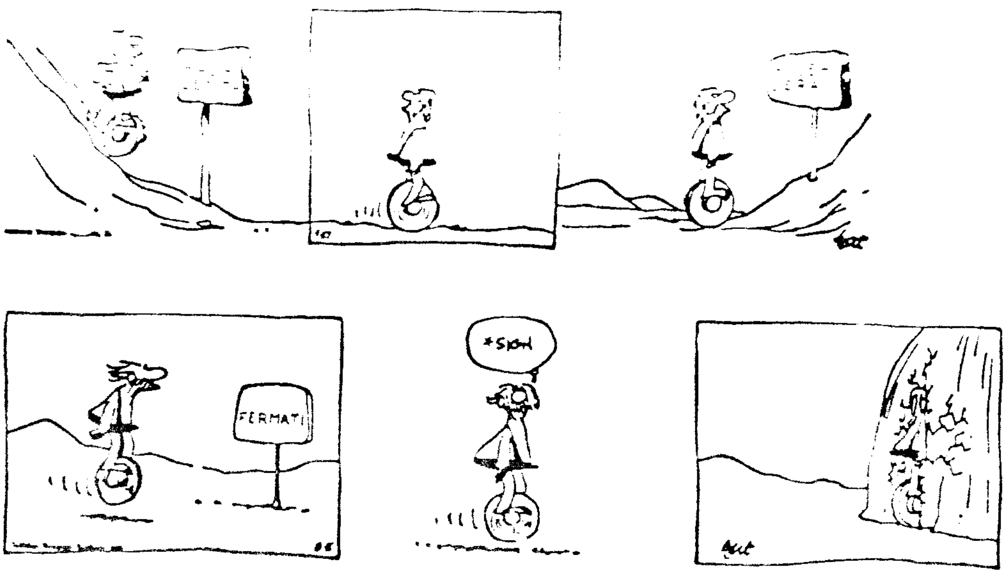
Per fare questo dovremo da un lato introdurre le grandezze fisiche che ci permettano di descrivere le caratteristiche del moto e, basandoci sui risultati dell'esperienza, ricavare le leggi che descrivono il moto (Parte A).

Dall'altro lato dovremo impararare a misurare tali grandezze mediante degli strumenti appositamente costruiti (Parte B).

Infine, poiché uno degli obiettivi del nostro lavoro deve essere quello di saper utilizzare la Fisica per risolvere problemi della vita quotidiana, dovremo imparare ad eseguire esercizi che affrontano, sia pure in forma molto semplificata, situazioni reali (Parte C).

P A R T E   A

IL MOTO E LE FORZE



CAPITOLO I

DESCRIZIONE DEL MOTO

1. Sistemi di riferimento

Un fenomeno fisico molto comune è il *movimento degli oggetti* attorno a noi. Possiamo dire che un oggetto *si muove* (o è in *moto*) quando la sua posizione nello spazio cambia con il trascorrere del tempo.

Ma come possiamo indicare la posizione che un oggetto occupa nello spazio ad un certo istante?

Osserviamo la fig. 1.1. Il ragazzo può dire che la pallina nera si trova sul tavolo davanti al vaso e che la pallina bianca si trova sul tavolo a *sinistra* del vaso.

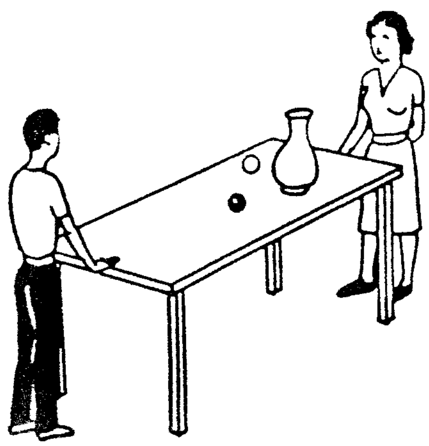


Figura 1.1

Per individuare la posizione di un oggetto dobbiamo utilizzare altri oggetti presi come *riferimento*.

Osserviamo ancora la fig. 1.1. Per la ragazza la pallina nera si trova *dietro* il vaso e quella bianca si trova a *destra* del vaso.

Le indicazioni necessarie per individuare un oggetto *dipendono* quindi *dalla posizione dell'osservatore.*

Un altro modo per individuare la posizione di un oggetto sul tavolo può essere quello di suddividere la superficie del tavolo in tanti piccoli quadrati uguali (vedi fig. 1.2) ed indicare di quanti quadratini ci si deve spostare per arrivare alla posizione dell'oggetto. Ad esempio, *partendo dal vertice* A, per arrivare alla pallina nera dobbiamo spostarci di 5 quadratini *nella direzione del lato* AB e di 3 quadratini *nella direzione del lato* AD.

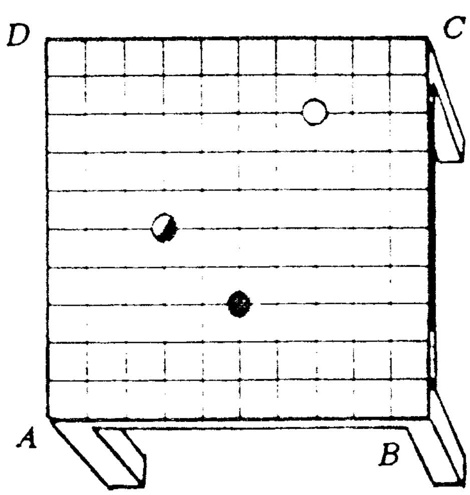


Figura 1.2

Fissati quindi il punto di partenza A e le due direzioni di spostamento, nell'ordine AB e AD, la pallina nera può essere individuata dalla coppia di numeri $(5,3)$.

D1.1 Quali sono, nel precedente riferimento, le coppie di numeri che individuano la posizione della pallina bianca e di quella metà bianca e metà nera?

D1.2 Se, mantenendo come punto di partenza il vertice A, assumiamo le direzioni di spostamento nell'ordine AD e AB, quali sono le coppie di numeri che individuano in questo nuovo riferimento le tre palline?

D1.3 **Se fissiamo come punto di partenza il vertice C e le direzioni di spostamento nell'ordine CB e CD, quali coppie di numeri individuano in questo riferimento le tre palline?**

La coppia di numeri che individua la posizione di un oggetto sul tavolo dipende quindi dal riferimento scelto.

In modo analogo, per individuare la posizione di un punto su di una superficie piana indefinita possiamo assumere come riferimento una coppia di rette tra loro perpendicolari (vedi fig. 1.3).

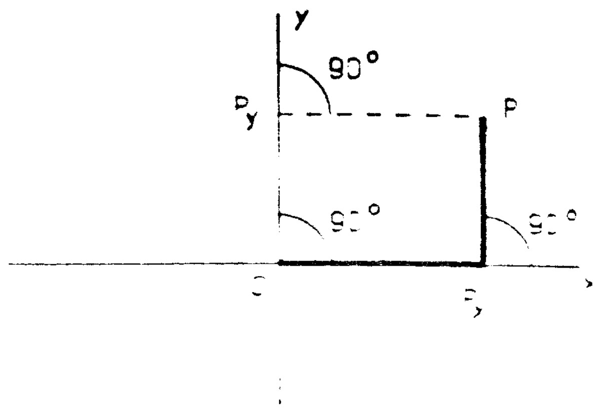


Figura 1.3

Tali rette sono indicate generalmente con le lettere x e y. Il punto di intersezione delle due rette è detto *origine* ed indicato con la lettera O.

Come nel caso delle palline sulla superficie del tavolo, un punto P del piano può essere individuato dagli spostamenti che è necessario compiere per andare dall'origine O al punto P, spostandosi dapprima lungo la retta x e quindi lungo una parallela alla retta y, oppure, cosa del tutto equivalente, dalla lunghezza dei due segmenti $\overline{OP_x}$ e $\overline{OP_y}$. È allora conveniente, *fissata un'unità di misura per la lunghezza*, segnare su entrambe le rette i punti la cui distanza dall'origine O è uguale a 1 *unità* di lunghezza, 2 *unità*, 3 *unità*.

ecc. (vedi fig. 1.4).

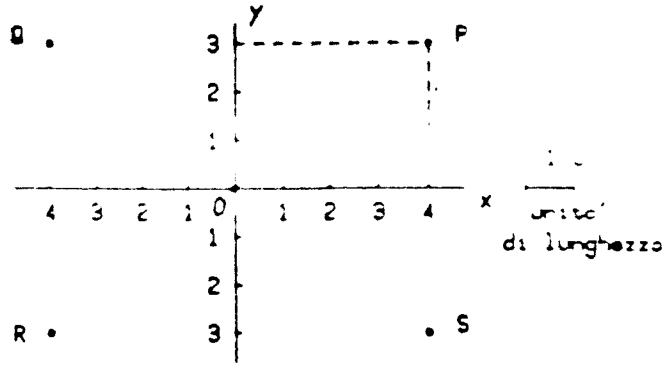


Figura 1.4

Tali punti possono essere indicati direttamente con le cifre 1, 2, 3 ecc..
Il punto P è così individuato dalla coppia di numeri (4,3) che, per quanto abbiamo visto, esprime, nell'unità di misura prefissata, la lunghezza dei segmenti $\overline{OP}_x$ e $\overline{OP}_y$.

Tuttavia, come si può ricavare facilmente dalla fig.1.4, anche i punti Q, R e S sono individuati dalla coppia di numeri (4, 3). Per evitare il fatto che una stessa coppia di numeri individui quattro punti distinti nel piano, possiamo fissare su ogni retta, mediante una freccia, un *verso* (o *senso*) di percorrenza (vedi fig. 1.5) e considerare positivi gli spostamenti che avvengono in tale

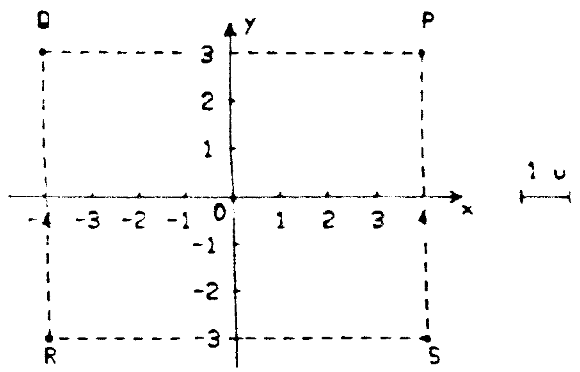


Figura 1.5

verso e negativi quelli in verso contrario.

In questo modo i punti P, Q, R e S sono ora individuati da *quattro coppie distinte* di numeri ciascuno con un proprio segno (*numeri relativi*):

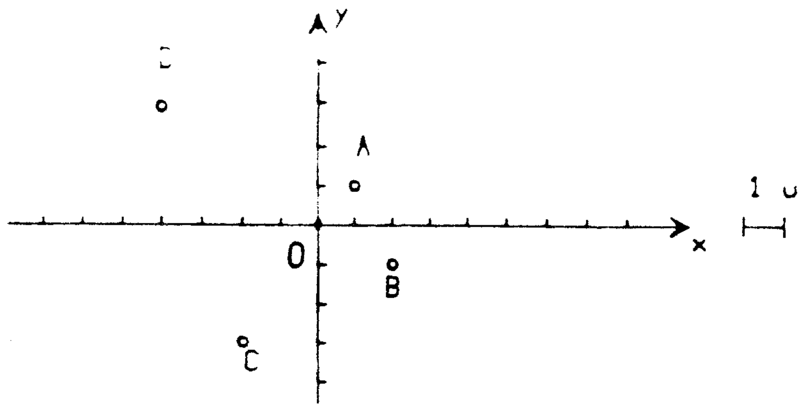
$P(+4,+3)$; $Q(-4,+3)$; $R(-4,-3)$; $S(+4,-3)$.

In generale, per semplicità, si tralascia di indicare il segno + e quindi scriveremo:

$P(4,3)$; $Q(-4,3)$; $R(-4,-3)$; $S(4,-3)$.

Le due rette orientate x e y sono dette ***assi*** e il sistema di riferimento così introdotto è detto ***sistema di assi cartesiani*** ed indicato con la notazione Oxy. I due numeri relativi (x,y) che individuano un punto del piano sono detti *coordinate* del punto. La coordinata x è anche detta *ascissa* e la coordinata y *ordinata*.

E1.1 Individuare nel sistema di assi cartesiani sotto riportato le coordinate dei punti A, B, C, e D e disegnare i punti di coordinate $E(-3,4)$, $F(2,-6)$.



E1.2 Fissato su un tavolo un sistema di assi cartesiani e preso come unità di misura il *centimetro*, trovare le coordinate di alcuni piccoli oggetti posti su tale tavolo.

Note le coordinate di un punto $A(x_A, y_A)$, è possibile calcolare la sua distanza dall'origine O. Infatti applicando al triangolo OA_xA, rettangolo in

A_x, il teorema di Pitagora si ottiene (vedi fig. 1.6)

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OA_x}^2 + \overline{A_xA}^2} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2} \qquad 1.1$$

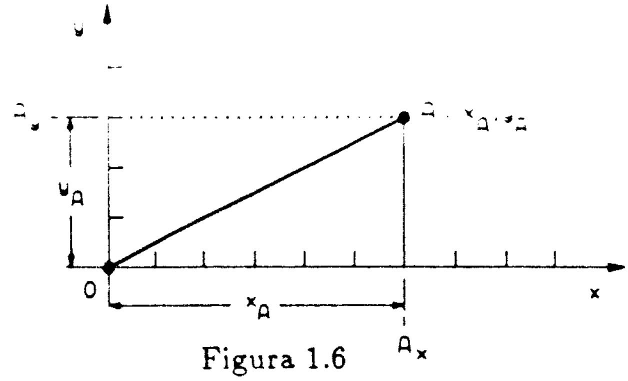


Figura 1.6

Ad esempio la distanza del punto P dall'origine nel sistema di assi cartesiani di fig. 1.5 è

$$\overline{OP} = \sqrt{(4u)^2 + (3u)^2} = \sqrt{16u^2 + 9u^2} = \sqrt{25u^2} = 5u$$

Se il punto si trova sull'asse delle ascisse, $A(x_A, 0)$, abbiamo $\overline{OA} = \sqrt{x_A^2} = |x_A|$, cioè la distanza dall'origine è data dal valore assoluto della coordinata x_A.

Note le coordinate di due punti $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$, è possibile ottenere la loro distanza. Infatti applicando il teorema di Pitagora al triangolo AHB si ottiene (vedi fig. 1.7)

$$\overline{AB} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HB}^2} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} \qquad 1.2$$

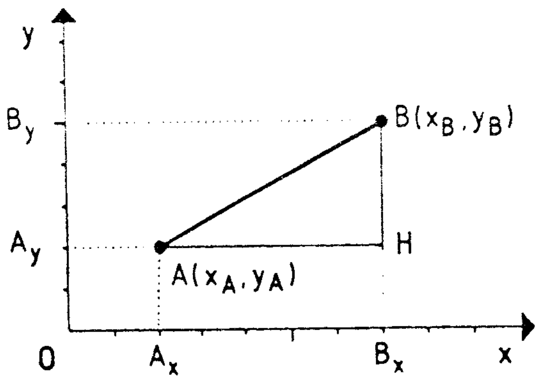
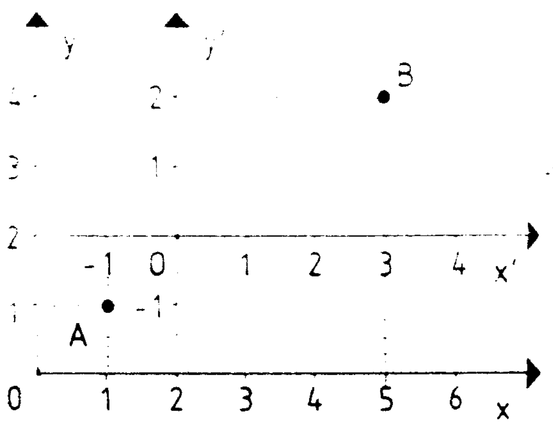


Figura 1.7

E1.3 **Calcolare le distanze $\overline{PQ}$ e $\overline{PR}$ tra i punti P, Q e P, R di fig. 1.5.**

E1.4 **Disegnare su di un foglio di carta bianca un sistema di assi cartesiani con l'origine nel centro del foglio, assumendo come unità di misura delle lunghezze il *centimetro*.**
Trovare i punti del foglio di coordinate $A(10,5)$, $B(10,-5)$, $C(-8,-8)$ e $D(-8,-8)$. Calcolare mediante la relazione 1.2 le distanze $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ e verificare mediante un 'doppio decimetro' i risultati ottenuti.
Calcolare infine il perimetro e l'area del trapezio $ABCD$.

Consideriamo ora due distinti sistemi di assi cartesiani Oxy e $O'x'y'$. Assumiamo in entrambi come unità di misura il *centimetro* (vedi fig. 1.8). Le coordinate dei punti A e B sono rispettivamente



$A(1,1)$, $B(5,4)$ in Oxy

$A(-1,-1)$, $B(3,2)$ in $O'x'y'$

1cm

Figura 1.8

Calcoliamo ora la distanza $\overline{AB}$.

Nel sistema Oxy abbiamo

$$\overline{AB} = \sqrt{(5cm - 1cm)^2 + (4cm - 1cm)^2} = \sqrt{16cm^2 + 9cm^2} = 5cm$$

Nel sistema $O'x'y'$ abbiamo

$$\overline{AB} = \sqrt{[3cm - (-1cm)]^2 + [2cm - (-1cm)]^2} =$$

$$= \sqrt{(3cm + 1cm)^2 + (2cm + 1cm)^2} = \sqrt{16cm^2 + 9cm^2} = 5cm$$

La distanza tra due punti non dipende, **come è logico aspettarsi,** ***dal sistema di riferimento utilizzato*** **per individuare i punti stessi.**

Per individuare la posizione di un punto nello *spazio* è necessario introdurre un sistema di tre assi cartesiani x, y, z a due a due tra loro perpendicolari (vedi fig. 1.9) e dare nell'ordine la misura dei tre segmenti $\overline{OP_x}$, $\overline{OP_y}$, $\overline{OP_z}$.

Per individuare gli estremi P_x e P_y dei segmenti $\overline{OP_x}$ e $\overline{OP_y}$ bisogna dapprima tracciare da P la perpendicolare al piano xy. Indicato con H il punto in cui tale perpendicolare incontra il piano, si tracciano da H le perpendicolari agli assi x e y. I punti di incontro di tali perpendicolari con i due assi sono rispettivamente i punti P_x e P_y. Per ottenere il punto P_z è sufficiente tracciare da P la perpendicolare all'asse z. Come si vede in fig. 1.9 i tre segmenti $\overline{OP_x}$, $\overline{OP_y}$, $\overline{OP_z}$ rappresentano gli spigoli di un cubo che ha come vertici opposti i punti O e P.

Le tre coordinate (x, y, z) sono dette rispettivamente *ascissa* (x), *ordinata* (y) e *quota* (z), in quanto di solito si fa coincidere il piano individuato dagli assi x, y con il *piano orizzontale* e l'asse z con la *direzione verticale*.

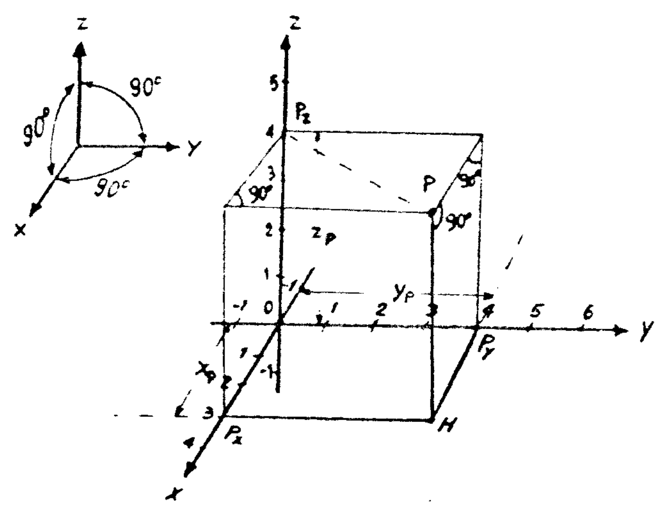
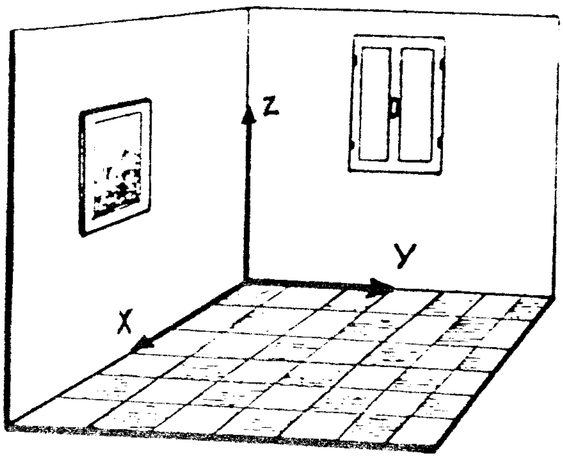


Figura 1.9

Nel sistema di assi cartesiani di fig. 1.9 le coordinate del punto P sono $P(3,4,4)$. Infatti per andare dall'origine O al punto P dobbiamo spostarci di 3 *unità* nella direzione positiva dell'asse x, di 4 *unità* nella direzione positiva dell'asse y e di 4 *unità* nella direzione positiva dell'asse z.

In pratica per individuare le tre coordinate di un punto si cala dal punto P la verticale (ad esempio con un filo a piombo) sul piano xy (che supponiamo orizzontale) e si individua il punto H in cui tale verticale interseca il piano xy. La distanza $\overline{PH}$ rappresenta la quota z. Si trovano quindi le coordinate x e y del punto H che sono anche le coordinate x, y di P.

E1.5 Trovare le coordinate cartesiane di alcuni piccoli oggetti che si trovano nella vostra aula assumendo come assi cartesiani tre spigoli tra loro concorrenti (vedi la figura sotto riportata) e come unità di misura il metro (o il piede o la piastrella).



Per trovare la distanza del punto $A(x_A, y_A, z_A)$ dall'origine degli assi applichiamo dapprima il teorema di Pitagora al triangolo AHO rettangolo in H(vedi fig. 1.10). Si ottiene

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{OH}^2 + \overline{HA}^2}$$

Essendo, per quanto abbiamo già visto,

$$\overline{OH} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}$$

abbiamo

$$\overline{OA} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2 + z_A^2} \qquad 1.3$$

Analogamente si può mostrare che la distanza tra due punti A e B dello spazio le cui coordinate, in un sistema di assi cartesiani, sono rispettivamente

$$A(x_A, y_A, z_A) \qquad e \qquad B(x_B, y_B, z_B)$$

è data da

$$\overline{AB} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \qquad 1.4$$

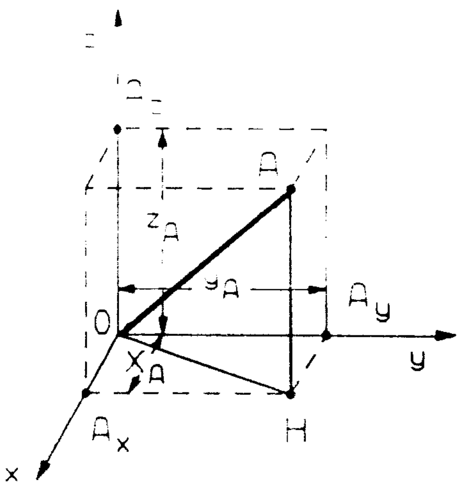


Figura 1.10

E1.6 Trovare la distanza tra alcuni piccoli oggetti che si trovano nella vostra aula, trovandone dapprima le coordinate rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano e quindi utilizzando la relazione 1.4. Verificare i risultati con una misura diretta delle distanze.

2. Rappresentazioni in scala

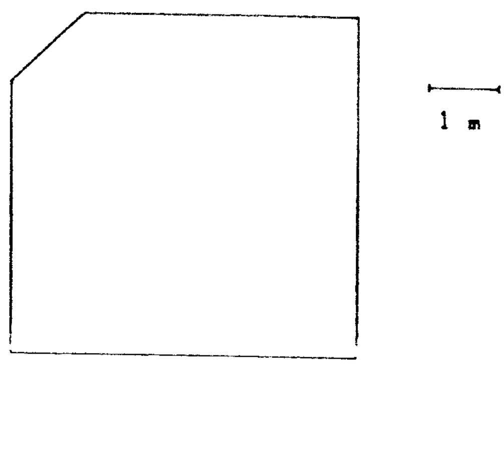
Supponiamo di dover scrivere ad un amico lontano per descrivergli come è fatta la piazza del nostro paese. Se essa ha la forma di una figura geometrica regolare il compito è molto semplice. Possiamo infatti scrivere:

"La piazza del mio paese ha forma rettangolare e i lati misurano rispettivamente $22m$ e $25,5m$."

Se la forma è invece irregolare, il modo più semplice è quello di inviare all'amico *la pianta* della piazza, cioè un disegno nel quale sono riportati i contorni della piazza. Tale disegno deve però essere fatto su un foglio di carta di dimensioni molto più piccole di quelle della piazza. È necessario quindi eseguire una riduzione proporzionale di tutte le distanze, ad esempio dividendole per un fattore 100. Così un lato della piazza che nella realtà è lungo 22 *metri*, nel disegno diventa $22m : 100 = 0.22m = 22cm$. Viceversa una distanza che sulla carta risulta $1cm$ corrisponde in realtà a $1cm \times 100 = 100cm = 1m$.

Il fattore di riduzione, detto anche *scala di riduzione* o semplicemente *scala*, deve essere sempre riportato sul disegno, indicandolo in modo numerico (scala 1 : 100) oppure graficamente ($\vdash\!\!\dashv$ $1m$).

D2.1 Determinare la lunghezza dei lati della stanza di cui è riportata nel disegno la pianta in scala 1 : 100.



D2.2 Determinare l'area della stanza della domanda precedente.

Altre volte può succedere di dover descrivere un oggetto molto piccolo. In questo caso conviene fare un disegno *ingrandito* dell'oggetto, riportando a fianco del disegno il fattore di *ingrandimento*, cioè il fattore numerico per il quale sono state moltiplicate tutte le dimensioni dell'oggetto. Anche in questo caso il fattore di ingrandimento è detto *scala di ingrandimento* o semplicemente *scala* e può essere indicato graficamente (vedi fig. 2.1).

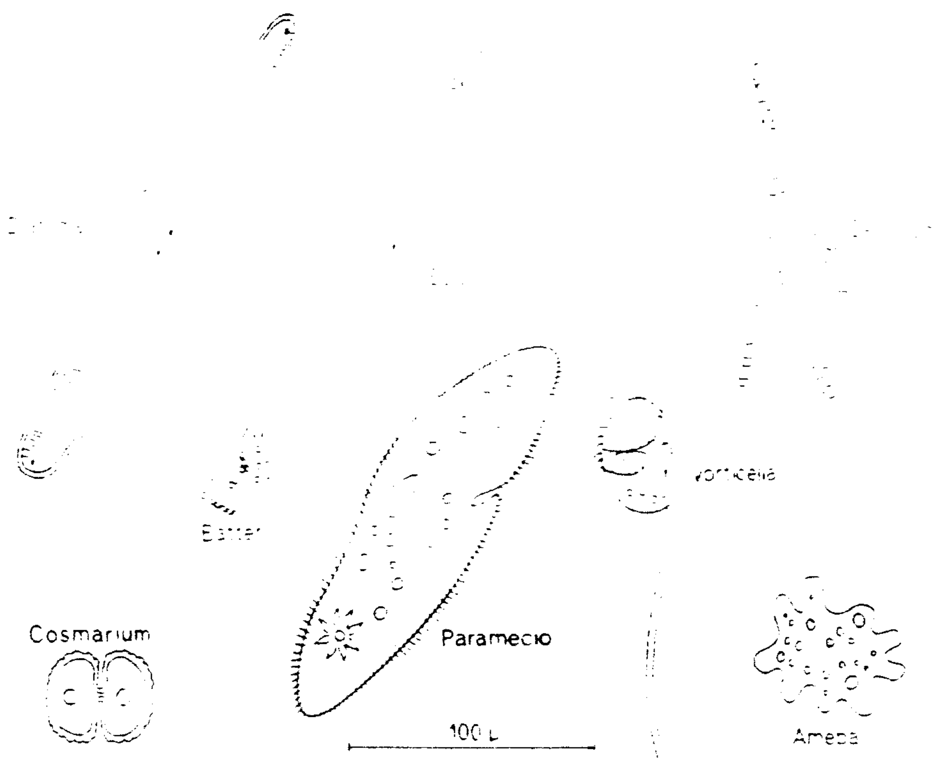


Figura 2.1

Spesso quando riportiamo su di un foglio un sistema di assi cartesiani ci riferiamo ad una rappresentazione in scala di una situazione reale. In questo caso accanto agli assi è indicato il valore dell'unità di misura reale.

Consideriamo ad esempio il sistema di assi cartesiani riportato in fig. 2.2. In esso l'unità di misura delle lunghezze riportate sugli assi corrisponde in realtà ad una lunghezza di $1km$.

Così la distanza tra i punti A e B risulta in realtà

$$\overline{AB} = \sqrt{(3km - 1km)^2 + (4km - 2km)^2} =$$

$$= \sqrt{4km^2 + 4km^2} = \sqrt{8km^2} \simeq 2,8km$$

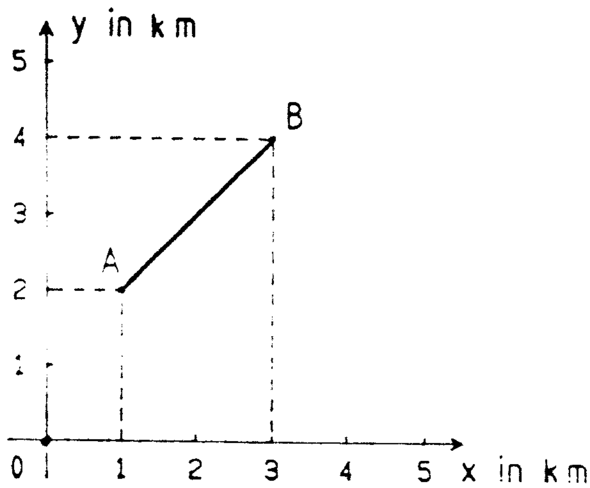
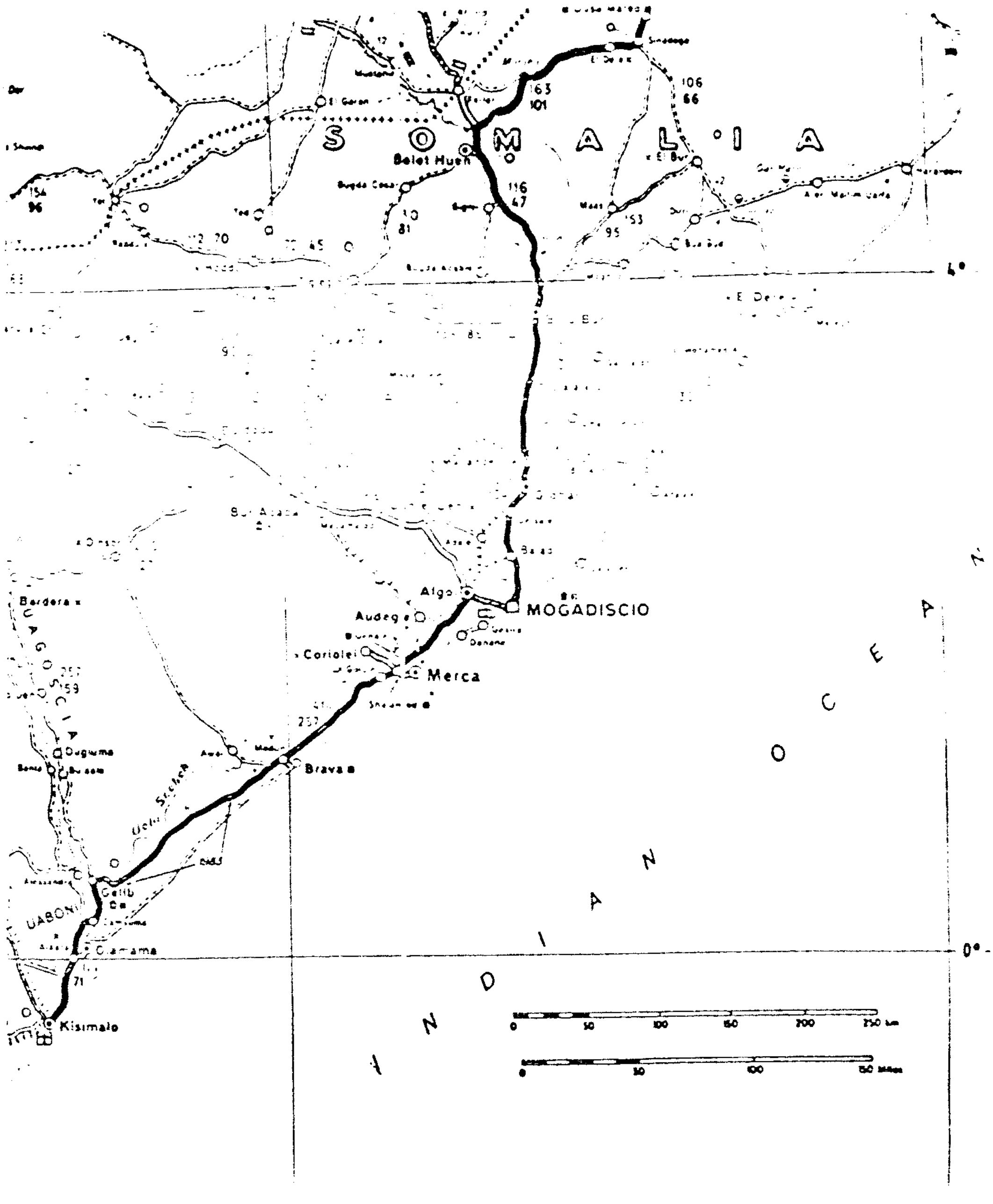


Figura 2.2

E2.1 Le coordinate dei vertici di un campo a forma quadrangolare, in un determinato sistema di assi cartesiani, risultano:
$A(0,0)$; $B(12,0)$; $C(15,8)$; $D(0,10)$.
L'unità di misura è il *metro*. Determinare l'area della superficie del campo. (Si consiglia di disegnare un sistema di assi cartesiani in scala ridotta e suddividere il campo in parti aventi forma geometrica semplice).

E2.2 Utilizzando la carta geografica sotto riportata determinare le distanze Mogadiscio-Belet Huen, Mogadiscio-Kisimaio, Kisimaio-Belet Huen e confrontarle con le lunghezze, riportate sulla cartina, della strada che bisogna percorrere per andare da una città all'altra.
Calcolare l'area della superficie del territorio somalo compreso tra l'Oceano Indiano, il 4° parallelo e il 44° meridiano.



3. Traiettoria e spazio percorso

Come abbiamo visto, per descrivere il movimento di un oggetto dobbiamo riferirci ad un particolare sistema di riferimento. ***Rispetto a tale riferimento, un oggetto è in movimento quando la sua posizione cambia nel tempo.***

Nella fig. 3.1 sono riportate tre fotografie, scattate in istanti successivi, della superficie di un tavolo sul quale si trovavano tre palline: una bianca, una nera ed una metà bianca e metà nera.

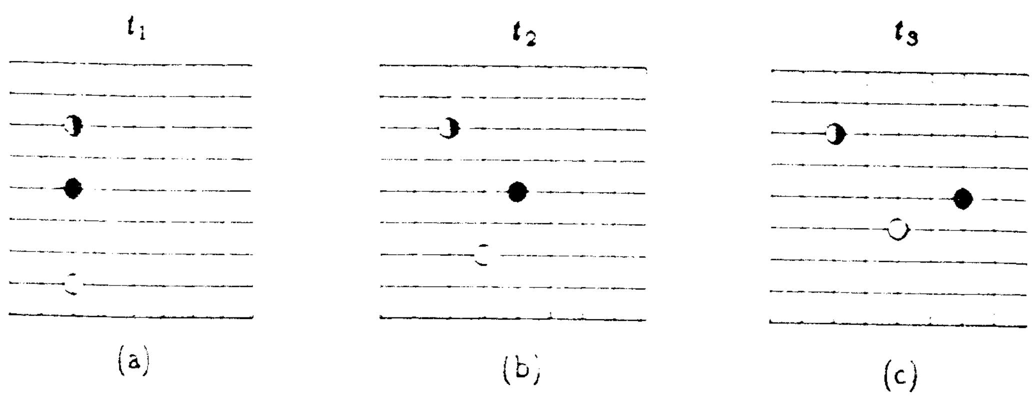


Figura 3.1

Due palline hanno cambiato nel tempo la loro posizione e quindi erano in movimento.

D3.1 Quali palline si muovevano mentre venivano scattate le fotografie?

Facciamo ora muovere lentamente su di un foglio di carta bianca un pezzetto di carbone. Esso lascia sul foglio una linea nera (vedi fig. 3.2) che

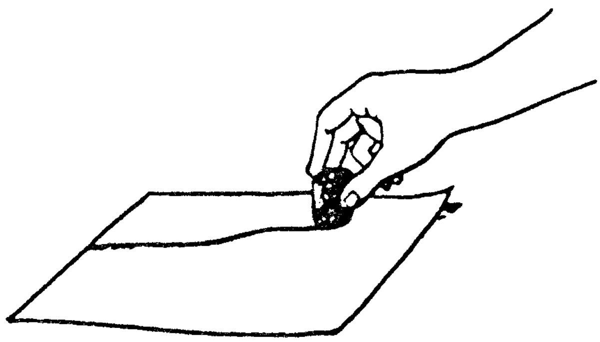


Figura 3.2

indica il percorso compiuto dal carbone durante il movimento. Chiameremo tale linea *traiettoria*.

La traiettoria può essere *rettilinea* (vedi fig. 3.3a) o *curvilinea* (vedi fig. 3.3b).

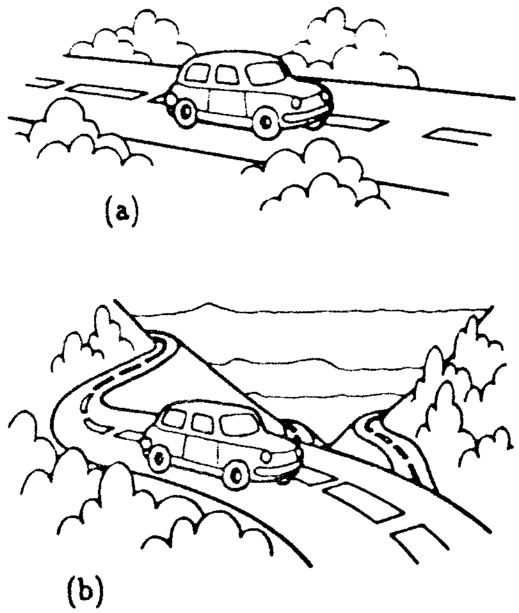


Figura 3.3

Se la traiettoria descritta da un oggetto è una linea retta, si dice che l'oggetto si muove di *moto rettilineo*.

D3.2 **Assumendo che le palline si siano mosse di moto rettilineo, disegnare sulla fig. 3.1c le traiettorie descritte dalla pallina bianca e da quella nera.**

Non sempre è vero che il moto di un oggetto individui una traiettoria. Per ogni oggetto *esteso* (come ad esempio per la chiave inglese il cui moto è mostrato nella fig. 3.4 mediante una serie di fotografie scattate ad istanti successivi) non si può parlare di traiettoria: ogni suo punto, infatti, segue una traiettoria diversa da quella degli altri punti; si deve quindi definire una traiettoria per ciascun punto dell'oggetto.

Figura 3.4

Vi sono tuttavia molte situazioni in cui si può ritenere che il moto di un oggetto individui un'unica traiettoria nello spazio; ciò avviene tutte le volte che un oggetto compie spostamenti molto maggiori delle dimensioni che lo caratterizzano. Ad esempio, chi osserva il moto di un'automobile da un elicottero può certamente indicare le successive posizioni dell'automobile mediante un punto su una carta geografica e può perciò affermare che la traiettoria dell'automobile è definita da una linea continua: l'automobile osservata dall'alto appare come un punto e il moto delle sue parti (carrozzeria, ruote, pistoni, ecc.) non è percepibile (vedi fig. 3.5). In casi come questo si dice che l'oggetto di cui si studia il moto può essere trattato come un *oggetto puntiforme* (o *punto materiale*).

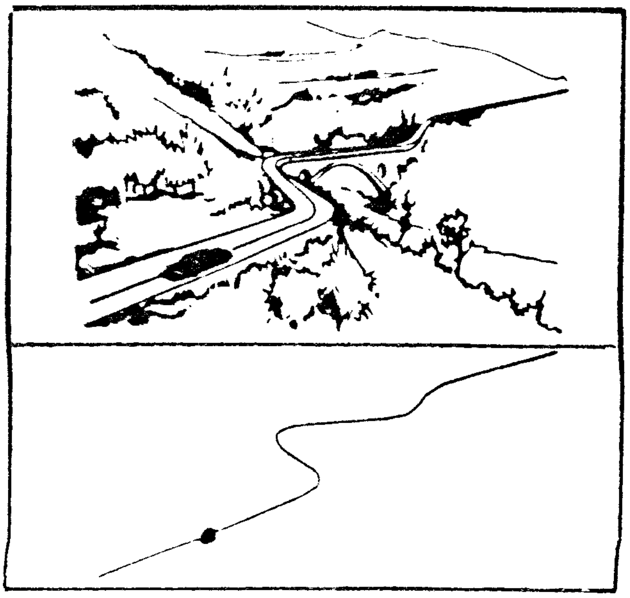
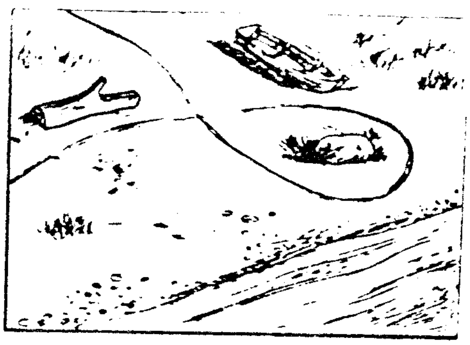


Figura 3.5

La trattazione del moto degli oggetti puntiformi è molto più semplice di quella del moto degli oggetti estesi: perciò ci occuperemo solo di oggetti trattabili come puntiformi. A questo riguardo, si presti attenzione all'uso che qui si fa della parola *puntiforme* e non ci si faccia trarre in inganno dal suo significato nel linguaggio comune (equivalente a quello di molto piccolo). Noi intendiamo che *un oggetto si può trattare come puntiforme quando esso compie moti durante i quali i suoi spostamenti sono molto maggiori delle sue dimensioni*. La Terra, ad esempio, quando descrive il moto attorno al Sole, può essere trattata come un oggetto puntiforme: infatti il suo diametro è circa 12700 km, mentre il diametro medio della sua orbita attorno al Sole è circa 300 *milioni* di *kilometri*, cioè più di 20000 volte maggiore.

D3.3 **Nella figura è riportato il disegno di un tratto di spiaggia sul quale è passato un ragazzo in bicicletta. È possibile dire da quale parte veniva il ragazzo? Supponendo che il ragazzo venisse dal punto A, descrivere a parole il movimento del ragazzo in base alla traccia lasciata sulla sabbia riferendosi agli oggetti presenti.**



Conoscere la traiettoria di un oggetto in movimento vuol dire *solo* conoscere le diverse posizioni che l'oggetto ha occupato nello spazio durante il moto. Per descrivere completamente il movimento dobbiamo ancora indicare la posizione dell'oggetto lungo la traiettoria a diversi istanti di tempo.

Per fare ciò possiamo fissare sulla traiettoria un'origine O (ad esempio il punto di partenza) e individuare la posizione P dell'oggetto ad un certo istante di tempo indicando lo spazio s che è necessario percorrere, lungo la traiettoria, per andare dall'origine O al punto P in cui si trova l'oggetto.

Lungo molte strade che 'escono' dalle città si trovano delle indicazioni che ci danno in *kilometri* le distanze dal centro della città. Quando diciamo che un'automobile si trova al $4°km$ lungo la strada Mogadiscio-Afgoi, noi individuiamo in modo preciso la posizione dell'automobile.

D3.4 Determinare nel caso del moto della pallina nera, mostrato in fig. 3.1, le posizioni della pallina lungo la traiettoria agli istanti t_1, t_2 e t_3 assumendo come origine la posizione al tempo t_1 e come unità di lunghezza il lato di un quadratino.
Rispondere alla stessa domanda nel caso della pallina bianca.
Cosa si può dire relativamente alla pallina metà bianca e metà nera?

4. Velocità

Per indicare quanto 'rapidamente' si muove un oggetto introduciamo il concetto di *velocità*.

D4.1 Due automobili A e B partono insieme dal centro di Mogadiscio verso Afgoi. Dopo 10 *minuti* l'automobile A si trova al 4° *km* mentre l'automobile B si trova al 8° *km*. Quale automobile si è mossa con velocità maggiore?

D4.2 Due automobili A e B partono insieme dal centro di Mogadiscio verso Afgoi. L'automobile B arriva al 8° *km* dopo 10 *minuti* mentre l'automobile A arriva al 8° *km* dopo 20 *minuti*. Quale automobile si è mossa con velocità maggiore?

D4.3 Quale delle due palline, il cui moto è mostrato in fig. 3.1, si è mossa con maggior velocità?

Anche se il concetto di velocità è molto usato nel linguaggio comune e il suo senso è intuitivo, in Fisica la velocità è una grandezza e quindi deve essere definita in modo chiaro ed univoco. Consideriamo allora i seguenti semplici problemi.

Se un'automobile viaggia con una velocità di 60 *kilometri all'ora* (cioè se essa percorre in 1 *ora* 60 *kilometri*), in 2 *ore* essa percorre

$$60 \; kilometri \; all'ora \times 2 \; ore = 120 \; kilometri$$

Se un'automobile viaggia con una velocità di 60 *kilometri all'ora*, per percorrere 180 *kilometri* impiega

$$\frac{180 \; kilometri}{60 \; kilometri \; all'ora} = 3 \; ore$$

Nell'ottenere i due risultati precedenti abbiamo supposto che l'automobile si muova per tutto il tempo con la stessa velocità, cioè che la sua velocità sia *costante*.

Possiamo quindi concludere che, *se un oggetto si muove con velocità* *costante v*, tra lo spazio Δs(*) percorso lungo la traiettoria e il tempo Δt impiegato a percorrerlo esiste la seguente relazione

$$\Delta s = v \cdot \Delta t \qquad 4.1$$

oppure la relazione equivalente

$$\Delta t = \Delta s / v \qquad 4.2$$

Dalla 4.1 o dalla 4.2 si ottiene

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad 4.3$$

Questa relazione ci permette di definire la velocità nel caso in cui essa sia costante durante il moto: *la velocità è il rapporto tra lo spazio percorso e l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo.*

Se un oggetto si muove con velocità costante diciamo che esso si muove di *moto uniforme*. L'oggetto in un moto uniforme percorre *spazi uguali in intervalli di tempo uguali*.

La velocità, che è un rapporto tra una lunghezza e un tempo, si può misurare, oltre che in *kilometri all'ora* (che indicheremo con km/h), in *miglia all'ora* (mi/h), in *metri al secondo* (m/s) o in *centimetri al secondo* (cm/s).

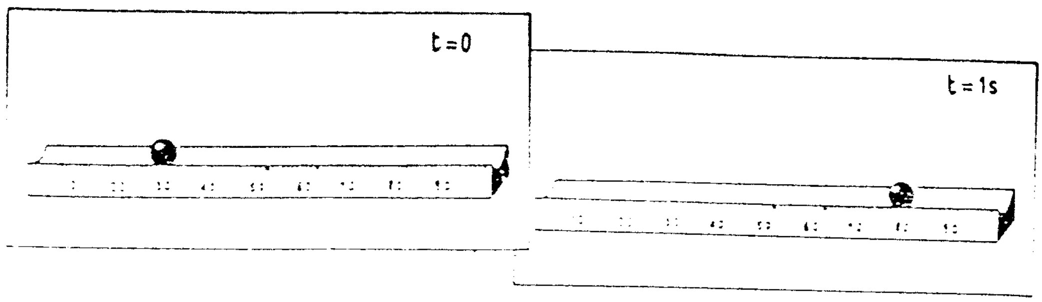
Osserviamo che il *miglio* (*terrestre*) usato in alcuni paesi di lingua inglese vale 1609 m e non deve essere confuso con il *miglio marino* (vedi la fine di questo paragrafo) che vale 1852 m e con il *miglio geografico* (vedi Parte B, cap.I, § 2) che vale $1853,2\ m$.

(*) - Il simbolo Δ (che si legge *delta*) non è una quantità algebrica che moltiplica s o t, ma una abbreviazione per indicare una differenza, cioè $\Delta s = s_2 - s_1$ e $\Delta t = t_2 - t_1$, dove s_1 e s_2 sono le posizioni dell'oggetto sulla traiettoria ai tempi t_1 e t_2.

D4.4 Ha senso dire che un oggetto si muove con una velocità $v = 15$?

La relazione 4.3 ci suggerisce anche come eseguire la misura della velocità con cui si muove un oggetto. Si può procedere in due modi.

a. Si misura lo spazio percorso dall'oggetto in un determinato intervallo di tempo. Ad esempio si scattano due fotografie con un intervallo di tempo di 1 *secondo* (vedi fig. 4.1).



$\Delta s = 80\ cm - 30\ cm = 50\ cm$ $\qquad v = \dfrac{50cm}{1s} = 50\ cm/s$ (*)

$\Delta t = 1s - 0 = 1s$

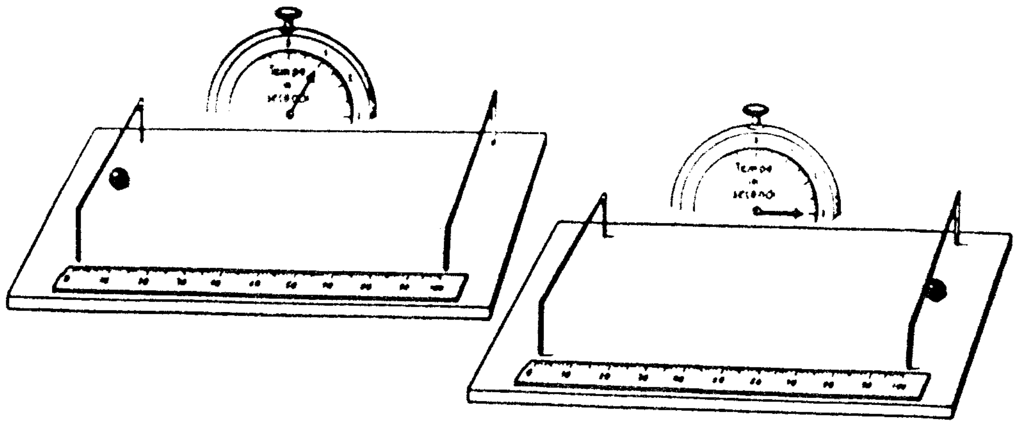
Figura 4.1

D4.5 Se le fotografie riportate in fig. 3.1 sono state scattate con un intervallo di tempo di $1s$ e i quadratini hanno il lato lungo $5cm$, qual è la velocità con cui si sono mosse le tre palline?

b. Si misura il tempo trascorso tra i passaggi dell'oggetto attraverso

(*) - In questa parte del testo supporremo che tutti i dati siano sufficientemente precisi da poter essere scritti con tre cifre significative. Così, se diciamo che un oggetto percorre uno spazio $\Delta s = 5m$, si intende che lo spazio percorso è $5,00m$. Analogamente, se l'intervallo di tempo è $1s$, si intende che il suo valore è $1,00s$.

due traguardi separati da uno spazio Δs, ad esempio 1 *metro* (vedi fig. 4.2).

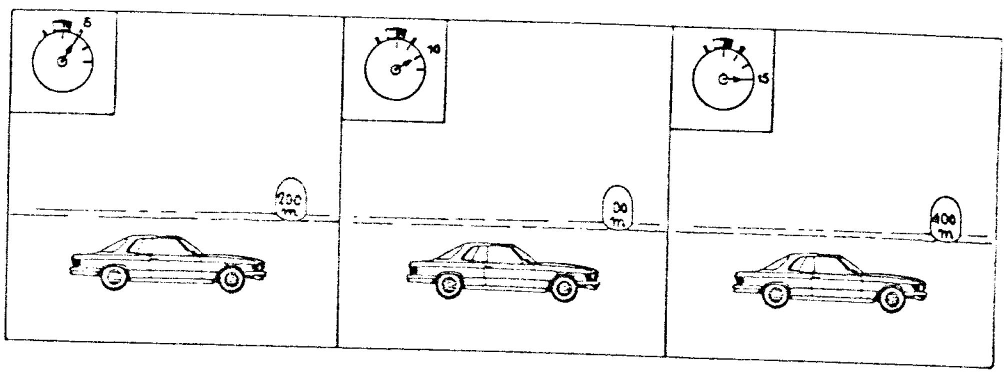


$\Delta t = 3s - 1s = 2s$

$$v = \frac{100cm}{2s} = 50\ cm/s$$

Figura 4.2

D4.6 Osservando le figure sotto riportate e assumendo che l'automobile si muova di moto uniforme, determinare la posizione segnata sulla pietra miliare della figura b.



(a) (b) (c)

Se un oggetto si muove con velocità costante $v = 1\ km/h$ vuol dire che esso percorre uno spazio$\Delta s = 1000m$ in un intervallo di tempo $\Delta t = 3600s$. Quindi

$$1\ km/h = 1000m/3600s = \frac{1}{3.6} m/s \simeq 0,278\ m/s$$

Viceversa

$$1\ m/s = 10^{-3} km/(1/3600)h = 3,6\ km/h$$

Per passare da una velocità espressa in km/h alla stessa velocità espressa in m/s bisogna moltiplicare per il fattore $0,278$ (oppure dividere per $3,6$), mentre per passare dai m/s ai km/h bisogna moltiplicare per $3,6$.

E4.1 Si completi la tabella dei fattori di conversione ricordando che $1mi = 1609m$.

	m/s	cm/s	km/h	mi/h
m/s	1		3,6	
cm/s		1		
km/h	0,278		1	
mi/h				1

E4.2 Un'automobile si muove con una velocità di $100 km/h$. Trovare la sua velocità in mi/h e in m/s.

E4.3 Un aereo si muove ad una velocità di $200m/s$. Trovare la sua velocità in km/h e in mi/h.

E4.4 Sulla base dei dati qui elencati completare la tabella riportata più sotto:

a. Un atleta nuotando percorre 100 *metri* in circa 1 *minuto.*
b. Un uomo a passo normale percorre 5 *kilometri* in circa 50 *minuti.*
c. Un atleta in corsa percorre $100m$ in circa 10 *secondi.*
d. Un'automobile percorre 100 *kilometri* in circa 1 *ora.*
e. Un aereo per venire da Roma a Mogadiscio ($\Delta s = 5500km$) impiega circa 7 *ore* di volo.
f. Il rumore provocato dalla esplosione di una bomba a $3000m$ di distanza da noi ci giunge dopo circa 10 *secondi.*
g. La Terra, per percorrere la sua orbita intorno al Sole, impiega, come è noto, 1 *anno.* L'orbita è quasi circolare e il raggio vale $1,50 \cdot 10^8$ *kilometri.*
h. L'astronomo danese O.Römer ha trovato nel 1675 che la luce per percorrere uno spazio pari al diametro dell'orbita della Terra impiega circa 17 *minuti.*

	v in m/s	v in km/h
Uomo in acqua		
Uomo che cammina		
Atleta che corre		
Automobile		
Aereoplano		
Suono		
Terra intorno al Sole		
Luce		

Anticamente per misurare la velocità di una nave si utilizzava una fune sulla quale erano stati fatti dei nodi ad una distanza $d = 15,43\ m$ l'uno dall'altro. Ad un capo della fune era fissata una boa galleggiante.

Il marinaio che eseguiva la misura gettava la boa in acqua e contava il numero di nodi che scorrevano in *mezzo minuto* attraverso la sua mano. Supponiamo che in una misura abbia contato in *mezzo minuto* 10 nodi; otteniamo allora per la velocità della nave

$$v = \frac{10 \cdot 15,43m}{30s} = 5,14\ m/s$$

Ricordando che 1 *miglio marino* (da non confondere con il *miglio geografico* pari a 1853,2 m) è uguale a 1852 m, si ha

$$\frac{1\ miglio\ marino}{1\ ora} = \frac{1852m}{3600s} = 0,514\ m/s$$

Pertanto la velocità della nave risulta anche

$$v = 5,14\ m/s = 10\ \frac{miglia\ marine}{ora}$$

Cioè il numero di nodi che scorrono in *mezzo minuto* attraverso la mano fornisce direttamente il valore della velocità in *miglia marine/ora*. Per questo motivo nella navigazione si introduce come unità di misura della velocità il *nodo*, che equivale appunto ad 1 *miglio marino/ora*.

D4.7 A quale distanza dovrebbero trovarsi i nodi affinchè il numero di nodi che scorrono in *mezzo minuto* fornisca direttamente il valore della velocità in km/h?

E4.5 Valutare il tempo necessario per una nave da carico che viaggia ad una velocità di 10 *nodi* per andare dal porto di Kisimaio a quello di Mogadiscio, utilizzando la carta geografica riportata nell'esercizio E2.2.

5. Velocità media

Abbiamo visto che se un oggetto si muove con velocità costante il rapporto

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad 5.1$$

fornisce il valore della sua velocità.

Ma se durante l'intervallo di tempo in cui eseguiamo la misura la velocità con cui si muove l'oggetto cambia di valore, che cosa ci fornisce il rapporto 5.1?

Consideriamo ad esempio un oggetto che si muove per un intervallo di tempo Δt_1 con velocità costante v_1 e per l'intervallo di tempo successivo Δt_2 con velocità costante v_2. Gli spazi che l'oggetto percorre nei due intervalli di tempo sono

$$\Delta s_1 = v_1 \Delta t_1$$

e

$$\Delta s_2 = v_2 \Delta t_2$$

Nell'intervallo di tempo complessivo

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$$

l'oggetto ha quindi percorso uno spazio

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2$$

Abbiamo allora

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{v_1 \Delta t_1 + v_2 \Delta t_2}{\Delta t} = v_1 \frac{\Delta t_1}{\Delta t} + v_2 \frac{\Delta t_2}{\Delta t} \qquad 5.2$$

Il rapporto $\Delta s/\Delta t$ ci fornisce quindi la *media pesata* delle velocità con cui si muove l'oggetto, nel senso che ogni valore della velocità (ad esempio v_1) viene moltiplicato, cioè 'pesato', per un fattore uguale al rapporto tra l'intervallo di tempo in cui l'oggetto si muove con quella determinata velocità e l'intervallo di tempo totale (nel nostro caso $\Delta t_1/\Delta t$).

Definiamo allora in generale *velocità media* di un oggetto in un intervallo di tempo Δt il rapporto

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad 5.3$$

dove Δs è lo spazio percorso lungo la traiettoria nell'intervallo di tempo Δt.

Per esempio, se un oggetto si muove per un intervallo di tempo $\Delta t_1 = 50s$ ad una velocità $v_1 = 20m/s$ e per un intervallo di tempo $\Delta t_2 = 10s$ ad una velocità $v_2 = 10m/s$, la velocità media risulta

$$v_m = 20m/s \cdot \frac{50s}{60s} + 10m/s \cdot \frac{10s}{60s} = \frac{1100}{60} m/s = 18.3\ m/s$$

Per risolvere il problema possiamo anche calcolare lo spazio totale percorso

$$\Delta s = 20m/s \cdot 50s + 10m/s \cdot 10s = 1100\ m$$

e quindi calcolare v_m dividendo lo spazio totale percorso per il tempo impiegato a percorrerlo

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{1100m}{60s} = 18,3\ m/s$$

Il valore della velocità media v_m che abbiamo trovato è più vicino a $v_1 = 20m/s$ che non a $v_2 = 10m/s$ in quanto l'oggetto si è mosso con velocità v_1 per un intervallo di tempo Δt_1 maggiore dell'intervallo di tempo Δt_2 durante il quale si è mosso con velocità v_2 ($\Delta t_1 > \Delta t_2$).

Se i due intervalli di tempo sono uguali, cioè se $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_0$, si ha

$$v_m = v_1 \frac{\Delta t_0}{2\Delta t_0} + v_2 \frac{\Delta t_0}{2\Delta t_0} = \frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

In questo caso la velocità media coincide con il valor medio delle due velocità.

Se nell'intervallo di tempo Δt la velocità non è variata, la velocità media coincide con la velocità costante con cui l'oggetto si è mosso.

D5.1 Un'automobile si muove per 10 *minuti* a $60km/h$ e per altri 10 *minuti* a $80km/h$. Calcolare la velocità media.

D5.2 Se una persona percorre prima $100m$ in $20s$ e poi altri $92m$ in $12s$, che velocità media ha tenuto lungo tutto il percorso?

In generale se un oggetto si muove per più intervalli di tempo Δt_1, Δt_2, Δt_3, ... a velocità diverse abbiamo

$$v_m = v_1 \frac{\Delta t_1}{\Delta t} + v_2 \frac{\Delta t_2}{\Delta t} + v_3 \frac{\Delta t_3}{\Delta t} + \ldots$$

dove $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \ldots$; oppure

$$v_m = \frac{\Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \ldots}{\Delta t_1 + \Delta t_2 + \Delta t_3 + \ldots}$$

D5.3 Un ragazzo parte dal $7°km$ diretto a Mogadiscio. Dopo *mezz'ora* arriva al $4°km$ e lì si ferma per 10 *min*. Riparte e percorre $2km$ di corsa in 10 *min*. Incontra un amico e si ferma a parlare per 20 *min*. Riprende quindi il cammino e percorre gli ultimi $2km$ in 20 *min*. Quale è stata la sua velocità media lungo tutto il percorso?

Consideriamo ora la seguente situazione.

Per andare in un paese distante 80 *kilometri* un automobilista A viaggia per i primi 40 *kilometri* ad una velocità $v_1 = 80km/h$ e per i secondi 40 *kilometri* ad una velocità $v_2 = 40km/h$.

L'automobilista A impiega un tempo

$$\Delta t_1 = \frac{40km}{80km/h} = 0,5h$$

per il primo tratto di percorso e un tempo

$$\Delta t_2 = \frac{40km}{40km/h} = 1h$$

per il secondo tratto. Impiega quindi un tempo $\Delta t = 1.5h$ per percorrere lo spazio $\Delta s = 80\ km$ e la sua velocità media è

$$v_m = \frac{80km}{0,5h + 1h} \simeq 53\ km/h$$

(Osserviamo che tale valore è più piccolo del valore medio delle due velocità; infatti l'automobilista ha viaggiato per *un'ora* a $40km/h$ e solo per *mezz'ora* a $80km/h$).

Supponiamo poi che un secondo automobilista B sia partito insieme all'automobilista A e abbia viaggiato sempre ad una velocità costante v uguale alla velocità media v_m dell'automobilista A. Esso arriva al paese dopo un intervallo di tempo

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v} = \frac{80km}{53km/h} = 1,5h$$

cioè *insieme* all'automobilista B!

Possiamo quindi dire che se un oggetto si muove in un certo intervallo di tempo Δt con una velocità variabile, *la velocità media è la velocità costante* ***con cui dovrebbe muoversi per compiere lo stesso percorso nello stesso intervallo di tempo.***

D5.4 Trovare qual è lo spazio tra i due automobilisti dopo $1h$ dalla partenza.

Consideriamo infine il seguente problema.

Un autobus compie ogni giorno il tragitto Mogadiscio- Afgoi ($\Delta s = 30km$). Esso si ferma 20 volte durante il percorso per far salire e scendere i passeggeri; ogni volta rimane fermo in media *mezzo minuto*. Se tra una fermata e l'altra

riesce a viaggiare ad una velocità media di $60km/h$, quale è la velocità media sull'intero percorso?

Per risolvere il problema supponiamo dapprima che l'autobus non si debba fermare mai. Viaggiando ad una velocità di $60km/h$ per percorrere i $30km$ tra Mogadiscio e Afgoi impiegherebbe un tempo

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta s}{v_m} = \frac{30km}{60km/h} = 0,5h$$

A questo tempo dovremo aggiungere il tempo perso durante le fermate, cioè $\Delta t_2 = 20 \cdot 0,5\ minuti\ = 10\ minuti$. Il tempo totale è quindi

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 0,5h + \frac{10}{60}h = \frac{40}{60}h = \frac{2}{3}h$$

e la velocità media

$$v_m = \frac{30km}{(2/3)h} = \frac{30 \cdot 3}{2} km/h = 45\ km/h$$

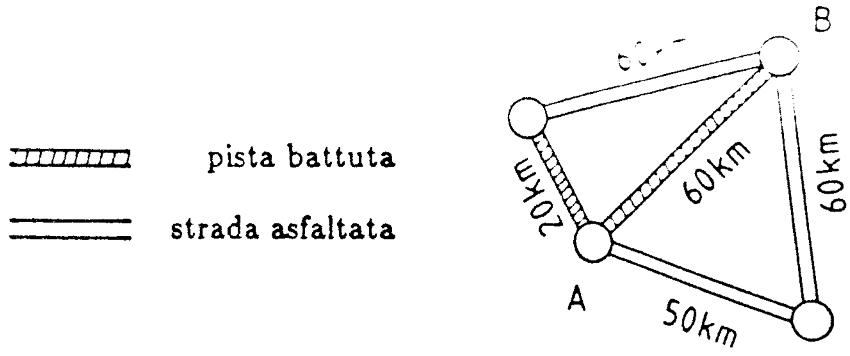
Osserviamo che il problema poteva essere risolto anche applicando la relazione 5.2. Infatti l'autobus si è mosso per un tempo $\Delta t_1 = 0,5h$ a una velocità $v_1 = 60km/h$ e per un tempo $\Delta t_2 = 10min$ con $v_2 = 0$. Abbiamo allora

$$v_m = v_1 \frac{(1/2)h}{(2/3)h} + 0 = \frac{3}{4}v_1 = 45\ km/h$$

La conoscenza della velocità media con cui può viaggiare un'automobile su di un certo percorso è molto utile per prevedere il tempo necessario per compiere il percorso o per programmare correttamente il viaggio.

D5.5 **Un'automobilista deve trovarsi per le *ore* 11 del mattino in un paese che si trova a $115km$ dal suo. Prevedendo di poter viaggiare ad una velocità media di $50km/h$ e tenendo conto di una sosta di 10 *minuti* a metà percorso, a che ora dovrebbe partire?**

E5.1 Un'automobile può viaggiare ad una velocità media di $80km/h$ su strada asfaltata e di $40km/h$ su pista battuta. Quale dei tre percorsi sotto indicati richiede il tempo più breve per andare dal paese A al paese B?



E5.2 Un ragazzo, dovendo compiere velocemente un lungo percorso, programma di correre ($v = 20km/h$) per 10 *minuti* e quindi di camminare ($v = 5km/h$) per 5 *minuti* e così via.
Un altro ragazzo, per compiere lo stesso percorso, programma invece di correre ($v = 20km/h$) per 5 *minuti* e fermarsi a riposare per 2 *minuti*.
Quale dei due ragazzi impiegherà meno tempo?

E5.3 Un automobilista è solito viaggiare ad una velocità media di $100km/h$. Qual è la velocità media su un percorso di $100km$ se l'automobilista si ferma durante il viaggio per 10 *minuti*? E su un percorso di $50km$?

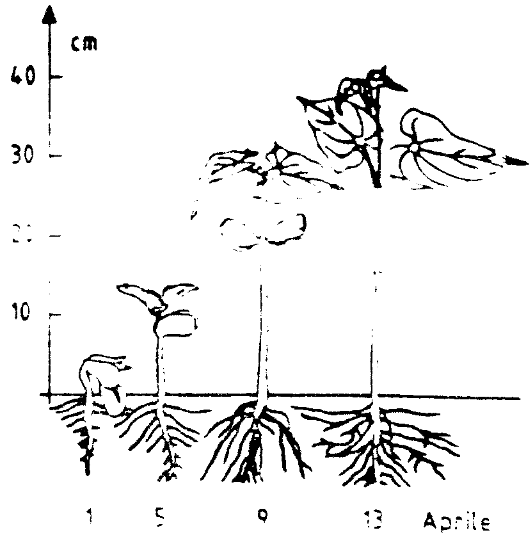
E5.4 Un automobilista deve trovarsi per le *ore* 10 del mattino in un paese che si trova a 120 *kilometri* dal suo. Prevedendo di poter viaggiare ad una velocità media di $60km/h$ egli decide di partire alle *ore* 8. Tuttavia alle *ore* 9 egli ha percorso solo 50 *kilometri*. Che velocità media dovrà tenere per la rimanente parte del viaggio per poter ancora arrivare in orario?

Il concetto di velocità non si applica solo agli oggetti in moto, ma a tutte le grandezze che variano nel tempo.

Si parla così di velocità di crescita di un bambino, velocità di crescita di una pianta, velocità di evaporazione di un liquido, ecc..

D5.5 Un bambino è cresciuto in 1 *anno* di 6 kg. Qual è stata la sua velocità media di crescita in $kg/mese$ e in g/s?

D5.6 **Nella figura sotto riportata è mostrata una pianta di fagiolo in momenti successivi.**



Cosa si può dire della sua velocità di crescita?

D5.7 In un bicchiere cilindrico di sezione 12 cm^2 è contenuto del liquido fino ad una altezza di $7cm$. Il liquido evapora completamente in $35h$. Calcolare la velocità di evaporazione.

In questo capitolo siamo stati in grado di risolvere in modo soddisfacente una serie di problemi relativi al moto degli oggetti intorno a noi, utilizzando la semplice relazione

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

È questo un primo ed importante traguardo. Ma non dobbiamo fermarci.

Nel prossimo capitolo affronteremo problemi più complessi e per risolverli introdurremo un formalismo matematico che potrebbe sembrare a prima vista inutilmente complicato, ma che risulterà indispensabile per raggiungere il nostro scopo.

APPENDICE A - La posizione sulla superficie terrestre

1. *Il problema dell'orientamento*

Noi possiamo spostarci sulla Terra da un luogo all'altro perchè *sappiamo orientarci*, conosciamo cioè il posto in cui siamo, il posto in cui vogliamo arrivare e la strada da fare per arrivarci.

Se ci troviamo in un luogo che conosciamo particolarmente bene, come la nostra città, non abbiamo difficoltà ad orientarci; ma se non conosciamo bene il luogo oppure dobbiamo comunicare ad un'altra persona la nostra posizione o dobbiamo indicargli la strada da seguire, i problemi sono più complicati; per risolverli si usano quei mezzi e quegli strumenti che sono stati via via scoperti dall'uomo. Le migrazioni delle popolazioni, lo spostamento degli eserciti, lo sviluppo dei commerci e della navigazione, la ricerca e lo sfruttamento delle risorse naturali, dipendono anche dalla soluzione di questi problemi di orientamento.

Quando ci troviamo in un posto dove la nostra vista possa spaziare, ci sembra di essere al centro di una superficie piana, detta *piano dell'orizzonte*, che ai suoi bordi sembra congiungersi al cielo; questa linea, che divide il piano dell'orizzonte dal cielo, viene detta *linea dell'orizzonte*.

Per poterci muovere su questo piano dell'orizzonte è necessario conoscere la direzione da prendere. A questo scopo è utile fissare delle linee di riferimento; per fare questo l'uomo, fin dalla più remota antichità, ha sfruttato la posizione degli astri ed in particolare modo del Sole.

La direzione più facile da determinare è quella *nord-sud* o *linea meridiana*. Di notte, tale direzione è indicata dalla Stella Polare nell'emisfero nord e dalla costellazione della Croce del Sud nell'emisfero sud. Di giorno, si può ricorrere ad uno strumento antichissimo detto *gnomone*. Esso può essere costruito semplicemente piantando verticalmente nel terreno un bastoncino (vedi figura *A*.1). Quando è mezzogiorno, cioè quando il Sole è più alto nel

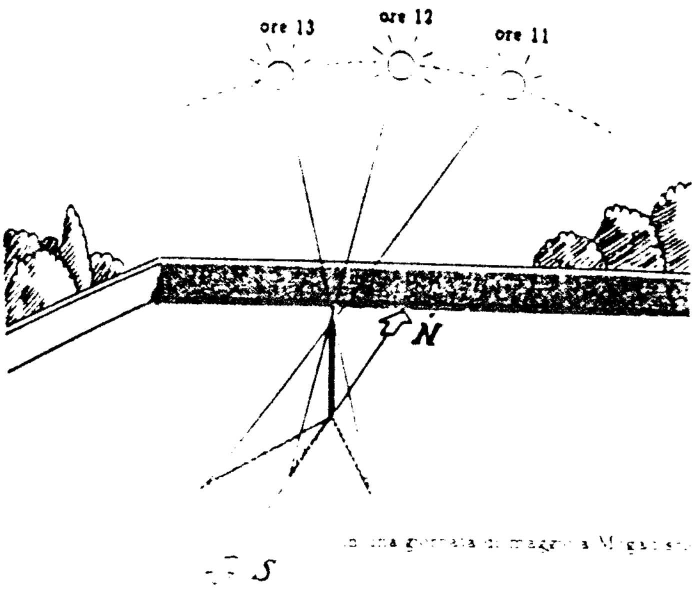


Figura A.1

cielo e l'ombra del bastoncino è più corta, l'ombra del bastoncino indica la direzione nord-sud con il sud dalla parte in cui di notte si vede la Croce del Sud. La direzione perpendicolare a quella nord-sud indica la direzione *est-ovest.* Est e ovest corrispondono ai due punti dell'orizzonte in cui il Sole sorge e tramonta nei giorni degli equinozi (21 marzo e 23 settembre) (vedi App. B).

Mentre la direzione nord-sud è abbastanza facilmente determinabile ogni giorno dell'anno, il sorgere e il tramontare del Sole può essere usato solo due giorni all'anno per determinare la direzione est-ovest.

I quattro punti sulla linea dell'orizzonte determinati dalle due direzioni fondamentali vengono detti *punti cardinali*; si sono poi fissati altri punti intermedi tra quelli cardinali e si è giunti a determinare sul piano orizzontale

prima 8, poi 16 direzioni (*rosa dei venti* vedi fig. *A*.2).

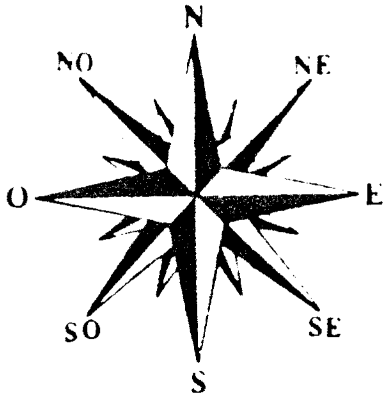


Figura *A*.2

Per fissare l'esatta posizione di un punto qualsiasi sul piano dell'orizzonte si ricorre alle *coordinate polari*: si prende come direzione di riferimento quella verso nord e si misura (in senso orario) l'angolo θ fra la direzione nord e quella del punto considerato: si determina quindi la distanza ρ tra il punto in cui è l'osservatore e il punto da individuare. L'esatta posizione del punto (vedi fig. *A*.3) è data dalle due coordinate polari (ρ, θ).

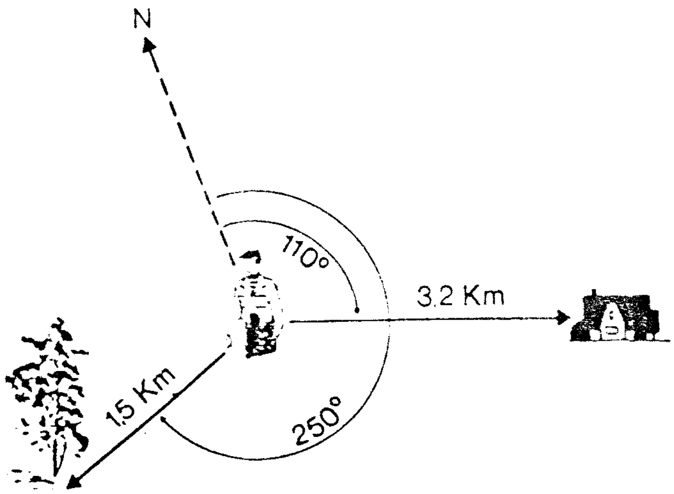


Figura *A*.3

L'individuazione dei punti cardinali con lo gnomone è possibile solo a mezzogiorno nei giorni sereni. Uno strumento che può essere sempre usato è la *bussola*. Essa è costituita da una calamita a forma di ago, sospesa in modo da poter ruotare sul piano orizzontale. L'ago della bussola assume sempre la direzione nord-sud (vedi fig. *A*.4).

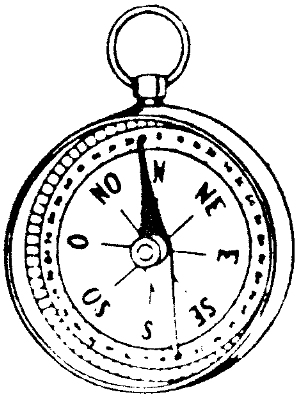


Figura *A*.4

La bussola ci permette anche di muoverci mantenendo sempre la medesima direzione; basta mantenere costante l'angolo fra la direzione del movimento e quella dell'ago della bussola. La bussola è uno strumento indispensabile per la navigazione navale ed aerea ed è comunque molto utile anche a chi viaggia sulla terra, ad esempio in un deserto.

2. *Le coordinate geografiche*

Per poter individuare in modo univoco tutti i punti della superficie terrestre è stato introdotto un sistema di riferimento universale, valido per tutta la Terra, detto *reticolato geografico.*

Sulla sfera terrestre sono state tracciate delle linee immaginarie chiamate meridiani e paralleli (vedi fig. *A*.5).

I *paralleli* sono delle circonferenze parallele all'*equatore* (circonferenza equidistante in ogni suo punto dai *poli*): si usano 90 paralleli nord e 90 paralleli sud (il 90° parallelo nord e il 90° parallelo sud corrispondono ai due poli); essi sono equidistanti fra di loro (circa 111 km) e diventano sempre meno lunghi man mano che andiamo dall'equatore ($l = 40000\ km$) ai poli ($l = 0$).

I *meridiani* sono invece delle semicirconferenze che passano per i poli e quindi hanno direzione nord-sud. Si è scelto come *meridiano* 0 *o meridiano fondamentale* quello passante per l'osservatorio astronomico di Greenwich (Londra). Ad ovest e ad est di Greenwich si sono fissati 180 meridiani per parte; il 180° meridiano ovest e il 180° meridiano est coincidono con l'antimeridiano di Greenwich. La distanza fra due meridiani vicini, che nella zona dell'equatore è di circa 111 km, è nulla ai poli.

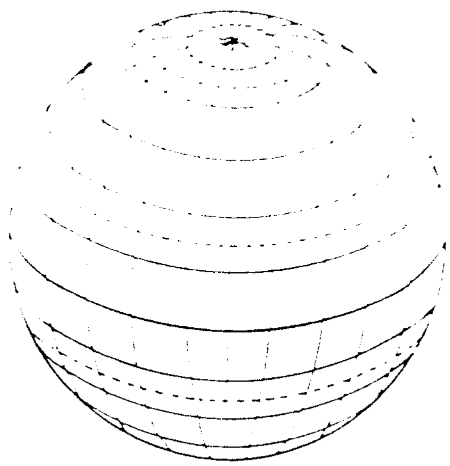


Figura $A.5$

Il reticolato geografico serve per individuare qualsiasi punto sulla superficie terrestre mediante tre valori detti *coordinate geografiche*: la *latitudine*, la *longitudine*, l'*altitudine* (o *quota*).

La *latitudine* di un punto ci dà *la distanza del punto dall'equatore, misurata in gradi e frazioni di grado sull'arco di meridiano compreso fra il punto e l'equatore* (vedi fig. $A.6$). La latitudine può essere nord oppure sud ed i suoi valori sono compresi fra 0° (equatore) e 90° (poli). Evidentemente

tutti i punti che si trovano sullo stesso parallelo hanno la medesima latitudine; il valore di tale latitudine viene utilizzato per individuare il parallelo.

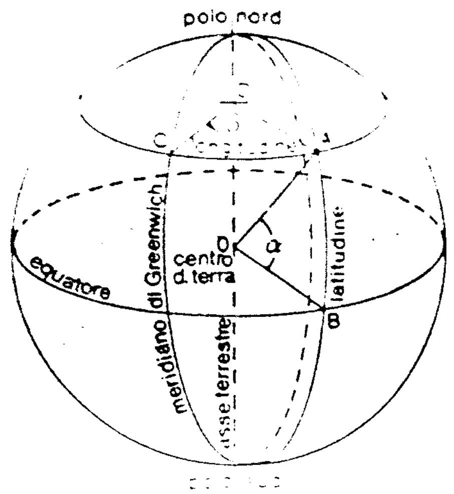


Figura A.6

La *longitudine* di un punto ci dà invece *la distanza del punto dal meridiano fondamentale, misurata in gradi e frazioni di grado sull'arco di parallelo compreso fra il punto e il meridiano fondamentale.* La longitudine può essere est oppure ovest e i suoi valori vanno da 0° (meridiano di Greenwich) fino a 180° (antimeridianno di Greenwich). Tutti i punti che si trovano sullo stesso meridiano hanno la medesima longitudine; il valore di tale longitudine viene utilizzato per indivviduare il meridiano.

Conoscendo cqueste coordinate geografiche, noi sappiamo esattamente la posizione di un punto sulla superficie terrestre. Ad esempio il punto A in fig. $A.6$ ha latitudine α nord e longitudine β est. Roma ha le seguenti coordinate: latitudine = 41°54′ nord e longitudine = 12°27′ est; Mogadiscio invece si trova a 2°3′ di latitudine nord e 45°20′ di longitudine est.

Una determinnazione più esatta di un luogo deve comprendere anche l'*altitudine* cioè il *dislivello* (in metri) *rispetto al livello medio del mare*, che è stato scelto comme superficie di riferimento.

APPENDICE B - Il moto nel cielo

1. *Introduzione*

Nel pensiero di Aristotele (384-322 a.C.), ripreso da Tolomeo (100-170 d.C.), la Terra era al centro dell'Universo e tutti i corpi celesti (Luna, pianeti, Sole, stelle) giravano intorno ad essa. Il moto dei corpi celesti era considerato una categoria a parte, cioè non faceva parte del mondo fisico terrestre, ed era eterno e perfetto.

Il moto degli oggetti vicino a noi veniva invece spiegato dicendo che ogni oggetto tende a raggiungere il *posto che gli spetta per natura*. Per gli oggetti *pesanti* il posto naturale era la terra mentre per quelli *leggeri* era il cielo. Così un oggetto pesante, lasciato libero, *cade naturalmente* verso terra, mente un oggetto leggero *sale* verso il cielo.

Copernico (1473-1543) propose una nuova descrizione dell'Universo nella quale la Terra non è ferma ma ruota intorno al Sole insieme a tutti i pianeti ed inoltre ruota su se stessa.

Il moto apparente del Sole e delle stelle durante il giorno e la notte risulta così dovuto alla rotazione della Terra su se stessa.

L'aver riconosciuto che la Terra ruota intorno al Sole è stata una delle più grandi conquiste del pensiero umano, non tanto per la teoria in sè [infatti era già stata proposta dal filosofo greco Aristarco di Samo (310-230 a.C.)], ma perchè ha aperto la strada alle grandi rivoluzioni scientifiche.

2. *Il sistema solare*

Assieme alla Terra ruotano intorno al Sole altri pianeti; in ordine, cominciando dal Sole, troviamo Mercurio, Venere (detti pianeti interni); la Terra; poi Marte, Giove, Saturno, Urano, Nettuno, Plutone (detti pianeti esterni). Tra Marte e Giove vi è una fascia con moltissimi pianeti di piccolissime dimensioni, detti pianetini o asteroidi (se ne conoscomo circa 2000 e sembra che il loro numero totale superi la decina di milioni). Alcuni dei pianeti hanno anche uno o più satelliti, corpi di dimensioni più piccole che ruotano attorno al pianeta. La Luna è l'unico satellite della Terra (vedi fig. B.1).

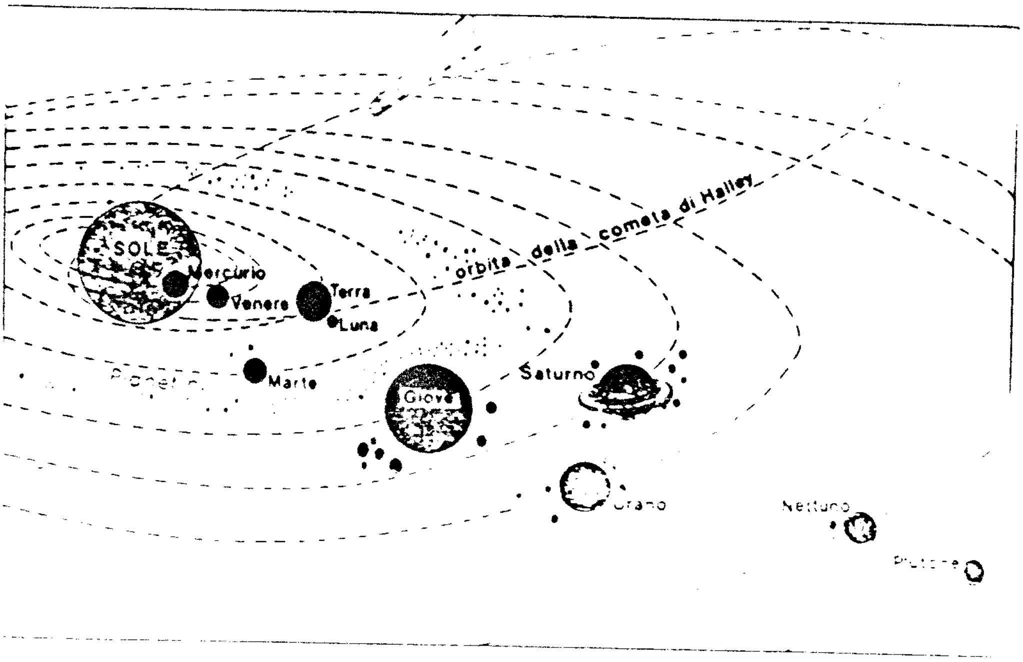


Figura B.1

I pianeti ed i satelliti non emettono luce propria ma riflettono quella del Sole.

Il moto di rivoluzione dei pianeti attorno al Sole e dei satelliti attorno ai pianeti è descritto da tre leggi formulate dall'astronomo tedesco Keplero (1571-1630)(vedi Appendice A, cap.IV).

La prima legge di Keplero dice che i pianeti ruotano attorno al Sole percorrendo delle orbite ellittiche di cui il Sole occupa uno dei fuochi. La conseguenza di questa legge è che i pianeti non sono sempre alla stessa distanza dal Sole, ma vi è un momento in cui sono più vicini (*perielio*) ed uno in cui sono più lontani (*afelio*).

Dalla seconda legge si ricava che la velocità con cui un pianeta percorre la sua orbita non è costante ma è massima al perielio e minima in afelio. Questo, come vedremo, ha influenza sulla durata del giorno solare e delle stagioni. Dalla terza legge si ricava infine che il periodo di rivoluzione, cioè il tempo che un pianeta impiega a compiere un giro completo attorno al Sole, aumenta con l'aumentare della sua distanza dal Sole: Mercurio per compiere un giro completo attorno al Sole impiega circa 87 *giorni*, la Terra 1 *anno*, mentre Plutone impiega più di 248 *anni*.

Lo studio del sistema solare fu compiuto dapprima a occhio nudo, poi con cannocchiali e telescopi sempre più potenti e negli ultimi vent'anni con l'esplorazione diretta dei pianeti più vicini alla Terra mediante sonde spaziali.

3. *I movimenti della Terra*

La Terra, in prima approssimazione, ci appare *sferica* e tale ce la mostrano le fotografie fatte dagli astronauti (vedi fig. *B*.2). Misure più accurate hanno rivelato che la Terra è schiacciata ai poli e che la differenza fra il raggio equatoriale e quello polare è di poco superiore ai 21 *km*.

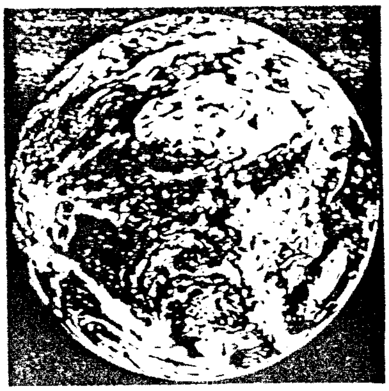


Figura *B*.2

La sfericità della Terra fa sì che la temperatura della superficie terrestre decresca andando dall'equatore ai poli; infatti man mano che ci allontaniamo dall'equatore la stessa 'quantità' di raggi solari colpisce superfici sempre

maggiori (vedi fig. B.3) producendo quindi un riscaldamento sempre minore sull'unità di superficie.

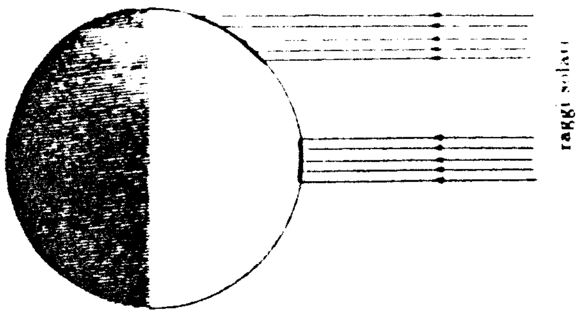


Figura B.3

I principali movimenti della Terra sono due: un moto di rotazione attorno all'asse che congiunge il Polo Nord con il Polo Sud e un moto di rivoluzione intorno al Sole.

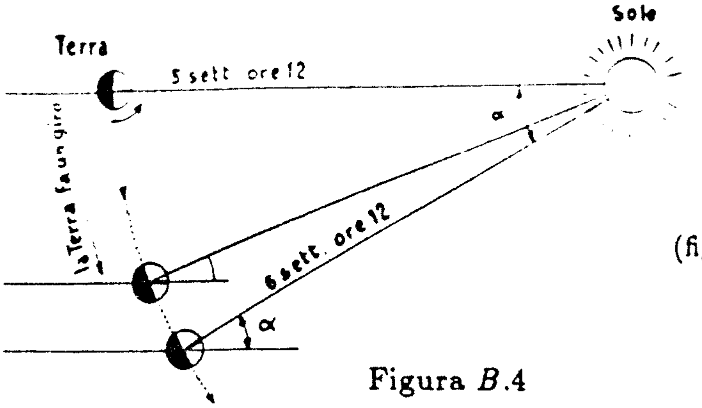
a. Moto di rotazione

Il moto di rotazione della Terra attorno al proprio asse ha come conseguenza *l'alternarsi del dì e della notte.* Infatti in ogni momento solo metà superficie della Terra è illuminata dal Sole, mentre l'altra metà è al buio.

Siccome per definire l'unità di misura degli intervalli di tempo siamo partiti dal *giorno solare* (medio), cioè dall'intervallo di tempo fra due successivi 'passaggi' del Sole sullo stesso meridiano, l'intervallo di tempo che la Terra impiega a compiere una rotazione completa intorno al proprio asse vale 23 *ore* e 56 *minuti* (giorno sidereo), cioè è più corto di circa 4 *minuti* del giorno solare.

Il motivo di questa differenza è dovuto al fatto che la Terra, mentre compie un giro intorno al proprio asse, percorre anche la sua orbita intorno al Sole.

Pertanto, dopo aver compiuto un giro completo intorno al suo asse, deve ruotare ancora di un angolo α prima che il Sole si ritrovi sullo stesso meridiano (vedi fig. B.4).



(figura non in scala)

Figura B.4

Tale angolo α è uguale all'angolo di cui la Terra è ruotata intorno al Sole in un giorno. Poiché la Terra impiega circa 365 *giorni* per compiere un giro completo intorno al Sole, cioè per descrivere un angolo di 360°, possiamo scrivere la proporzione

$$\alpha \ : \ 360^\circ \ = \ 1 \ giorno \ : \ 365 \ giorni$$

da cui

$$\alpha = 360^\circ \cdot \frac{1 \ giorno}{365 \ giorni} \simeq 1^\circ$$

Pertanto, poiché un giorno solare corrisponde ad una rotazione di $360^\circ + \alpha = 361^\circ$, possiamo scrivere

$$\mathbf{24}h \ : \ \mathbf{361^\circ} \ = \ T \ : \ \mathbf{360^\circ}$$

da cui

$$T = 24h \cdot \frac{360^\circ}{361^\circ} = (24 \cdot 0,997)h = 23h \ 56'$$

Osserviamo che mentre il *giorno sidereo*, cioè il tempo che la Terra impiega a compiere una rotazione completa intorno al suo asse, ha sempre la ***stessa durata***, **la durata del *giorno solare* varia leggermente da giorno a giorno a causa della diversa velocità con cui la Terra ruota intorno al Sole. Per questo** motivo nella definizione dell'unità di tempo ci si riferisce alla durata del *giorno solare medio.*

b. Moto di rivoluzione

Si chiama moto di rivoluzione quello che la Terra compie ruotando attorno al Sole; per fare un giro completo impiega 365 *giorni*, 5 *ore*, 48 *minuti* e 56 *secondi*.

L'orbita descritta dalla Terra è un'ellisse: al perielio (3 gennaio) la Terra è più vicina al Sole di circa 5 milioni di km che non il 3 luglio, quando è all'afelio. La velocità di rivoluzione è massima nel perielio e minima in afelio, come previsto dalle leggi di Keplero.

L'orbita percorsa dalla Terra giace su un piano che viene detto *piano dell'eclittica*. È importante sottolineare che l'asse di rotazione della Terra non è perpendicolare al piano dell'eclittica ma inclinato di 66°30′ e rimane sempre parallelo a se stesso. Ciò determina il susseguirsi delle stagioni, perchè in ogni punto della Terra i raggi solari giungono con inclinazione diversa durante l'anno, facendo così variare la temperatura (vedi fig. *B*.5a).
Infatti il moto apparente del Sole nel cielo è leggermente diverso da un giorno all'altro e mostra uno spostamento dell'orbita per 6 *mesi* da nord a sud e per 6 *mesi* da sud a nord (vedi fig. *B*.5*b*).
In particolare esistono due giorni all'anno in cui il Sole a mezzogiorno è perpendicolare all'equatore; inoltre sorge esattamente ad est e tramonta ad ovest per tutti i punti della superficie terrestre. Questo significa che il circolo di illuminazione passa dai poli e coincide con i meridiani; su tutta la Terra la durata del dì è esattamente uguale a quella della notte (*equinozio*): si ha un *equinozio di primavera* il 21 marzo e un *equinozio di autunno* il 23 settembre.

Nei giorni del *solstizio*, il Sole a mezzogiorno è perpendicolare a un parallelo che si trova a 23°30′ di latitudine. Si ha il *solstizio d'estate* (21 giugno) quando il Sole a mezzogiorno è perpendicolare al Tropico del Cancro

(23°30′ di latitudine nord); nello stesso giorno in tutta l'area compresa fra il circolo polare antartico (66°30′ di latitudine sud) e il Polo Sud il Sole non sorge e si ha buio per 24 *ore*. Il 22 dicembre si ha il *solstizio d'inverno*: il Sole a mezzogiorno è perpendicolare al Tropico del Capricorno (23°30′ di latitudine sud); a latitudini superiori al circolo polare artico (66°30′ di latitudine nord) la notte dura 24 *ore*.

Le *stagioni astronomiche* sono i periodi compresi fra gli equinozi ed i solstizi. La *primavera* va dal 21 marzo al 21 giugno (92 *giorni*); l'*estate* dal 21 giugno al 23 settembre (94 *giorni*); l'*autunno* dal 23 settembre al 22 dicembre (90 *giorni*); l'*inverno* dal 22 dicembre al 21 marzo (89 *giorni*).

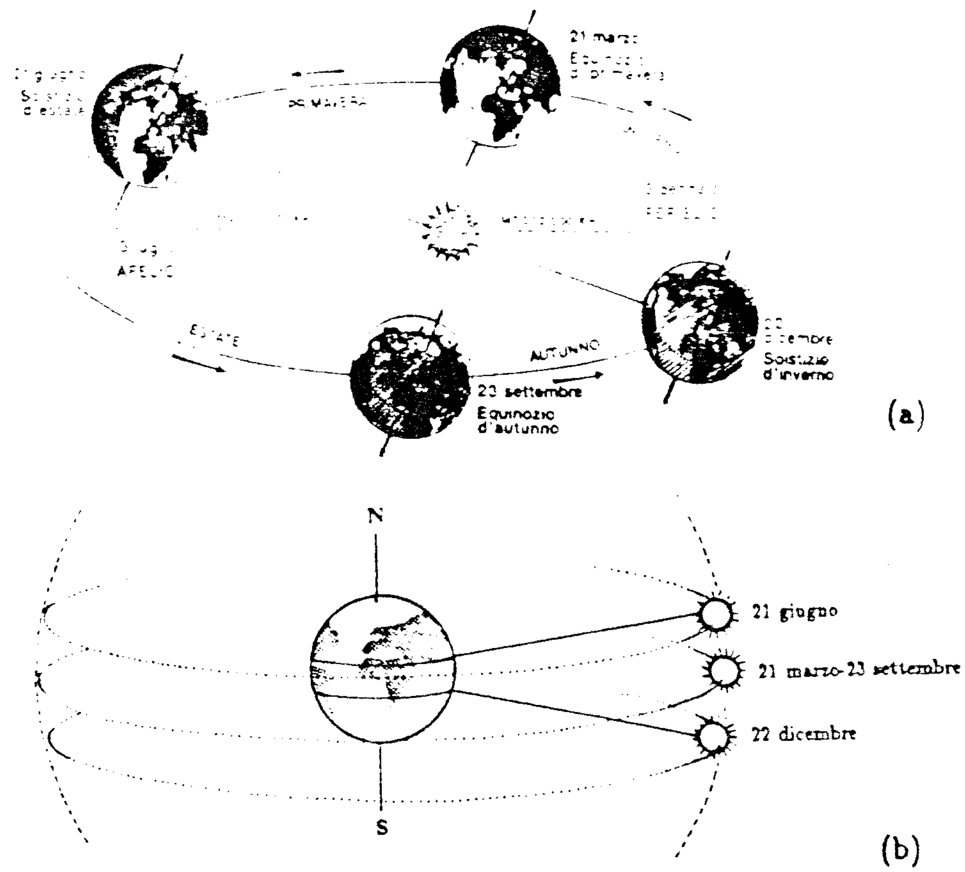


Figura B.5

Dalla durata delle stagioni abbiamo un'altra prova della seconda legge di Keplero. La Terra è al perielio il 3 gennaio, si muove quindi più velocemente e le due stagioni più vicine a questa data sono più brevi delle altre.

4. *Il moto della Luna*

La Luna è l'unico satellite della Terra e la sua vicinanza ne ha reso possibile una esplorazione diretta da parte dell'uomo (21 luglio 1969).

La Luna compie un movimento di *rotazione* attorno al proprio asse, da ovest a est come la Terra. Contemporaneamente compie un movimento di *rivoluzione* attorno alla Terra, sempre muovendosi verso est.

I due movimenti di rotazione e di rivoluzione durano lo stesso intervallo di tempo ed è per questo motivo che dalla Terra si vede sempre la stessa 'faccia' della Luna. Le prime immagini della 'faccia nascosta' della Luna ci sono state inviate dal satellite artificiale sovietico Lunik III° nel 1959.

L'esempio di un'automobile che ruota attorno ad un'aiuola può aiutare a comprendere come mai noi vediamo sempre la stessa 'faccia' della Luna. Infatti (vedi fig. *B*.6) la freccia disegnata sull'automobile ruota attorno a se stessa di un giro completo mentre l'automobile fa un giro attorno alla aiuola: i due movimenti avvengono nello stesso intervallo di tempo ed un eventuale osservatore al centro dell'aiuola vede sempre la stessa fiancata dell'automobile.

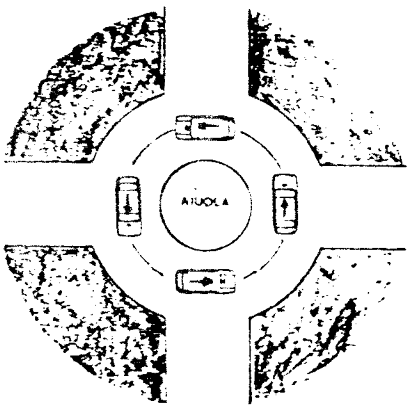


Figura *B*.6

Poiché la Luna non emette luce propria, noi possiamo vedere della Luna solo la parte illuminata dal Sole. L'immagine della Luna varia quindi nel tempo (*fasi lunari*). La prima fase o *novilunio* (vedi fig. $B.7$) si ha quando la Luna si trova tra la Terra e il Sole, per cui viene illuminata soltanto la 'faccia nascosta' della Luna; in questo caso dalla Terra *non* si vede la Luna. La seconda e quarta fase, o *primo quarto* e *ultimo quarto*, si hanno quando la congiungente Terra-Luna è perpendicolare alla retta passante per la Terra e per il Sole; in questo caso il Sole illumina solo metà della 'faccia' visibile dalla Terra.

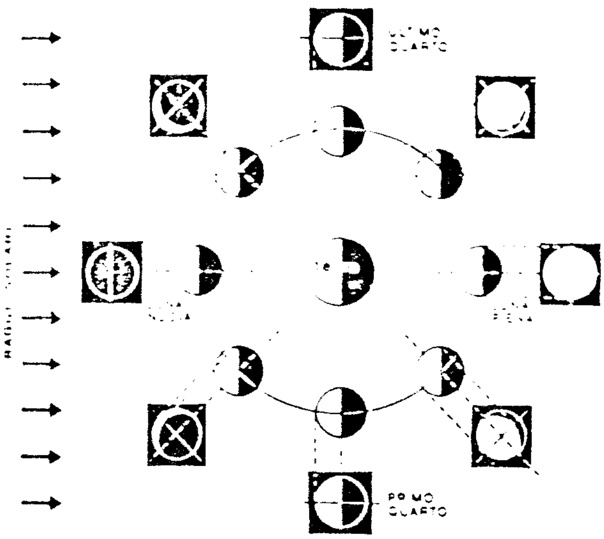


Figura $B.7$

Infine nella terza fase, o *plenilunio*, la Terra si trova tra il Sole e la Luna e il Sole illumina completamente la 'faccia visibile' della Luna.

L'intervallo di tempo tra due noviluni costituisce il *mese lunare* e la sua durata vale 29 *giorni*, 12 *ore* e 44 *minuti*. Esso è più lungo del periodo T di rotazione della Luna intorno al suo asse e di rivoluzione intorno alla Terra in quanto la Luna, insieme alla Terra, ruota intorno al Sole.

Infatti per passare da un novilunio al successivo (vedi fig. $B.8$) la Luna, dopo aver compiuto una rotazione completa intorno alla Terra, deve ancora ruotare di un angolo α prima di trovarsi di nuovo tra la Terra e il Sole. Tale angolo α è uguale all'angolo di cui è ruotata la Terra intorno al Sole in un mese lunare. Poiché la Terra per compiere una rotazione completa intorno al Sole, cioè per descrivere un angolo di 360°, impiega 365 *giorni*, 5 *ore* e 48 *minuti*, possiamo scrivere la proporzione

$$\alpha \quad : \quad 360^\circ \quad = \quad 29d\ 12h\ 44' \quad : \quad 365d\ 5h\ 48'$$

cioè

$$\alpha \simeq 360 \cdot \frac{29,5d}{365,25d} = 29^\circ$$

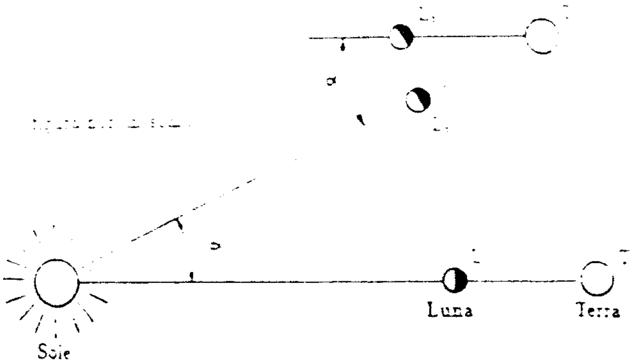


Figura $B.8$

Pertanto se la Luna impiega un intervallo di tempo pari a 29,5 *giorni* per compiere una rotazione corrispondente ad un angolo di $360^\circ + \alpha = 389^\circ$, per compiere una rotazione completa, corrispondente ad un angolo di 360°, impiegherà un intervallo di tempo T dato dalla proporzione

$$T \quad : \quad 360^\circ \quad = \quad 29,5d \quad : \quad 389^\circ$$

da cui

$$T = 29,5d \cdot \frac{360^\circ}{389^\circ} = 27,3d$$

5. *Le eclissi*

L'orbita che la Luna percorre ruotando attorno alla Terra non giace sul piano dell'eclittica, ma è inclinata di circa 5 gradi (vedi fig. *B*.9). Essa interseca il piano dell'eclittica in due punti, detti *nodi*, rispettivamente *ascendente* quando la Luna prosegue il suo movimento sopra il piano dell'eclittica e *discendente* quando prosegue sotto. Ogni mese la Luna passa dai due nodi.

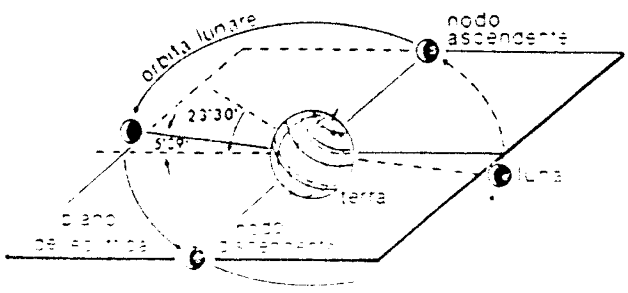


Figura *B*.9

Quando la Terra si trova tra la Luna e il Sole essa proietta la sua ombra sulla Luna e si ha una *eclissi* di Luna, cioè noi osserviamo 'scomparire' la Luna (vedi fig. *B*.10*a*). Quando invece la Luna si trova tra il Sole e la Terra essa ci nasconde il Sole e si ha un'*eclissi di Sole* (vedi fig. *B*.10*b*). È evidente che

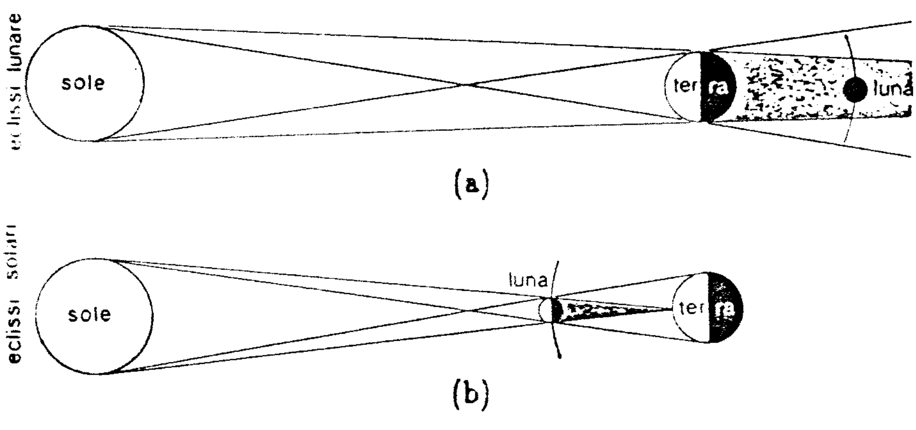


Figura *B*.10

le eclissi di Luna si possono verificare soltanto al plenilunio e quelle di Sole soltanto al novilunio.

Le eclissi di Luna possono essere parziali o totali, a seconda della parte di superficie lunare oscurata dall'ombra della Terra: esse presentano il medesimo aspetto da qualunque parte della Terra vengano guardate.

Le eclissi di Sole, invece, non sono della medesima entità in ogni parte della Terra a causa della piccola dimensione della Luna rispetto alla Terra.

Se l'orbita della Luna giacesse sul piano dell'eclittica si avrebbe una eclisse di Luna e un'eclissi di Sole ogni mese. Invece tali fenomeni accadono solo raramente, quando la Luna si trova in uno dei due nodi nello stesso istante in cui si ha l'allineamento Sole-Luna-Terra o Sole-Terra-Luna.

CAPITOLO II

LE LEGGI DEL MOTO

1. Legge oraria

Limitiamoci a considerare solo oggetti che si muovono di *moto rettilineo*, cioè che si muovono lungo una traiettoria rettilinea.
Se fissiamo sulla retta che rappresenta la traiettoria un'origine O e un verso di percorrenza (vedi fig. 1.1), possiamo assumere la traiettoria stessa come asse x di un sistema di riferimento cartesiano.

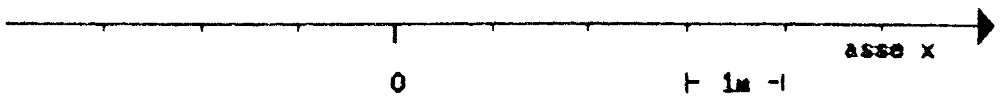


Figura 1.1

La posizione di un oggetto sulla traiettoria può essere quindi individuata dalla coordinata x del punto P in cui si trova l'oggetto.

Tale posizione è rappresentata da un *numero relativo* x il cui valore assoluto $|x|$ indica, *in questo caso*, la distanza dell'oggetto dall'origine (per la quale $x = 0$) e il cui segno indica se per andare dall'origine O all'oggetto dobbiamo spostarci nel verso fissato sull'asse (verso positivo) o in verso contrario (verso negativo).

Studiamo il caso di due palline che si muovono lungo la stessa traiettoria rettilinea con velocità costante. Le loro posizioni a due istanti successivi

$t_1 = 1s$ e $t_2 = 2s$ sono mostrate in fig. 1.2.

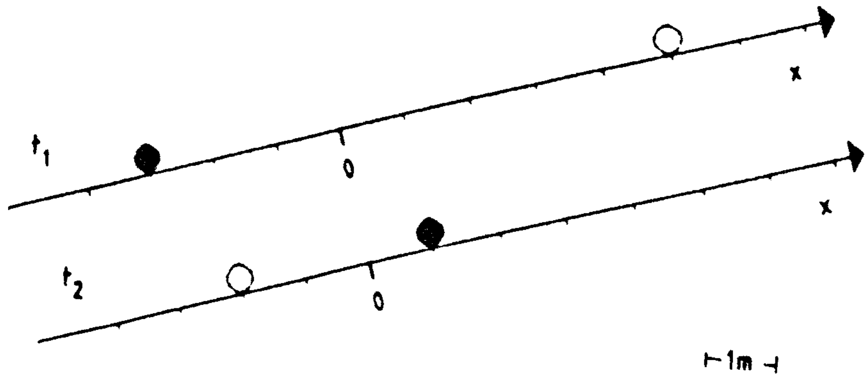


Figura 1.2

Tali posizioni sono

per la pallina nera	$t_1 = 1s$	$x_1 = -3m$
	$t_2 = 2s$	$x_2 = 1m$
per la pallina bianca	$t_1 = 1s$	$x_1 = 5m$
	$t_2 = 2s$	$x_2 = -2m$

Calcoliamo ora di quanto si sono spostate le due palline nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$ e definiamo *spostamento* la quantità $\Delta x = x_2 - x_1$.
Otteniamo allora

per la pallina nera $\quad \Delta x = (+1m) - (-3m) = 4m$

per la pallina bianca $\quad \Delta x = (-2m) - (+5m) = -7m$

Come si vede lo spostamento Δx è espresso da un numero relativo (e da un'unità di misura): il *valore assoluto* $|\Delta x|$ indica in questo caso, oltre che la distanza tra la posizione iniziale e quella finale dell'oggetto, lo spazio Δs percorso dall'oggetto lungo la traiettoria; il *segno* indica se l'oggetto si è spostato nel verso positivo o in quello negativo.

Infatti, come si può verificare dalla fig.1.2, la pallina nera ($\Delta x = 4m$) si è spostata di $\Delta s = 4m$ verso destra (cioè nel verso positivo) mentre la pallina bianca ($\Delta x = -7m$) si è spostata di $\Delta s = 7m$ verso sinistra (cioè nel verso negativo).

Proviamo ora a calcolare la velocità costante con cui si muovono le due palline, utilizzando la relazione $v_x = \Delta x/\Delta t$, nella quale abbiamo indicato la velocità con la notazione v_x in quanto il moto avviene *lungo l'asse x*. Abbiamo

per la pallina nera $$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4m}{1s} = 4m/s$$

per la pallina bianca $$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-7m}{1s} = -7m/s$$

La velocità v_x, come lo spostamento Δx, è espressa da un numero relativo e da un'unità di misura; il suo valore assoluto $|v_x|$ indica il valore della velocità $v = \Delta s/\Delta t$ mentre il segno indica se l'oggetto si è mosso nel verso positivo o in quello negativo.

D1.1 Se nel moto rettilineo mostrato in fig. 1.2 cambiassimo il verso positivo dell'asse, che valori troveremmo per la velocità v_x delle due palline?

Se un oggetto si muove con velocità costante, la relazione

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

fornisce lo stesso risultato per qualsiasi intervallo di tempo. Consideriamo allora l'intervallo di tempo compreso tra l'istante $t = 0$ e un generico istante t, indicando con x_0 la posizione dell'oggetto all'istante iniziale $t = 0$ e con x la posizione all'istante t. Possiamo scrivere

$$v_x = \frac{x - x_0}{t - 0} = \frac{x - x_0}{t}$$

da cui otteniamo

$$x = x_0 + v_x t \qquad 1.1$$

La relazione 1.1, nota la velocità v_x e la posizione iniziale x_0, ci permette di conoscere ad ogni istante t la posizione dell'oggetto sulla traiettoria. Essa costituisce la *legge oraria del moto rettilineo uniforme.*

Consideriamo, ad esempio, un oggetto che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $v = 5m/s$ partendo da una posizione distante $3m$ dall'origine dalla parte positiva dell'asse x. Se l'oggetto si muove nel verso positivo dell'asse, la sua posizione x dopo $5s$ si ottiene dalla relazione 1.1 ponendo: $v_x = 5m/s$, $x_0 = 3m$ e $t = 5s$.
Abbiamo

$$x = 3\ m + 5m/s \cdot 5\ s = 28m$$

cioè l'oggetto si trova a $28m$ dall'origine dalla parte positiva dell'asse.

Se invece l'oggetto si muove nel verso negativo dell'asse x, dobbiamo porre nella 1.1 $v_x = -5m/s$, $x_0 = 3m$, $t = 5s$ e la sua posizione x dopo $5s$ è

$$x = 3m - 5m/s \cdot 5s = -22m$$

cioè l'oggetto si trova a 22 *metri* dall'origine dalla parte negativa dell'asse.
L'oggetto passa per l'origine dell'asse ($x = 0$) all'istante t tale che

$$0 = x_0 + v_x t$$

cioè all'istante

$$t = -\frac{x_0}{v_x} = -\frac{3\ m}{-5\ m/s} = \frac{3}{5}s = 0,6s$$

Vogliamo ora scrivere la legge oraria del moto rettilineo uniforme della pallina nera, rappresentato in fig. 1.2.
Sappiamo che la pallina si muove con velocità $v_x = +4m/s$, ma non conosciamo la sua posizione all'istante $t = 0$. Sappiamo però che per

$$t = 1s \qquad \text{è} \qquad x = -3m$$

Sostituendo tali valori nella relazione 1.1 abbiamo

$$-3m = x_0 + 4m/s \cdot 1s$$

da cui

$$x_0 = -3m - 4m = -7m$$

La legge oraria diventa allora

$$x = -7m + 4m/s \cdot t$$

Per $t = 2s$ si ottiene $x = 1m$, che è la posizione della pallina nera indicata nella fig. 1.2.

D1.2 Trovare la legge oraria del moto della pallina bianca mostrato in fig. 1.2 e calcolare la posizione della pallina all'istante $t = 5s$.

E1.1 Una pallina si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $v_x = 5\ m/s$ partendo dalla posizione $x_0 = -10cm$. Scrivere la legge oraria del moto e calcolare in quale istante la pallina passa per l'origine ($x = 0$).

E1.2 Una pallina si muove di moto rettilineo uniforme. Sapendo che $x_0 = -5m$ e $v_x = 4m/s$, calcolare la posizione all'istante $t = 0$ e lo spazio percorso nell'intervallo di tempo tra $t_1 = 2s$ e $t_2 = 10s$.

2. Rappresentazioni grafiche

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, conoscere il moto di un oggetto vuol dire conoscere ad ogni istante la posizione dell'oggetto rispetto ad un sistema di riferimento o sulla sua traiettoria.

In alcuni casi semplici tale descrizione può essere fatta attraverso la legge oraria. In altri casi è possibile, e spesso conveniente, utilizzare metodi diversi.

Consideriamo una scimmietta che si sta arrampicando lungo il tronco di una palma. Mentre la scimmietta sta salendo scattiamo una serie di fotografie, una ad ogni secondo.
In fig. 2.1 sono riportate le varie fotografie, disposte in ordine crescente di tempo da sinistra verso destra. In ogni fotografia è stato ripreso anche un orologio che segna l'istante in cui è stata scattata la fotografia.

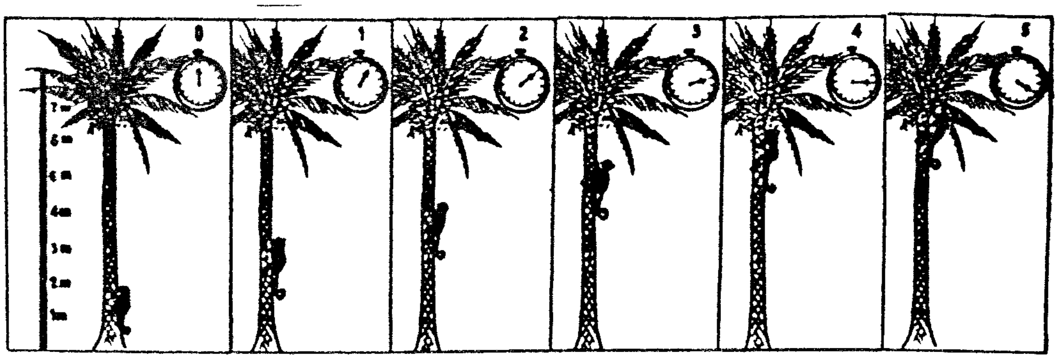


Figura 2.1

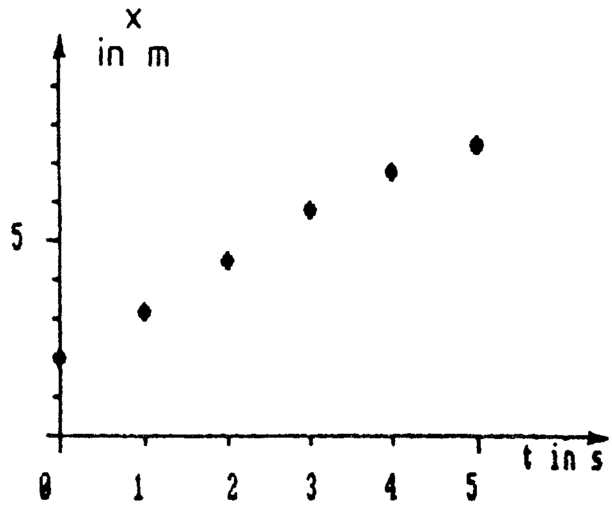
Un modo per rappresentare il moto della scimmietta lungo la palma può essere quello di riportare in una tabella, per ogni fotografia, il valore del tempo segnato dall'orologio e quello dell'altezza, cioè della distanza dal suolo, raggiunta dalla scimmietta (vedi fig. 2.2a).

Un altro modo, più rappresentativo, è *quello di costruire un grafico nel modo seguente.*

Disegnamo un sistema di due assi cartesiani. Lungo l'asse delle ascisse riportiamo i valori del tempo trascorso, assumendo che un'unità della scala graduata equivalga ad 1 *secondo*. Chiameremo tale asse *asse dei tempi* e lo indicheremo con la lettera t. Riportiamo invece i valori dell'altezza raggiunta dalla scimmietta lungo l'asse delle ordinate assumendo che un'unità della scala graduata equivalga ad $1m$. Chiameremo tale asse *asse delle posizioni* e lo indicheremo con la lettera x.

tempo in s	altezza in m
0	2,0
1	3,2
2	4,5
3	5,8
4	6,8
5	7,5

(a)



(b)

Figura 2.2

Per ogni fotografia disegnamo un punto le cui coordinate siano rispettivamente il valore del tempo trascorso e quello dell'altezza raggiunta dalla scimmietta (vedi fig. 2.2b). Si ottiene così una serie di punti, detti punti rappresentativi. Se avessimo scattato le fotografie ad intervalli di tempo sempre più piccoli, i punti P rappresentativi delle varie fotografie si troverebbero sempre più vicini tra loro, fino a costituire una linea continua (vedi fig. 2.3).

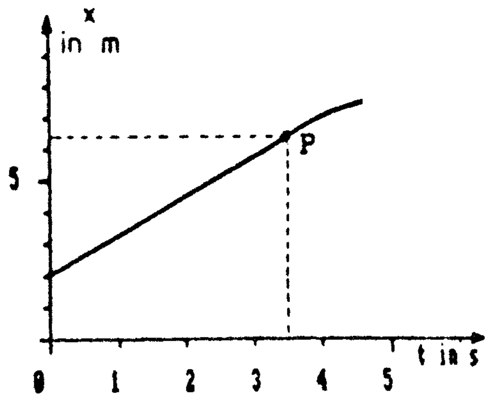


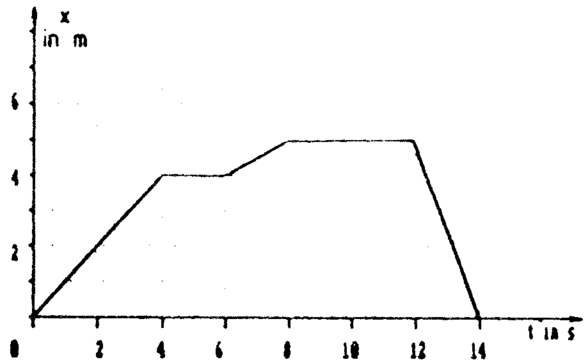
Figura 2.3

Tale linea rappresenta, nel nostro grafico, il moto della scimmietta. Infatti per conoscere l'altezza raggiunta dalla scimmietta dopo $3,5s$ è sufficiente cercare la coordinata x del punto P della linea che ha come coordinata t il valore $t = 3,5s$. Si trova $x = 6,2m$.

Il grafico che abbiamo ottenuto si chiama *diagramma orario* o *grafico spazio-tempo*. Un confronto tra il grafico di fig. 2.3 e la serie di fotografie riportate in fig. 2.1 ci aiuta ad interpretare il grafico stesso.

D2.1 Si descriva a parole il moto di una scimmietta lungo il tronco di una palma, rappresentato dal grafico spazio-tempo sotto riportato:

a. Cosa ha fatto la scimmietta nell'intervallo di tempo tra $t = 8s$ e $t = 12s$? E nell'intervallo di tempo tra $t = 12s$ e $t = 14s$?



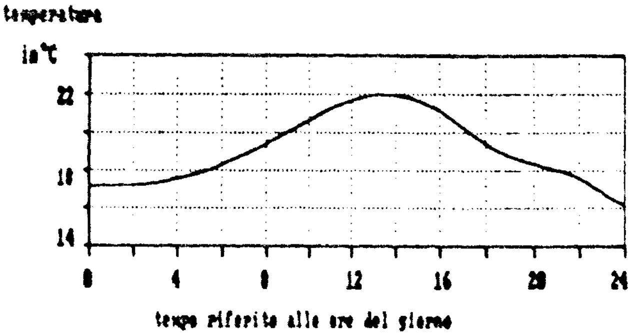
b. Si può dire qualche cosa sulla velocità con cui la scimmietta è salita ed è discesa?

Grafici del tipo di quello che abbiamo appena costruito possono essere usati per rappresentare qualsiasi grandezza che varia nel tempo.

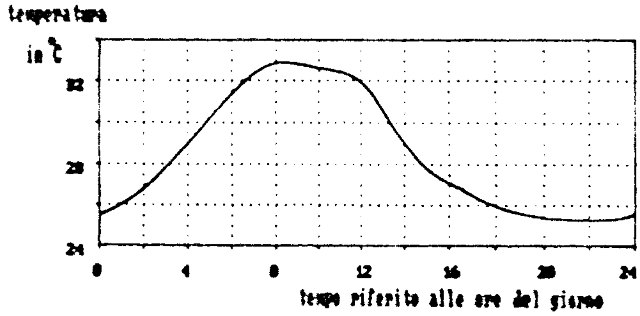
D2.2 Si descriva a parole la variazione della temperatura registrata a Roma un giorno di marzo e rappresentata nel grafico temperatura-tempo riportato qui sotto.

a. Quale è stata la temperatura alle *ore* 12?

b. Quali sono state in quel giorno le temperature massima e minima?

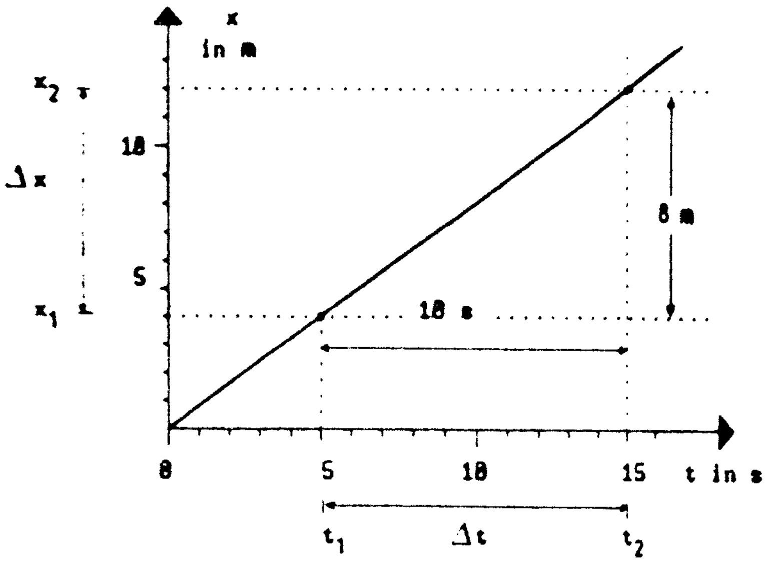


D2.3 Nel grafico sottoriportato è mostrato l'andamento della temperatura durante una giornata a Mogadiscio. Quale momento del giorno è preso come *ora* 0?



D2.4 Calcolare a diversi istanti di tempo t ($t = 1s$, $2s$, $3s$, ...) la posizione di un'automobile che si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $v = 10m/s$ e costruire una tabella analoga a quella di fig. 2.2a, assumendo che per $t = 0$ è $x = 0$.
Costruire in un grafico spazio-tempo la linea che rappresenta il moto dell'automobile. Di che linea si tratta?

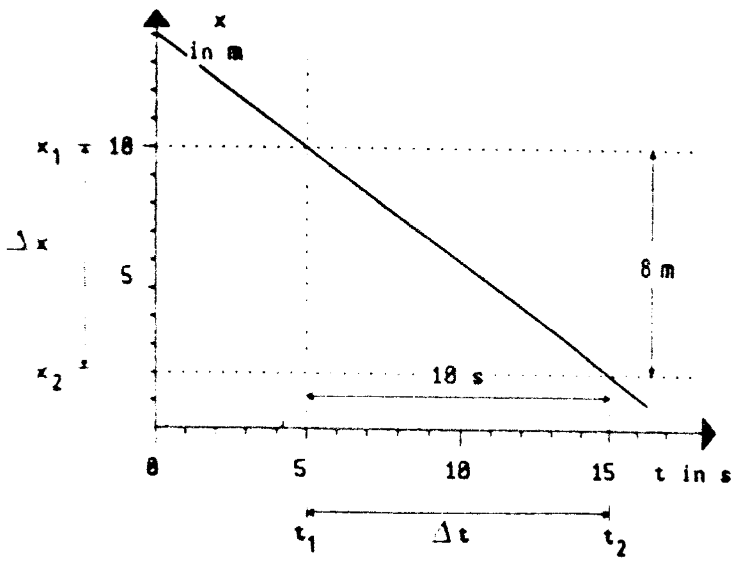
Da quanto abbiamo visto nella precedente domanda, se un oggetto si muove con velocità costante, in un grafico spazio-tempo il suo moto è rappresentato da una linea retta. Il *valore* della velocità è tanto *maggiore* quanto *maggiore* è l'*inclinazione* della retta rispetto all'asse dei tempi, ed esso può essere ottenuto nel modo indicato in fig. 2.4.



$$v = \frac{8m}{10s} = 0,8\ m/s$$

Figura 2.4

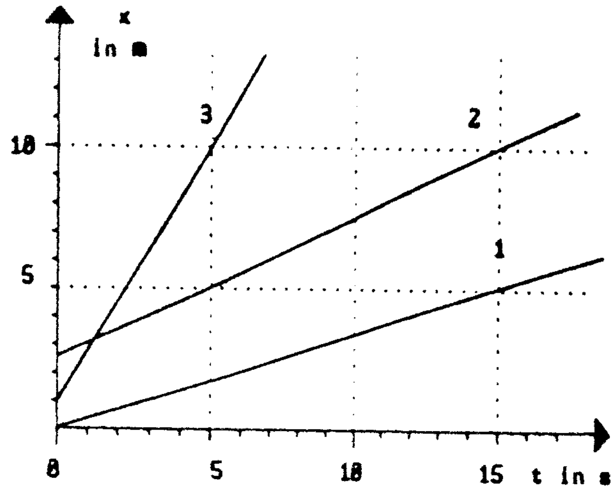
Anche il grafico di fig. 2.5 rappresenta il moto di un oggetto che si muove con velocità costante. In questo caso però la velocità ha segno negativo, cioè l'oggetto si stà muovendo nel verso negativo della traiettoria.



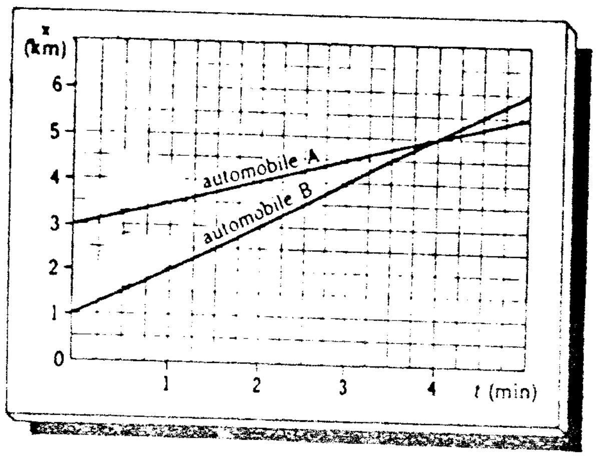
$$v = \frac{-8m}{10s} = -0,8\ m/s$$

Figura 2.5

D2.5 Quale dei tre moti rappresentati nel grafico spasio-tempo sotto riportato avviene con velocità maggiore?
Calcolare il valore della velocità nei tre moti.

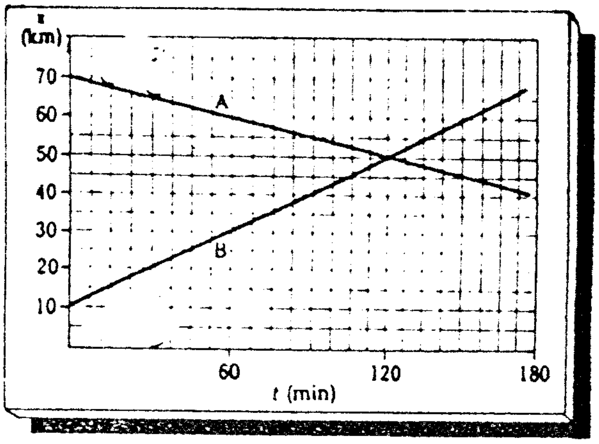


E2.1 Interpretare il seguente grafico che si riferisce al moto di due automobile A e B, le quali viaggiano sulla stessa strada e nello stesso verso.
In particolare, che cosa accade all'istante $t = 4$ *minuti*?

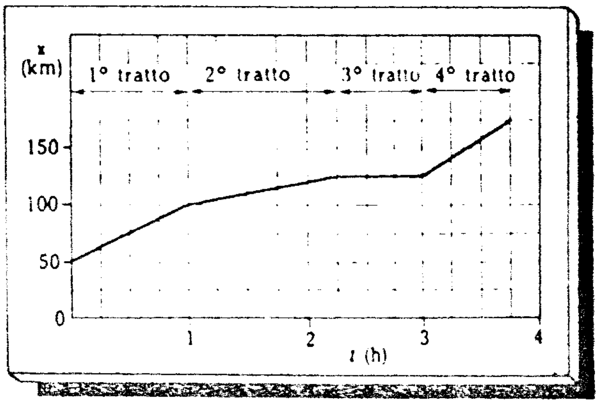


E2.2 Rappresentare in un grafico spazio-tempo il moto di due automobili che si muovono lungo lo stesso percorso rispettivamente con velocità costante $v_A = 10m/s$ e $v_B = 20m/s$, assumendo che all'istante iniziale le due automobili si trovano nello stesso punto.
Ricavare dal grafico a che distanza l'una dall'altra si trovano al tempo $t = 14s$.

E2.3 Interpretare il seguente grafico che si riferisce al moto di due ciclisti, i quali viaggiano sulla stessa strada ma in verso contrario e partono da due località distanti fra loro 60 km.



E2.4 Dal grafico che segue, che rappresenta la posizione occupata da un oggetto al variare del tempo, determinare:
a. la distanza dall'origine della posizione di partenza dell'oggetto;
b. l'istante in cui l'oggetto si ferma;
c. la distanza dall'origine della posizione in cui l'oggetto si ferma;
d. la velocità nel primo tratto (in m/s);
e. la velocità nel quarto tratto (in m/s).



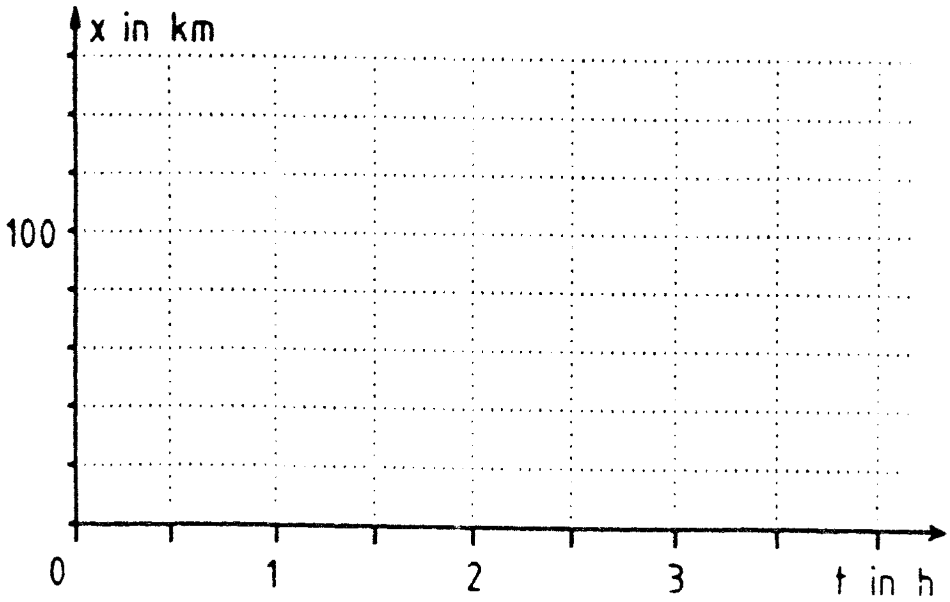
E2.5 Due automobilisti A e B devono andare in un paese che dista $120km$. L'automobilista A viaggia a $60km/h$ ma si ferma a metà strada per 30 *minuti*. L'automobilista B viaggia a $40km/h$ e non si ferma. Se partono insieme:

a. Chi arriva prima?

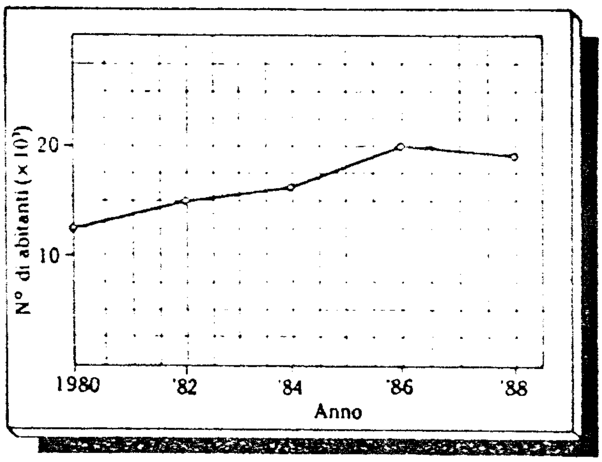
b. Quante volte si incontrano?

c. A quale distanza dal punto di partenza si incontrano?

Costruire il grafico spazio-tempo per entrambi i moti e rispondere alle domande analizzando il grafico.



E2.6 Il grafico sottoriportato rappresenta l'andamento della popolazione di un paese rilevato ogni 2 *anni*. La pendenza dei vari tratti indica qualcosa di significativo?



Per descrivere il moto può essere anche utile costruire un grafico della velocità in funzione del tempo. Consideriamo il moto rappresentato dal grafico spazio-tempo riportato in fig. 2.6.

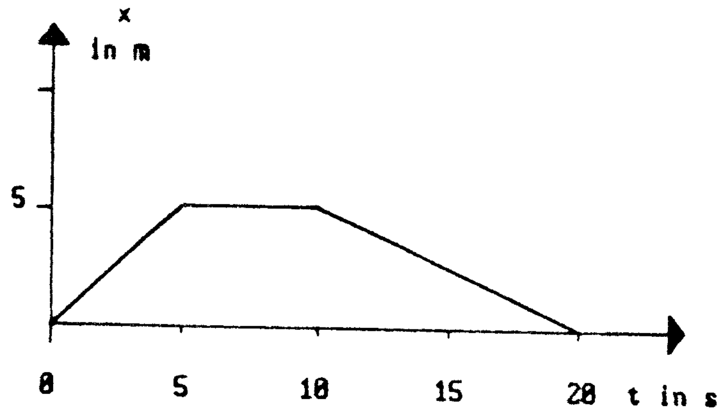


Figura 2.6

Si tratta del moto di un oggetto che si muove per i primi $5s$ di moto uniforme con velocità $v_x = 5m/5s = 1m/s$, si ferma per altri $5s$ e quindi ritorna alla posizione iniziale in $10s$ con una velocità $v_x = (-5m)/(10s) = -0,5m/s$.
Il grafico velocità-tempo sarà quindi quello mostrato in fig. 2.7.

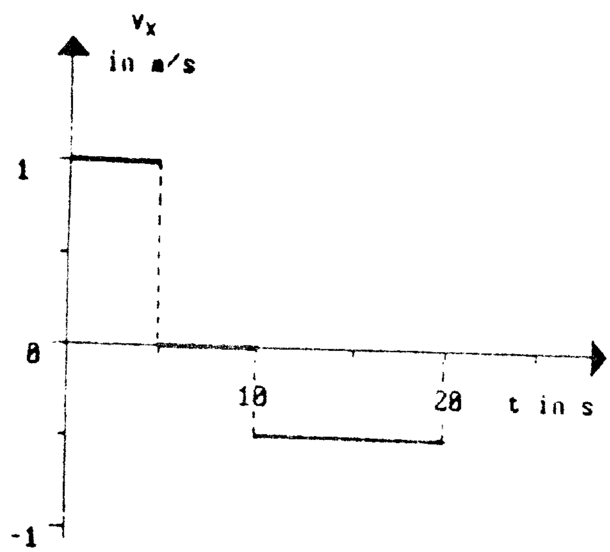


Figura 2.7

D2.6 Qual è la rappresentazione in un grafico velocità-tempo di un moto uniforme?

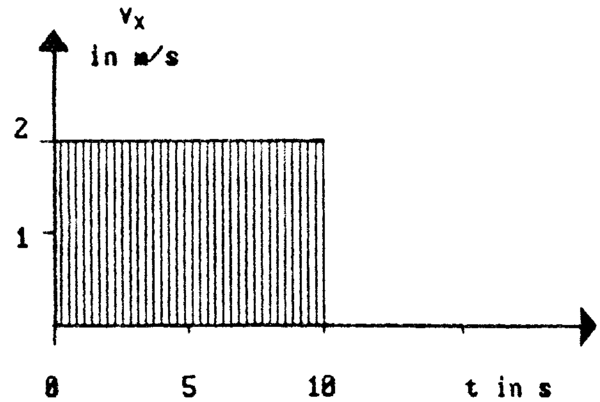
D2.7 Si costruiscano i grafici velocità-tempo dei moti considerati negli esercizi E2.1, E2.3, E2.5.

È possibile, noto il grafico velocità-tempo, costruire il grafico spazio-tempo?

Come abbiamo visto, se un oggetto si muove con velocità costante v_x lo spazio percorso in un intervallo di tempo Δt è dato da

$$\Delta x = v_x \cdot \Delta t$$

In un grafico velocità-tempo esso è rappresentato dall'area della superficie tratteggiata in fig. 2.8. Infatti l'area tratteggiata è quella di un rettangolo la cui altezza è data dal valore della velocità v_x e la base è data dall'intervallo di tempo Δt.



$$\Delta x = v_x \cdot \Delta t =$$
$$= 2m/s \cdot 10s = 20\ m$$

Figura 2.8

È quindi possibile in questi casi passare dal grafico velocità-tempo a quello spazio-tempo.

Consideriamo ad esempio il grafico velocità-tempo mostrato in fig. 2.9. Il grafico non ci fornisce nessuna indicazione sulla posizione iniziale (cioè all'istante $t = 0$) dell'oggetto.

Assumeremo quindi per semplicità

$$x = 0 \qquad \text{per} \qquad t = 0$$

Tale punto coincide con l'origine O del sistema di assi.

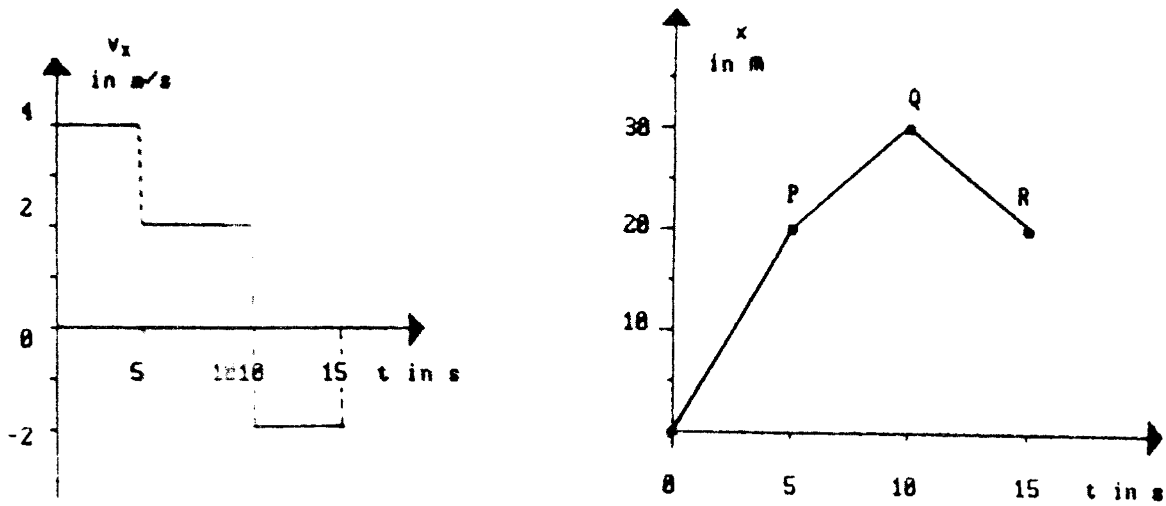


Figura 2.9

Dopo un intervallo di tempo $\Delta t = 5s$ l'oggetto si sarà spostato di

$$\Delta x = 4m/s \cdot 5s = 20m$$

cioè avremo

$$x = 20m \qquad \text{per} \qquad t = 5s$$

Segnamo nel grafico spazio-tempo il punto P di coordinate $(5, 20)$ e uniamo tale punto con l'origine mediante un tratto di retta, in quanto nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = 5s$ l'oggetto si è mosso di moto uniforme.

Nell'intervallo di tempo tra $t = 5s$ e $t = 10s$ l'oggetto si è spostato di

$$\Delta x = 2m/s \cdot 5s = 10m$$

e si troverà quindi, alla fine dell'intervallo di tempo, nella posizione

$$x = 20m + 10m = 30m \qquad \text{per} \qquad t = 10s$$

Segnamo sul grafico il punto Q di coordinate $(10, 30)$ e tracciamo il segmento $\overline{PQ}$.

Nell'intervallo di tempo tra $t = 10s$ e $t = 15s$ l'oggetto si è spostato di $\Delta x = -2m/s \cdot 5s = -10m$ e si trova alla fine dell'intervallo nella posizione

$$x = 30m + (-10m) = 20m \qquad \text{per} \qquad t = 15$$

Segnamo quindi sul grafico il punto R di coordinate $(15, 20)$ e tracciamo il segmento $\overline{QR}$.

Abbiamo così ottenuto il grafico spazio-tempo del moto.

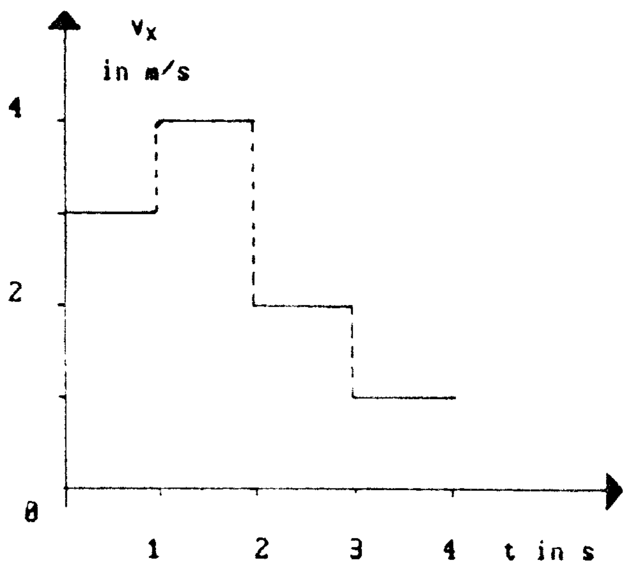
D2.8 Un'automobile si muove per 20 *minuti* con velocità $v_1 = 30km/h$, quindi si ferma per 10 *minuti* e successivamente torna indietro muovendosi per altri 10 *minuti* con velocità $v_2 = 60km/h$. Costruire i grafici velocità-tempo e spazio-tempo del moto.

E2.7 Il grafico sotto riportato rappresenta il valore della velocità in quattro intervalli di tempo successivi di un oggetto che si muove di moto rettilineo.

a. Trovare lo spazio percorso dall'oggetto in ciascuno di questi quattro intervalli.

b. Trovare lo spazio totale percorso.

c. Calcolare la velocità media sull'intero percorso e disegnarla sul grafico.



3. Un esempio

Abbiamo analizzato diversi modi per descrivere il moto di un oggetto. Ciascuno di essi può essere utilizzato per studiare il moto e fare delle previsioni.

Consideriamo ad esempio il seguente problema.

Due automobili A e B stanno facendo lo stesso percorso. L'automobile A si muove ad una velocità costante $v_A = 10m/s$ e l'automobile B ad una velocità costante $v_B = 5m/s$. Ad un certo istante l'automobile A si trova dietro l'automobile B ad una distanza $d = 200m$. Dopo quanto tempo l'automobile più veloce raggiunge quella più lenta?

Risolviamo il problema con tre metodi diversi.

a. Calcoliamo gli spazi percorsi dalle due automobili dopo un generico intervallo di tempo Δt. Abbiamo

$$\Delta s_A = v_A \cdot \Delta t \qquad \text{e} \qquad \Delta s_B = v_B \cdot \Delta t$$

Quando si incontrano l'automobile A ha percorso uno spazio che è maggiore di quello percorso dall'automobile B di $d = 200m$. Per risolvere il problema dobbiamo allora cercare il valore dell'intervallo Δt per cui:

$$\text{spazio percorso da } A = \text{spazio percorso da } B + 200m$$

cioè

$$v_A \cdot \Delta t = v_B \cdot \Delta t + d$$

da cui

$$\Delta t = \frac{d}{v_A - v_B}$$

e sostituendo i valori numerici

$$\Delta t = \frac{200m}{10m/s - 5m/s} = \frac{200m}{5m/s} = 40s$$

Cioè l'automobile A raggiunge l'automobile B dopo 40 *secondi*.

b. Scriviamo le leggi orarie dei moti delle due automobili prendendo come origine sulla traiettoria comune (asse x) la posizione in cui si trova l'automobile A all'istante iniziale ($t = 0$) e come verso positivo quello del moto.

Abbiamo

per l'automobile A $\quad x_0 = 0, \quad v_s = v_A \quad$ e quindi $\quad x = v_A t$

per l'automobile B $\quad x_0 = d, \quad v_s = v_B \quad$ e quindi $\quad x = d + v_B t$

Quando le due automobili si incontrano vuol dire che esse si trovano nella stessa posizione x.

Abbiamo allora

$$v_A t = d + v_B t$$

da cui

$$t = \frac{d}{v_A - v_B} = 40s$$

Poichè abbiamo preso come $t = 0$ l'istante nel quale le due automobili si trovavano alla distanza $d = 200m$, le due automobili si incontrano al tempo $t = 40s$, cioè dopo $40s$.

c. Disegnamo in un grafico spazio-tempo le due rette che rappresentano i due moti uniformi e determiniamo graficamente il punto di incontro P come mostrato in fig. 3.1.

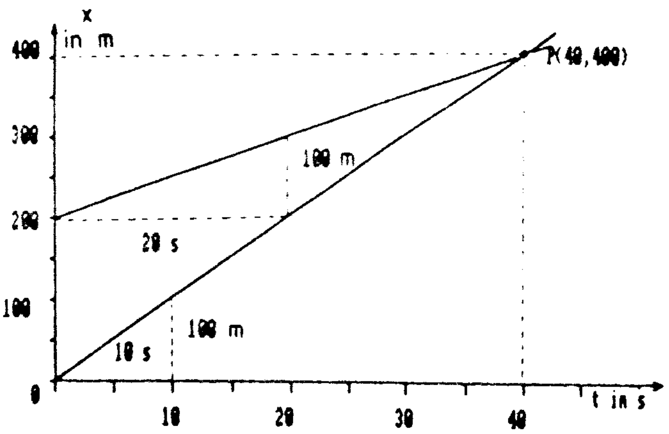


Figura 3.1

Dalle coordinate di P si ottiene che l'automobile A raggiunge l'automobile B dopo $40s$, quando l'automobile più veloce (A) ha percorso $400m$.

E3.1 Determinare dal grafico di figura 3.1

a. l'istante di partenza di A e di B;
b. il punto di partenza di A e di B;
c. lo spazio percorso da B fino all'istante dell'incontro con A;
d. lo spazio percorso da A e B dopo $20s$.

E3.2 Due ciclisti stanno viaggiando insieme ad una velocità $v = 20km/h$. Ad un certo momento un ciclista si ferma ad un bar per 10 *minuti* e quindi riparte con velocità $v_1 = 25km/h$. Dopo quanto tempo e a quale distanza dal bar raggiunge il compagno che ha continuato a viaggiare alla velocità di $20km/h$?

E3.3 Due automobili stanno viaggiando insieme ad una velocità $v = 50km/h$. Se una delle due automobili si ferma per 5 *minuti* ad un distributore di benzina, con che velocità dovrà poi viaggiare per raggiungere l'altra automobile in 15 *minuti*? A quale distanza dal distributore la raggiunge?

4. Velocità istantanea

Consideriamo sempre moti rettilinei assumendo come traiettoria l'asse delle x.

Se il moto è uniforme la velocità è costante e il rapporto $\Delta x/\Delta t$ ci fornisce in valore e segno la velocità del moto *qualunque* sia l'intervallo di tempo scelto.

Se il moto non è uniforme la velocità non è costante e il rapporto $\Delta x/\Delta t$ ci fornisce la velocità media nell'intervallo di tempo Δt. Tale valore *dipende* dall'intervallo di tempo considerato.

Studiamo ad esempio il moto di una pallina che rotola lungo un regolo graduato, leggermente inclinato rispetto al piano orizzontale (vedi fig. 4.1).

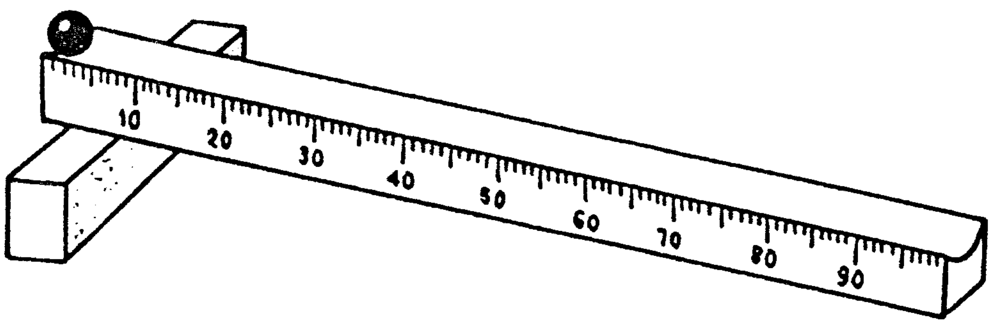
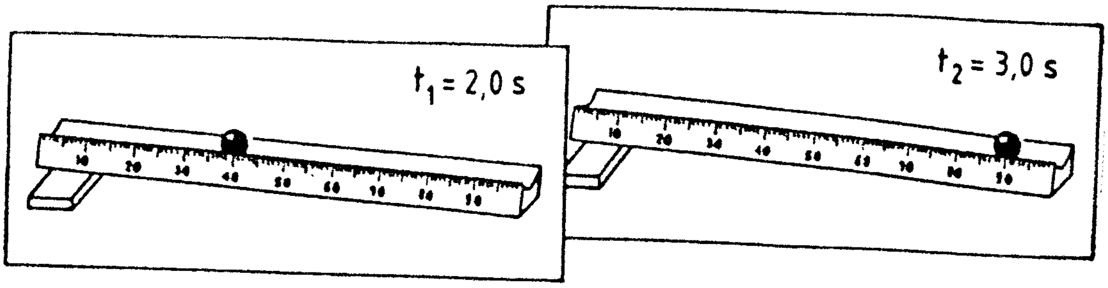


Figura 4.1

Poniamo la pallina sull'estremo più alto del regolo e al tempo $t_0 = 0$ lasciamola rotolare liberamente verso il basso. Mediante due fotografie determiniamo la posizione della pallina agli istanti $t_1 = 2,0s$ e $t_2 = 3,0s$.



(a) (b)

Figura 4.2

Si ottiene (vedi fig. 4.2): $x_1 = 40cm$ e $x_2 = 90cm$.

Se consideriamo l'intervallo di tempo $\Delta t = t_1 - t_0$ abbiamo

$$\Delta t = 2,0s, \quad \Delta x = 40cm \quad \text{e} \quad \Delta x/\Delta t = 20cm/s$$

Se consideriamo invece l'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_0$ abbiamo

$$\Delta t = 3,0s, \quad \Delta x = 90cm \quad \text{e} \quad \Delta x/\Delta t = 30cm/s$$

Tali valori ci forniscono poche informazioni sul moto. Essi ci dicono solo che la velocità della pallina aumenta durante il moto.

Tuttavia se consideriamo un intervallo di tempo Δt sufficientemente breve, possiamo trascurare in tale intervallo di tempo la variazione della velocità e *assumere che il moto sia uniforme*. Indicato allora con δt(*) un intervallo di tempo molto piccolo, definiremo velocità all'istante t (*velocità istantanea*) il rapporto

$$v_x = \frac{\delta x}{\delta t} \tag{4.1}$$

dove δx è lo spostamento nell'intervallo di tempo compreso tra i due istanti t e $t + \delta t$.

Consideriamo, ad esempio, la pallina all'istante $t_1 = 2s$.

Nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1 = 1s$ la pallina ha percorso uno spazio

(*) - Anche in questo caso il simbolo δ (che si legge ancora *delta*) non è una quantità algebrica che moltiplica x o t, ma una abbreviazione per indicare una differenza tra posizioni o istanti di tempo molto vicini tra loro.

$\Delta x = 90cm - 40cm = 50cm$ e si è quindi mossa con una velocità media $\Delta x/\Delta t = 50cm/s$.

Ripetiamo l'esperimento diminuendo l'intervallo di tempo Δt.

Poniamo di nuovo la pallina sull'estremo più alto del regolo e lasciamola ancora rotolare liberamente verso il basso. Mediante un'altra fotografia determiniamo la posizione della pallina al tempo $t' = 2,4s$ (vedi fig. 4.3a).

Si ottiene $x' = 58cm$. Tenendo ancora per buona la posizione $x_1 = 40cm$ per il tempo $t_1 = 2,0s$ si ottiene

$$\Delta x = x' - x_1 = 18\ cm$$

Essendo in questo caso $\Delta t = t' - t_1 = 0,4s$ si ha

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{18cm}{0,4s} = 45\ cm/s$$

Questo valore rappresenta la velocità media nell'intervallo di tempo compreso tra $t_1 = 2,0s$ e $t' = 2,4s$.

Ripetiamo più volte l'esperimento rendendo sempre più piccolo l'intervallo di tempo $\Delta t = t' - t_1$.

Dalle fotografie riportate in fig. 4.2 e in fig. 4.3, tenendo conto che per

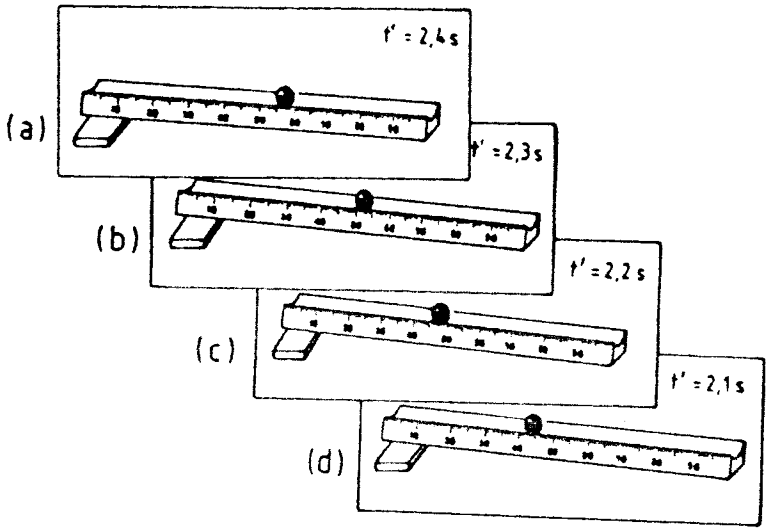


Figura 4.3

$t_1 = 2,0s$ è $x_1 = 40cm$, si ottengono i risultati mostrati nella tabella 4.1.

TABELLA 4.1

figura	t' in s	x' in cm	Δx in cm	Δt in s	$\Delta x/\Delta t$ in cm/s
4.2*b*	3,0	90	50	1,0	50
4.3*a*	2,4	58	18	0,4	45
4.3*b*	2,3	53	13	0,3	43,3
4.3*c*	2,2	48	8	0,2	40
4.3*d*	2,1	44	4	0,1	40

A questo punto diventa inutile continuare a diminuire la lunghezza dell'intervallo di tempo Δt in quanto si introducono errori di misura sempre maggiori e non si può quindi migliorare il risultato.
Possiamo quindi assumere per la *velocità della pallina all'istante* $t_1 = 2,0s$ il valore

$$v_x = 40\ cm/s$$

Il valore della velocità indicato dal tachimetro dell'automobile fornisce in pratica la velocità con cui si sta muovendo l'automobile in ogni istante.

Supponiamo ora di conoscere la legge oraria con cui un oggetto si muove lungo l'asse x, ad esempio

$$x = 10cm/s^2 \cdot t^2 \tag{4.2}$$

Per determinare il valore della velocità ad un certo istante, ad esempio $t_1 = 1s$, possiamo procedere come nel caso precedente e calcolare mediante la relazione 4.2 la posizione dell'oggetto al tempo t_1 e al tempo $t' = t_1 + \Delta t$ per valori sempre più piccoli dell'intervallo di tempo Δt.
Tenendo conto che per $t_1 = 1s$ abbiamo $x_1 = 10cm$, si ottengono per il rapporto $\Delta x/\Delta t$ i valori riportati nella tabella 4.2.

TABELLA 4.2

t' in s	x' in cm	Δx in cm	Δt in s	$\Delta x/\Delta t$ in cm/s
2,0	40	30	1,0	30
1,6	25,6	15,6	0,6	26
1,4	19,6	9,6	0,4	24
1,2	14,4	4,4	0,2	22
1,1	12,1	2,1	0,1	21
1,05	11,025	1,025	0,05	20,5
1,01	10,201	0,201	0,01	20,1
...	...	...	...	...

Come si vede dalla tabella, il valore del rapporto $\Delta x/\Delta t$ continua a diminuire quanto più piccolo diventa il valore di Δt. Tuttavia dalla fig. 4.4 si vede che al diminuire di Δt il valore del rapporto $\Delta x/\Delta t$ *tende* al valore di 20 cm/s.

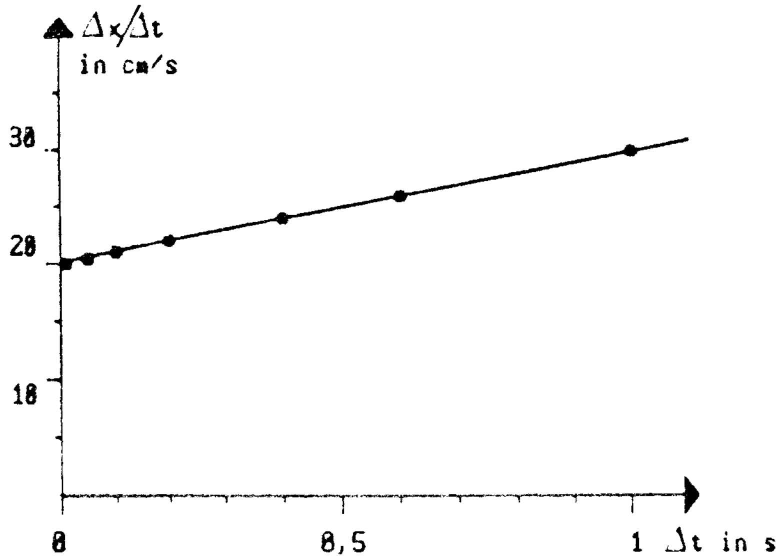


Figura 4.4

Possiamo allora definire, più correttamente, *velocità istantanea* il valore a cui *tende* il rapporto $\Delta x/\Delta t$ quando l'intervallo di tempo Δt *tende* a *zero*.

D4.1 Determinare la velocità all'istante $t_0 = 0$, dell'oggetto che si muove con la legge oraria 4.2.

D4.2 Determinare la velocità media nell'intervallo di tempo compreso tra $t_0 = 0$ e $t_1 = 1s$ dell'oggetto che si muove con la legge oraria 4.2.

D4.3 Determinare la velocità all'istante $t = 3s$ di un oggetto che si muove di moto rettilineo uniforme con legge oraria
$$x = x_0 + v_x t$$
dove $x_0 = 3cm$ e $v_x = 5cm/s$.

Evidentemente nel caso di un moto uniforme la velocità ad ogni istante coincide con il valore costante della velocità.

Come nel caso della velocità media, anche la velocità istantanea v_x è espressa da un numero relativo il cui segno indica se l'oggetto si sta muovendo nel verso positivo o in quello negativo dell'asse x.

5. Accelerazione

a. Definizione

Quando un'automobile aumenta la sua velocità si dice che essa *accelera*; quando la velocità diminuisce si dice che *rallenta*, o *decelera*. In Fisica per indicare come varia la velocità di un oggetto si introduce una nuova grandezza chiamata *accelerazione*.

Limitiamoci sempre a considerare moti che avvengono lungo una traiettoria rettilinea, che assumeremo come asse x.

Definiamo *accelerazione* (media) in un certo intervallo di tempo Δt il rapporto tra la variazione di velocità $\Delta v_x = v_{2x} - v_{1x}$ che ha subito l'oggetto in tale intervallo e l'intervallo di tempo stesso, cioè

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1} \qquad 5.1$$

L'accelerazione, come la velocità, è rappresentata da un numero relativo.

In particolare, se si assume come verso *positivo* dell'asse di riferimento quello in cui si *muove* l'oggetto, v_{1x} e v_{2x} hanno segno *positivo*: un oggetto che accelera ($v_{2x} > v_{1x}$) ha un'accelerazione positiva; un oggetto che decelera ($v_{2x} < v_{1x}$) ha un'accelerazione negativa. Per indicare il *valore* dell'accelerazione usiamo la notazione $|a_x|$ o semplicemente a.

L'accelerazione, essendo un rapporto tra velocità e tempo, si misura in

$$\frac{m/s}{s} = m/s^2$$

oppure in cm/s^2. Non viene invece normalmente usata l'unità km/h^2.

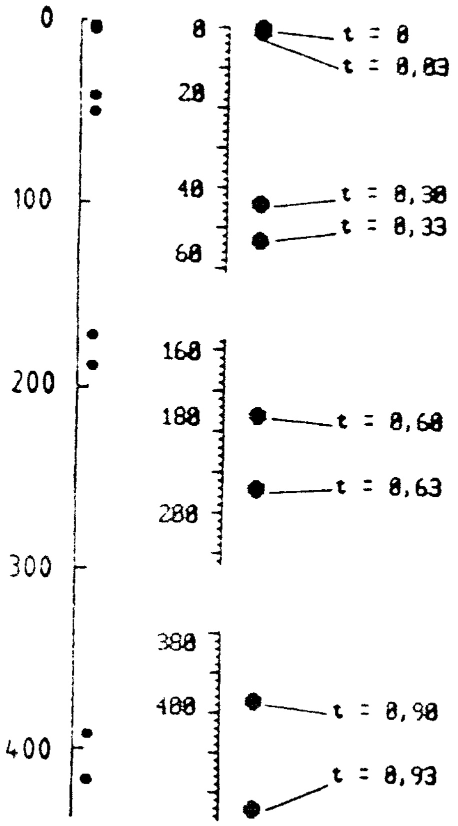
D5.1 Un'automobile, partendo da ferma, raggiunge in 10 *secondi* una velocità di 60 km/h. Trovare il valore dell'accelerazione media dell'automobile in questo intervallo di tempo.

D5.2 Un'automobile che viaggia a 80 km/h riesce a fermarsi in 4 *secondi*. Trovare il valore dell'accelerazione media in tale intervallo.

In natura molti movimenti sono accelerati o decelerati. Il moto di una pallina lanciata su un piano orizzontale è decelerato: infatti la sua velocità va diminuendo fino ad annullarsi. Così pure è decelerato il moto di un sasso lanciato verso l'alto.

Un moto accelerato è invece quello di un sasso che cade: la sua velocità infatti aumenta con l'aumentare del tempo. Tale moto avviene lungo una *linea verticale*, detta *verticale*. Data l'importanza di tale moto, cerchiamo di studiarlo in dettaglio ed esaminiamo il moto di caduta libera di una pallina, cioè il moto con cui la pallina, lasciata libera, cade verso il suolo.

Mediante una serie di fotografie registriamo la posizione della pallina a diversi istanti, iniziando dall'istante in cui la pallina viene lasciata cadere ($t = 0$). I risultati ottenuti sono riportati nella fig. 5.1 insieme all'indicazione



t in s	x in cm	δx in cm	$v_x = \delta x/\delta t$ in cm/s
0	0	0	0
0,03	-		
0,30	44	9	$3 \cdot 10^2$
0,33	53		
0,60	176	18	$6 \cdot 10^2$
0,63	194		
0,90	397	27	$9 \cdot 10^2$
0,93	424		

Figura 5.1

dell'istante di tempo corrispondente ad ogni posizione della pallina. Nella tabella a fianco della figura sono riportati i risultati numerici relativi al tempo e alla posizione della pallina, nella prima e seconda colonna rispettivamente. Poiché non è possibile distinguere le posizioni della pallina ai due istanti $t = 0$ e $t = 0,03s$, assumiamo $\delta x = 0$ e pertanto $v_s = 0$. Al tempo $t = 0,30s$ lo spostamento nell'intevallo di tempo $\delta t = 0,03s$ risulta $\delta x = 9$ cm e quindi $v_s = 3 \cdot 10^2$ cm/s. Possiamo assumere tale valore come velocità all'istante $t = 0,30s$. Analogamente al tempo $t = 0,60s$ si trova $v_s = 6 \cdot 10^2$ cm/s. La velocità non è costante ma aumenta con il passare del tempo.

Costruiamo il grafico spazio-tempo per il moto appena studiato. Come si vede dalla fig. 5.2 i vari punti rappresentativi del moto non stanno su di una retta ma su di una linea curva che, in questo caso, è una *parabola*.

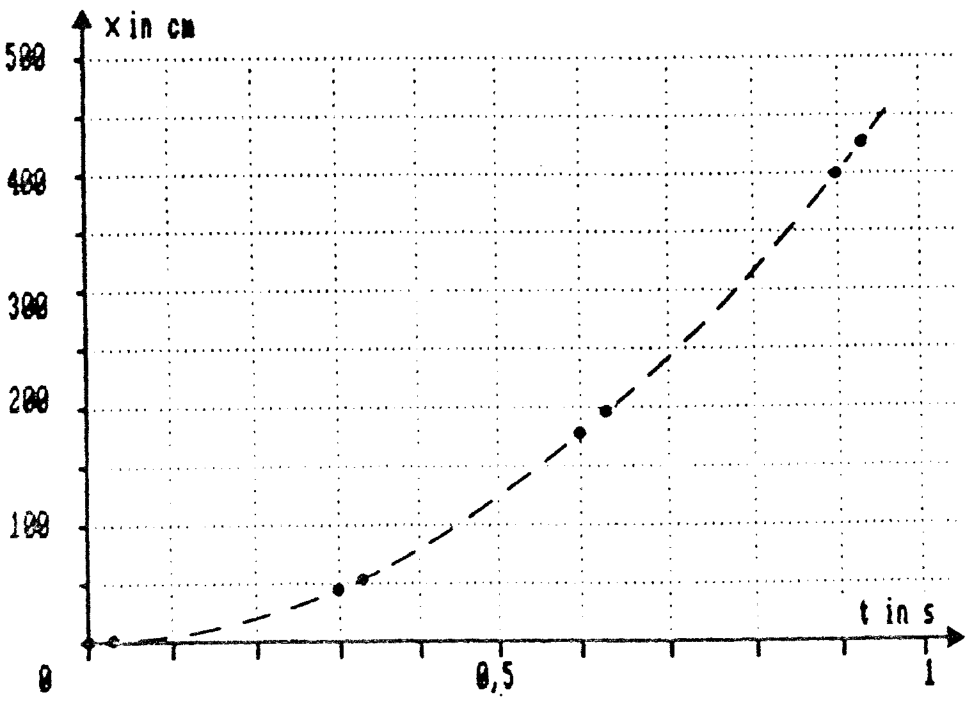


Figura 5.2

Poiché la velocità varia nel tempo, è utile costruire anche il grafico velocità-tempo. Come si vede dalla fig. 5.3 in tale grafico i punti che rappresentano la velocità della pallina a diversi valori del tempo si trovano su di una linea retta.

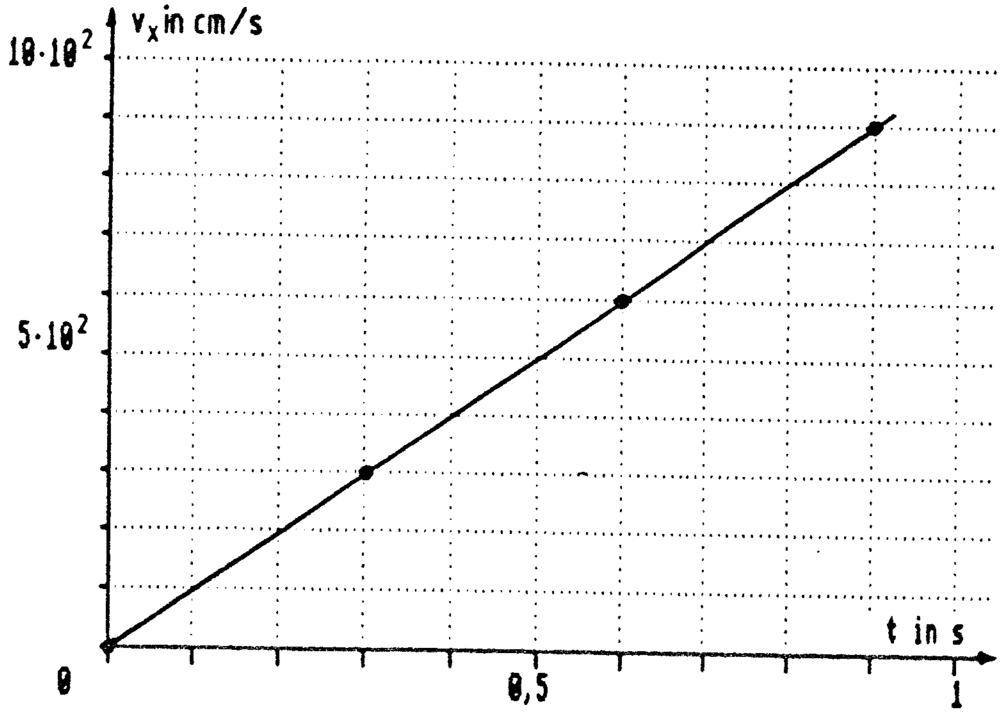


Figura 5.3

Calcoliamo ora l'accelerazione media della pallina. Nell'intervallo di tempo compreso tra $t = 0$ e $t = 0,3s$ abbiamo

$$a_x = \frac{3 \cdot 10^2 cm/s \ - \ 0}{0,3s} = 1 \cdot 10^3 \ cm/s^2$$

Nel successivo intervallo di tempo compreso tra $t = 0,3s$ e $t = 0,6s$ abbiamo

$$a_x = \frac{6 \cdot 10^2 cm/s \ - \ 3 \cdot 10^2 cm/s}{0,3s} = 1 \cdot 10^3 \ cm/s^2$$

Se consideriamo l'intero intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = 0,6s$ otteniamo ancora

$$a_x = \frac{6 \cdot 10^2 cm/s \ - \ 0}{0,6s} = 1 \cdot 10^3 \ cm/s^2$$

Si tratta quindi di un moto rettilineo nel quale *l'accelerazione rimane costante.*

b. Moto rettilineo uniformemente vario

Un moto rettilineo con accelerazione costante è detto *moto rettilineo uniformemente vario.* Si può poi distinguere il caso in cui la velocità aumenta ed il moto è detto *uniformemente accelerato* e quello in cui la velocità diminuisce che è detto *uniformemente decelerato.*

Nel moto uniformemente accelerato il *valore* della velocità aumenta proporzionalmente al tempo, mentre nel moto uniformemente decelerato il *valore* della velocità diminuisce proporzionalmente al tempo. Se *scegliamo* come *verso* dell'asse di riferimento *quello in cui si muove l'oggetto*, per un moto accelerato $a_x > 0$ mentre per uno decelerato $a_x < 0$. Evidentemente se *cambiamo* il *verso* dell'asse di riferimento *cambia* il segno dell'accelerazione.

Poiché l'accelerazione è costante, la relazione

$$a_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}$$

fornisce lo stesso risultato per qualsiasi intervallo di tempo. Consideriamo allora l'intervallo di tempo compreso tra l'istante $t = 0$ e un generico istante successivo t, indicando con v_{0x} la velocità dell'oggetto all'istante iniziale $t = 0$ e con v_x la velocità all'istante t. Possiamo scrivere

$$a_x = \frac{v_x - v_{0x}}{t - 0} = \frac{v_x - v_{0x}}{t}$$

da cui

$$v_x = v_{0x} + a_x t \tag{5.2}$$

La relazione 5.2 ci permette di calcolare in ogni istante valore e segno della velocità di un oggetto conoscendone l'accelerazione e la velocità al tempo $t = 0$.

Consideriamo ad esempio un oggetto che abbia inizialmente ($t = 0$) una velocità $v_0 = 30\ m/s$: se esso si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato con una accelerazione $a = 10\ m/s^2$, al tempo $t = 2s$ la sua velocità è

$$v_2 = 30\ m/s + 10\ m/s^2\ \cdot 2s = 50\ m/s$$

Se l'oggetto si muove invece di moto rettilineo uniformemente ritardato, al tempo $t = 2s$ la sua velocità è

$$v_2 = 30\ m/s + (-10 m/s^2) \cdot 2s = 10\ m/s$$

Infatti, avendo assunto come direzione positiva quella del moto, nel primo caso è $a_x = 10 m/s^2$ e nel secondo $a_x = -10 m/s^2$.

In un grafico velocità-tempo i due moti precedenti sono descritti da due segmenti, come mostrato in fig. 5.4.

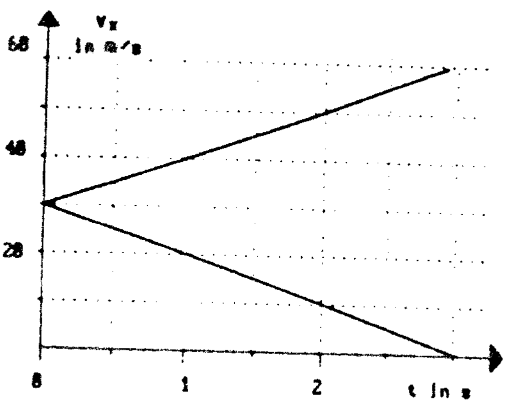


Figura 5.4

D5.3 Cosa succede all'oggetto che si muove di moto uniformemente ritardato per $t = 3s$?

Cerchiamo ora di trovare lo spostamento in un generico intervallo di tempo Δt di un oggetto che si muove di moto rettilineo uniformemente vario. Come abbiamo visto, se un oggetto si muove di moto uniforme con velocità costante v_{0x} in un grafico velocità-tempo [nel quale il moto è rappresentato da una retta parallela all'asse dei tempi (vedi fig. 5.5a)], lo spostamento risulta numericamente uguale alla superficie del rettangolo che ha come base $\Delta t = t$ e come altezza v_{0x}.

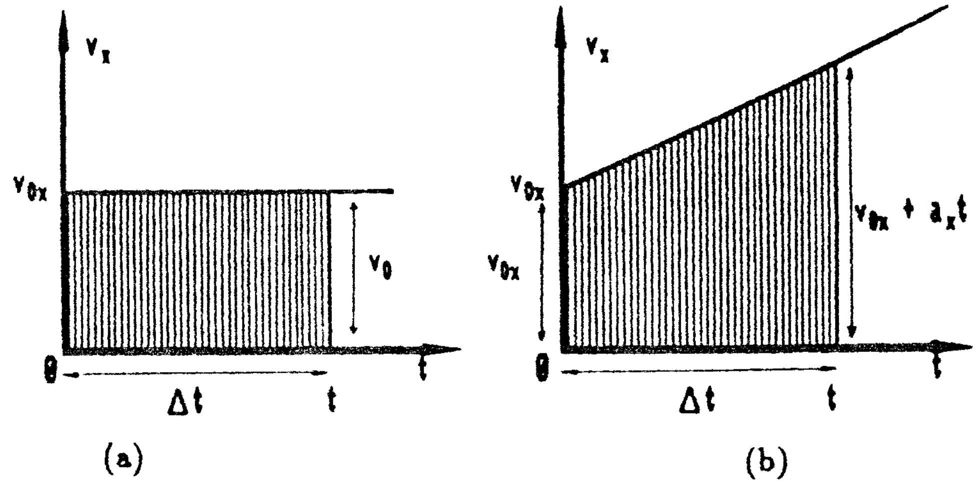


Figura 5.5

Allo stesso modo *possiamo ritenere* che anche nel caso di un moto uniformemente vario [che, come abbiamo visto, in un grafico velocità-tempo è rappresentato da una retta inclinata rispetto all'asse dei tempi (vedi fig. 5.5b)] lo spostamento sia numericamente uguale alla superficie sottostante la linea del grafico velocità-tempo e cioè la superficie del trapezio rettangolo avente come basi v_{0x} e $(v_{0x} + a_x t)$ e come altezza $\Delta t = t$, cioè

$$\Delta x = \frac{1}{2}[v_{0x} + (v_{0x} + a_x t)] \cdot \Delta t = v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

Se indichiamo con x_0 la posizione dell'oggetto al tempo $t = 0$ abbiamo $\Delta x = x - x_0$ e quindi

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \qquad 5.3$$

La 5.3 è la *legge oraria* del moto *uniformemente* vario ($a_x = costante$).

Le relazioni 5.2 e 5.3 ci permettono di ricavare ad ogni istante la posizione e la velocità dell'oggetto conoscendo, oltre all'accelerazione, la posizione x_0 e la velocità v_{0x} all'istante $t = 0$ (dette anche *condizioni iniziali del moto*).

Dalle relazioni 5.2 e 5.3 è possibile ottenere una terza relazione che può essere utile in molti casi.

Ricavando dalla 5.2 il valore del tempo t

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}$$

e sostituendolo nella 5.3 si ottiene

$$x - x_0 = v_{0x}\frac{v_x - v_{0x}}{a_x} + \frac{1}{2}a_x\frac{(v_x - v_{0x})^2}{a_x^2}$$

da cui si ricava

$$a_x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2(x - x_0)} \qquad 5.4$$

Calcoliamo ora la velocità media nell'intervallo di tempo compreso tra $t = 0$ e il generico istante t.

Tenendo conto della relazione 5.3 abbiamo

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - t_0} = \frac{v_{0x}t + (1/2)a_x t^2}{t} = v_{0x} + \frac{1}{2}a_x t = \frac{1}{2}[v_{0x} + (v_{0x} + a_x t)]$$

Tenendo conto della relazione 5.2 la precedente relazione può essere riscritta così

$$v_m = \frac{v_{0x} + v_x}{2} \qquad 5.5$$

cioè in un moto uniformemente vario la velocità media in un certo intervallo di tempo è uguale al valor medio tra la velocità iniziale e quella finale.

Proviamo ad applicare le relazioni precedenti ad alcuni casi particolari.

i. Un'automobile parte da ferma con un'accelerazione $a = 2\ m/s^2$. Presa come origine la posizione iniziale dell'automobile e come verso quello del moto abbiamo: $x_0 = 0$, $v_{0x} = 0$ e $a_x = a$. Dopo un tempo $t = 10s$ l'automobile si trova nella posizione

$$x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2} \cdot 2m/s^2 \cdot (10s)^2 = 100\ m$$

e ha una velocità

$$v_x = 2\ m/s^2 \cdot 10s = 20\ m/s$$

Cioè dopo $t = 10s$ l'automobile ha percorso una distanza di $100m$ e si sta muovendo con una velocità $v = 20m/s$.

ii. Un'automobile che viaggia con una velocità di 36 km/h accelera uniformemente fino a raggiungere dopo $10s$ una velocità di 72 km/h.
Preso come verso positivo quello in cui si muove l'automobile e come istante iniziale $t = 0$ l'istante in cui l'automobile inizia ad accelerare, abbiamo

$$v_{0x} = 36\ km/h = 10\ m/s$$

$$v_x = 72\ km/h = 20\ m/s \qquad \text{per} \qquad t = 10s$$

La relazione 5.2 diventa

$$20\ m/s = 10\ m/s + a_x \cdot 10s$$

da cui

$$a_x = \frac{20\ m/s - 10\ m/s}{10s} = 1\ m/s^2$$

cioè l'automobile si è mossa con un'accelerazione il cui valore è $a = 1m/s^2$.

La legge oraria del moto è quindi (vedi 5.3)

$$x = 10m/s \cdot t + \frac{1}{2} \cdot 1m/s^2 \cdot t^2$$

All'istante $t = 10s$ l'automobile si trova nella posizione

$$x = 100\ m + 50\ m = 150\ m$$

Cioè per passare dalla velocità v_{0x} alla velocità v_x l'automobile ha percorso uno spazio $\Delta x = 150\ m$.

Lo stesso risultato poteva essere ottenuto calcolando mediante la 5.5 la velocità media

$$v_m = \frac{1}{2}(10\ m/s + 20\ m/s) = 15\ m/s$$

e ricavando Δx dalla relazione

$$\Delta x = v_m \cdot \Delta t = 15m/s \cdot 10s = 150\ m$$

iii. Un'automobilista, viaggiando ad una velocità v_0, decide di fermarsi. Supponiamo che l'effetto dei freni imprima all'automobile una decelerazione a. Poiché il moto è decelerato, se assumiamo come verso positivo quello in cui si muove l'automobile e poniamo $t = 0$ l'istante in cui comincia la frenata abbiamo $v_{0x} = v_0$ e $a_x = -a$. La relazione 5.2 diventa allora

$$v_x = v_0 - at$$

La velocità va diminuendo in modo uniforme e l'automobile si ferma quando $v_x = 0$, cioè dopo un tempo t_f dall'inizio della frenata, tale che

$$v_0 - at_f = 0$$

da cui

$$t_f = \frac{v_0}{a} \tag{5.6}$$

Pertanto un'automobile che viaggia ad una velocità v_0 si ferma in un intervallo di tempo Δt_f, detto *tempo di frenata*, dato dalla relazione

$$\Delta t_f = t_f - 0 = \frac{v_0}{a} \qquad 5.6'$$

All'istante t_f l'automobile si trova nella posizione

$$x_f = x_0 + v_0 t_f - \frac{1}{2} a t_f^2$$

essendo x_0 la posizione all'inizio della frenata.

Sostituendo a t_f il valore indicato dalla relazione 5.6 si ottiene che l'automobile per fermarsi ha bisogno di uno spazio $\Delta s_f = x_f - x_0$, detto *spazio di frenata*,

$$\Delta s_f = x_f - x_0 = v_0 \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} a \frac{v_0^2}{a^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} \qquad 5.7$$

Osserviamo che tale relazione poteva essere ricavata direttamente dalla relazione 5.4 ponendo $v_x = 0$ e $a_x = -a$.

iv. Un'automobile che viaggia ad una velocità $v_0 = 90\ km/h$ si ferma in $4s$. Quanti *metri* percorre prima di fermarsi?

Per ottenere il valore dello spazio percorso dall'automobile possiamo applicare la relazione 5.7. Il valore della decelerazione a non è noto, ma può essere ottenuto dalla relazione 5.6

$$a = \frac{v_0}{t_f}$$

Dalla relazione 5.7 abbiamo allora

$$\Delta s_f = \frac{1}{2} v_0^2 \cdot \frac{1}{(v_0/t_f)} = \frac{1}{2} v_0 t_f = \frac{1}{2} \cdot 25 m/s \cdot 4s = 50\ m$$

Osserviamo che tale risultato poteva essere ottenuto direttamente dalla relazione 5.5. Abbiamo infatti $v_m = v_0/2$, da cui

$$\Delta s_f = v_m t_f = \frac{1}{2} v_0 t_f$$

D5.4 Un'automobile, partendo da ferma, raggiunge in 100 *metri* la velocità di 50 km/h. Calcolare il valore dell'accelerazione supposta costante. Calcolare anche il tempo impiegato a raggiungere tale velocità.

E5.1 Un automobilista che sta viaggiando ad una velocità di 120 km/h vede improvvisamente un'altra macchina ferma a $70m$ di distanza. Se i freni della sua automobile sono in grado di produrre una decelerazione $a = 6,25\ m/s^2$, può l'automobilista evitare l'incidente?

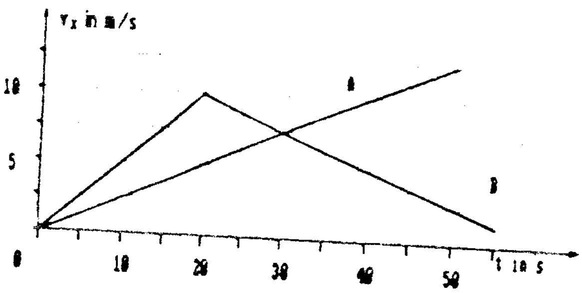
E5.2 Calcolare, nel caso di una decelerazione $a = 6,25\ m/s^2$, lo spazio necessario per fermarsi per diversi valori della velocità v_0. Costruire quindi un grafico ponendo le velocità in ordinata e gli spazi di frenata in ascissa e discutere i risultati.

E5.3 Quale decelerazione bisogna imprimere ad un'automobile che viaggia a 100 km/h per fermarla in 100 *metri*?

E5.4 Un oggetto, che ha inizialmente la velocità di 100 m/s, si muove di moto uniformemente ritardato con decelerazione $a = 2\ m/s^2$. Calcolare la velocità e lo spazio percorso dopo $10s$ dall'istante iniziale.

E5.5 Un oggetto si muove con velocità iniziale $v_0 = 20\ m/s$ e accelerazione $a = 0,5\ m/s^2$. Dopo quanto tempo avrà acquistato velocità doppia e tripla, rispettivamente, della sua velocità iniziale?

E5.6 La figura seguente mostra il grafico della velocità in funzione del tempo di due motociclisti A e B che partono insieme e fanno lo stesso percorso.
a. Qual è l'accelerazione di A?
b. Qual è l'accelerazione di B tra 0 e 20 *secondi*?
c. A e B hanno la stessa velocità ?
d. A quale distanza dal punto di partenza si trovano A e B dopo 20 *secondi* e dopo 50 *secondi*?
e. Quando A e B si trovano ancora insieme?



6. Moto verticale dei gravi

Come abbiamo visto, una pallina di piombo, lasciata libera, cade verso il suolo muovendosi lungo la verticale di moto rettilineo uniformemente accelerato. Il valore dell'accelerazione, se misurato con una precisione maggiore di quella ottenibile dai dati di fig. 5.1, vale $9,80\ m/s^2$. È facile mostrare che in prossimità della superficie terrestre tutti gli oggetti 'pesanti', comunemente chiamati *gravi*, lasciati liberi cadono verticalmente con una accelerazione costante di $9,80\ m/s^2$. Tale accelerazione è comunemente detta *accelerazione di gravità* e il suo valore indicato con la lettera g

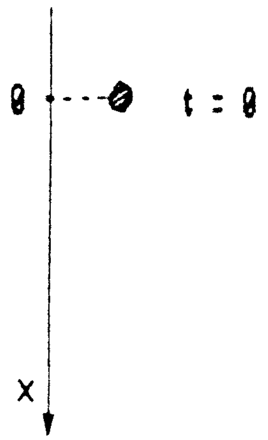
$$g = 9,80\ m/s^2 = 980\ cm/s^2$$

In realtà il valore di g varia leggermente da luogo a luogo, ma tali variazioni sono solo dell'ordine di $1\ cm/s^2$, come si può vedere dalla tabella 6.1, dove sono riportati i valori di g in funzione della latitudine. Inoltre il valore di g diminuisce col crescere della quota con una variazione di $0,003\ m/s^2$ per ogni $1000\ m$.

TABELLA 6.1

Latitudine	g (m/s^2) *al livello del mare*
0^0	9,780
10^0	9,782
20^0	9,786
30^0	9,793
40^0	9,802
45^0	9,806
50^0	9,811
60^0	9,819
70^0	9,826
80^0	9,831
90^0	9,832

Per scrivere le relazioni che descrivono il moto di caduta libera di un grave *inizialmente fermo* assumiamo come riferimento *una retta verticale orientata verso il basso* e come origine la posizione iniziale (all'istante $t = 0$) del grave (vedi fig. 6.1). In questo caso abbiamo $a_x = g$, $v_{0x} = 0$, $x_0 = 0$ e le relazioni 5.2, 5.3 e 5.4 diventano



$$x = \tfrac{1}{2}gt^2 \qquad 6.1a$$

$$v_x = gt \qquad 6.1b$$

$$v_x^2 = 2gx \qquad 6.1c$$

Figura 6.1

La posizione x e il valore v della velocità acquistata dal grave per diversi valori del tempo t sono allora

per $t = 0$	$x = 0$	$v = 0$
per $t = 0,3s$	$x = \frac{1}{2} \cdot 9,80m/s^2 \cdot (0,3s)^2 =$ $= 0,441m$	$v = 9,80m/s^2 \cdot 0,3s =$ $= 2,94\ m/s$
per $t = 0,6s$	$x = 1,76m$	$v = 5,88\ m/s$
per $t = 0,9s$	$x = 3,97m$	$v = 8,82\ m/s$

che coincidono, nei limiti degli errori sperimentali, con quelli riportati in fig. 5.1.

Consideriamo ad esempio una noce di cocco che si stacca da un albero ad un'altezza $h = 4m$ (vedi figura 6.2).

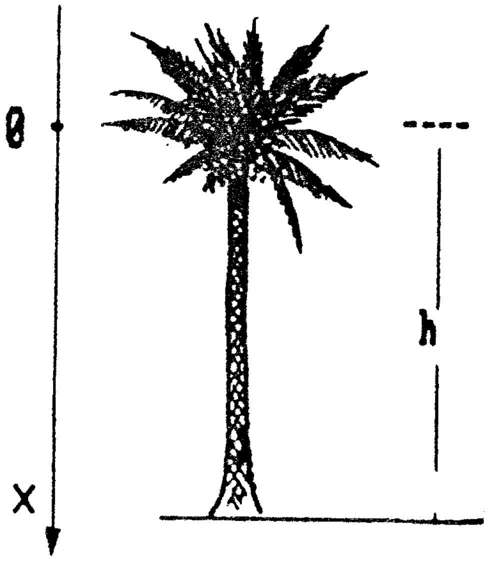


Figura 6.2

La noce di cocco raggiunge il suolo dopo un tempo t_s tale che ponendo $t = t_s$ nella 6.1a si ottiene $x = h$, cioè

$$h = \frac{1}{2} g t_s^2$$

da cui

$$t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad 6.2$$

Nel nostro caso

$$t_s = \sqrt{\frac{8m}{9,80m/s^2}} = 0,9s$$

Per trovare la velocità con cui la noce di cocco arriva al suolo possiamo utilizzare la relazione 6.1b sostituendo a t il valore t_s; abbiamo

$$v_x = 9,80 \cdot t_s = 8,82\ m/s$$

D6.1 Calcolare la velocità che raggiunge un sasso, lasciato cadere con velocità iniziale nulla, dopo aver percorso 100 m. Quanto tempo impiega a percorrere tale distanza?

In generale, se un sasso viene lasciato cadere ($v_0 = 0$) da una altezza h, esso raggiunge il suolo dopo un intervallo di tempo

$$\Delta t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad 6.3$$

e con una velocità il cui valore è

$$v = \sqrt{2gh} \qquad 6.4$$

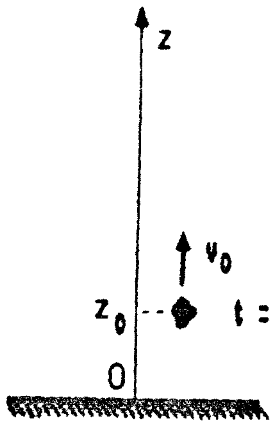
D6.2 Un sasso arriva a terra con una velocità $v = 100\ km/h$. Da quale altezza è stato lasciato cadere ($v_0 = 0$)?

D6.3 Un sasso arriva a terra dopo $5s$. Da quale altezza è stato lasciato cadere ($v_0 = 0$)?

Se la pallina, utilizzata per l'esperimento di fig. 5.1, invece che lasciata cadere, viene lanciata verticalmente verso l'alto, si osserva che il moto è uniformemente decelerato con un valore della accelerazione che è ancora $g = 9,80\ m/s^2$.

L'accelerazione di gravità, che come vedremo è dovuta all'attrazione terrestre, *agisce sempre dall'alto verso il basso, accelerando gli oggetti che cadono e decelerando quelli che si muovono verso l'alto.*

Per descrivere il moto di un grave che viene lanciato verticalmente verso l'alto con velocità v_0, conviene usare come *riferimento una retta orientata verso* *l'alto* e avente l'origine a livello del suolo; indichiamo tale asse come asse z (vedi fig. 6.3). In questo riferimento risulta: $a_z = -g$ e $v_z = v_0$; le relazioni 5.2, 5.3 e 5.4 diventano



$$z = z_0 + v_0 t - \tfrac{1}{2} g t^2 \qquad 6.5a$$

$$v_z = v_0 - gt \qquad 6.5b$$

$$v_z^2 = v_0^2 - 2g(z - z_0) \qquad 6.5c$$

Figura 6.3

Nelle 6.5 z_0 indica la posizione iniziale a cui si trova il grave (all'istante $t = 0$).

Applichiamo ora le formule 6.5 per analizzare nei dettagli il moto di un sasso che viene lanciato verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 19,6\ m/s$ partendo dal suolo ($z_0 = 0$).
I valori teorici che si ottengono per l'altezza z e la velocità v_z per diversi valori del tempo t sono riportati nella tabella 6.2.

TABELLA 6.2

t *in* s	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
z *in* m	0	8,6	14,7	18,4	19,6	18,4	14,7	8,6	0
v_z *in* m/s	19,6	14,7	9,8	4,9	0	−4,9	−9,8	−14,7	−19,6

Come si vede dalla tabella, nell'intervallo di tempo tra $t = 0$ e $t = 2s$ l'altezza aumenta fino a raggiungere un valore massimo $z_{max} = 19,6m$, mentre la velocità diminuisce fino ad annullarsi. Per valori del tempo $t > 2s$ il

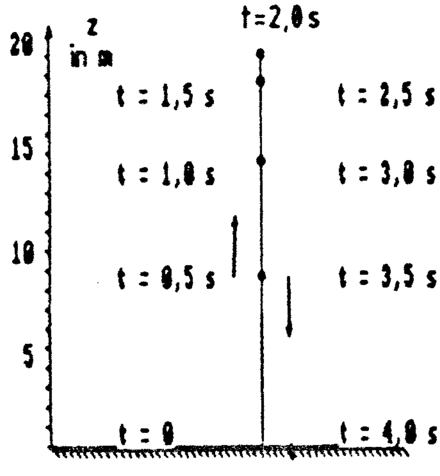


Figura 6.5

Come risulta dalla tabella 6.2, in ogni punto della traiettoria la velocità del sasso ha lo stesso valore sia che esso si trovi nella fase di salita, sia che esso si trovi nella fase di discesa; quello che cambia è solo il verso della velocità. Dalle relazioni 6.5 si ricava che quando un oggetto viene lanciato dal suolo verso l'alto con una velocità iniziale v_0 esso raggiunge in un intervallo di tempo

$$\Delta t_1 = \frac{v_0}{g} \qquad 6.6$$

un'altezza massima

$$h_{max} = \frac{v_0^2}{2g} \qquad 6.7$$

e quindi ricade verso il suolo, dove arriva dopo un intervallo di tempo

$$\Delta t_2 = 2\Delta t_1 = 2\frac{v_0}{g} \qquad 6.8$$

dal momento del lancio.

D6.3 Ricavare le relazioni 6.6, 6.7 e 6.8.

Naturalmente tutti i risultati che abbiamo sinora ottenuti sono rigorosamente validi solo se è possibile trascurare gli effetti dovuti alla presenza dell'aria.

E6.1 Un ragazzo vuole lanciare un sasso all'altezza di una casa alta $15m$. Con quale velocità deve lanciare il sasso?

E6.2 Una casa è costituita di 5 piani, ciascuno alto $3m$. Un ragazzo lascia cadere un sasso dal tetto. Determinare a quali istanti e con quale velocità il sasso passa all'altezza dei vari piani.

E6.3 Un oggetto cadendo giunge a terra con velocità $v = 14\ m/s$. Da quale altezza è caduto?

E6.4 Un ragazzo lancia un sasso verticalmente verso l'alto. Il sasso ricade a terra dopo $10s$. Quale altezza ha raggiunto il sasso?

E6.5 Un sasso è lanciato dal suolo verso l'alto con velocità $v_0 = 40\ m/s$. A quale altezza la sua velocità si dimezza?

E6.6 Due ragazzi si trovano rispettivamente al 3° piano ($h_1 = 9\ m$) e al 4° piano ($h_2 = 12\ m$) di un palazzo. Ad un certo istante il ragazzo del 3° piano lascia cadere un sasso. Con quale velocità il ragazzo del 4° piano deve lanciare verso il basso nello stesso istante il proprio sasso affinchè esso arrivi al suolo insieme a quello dell'altro ragazzo?

Naturalmente tutti i risultati che abbiamo sinora ottenuti sono rigorosamente validi solo se è possibile trascurare gli effetti dovuti alla presenza dell'aria.

E6.1 Un ragazzo vuole lanciare un sasso all'altezza di una casa alta $15m$. Con quale velocità deve lanciare il sasso?

E6.2 Una casa è costituita di 5 piani, ciascuno alto $3m$. Un ragazzo lascia cadere un sasso dal tetto. Determinare a quali istanti e con quale velocità il sasso passa all'altezza dei vari piani.

E6.3 Un oggetto cadendo giunge a terra con velocità $v = 14\ m/s$. Da quale altezza è caduto?

E6.4 Un ragazzo lancia un sasso verticalmente verso l'alto. Il sasso ricade a terra dopo $10s$. Quale altezza ha raggiunto il sasso?

E6.5 Un sasso è lanciato dal suolo verso l'alto con velocità $v_0 = 40\ m/s$. A quale altezza la sua velocità si dimezza?

E6.6 Due ragazzi si trovano rispettivamente al 3° piano ($h_1 = 9\ m$) e al 4° piano ($h_2 = 12\ m$) di un palazzo. Ad un certo istante il ragazzo del 3° piano lascia cadere un sasso. Con quale velocità il ragazzo del 4° piano deve lanciare verso il basso nello stesso istante il proprio sasso affinchè esso arrivi al suolo insieme a quello dell'altro ragazzo?

APPENDICE A - Cinematica relativa

Il concetto di moto è un *concetto relativo*. Infatti *un oggetto può essere considerato in moto o fermo a seconda del sistema di riferimento utilizzato*. Ad esempio il passeggero di un'automobile in moto è fermo rispetto all'autista, pur essendo in moto rispetto ad un osservatore che si trova fermo sulla strada.

Limitamoci a considerare *moti che avvengono lungo la stessa retta*, che assumeremo come asse x, e cerchiamo di trovare una relazione generale tra la velocità v_a di un oggetto rispetto ad un osservatore fisso O e la velocità v_r dello stesso oggetto rispetto ad un osservatore O' che si muove di moto uniforme con velocità v_t rispetto all'osservatore fisso.

La velocità v_r è la *velocità relativa* dell'oggetto rispetto all'osservatore in moto O', mentre la velocità v_a è la *velocità assoluta* rispetto all'osservatore fisso O. La velocità v_t con cui l'osservatore O' si muove rispetto all'osservatore fisso O è detta *velocità di trascinamento*.

Consideriamo ad esempio un passeggero che sta camminando lungo il corridoio di un autobus in movimento (vedi fig. A.1).

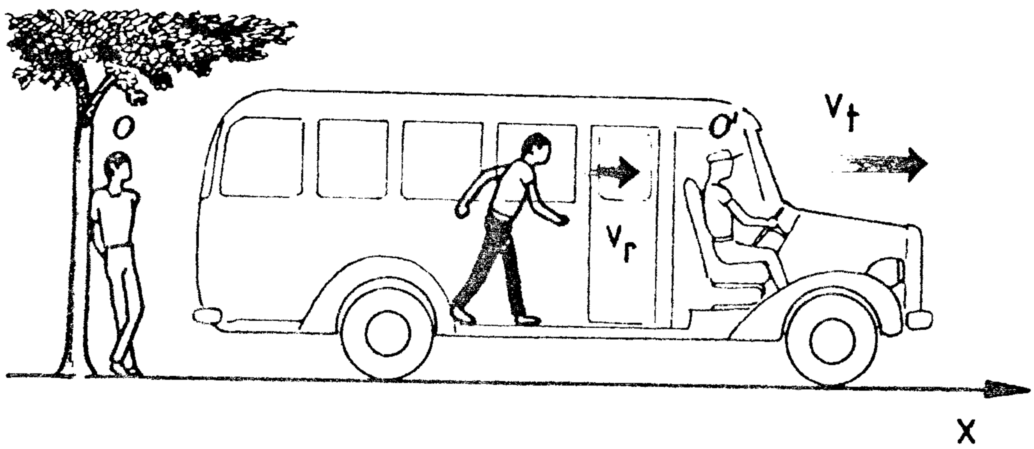


Figura A.1

In un intervallo di tempo Δt il passeggero si è spostato rispetto all'autista (osservatore O') di una quantità

$$\Delta x_r = v_r \cdot \Delta t$$

Nello stesso intervallo di tempo però l'autobus, e insieme ad esso il passeggero, si è spostato rispetto all'osservatore O di una quantità

$$\Delta x_t = v_t \cdot \Delta t$$

Nell'intervallo di tempo Δt il passeggero si è quindi spostato rispetto a O di una quantità $\Delta x_a = \Delta x_t + \Delta x_r$ e quindi la sua velocità rispetto a O è

$$v_{ax} = \frac{\Delta x_a}{\Delta t} = \frac{\Delta x_t + \Delta x_r}{\Delta t} = \frac{v_{tx}\Delta t + v_{rx}\Delta t}{\Delta t}$$

Cioè

$$v_{ax} = v_{tx} + v_{rx} \qquad A.1$$

La velocità assoluta con cui si muove un oggetto rispetto ad un osservatore fisso (o assoluto) O è data dalla somma della velocità relativa (rispetto all'osservatore O' in moto) e di quella di trascinamento con cui si muove l'osservatore O' (e quindi l'oggetto) rispetto all'osservatore fisso O.

Ricordiamo che le velocità sono sempre espresse da numeri relativi e pertanto la somma che figura nella relazione $A.1$ è una somma algebrica. In generale si assume come verso positivo quello in cui si muove l'osservatore O'. In questo caso quindi v_{tx} è sempre positiva.

DA.1 Un ragazzo è capace di lanciare un sasso in direzione orizzontale ad una velocità di 20 m/s. Se lancia il sasso in avanti mentre sta correndo ad una velocità di 7 m/s, con quale velocità si muove il sasso rispetto alla terra?

Consideriamo il caso di un ragazzo che sta remando su una barca lungo un fiume nel quale l'acqua scorre (cioè si muove rispetto alla terra) con una velocità di 2 km/h. Se egli è in grado di muoversi in acqua ferma ad una velocità di 5 km/h, remando in favore di corrente si muove, rispetto alla terra, con una velocità

$$v_{as} = 2\ km/h + 5\ km/h = 7\ km/h$$

In questo caso infatti $v_{ts} = 2km/h$ è la velocità con cui il ragazzo viene trascinato dalla corrente e $v_{rs} = 5km/h$ è la velocità del ragazzo rispetto all'acqua del fiume.

Se invece rema contro corrente si muove, rispetto alla terra, con una velocità

$$v'_{as} = 2\ km/h + (-5\ km/h) = -3\ km/h$$

In questo caso infatti il ragazzo si muove in direzione contraria al moto dell'acqua e quindi $v_{rs} = -5\ km/h$. La velocità assoluta del ragazzo risulta negativa e quindi il ragazzo si muove in verso opposto alla corrente, cioè *risale* la corrente.

Supponiamo allora che il ragazzo debba andare lungo il fiume da un villaggio A ad un villaggio B distanti tra loro 21 km. Il villaggio B si trova 'a valle' del villaggio A, cioè il fiume scorre da A verso B. Avendo assunto come verso positivo quello da A verso B, per andare da A a B il ragazzo impiega un tempo

$$\Delta t_1 = \frac{x_B - x_A}{v_{az}} = \frac{21\ km}{7\ km/h} = 3h$$

Per tornare indietro impiega invece un tempo

$$\Delta t_2 = \frac{x_A - x_B}{v_{az}} = \frac{-21\ km}{-3\ km/h} = 7h$$

Nel viaggio completo di andata e ritorno il ragazzo ha quindi percorso uno spazio complessivo $\Delta s = 42\ km$ in un tempo $\Delta t = 3h + 7h = 10h$. Egli si è quindi mosso ad una velocità media

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{42\ km}{10\ h} = 4,2\ km/h$$

DA.2 Perchè la velocità media sul percorso di andata e ritorno è diversa dalla velocità $v = 5\ km/h$ con cui il ragazzo si muoverebbe se non ci fosse la corrente?

DA.3 Se il ragazzo partisse dal villaggio B per andare al villaggio A e quindi ritornasse indietro impiegherebbe ancora 10 *ore*?

EA.1 Un aereo percorre ogni giorno avanti e indietro la distanza di 1000 km che separa due città A e B. Normalmente, cioè quando non soffia vento, il tempo totale di volo, andata e ritorno, è di 2 *ore*. Calcolare il tempo totale di volo quando soffia un vento da A verso B con velocità di 100 km/h.

EA.2 Un ragazzo che si trova su un autocarro che sta viaggiando a 40 km/h lancia un sasso con velocità $v = 15\ m/s$. Calcolare la velocità del sasso rispetto alla terra nel caso in cui il sasso sia lanciato nella direzione del moto e nel caso in cui sia lanciato nella direzione contraria al moto.

APPENDICE B - Velocità relativa

La relazione $A.1$ ricavata nella precedente Appendice può essere anche utilizzata quando si vuole conoscere *la velocità relativa* di due oggetti in moto.

Consideriamo due automobili A e B che si muovono lungo la stessa direzione con velocità v_A e v_B rispetto alla strada; si vuole conoscere la velocità v_{BA} della macchina B rispetto all'autista della macchina A.
In questo caso l'autista della macchina A rappresenta l'osservatore O'. Abbiamo allora

$$v_t = v_A \qquad v_a = v_B \qquad v_r = v_{BA}$$

e la $A.1$ diventa

$$v_{Bx} = v_{Ax} + v_{BAx}$$

che può essere riscritta nella forma

$$v_{BAx} = v_{Bx} - v_{Ax} \qquad B.1$$

Applichiamo la relazione $B.1$ ad alcuni casi particolari.

a. Le due automobili si muovono in verso opposto, l'una verso l'altra (vedi fig. $B.1$ nella quale le frecce indicano il verso del moto).

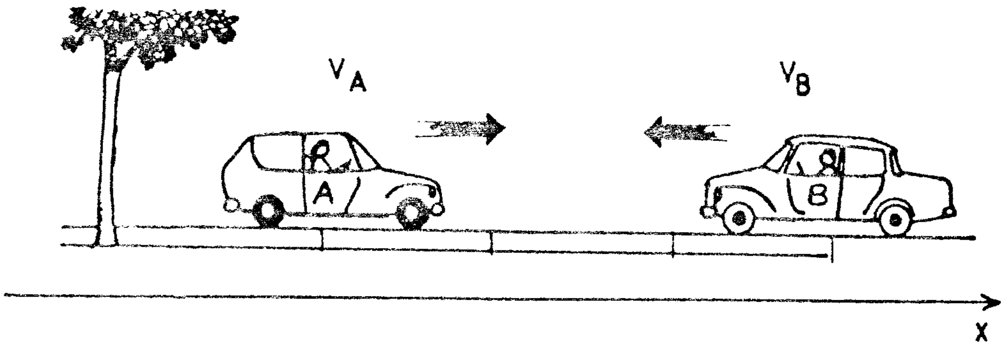


Figura $B.1$

Assunto come verso positivo dell'asse x quello in cui si muove l'automobile A, cioè quello da sinistra verso destra, allora v_{Bx} ha segno negativo, mentre v_{Ax} ha segno positivo.

La velocità relativa v_{BAx} ha segno negativo. Infatti dalla $B.1$ abbiamo

$$v_{BAx} = -v_B - (+v_A) = -(v_B + v_A) \qquad B.2$$

Rispetto all'autista dell'automobile A, l'automobile B si muove in verso negativo e quindi, trovandosi *davanti* ad A, gli si *avvicina* con una velocità relativa il cui *valore* v_{BA} è dato dalla somma dei *valori* v_A e v_B delle due velocità.

b. Le due automobili si muovono in verso opposto, allontanandosi l'una dall'altra (vedi fig. $B.2$).

Assumiamo come verso positivo dell'asse x quello in cui si muove l'automobile A, cioè il verso da destra verso sinistra.

Allora $v_{Bx} = -v_B$ e $v_{Ax} = v_A$.

La velocità relativa v_{BAx} ha segno negativo. Infatti dalla $B.1$ abbiamo

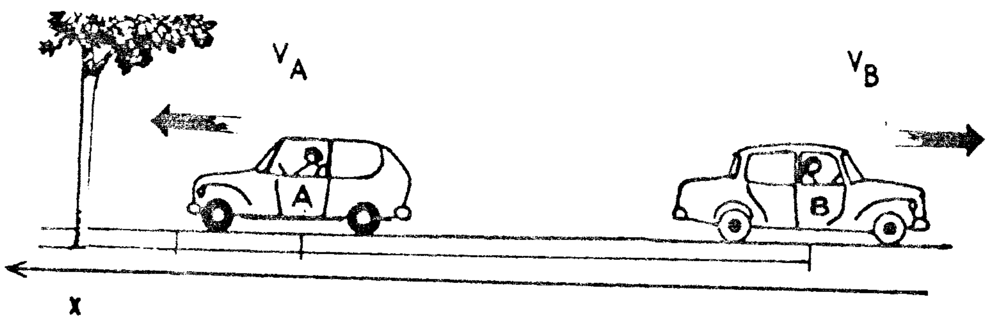


Figura $B.2$

$$v_{BAx} = -v_B - (+v_A) = -(v_B + v_A) \qquad B.3$$

Rispetto all'autista dell'automobile A, l'automobile B si muove in verso negativo e quindi, trovandosi *dietro* ad A, si *allontana* con una velocità relativa il cui *valore* v_{BA} è dato dalla somma dei *valori* v_A e v_B delle due velocità.

c. Le due automobili si muovono nello stesso verso (vedi fig. $B.3$) e la velocità dell'automobile B è maggiore di quella dell'automobile A.

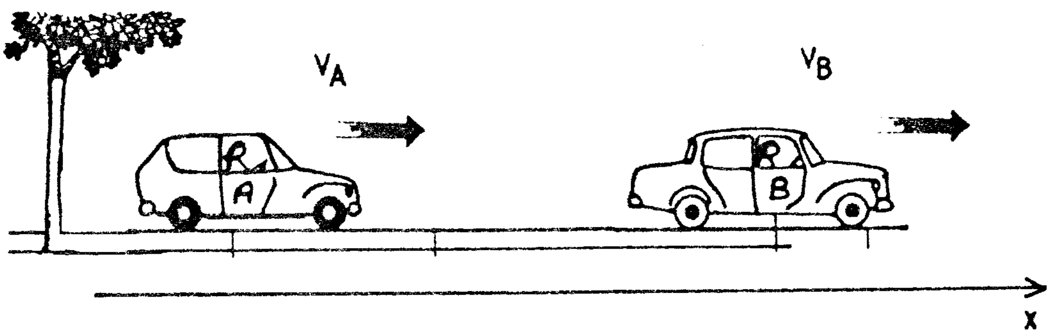


Figura $B.3$

Assumiamo di nuovo come verso positivo del riferimento quello in cui si muove l'automobile A, cioè il verso da sinistra verso destra. Allora $v_{Bx} = v_B$ e $v_{Ax} = v_A$ e, essendo $v_B > v_A$, la velocità relativa v_{BAx} ha segno positivo. Infatti usando la B.1 abbiamo

$$v_{BAx} = +v_B - (+v_A) = v_B - v_A \qquad \text{con} \qquad v_B > v_A \qquad B.4$$

Rispetto all'autista dell'automobile A, l'automobile B si muove in verso positivo e quindi, trovandosi *davanti* ad A, si *allontana* con una velocità relativa il cui *valore* v_{BA} è dato dalla differenza dei *valori* v_B e v_A delle due velocità.

d. Le due automobili si muovono ancora nello stesso verso (vedi fig. $B.3$) e la velocità dell'automobile A è maggiore di quella dell'automobile B. Assumiamo, come negli altri casi, come verso positivo del riferimento quello in cui si muove l'automobile A, cioè il verso da sinistra verso destra. Allora $v_{Bx} = v_B$ e $v_{Ax} = v_A$ e, poichè $v_B < v_A$, la velocità relativa v_{BAx} ha segno negativo. Infatti dalla B.1 abbiamo

$$v_{BAx} = +v_B - (+v_A) = -(v_A - v_B) \qquad \text{con} \qquad v_A > v_B \qquad B.5$$

Rispetto all'autista dell'automobile A, l'automobile B si muove in verso negativo e quindi, trovandosi *davanti* ad A, si *avvicina* con una velocità relativa il cui *valore* v_{BA} è dato dalla differenza dei *valori* v_A e v_B delle due velocità.

Applichiamo i risultati appena ottenuti a diverse situazioni.

i. Due ragazzi A e B partono da due paesi distanti tra loro 20 km e si muovono con velocità $v_A = v_B = 5\ km/h$ l'uno verso l'altro. Dopo quanto tempo si incontrano?

Per quanto abbiamo detto alla fine del punto a, *rispetto al ragazzo* A il ragazzo B parte da una distanza $\Delta s = 20\ km$ e si *avvicina* con una velocità relativa il cui *valore* è

$$v_{BA} = 5\ km/h + 5\ km/h = 10\ km/h$$

Il ragazzo B incontra il ragazzo A dopo un tempo

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_{BA}} = \frac{20\ km}{10\ km/h} = 2h$$

In tale intervallo di tempo entrambi i ragazzi hanno percorso rispetto ad un osservatore fisso uno spazio

$$\Delta s_A = \Delta s_B = 5(km/h) \cdot 2h = 10\ km$$

I due ragazzi si incontrano quindi a metà strada.

La soluzione 'rigorosa' del problema però avrebbe dovuto essere: preso un sistema di riferimento O' che si muove insieme al ragazzo A e assunto come verso positivo dell'asse x quello del moto del ragazzo A, le posizioni iniziali sono

$$x_A = 0 \qquad x_B = 20\ km$$

Rispetto a tale riferimento il ragazzo B si muove con una velocità (per la $B.2$)

$$v_{BAx} = -(5+5)\ km/h = -10\ km/h$$

Partendo dalla posizione x_B, esso raggiunge la posizione x_A dopo un tempo

$$\Delta t = \frac{x_A - x_B}{v_{BAx}} = \frac{0 - 20km}{-10km/h} = 2h$$

ii. Un'automobile A si lancia all'inseguimento di un'automobile B che inizialmente si trova ad una distanza di $1km$. Se $v_B = 70\ km/h$ e $v_A = 80\ km/h$, dopo quanto tempo l'automobile A raggiunge l'automobile B?

Per quanto detto alla fine del punto d, *rispetto all'autista dell'automobile A* l'automobile B si trova ad una distanza $\Delta s = 1\ km$ e si *avvicina* con una velocità relativa il cui *valore* è dato da

$$v_{BA} = 80\ km/h - 70\ km/h = 10\ km/h$$

Per 'percorrere' lo spazio Δs che la separa dall'automobile A essa impiega un intervallo di tempo

$$\Delta t = \frac{\Delta s}{v_{BA}} = \frac{1\ km}{10\ km/h} = 0,1h = 6\ min$$

cioè l'automobile A raggiunge l'automobile B dopo 6 *minuti*.

DB.1 Risolvere in modo 'rigoroso' il problema precedente, usando la relazione B.5.

EB.1 Due automobili A e B partono contemporaneamente e percorrono la stessa strada. L'automobile A viaggia ad una velocità media $v_A = 60\ km/h$ e l'automobile B ad una velocità media $v_B = 40\ km/h$. Dopo quanto tempo la loro distanza è di 20 km?

EB.2 Due automobili A e B partono alle *ore* 8 da due città distanti tra loro 200 km e si muovono una verso l'altra. L'automobile A viaggia ad una velocità media $v_A = 60\ km/h$ mentre l'automobile B ad una velocità media $v_B = 40\ km/h$. A che ora e in quale punto si incontrano?

EB.3 Un'automobile è partita alle *ore* 8 del mattino da Mogadiscio verso Merca e viaggia ad una velocità media di 50 km/h. Una seconda automobile parte alle *ore* 9 sempre da Mogadiscio e viaggiando ad una velocità media di 70 km/h vuole raggiungere la prima automobile. A che ora e a quale distanza da Mogadiscio la raggiungerà?

EB.4 Un ragazzo lancia un sasso con velocità $v = 20\ m/s$ verso un'automobile in moto con velocità $v_1 = 50\ km/h$. Calcolare con quale velocità il sasso urta contro l'automobile nel caso in cui l'automobile si muova verso il ragazzo e nel caso in cui essa si allontani.
Cosa succede nel secondo caso se $v_1 = 80\ km/h$?

CAPITOLO III

LE FORZE

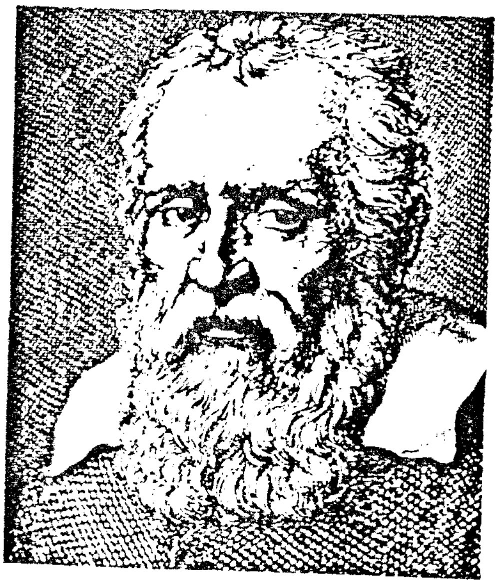
1. Premessa

I concetti di spazio e di tempo e le corrispondenti grandezze fisiche *lunghezza* e *intervallo di tempo* introdotti nei precedenti capitoli sono stati sufficienti a descrivere il movimento dei corpi attraverso nuove grandezze quali lo spostamento, la velocità, l'accelerazione e le relazioni che le legano tra loro.

Lo studio completo del problema del moto non si esaurisce, tuttavia, nella semplice descrizione delle relazioni spazio-temporali (come la legge oraria e i grafici spazio-tempo); lo scopo della *meccanica* è quello di studiare le relazioni che intercorrono fra il *moto* e le *cause che lo producono*, in modo da permetterci di *prevedere* le caratteristiche del moto. Per fare ciò è necessario affiancare alle grandezze fondamentali lunghezza e intervallo di tempo altre due grandezze, note già a noi nel linguaggio comune, che sono la *forza* e la *massa*.

Il problema non è semplice e l'uomo ha cercato una soluzione fino dai tempi antichi. Aristotele (384-322 a.C.), pensando ad un carro *tirato* dai buoi, ad una nave *spinta* dai remi, alla sabbia *sollevata* dal vento e vedendo in queste situazioni solo la forza dei buoi, la forza dei rematori, la forza del vento come uniche cause del moto, giunse alla conclusione che *per mantenere un oggetto in moto è necessario applicare ad esso in continuazione una forza*. Come vedremo, questa conclusione si è dimostrata in linea di principio errata.

Solo diciassette secoli più tardi, quando un nuovo spirito critico e una nuova metodologia nell'analisi dei dati sperimentali guidava gli uomini nel 'vedere i fatti', si arrivò ad una più corretta risposta al problema, dando un fondamento scientifico alla meccanica. Due scienziati, in particolare, fornirono le basi su cui venne costruita non solo la meccanica ma tutta la scienza moderna: Galileo Galilei (1564-1642) e Isaac Newton (1642-1727). Non a torto essi sono oggi chiamati 'padri' della scienza.



Galileo Galilei

Isaac Newton

2. Introduzione al concetto di forza

Come il concetto di *lunghezza* e il concetto di *intervallo di tempo*, anche quello di *forza* nasce dalla esperienza della vita quotidiana e viene espresso nel linguaggio comune con parole dal significato vago e molto spesso ambiguo. La prima idea di forza ci viene fornita dalla 'forza muscolare'; l'esperienza ci insegna che per lanciare una pietra, per trasportare un macigno, per mettere in moto un carro bisogna sempre esercitare una forza muscolare più o meno grande. Questa constatazione portò l'uomo a pensare all'esistenza di una relazione fra il moto degli oggetti e le forze ad essi applicate.

Fa parte anche della esperienza comune l'osservazione che le forze producono il *moto* quando l'oggetto su cui agiscono è libero di muoversi. Se invece l'oggetto non è libero di muoversi, l'azione della forza muscolare produce una *deformazione*.

Tale deformazione può essere in alcuni casi molto evidente, come quando si schiaccia una palla di gomma appoggiata su un tavolo o si tira una molla appesa al soffitto (vedi fig. 2.1 a,b), ed in altri praticamente invisibile, come quando si tenta di schiacciare un blocco di ferro (vedi fig. 2.1 c).

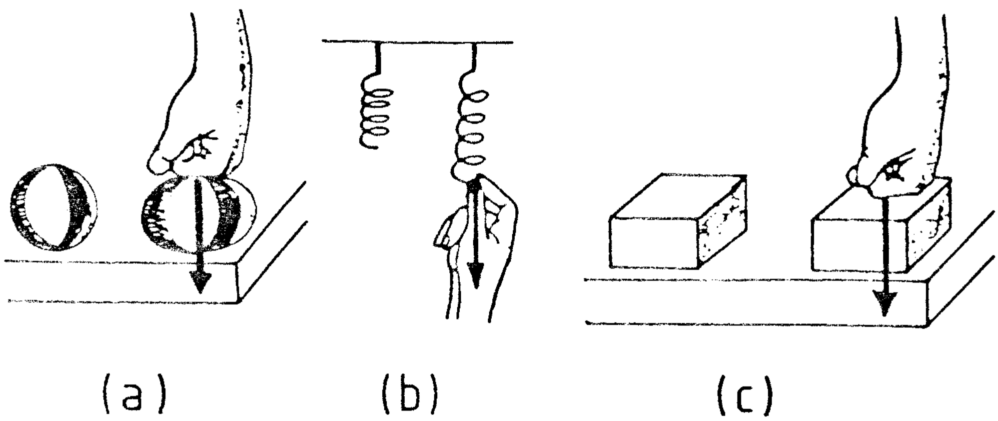


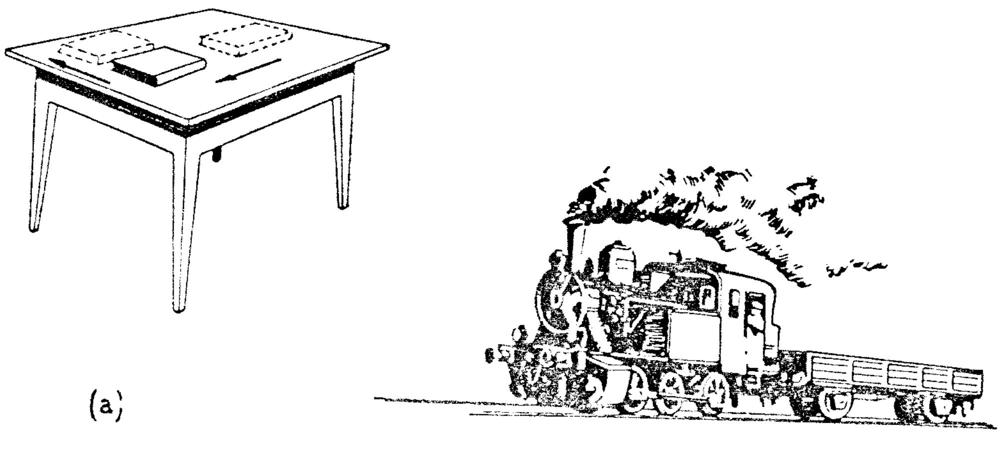
Figura 2.1

Esistono tuttavia numerose situazioni nelle quali un oggetto non può essere considerato libero e nemmeno impedito a qualsiasi tipo di movimento. Un oggetto appoggiato su un piano può muoversi *solo* nel piano stesso (vedi fig. 2.2a). Un treno può muoversi *solo* lungo le rotaie (vedi fig. 2.2b). In questi due esempi il piano e le rotaie, che chiameremo *vincoli*, modificano ma non impediscono il moto.

Possiamo quindi affermare che una forza applicata ad un oggetto produce un effetto che può essere visto sia come un cambiamento dello stato di moto dell'oggetto sia come una deformazione dell'oggetto.

Definiamo allora in generale forza quella grandezza fisica che applicata ad un oggetto lo mette in moto se esso è fermo o ne cambia la velocità se esso è in moto, oppure lo deforma se esso non è libero di muoversi.

Per meglio comprendere le caratteristiche di questa nuova grandezza facciamo un semplice esperimento. Fissiamo l'estremo A di un filo ad un oggetto appoggiato su un tavolo e cerchiamo di tirare l'oggetto verso di noi



(a) (b)

Figura 2.2

applicando una forza all'altro estremo B del filo (vedi fig. 2.3).

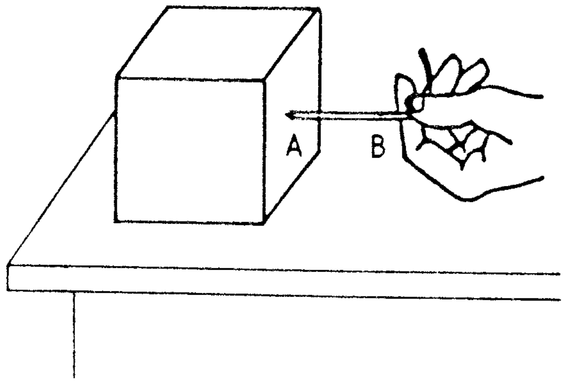


Figura 2.3

Se tiriamo il filo, esso si tende assumendo la forma rettilinea e l'oggetto si muove nella direzione in cui tendiamo il filo. Il filo ci aiuta ad individuare le caratteristiche della forza che tramite esso viene applicata all'oggetto.

Tali caratteristiche sono:

1. la *direzione* della forza, che è la direzione della retta AB che assume il filo quando è teso;
2. il *verso* della forza, che è quello per andare da A a B;
3. l' *intensità* della forza che è data dallo sforzo muscolare che esercitiamo sul filo.

Deduciamo quindi che la forza è un nuovo tipo di grandezza fisica, per individuare la quale in modo univoco non basta dare l'intensità ma bisogna anche indicare in quale direzione e in quale verso essa agisce. (Inoltre è talvolta necessario indicare il punto in cui essa è applicata).

Un modo per rappresentare una forza è quello di usare un segmento orientato: la *retta* a cui il segmento appartiene indica la *direzione* lungo la quale la forza agisce, la *freccia* indica il *verso* nel quale essa agisce, la *lunghezza*, fissata l'unità di misura, ci fornisce l' *intensità* o *valore* della forza (vedi fig. 2.4). Tale segmento orientato viene chiamato *vettore*.

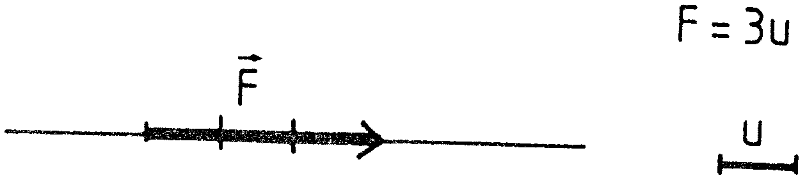
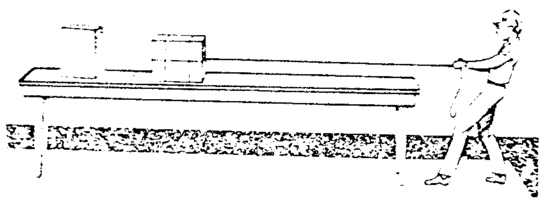


Figura 2.4

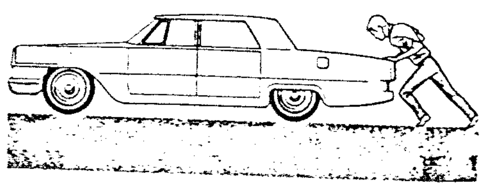
Diciamo allora che la forza è una grandezza *vettoriale* e la indichiamo con la notazione $\vec{F}$. L'intensità della forza viene indicata con $|\vec{F}|$ o semplicemente con F.

Il motore che fa muovere l'automobile esercita su di essa una forza; il vento che fa oscillare o piega i rami di un albero esercita su di essi una forza. Quando diamo un calcio ad un pallone esercitiamo su di esso una forza. La calamita che attira a sè un chiodo di ferro esercita su di esso una forza. In tutti questi casi la forza è applicata in un punto dell'oggetto.

D2.1 Nelle situazioni illustrate nei disegni sotto riportati dove è applicata la forza esercitata dal ragazzo?
Disegnarne mediante un vettore la direzione ed il verso.



(a)



(b)

Una forza molto importante, che è applicata ad ogni oggetto che si trova sulla Terra, è la *forza-peso*. Abbiamo visto infatti che qualsiasi oggetto lasciato libero cade verso il suolo; su di esso deve quindi agire una forza che lo mette in moto. Tale forza è la *forza-peso* o, più semplicemente, il *peso* dell'oggetto.

Se noi appendiamo un oggetto ad un estremo di una molla il cui altro estremo è fissato al soffitto, la molla si deforma, indicando che l'oggetto esercita su di essa una forza (vedi fig. 2.5). Tale forza è ancora il *peso* dell'oggetto. Possiamo inoltre osservare che la molla, sotto l'azione del peso dell'oggetto, si dispone in modo che il suo asse assuma la direzione verticale: la forza-peso ha quindi *direzione verticale.* Osserviamo infine che la molla si allunga, cioè il suo estremo inferiore si sposta verso il basso: il verso della forza-peso è quindi quello che va *dall'alto verso il basso.*

La forza-peso è *sempre* diretta verticalmente verso il basso. Essa viene generalmente indicata con il simbolo $\vec{P}$ ed è applicata in un punto dell'oggetto detto *baricentro* (vedi fig. 2.6). Se l'oggetto è omogeneo (cioè è costituito tutto dello stesso materiale), il baricentro coincide con l'analogo punto definito in Geometria.

Così nel caso di un parallelepipedo il baricentro coincide con il punto di incontro delle tre diagonali; in una sfera esso coincide con il centro stesso della sfera .

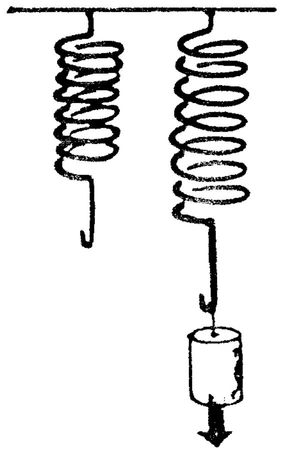


Figura 2.5

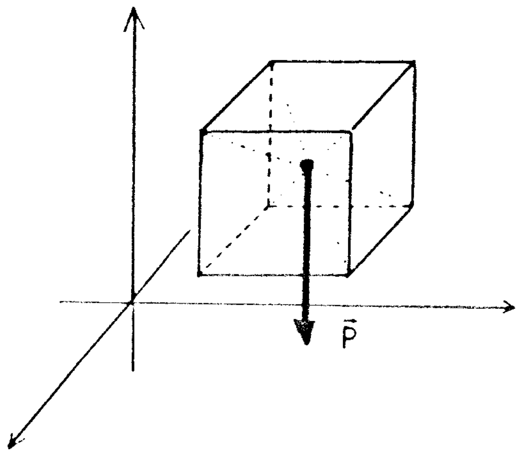


Figura 2.6

3. Misura statica dell'intensità di una forza

Analogamente a tutte le altre grandezze fisiche anche la forza, per essere completamente definita, deve poter essere misurata (o meglio, deve poter essere misurata la sua intensità).

Poichè uno degli effetti prodotti da una forza è quello di deformare gli oggetti se essi non sono liberi di muoversi, un semplice strumento mediante il quale è possibile confrontare e quindi misurare l'intensità delle forze è costituito da una molla con un estremo fisso (vedi fig. 3.1); se all'altro estremo viene applicata una forza, la molla si deforma (ad esempio si allunga). L'osservazione sperimentale ci permette di verificare facilmente che, se non vengono superati certi limiti, la deformazione (allungamento) della molla scompare togliendo la forza; in questi casi noi diciamo che la molla si comporta *elasticamente*.

Potremo allora assumere che:
due forze hanno uguale intensità, indipendentemente dalla loro natura ed origine, quando applicate separatamente ad una stessa molla producono lo stesso allungamento.

Diremo invece che una forza ha intensità maggiore o minore di un'altra se l'allungamento da essa prodotto è maggiore o minore, rispettivamente, di quello prodotto dall'altra forza.

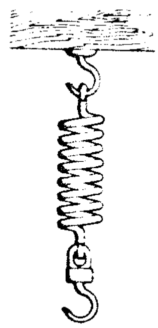
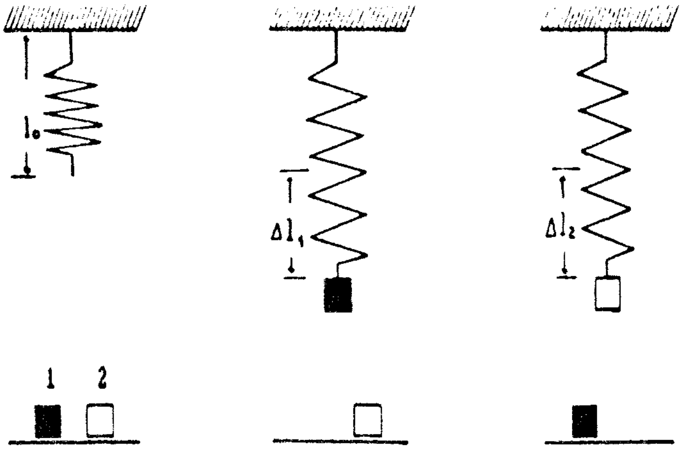


Figura 3.1

Ad esempio il peso di due oggetti ha la stessa intensità se appesi i due oggetti separatamente ad una molla essi producono lo stesso allungamento (vedi fig. 3.2).
Inoltre, siccome in entrambi i casi l'allungamento avviene secondo la direzione verticale, possiamo dire che le due forze peso sono uguali non solo in intensità ma anche in direzione e verso.



se $\Delta l_1 = \Delta l_2$ allora $P_1 = P_2$

Figura 3.2

È importante sottolineare a questo proposito ciò che l'esperienza ci insegna: due pesi uguali, cioè che hanno prodotto lo stesso allungamento di una certa molla, producono sempre allungamenti uguali tra di loro in ogni altra molla, anche se tali allungamenti sono in generale diversi da molla a molla. Ciò significa che l'uguaglianza tra pesi e quindi tra forze è una caratteristica che non dipende dalla molla usata.

L'esperienza ci insegna ancora che la molla può essere disposta in modo che il suo asse assuma una direzione qualsiasi. Nel caso della forza-peso possiamo ad esempio fare uso di fili e carrucole in modo da cambiare la direzione lungo la quale si allunga la molla (vedi fig. 3.3).

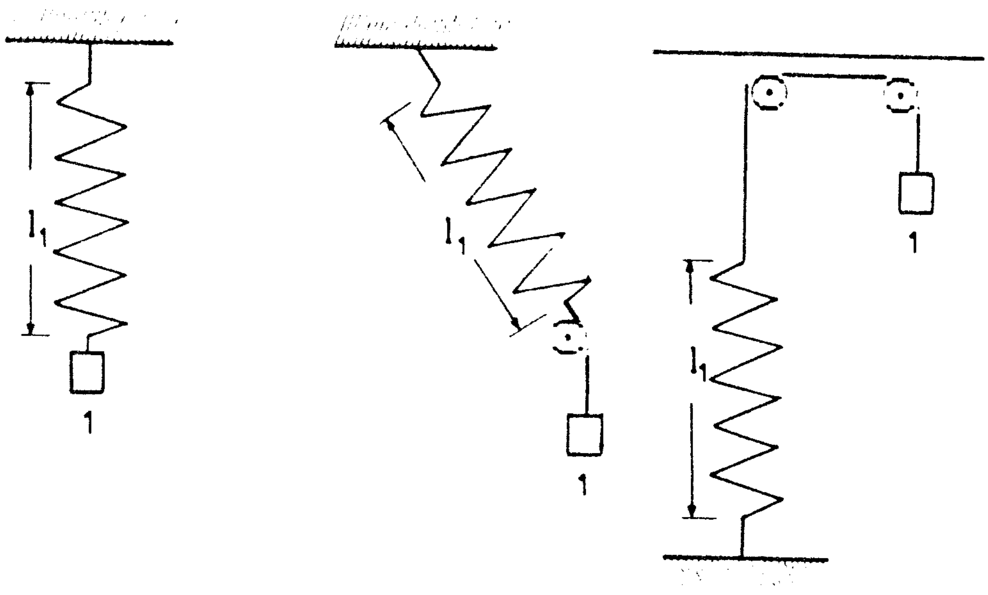


Figura 3.3

Si verifica facilmente che l'allungamento della molla è lo stesso qualunque sia la direzione. Diremo che il dispositivo costituito dalla carrucola e dal filo ha cambiato la direzione della forza-peso lasciando inalterata la sua intensità.

Possiamo quindi assumere che:

una forza $\vec{F}_3$ ha una intensità pari alla somma dell'intensità di due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ quando l'allungamento da essa prodotto su di una molla è uguale all'allungamento prodotto applicando contemporaneamente alla stessa molla le due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, facendo in modo che esse agiscano nella stessa direzione e nello stesso verso.

In particolare il peso di un oggetto C è uguale alla somma dei pesi di due oggetti A e B quando l'allungamento che si ottiene appendendo ad una molla l'oggetto C è uguale all'allungamento che si ottiene appendendo contemporaneamente alla stessa molla i due oggetti A e B (vedi fig. 3.4).

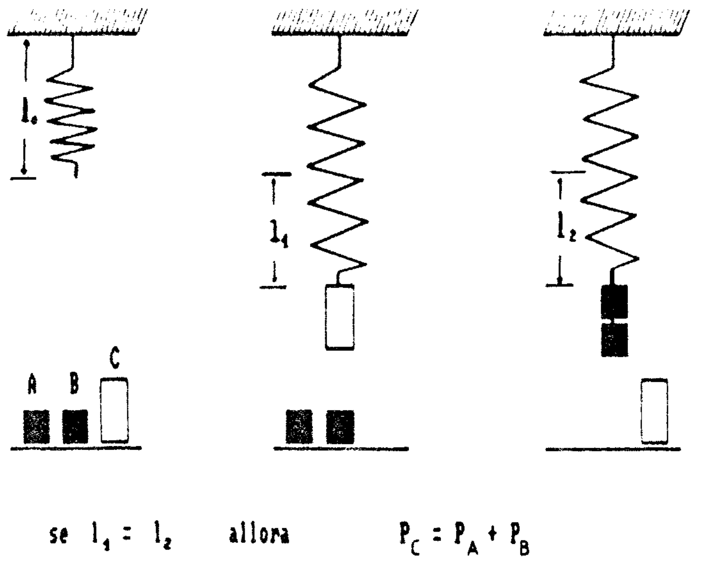


Figura 3.4

Per poter definire l'unità di misura dell'intensità delle forze, cominciamo a costruire un insieme costituito da un certo numero di oggetti aventi tutti lo stesso peso. Appendendo all'estremità inferiore della molla contemporaneamente 2, 3, ..., n oggetti presi da questo insieme possiamo dire che alla molla è applicata una forza uguale a 2, 3, ..., n volte il peso di ogni singolo oggetto dell'insieme, cioè:

una forza ha intensità 2, 3, ..., n volte il peso di un oggetto dell'insieme precedentemente preparato se produce sulla molla un allungamento uguale a quello prodotto dall'aver appeso contemporaneamente 2, 3, ..., n oggetti presi dall'insieme.

È ora possibile definire l'unità di misura delle forze. Per fare questo basta scegliere un oggetto campione ed assumere, per definizione, il suo peso come unità di misura delle forze. Potremo ad esempio scegliere come unità di misura la forza-peso del campione di platino-iridio conservato a Sèvres. Chiameremo tale unità *kilogrammo-peso* (kg_p).

Un semplice strumento per misurare l'intensità di una forza è il *dinamometro*. Esso è costituito da una molla con un indice e da una scala graduata che permette di leggere direttamente, nell'unità di misura scelta, il valore dell'intensità della forza. Per tarare lo strumento, cioè per costruire la scala graduata, si può operare come indicato in fig. 3.5. Sistemata la molla in posizione verticale, si segna la posizione dell'indice della molla quando ad essa non è applicata nessuna forza e si assume tale posizione come zero della scala (fig.a). Si appende quindi all'estremo libero della molla un peso campione di $1kg_p$ e si segna la nuova posizione dell'indice, indicandola con $1kg_p$ (fig.b). Si appende quindi un secondo peso campione e si indica con $2kg_p$ la nuova posizione dell'indice (fig.c). Si prosegue così con altri pesi campione.

Poichè l'allungamento subito dalla molla risulta praticamente proporzionale all'intensità della forza applicata, si può dividere la distanza tra 0 e 1, tra 1 e 2, ecc. in dieci parti uguali (fig.d); ogni parte corrisponde allora all'allungamento che produrrebbe un peso di intensità pari a 1/10 del peso campione, cioè $0,1kg_p$.

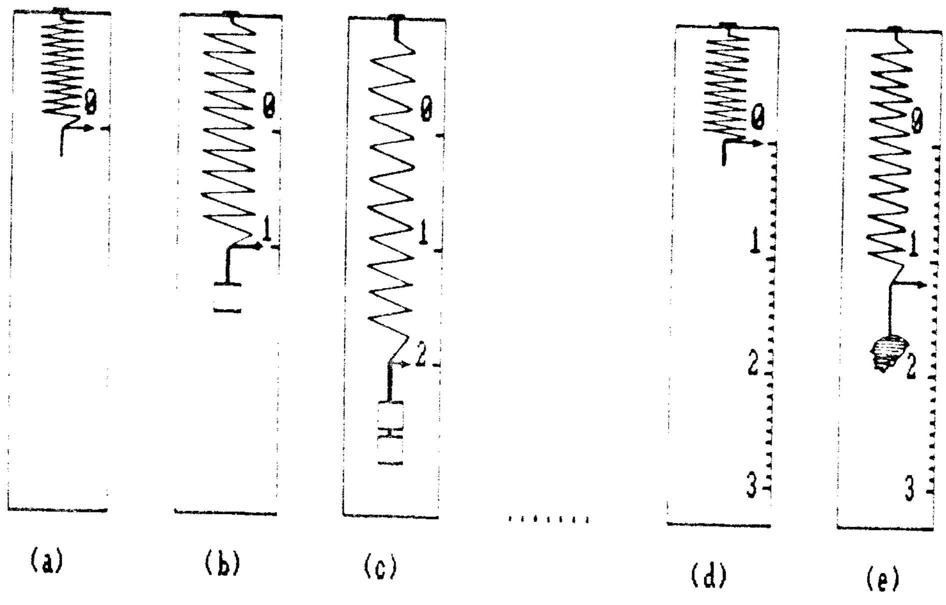
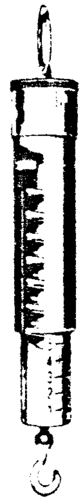
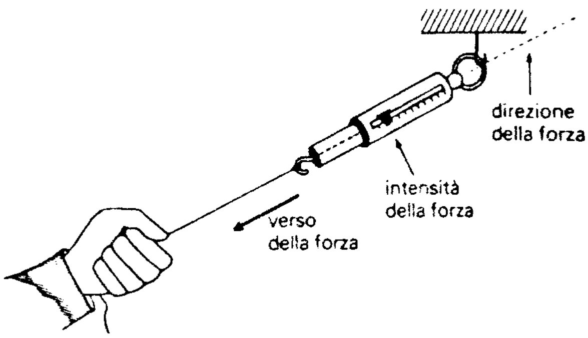


Figura 3.5

Costruita in questo modo la scala graduata, lo strumento fornisce il valore dell'intensità di ogni forza applicata riferita all'unità di misura utilizzata per tararlo. Ad esempio la forza-peso a cui è soggetto il sasso di fig. e risulta $P = 1,2 kg_p$.

In fig. 3.6 è riportato il disegno di un dinamometro usato in laboratorio ed è mostrato il suo uso per studiare le forze.





(a) (b)

Figura 3.6

D3.1 Ad una molla di lunghezza $l = 15\ cm$ si applica un peso $P = 1,8\ kg_p$; la nuova lunghezza risulta $l = 16,5\ cm$. Quale sarà la lunghezza della molla se si aggiunge un secondo peso $P = 1,8\ kg_p$? E se si aggiunge un terzo peso $P = 3,6\ kg_p$?

L'esperienza mostra che se si opera con la stessa molla in vari luoghi della Terra, gli allungamenti prodotti da un medesimo oggetto non sono sempre gli stessi. Con una molla sufficientemente sensibile si possono osservare piccole differenze negli allungamenti della molla prodotti da uno stesso oggetto effettuando la misura a Mogadiscio, a Roma o al Polo Nord.

Questo fatto, di cui daremo una spiegazione più avanti, quando cercheremo di separare i *due fattori* che determinano il valore del peso di un oggetto (quello caratteristico dell'oggetto e quello caratteristico del luogo geografico) ci suggerisce che il peso di un oggetto non è una buona unità di misura per le forze.

Nel prossimo capitolo, utilizzando non più l'effetto deformante ma l'altro effetto prodotto da una forza e cioè quello di mettere in moto gli oggetti, saremo in grado di scegliere un'unità di misura più appropriata.

L'unità di misura così definita è il *newton* e viene indicata con la lettera N. Come vedremo la forza-peso del campione di platino-iridio corrisponde a circa

$$1kg_p = 9,8N$$

4. Composizione di due o più forze

Spesso gli oggetti sono sottoposti simultaneamente all'azione di due o più forze. Si pensi ad esempio al caso di due o più persone che cercano di spingere un'automobile. Se le forze sono applicate nello stesso punto, si osserva sperimentalmente che il loro effetto complessivo può essere ottenuto anche applicando all'oggetto un'unica forza, che chiameremo *forza risultante*. Un insieme di più forze applicate ad uno stesso punto può essere sempre sostituito dalla forza risultante.

Se l'oggetto è *rigido*, cioè se esso non si deforma apprezzabilmente sotto l'azione delle forze applicate, il risultato precedente è valido anche se le forze sono applicate in punti diversi dell'oggetto, purchè le loro rette di azione confluiscano tutte in un punto (*forze concorrenti*) (vedi fig. 4.1).

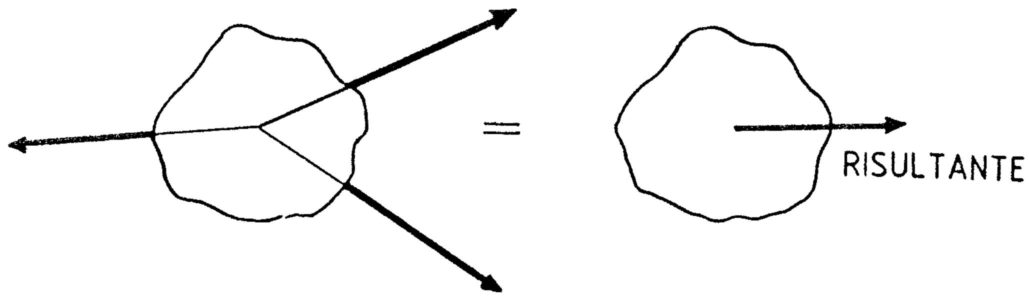


Figura 4.1

Come si può verificare sperimentalmente (vedi fig. 4.2), un sistema di due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ aventi lo stesso punto di applicazione ha come risultante la forza $\vec{R}$ indicata in fig. 4.3. Costruito il parallelogramma che ha come lati adiacenti i due vettori $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, la forza $\vec{R}$ è individuata dalla diagonale che ha come uno degli estremi il punto di applicazione di $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$.

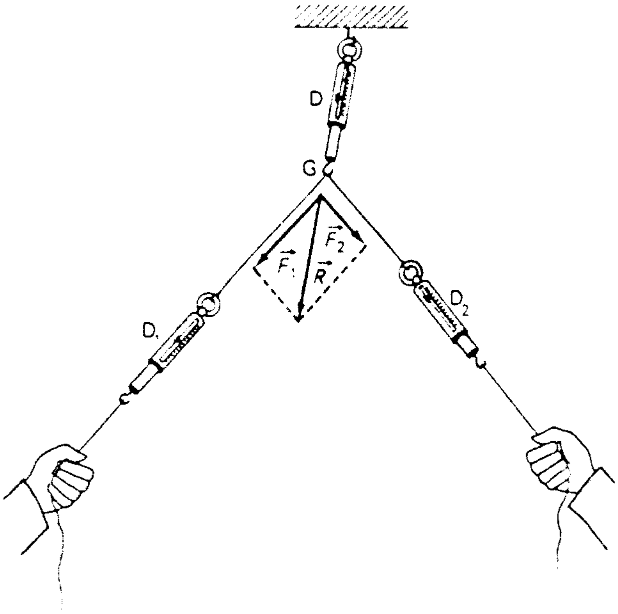


Figura 4.2

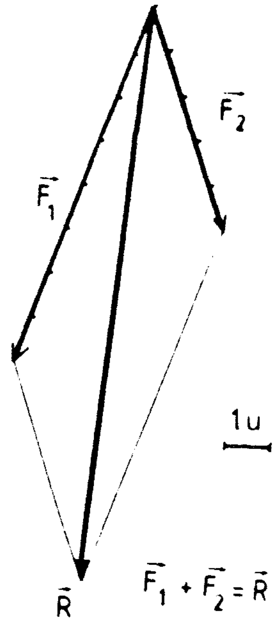


Figura 4.3

Se le forze non sono applicate nello stesso punto ma sono concorrenti, per valutarne l'effetto complessivo in modo grafico è necessario dapprima trasportare le forze lungo la loro retta d'azione in modo che esse vengano ad avere lo stesso punto di applicazione (vedi fig. 4.4).

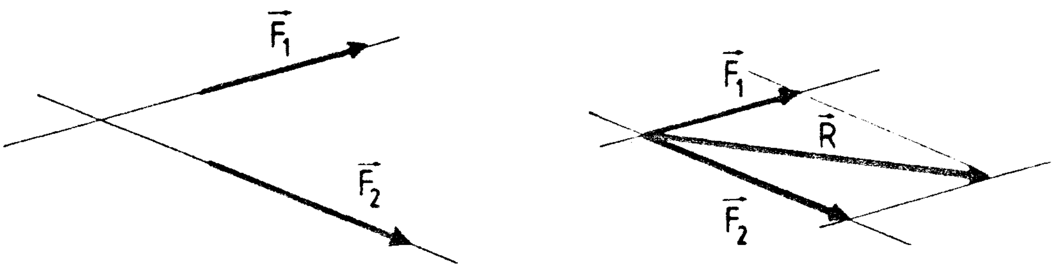


Figura 4.4

L'intensità del vettore $\vec{R}$ non è di solito uguale alla somma delle intensità delle singole forze (vedi fig. 4.5).

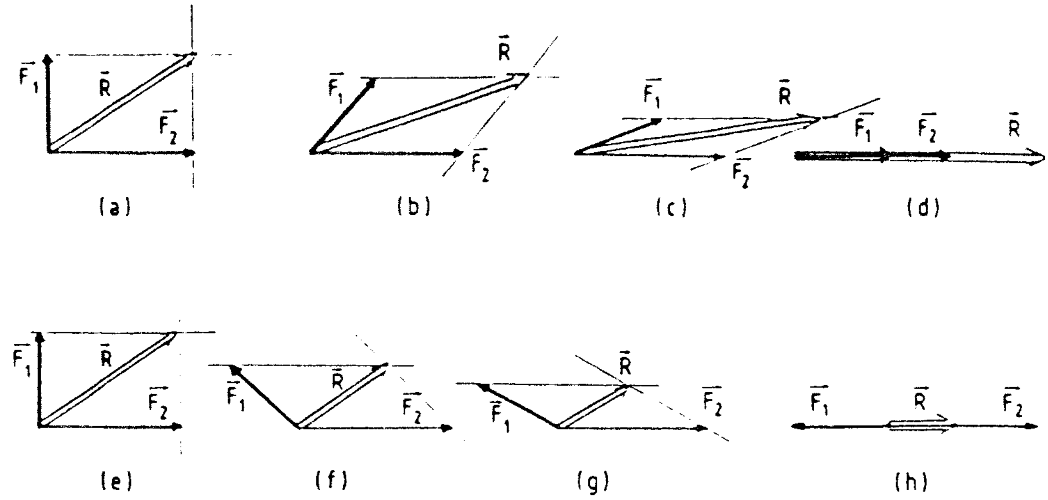


Figura 4.5

Consideriamo in particolare il caso in cui le due forze abbiano la stessa retta d'azione. Se le due forze sono concordi, cioè agiscono nello stesso verso, la forza risultante ha intensità pari alla somma delle due intensità (vedi fig. 4.5d); se invece le due forze agiscono in verso opposto, la forza risultante ha una intensità pari alla differenza, in valore assoluto, delle due intensità, ed agisce nel verso della forza di intensità maggiore (vedi fig. 4.5h).
Pertanto due forze concorrenti di eguale intensità e direzione ma di verso opposto (o come si suol dire *due forze uguali e contrarie*) hanno risultante nulla, cioè sono equivalenti ad una forza nulla. È noto infatti che se due ragazzi tirano un oggetto con la stessa forza da parti opposte, l'oggetto rimane

fermo, come se non fosse soggetto ad alcuna forza (vedi fig. 4.6).

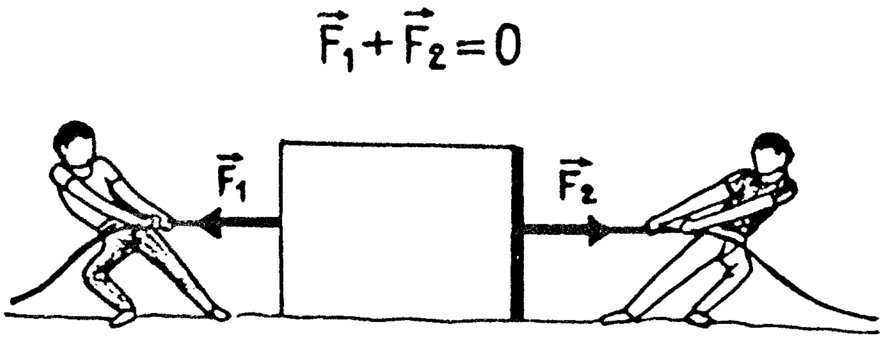


Figura 4.6

Così come rimangono fermi i due elefanti mostrati nella fig. 4.7, se le intensità delle forze che essi esercitano l'uno sull'altro sono eguali.

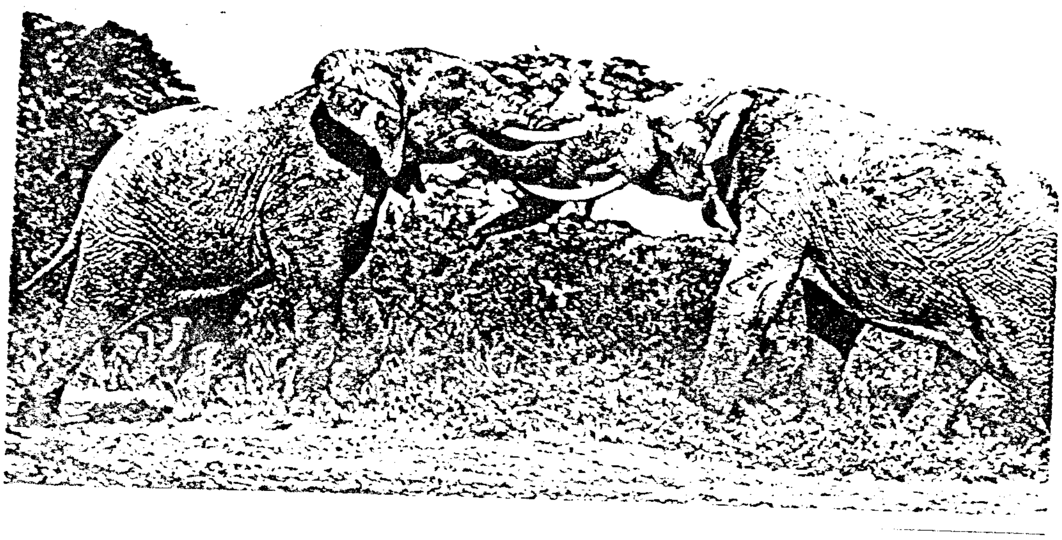
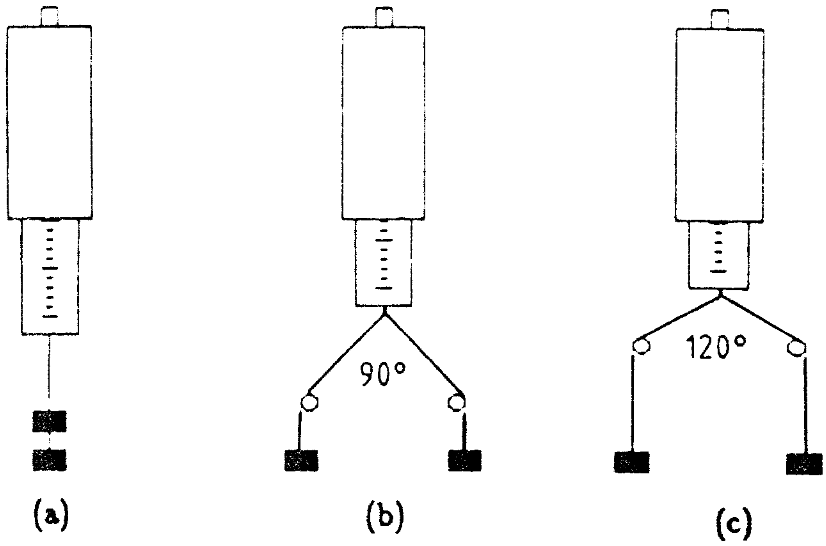


Figura 4.7

D4.1 Nel disegno sotto riportato sono mostrate in modo schematico tre esperienze eseguite con un dinamometro tarato in kg_p. Mostrare che è verificata la legge di composizione delle forze.



Per ottenere per via algebrica l'intensità della forza risultante si può applicare al triangolo OQR il teorema di Carnot (vedi fig. 4.8). Poichè l'angolo in Q è uguale a ($180° - \alpha$), essendo α l'angolo formato dalle direzioni delle due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, si ottiene

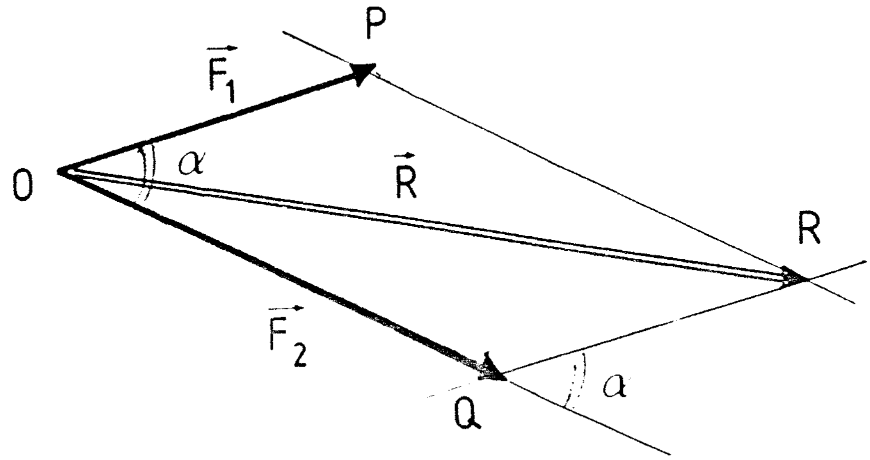


Figura 4.8

$$\overline{OR}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QR}^2 - 2\overline{OQ} \cdot \overline{QR} \cos(180^\circ - \alpha)$$

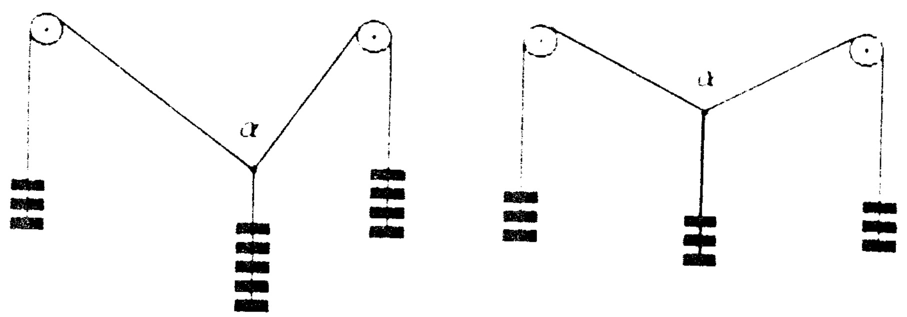
da cui

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cos\alpha} \qquad 4.1$$

essendo $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$. Applicando la 4.1 al caso di forze aventi la stessa direzione, si ottiene, come abbiamo già visto, $R = F_1 + F_2$ nel caso di forze concordi ($\alpha = 0$) e $R = |F_1 - F_2|$ nel caso di forze opposte ($\alpha = 180^\circ$). Se le due forze sono tra loro perpendicolari ($\alpha = 90^\circ$) si ottiene $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.

D4.2 La forza risultante ha sempre intensità maggiore dell'intensità di ciascuna delle forze componenti?

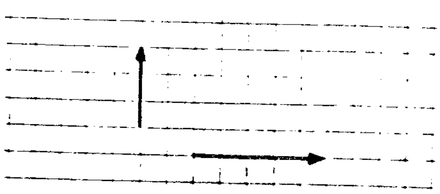
D4.3 Mediante un filo e due carrucole si realizzano le situazioni di equilibrio mostrate in figura. Calcolare il valore dell'angolo α.



(a) (b)

E4.1 È possibile che la forza risultante di due forze di uguale intensità abbia anch'essa la stessa intensità? In caso positivo, quale valore deve avere l'angolo tra le direzioni delle due forze? Verificare graficamente il risultato ottenuto.

E4.2 Addizionare graficamente i vettori di figura.



E4.3 Due forze concorrenti di intensità $F_1 = F_2 = 1N$ sono tra loro perpendicolari. Si trovi graficamente la forza $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

E4.4 Due forze concorrenti di intensità $F_1 = 4N$ e $F_2 = 3N$ sono tra loro perpendicolari. Si determini l'intensità della forza somma.

La forza risultante di tre forze $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ si può ottenere componendo dapprima tra loro le forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ e quindi componendo la forza risultante $\vec{F}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ con la forza $\vec{F}_3$ (vedi fig. 4.9).

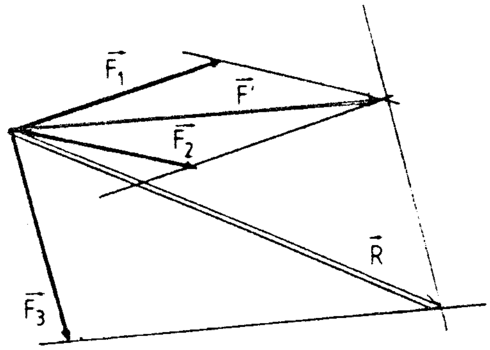
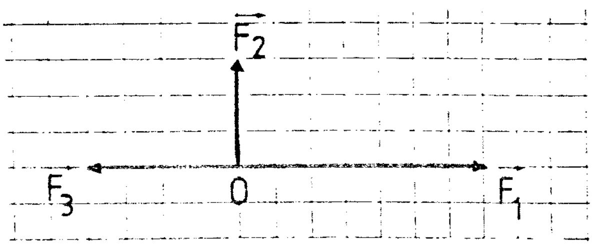


Figura 4.9

E4.5 Trovare la forza risultante delle tre forze di intensità $F_1 = 7N$, $F_2 = 3N$, $F_3 = 4N$ disposte come in figura.



5. Scomposizione di una forza

Così come è possibile sostituire a due o più forze, applicate nello stesso punto o concorrenti in quel punto, la loro risultante, è possibile sostituire ad una forza $\vec{F}$ due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ che abbiano tale forza $\vec{F}$ come risultante.

Consideriamo ad esempio una forza $\vec{F}$ e due rette a e b passanti per il punto O di applicazione della forza e giacenti in un piano che contiene il vettore $\vec{F}$ (vedi fig. 5.1). Dall'estremo P del vettore $\vec{F}$ tracciamo le *parallele* alle rette a e b e siano P_a e P_b i punti in cui esse incontrano tali rette.

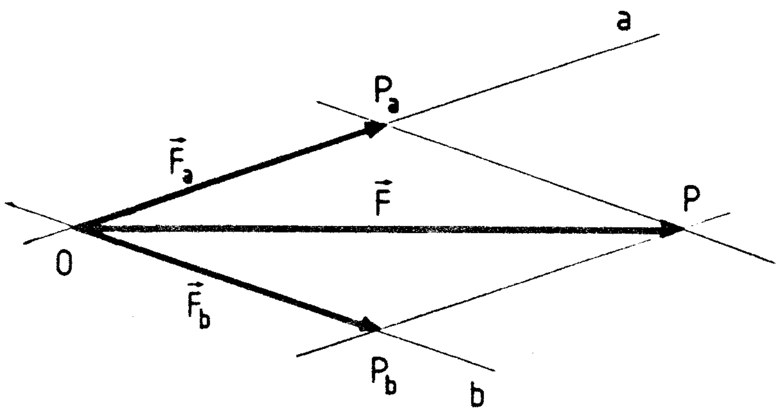


Figura 5.1

I due vettori $\vec{OP}_a$ e $\vec{OP}_b$, per quanto abbiamo visto, hanno come risultante il vettore $\vec{OP}$. È quindi possibile sostituire alla forza $\vec{F}$ le due forze $\vec{F}_a$ e $\vec{F}_b$ individuate dai due vettori $\vec{OP}_a$ e $\vec{OP}_b$. Le due forze $\vec{F}_a$ e $\vec{F}_b$ sono chiamate i *vettori componenti* di $\vec{F}$ lungo le rette a e b rispettivamente.

Se le due rette sono orientate (assi), i due vettori componenti $\vec{F}_a$ e $\vec{F}_b$ possono essere indicati dando la loro intensità con un segno + o − a seconda che il vettore sia orientato nel verso positivo o in quello negativo dell'asse. Tali quantità sono chiamate *le componenti* del vettore $\vec{F}$ lungo gli assi a e b e indicate con F_a e F_b.

Se gli assi a e b sono perpendicolari, cioè se costituiscono un sistema di assi cartesiani Oxy, le due forze $\vec{F}_x$ e $\vec{F}_y$ (vedi fig. 5.2) rappresentano *i vettori componenti* della forza $\vec{F}$ lungo gli assi x e y; F_x e F_y rappresentano *le componenti* della forza $\vec{F}$ nella direzione degli assi.

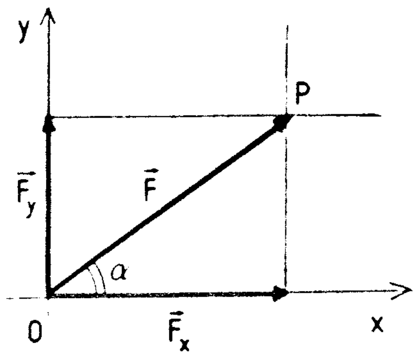


Figura 5.2

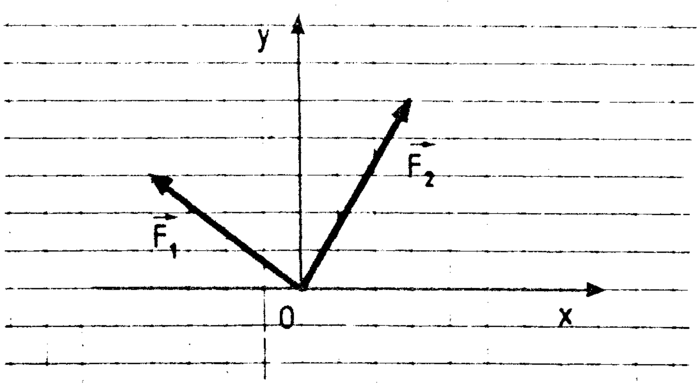
Indicato con α l'angolo che la forza $\vec{F}$ forma con l'asse x, le componenti F_x e F_y si ottengono dalle relazioni

$$F_x = F\cos\alpha \qquad\qquad F_y = F\sin\alpha \qquad\qquad 5.1$$

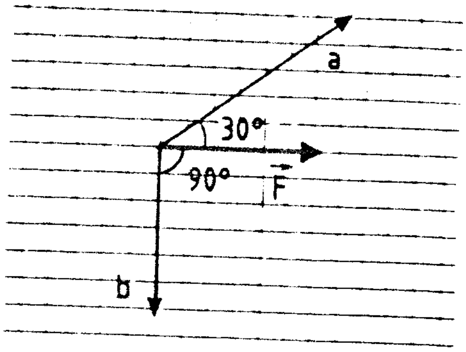
dove F è l'intensità della forza. F è sempre positiva mentre F_x e F_y possono essere positive o negative, a seconda del valore dell'angolo α.

D5.1 In quale direzione deve essere diretta una forza per avere le componenti orizzontale e verticale uguali tra di loro?

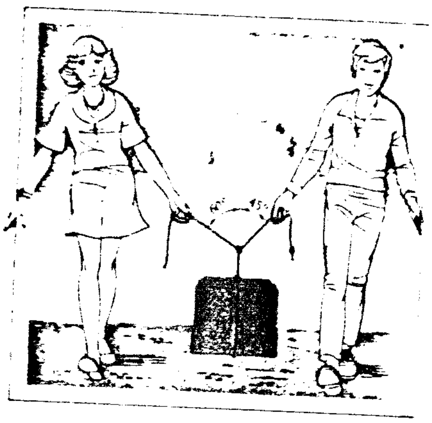
E5.1 Determinare le componenti, secondo gli assi x e y, delle forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ mostrate in figura.



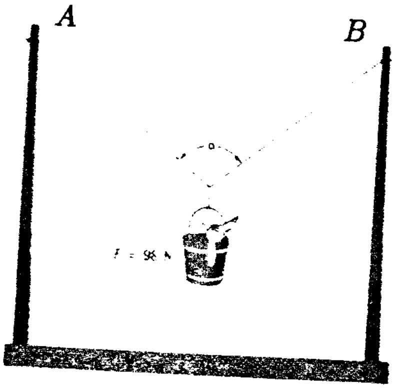
E5.2 Determinare le componenti, secondo le rette a e b, della forza $\vec{F}$ mostrata in figura.



E5.3 Si osservi la figura sotto riportata. Se il pacco ha un peso di $300N$, quale forza devono esercitare rispettivamente il ragazzo e la ragazza?



E5.4 Un oggetto del peso $P = 98N$ è tenuto sollevato mediante una fune di lunghezza $l = 2m$ fissata a due punti A e B. Se il carico di rottura della fune è $98N$ (cioè la fune si rompe se tirata con una forza maggiore di $98N$), qual è il massimo valore che può avere la distanza $\overline{AB}$?



6. Reazioni vincolari

Un oggetto *rigido* sottoposto a più forze applicate nello stesso punto o concorrenti in uno stesso punto è in *equilibrio*, cioè rimane fermo, se la forza risultante $\vec{R}$ delle forze applicate è nulla, cioè se

$$\vec{R} = 0$$

Sappiamo inoltre che tutti gli oggetti sono sottoposti alla forza-peso. Per tenere quindi un oggetto sospeso dobbiamo esercitare su di esso una forza uguale e contraria al suo peso, in modo che la risultante delle due forze sia nulla. Ciò può essere fatto, ad esempio, grazie allo sforzo muscolare che il nostro braccio esercita sull'oggetto tramite la fune (fig. 6.1a) o direttamente (fig. 6.1b) sorreggendolo con la mano.

Possiamo però appoggiare l'oggetto su di un tavolo od appenderlo al soffitto con un filo; nel primo caso è la superficie stessa del tavolo che esercita sull'oggetto la forza necessaria per equilibrare il suo peso, nel secondo caso la forza necessaria viene esercitata dal soffitto tramite il filo (vedi fig. 6.2).

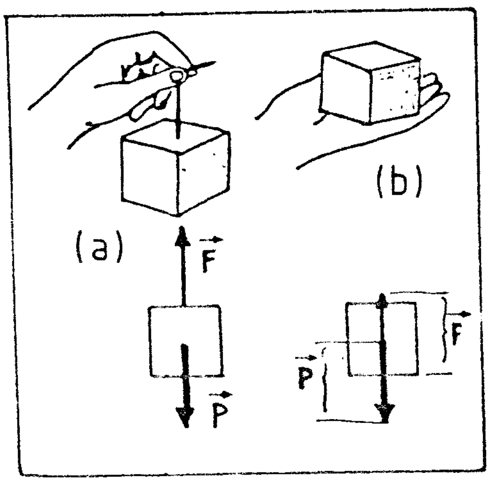


Figura 6.1

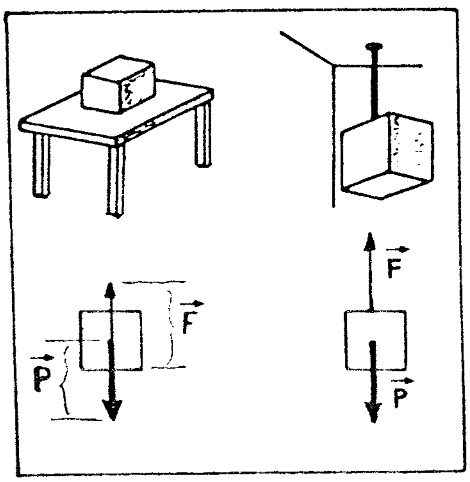
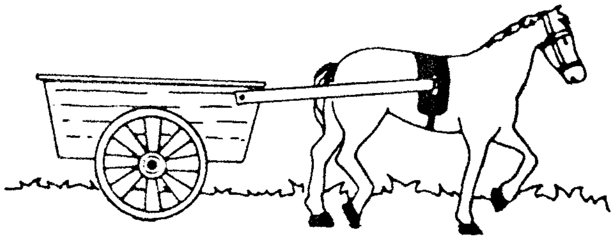


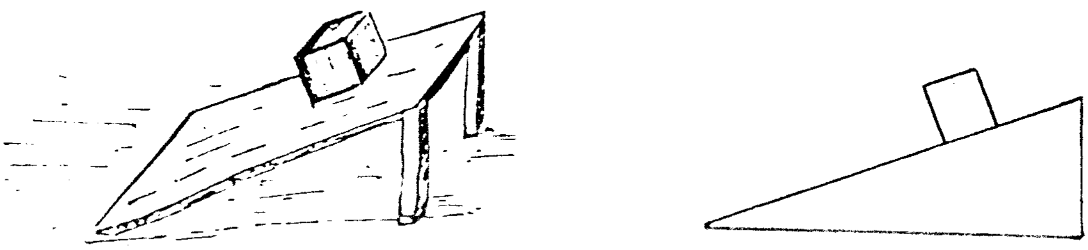
Figura 6.2

Le forze esercitate dal vincolo per mantenere fermo un oggetto sono chiamate *reazioni vincolari*. Nel caso di un filo la reazione vincolare è diretta nella direzione del filo, nel caso di una superficie piana essa è diretta in direzione perpendicolare alla superficie stessa.

D6.1 Quali forze sono applicate al carretto mostrato nella figura sotto riportata che si *sta muovendo* tirato dal cavallo?
Mediante un vettore indica le direzioni e il verso delle varie forze ed il loro punto di applicazione.



Consideriamo un oggetto appoggiato su di una superficie piana inclinata rispetto al piano orizzontale; tale superficie è detta anche *piano inclinato*. Nella fig. 6.3a è mostrato un cubo di legno appoggiato su di un piano inclinato; cubo e piano inclinato sono schematizzati nella fig. 6.3b.



(a) (b)

Figura 6.3

Scomponiamo la forza-peso $\vec{P}$ agente sul cubo in un vettore componente $\vec{P}_\perp$

perpendicolare al piano ed in uno ad esso parallelo $\vec{P}_{\parallel}$ (vedi fig. 6.4).

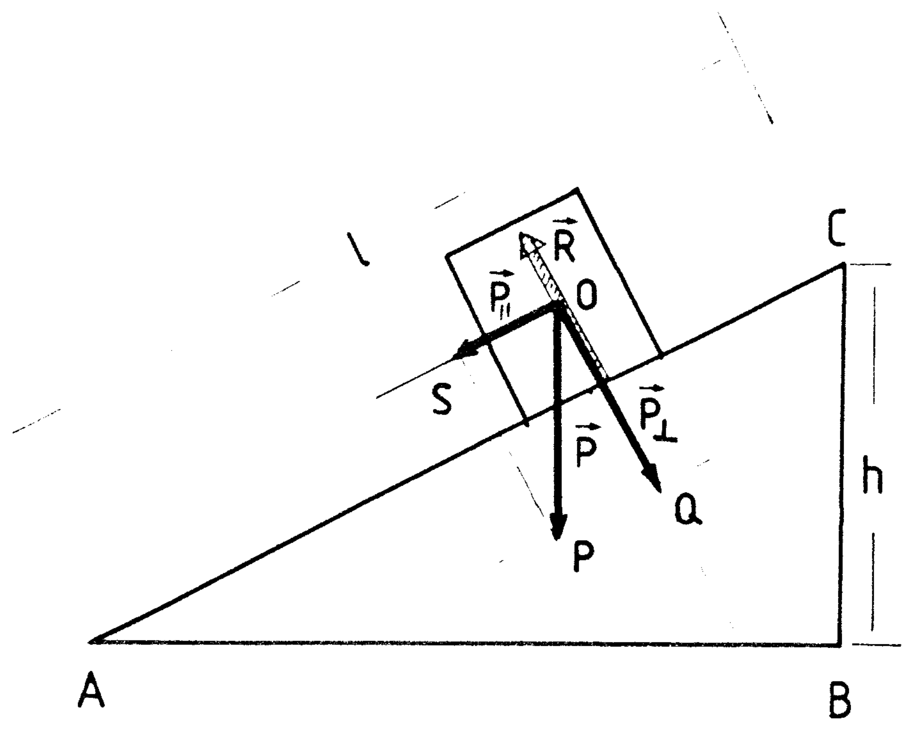


Figura 6.4

$\vec{P}_{\perp}$ è equilibrato dalla reazione vincolare $\vec{R}$ esercitata dal piano, mentre $\vec{P}_{\parallel}$ tende a far scivolare il cubo verso il basso lungo il piano inclinato e ha intensità pari a

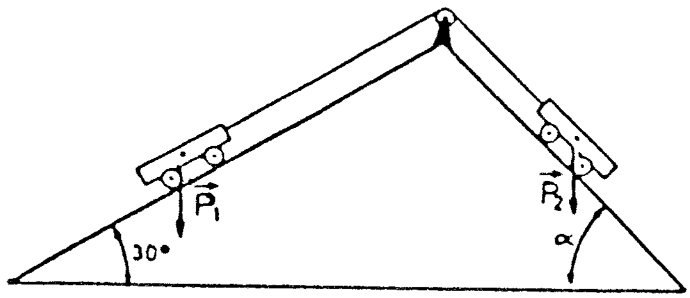
$$P_{\parallel} = P \sin \alpha = P \frac{h}{l} \qquad 6.1$$

come si ottiene facilmente osservando che il triangolo OSP è rettangolo in S e che l'angolo $O\hat{P}S = \alpha$, oppure osservando che i due triangoli ABC e PSO sono simili fra loro ($\overline{BC} : \overline{AC} = \overline{SO} : \overline{OP}$).

Pertanto per tener fermo sul piano inclinato il cubo dobbiamo esercitare una forza $\vec{F}$ uguale e contraria a $\vec{P}_{\parallel}$ e quindi di intensità minore del peso $\vec{P}$ dell'oggetto.

E6.1 Un piano inclinato ha lunghezza $l = 8m$ e altezza $h = 6m$. Calcolare quale forza, parallela al piano, è necessaria per tenere in equilibrio un carrello del peso di $500N$.

E6.2 I due carrelli rappresentati in figura, rispettivamente di peso $P_1 = 14N$ e $P_2 = 10N$, si trovano in equilibrio. Che ampiezza ha l'angolo α?



7. Momento di una forza

Finora abbiamo considerato forze applicate in uno stesso punto o concorrenti in un punto e si è trovato che esse si fanno equilibrio se la loro risultante è nulla. Cosa succede se le forze sono applicate lungo rette che non si incontrano?

Consideriamo un semplice esperimento che dovrebbe essere noto a tutti e che, comunque, può essere facilmente realizzato.
Un'assicella lunga e stretta è appoggiata nel mezzo sullo spigolo di un prisma triangolare (vedi fig. 7.1a, schematizzata in *b*).
Essa può ruotare intorno allo spigolo *o* del prisma, che è detto *asse di rotazione*. Tuttavia, se l'assicella è regolare ed omogenea, essa si dispone in posizione orizzontale (posizione di equilibrio). Se appoggiamo un oggetto di peso P su di un estremo, l'assicella si inclina dalla parte di quell'estremo (fig. c).

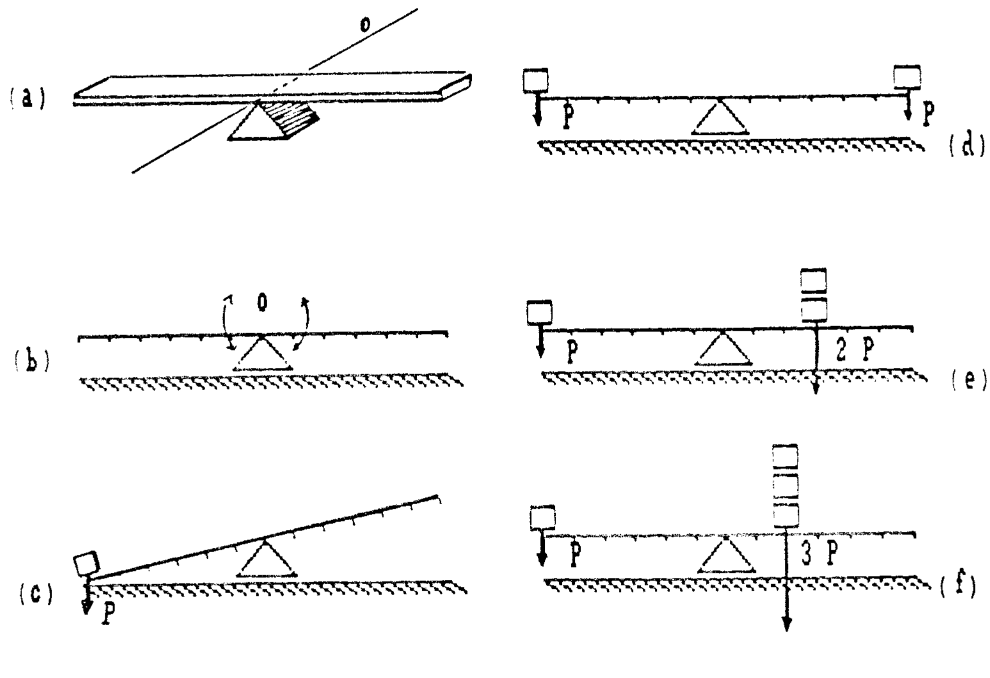
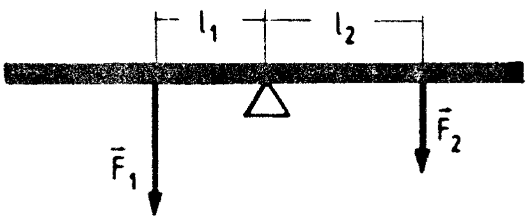


Figura 7.1

Se invece poniamo due pesi uguali da entrambe le parti a uguale distanza dall'asse o, l'assicella rimane in equilibrio in posizione orizzontale (fig. d). Si può anche osservare che l'assicella rimane in equilibrio se poniamo un peso $2P$ ad una distanza da o uguale alla metà di quella a cui si trova il peso P (fig. e). Allo stesso modo l'assicella rimane in equilibrio se poniamo un peso $3P$ ad una distanza pari a 1/3 di quella a cui si trova il peso P (fig. f).

In generale troviamo che due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ mantengono in posizione di equilibrio l'assicella se sono applicate a distanze l_1 e l_2 rispetto all'asse di rotazione o tali che (vedi fig. 7.2)

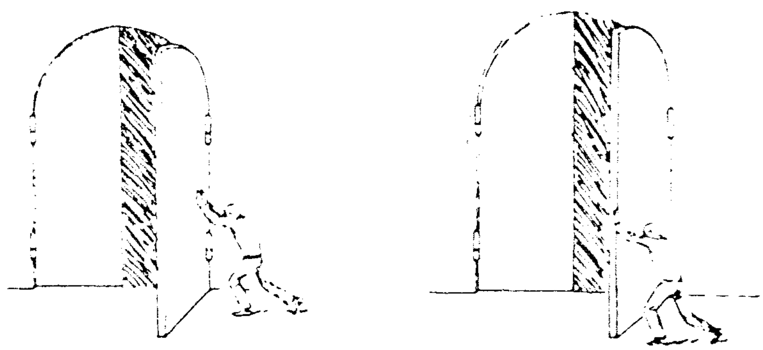


$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2 \qquad 7.1$$

Figura 7.2

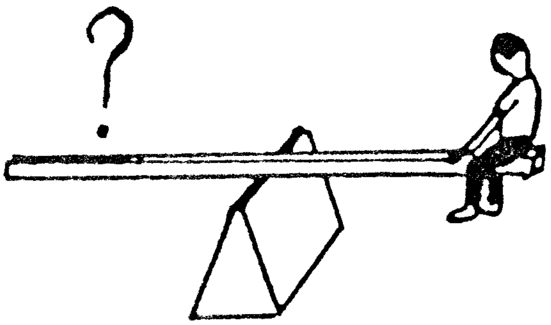
Quando un oggetto può ruotare intorno ad un asse, l'effetto di una forza dipende non solo dalla sua intensità ma anche dalla distanza dall'asse.

D7.1 I due uomini mostrati nelle figure sotto riportate applicano la stessa forza. Chi dei due ottiene l'effetto maggiore?



(a) (b)

D7.2 Un ragazzo del peso di $300N$ è seduto sull'estremo di un palo di legno lungo $6m$ e appoggiato nel punto di mezzo su di un grosso sasso. Dove deve sedersi un altro ragazzo il cui peso è $400N$ per mantenere il palo in posizione orizzontale?



Negli esempi precedenti le forze, oltre che giacere in un piano perpendicolare all'asse di rotazione, erano dirette perpendicolarmente rispetto all'assicella. Consideriamo il caso in cui la direzione della forza $\vec{F}_2$ formi un angolo α con l'assicella (vedi fig. 7.3).
Scomponiamo la forza $\vec{F}_2$ in un vettore componente $\vec{F}_{2\perp}$ diretto perpendicolarmente all'assicella e in un vettore componente $\vec{F}_{2\parallel}$ diretto parallelamente all'assicella. Come si vede dalla fig. 7.3 le due componenti sono

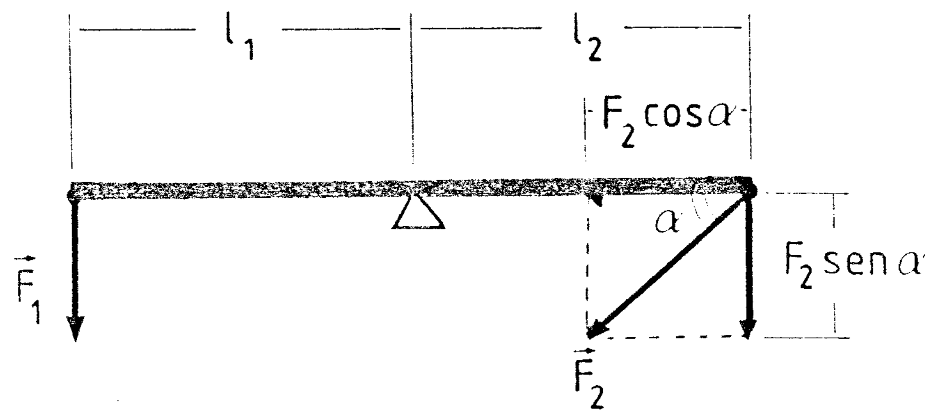


Figura 7.3

$$F_{2\perp} = F_2 \sin\alpha \qquad\qquad F_{2\parallel} = F_2 \cos\alpha$$

Per l'equilibrio dell'assicella deve essere allora

$$F_1 \cdot l_1 = F_{2\perp} \cdot l_2$$

in quanto $\vec{F}_{2\parallel}$ non ha altro effetto che quello di comprimere l'assicella.

La grandezza $F_{2\perp} \cdot l_2 = F_2 \cdot l_2 \sin\alpha$ è detta *momento assiale* della forza $\vec{F}_2$ rispetto all'asse o e il suo studio dettagliato verrà affrontato nei corsi di Fisica successivi.

Osserviamo che l'effetto del momento di una forza è quello di far ruotare l'oggetto; in generale quindi se ad un oggetto che può ruotare intorno ad un asse sono applicate più forze, per avere equilibrio è necessario che la somma delle intensità dei momenti assiali che tenderebbero a fare ruotare l' oggetto in una direzione sia uguale a quella dei momenti che tenderebbero a farlo ruotare in senso contrario.

Per l'equilibrio dell'assicella non è quindi necessario che le forze siano applicate da parti opposte rispetto all'asse. Come si vede nell'esperimento mostrato in fig. 7.4, le due forze possono essere anche applicate dalla stessa

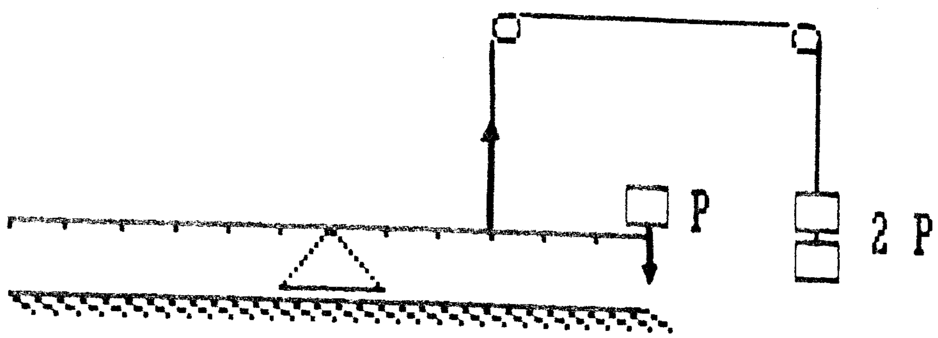


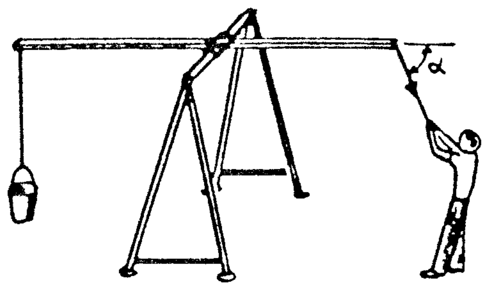
Figura 7.4

parte rispetto all'asse di rotazione, purchè abbiano verso opposto.

Anche in questo caso si ottiene

$$F_1 \cdot l_1 = F_2 \cdot l_2$$

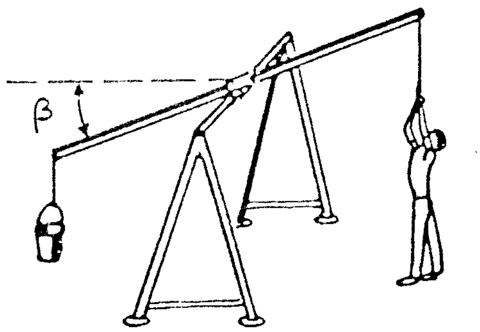
E7.1 Un palo lungo $4m$ può ruotare intorno al suo punto di mezzo. Ad un estremo del palo è appeso un secchio pieno d'acqua del peso di $100N$. Un ragazzo, mediante una fune, applica all'altro estremo una forza $\vec{F}$ la cui direzione forma un angolo $\alpha = 60^o$ con l'orizzontale. Che intensità deve avere la forza $\vec{F}$ per mantenere il palo in direzione orizzontale?



E7.2 Riconsideriamo il problema precedente e supponiamo che il ragazzo applichi la forza $\vec{F}$ in direzione verticale. Che intensità deve avere la forza $\vec{F}$ per mantenere il palo:

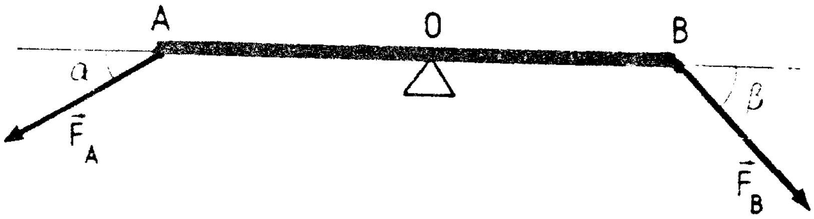
a. in posizione orizzontale;

b. inclinato di un angolo $\beta = 45^o$ rispetto all'orizzontale, come indicato nella figura qui sotto riportata?

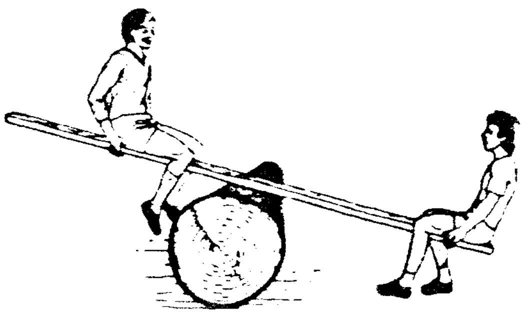


E7.3 Un contadino porta sulle spalle un'asta lunga $1,2m$, alle cui estremità A e B sono appesi due secchi pieni d'acqua. Il secchio A pesa $120N$ e il secchio B pesa $180N$. In che punto l'asta deve appoggiare sulla spalla per avere equilibrio? (Si trascuri il peso dell'asta.)

E7.4 In figura è rappresentata un'asta libera di ruotare attorno ad un asse ortogonale al piano del foglio e passante per O. In A e B sono applicate due forze $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ formanti rispettivamente un angolo $\alpha = 30°$ e un angolo $\beta = 45°$ con la direzione dell'asta. Sapendo che $\overline{AO} = 30cm$, $\overline{OB} = 25cm$, $F_A = 85N$, determinare il valore F_B necessario perchè l'asta sia in equilibrio.



E7.5 Dall'analisi della figura sottoriportata è possibile dedurre quale ragazzo pesa di più?



8. Le forze di attrito radente (cenni)

Quando noi spingiamo un armadio molto pesante senza riuscire a muoverlo, alla forza orizzontale $\vec{F}$ da noi applicata al mobile deve fare equilibrio un'altra forza $\vec{A}$ anch'essa orizzontale ma diretta in verso opposto (vedi fig. 8.1).

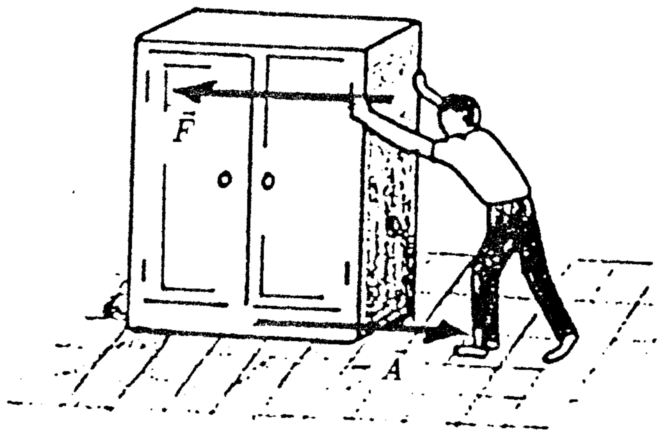


Figura 8.1

Questa forza è dovuta all'attrito tra il mobile e il pavimento, cioè alla difficoltà incontrata dal mobile a scivolare sul pavimento. Evidentemente la forza di attrito si manifesta solo quando noi cerchiamo di smuovere l'armadio.

Se ci facciamo aiutare da qualche amico e insieme spingiamo il mobile, riusciamo a spostarlo: ciò vuol dire che in questo caso abbiamo applicato al mobile una forza maggiore di quella che l'attrito è in grado di esercitare.

Come vedremo in maggiore dettaglio nel prossimo capitolo, la forza d'attrito dipende dalla natura e dallo stato delle superfici a contatto; essa può essere diminuita con particolari artifici. Ad esempio l'attrito che incontra un cilindro che rotola su di un piano (attrito volvente) è molto minore di quello che incontra un oggetto che striscia sullo stesso piano (attrito radente).

Un artificio quindi per smuovere un oggetto pesante può essere quello di farlo 'scivolare' su dei cilindri (vedi fig. 8.2).

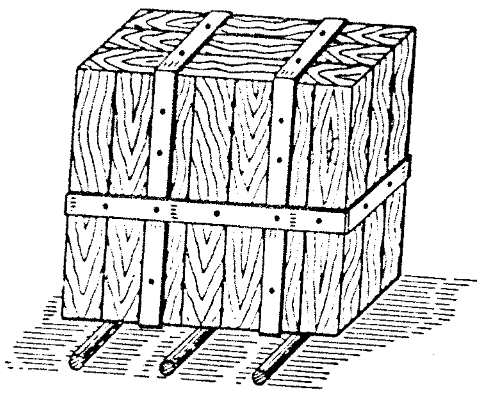


Figura 8.2

Un altro modo per diminuire l'attrito tra due superfici, come è noto, è quello di ungerle con dell'olio.

APPENDICE - Descrizione vettoriale del moto

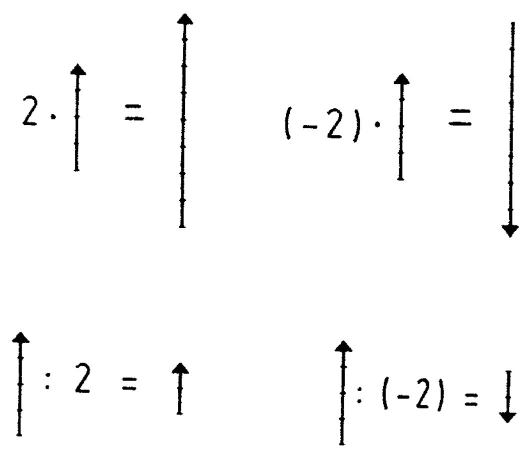
I vettori, che abbiamo introdotto in questo capitolo per descrivere le forze, possono essere usati anche per descrivere il moto di un oggetto nel caso in cui la traiettoria *non* sia rettilinea.

Per poter fare ciò è tuttavia necessario conoscere altre proprietà dei vettori.

1. *Calcolo vettoriale*

a. Prodotto o quoziente di un vettore per un numero

Se moltiplichiamo (o dividiamo) un vettore $\vec{V}$ per un numero n otteniamo un *nuovo vettore* che ha la stessa direzione del vettore $\vec{V}$, lo stesso verso o verso contrario a seconda che n sia positivo o negativo e che ha come modulo il prodotto (o il quoziente) del modulo del vettore per il valore assoluto del numero (vedi fig. A.1).



$$|n\vec{V}| = |n|V$$

Figura A.1

b. Vettore opposto

Dato un vettore $\vec{V}$ si definisce vettore opposto, e si indica con $-\vec{V}$, il vettore che si ottiene moltiplicando $\vec{V}$ per -1; cioè il vettore opposto di $\vec{V}$ è un vettore che ha la stessa direzione e lo stesso modulo di $\vec{V}$ ma verso contrario (vedi fig. $A.2$).

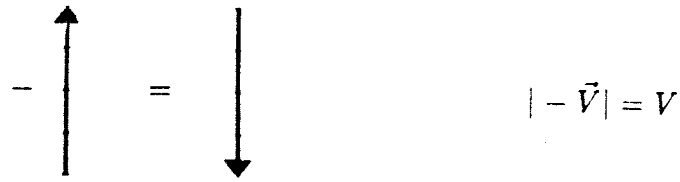


Figura $A.2$

c. Differenza di due vettori

Dati due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ si definisce vettore differenza $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ il vettore che si ottiene sommando al vettore $\vec{A}$ l'opposto del vettore $\vec{B}$, cioè, come illustrato in fig. $A.3$,

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$$

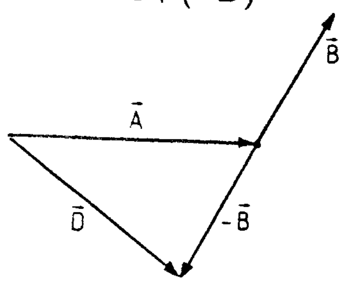


Figura $A.3$

Come si vede dalla fig. $A.4$, dati due vettori $\vec{A}$ e $\vec{B}$ individuati dai segmenti orientati $\vec{OA}$ e $\vec{OB}$ il vettore somma $\vec{S} = \vec{A} + \vec{B}$ e il vettore differenza $\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$ sono individuati rispettivamente dalle diagonali orientate $\vec{OC}$ e $\vec{BA}$ del parallelogramma $OACD$.

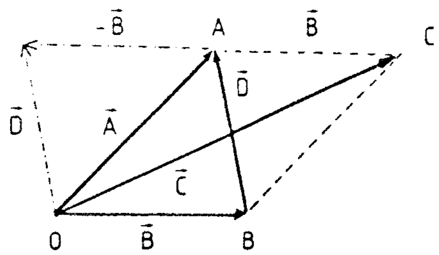


Figura $A.4$

Abbiamo ora elementi sufficienti di *calcolo vettoriale* per poter descrivere il moto di un oggetto, limitandoci, per semplicità, a considerare moti che avvengono in un piano, cioè *moti piani* o *in due dimensioni*.

2. *Velocità vettoriale*

Consideriamo un oggetto puntiforme che si muove nel piano del foglio passando nell'intervallo di tempo Δt dalla posizione P_i alla posizione P_f lungo una traiettoria curvilinea (vedi fig. A.5).

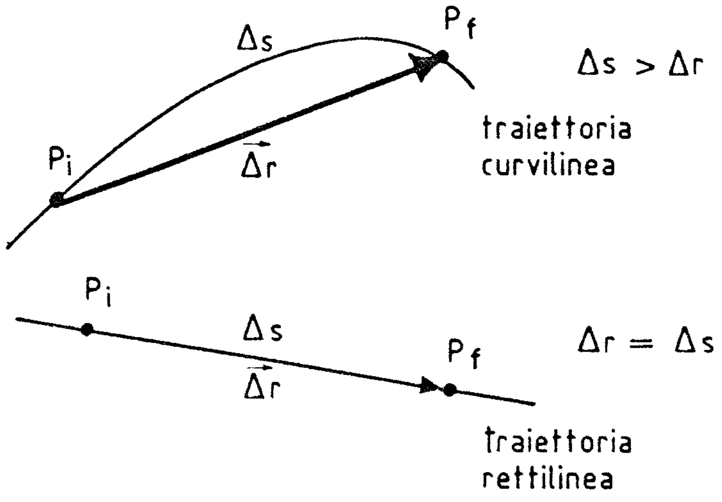


Figura A.5

Nel cap.I abbiamo considerato lo spazio Δs percorso lungo la traiettoria e abbiamo definito velocità media il rapporto $\Delta s/\Delta t$.

Possiamo ora considerare il vettore individuato dal segmento orientato $\vec{P_iP_f}$, chiamare tale vettore *vettore spostamento* $\vec{\Delta r}$ e definire velocità il vettore dato dal rapporto $\vec{\Delta r}/\Delta t$. Per evitare confusione chiameremo *velocità scalare media* il rapporto

$$v_{sm} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \qquad A.1$$

e *velocità vettoriale media* il vettore

$$\vec{v}_{vm} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \qquad A.2$$

Il vettore $\vec{v}_{vm}$ (essendo $\Delta t > 0$) ha la stessa direzione e lo stesso verso del vettore $\Delta\vec{r}$ e *valore* o *modulo* $v_{vm} = \Delta r/\Delta t$.

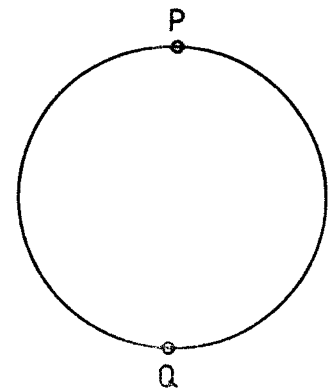
Se la traiettoria è rettilinea e il moto avviene sempre nello stesso verso, lo spazio percorso Δs è uguale al modulo Δr del vettore spostamento $\Delta\vec{r}$, mentre negli altri casi, in particolare se la traiettoria è curvilinea, lo spazio percorso è sempre maggiore del modulo del vettore spostamento.

Pertanto avremo in generale

$$v_{sm} > v_{vm}$$

Solo nel caso di un moto rettilineo si ha $v_{sm} = v_{vm}$

DA.1 Si consideri un oggetto che si muova su una traiettoria circolare di raggio $R = 1m$ e che all'istante $t = 0$ si trovi nel punto P (vedi figura sottoriportata). Se all'istante $t_1 = 1s$ l'oggetto si trova nel punto Q, diametralmente opposto, e all'istante $t_2 = 2s$ è ritornato nel punto P, determinare la velocità scalare media e la velocità vettoriale media relativamente ai due intervalli di tempo $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ e $\Delta t_2 = t_2 - t_0$.



Ripetiamo ora la procedura descritta nel cap.II per ricavare la velocità istantanea (vedi fig. A.6).

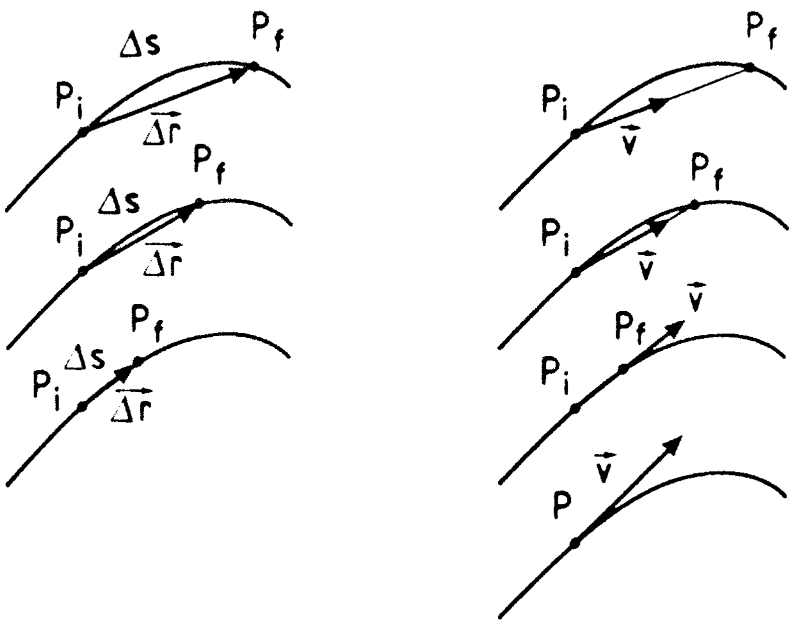


Figura A.6

Facciamo diminuire l'intervallo di tempo Δt: più Δt è piccolo, più il punto P_f è vicino al punto P_i e minore è la differenza tra Δs e Δr, quindi minore è la differenza tra la velocità scalare media e il valore della velocità vettoriale media. Inoltre il vettore $\Delta \vec{r}$, e quindi il vettore $\vec{v}_{vm}$, tende a diventare *tangente* alla traiettoria in P_i.

Possiamo pertanto concludere che, quando $\Delta t \rightarrow \delta t$,

a. la velocità scalare istantanea v_s è uguale al valore della velocità vettoriale istantanea $\vec{v}_v$.

b. La direzione della velocità vettoriale istantanea è quella della tangente alla traiettoria nel punto considerato e il verso è quello del moto.

In ogni istante quindi il *valore* della velocità vettoriale è *uguale* alla velocità scalare, ma la velocità vettoriale *contiene in più* l'informazione della *direzione* e del *verso* del moto in quell'istante.

Se il valore del vettore velocità è costante, il moto si dice *uniforme*. Tuttavia, se la traiettoria è curva la direzione e il verso del vettore velocità cambiano nel tempo.

Se il moto è rettilineo il vettore velocità è sempre diretto lungo la retta del moto. In questo caso possiamo prendere la traiettoria come asse x di riferimento e il vettore velocità è individuato dalla sua componente v_x. La descrizione vettoriale del moto si riduce quindi a quella sviluppata nel cap.II.

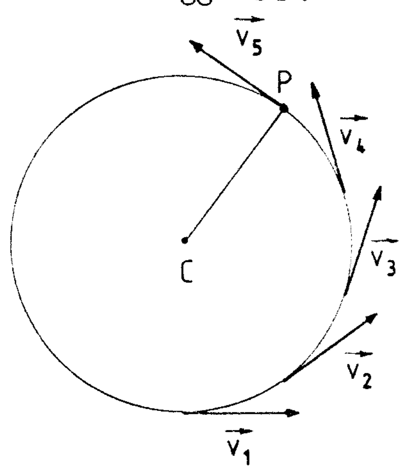
3. *Moto circolare uniforme*

Consideriamo un oggetto che si muove lungo una traiettoria circolare di raggio R con moto uniforme, cioè percorrendo archi uguali in intervalli di tempo uguali. In questo caso il valore del vettore velocità è in ogni istante lo stesso e coincide con la velocità scalare media relativa ad un qualsiasi intervallo di tempo. Se indichiamo con T il tempo che l'oggetto impiega a percorrere una intera circonferenza, cioè a tornare nella posizione iniziale, abbiamo

$$v = v_{sm} = \frac{2\pi R}{T} \qquad A.3$$

L'intervallo di tempo T è detto *periodo*.

Il vettore velocità è in ogni punto P *tangente* alla circonferenza (vedi fig. A.7), cioè perpendicolare al raggio CP.



$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

Figura A.7

4. *Accelerazione vettoriale*

Possiamo definire in generale *accelerazione* il vettore

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

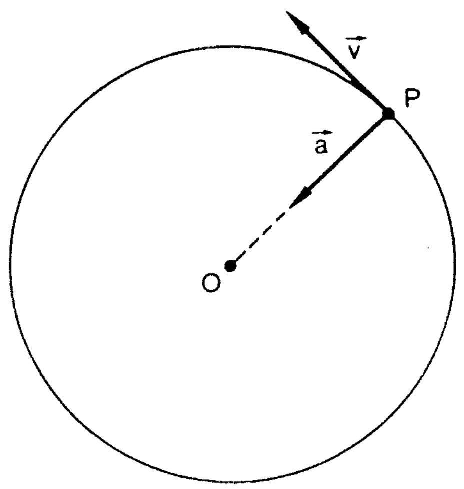
essendo $\vec{v}_2$ e $\vec{v}_1$ rispettivamente i vettori velocità agli istanti t_2 e t_1.

Si ha quindi accelerazione non solo quando durante il moto cambia il *valore* della velocità, ma anche quando cambiano la sua *direzione* o il suo *verso*.

Consideriamo ad esempio il moto circolare uniforme. In questo caso il valore della velocità è costante durante il moto, ma la direzione della velocità cambia continuamente.

In tale moto esiste quindi una *accelerazione*.

Si può mostrare che in un moto circolare uniforme il *vettore accelerazione* è in ogni istante diretto *perpendicolarmente* al *vettore velocità*, ha verso che va dal punto P al centro della circonferenza (vedi fig. A.8) e che il suo modulo è dato da $a = v^2/R$.



$$v = 2\pi\frac{R}{T}$$

$$a = \frac{v^2}{R}$$

Figura A.8

Se il moto è rettilineo, i vettori $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ sono sempre diretti come la traiettoria. Pertanto anche il vettore accelerazione è diretto come la traiettoria. Assumendo la traiettoria come asse x, i vettori velocità e accelerazione sono individuati dalle loro componenti v_x e a_x e la relazione $A.4$ diventa

$$a_x = \frac{v_{2x} - v_{1x}}{t_2 - t_1}$$

che è la relazione usata nel cap.II per definire l'accelerazione media nei moti rettilinei.

CAPITOLO IV

LE FORZE E IL MOTO

1. Il principio di inerzia (I principio della dinamica)

Il moto di un oggetto e le forze ad esso applicate sono tra loro strettamente correlati. Abbiamo infatti visto che per mettere in moto un oggetto dobbiamo applicare ad esso una forza. È inoltre vero che per fermare un oggetto in moto bisogna applicare all'oggetto una forza in direzione contraria al moto.

In questo capitolo cercheremo di ricavare le relazioni che intercorrono tra le grandezze che caratterizzano il moto di un oggetto e le forze che su tale oggetto agiscono.

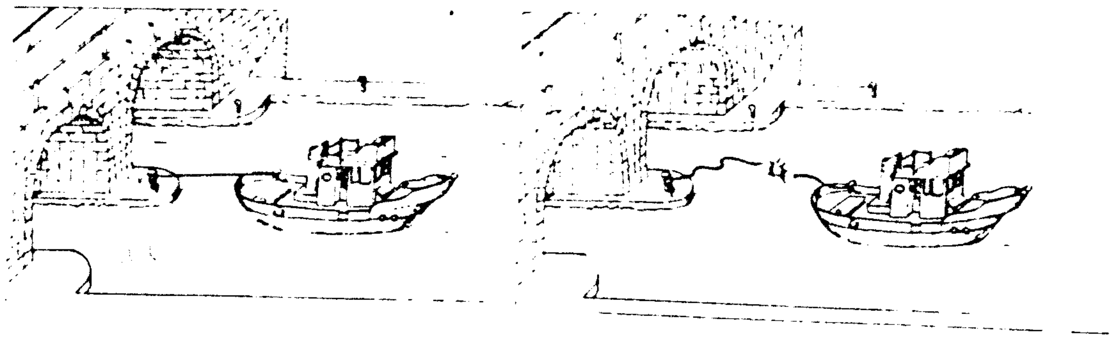
L'esperienza mostra che se un oggetto è fermo esso rimane fermo fino a quando su di esso non viene esercitata una forza. Ad esempio un sasso rimane fermo fino a quando lo raccogliamo e lo lanciamo. Una automobile rimane ferma fino a quando non accendiamo il motore e innestiamo la marcia. Le foglie di un albero rimangono ferme fino a quando non soffia il vento.

D1.1 Quali sono le forze che si esercitano sugli oggetti descritti nei casi precedenti, quando essi si mettono in moto?

D1.2 Un oggetto è appeso mediante un filo al soffitto. Quando tagliamo il filo esso cade. Quale forza agisce sull'oggetto quando tagliamo il filo? Tale forza agiva anche prima di tagliare il filo?

D1.3 Un automobile è ferma su una strada in discesa. Quando togliamo il freno essa comincia a muoversi. Quale forza agisce sull'automobile quando togliamo il freno? Tale forza agiva anche prima di togliere il freno?

D1.4 Quali sono le forze che agiscono sulla barca mostrata in due diverse situazioni nelle figure a e b?



(a) (b)

Cerchiamo ora di studiare cosa succede ad un oggetto in moto se su di esso non agisce alcuna forza.

Purtroppo non è possibile realizzare sulla Terra una tale situazione, in quanto su ogni oggetto agisce sempre la forza-peso. Tuttavia possiamo far muovere un oggetto su di un piano perfettamente orizzontale in modo che la forza-peso sia equilibrata dalla reazione vincolare esercitata sull'oggetto dalla superficie del piano. In questo modo però si introducono delle nuove forze, cioè le forze di attrito tra l'oggetto e la superficie del piano; tali forze possono tuttavia essere molto ridotte con particolari artifici.

Proviamo a lanciare un dischetto (vedi fig. 1.1) su di un piano orizzontale

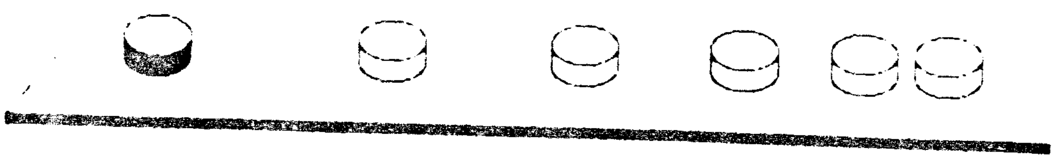


Figura 1.1

con una certa velocità iniziale v_0. Osserveremo che il dischetto si muove di moto rettilineo e la sua velocità va via via diminuendo fino a che esso si ferma. Ma se puliamo meglio la superficie, la levighiamo, la ungiamo con olio, cioè se cerchiamo di ridurre sempre più l'attrito, osserviamo che il dischetto rallenta sempre meno e si ferma sempre più lontano.

Tutto questo ci *induce a ritenere* che se fossimo in grado di eliminare completamente le forze di attrito e ogni altra forza eventualmente presente, il moto del dischetto non sarebbe più rallentato ed esso continuerebbe a muoversi con la stessa velocità con cui lo abbiamo lanciato. Anche se tale affermazione non può essere verificata sperimentalmente in modo rigoroso, essa è stata assunta come principio base su cui costruire tutto lo studio del moto dei corpi e chiamata *principio di inerzia o primo principio della dinamica.*

Di solito il principio di inerzia viene enunciato nel seguente modo:

Un oggetto su cui non agiscono forze, o soggetto a forze aventi risultante nulla, se è fermo rimane fermo, se è in moto continua a muoversi di moto rettilineo ed uniforme.(*)

In parole più semplici, il principio di inerzia afferma che ogni oggetto possiede la proprietà, se è fermo, di rimanere fermo e se è in moto di continuare a muoversi con la stessa velocità, fino a quando non si esercitano su di esso delle forze. Tale proprietà è detta *inerzia.*

(*) - Il principio di inerzia vale rigorosamente per certi sistemi di riferimento detti appunto inerziali. Esso è tuttavia ben verificato nei sistemi di riferimento solidali con la Terra o in moto rettilineo uniforme rispetto a questa.

2. La legge di Newton (II principio della dinamica)

Dal principio di inerzia si deduce che quando applichiamo ad un oggetto libero di muoversi una forza ne variamo la velocità. Ciò è in accordo con la nostra esperienza. Se applichiamo ad un oggetto fermo una forza lo mettiamo in moto nella direzione della forza; se applichiamo ad un oggetto in moto una forza nella stessa direzione in cui avviene il moto, possiamo aumentare o diminuire la sua velocità.

In tutti i casi l'effetto della forza è quello di imprimere all'oggetto una variazione di velocità, cioè una accelerazione. L'esperienza mostra che una forza costante, applicata ad un oggetto inizialmente fermo, lo fa muovere di moto rettilineo uniformemente accelerato nella direzione lungo la quale è applicata la forza. Inoltre l'accelerazione con cui l'oggetto si muove è direttamente proporzionale all'intensità della forza applicata. Cioè se noi raddoppiamo, triplichiamo,... l'intensità della forza, raddoppia, triplica,... anche il valore dell'accelerazione prodotta. Possiamo allora scrivere

$$\frac{F}{a} = costante = m$$

dove m è una costante di proporzionalità. Tale costante è caratteristica dell'oggetto considerato; infatti il valore del rapporto F/a tra l'intensità della forza applicata e quella dell'accelerazione prodotta cambia al cambiare dell'oggetto.

Alla costante m si dà il nome di *massa*. La massa di un oggetto dipende dalla quantità di materia di cui è costituito. Infatti l'esperienza mostra che se, mantenendo invariata la sostanza di cui è fatto l'oggetto, prendiamo un oggetto, ad esempio, di volume doppio, il valore di $m = F/a$ raddoppia.

Tenendo conto che la forza è una grandezza vettoriale, possiamo dare un primo enunciato della *legge di Newton o secondo principio della dinamica:*

Una forza $\vec{F}$ costante applicata ad un oggetto fermo o in moto nella stessa direzione della forza lo fa muovere di moto rettilineo uniformemente vario con una accelerazione la cui intensità è direttamente proporzionale all'intensità della forza e inversamente proporzionale alla massa del corpo, cioè

$$a = \frac{F}{m} \qquad \text{oppure} \qquad F = ma \tag{2.1}$$

Se l'oggetto è inizialmente fermo, il moto è uniformemente accelerato lungo la retta di azione della forza; se l'oggetto è in moto nella direzione della forza, il moto è uniformemente accelerato o decelerato a seconda che la forza agisca nel verso del moto o in verso contrario.

Se assumiamo come asse di riferimento un asse x avente la stessa direzione del moto, la 2.1 può essere riscritta

$$F_x = ma_x \tag{2.1'}$$

Rispetto a tale riferimento a_x ha segno positivo se la forza agisce nel verso del moto ($F_x > 0$); a_x ha invece segno negativo se la forza agisce in verso contrario al moto ($F_x < 0$).

3. Unità di misura delle masse e delle forze

La relazione 2.1 ci permette di confrontare le masse di oggetti diversi. Infatti in base ad essa due oggetti hanno la stessa massa se, sottoposti ad una stessa forza, acquistano la stessa accelerazione.

Se abbiamo già definito una unità di misura per la forza, potremmo definire l'unità di misura della massa nel seguente modo:
un oggetto ha massa unitaria se, sottoposto ad una forza costante di intensità unitaria, acquista un'accelerazione di $1m/s^2$.

Tuttavia questa unità di misura delle masse è poco comoda. Inoltre la massa è una grandezza fisica di uso più esteso che non la forza. Si preferisce quindi introdurre un campione di massa indipendente. Nel sistema MKS (così chiamato dalle iniziali delle unità di misura definite in modo indipendente: *Metro*, *Kilogrammo*, *Secondo*) si assume come *unità di misura della massa* la massa del campione di platino-iridio conservato a Sèvres (vedi anche Parte B capitolo I § 2).

Definita l'unità di misura della massa, l'unità di misura della forza rimane fissata dalla legge di Newton.
Nel sistema MKS *l'unità di misura della forza* è allora quella forza che imprime ad un oggetto di massa $1kg$ una accelerazione di $1m/s^2$. A tale unità si dà il nome di *newton* e la si indica con N.

Consideriamo ora alcuni esempi.

a. Un'automobile di massa $m = 10^3\ kg$ partendo da ferma acquista in 15 s una velocità di 108 km/h. Qual è l'intensità della forza, supposta costante, sviluppata dal motore?

Poiché inizialmente ($t_0 = 0$) la velocità è $v_0 = 0$ e al tempo $t_1 = 15s$ è $v_1 = 108km/h = (108 \times 0,278)m/s = 30m/s$, l'accelerazione è

$$a_x = \frac{v_1 - v_0}{t_1 - t_0} = \frac{30m/s\ -\ 0}{15s\ -\ 0} = 2\ m/s^2$$

Per la legge di Newton l'intensità della forza è allora

$$F_x = ma_x = 10^3\ kg \cdot 2m/s^2 = 2 \cdot 10^3\ N$$

b. Un'automobile che procede a 72 km/h deve essere fermata in $40m$. Se essa ha una massa di $10^3\ kg$, quale deve essere l'intensità della forza frenante?

Se supponiamo la forza costante, il moto risulta uniformemente decelerato con velocità iniziale $v_0 = (72 \times 0,278)m/s = 20m/s$. Dalla relazione 5.4 del cap.II abbiamo allora

$$a_x = \frac{0-(20m/s)^2}{2 \cdot 40m} = -\frac{400m^2/s^2}{80m} = -5\ m/s^2$$

e quindi

$$F_x = ma_x = 10^3\ kg \cdot (-5m/s^2) = -5 \cdot 10^3\ N$$

Il segno $-$ sta ad indicare che la forza deve essere diretta in verso contrario al moto.

E3.1 Quale accelerazione imprime la forza di $9,8N$ ad un oggetto avente la massa $m = 1kg$?

E3.2 Un oggetto di $12kg$ è sottoposto ad una forza di $12N$. Con quale accelerazione si muove?

E3.3 Un oggetto di $0,5kg$ si muove con un'accelerazione di $4m/s^2$. Qual è l'intensità della forza che agisce su di esso?

E3.4 Un oggetto sottoposto ad una forza di $200N$ si muove con un'accelerazione di $16m/s^2$. Qual è il valore della sua massa?

E3.5 Ad un oggetto fermo avente massa $m = 10kg$ viene applicata una forza costante $F = 20N$. Calcolare la velocità dell'oggetto dopo $8s$. Calcolare inoltre lo spazio percorso in tale intervallo di tempo.

E3.6 Un dischetto di massa $m = 1kg$ viene lanciato su di un piano orizzontale con una velocità $v = 10m/s$. Se l'attrito esercita sul dischetto una forza nel senso contrario al moto di intensità $F = 5N$, dopo quanto tempo il dischetto si ferma? Quanto spazio percorre?

E3.7 Un'automobile la cui massa è 10^3 kg possiede un motore in grado di sviluppare una forza di $2 \cdot 10^3 N$. Calcolare lo spazio necessario percnè l'automobile, partendo da ferma, raggiunga una velocità di $100km/h$.

E3.8 Un'automobile di $650kg$, partendo da ferma, raggiunge la velocità di $20m/s$ in $50s$. Determinare l'accelerazione (supposta costante) con cui si è mossa l'automobile e la forza esercitata dal motore.

4. Forza-peso e accelerazione di gravità

Abbiamo visto nel cap.III che ogni oggetto è sottoposto ad una forza diretta verticalmente verso il basso che abbiamo chiamato forza-peso. Poiché per uno stesso oggetto tale forza praticamente non dipende dall'altezza, esso dovrebbe cadere con accelerazione costante. Abbiamo visto infatti che una pallina molto pesante, lasciata libera, cade con moto uniformemente accelerato con accelerazione $g = 9,80\ m/s^2$.

Si può mostrare che tutti gli oggetti, se non ci fosse l'aria, cadrebbero con la stessa accelerazione g. Se lasciamo cadere in un recipiente in cui è stato fatto il vuoto una pallina di piombo e una foglia, osserviamo che esse raggiungono insieme il fondo del recipiente (vedi fig. 4.1).

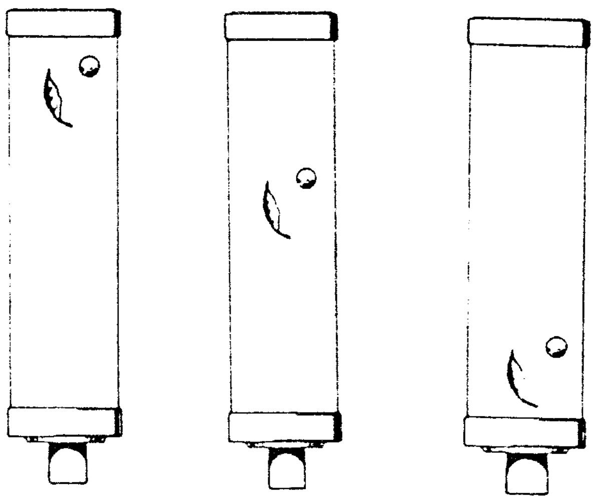


Figura 4.1

In base alla legge di Newton abbiamo allora che su ogni oggetto di massa m agisce una forza $\vec{P}$ il cui valore è dato da

$$P = mg$$

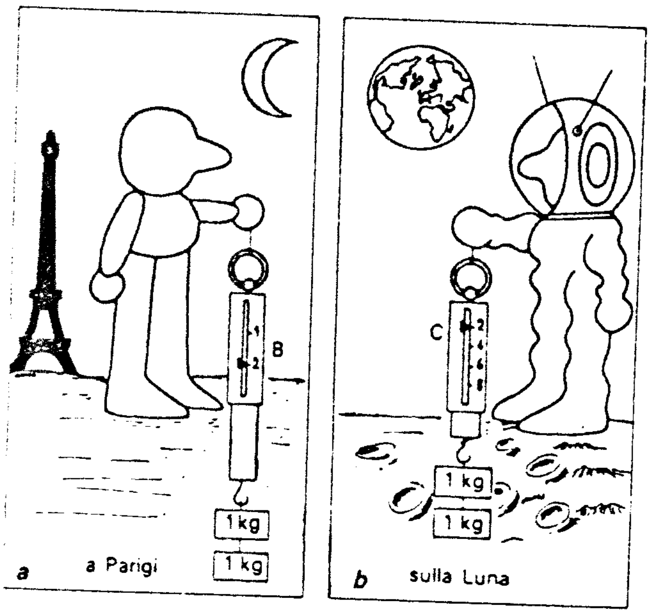
e che è diretta verticalmente dall'alto verso il basso. Tale forza è quella che abbiamo chiamato forza-peso.

Un oggetto di massa $m = 1kg$ è quindi sottoposto ad una forza-peso $P = 9,80m/s^2 \cdot 1kg = 9,80N$.

Tale forza è dovuta all'attrazione della Terra (vedi Appendice).

D4.1 Quanto pesa in *newton* un astronauta di $90kg$:
a. sulla Terra?
b. sulla Luna, dove l'accelerazione di gravità è $1,6\ m/s^2$?

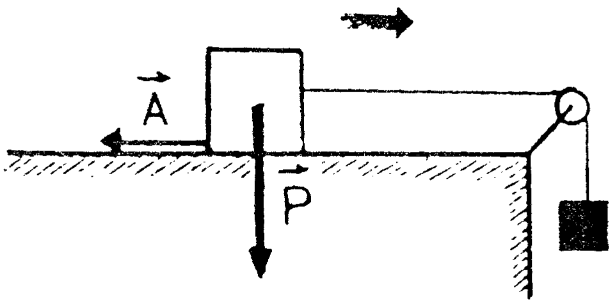
D4.2 Due dinamometri sono stati tarati rispettivamente a Parigi e sulla Luna. Osservando le due vignette sottoriportate discutere se le molle dei due dinamometri sono uguali.



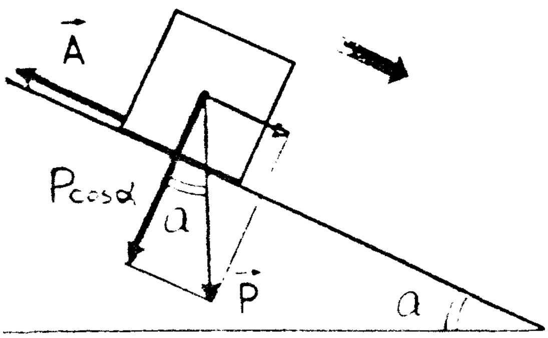
5. Le forze di attrito radente

Abbiamo già accennato alle forze di attrito che si manifestano ogniqualvolta cerchiamo di spostare o facciamo muovere un oggetto su una superficie.

Per quanto riguarda il moto, l'effetto dell'attrito su un oggetto che scivola su una superficie è sempre riducibile ad una forza costante $\vec{A}$ parallela alla superficie e opposta alla direzione del moto. Inoltre si trova sperimentalmente che, nel caso del moto di un oggetto su una superficie orizzontale (vedi fig. 5.1a), l'intensità della forza di attrito è proporzionale al peso P dell' oggetto.



(a) $A = \mu_d P$



(b) $A = \mu_d P \cos\alpha$

Figura 5.1

Se invece la superficie su cui scivola l'oggetto è inclinata di un angolo α rispetto al piano orizzontale (vedi fig. 5.1b), l'intensità della forza di attrito è proporzionale alla componente della forza-peso perpendicolare alla superficie, $P_\perp = P\cos\alpha$.

In generale possiamo scrivere

$$A = \mu_d N \tag{5.1}$$

dove N è l'intensità della forza premente in direzione perpendicolare alla superficie.

Il coefficiente di proporzionalità μ_d, detto *coefficiente di attrito dinamico*, è un numero puro; esso *dipende* dalla natura e dalla rugosità delle superfici a contatto ma *non dipende*, praticamente, dalla estensione della superficie di contatto e dalla velocità dell'oggetto. In tabella 5.1 sono riportati alcuni valori tipici del coefficiente di attrito dinamico tra coppie di diverse sostanze.

TABELLA 5.1

Materiali	μ_s	μ_d
Acciaio su acciaio	0,15	0,09
Acciaio su ghiaccio	0,03	0,01
Legno su legno (quercia)	0,5	0,3
Pneumatico su asfalto asciutto	1,0	0,9
Pneumatico su asfalto bagnato	0,5	0,3

Per quanto riguarda l'*attrito statico*, cioè le forze di attrito che si devono vincere per poter *mettere in movimento* un oggetto, si trova sperimentalmente che la forza *minima* che bisogna applicare all'oggetto, parallelamente alla superficie di appoggio, per riuscire a metterlo in movimento è data da

$$F_m = \mu_s N \tag{5.2}$$

dove N è ancora l'intensità della forza con cui l'oggetto preme in direzione perpendicolare alla superficie di appoggio. Cioè fino a quando la forza motrice $\vec{F}$ ha intensità minore di F_m, l'attrito statico è in grado di produrre una forza $\vec{A}$ esattamente uguale e contraria alla forza motrice e pertanto l'oggetto non si muove. Se invece $F > F_m$, l' oggetto si muove ed interviene allora l'attrito dinamico.

Il coefficiente μ_s, che dipende anch'esso solo dalla natura e dalla rugosità della superficie, è detto *coefficiente di attrito statico.* Come si vede dalla tabella 5.1 esso risulta sempre maggiore del coefficiente d'attrito dinamico. Ciò corrisponde al fatto, ben noto, che occorre sempre uno sforzo maggiore per mettere in moto un oggetto che non per mantenerlo in moto.

Consideriamo ora alcuni esempi.

a. Sappiamo che un oggetto lanciato su di una superficie orizzontale si ferma dopo aver percorso un certo spazio per effetto delle forze di attrito. Conoscendo la velocità iniziale v_0 e lo spazio percorso Δx, possiamo ricavare il valore del coefficiente di attrito dinamico μ_d.
Infatti, trattandosi di un moto uniformemente ritardato, dalla relazione 5.4. del cap.II abbiamo

$$a_x = -\frac{v_0^2}{2\Delta x}$$

Il segno meno corrisponde al fatto che l'accelerazione è diretta in verso contrario al moto.
La forza di attrito responsabile della decelerazione risulta allora, per la legge di Newton, diretta nel verso contrario al moto

$$A_x = ma_x = -\frac{mv_0^2}{2\Delta x}$$

e la sua intensità è data da

$$A = \frac{mv_0^2}{2\Delta x}$$

e quindi, dalla 5.1,

$$\mu_d = \frac{A}{P} = \frac{mv_0^2}{2mg\Delta x} = \frac{v_0^2}{2g\Delta x}$$

D5.1 Si lancia un dischetto di legno sul piano orizzontale di un tavolo di legno con una velocità iniziale $v_0 = 4\ m/s$. Sapendo che il dischetto si ferma dopo aver percorso uno spazio $\Delta x = 2,7m$, calcolare il valore del coefficiente di attrito dinamico legno-legno.

b. Consideriamo ora un cubo di legno che si trova su di una superficie pure di legno inclinata di un angolo $\alpha = 30°$ rispetto al piano orizzontale (vedi fig. 5.2).

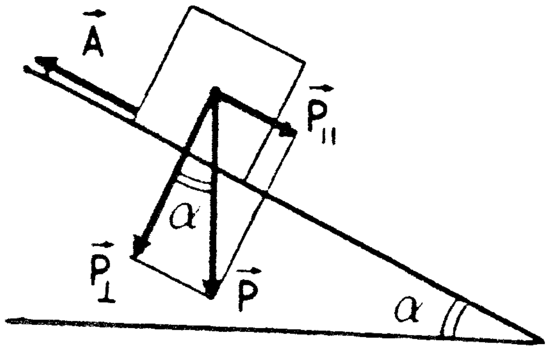


Figura 5.2

Come prima cosa verifichiamo se l'oggetto sta fermo o scivola lungo la superficie. A tale scopo scomponiamo la forza-peso $\vec{P} = m\vec{g}$ nei due vettori componenti parallelo ($\vec{P}_{\parallel}$) e perpendicolare ($\vec{P}_{\perp}$) alla superficie.
Come abbiamo già visto si ha

$$P_{\parallel} = P \sin\alpha \qquad\qquad P_{\perp} = P \cos\alpha$$

L'intensità della forza minima necessaria per far muovere il cubo è data dalla 5.2 dove $\mu_s = 0,5$ (vedi tabella 5.1), cioè

$$F_m = \mu_s P_{\perp} = 0,5P \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} P$$

Poiché

$$P_{\parallel} = P \sin\alpha = 0,5P > \frac{\sqrt{3}}{4}P$$

abbiamo $P_{\parallel} > F_m$ e quindi l'oggetto scivola lungo la superficie.

Una volta in movimento esso è soggetto, nella direzione del moto, a due forze: il vettore componente $\vec{P}_{\parallel}$ della forza-peso e la forza di attrito dinamico $\vec{A} = \mu_d \vec{P}_{\perp}$; la loro risultante, diretta come $\vec{P}_{\parallel}$, ha quindi intensità

$$F = P \sin\alpha - \mu_d P \cos\alpha = P(0,5 - 0,3\frac{\sqrt{3}}{2}) = 0,24P$$

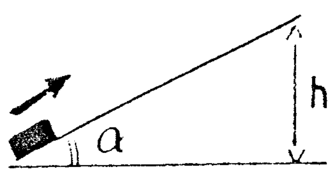
Pertanto, in base alla legge di Newton, il cubo scivola con una accelerazione

$$a = \frac{F}{m} = \frac{0,24 \cdot mg}{m} = 0,24 \cdot g$$

cioè con una accelerazione che è circa un quarto di quella di gravità.

E5.1 Un oggetto scivola lungo una superficie piana, inclinata di un angolo $\alpha = 30^\circ$ rispetto al piano orizzontale. Il coefficiente di attrito dinamico vale $\mu_d = 0,4$. Calcolare dopo quanto tempo e con quale velocità l'oggetto arriva alla fine del piano, sapendo che lo spazio che deve percorrere è $\Delta x = 9,8m$.

E5.2 Un dischetto di massa $m = 1\ kg$ viene lanciato con velocità $v_0 = 10m/s$ su una superficie piana inclinata di $\alpha = 30^\circ$ rispetto al piano orizzontale. Quale altezza h raggiungerebbe se non ci fosse l'attrito? Quale altezza h raggiunge invece se il coefficiente di attrito dinamico vale $\mu_d = 0,5$?
Una volta giunto alla massima altezza il dischetto scivola indietro. Con quale velocità ritorna al punto di partenza nei due casi?



---

c. Consideriamo infine il seguente problema.

Con quale forza $\vec{F}$ dobbiamo premere un cubo di legno contro una parete pure di legno per impedire che esso cada per terra (vedi fig. 5.3)?

Affinchè il nostro oggetto non cada, bisogna che la forza premente $\vec{F}$, normale alla parete, produca una forza d'attrito statico $\vec{A}$ in grado di equilibrare la forza-peso $\vec{P}$; per la 5.2, deve essere

$$A = \mu_s F = P$$

da cui, essendo $\mu_s = 0,5$, risulta $F = 2P$. Cioè bisogna premere l'oggetto contro la parete con una forza uguale *almeno* al doppio del peso del cubo.

D5.2 Che cosa succede se $F > 2P$?

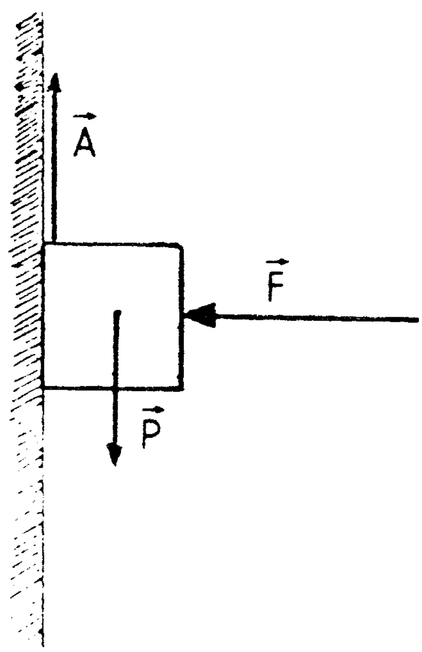


Figura 5.3

6. La resistenza dell'aria

Un'altra forza d'attrito anch'essa sempre presente e che si oppone al moto degli oggetti, è quella dovuta alla resistenza dell'aria. È per effetto della resistenza dell'aria che oggetti di forma e peso diversi, lasciati cadere dalla stessa altezza, arrivano al suolo con velocità diverse, muovendosi quindi con accelerazioni tra loro diverse e che sono sempre, di poco o di tanto, minori di quella di gravità.

È ancora per effetto della resistenza dell'aria che un'automobile non può superare certe velocità. Infatti, poichè la forza d'attrito dovuta al moto delle ruote sulla strada è praticamente indipendente dalla velocità, il moto dell'automobile dovrebbe essere ancora uniformemente accelerato e pertanto la velocità dovrebbe continuare ad aumentare nel tempo.
Il fatto che un'automobile raggiunga una certa velocità e poi continui a muoversi con velocità costante nonostante che il motore continui ad esercitare una forza, suggerisce che la forza frenante esercitata dall'aria sull'automobile debba dipendere dalla velocità. Per una certa velocità dell'automobile la forza frenante dell'aria bilancia esattamente la forza del motore.
Si può mostrare che per velocità non troppo elevate la forza di attrito $\vec{A}$ dovuta alla resistenza dell'aria è diretta in verso contrario al moto e ha intensità data dalla relazione

$$A = kv \qquad 6.1$$

dove il coefficiente k dipende dalla forma dell'oggetto.

Cerchiamo allora di studiare il moto di caduta libera di un oggetto di massa m. Esso è sottoposto a due forze: la forza-peso $P = mg$ diretta verticalmente verso il basso e la resistenza dell'aria $A = kv$, che è diretta in questo caso verticalmente verso l'alto (vedi fig. 6.1).
Assumendo come asse di riferimento un asse x diretto verticalmente verso il

basso, la legge di Newton si scrive

$$ma_z = mg - kv \qquad 6.2$$

Se l'oggetto è inizialmente fermo, su di esso agisce solo la forza-peso, essendo in questo caso

$$A = kv = 0$$

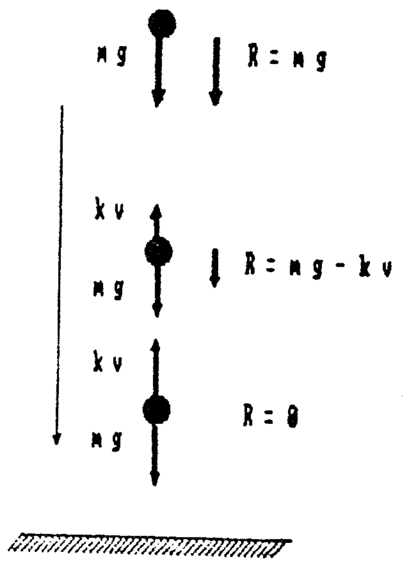


Figura 6.1

Il moto è quindi inizialmente uniformemente accelerato con un'accelerazione $a_z = g$. Tuttavia con l'aumentare della velocità aumenta l'intensità della resistenza dell'aria e diminuisce quindi il valore dell'accelerazione $a_z = g - kv/m < g$.

La velocità dell'oggetto va ancora aumentando nel tempo ma in maniera più lenta di quello che si avrebbe se non ci fosse la resistenza dell'aria. Quando l'oggetto raggiunge una velocità v_l tale che

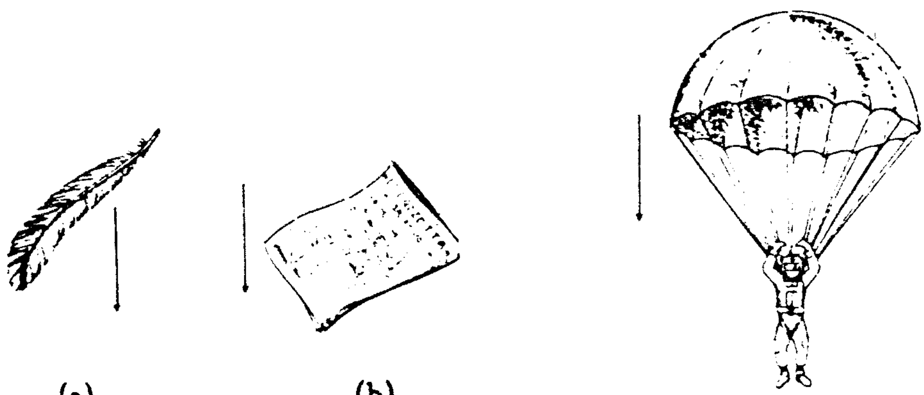
$$kv_l = mg \qquad 6.3$$

la forza di attrito dovuta alla resistenza dell'aria equilibra la forza-peso. L'intensità R della risultante delle due forze diventa uguale a *zero* e l'oggetto continua a muoversi con una velocità costante pari a v_l. Tale velocità è detta *velocità limite* e il suo valore, che si può ottenere dalla 6.3, è dato da

$$v_l = \frac{mg}{k} \qquad 6.4$$

Esso dipende sia dalla massa dell'oggetto sia dalla sua forma, attraverso il coefficiente k.

Nel caso di oggetti molto leggeri o aventi una superficie molto estesa (foglie, fogli di carta, piume, paracadute, ecc.) come quelli mostrati nella fig. 6.2, la velocità limite risulta piccola ed il moto di caduta dopo pochi metri non è più uniformemente accelerato, ma diventa uniforme.



(a) (b) (c)

Figura 6.2

Nel caso invece di oggetti costituiti da sostanze con elevata densità e con superficie poco estesa (palline di piombo, proiettili, sassi, ecc.) la velocità limite risulta molto elevata e viene raggiunta solo dopo molti metri di caduta. In questi casi, se ci si limita a studiare il moto nei primi metri di caduta, è possibile trascurare la resistenza dell'aria.

Per diminuire l'effetto della resistenza dell'aria su di un oggetto in moto si cerca di realizzare delle forme particolari, dette *aereodinamiche*, che diminuiscano il valore del fattore k. Ad esempio la forma delle automobili progettate per alta velocità è molto diversa da quella delle automobili che sono state costruite per muoversi a velocità basse (vedi fig. 6.3).

(a) (b)

Figura 6.3

Nella fig. 6.4 è riportata la fotografia del Concorde, l'aereo passeggeri anglo-francese che riesce a volare ad una velocità doppia di quella del suono.

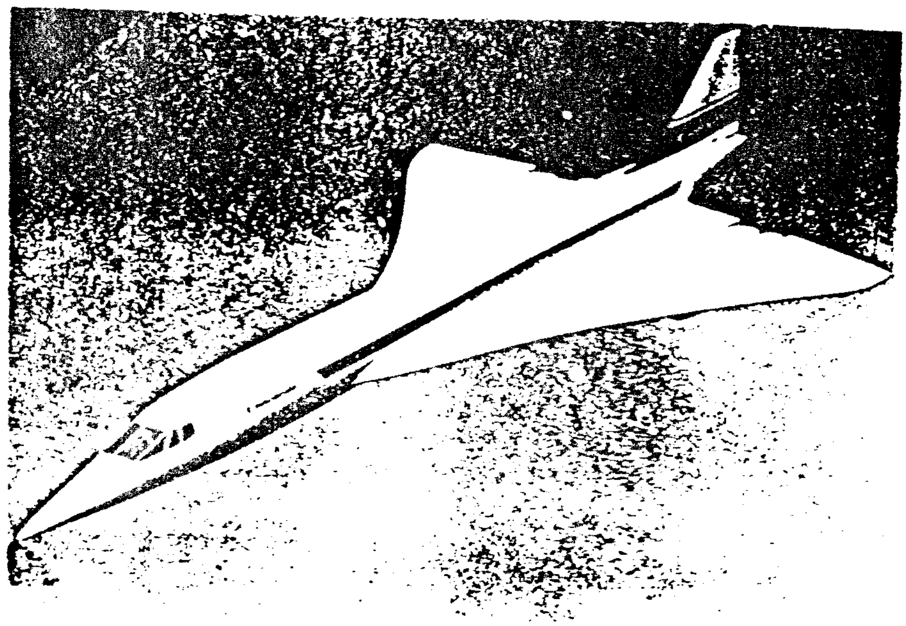


Figura 6.4

Nella fig. 6.5 è riportata la fotografia di un pescecane. La sua forma aereodinamica e la particolare struttura della sua pelle riducono notevolmente l'attrito dell'animale con l'acqua durante il moto, consentendogli di muoversi a velocità maggiore di quella degli altri pesci.

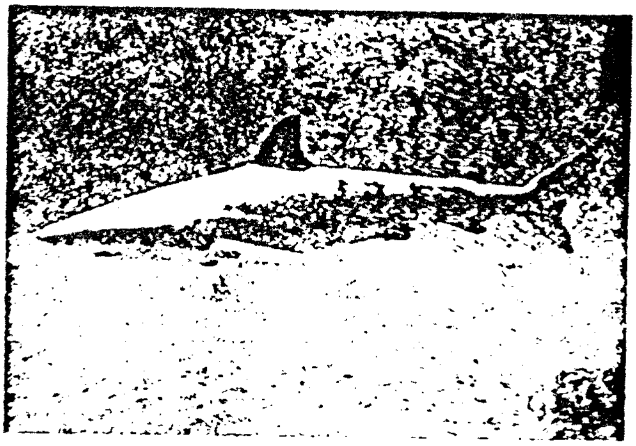


Figura 6.5

Se non è possibile trascurare l'effetto della resistenza dell'aria le relazioni del § 6 del capitolo II ci forniscono ancora dei risultati interessanti. Ad esempio le relazioni 6.4 e 6.3 ci dicono che un sasso lasciato cadere da un'altezza h arriva al suolo con una velocità *minore* di $v = \sqrt{2gh}$, impiegando un tempo *maggiore* di $\Delta t = \sqrt{2h/g}$. Analogamente la relazione 6.7 ci dice che un sasso lanciato verticalmente verso l'alto con una velocità v_0 *non può superare* un'altezza $h = v_0^2/2g$ e ricade a terra con una velocità minore di quella con cui è stato lanciato.

D6.1 Giustificare le precedenti affermazioni.

L'altezza raggiunta effettivamente dal sasso o la velocità con cui esso ricade a terra può essere calcolata in modo abbastanza preciso. Il calcolo richiede però conoscenze di analisi che saranno acquisite solo nei prossimi anni.

In molti casi può essere utile aumentare la resistenza dell'aria, ad esempio per diminuire la velocità di caduta libera di un oggetto.
Ciò può essere fatto aumentando la superficie (e quindi il coefficiente k) praticamente senza aumentare la massa (e quindi la forza-peso) dell'oggetto: è proprio a questo scopo che viene utilizzato il paracadute.
Nella fig. 6.6 è riportata la fotografia del momento dell'ammaraggio di una capsula spaziale Apollo.

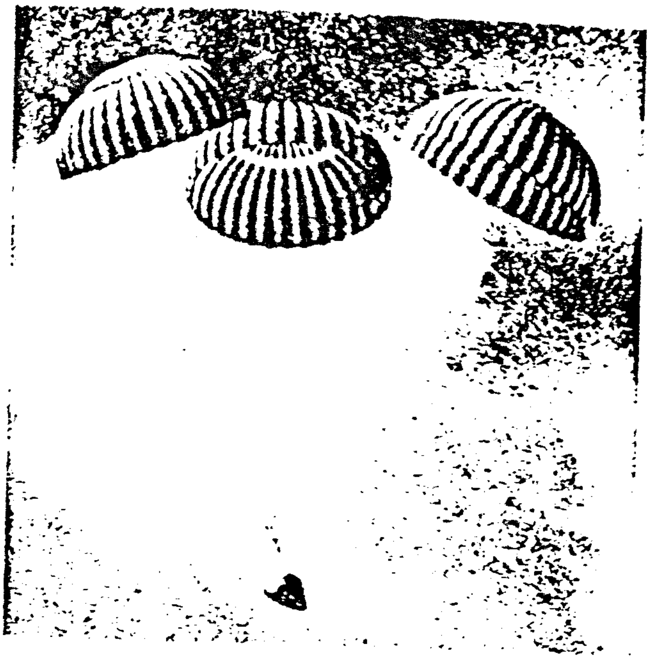


Figura 6.6

E6.1 Un ragazzo, seduto sotto una palma, vede improvvisamente staccarsi, sopra la sua testa, ad una altezza di $9,8m$, una noce di cocco. Se egli impiega $1,3s$ ad alzarsi e spostarsi, riesce ad evitare la noce di cocco?

E6.2 Una scimmia si trova tra i rami di una palma ad un'altezza di $10\ m$ dal suolo. Un ragazzo scaglia una pietra con una velocità di $13\ m/s$. La pietra potrebbe colpire la scimmia?

E6.3 Un sasso, lasciato cadere in un fiume da un ponte, raggiunge l'acqua dopo $1,5s$. Quanto è alto il ponte? Con quale velocità il sasso raggiunge l'acqua?

7. Il principio di azione e reazione (III principio della dinamica)

I primi due principi della dinamica riguardano i singoli oggetti, ma non dicono nulla sulle azioni che si esercitano *tra* gli oggetti.

Se un oggetto (o una persona) esercita una forza su di un altro oggetto, l'esperienza ci insegna che anche il secondo oggetto esercita una forza sul primo. Quando una calamita attira verso di sè un pezzo di ferro, il pezzo di ferro esercita sulla calamita una forza in verso contrario. Infatti, se entrambi gli oggetti sono liberi di muoversi, non è solo il pezzo di ferro che si muove verso la calamita, ma è anche la calamita che si muove verso il pezzo di ferro.

Possiamo osservare questo fatto ad esempio ponendo la calamita e il pezzo di ferro su due galleggianti in una bacinella d'acqua. Calamita e pezzo di ferro si muovono l'una verso l'altro.
Questa esperienza ci permette anche di mostrare che l'intensità della forza esercitata dalla calamita sul pezzo di ferro è uguale all'intensità della forza esercitata dal pezzo di ferro sulla calamita. Per fare ciò (vedi fig. 7.1) è sufficiente fissare calamita e pezzo di ferro alle pareti della bacinella mediante due dinamometri uguali.

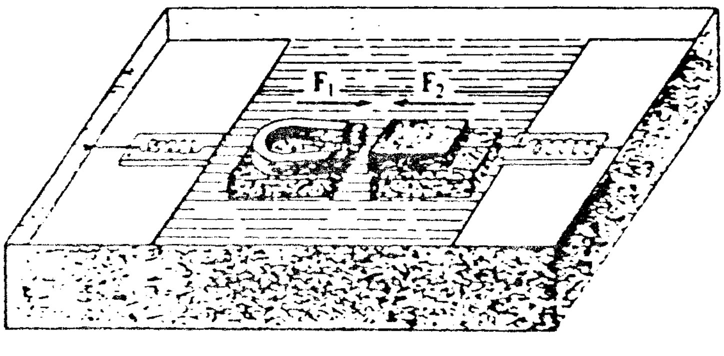


Figura 7.1

Si osserva che l'allungamento dei due dinamometri è lo stesso.

Sulla base di queste osservazioni sperimentali, alle quali se ne potrebbero aggiungere tante altre, è possibile enunciare il *terzo principio della dinamica*, detto anche *principio di azione e reazione*.

Ogni volta che un oggetto A è sottoposto all'azione di una forza da parte di un oggetto B, a questa corrisponde, in condizione sia di quiete che di moto, una forza uguale e contraria, cioè avente la stessa intensità e direzione ma verso contrario, esercitata dall'oggetto A sull'oggetto B.

Le forze di reazione vincolare che abbiamo introdotto nel § 6 del cap.III sono dovute alla reazione del vincolo alla azione dell'oggetto ad esso vincolato. Ad esempio se noi teniamo sospeso un oggetto con una fune, l'oggetto esercita sulla fune una forza $\vec{F}_1$ diretta verticalmente verso il basso di intensità uguale al suo peso $\vec{P}$. Per il principio di azione e reazione la fune esercita sull'oggetto una forza $\vec{F}_2$ di uguale intensità diretta verticalmente verso l'alto (vedi fig. 7.2a).

La forza $\vec{F}_1$ è applicata alla fune mentre la forza $\vec{F}_2$ è applicata all'oggetto. Poichè la forza $\vec{F}_2$ è uguale e contraria al peso $\vec{P}$ dell'oggetto, quest'ultimo risulterà in equilibrio.

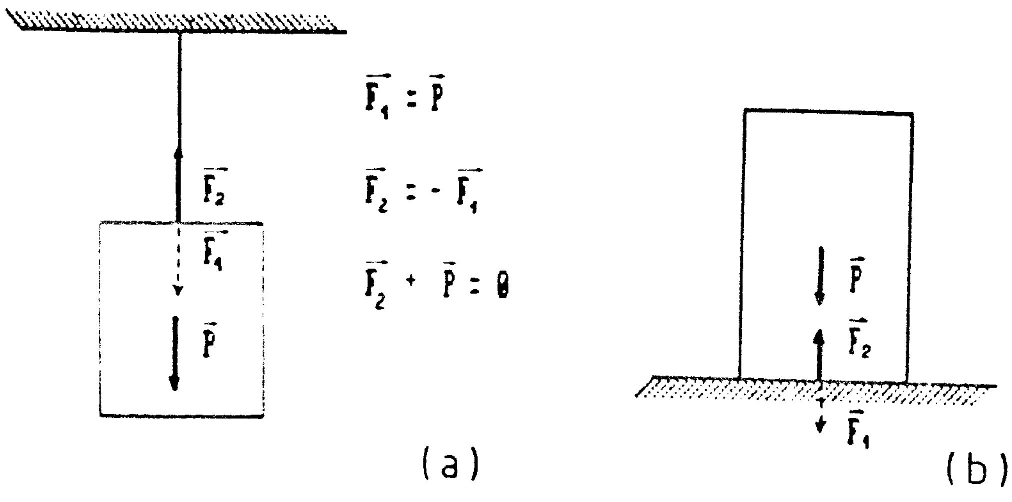
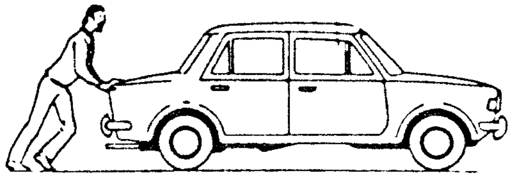


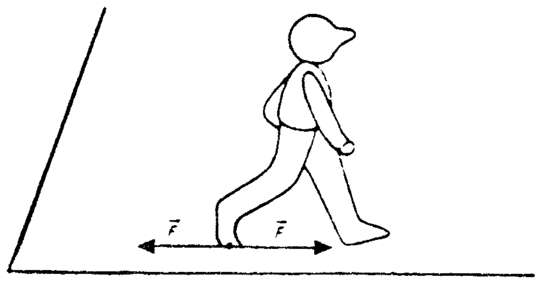
Figura 7.2

Analogamente, un oggetto appoggiato su di un tavolo esercita su di questo una forza $\vec{F}_1$ uguale al suo peso ed il tavolo esercita sull'oggetto una forza uguale e contraria $\vec{F}_2$ (vedi fig. 7.2b) che equilibra il peso dell'oggetto.

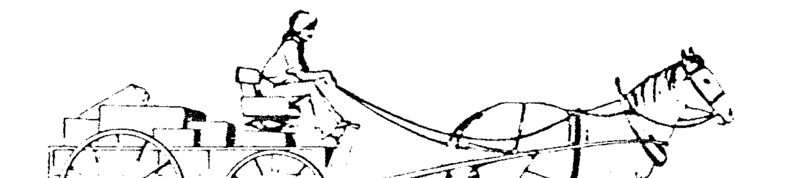
D7.1 Un uomo sta spingendo la sua automobile, come è mostrato nella figura riportata sotto. Disegnare *tutte* le forze che agiscono sull'automobile.



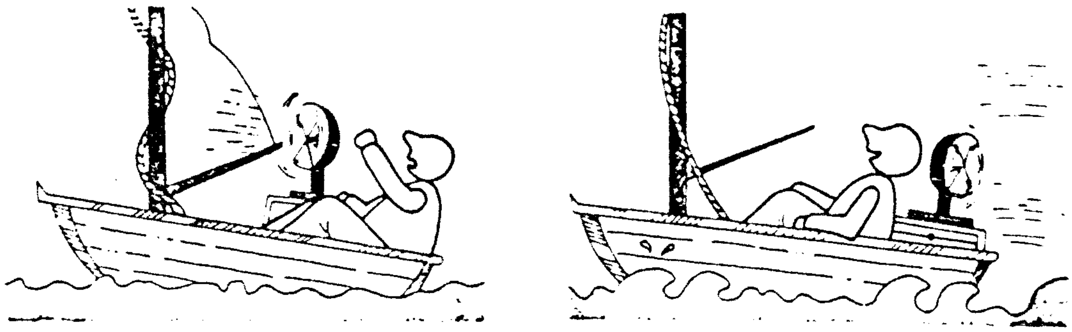
D7.2 Quale delle due forze disegnate nella figura è quella che fa avanzare l'uomo?



D7.3 Un cavallo tira un carretto lungo una strada orizzontale. Esso esercita una forza sul carro e quindi il carro ne deve esercitare una uguale e contraria sul cavallo. Come mai allora carro e cavallo si muovono tutti e due nella stessa direzione?



D7.4 Si osservi il disegno sotto riportato e si cerchi di spiegare perchè il ventilatore fa muovere la barca a vela nel caso b e non nel caso a.
Cosa succederebbe nel caso a se non ci fosse la vela?



(a) (b)

Prima di terminare il paragrafo vogliamo fare un'osservazione. Se la Terra esercita una forza mg su di un oggetto, in base al III principio sulla Terra agisce una forza uguale e contraria esercitata dall'oggetto (vedi fig. 7.3).

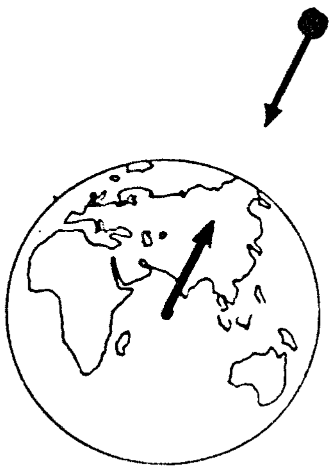


Figura 7.3

L'oggetto e la Terra si muovono l'uno verso l'altra. Tuttavia, a causa dell'enorme differenza tra la massa dell'oggetto e quella della Terra, l'accelerazione a e quindi lo spostamento subito dalla Terra è del tutto trascurabile. Infatti, dalla legge di Newton, chiamando m la massa dell'oggetto e M quella della Terra, abbiamo

$$mg = Ma$$

da cui

$$a = \frac{m}{M}g$$

Quando l'oggetto cade da un'altezza h la Terra si muove anch'essa di moto uniformemente accelerato verso l'oggetto, spostandosi nello stesso tempo di una quantità circa uguale a

$$\Delta s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\frac{m}{M}g(\frac{2h}{g}) = \frac{m}{M}h$$

Posto $m = 1kg$ e $h = 100m$, essendo $M \simeq 5 \cdot 10^{24}kg$ abbiamo

$$a \simeq 2 \cdot 10^{-24}\ m/s^2$$

$$\Delta s \simeq 2 \cdot 10^{-23}\ m$$

Anche se lo spostamento della Terra è piccolissimo, si potrebbe pensare che lasciando cadere un grandissimo numero di sassi si potrebbe spostare la Terra di una distanza apprezzabile. Ciò non è vero; infatti prima di far cadere il sasso bisogna sollevarlo da terra e per sollevarlo dobbiamo applicare ad esso una forza diretta verticalmente verso l'alto di intensità uguale al suo peso P. Per reazione il sasso eserciterà su di noi una forza uguale diretta verso il basso. Poiché noi ci troviamo appoggiati sulla Terra, questa forza verrà esercitata anche sulla Terra. Per effetto di tale forza, quando portiamo un sasso di massa $1kg$ ad una altezza $h = 100m$, la Terra si sposta in direzione contraria di una quantità $\Delta s = 2 \cdot 10^{-23}\ m$. Alla fine quindi, quando il sasso sarà ricaduto al suolo, la Terra si ritroverà nella posizione iniziale.

APPENDICE A - La Gravitazione universale

Keplero (1571-1630), sulla base dei dati astronomici allora conosciuti, stabilì per il moto dei pianeti, e quindi della Terra, attorno al Sole le seguenti leggi:

1. *Ogni pianeta descrive intorno al Sole un'orbita ellittica di cui il Sole occupa uno dei fuochi.*
2. *Il segmento ideale congiungente il pianeta col Sole descrive aree proporzionali ai tempi impiegati a descriverle* (legge delle aree).
3. *I quadrati dei periodi di rivoluzione* (cioè dei tempi impiegati dai pianeti per descrivere le loro orbite) *sono proporzionali ai cubi degli assi maggiori delle rispettive orbite ellittiche.*

I punti di minima e di massima distanza del pianeta dal Sole sono le intersezioni dell'asse maggiore dell'ellisse coll'ellisse stesso. Il punto P di minima distanza viene chiamato *perielio*, il punto A in cui la distanza è massima viene chiamato *afelio* (vedi fig. A.1).

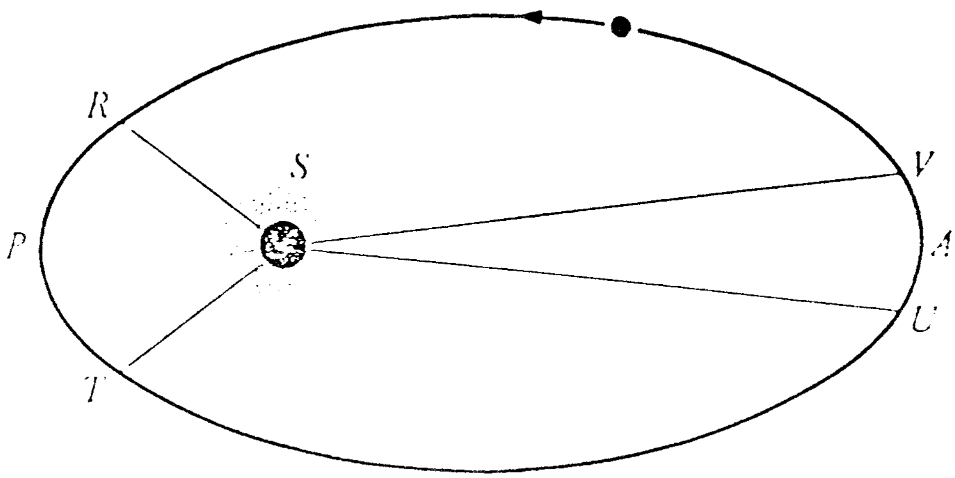


Figura A.1

Sulla base della seconda legge si può ricavare facilmente che un pianeta si muove lungo la sua orbita con velocità di intensità variabile. Ad esempio in fig. $A.1$ consideriamo i due triangoli mistilinei TRS e VUS, di uguale area e quindi descritti dal pianeta in tempi uguali in virtù della seconda legge. È evidente che l'arco $\overset{\frown}{UV}$ è più corto dell'arco $\overset{\frown}{RT}$ e quindi, poichè essi vengono percorsi dal pianeta in tempi uguali, la velocità del pianeta è più grande al perielio che non all'afelio.

In pratica questa variazione di velocità è molto piccola per la maggior parte dei pianeti, perchè le ellissi da essi descritte differiscono in realtà molto poco da cerchi. L'orbita più ellittica è quella di Plutone.

Notiamo inoltre che le orbite di tutti i pianeti giacciono praticamente in un unico piano, eccezion fatta per Plutone. Il piano della sua orbita forma con quello delle altre orbite un angolo di circa 17° (vedi fig. $A.2$).

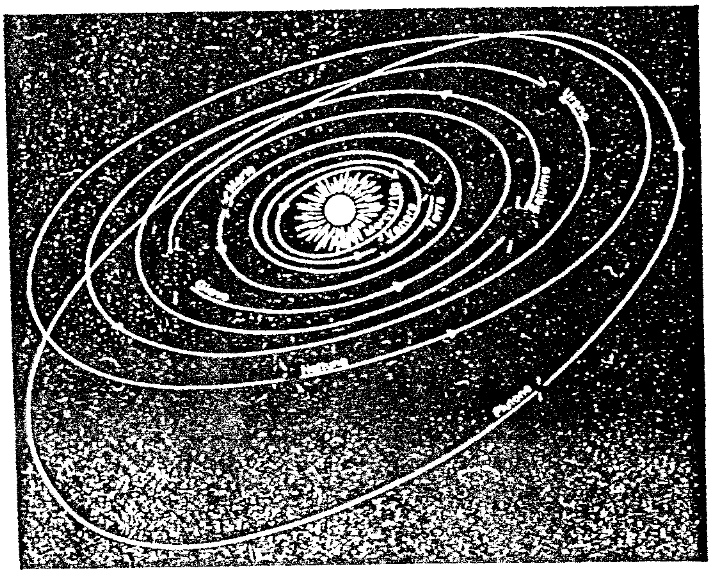


Figura $A.2$

Nella tabella $A.1$ (che si trova nella pagina seguente) sono riportati per ogni pianeta il raggio medio dell'orbita, il cui valore coincide praticamente

TABELLA A.1

Corpo celeste	*Raggio dell'orbita* (m)	*Periodo di rivoluzione* (s)	R^3/T^2 (m^3/s^2)
Mercurio	$5,79 \cdot 10^{10}$	$7,60 \cdot 10^6$	$3,354 \cdot 10^{18}$
Venere	$1,08 \cdot 10^{11}$	$1,94 \cdot 10^7$	$3,352 \cdot 10^{18}$
Terra	$1,50 \cdot 10^{11}$	$3,16 \cdot 10^7$	$3,354 \cdot 10^{18}$
Marte	$2,28 \cdot 10^{11}$	$5,94 \cdot 10^7$	$3,354 \cdot 10^{18}$
Giove	$7,78 \cdot 10^{11}$	$3,74 \cdot 10^8$	$3,355 \cdot 10^{18}$
Saturno	$1,43 \cdot 10^{12}$	$9,30 \cdot 10^8$	$3,353 \cdot 10^{18}$
Urano	$2,87 \cdot 10^{12}$	$2,66 \cdot 10^9$	$3,34 \cdot 10^{18}$
Nettuno	$4,50 \cdot 10^{12}$	$5,20 \cdot 10^9$	$3,37 \cdot 10^{18}$
Plutone	$5,91 \cdot 10^{12}$	$7,82 \cdot 10^9$	$3,35 \cdot 10^{18}$
Luna	$3,84 \cdot 10^8$	$2,36 \cdot 10^6$	$9,85 \cdot 10^{12}$

Corpo celeste	*Massa* (kg)	*Raggio* (m)	*Periodo di rotazione* (s)
Sole	$1,99 \cdot 10^{30}$	$6,96 \cdot 10^8$	$2,14 \cdot 10^6$
Mercurio	$3,28 \cdot 10^{23}$	$2,57 \cdot 10^6$	$7,60 \cdot 10^6$
Venere	$4,83 \cdot 10^{24}$	$6,26 \cdot 10^6$	$2,60 \cdot 10^6$
Terra	$5,98 \cdot 10^{24}$	$6,38 \cdot 10^6$	$8,61 \cdot 10^4$
Marte	$6,37 \cdot 10^{23}$	$3,43 \cdot 10^6$	$8,85 \cdot 10^4$
Giove	$1,90 \cdot 10^{27}$	$7,18 \cdot 10^7$	$3,54 \cdot 10^4$
Saturno	$5,67 \cdot 10^{26}$	$6,03 \cdot 10^7$	$3,60 \cdot 10^4$
Urano	$8,80 \cdot 10^{25}$	$2,67 \cdot 10^7$	$3,88 \cdot 10^4$
Nettuno	$1,03 \cdot 10^{26}$	$2,48 \cdot 10^7$	$5,69 \cdot 10^4$
Plutone	$1,3 \cdot 10^{22}$	$1,15 \cdot 10^6$	$5,52 \cdot 10^5$
Luna	$7,34 \cdot 10^{22}$	$1,74 \cdot 10^6$	$2,36 \cdot 10^6$

con quello del semiasse maggiore, il periodo di rivoluzione e infine il valore del rapporto tra il cubo del raggio e il quadrato del periodo. Come si vede il valore di questo rapporto è quasi costante, confermando l'enunciato della terza legge di Keplero.

Sulla base del secondo principio della dinamica Newton mostrò che il moto dei pianeti può essere spiegato assumendo che il Sole eserciti su ogni pianeta una forza di attrazione diretta come la retta congiungente il Sole con il pianeta e la cui intensità è direttamente proporzionale alla massa del pianeta M_p e inversamente proporzionale al quadrato della distanza r tra il pianeta e il Sole

$$F_{ps} = K_s \frac{M_p}{r^2} \qquad A.1$$

dove K_s è una costante che non dipende dal pianeta considerato, ma è caratteristica del Sole.

Per il terzo principio il pianeta esercita sul Sole una forza uguale e contraria. D'altra parte la forza esercitata da un pianeta sul Sole deve avere, per simmetria con il caso precedente, l'espressione

$$F_{sp} = K_p \frac{M_s}{r^2} \qquad A.2$$

dove la costante K_p è ora caratteristica del pianeta considerato.
Ponendo allora $F_{sp} = F_{ps}$ abbiamo

$$K_p M_s = K_s M_p$$

da cui

$$\frac{K_p}{M_p} = \frac{K_s}{M_s}$$

cioè tale rapporto è lo stesso sia per il Sole che per ogni pianeta. Ponendo tale rapporto uguale ad una costante G abbiamo

$$K_s = G \cdot M_s$$

$$K_p = G \cdot M_p$$

La $A.1$ e la $A.2$ diventano

$$F_{ps} = F_{sp} = G\frac{M_p \cdot M_s}{r^2} \qquad A.3$$

dove G è una costante universale.

Newton suppose inoltre che tale forza di attrazione dovesse esercitarsi tra qualsiasi coppia di oggetti *puntiformi* di massa m_1 e m_2 posti a distanza r_{12}, cioè

$$F_{12} = F_{21} = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \qquad A.4$$

Tale forza dovrà quindi esercitarsi anche tra la Terra e qualsiasi oggetto posto vicino alla Terra stessa.

Assumendo la Terra perfettamente sferica, possiamo scrivere che la forza esercitata dalla Terra su un oggetto di massa m vicino alla Terra vale

$$F = G\frac{M_t}{R^2} \cdot m \qquad A.5$$

dove R è il raggio della Terra.

Tale forza rappresenta il peso $P = mg$ dell'oggetto. Abbiamo quindi

$$g = G\frac{M_t}{R^2} \qquad A.6$$

Il valore della costante G fu misurato nel 1798 da Cavendish in laboratorio; fu ottenuto il valore

$$G = 6,75 \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{s^2 kg}$$

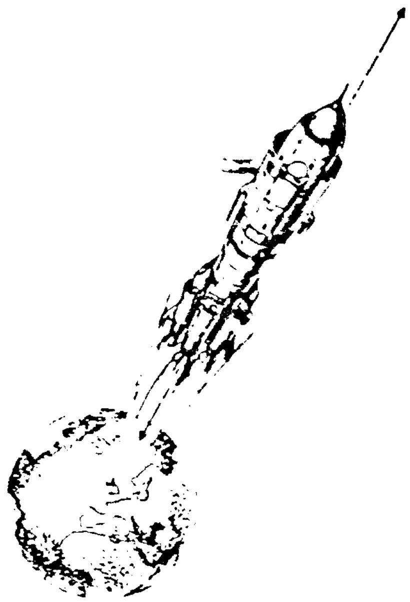
Oggi disponiamo di un risultato più preciso

$$G = (6,6720 \pm 0,0003) \cdot 10^{-11}\ \frac{m^3}{s^2 kg} \qquad A.7$$

DA.1 Sulla base della A.6 e dal valore di G dato dalla A.7 determinare il valore della massa della Terra e confrontarlo con quello indicato nella tabella A.1.

DA.2 Quanto vale l'accelerazione di gravità sulla Luna? Sul Sole? Sugli altri pianeti del Sistema Solare?

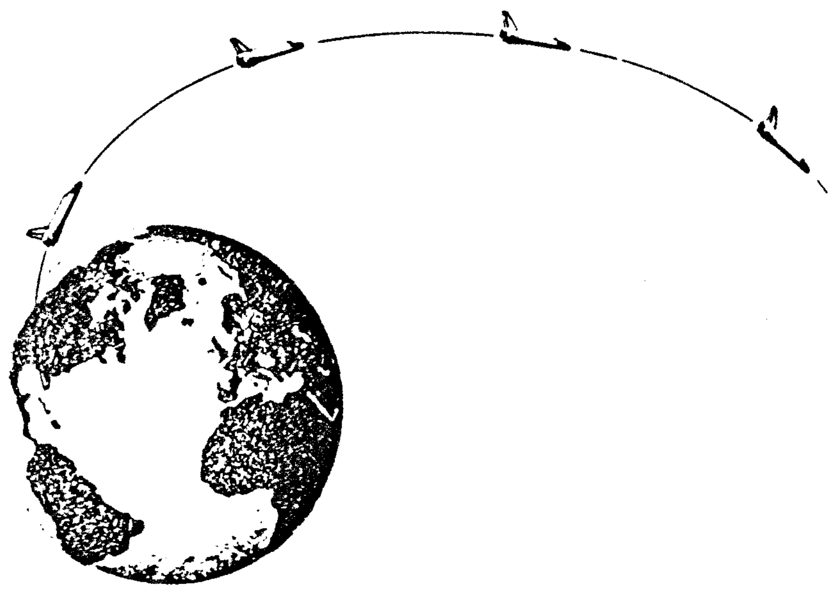
DA.3 La forza di attrazione che la Terra esercita sull'astronave di massa m mostrata in figura vale $(m \cdot 9,8)N$?



DA.4 La tabella seguente suggerisce un modello in scala del sistema solare. Determinare il dato mancante relativo alla Terra.

Oggetti nel sistema solare	*Oggetti nel modello*	*Distanza dal Sole nel modello (metri)*
Sole	Un pallone da pallacanestro	
Mercurio	Un seme di papaia	13
Venere	Un pisello	25
Terra	Un pisello	
Marte	Un seme di papaia	52
Giove	Una palla da golf	180
Saturno	Una palla da ping-pong	320
Urano	Un acino d'uva	650
Nettuno	Un acino d'uva	$1 \cdot 10^3$
Plutone	Un seme di papaia	$1,3 \cdot 10^3$
La stella più vicina	Un pallone da pallacanestro	$9,3 \cdot 10^6$

DA.5 Disegnare la forza gravitazionale (direzione, verso e intensità) che agisce sul razzo mostrato in figura in ciascuna delle quattro posizioni da esso successivamente raggiunte.



DA.6 Utilizzando i dati riportati nella tabella si costruisca il grafico di g in funzione della distanza dalla superficie terrestre.

Altitudine h (km)[a]	g (m/s^2)
1000	7,33
2000	5,68
3000	4,53
4000	3,70
5000	3,08
6000	2,60
7000	2,23
8000	1,93
9000	1,69
10000	1,49
50000	0,13

[a] Tutti i valori sono espressi come distanze riferite alla superficie terrestre.

APPENDICE B - Espressione generale della legge di Newton

In questo capitolo abbiamo studiato gli effetti prodotti da una forza costante applicata ad un oggetto *fermo* o *in moto nella direzione della forza stessa*. Cosa succede se la forza è applicata in una direzione diversa da quella in cui si sta muovendo l'oggetto?

Consideriamo ad esempio un'automobile giocattolo che si sta muovendo di moto rettilineo sulla superficie piana di un tavolo e proviamo a tirarla lateralmente mediante una fune (vedi fig. *B*.1).

L'effetto della forza applicata è quello di *modificare la direzione del moto.* Cioè la forza provoca una variazione della direzione della velocità e quindi, per quanto abbiamo visto nell'Appendice del cap.III, un'accelerazione.

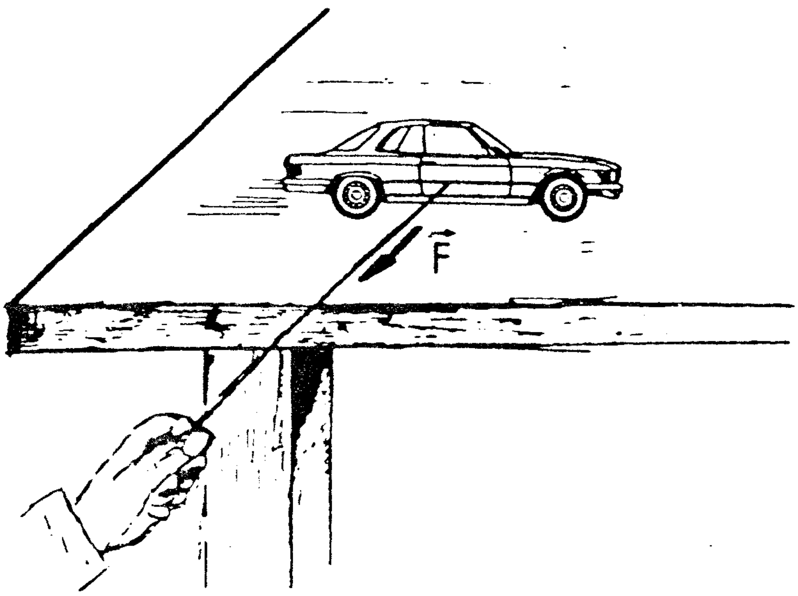


Figura *B*.1

L'esperienza mostra che anche in questo caso il vettore accelerazione prodotto è diretto come la forza applicata e il suo valore è direttamente proporzionale alla massa m dell'oggetto, cioè si ha ancora

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

La legge di Newton, nella sua forma vettoriale

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad B.1$$

ha quindi validità generale.

Lo studio dettagliato del moto di un oggetto sottoposto a forze che non sono dirette nella direzione del moto verrà affrontato nei prossimi corsi di Fisica. In questa Appendice ci limitiamo a considerare brevemente il caso del moto circolare uniforme.

Come abbiamo visto nell'Appendice del cap.III, in questo moto il vettore accelerazione è diretto perpendicolarmente al moto verso il centro della traiettoria e il suo modulo è dato da

$$a = \frac{v^2}{R}$$

Quindi dalla relazione $B.1$ risulta che per produrre un moto circolare uniforme è necessario applicare all'oggetto in moto una forza perpendicolare alla direzione del moto di intensità

$$F = ma = \frac{mv^2}{R} \qquad B.2$$

Consideriamo ad esempio il moto della Luna intorno alla Terra. Sappiamo che la Luna descrive intorno alla Terra un'orbita quasi circolare di raggio $R = 3,84 \cdot 10^5 km$ (vedi tabella $A.1$) con velocità

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi \cdot 3,84 \cdot 10^8 m}{2,36 \cdot 10^6 s} = 1,02 \cdot 10^3 m/s$$

a cui corrisponde quindi un'accelerazione normale al moto

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{1,04 \cdot 10^6 m^2/s^2}{3,84 \cdot 10^8 m} = 2,7 \cdot 10^{-3} m/s^2$$

Per produrre tale accelerazione la Luna deve essere soggetta ad una forza, perpendicolare al moto, di intensità

$$F = M_l a = 7,34 \cdot 10^{22} kg \ \times \ 2,7 \cdot 10^{-3} m/s^2 \simeq 20 \cdot 10^{19} N$$

Tale forza è quella dovuta alla attrazione gravitazionale esercitata sulla Luna dalla massa M_t della Terra; l'intensità di questa forza è infatti

$$F = G\frac{M_l M_t}{R^2} = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{s^2 kg} \cdot \frac{7,34 \cdot 10^{22} kg \ \times \ 6 \cdot 10^{24} kg}{(3,84 \cdot 10^8 m)^2} \simeq 20 \cdot 10^{19} N$$

CAPITOLO V

LAVORO ED ENERGIA

1. Lavoro di una forza costante

Comunemente la parola lavoro è usata con significati diversi: si parla di lavoro di uno studioso (vedi fig. 1.1a), di lavoro di un facchino (vedi fig. 1.1b), di lavoro di una macchina (vedi fig. 1.1c) e così via.

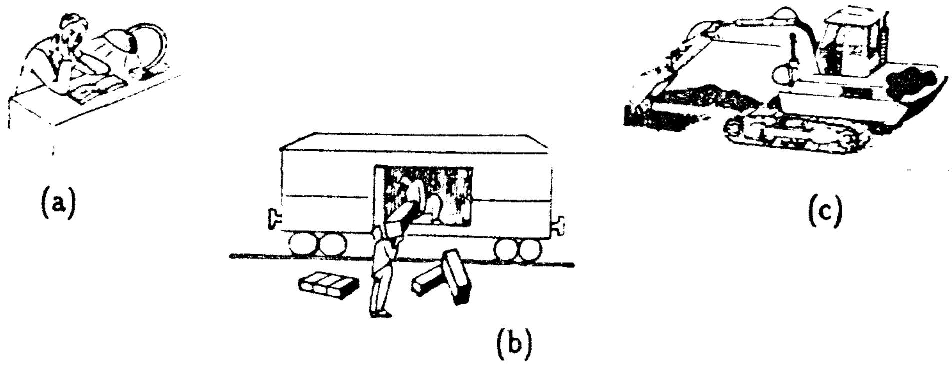


Figura 1.1

In Fisica, la parola *lavoro* viene usata invece solo per descrivere ciò che si compie quando una forza agisce su un corpo che si sposta.

Cerchiamo di vedere in che modo sia possibile misurare la quantità di lavoro compiuto da una forza.
Supponiamo di voler sollevare un mobile di $200kg$ per introdurlo in un appartamento attraverso un balcone che si trova a $5m$ di altezza. Ciò richiede del lavoro.
Supponiano poi che ciascuno di noi possa esercitare una forza di $490N$.
Evidentemente nessuno di noi potrà, da solo, sollevare il mobile (vedi

fig. 1.2a), essendo necessaria una forza almeno uguale al peso del mobile, cioè $P = mg = 200kg \times 9,80m/s^2 = 1960N$. Dovremo metterci in quattro: se ciascuno applica una forza di $490N$, tutti insieme applicheremo una forza di $1960N$ e quindi saremo in grado di sollevare il mobile (vedi fig. 1.2b).

Tuttavia, utilizzando qualche artificio, ciascuno di noi è in grado di sollevare il mobile. Supponiamo di prendere $200kg$ di mattoni e formare con questi 4 pile da $50kg$ l'una. Poiché per sollevare una pila di mattoni occorre una forza $F = 50kg \times 9,80m/s^2 = 490N$, ciascuno di noi può sollevare, una per volta, le quattro pile di mattoni fino al balcone, in modo da avere su di esso, alla fine, $200kg$ di mattoni. Potremmo poi sospendere i mattoni all'altra

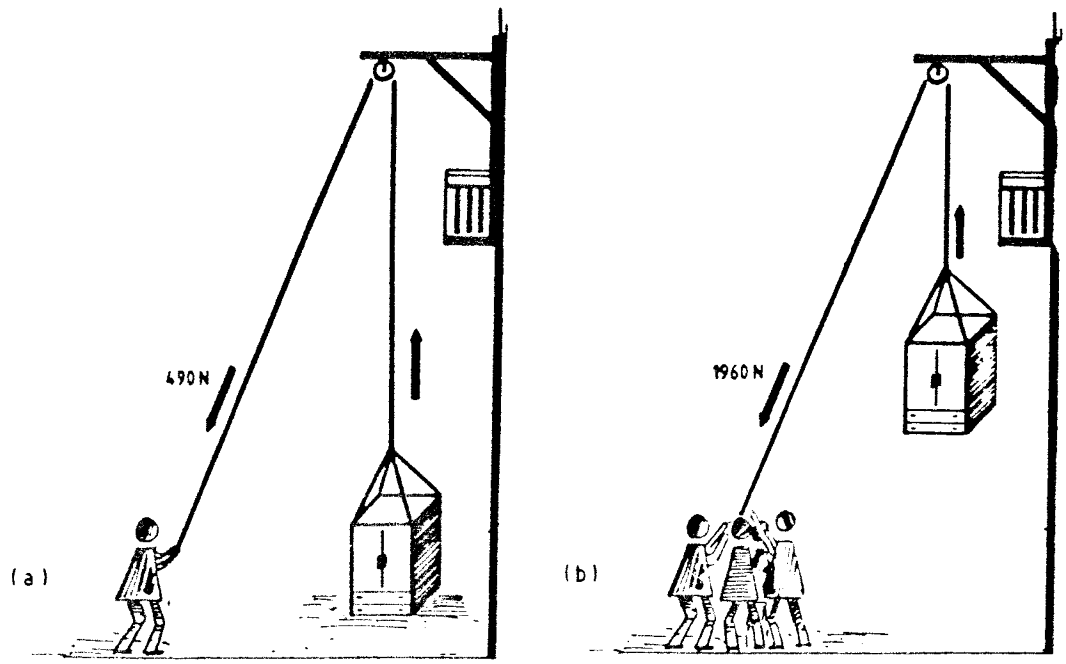


Figura 1.2

estremità della fune in modo da avere un contrappeso al mobile (vedi fig. 1.3). Basterebbe allora far scendere i mattoni per sollevare l'armadio fino al balcone.

Invece di alzare 4 volte $50kg$ si potrebbe, ovviamente, alzare 20 volte $10kg$ o anche 200 volte $1kg$. Una volta trasportati $200kg$ di mattoni sul balcone per fare da contrappeso, sollevare il mobile non richiede altro lavoro.

Il *lavoro totale compiuto sarebbe lo stesso*, indipedentemente dalle modalità di esecuzione.

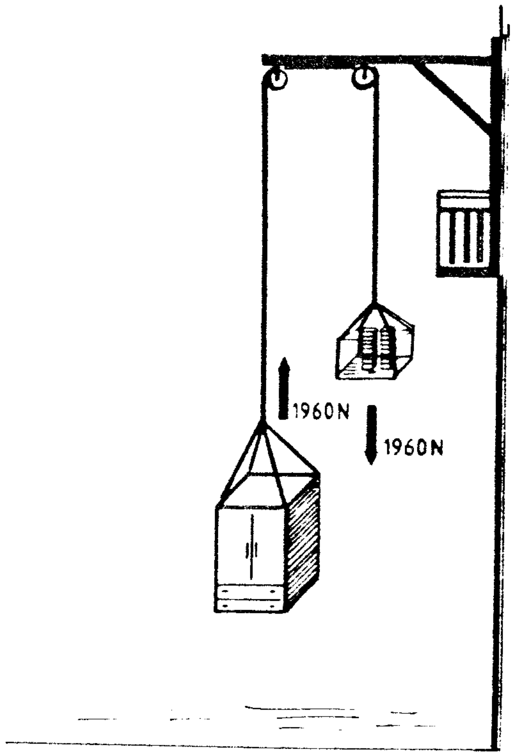


Figura 1.3

Con quattro persone che tirano, sul mobile viene esercitata, tramite la fune, una forza di $4 \cdot 490N$ che deve agire per $5m$. Ad ognuna delle quattro pile di mattoni si deve applicare una forza di $50 \cdot 9,80N$, ma la distanza percorsa per portare tutte e quattro le pile sul balcone è ora 4 volte maggiore, cioè $4 \times 5m = 20m$. Alle 20 pile da $10kg$ l'una si deve applicare una forza di $10 \cdot 9,80N$ per un tratto di $20 \times 5m = 100m$. In tutti i casi il prodotto della forza esercitata per la distanza percorsa è lo stesso:

$$4 \cdot 490\ N \times 5\ m = 9800\ N \times m$$

$$50 \cdot 9,80\ N \times 20\ m = 9800\ N \times m$$

$$10 \cdot 9,80\ N \times 100\ m = 9800\ N \times m$$

$$1 \cdot 9,80\ N \times 1000\ m = 9800\ N \times m$$

Chiameremo allora lavoro compiuto da una forza il prodotto della intensità della forza per lo spostamento effettuato. Se la forza è misurata in *newton*, il lavoro viene misurato in *newton* $\times$ *metro*.
Questa nuova unità è chiamata *joule* (J) in onore del fisico inglese J.P. Joule (1818-1889)

$$1\ joule\ = 1\ newton \times 1\ metro$$

e corrisponde al lavoro compiuto per sollevare di 1 *metro* un oggetto la cui forza-peso corrisponde ad 1 *newton*, cioè per sollevare di 1 *metro* un oggetto la cui massa è circa uguale a $0,1kg$.

D1.1 Un uomo solleva di *mezzo metro* una cassa di massa $m = 25kg$. Calcolare il lavoro compiuto in *joule*.

D1.2 Un uomo compie un lavoro di 8000 *joule* trascinando una cassa per $40m$. Quale forza ha esercitato?

In alcuni casi, la forza e lo spostamento dell'oggetto a cui è applicata la forza non hanno la stessa direzione. Per esempio, quando si trascina una cassa con una corda, la cassa si muove sul terreno, ma la corda è inclinata rispetto ad esso (vedi fig. 1.4).

In tal caso il lavoro non è dato semplicemente dal prodotto della forza F per lo spazio percorso Δx, ma si deve considerare la componente della forza $\vec{F}$ nella direzione del moto dell'oggetto.

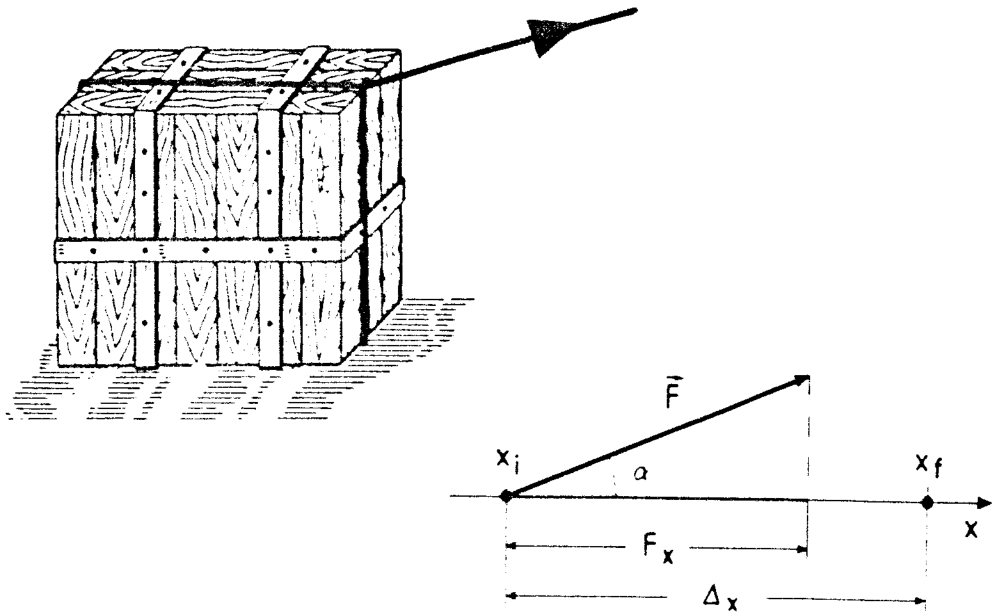


Figura 1.4

Possiamo dare allora la seguente definizione di lavoro

$$L = F_x \cdot \Delta x = F \cdot \Delta x \cdot \cos\alpha \qquad 1.1$$

cioè se una forza costante sposta il suo punto di applicazione di una quantità Δx, il *lavoro compiuto dalla forza è dato dal prodotto della componente della forza nella direzione dello spostamento per lo spostamento* Δx.

Una forza può agire su un oggetto e tuttavia non compiere lavoro. Se l'oggetto resta fermo, allora $\Delta x = 0$ e quindi $L = 0$. Questo è ciò che accade quando si spinge un'auto frenata e non si riesce a spostarla.

Una forza può anche agire su un oggetto in moto e tuttavia compiere lavoro nullo: ciò accade quando la forza ha direzione perpendicolare allo spostamento Δx. In questo caso la componente della forza nella direzione del moto è nulla, cioè $F_x = 0$, quindi $L = 0$.
Ad esempio, il *lavoro* compiuto, dal punto di vista fisico, per portare una pesante valigia camminando su una strada orizzontale è uguale a zero!

Il lavoro compiuto da una forza può inoltre essere positivo o negativo a seconda che l'angolo α tra la direzione della forza e quello dello spostamento sia maggiore o minore di 90°.
Ad esempio, nel caso illustrato in fig. 1.5 il ragazzo che spinge il mobile compie un lavoro positivo, in quanto lo spostamento del mobile avviene nella direzione della forza che il ragazzo applica al mobile. La forza di attrito $\vec{A}$ compie invece un lavoro negativo, in quanto si oppone al moto. La forza-peso $\vec{P}$ infine non compie alcun lavoro in quanto essa è diretta perpendicolarmente allo spostamento.

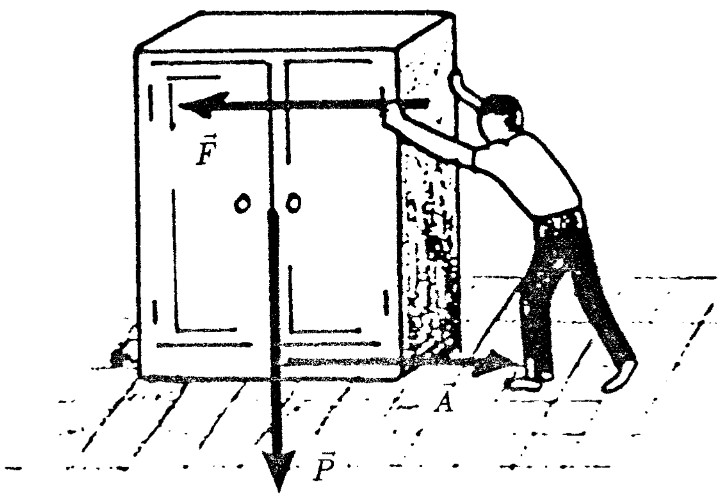


Figura 1.5

D1.3 Determinare il lavoro che si compie per spingere un oggetto di $6kg$ lungo un piano inclinato alto $2,5m$ e lungo $7m$ fino alla sommità.
Che lavoro si compie se si alza invece verticalmente lo stesso oggetto di $2,5m$?

D1.4 Un uomo di massa $M = 80kg$ con una valigia di massa $m = 10kg$ è salito per due rampe di scale fino ad un'altezza di $10m$ dal livello di partenza.
a. Quanto lavoro è stato compiuto sulla valigia?
b. Quanto lavoro ha compiuto complessivamente l'uomo?

2. Potenza

Per compiere un lavoro si impiega sempre un certo intervallo di tempo. Spesso ci interessa conoscere non solo *quanto* lavoro è stato fatto, ma anche in *quanto tempo* è stato fatto. Siamo cioè interessati alla quantità di lavoro compiuto nell'unità di tempo.

Un grosso motore è più potente di uno piccolo in quanto esso può compiere la stessa quantità di lavoro in un tempo più breve, o compiere più lavoro nello stesso intervallo di tempo (rispetto al motore piccolo). Poichè per sollevare un oggetto pesante occorre una forza maggiore che per uno leggero, per far salire su una collina un camion occorre un motore più potente che per una automobile, se si vuole che la salita sia compiuta nello stesso tempo.

Si definisce *potenza* di una macchina il *rapporto fra il lavoro compiuto e il tempo impiegato a compierlo.* La potenza si esprime, dunque, in unità di lavoro diviso unità di tempo: essa si misura comunemente in *joule al secondo.* Quest'ultima unità prende il nome di *watt* (W).

$$1 watt = \frac{1\ joule}{1\ secondo} \qquad 2.1$$

D2.1 Calcolare il lavoro compiuto in 1 *ora* da un motore la cui potenza è 2 kW.

D2.2 Determinare la potenza necessaria per sollevare 600 *litri* di acqua al *minuto* ad una altezza di $15m$.

Nella pratica si usa come unità di misura anche il *cavallo-vapore* (CV o HP), che equivale a circa 735 W. Questa era l'unità introdotta dallo scozzese J. Watt (1736-1819) che per primo, più di 200 *anni* fa, definì la potenza di un motore. Nome e valore derivano dal fatto che un robusto cavallo da tiro riesce all'incirca in 1 *secondo* a sollevare $75kg$ all'altezza di 1 *metro* (vedi fig. 2.1).

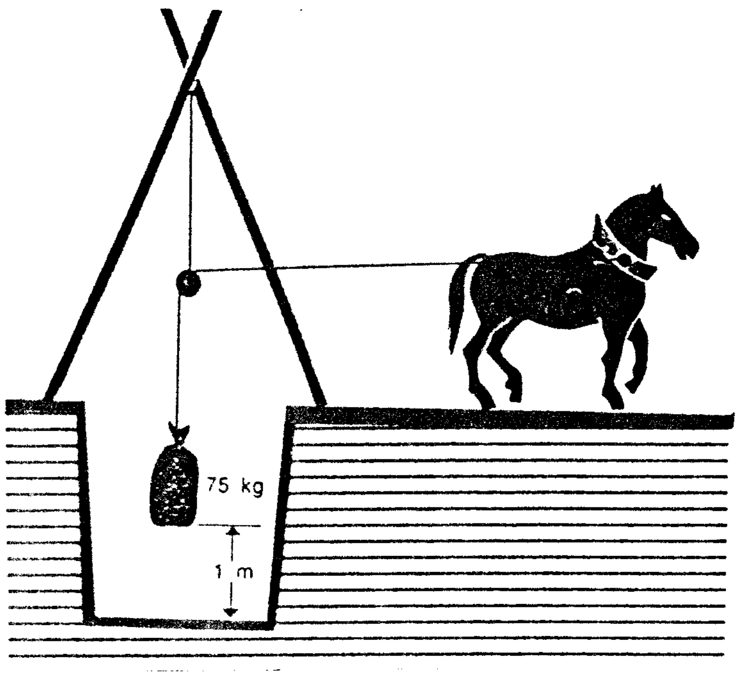


Figura 2.1

D2.3 Quanto tempo impiegherà un motore la cui potenza è pari a 4 CV per sollevare un'automobile di $10^3 kg$ ad un'altezza di $10m$?

3. Energia cinetica e potenziale

Riconsideriamo il problema analizzato all'inizio del capitolo.
Mediante una certa quantità di lavoro abbiamo portato un mobile ad una certa altezza rispetto al suolo. Ora, senza compiere nessun altro lavoro, siamo in grado di fare molte cose. Possiamo ad esempio utilizzare il mobile come contrappeso per sollevare altri oggetti dello stesso peso (vedi fig. 3.1a), oppure possiamo fare a pezzi il mobile lasciandolo cadere per terra (vedi fig. 3.1b). In entrambi i casi il mobile è in grado di compiere del lavoro.

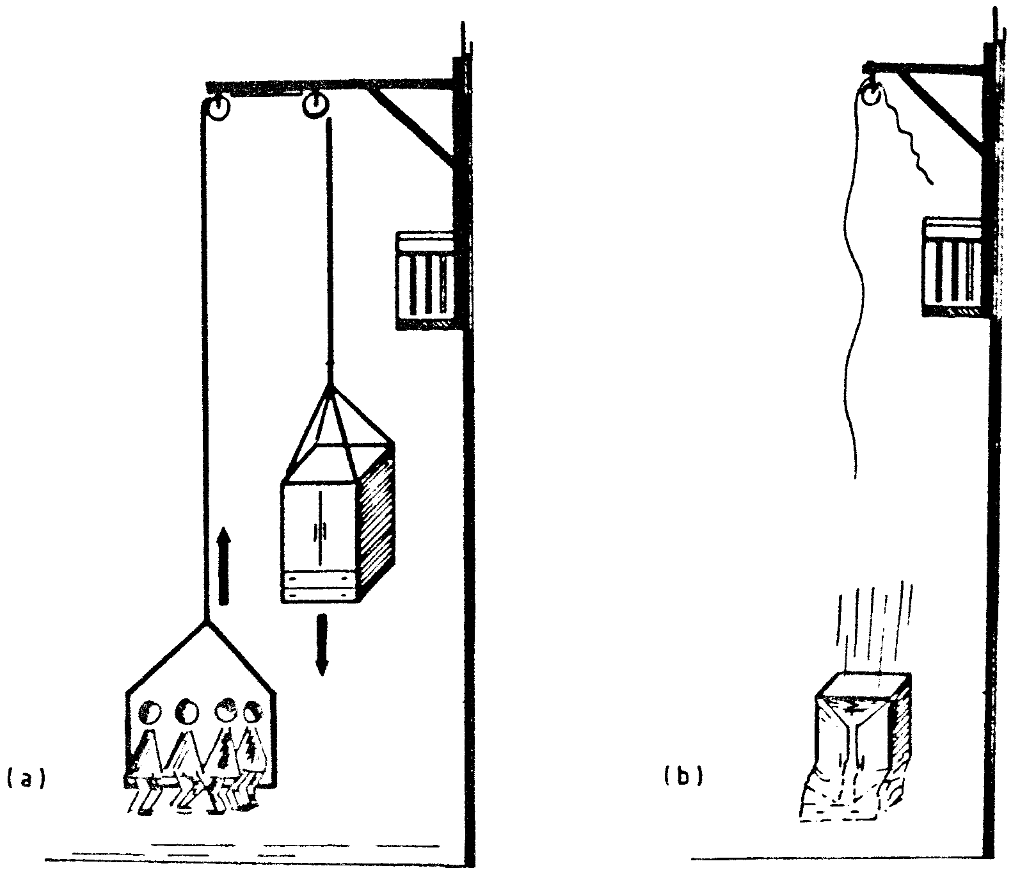


Figura 3.1

Chiameremo in generale *energia* la capacità di un oggetto di compiere lavoro. Anche se questa affermazione non costituisce una corretta definizione di energia, può essere utilizzata nel seguito.

Assumeremo inoltre che quando si compie del lavoro su di un oggetto, se non ci sono attriti, la sua energia aumenta di una quantità pari al lavoro compiuto, mentre quando un oggetto compie del lavoro la sua energia diminuisce di una quantità pari al lavoro eseguito.
Quindi possiamo scrivere

$$\Delta E = E_f - E_i = L$$

dove E_i è l'energia iniziale e E_f è l'energia finale.
Pertanto se il lavoro è compiuto *sull'oggetto* esso risulta *positivo*; se il lavoro è compiuto *dall'oggetto* esso risulta *negativo*.

Per sollevare un oggetto di massa m ad una altezza h dobbiamo applicare all'oggetto una forza $\vec{F}$ uguale e contraria al suo peso e compiere quindi un lavoro $L = mgh$. Tale lavoro, come abbiamo visto, è lo stesso se si solleva l'oggetto verticalmente o se lo si fa scorrere lungo un piano inclinato (vedi D1.3).

Un oggetto pesante che si trova ad una certa altezza h dal suolo possiede quindi in virtù del suo peso un'energia

$$E_p = mgh \qquad 3.1$$

Tale energia, che dipende solo dalla posizione dell'oggetto rispetto alla Terra, è chiamata *energia potenziale (gravitazionale)*.

Nel cap. II, § 6, abbiamo visto che se un oggetto possiede una velocità v diretta verso l'alto esso è in grado di salire fino ad una altezza h data da (vedi relazione 6.6 del cap. II)

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

Pertanto esso è in grado di compiere un lavoro

$$L = mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

Viceversa se noi applichiamo ad un oggetto fermo una forza costante F esso si muove di moto uniformemente accelerato e dopo aver percorso uno spazio Δx acquista una velocità (vedi relazione 5.4 del cap.II)

$$v^2 = 2a_x\Delta x = 2\frac{F_x}{m}\Delta x$$

Moltiplicando entrambi i membri per la quantità $\frac{1}{2}$ m otteniamo

$$\frac{1}{2}mv^2 = F_x \cdot \Delta x$$

essendo $F_x \cdot \Delta x$ il lavoro compiuto dalla forza applicata.

Pertanto un corpo che si muove con velocità v possiede un'energia

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \qquad 3.3$$

Tale energia è chiamata *energia cinetica.*

L'energia, essendo uguale ad un lavoro, si misura anch'essa in *joule*.

D3.1 Calcolare l'energia cinetica posseduta da un'automobile di $1500kg$ che si sta muovendo con velocità $v = 100\ km/h$.

D3.2 Quanto lavoro compiono le tue gambe quando sali quattro rampe di scale alte ciascuna $4m$?

Consideriamo ora il seguente problema.

Un automobilista, mentre sta viaggiando ad una velocità $v_0 = 72\ km/h$, frena la macchina. Se la forza frenante nella direzione del moto è $F = 5 \cdot 10^3 N$ e la massa dell'automobile è $m = 10^3 kg$, calcolare in quanti *metri* la macchina si ferma.

Abbiamo già risolto un problema analogo nel cap. IV utilizzando i concetti di forza e accelerazione. Vediamo ora come esso possa venire risolto utilizzando i nuovi concetti di energia e lavoro.

L'automobile, in quanto si muove con una velocità v_0, possiede un'energia cinetica

$$E_c = \frac{1}{2} m v_0^2$$

ed è quindi in grado di compiere un lavoro pari al valore di tale energia. D'altronde, per poter continuare a muoversi per uno spazio Δx contro la forza frenante F, l'automobile deve compiere un lavoro $L = F_x \cdot \Delta x$. Pertanto essa percorrerà uno spazio Δx tale che $E_c = L$, cioè

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = F_x \cdot \Delta x$$

da cui

$$\Delta x = \frac{m v_0^2}{2 F_x} = 40\ m$$

D3.3 Supponiamo che un'automobile di massa $1,5 \cdot 10^3\ kg$ raggiunga, nel tratto di strada compreso tra due 'stop', una velocità di $20\ m/s$.

a. Qual è l'energia cinetica massima posseduta dall'auto?

b. Che cosa accade di questa energia, quando la macchina si ferma al secondo 'stop'?

c. Quanta energia verrebbe risparmiata se la macchina raggiungesse solo una velocità di $10\ m/s$ fra i due segnali?

4. Il principio di conservazione dell'energia

Un oggetto, per effetto della sua posizione rispetto al suolo e della sua velocità, può possedere sia energia potenziale che cinetica.

Chiameremo *energia meccanica totale* E la somma di queste due energie

$$E = E_p + E_c \qquad 4.1$$

Consideriamo un oggetto che si trovi, fermo, ad un'altezza h_0 dal suolo. Esso possiede un'energia potenziale

$$E_p = mgh_0$$

ed, essendo fermo, un'energia cinetica nulla. La sua energia totale è allora

$$E = mgh_0$$

Se l'oggetto è libero, cade verso il suolo (vedi fig. 4.1); la sua energia potenziale diminuisce mentre l'energia cinetica aumenta.

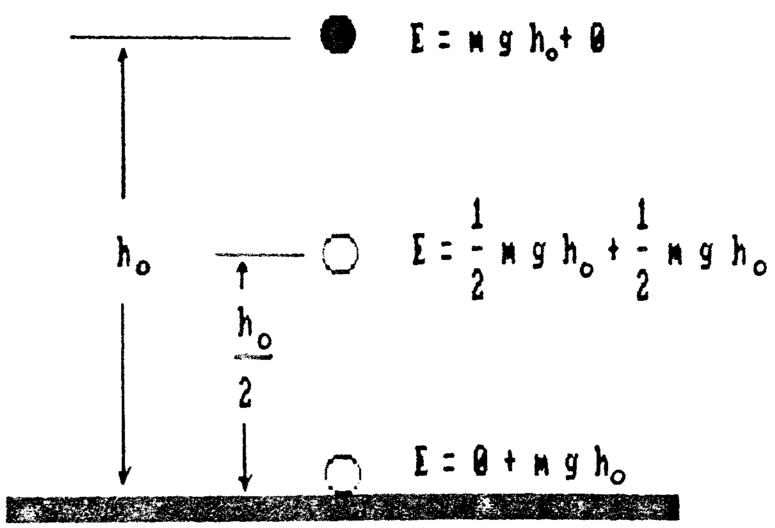


Figura 4.1

In particolare quando l'oggetto si trova ad un'altezza $h = h_0/2$ la sua energia potenziale è

$$E_p = mg\frac{h_0}{2}$$

mentre l'energia cinetica (vedi relazione 6.4 del cap. II) è

$$E_c = \frac{1}{2}m(\sqrt{2g\frac{h_0}{2}})^2 = \frac{1}{2}mgh_0$$

L'energia totale risulta allora

$$E = \frac{1}{2}mgh_0 + \frac{1}{2}mgh_0 = mgh_0$$

Quando l'oggetto raggiunge il suolo la sua energia potenziale è nulla, mentre l'energia cinetica è

$$E_c = \frac{1}{2}m(\sqrt{2gh_0})^2 = mgh_0$$

L'energia totale risulta ancora

$$E = mgh_0$$

Durante il moto di caduta l'energia potenziale si trasforma in energia cinetica, mentre l'energia totale rimane costante.

D4.1 Verificare che se si lancia un sasso verso l'alto, durante il moto di salita l'energia cinetica iniziale del sasso si trasforma in energia potenziale mentre l'energia totale rimane costante.

Forze del tipo della forza-peso sono dette *forze conservative*. Per tali forze vale il seguente teorema, detto *teorema di conservazione dell'energia meccanica*.

Se un oggetto è sottoposto solo a forze di tipo conservativo, l'energia meccanica totale si conserva, cioè durante il moto del corpo la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale rimane sempre costante.

Indicate con E_{ci}, E_{pi} e E_{cf}, E_{pf} l'energia cinetica e l'energia potenziale rispettivamente nello stato iniziale e nello stato finale possiamo allora scrivere

$$E_{ci} + E_{pi} = E_{cf} + E_{pf} \qquad 4.2$$

D4.2 Si ricavino le relazioni 6.4 e 6.6 del cap. II utilizzando la relazione 4.2 di questo capitolo.

L'energia totale può però variare se sull'oggetto agiscono anche forze non conservative. Un esempio tipico di forze che fanno variare l'energia totale è dato dalle forze di attrito. Siccome queste forze sono sempre dirette in verso contrario al moto, esse compiono sempre un lavoro negativo e quindi producono sempre una diminuzione dell'energia totale. Per questo motivo tali forze sono dette anche *forze dissipative.*

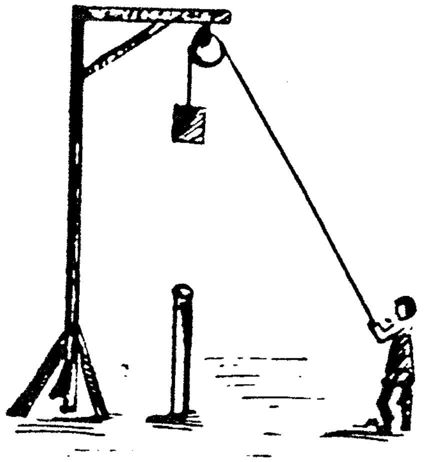
E4.1 Due palline di egual massa vengono lanciate dalla stessa altezza con la stessa velocità. La pallina A viene lanciata verso l'alto mentre la pallina B viene lanciata verso il basso.

a. Quale delle due palline ha energia cinetica maggiore nel momento del lancio?
b. Quale delle due palline ha maggiore energia potenziale nel momento del lancio?
c. Trascurando la resistenza dell'aria, quale delle due palline arriva al suolo con maggiore velocità?
d. Se vengono lanciate palline di massa diversa, dalla stessa quota, con la stessa velocità e nella stessa direzione come sono le velocità con cui toccano il suolo?

E4.2 Un operaio deve conficcare nel terreno un palo di legno lungo $4m$; la forza necessaria è $5 \cdot 10^4 N$.

a. Calcolare il lavoro necessario per conficcare completamente il palo.

b. L'operaio si ricorda che è possibile piantare un chiodo nel legno con un martello, pur non essendo sufficiente il peso del martello a piantare il chiodo. (Se fosse un Fisico saprebbe che quando si pianta un chiodo si usa l'energia cinetica del martello per compiere lavoro sul chiodo). Perciò egli alza un maglio di $50kg$ fino a $5m$ sopra il palo e lo lascia cadere sulla testa del palo. Calcolare quanto penetra il palo nel terreno per ogni colpo del maglio.



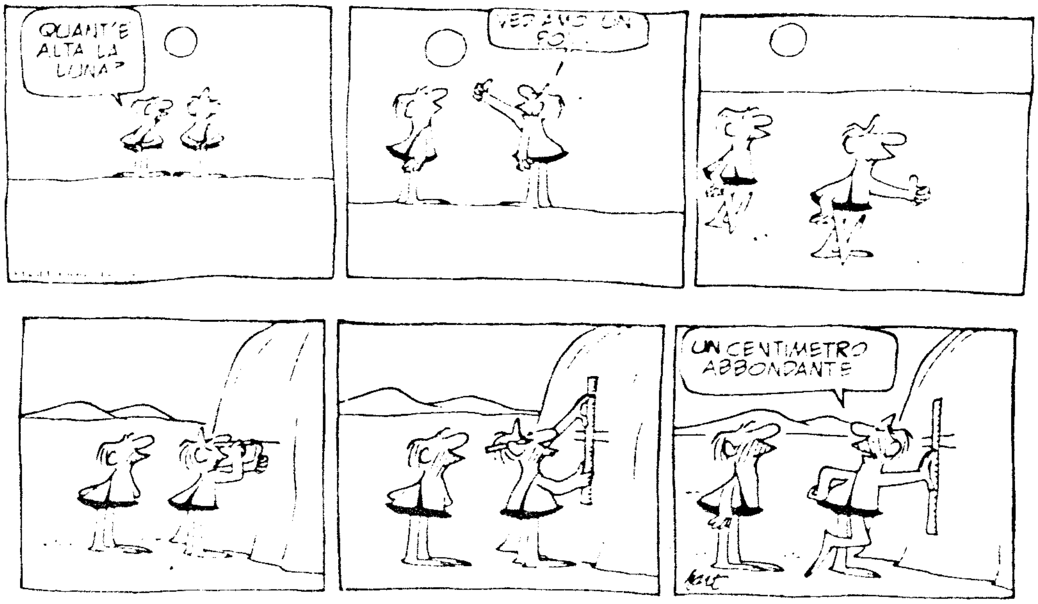
E4.3 Si lascia cadere una palla sul pavimento da un'altezza di $75cm$. Nel rimbalzo essa perde un terzo della sua energia, a causa degli attriti.

a. Qual è l'altezza raggiunta dopo il primo rimbalzo?

b. Qual è l'altezza raggiunta dopo il secondo?

P A R T E   B

LA MISURA



CAPITOLO I

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DELLA MISURA

1. Grandezze fisiche e loro misura

Quando si deve descrivere un oggetto (un sasso, una pianta, un animale) o un fenomeno (un viaggio, un tramonto, un temporale, ecc.) bisogna dare dell'oggetto o del fenomeno un certo numero di *caratteristiche* in modo che chiunque possa capire *come è fatto* l'oggetto o *che cosa è successo* durante il fenomeno.

Ma come è possibile individuare quali sono le caratteristiche che si devono dare e in che maniera bisogna precisarle?

Nel caso ad esempio di un viaggio, le prime informazioni che bisogna dare sono la *lunghezza* del percorso e *l'intervallo di tempo* impiegato a percorrerlo. Precisarle vuol dire indicare la loro misura, ad esempio in *kilometri* e in *ore* rispettivamente.

Lunghezza e intervallo di tempo sono caratteristiche molto familiari; le usiamo continuamente ogni giorno. Ma per descrivere oggetti e fenomeni possiamo utilizzare molte altre caratteristiche quali il peso, il colore, il profumo, la durezza, il sapore, la bellezza, l'utilità, ecc..

Non tutte queste caratteristiche però sono *oggettive*, non tutte cioè servono per fornire informazioni valide per tutti (basta pensare alla bellezza).

Vengono chiamate *grandezze fisiche tutte le caratteristiche misurabili*, cioè tutte le caratteristiche per le quali è possibile fornire un *valore numerico*. Se consideriamo una riga da disegno, la lunghezza è una caratteristica fisica, perchè è misurabile (ad esempio la riga è lunga $50cm$); il peso è un'altra caratteristica fisica, perché è misurabile (ad esempio la riga pesa $100g$). Non è invece una caratteristica fisica della riga la sua utilità per il disegno; tale utilità infatti non può essere misurata.

Ma cosa vuol dire esattamente misurare?

Misurare vuol dire:

a. essere capaci di confrontare tra loro due grandezze dello stesso tipo (omogenee) in modo da poter dire se sono *uguali* o *diverse*;

b. essere capaci di sommare tra loro due o più grandezze omogenee, in modo da poter dire se una grandezza è il doppio, il triplo o un *multiplo* qualsiasi di un'altra;

c. essere in grado di individuare un campione unitario *(unità di misura)* e costruirne delle copie.

Sono proprio le grandezze fisiche le caratteristiche oggettive che descrivono oggetti e fenomeni nel modo più generale e comprensibile.

Le grandezze fisiche che verranno utilizzate in seguito sono molte (lunghezza, tempo, velocità, volume, massa, forza, ecc.). Vedremo però che esse sono legate fra loro da relazioni matematiche più o meno complesse.

Ad esempio:

il valore dell'area A di un quadrato è legato al valore della lunghezza l del suo lato dalla relazione

$$A = l^2$$

Il volume V di un cubo di lato l è dato dalla relazione

$$V = l^3$$

Lo spazio Δs percorso da un oggetto in movimento è legato alla velocità v dell'oggetto e all'intervallo di tempo Δt impiegato a percorrerlo dalla relazione

$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

come è mostrato nella parte A, cap.I.

Non è possibile costruire un quadrato di lato $10cm$ che abbia una superficie di $1m^2$; un cubo di lato $10cm$ ha sempre un volume di $1000cm^3$; un oggetto che si muove a 40 km/h non può percorrere in 2 *ore* uno spazio di 100 km.

Queste relazioni non sono semplicemente *qualitative* ("un sasso è tanto più pesante quanto più è grande"), ma *quantitative* ("il peso dell'acqua contenuta in un recipiente cubico diventa 8 volte più grande se il lato del cubo raddoppia"). Per arrivare ad esse occorre essere capaci di determinare i valori numerici delle grandezze che caratterizzano gli oggetti e i fenomeni, cioè misurare, ad esempio, la lunghezza di un segmento, l'area di una superficie, il volume di un corpo, un intervallo di tempo o la velocità di un corpo.

Dalle relazioni sopra riportate è anche facile dedurre che non è necessario definire per ogni grandezza un'unità di misura (campione) indipendente. Nel caso della superficie è sufficiente scegliere l'unità di misura delle lunghezze e derivare da questa l'unità di misura dell'area, come mostrato in fig. 1.1.

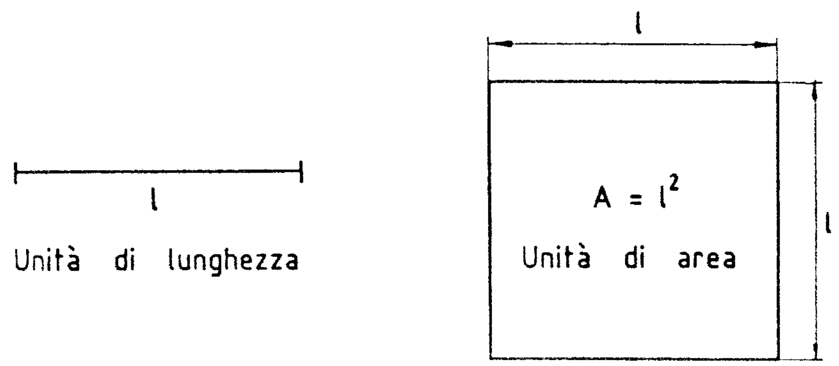


Figura 1.1

Allo stesso modo si opera per il volume (vedi fig. 1.2).

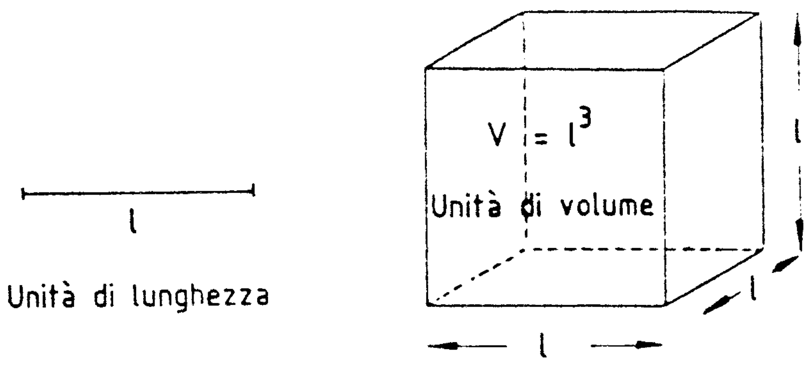


Figura 1.2

Si capisce allora che è sufficiente scegliere le unità di misura di alcune grandezze fisiche (dette *fondamentali*) e ricavare da queste tutte le rimanenti.

2. Unità di misura

In passato la scelta di alcune grandezze fisiche come fondamentali e di certe unità come campioni di misura è stata suggerita per lo più da motivi di carattere pratico (ad es. la necessità di costruire campioni di misura facilmente riproducibili e inalterabili nel tempo), ma qualche volta anche culturale, economico o politico (ad es. lo scegliere come unità di misura delle lunghezze la lunghezza del braccio del re o ancora, agli inizi del XIX secolo, il rifiuto degli inglesi ad accettare come unità di misura di lunghezza il metro perchè proposto dai rivoluzionari francesi).

La necessità di avere grandezze fondamentali e campioni *uguali per tutti* portò alla decisione, nel 1960, di scegliere come grandezze fondamentali della Meccanica la *lunghezza*, il *tempo* e la *massa* e come unità di misura rispettivamente il *metro*, il *secondo* ed il *kilogrammo.*

Il *metro* (simbolo m) era stato definito come *la distanza tra due sottilissimi tratti incisi su una sbarra di platino-iridio* di forma opportuna (vedi fig. 2.1) conservata presso l'Ufficio Internazionale di Pesi e Misure con sede a Sèvres vicino a Parigi.

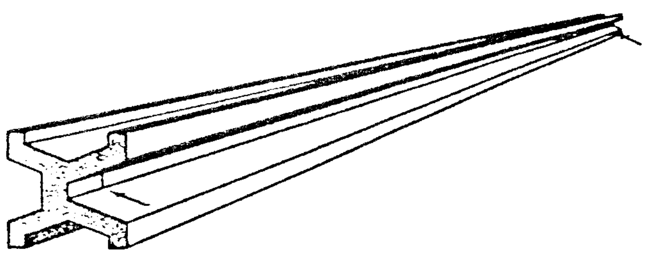


Figura 2.1

Il *minuto secondo* o, più brevemente, il *secondo* (simbolo *s*) era stato definito come la 86400-*esima (ottantaseimilaquattrocentesima) parte del giorno solare medio*; l'intervallo di tempo medio che intercorre fra un *mezzogiorno* e il *mezzogiorno* successivo ha, cioè, una durata uguale a 86400 *secondi*. Il *mezzogiorno* è l'istante nel quale il Sole raggiunge il punto più alto nel cielo.

Il *kilogrammo* (simbolo *kg*) era stato definito come *la massa del cilindro di platino-iridio* conservato anch'esso a Sèvres (vedi fig. 2.2).

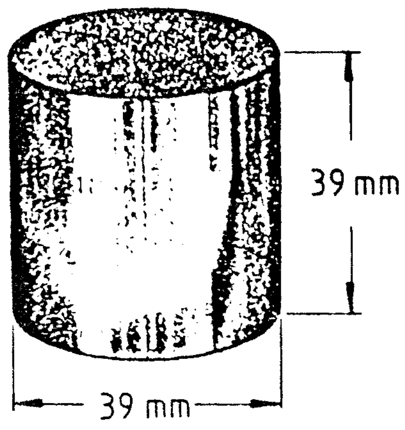


Figura 2.2

Più recentemente sono stati scelti dei campioni più precisi e riproducibili. Di questi campioni come delle altre unità fondamentali si parlerà nei corsi di Fisica dei prossimi anni.

È comunque evidente che la scelta di queste unità è stata suggerita dalle stesse caratteristiche dell'uomo: il *metro* è legato alle sue dimensioni, il *secondo* all'intervallo di tempo tra due battiti successivi del suo cuore, il *kilogrammo* alla massa degli oggetti che egli facilmente muove.

Se si lavora con dimensioni diverse da quelle umane, bisogna usare multipli o sottomultipli delle unità scelte. Per gli astronomi il *metro* è una unità 'scomoda' perchè troppo 'piccola'. Espresse in *metri* le distanze astronomiche richiedono numeri enormi! La distanza media tra la Terra e il Sole è pari a circa $150000000000m$. Per i naviganti il *miglio geografico*, pari a $1853,2\ m$, (da non confondere con il *miglio marino* pari a $1852\ m$) è un'unità più 'comoda', perchè è la lunghezza di un arco di circonferenza massima terrestre corrispondente a un angolo al centro di 1 *primo*.

Prima di concludere è bene sottolineare che il valore numerico di una grandezza dipende dal campione scelto: l'altezza di un uomo espressa in *centimetri* è indicata da un numero *cento* volte più grande di quello che la esprime in *metri*. Per dare il valore numerico di una grandezza *bisogna sempre*, accanto al numero, *indicare l'unità di misura*.

E2.1 Calcolare l'area di un triangolo equilatero di lato $l = 10cm$.

E2.2 Calcolare l'area di un trapezio di altezza $h = 5m$ e le cui basi misurano rispettivamente $b_1 = 1m$ e $b_2 = 0,3m$.

E2.3 Calcolare l'area della superficie laterale e il volume di una sfera di raggio $r = 50mm$.

E2.4 A quanti m^2 corrisponde un km^2?
A quanti m^2 corrisponde un cm^2?
A quanti m^3 corrisponde un cm^3?

E2.5 Una nave ha percorso 220 *miglia marine*. Quanti *kilometri* ha percorso?

E2.6 Si verifichi la definizione di *miglio marino*, ricordando che il raggio della Terra, supposta sferica, è $R \simeq 6370\ km$.

3. Misura diretta di una grandezza

Misurare direttamente una grandezza fisica significa determinare quante volte la grandezza omogenea scelta come unità di misura è contenuta nella grandezza che si vuole misurare. Ad esempio, quando noi diciamo che un'automobile è "lunga 4 *metri*" vogliamo dire che l'unità di misura, cioè il *metro*, è contenuta 4 volte nella lunghezza dell'automobile.

In realtà le cose non sono così semplici: quando facciamo delle misure, usando gli opportuni strumenti dai più semplici ai più complicati, dobbiamo sempre affrontare e risolvere diversi problemi, se vogliamo che la misura sia ragionevolmente 'precisa'.

Proviamo a misurare la lunghezza di un'automobile.

Prima di tutto dobbiamo definire cosa intendiamo per lunghezza dell'automobile. Definiamo, ad esempio, lunghezza di un'automobile la distanza tra il paraurti anteriore e quello posteriore.

Possiamo allora prendere un bastone, tagliarlo in modo che la sua lunghezza sia uguale ad 1 *metro* e riportarlo *consecutivamente* e *parallelamente* all'automobile, partendo dal punto più sporgente del paraurti posteriore (come si vede in fig. 3.1).

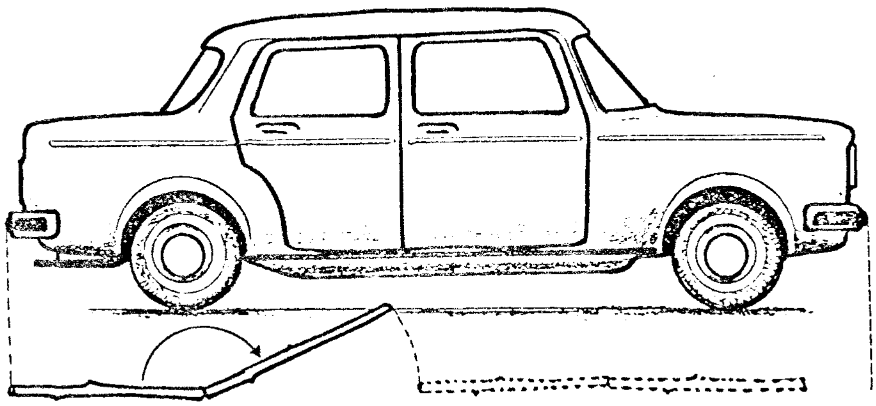


Figura 3.1

Se, come succede in generale, il nostro campione non è contenuto un numero esatto di volte tra i due paraurti (vedi ancora fig. 3.1), possiamo solamente dire che l'automobile è più lunga di 4 *metri* e meno di 5 *metri*. Se abbiamo misurato l'automobile per vedere se entra in un box lungo 4 *metri* e *mezzo*, non possiamo certo dirci soddisfatti; la misura non è abbastanza precisa. Possiamo allora ***dividere il bastone in*** **10** ***parti*** e ripetere la misura, come mostrato in fig. 3.2. Non è necessario rompere il bastone; è sufficiente fare su di esso 9 incisioni sottili equidistanti; in questo modo la distanza tra 2 incisioni è la *decima* parte del *metro*, cioè un *decimetro*.

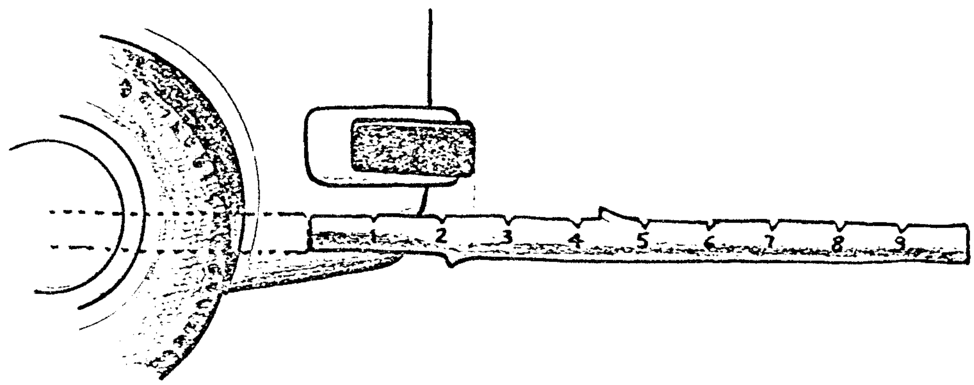


Figura 3.2

L'automobile risulta più lunga di 4 *metri* e 2 *decimetri* e meno di 4 *metri* e 3 *decimetri*. Per dire che l'automobile entra nel box di cui abbiamo parlato prima, la precisione della misura è sufficiente. Però se vogliamo stabilire se questa automobile è più lunga o più corta di un'altra misurata a Chisimaio da un amico, questa misura può ancora non essere sufficientemente precisa. Ad esempio può risultare che tutte e due le automobili sono lunghe più di 4 *metri* e 2 *decimetri* e meno di 4 *metri* e 3 *decimetri*.

Possiamo allora procedere ancora suddividendo ogni *decimetro* in 10 parti, in modo che ognuna di queste nuove parti sia lunga 1 *centesimo* di *metro* (*centimetro*), e rifare la misura.

È probabile però che l'estremo del paraurti dell'automobile si trovi ancora tra due incisioni successive.

È evidente che non è possibile procedere all'infinito nell'operazione di suddividere la nostra unità di misura in parti sempre più piccole.

Per quanto sottili, le incisioni hanno un certo spessore e, affinchè la lettura sia possibile, tra le incisioni deve restare dello spazio.

Risulta quindi che non si può esprimere la misura della lunghezza di un oggetto (ma vedremo che questo è vero per la misura di una qualsiasi grandezza) con un numero che corrisponde ad una precisa incisione sullo strumento, ma solo mediante un intervallo compreso tra due numeri. Nel caso della misura precedente, per esempio, indicata con l la lunghezza dell'automobile, possiamo scrivere

$$4\,m + 2\,dm < \ l \ < 4\,m + 3\,dm$$

o più semplicemente

$$4{,}2\,m < \ l \ < 4{,}3\,m$$

Il risultato della misura di lunghezza e, più in generale, il risultato della misura di una qualsiasi grandezza fisica, è dunque esprimibile mediante una disuguaglianza che indica il valore superiore e il valore inferiore che può avere la grandezza che si misura.

D3.1 Si ripeta in classe la procedura seguita nel caso dell'automobile per misurare l'altezza di un vostro compagno o la larghezza della lavagna.

Anzichè esprimere il risultato di una misura con una disuguaglianza, si preferisce una scrittura sostanzialmente equivalente che consiste nell'indicare:

a. il valore intermedio l_{int} tra il valore superiore l_s e il valore inferiore l_i ottenuti

$$l_{int} = \frac{l_s + l_i}{2} \qquad 3.1$$

b. la semilarghezza d dell'intervallo

$$d = \frac{l_s - l_i}{2} \qquad 3.2$$

In questo modo il risultato può essere scritto:

$$l = l_{int} \pm d$$

Nel caso della misura precedente si ha

$$l = (4,25 \pm 0,05)\ m \qquad 3.3$$

intendendo ovviamente con questa scrittura che la lunghezza l è compresa tra $(4,25 - 0,05)m = 4,2m$ e $(4,25 + 0,05)m = 4,3m$.

Se per misurare la lunghezza dell'automobile avessimo usato un bastone campione lungo 1 *metro* e diviso in 100 parti uguali avremmo potuto ottenere un risultato più preciso. Avremmo trovato, ad esempio,

$$4\ m + 2\ dm + 4\ cm < l < 4\ m + 2\ dm + 5\ cm$$

cioè

$$l = (4,245 \pm 0,005)\ m$$

L'intervallo $l_s - l_i = 2d$ dà una indicazione dell'imprecisione della misura. Chiameremo *intervallo di incertezza* di una singola misura

la quantità $2d$

Possiamo anche dire che la misura ha una incertezza $\pm d$.

E3.1 Determinare le dimensioni (lunghezza e larghezza) di una pagina del libro usando come unità di misura la larghezza di un dito e confrontare i risultati con quelli ottenuti dai vostri compagni.

E3.2 Determinare le dimensioni di un tavolo usando come unità di misura la larghezza della vostra mano.

E3.3 Scrivere in modo sintetico i seguenti risultati
$2\ m + 3\ dm + 7\ cm + 8\ mm < l < 2\ m + 3\ dm + 7\ cm + 9\ mm$
$5\ kg + 7\ hg + 9\ dag + 5\ g < m < 5\ kg + 7\ hg + 9\ dag + 6\ g$
$12\ h + 26' + 16'' < t < 12\ h + 26' + 17''$

4. Sensibilità di uno strumento di misura

Quando vogliamo eseguire una misura dobbiamo sempre utilizzare uno strumento. Uno *strumento di misura* può essere estremamente semplice, come il bastone lungo un metro, o molto complesso, come ad esempio un orologio. Esso può fornirci una misura più o meno precisa, ma *non può mai fornirci il valore esatto della grandezza che stiamo misurando.*

Definiamo allora *intervallo di incertezza* S dovuto alla sensibilità dello strumento, o più semplicemente *sensibilità* di uno strumento, la più piccola differenza tra due valori della grandezza che esso è in grado di apprezzare (spesso la distanza tra due incisioni successive). Alternativamente possiamo dire che uno strumento *non è in grado di distinguere* tra loro due grandezze se esse differiscono di una *quantità inferiore* al valore della sensibilità S dello strumento.

Per misurare le lunghezze si usa spesso uno strumento che viene chiamato 'metro' come l'unità di misura. Il 'metro' è costituito da un'asta o un nastro con delle incisioni equidistanti. Le incisioni possono essere distanti tra loro $1dm$ e allora il 'metro' ha una sensibilità $S = 1dm$.
Un 'metro' suddiviso in centimetri ha una sensibilità $S = 1cm$, cioè esso non è in grado di distinguere tra loro le lunghezze di due oggetti che differiscono tra loro di meno di $1cm$.
Nel caso di un 'metro', come abbiamo visto, possiamo migliorare la sensibilità suddividendo ulteriormente ogni *centimetro* in 10 parti (*millimetri*), ottenendo così una sensibilità $S = 1mm$. Tuttavia non possiamo procedere ulteriormente dividendo ogni *millimetro* in 10 parti in quanto non solo non riusciremmo più a distinguere tra loro le singole incisioni, ma se il 'metro' non è costruito con materiali speciali, esso può subire nel tempo delle variazioni della propria lunghezza maggiori di un *decimillimetro*.

Osserviamo che uno strumento di misura è *poco sensibile* se il valore della sensibilità S è espresso da un *numero grande* , mentre è *molto sensibile* se il valore della sua sensibilità è espresso da un *numero piccolo.*

Per fare un confronto fra due strumenti, i valori della sensibilità devono evidentemente essere espressi nella stessa unità di misura. Ad esempio il 'metro' che è in grado di apprezzare differenze di 1 *centimetro* ha una sensibilità $S = 1cm = 0,01m$, mentre il 'metro' che è in grado di apprezzare differenze di 1 *millimetro* ha una sensibilità $S = 1mm = 0,001m$ ed è uno strumento di misura più sensibile.

In molti strumenti, in particolare in molti di quelli che useremo in laboratorio, il valore della grandezza da misurare è indicato da un indice che si muove su di una scala graduata (vedi fig. 4.1a); anche in questo caso, se non c'è una *indicazione diversa*, la sensibilità S dello strumento è data dalla differenza tra i valori corrispondenti a due incisioni successive sulla scala graduata.

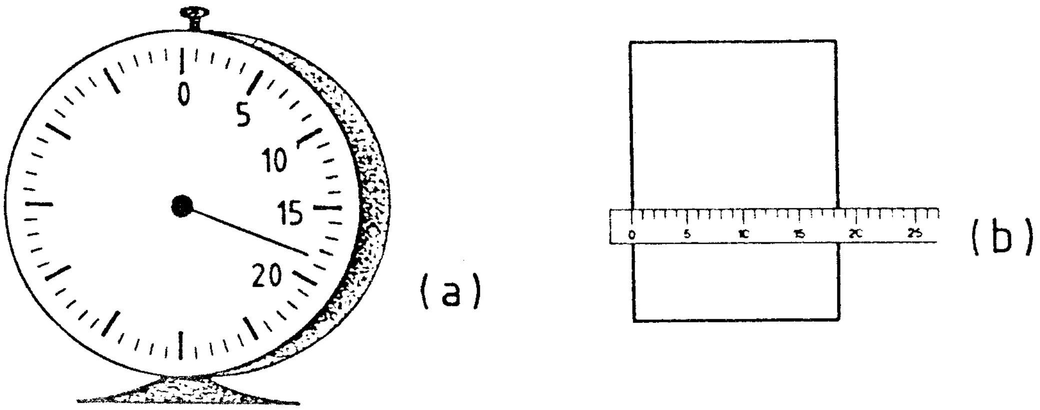


Figura 4.1

La lettura del valore della grandezza che si sta misurando è quindi del tutto analoga a quella della misura di una lunghezza mediante un 'metro' graduato (vedi fig. 4.1b) e il risultato della misura è esprimibile mediante i valori corrispondenti alle due incisioni tra le quali si trova l'indice dello strumento. Così, se l'indice dello strumento si trova tra l'incisione corrispondente al valore $18u$ (u rappresenta l'unità di misura utilizzata) e quella corrispondente al valore $19u$, per quanto abbiamo visto in precedenza possiamo scrivere per il valore della nostra grandezza x

$$x = (18,5 \pm 0,5)\ u \qquad 4.1$$

In questo caso l'intervallo di incertezza della misura, $2d = l_s - l_i = 1u$, corrisponde ad una unità della scala graduata ed è quindi uguale all'intervallo di incertezza dovuto alla sensibilità dello strumento. Abbiamo allora

$$d = S/2$$

Può accadere tuttavia che l'incertezza di una singola misura *sia maggiore* dell'incertezza dovuta alla sensibilità dello strumento usato.

Ad esempio, se per misurare la lunghezza della nostra automobile utilizzassimo un 'metro' con sensibilità $S = 0,1cm$ (cioè suddiviso in *millimetri*), potremmo facilmente trovare che la superficie esterna del paraurti è così rovinata da permettere di individuare solo un intervallo di alcuni *millimetri* in cui essa è compresa.

Nel caso illustrato in fig. 4.2 una lettura corretta potrebbe essere

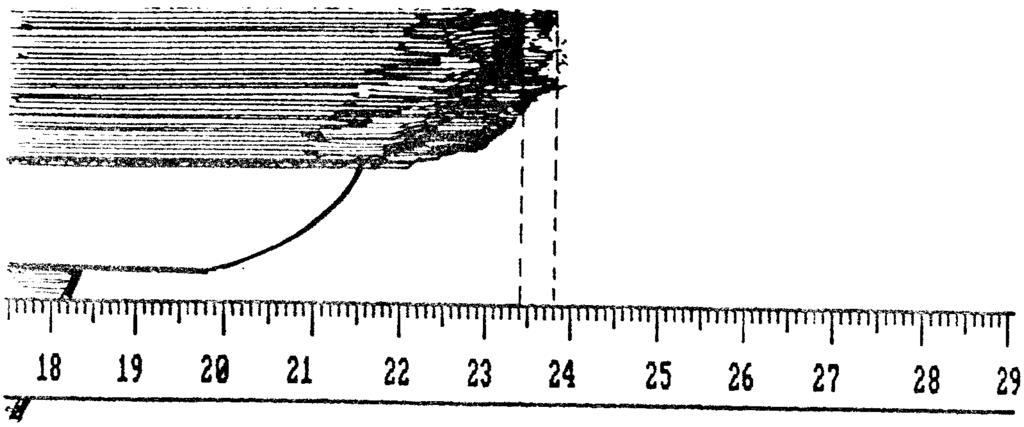


Figura 4.2

$$4\ m + 23\ cm + 4\ mm < l < 4\ m + 23\ cm + 8\ mm$$

cioè

$$l = (4,236 \pm 0,002)\ m$$

con una incertezza $d = 0,2cm$ quattro volte più grande dell'incertezza dovuta alla sensibilità dello strumento usato ($S/2 = 0,05cm$).

Qualsiasi risultato di una singola misura è ottenibile (e quindi va sempre scritto) con una incertezza maggiore o almeno uguale all'incertezza dovuta alla sensibilità dello strumento con cui viene eseguita la misura.

Se l'indice dello strumento è molto vicino ad una incisione, invece di indicare il valore intermedio tra le due incisioni, si preferisce indicare il valore corrispondente alla incisione a cui l'indice dello strumento risulta più vicino; l'incertezza della misura d è però sempre data almeno da metà del valore della sensibilità S dello strumento. Così nel caso di fig. 4.1, se l'indice è più vicino alla incisione $18u$, possiamo scrivere

$$x = (18 \pm 0,5)\ u$$

mentre se l'indice è più vicino alla incisione $19u$

$$x = (19 \pm 0,5)\ u$$

Osserviamo però che se l'indice *si muove a 'scatti'* da un'incisione all'altra, come ad esempio la lancetta dei secondi di un orologio, l'indicazione della misura *deve essere sempre* fatta nel modo indicato dalla (4.1). Infatti, quando ad esempio la lancetta si trova sull'incisione 18 *secondi* vuol dire che sono già passati 18 *secondi* e non sono ancora passati 19 *secondi*. Le stesse considerazioni valgono nel caso di strumenti *digitali*, cioè di quegli strumenti nei quali l'indicazione del valore della grandezza è data direttamente da numeri.

D4.1 Qual è la sensibilità del vostro orologio da polso? E del battere del vostro cuore?

5. Misure ripetute

Nei paragrafi precedenti abbiamo visto cosa vuol dire misurare in modo diretto una grandezza con un determinato strumento. Ma siamo proprio sicuri della validità del risultato ottenuto? Proviamo a ripetere la misura.

Se misuriamo una seconda volta la lunghezza dell'automobile con il nostro bastone senza suddivisioni certamente troveremo ancora che l'automobile è più lunga di $4m$ e meno di $5m$, cioè

$$l = (4,5 \pm 0,5)\ m$$

Questo risultato è *riproducibile* (chiunque faccia le misure. ritrova lo stesso risultato), ma è *poco preciso.*
Analogamente se ripetiamo la misura con un 'metro' di sensibilità $S = 0,1m$ quasi sicuramente troveremo ancora

$$l = (4,25 \pm 0,05)\ m$$

Ma se usiamo uno strumento molto sensibile, ad esempio un 'metro' suddiviso in *millimetri*, cioè con una sensibilità $S = 0,001m$, sicuramente troveremo risultati diversi ogni volta che facciamo la misura.

In tabella 5.1 sono riportati i risultati ottenuti in una serie di 10 misure della lunghezza di un'automobile Fiat 124. Nell'eseguire le misure è risultato che l'incertezza nell'individuare sul 'metro' la posizione della superficie esterna del paraurti era di $\pm 1mm$, cioè doppia di quella dovuta alla sensibilità dello strumento.

TABELLA 5.1

1ª misura	$(4,256 \pm 0,001)\ m$
2ª misura	$(4,251 \pm 0,001)\ m$
3ª misura	$(4,269 \pm 0,001)\ m$
4ª misura	$(4,221 \pm 0,001)\ m$
5ª misura	$(4,230 \pm 0,001)\ m$
6ª misura	$(4,260 \pm 0,001)\ m$
7ª misura	$(4,249 \pm 0,001)\ m$
8ª misura	$(4,252 \pm 0,001)\ m$
9ª misura	$(4,261 \pm 0,001)\ m$
10ª misura	$(4,254 \pm 0,001)\ m$

Che cosa è successo?

Ogni volta che abbiamo eseguito la misura abbiamo riportato più volte il nostro 'metro' parallelamente all'automobile. Ma è chiaro che è praticamente impossibile ripetere nello stesso modo questa operazione. È difficile allineare esattamente un estremo del 'metro' con il paraurti dell'automobile; è ancora più difficile riportare la seconda volta il 'metro' in modo che il primo estremo si trovi esattamente nella posizione in cui si trovava in precedenza il secondo estremo; e così via. Ogni volta che ripetiamo una misura possiamo commettere una serie di piccoli errori che sommati tra loro fanno sì che si ottenga un risultato leggermente diverso da quello precedente. Tuttavia queste differenze possono essere apprezzate *solo* se lo strumento usato è *sufficientemente sensibile* . È questo il caso della misura della lunghezza della nostra automobile con un 'metro' avente una sensibilità $S = 0,001m$.

Come ci dobbiamo comportare allora in questi casi?

Osserviamo attentamente i risultati ottenuti. Essi sono diversi tra loro, ma si può notare che le prime due cifre sono *sempre* le stesse e che le seconde due sono *sempre* comprese tra 20 e 70. Possiamo quindi dire che *tutti* i risultati ottenuti *sono compresi* nell'intervallo fra i due valori estremi:

$$4,220\ m \qquad \text{e} \qquad 4,270\ m$$

Questo intervallo è più piccolo di quello ottenuto utilizzando un metro con sensibilità $S = 0,1m$. Abbiamo quindi ottenuto un risultato più preciso.

Analogamente a quanto detto nel caso di una singola misura, chiamato l_{max} e l_{min} rispettivamente il valore più grande e il valore più piccolo fra quelli trovati, possiamo scrivere il risultato di una serie di misure ripetute nel seguente modo

$$l = \frac{l_{max} + l_{min}}{2} \pm \frac{l_{max} - l_{min}}{2} = l_{int} \pm \delta \qquad 5.1$$

Nel caso dei risultati riportati in tabella 5.1 abbiamo

$$l = (4,245 \pm 0,025)\ m \qquad 5.2$$

Viene quindi dato in questo caso come *risultato di una serie di misure l'intervallo* tra

$$l_{int} + \delta = l_{max} \qquad \text{e} \qquad l_{int} - \delta = l_{min}$$

nel quale sono contenuti *tutti* i risultati delle singole misure.

La quantità $(l_{max} - l_{min}) = 2\delta$ rappresenta l'intervallo di valori in cui sono 'dispersi' *tutti* i risultati ed è chiamata *dispersione massima*. La quantità

$$\delta = \frac{l_{max} - l_{min}}{2}$$

rappresenta quindi la *semidispersione massima* e può essere assunta come valore dell'incertezza della misura.

In realtà assumendo come incertezza delle misure la semidispersione massima si sopravvaluta l'errore. Come si può vedere nell'Appendice, in alcuni casi, in particolare quando si sono eseguite molte misure, è possibile analizzare i risultati ottenuti in modo statistico e ottenere per l'incertezza della misura un intervallo molto più piccolo.

Analizzando la tabella 5.1 e il risultato finale 5.2 possiamo osservare che quando il valore dell'incertezza delle singole misure (nel nostro caso $d = 0,001m$) è molto più piccolo della dispersione massima delle misure (nel nostro caso $0,05m$) ha poco significato tenerne conto. In questi casi possiamo riportare per ogni singola misura il solo valore intermedio senza *indicare l'incertezza d* delle singole misure.

E5.1 Nel caso di misure ripetute e di risultati diversi è possibile stabilire il valore 'vero' della grandezza misurata?

E5.2 Scrivere il valor intermedio e la dispersione massima delle seguenti serie di misure:

a. $5,2\ g$, $5,6\ g$, $5,3\ g$, $5,8\ g$, $5,4\ g$,
b. $10,4\ cm$, $10,3\ cm$, $10,7\ cm$, $10,5\ cm$, $10,5\ cm$, $10,4\ cm$
c. $1\ h\ 27''$, $1\ h\ 1'55''$, $59'50''$, $1\ h\ 1'12''$, $1\ h\ 48''$, $1\ h\ 1'04''$
d. $3,47\ m$, $3,52\ m$, $3,55\ m$, $3,49\ m$
e. $8,2\ kg$, $8,15\ kg$, $8,4\ kg$, $8,36\ kg$, $8,09\ kg$, $8,25\ kg$

E5.3 Come mai in alcuni casi i risultati di misure ripetute sono sempre uguali e in altri sono diversi tra loro?

6. Errore assoluto ed errore relativo

Molto spesso l'incertezza d di una singola misura (o la semidispersione massima δ nel caso di misure ripetute) viene anche chiamata *errore assoluto.*

L'errore assoluto, però, non rende l'idea di quanto sia accurata una misura. Un conto è un errore assoluto di $2,5cm$ su un valore di $4,25m$ (misura della lunghezza di un'automobile) e un altro conto è un errore assoluto di $2,5cm$ su un valore di $42,5cm$ (misura della larghezza di un banco).
Per caratterizzare l'accuratezza di una misura è molto più significativo l'errore relativo E_r, cioè il rapporto tra l'errore assoluto E_a e il valore intermedio della grandezza:

$$\text{Errore relativo} = \frac{\text{Errore assoluto}}{\text{Valore intermedio}}$$

Nel caso della lunghezza dell'automobile

$$E_r = \frac{0,025\ m}{4,25\ m} = 0,0059$$

Nel caso della larghezza del banco

$$E_r = \frac{0,025\ m}{0,425\ m} = 0,059$$

cioè dieci volte più grande del precedente.
L'errore relativo viene normalmente espresso in percentuale

$$0,0059 = 0,59/100 = 0,59\%$$

$$0,059 = 5,9/100 = 5,9\%$$

cioè si moltiplica per 100 il risultato del rapporto facendolo seguire dal simbolo % (che va letto *per cento*). *Esso è tanto più piccolo quanto più precisa è la misura.*

Ricordiamo che l'errore relativo va sempre calcolato esprimendo sia l'errore assoluto che il valore intermedio *nella stessa unità di misura* ed è un numero puro, cioè non ha dimensioni.

Il risultato di una misura quindi può essere scritto, oltre che mettendo in evidenza l'errore assoluto [$(4,25 \pm 0,025)m$ nel primo caso e $(42,5 \pm 2,5)cm$ nel secondo] anche mettendo in evidenza l'errore relativo percentuale ($4,25m \pm 0,59\%$ nel primo caso e $42,5cm \pm 5,9\%$ nel secondo).

È oggi possibile, utilizzando raggi laser, misurare la distanza tra la Terra e la Luna con un errore assoluto di $0,1m$. Ciò significa che l'errore relativo di questa misura è molto piccolo, dell'ordine di $0,0000000001\%$, perchè la distanza media tra la Terra e la Luna è all'incirca $400000000m$.
Questo errore è sicuramente più piccolo, e quindi la misura è molto più precisa, di quello che si commette ad esempio nel determinare la statura di un uomo. In questa misura l'errore assoluto è di $1cm$, 10 volte più piccolo di quello della misura precedente, ma l'errore relativo è molto più grande, essendo dell'ordine di 1%.

Noto l'errore relativo si può ottenere l'errore assoluto

$$\text{Errore assoluto} = \text{Valore intermedio} \times \text{Errore relativo}$$

Ad esempio se la misura della lunghezza di un tavolo ha fornito un valore di $2,00m$ con un errore relativo dello $0,5\%$ abbiamo

$$E_a = 2,00 \cdot \frac{0,5}{100} m = 0,01\ m$$

cioè $l = (2,00 \pm 0,01)\ m$.

E6.1 Si calcoli l'errore relativo percentuale delle seguenti misure
a. $6,80\ km \pm 0,02\ km$
b. $75,2\ mm \pm 0,1\ mm$
c. $83^o \pm 2^o$
d. $68,04\ m \pm 20\ cm$
e. $1,211\ km \pm 18\ m$.

E6.2 Si calcoli l'errore assoluto a partire dalla conoscenza dei valori dell'errore relativo delle seguenti misure

a. $140m \pm 4\%$
b. $58^\circ \pm 5\%$
c. $1h\ 40' \pm 0,5\%$.

E6.3 Quale delle seguenti misure di lunghezza ha il più piccolo errore assoluto e quale il più piccolo errore relativo?

a. $(100 \pm 1)\ mm$
b. $(1000 \pm 0,1)\ km$
c. $(0,1 \pm 0,001)\ m$
d. $(10 \pm 0,01)\ cm$.

E6.4 La massa m di un oggetto è stata misurata con una bilancia di sensibilità $0,01g$. La misura è stata ripetuta 5 volte e i risultati ottenuti sono:

$5,67\ g$ $5,72\ g$ $5,69\ g$ $5,73\ g$ $5,70\ g$.

Calcolare:

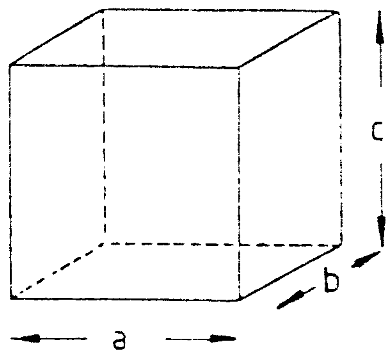
a. la massa m dell'oggetto;
b. l'errore assoluto di m;
c. l'errore relativo.

E6.5 Supponiamo di voler misurare con un errore relativo non superiore al 1% la lunghezza di un oggetto avendo a disposizione uno strumento con sensibilità di $1mm$, uno con sensibilità di $0,1mm$ ed un terzo con sensibilità $0,05mm$. Se la lunghezza dell'oggetto da misurare è circa $2cm$, quale strumento utilizzeremo per ottenere il risultato voluto? E se la lunghezza dell'oggetto è circa $15cm$?

7. Incertezza di una misura indiretta

Il problema della determinazione dell'incertezza si pone anche quando si misura una grandezza per via indiretta, cioè quando si ricava il valore della grandezza dalla conoscenza dei valori, misurati direttamente, di altre grandezze alle quali essa è legata da relazioni di tipo matematico.

Ad esempio sono misure indirette quelle del perimetro P di una stanza rettangolare e del suo volume V, ottenute tramite la misura dei suoi lati, dai quali dipendono attraverso le relazioni:



$$P = 2a + 2b$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

oppure la misura della velocità media v di un oggetto in moto ottenuta tramite la misura dello spazio percorso Δs e dell'intervallo di tempo Δt impiegato a percorrerlo attraverso la relazione $v = \Delta s/\Delta t$.

In questo caso le incertezze sulle grandezze che si determinano direttamente renderanno incerto anche il valore della grandezza da determinare (si dice che gli errori si sono *propagati*). In pratica si tratta di capire come devono essere eseguite le quattro operazioni con numeri che rappresentano risultati sperimentali e che quindi sono affetti da un certo errore.

Distinguiamo due casi.

a. Misure che si ottengono ***sommando o sottraendo*** i risultati di altre misure.

Supponiamo di voler trovare la lunghezza l di una sbarra formata da tre elementi le cui lunghezze sono rispettivamente

$$l_1 = (127 \pm 0,5)\ cm; \quad l_2 = (30,3 \pm 0,05)\ cm; \quad l_3 = (12,1 \pm 0,05)\ cm$$

Se eseguiamo la somma dei valori intermedi abbiamo

$$l = (127 + 30,3 + 12,1)\ cm = 169,4\ cm \qquad 7.1$$

In realtà l'operazione corretta è

$$l = (127 \pm 0,5)\ cm + (30,3 \pm 0,05)\ cm + (12,1 \pm 0,05)\ cm =$$
$$= [127 + 30,3 + 12,1 \pm (0,5 + 0,05 + 0,05)]\ cm =$$
$$= (169,4 \pm 0,6)\ cm \qquad 7.2$$

Da questo esempio è immediato ricavare la seguente regola, la cui validità generale è facile da verificare:
l'errore assoluto del risultato di una addizione o di una sottrazione di due o più risultati sperimentali è uguale alla somma degli errori assoluti delle singole misure.

Nel nostro caso due misure hanno una incertezza o errore assoluto di $0,05cm$, cioè presumibilmente sono state ottenute con un 'metro' di sensibilità $S = 0,1cm$, mentre una misura ha un errore assoluto di $0,5cm$, ottenuta quindi con una sensibilità $S = 1cm$. Come si vede l'errore assoluto sulla somma è praticamente quello dovuto alla misura con l'errore assoluto più grande. Pertanto, se si volesse ottenere un risultato più preciso, bisognerebbe cercare di diminuire l'incertezza di questa misura, mentre non avrebbe senso cercare di migliorare le altre due.

Nel caso della sottrazione bisogna fare molta attenzione quando i due numeri da sottrarre sono quasi uguali.

Supponiamo di aver misurato la lunghezza di un filo prima e dopo averlo tirato. Nella prima misura si è ottenuta una lunghezza di $(60,15 \pm 0,05)cm$ e nella seconda di $(60,25 \pm 0,05)cm$.
L'allungamento risulterebbe allora

$$60,25\ cm - 60,15\ cm = 0,10\ cm$$

con un errore assoluto di $\pm(0,05 + 0,05)cm = \pm 0,10cm$. È quindi possibile che il filo non si sia allungato!

b. Misure che si ottengono *moltiplicando o dividendo* tra loro i risultati di altre misure.

Supponiamo di dover calcolare l'area A della superficie di una striscia di carta le cui dimensioni sono

$$lunghezza\ a = (186,5 \pm 0,5)\ cm$$

$$larghezza\ b = (1,25 \pm 0,05)\ cm$$

Il prodotto dei valori intermedi dei due lati è

$$A' = (186,5 \times 1,25)\ cm = 233,125\ cm^2 \tag{7.3}$$

In realtà dobbiamo scrivere

$$A = a \times b = (186,5 \pm 0,5)\ cm \times (1,25 \pm 0,05)\ cm$$

Il valore di A va inteso quindi come un intervallo che ha come valore minimo il prodotto del valore minimo di a per il valore minimo di b e come valore massimo il prodotto dei valori massimi di a e b, cioè

$$A_{min} = (186,5 - 0,5)\ cm \times (1,25 - 0,05)\ cm = 223,2\ cm^2$$

$$A_{max} = (186,5 + 0,5)\ cm \times (1,25 + 0,05)\ cm = 243,1\ cm^2$$

L'intervallo in cui è compresa la misura dell'area è allora

$$223,2\ cm^2 < A < 243,1\ cm^2$$

Questo intervallo si può approssimare usando il prodotto dei valori intermedi A'

$$A = (A' \pm 10)\ cm^2$$

Osserviamo che l'errore relativo nella determinazione dell'area A è dato da:

$$E_r = \frac{10}{A'} \simeq 0,043$$

che risulta essere la somma degli errori relativi delle misure del lato a ($E_r = 0,003$) e del lato b ($E_r = 0,04$).

Supponiamo ora di voler calcolare la velocità $v = \Delta s/\Delta t$ di una pallina che in un intervallo di tempo $\Delta t = (20,0 \pm 0,1)s$ ha percorso uno spazio $\Delta s = (4,80 \pm 0,01)m$. Abbiamo per il rapporto tra i valori intermedi

$$v' = \frac{4,80m}{20s} = 0,24\ m/s = 24\ cm/s$$

Il valore massimo è

$$v_{max} = \frac{\Delta s_{max}}{\Delta t_{min}} = \frac{4,81m}{19,9s} = 0,2417\ m/s = 24,17\ cm/s$$

mentre il valore minimo è

$$v_{min} = \frac{\Delta s_{min}}{\Delta t_{max}} = \frac{4,79m}{20,1s} = 0,2383\ m/s = 23,83\ cm/s$$

Dobbiamo allora scrivere

$$v' = (24 \pm 0,17)\ cm/s$$

con un errore relativo $E_r = 0,17/24 = 0,007 = 0,7\%$ che coincide con la somma degli errori relativi di Δt ($E_r = 0,5\%$) e di Δs ($E_r = 0,2\%$).

Quanto abbiamo visto è vero in generale:

l'errore relativo del risultato di una moltiplicazione o di una divisione di due o più risultati sperimentali è uguale alla somma degli errori relativi delle singole misure.

Se vogliamo migliorare il risultato di una misura indiretta ottenuta come prodotto o divisione di altre misure eseguite in modo diretto, bisogna cercare di migliorare la misura che ha l'errore relativo maggiore, che non sempre è quella con l'errore assoluto maggiore. Ad esempio nel caso dell'area della striscia di carta considerata precedentemente bisognerebbe cercare di migliorare la precisione con cui si misura la larghezza b, anche se essa è già stata ottenuta con una incertezza di $\pm 0,05 cm$. *Migliorare la precisione con cui si è misurata la lunghezza* a, anche se questa è stata ottenuta con una incertezza di $\pm 0,5 cm$, *non servirebbe molto a migliorare la precisione del risultato finale.*

D7.1 Con quale errore relativo occorre misurare il raggio di un cerchio se si vuole conoscerne l'area con un errore relativo percentuale dell'1%?

E7.1 Un blocco di cemento ha la forma di un cubo. Si misura la lunghezza di un lato e si ottiene $l = (60,3 \pm 0,1) cm$. Calcolare il volume del blocco.

E7.2 Un uomo vuole sapere l'area di un campo rettangolare. Non avendo a disposizione un metro, misura i lati del campo con i suoi passi e trova che sono lunghi 80 e 125 *passi*. Tornato a casa misura la lunghezza dei suoi passi e trova che 10 *passi* equivalgono a $(8,0 \pm 0,1) m$.
Calcolare l'area del campo.

E7.3 Calcolare il volume di un parallelepipedo i cui lati misurati con una incertezza di $\pm 0,1 cm$ sono rispettivamente $5,3 cm$, $6,3 cm$ e $2,1 cm$.

E7.4 Si calcoli il volume della sfera il cui raggio misura $(7,25 \pm 0,005) cm$.

A conclusione di questo paragrafo vogliamo osservare che il risultato a cui siamo arrivati circa la propagazione dell'errore nel caso del prodotto di due risultati sperimentali poteva essere ottenuto in modo meno rigoroso, ma forse più intuitivo.

Supponiamo di voler misurare l'area di una sottile lastrina di forma rettangolare. Per fare ciò possiamo appoggiare la lastrina su di un foglio di carta quadrettata con quadretti di lato di $1cm$ (e quindi di area $1cm^2$) e riportare con una matita il contorno della lastrina. (vedi fig. 7.1)

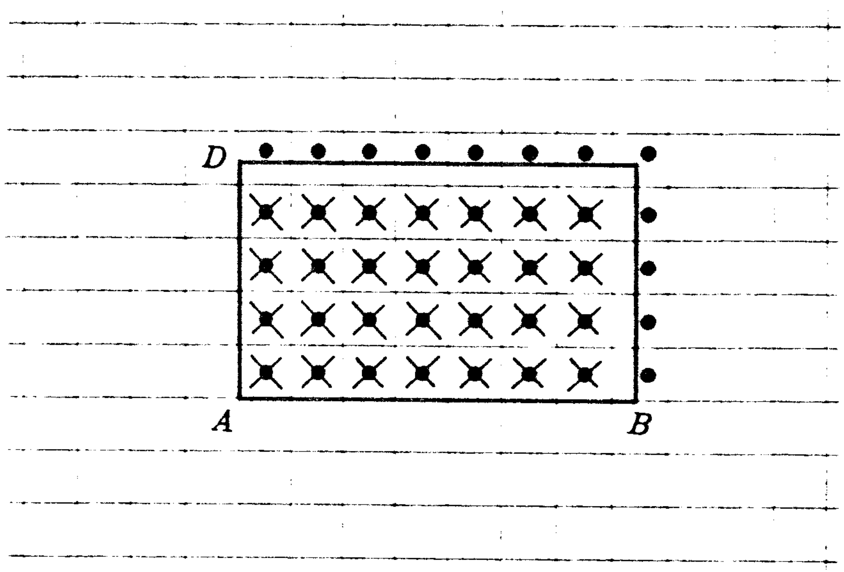


Figura 7.1

L'area della lastrina sarà quindi data in cm^2 dal numero di quadretti contenuti all'interno del suo contorno. Essa è quindi maggiore di $28cm^2$ (corrispondente al numero massimo di quadretti completamente interni al contorno [×]) e minore di $40cm^2$ (corrispondente al numero minimo di quadretti necessari per ricoprire interamente la lastrina [•]).
Possiamo quindi scrivere

$$28\ cm^2 < A < 40\ cm^2$$

cioè

$$A = (34 \pm 6)\ cm^2$$

con un errore relativo

$$E_{rA} = \frac{6}{34} = 0,177$$

D'altra parte le lunghezze dei lati della lastrina sono

$$l = \overline{AB} = (7,5 \pm 0,5)\ cm \qquad \text{e} \qquad h = \overline{AD} = (4,5 \pm 0,5)\ cm$$

con errori relativi

$$E_{rl} = 0,066 \qquad \text{e} \qquad E_{rh} = 0,111$$

Si ha quindi

$$E_{rA} = E_{rl} + E_{rh} = 0,066 + 0,111 = 0,177$$

D7.2 Si provi a ripetere la misura con superfici di forma diversa (ad esempio quella della mano).

D7.3 Come è possibile migliorare l'incertezza della misura?

8. Cifre significative e arrotondamenti

Molto spesso quando si riferisce il risultato di una *singola* misura si indica solo il valore intermedio senza precisare l'intervallo di incertezza della misura, intendendo in questo caso che per effetto dell'incertezza della misura *l'ultima cifra indicata* è la sola 'incerta', mentre le altre sono 'sicure'.

Cioè, come si dice, si danno di un risultato le sole *cifre significative*, intendendo per cifre significative *tutte le cifre sicure e la prima cifra incerta.*

Così quando diciamo che un oggetto è lungo $17,3cm$ intendiamo che la sua lunghezza è sicuramente $17cm$ più alcuni *millimetri*, probabilmente 3, ma che potrebbero essere ad esempio anche 2 o 4. Diciamo anche che la lunghezza $l = 17,3cm$ è data con *3 cifre significative.*

Risulta chiaro che un risultato è tanto più preciso quanto maggiore è il numero di cifre significative con cui esso è scritto. Più precisamente tanto maggiore è il numero di cifre significative tanto minore è *l'errore relativo* della misura.

D8.1 Dimostrare l'ultima affermazione.

Osserviamo che le cifre significative di un numero sono tutte le cifre a partire dalla prima a sinistra diversa da zero. Per esempio:
il numero $44,317$ è scritto con 5 cifre significative; il numero $7,039$ è scritto con 4 cifre significative; il numero $0,0098$ è scritto con 2 cifre significative. Pertanto il risultato

$$l = 17,3\ cm = 173\ mm = 0,173\ m = 0,000173\ km$$

è sempre scritto con tre cifre significative, qualunque sia l'unità di misura scelta.

Osserviamo che i due risultati

$$l = 3,5\ m \qquad\qquad l = 3,500\ m$$

sono scritti rispettivamente con 2 e con 4 cifre significative. Essi rappresentano infatti due misure con diversa precisione. Nel primo risultato l'incertezza è dell'ordine del *decimetro*, nel secondo del *millimetro*.

Se si vuole arrotondare un numero lasciandogli, ad esempio, solo 5 cifre si procede nel modo seguente:

a. se la sesta cifra (cioè la prima di quelle da 'eliminare') vale 0,1,2,3 o 4 si scrivono semplicemente le sole prime cinque cifre;

b. se la sesta cifra vale 5,6,7,8 o 9 si aggiunge una unità alla quinta cifra e si scrive il numero senza le cifre dalla sesta in poi.

Ad esempio, arrotondato alla quinta cifra:

il numero $3,567634$ diventa $3,5676$

il numero $3,567684$ diventa $3,5677$.

L'arrotondamento può essere fatto anche su numeri non decimali. In questo caso, però, bisogna prima scrivere il numero utilizzando le potenze di 10. Ad esempio se si vuole arrotondare alla terza cifra il numero 4324 non si può scrivere né 432 (è un numero 10 volte più piccolo) né 4320 (è ancora un numero con 4 cifre). È necessario prima riscrivere il numero utilizzando le potenze di 10

$$4324 = 4,324 \cdot 1000 = 4,324 \cdot 10^3$$

e quindi procedere all'arrotondamento. Si ottiene allora

$$4,32 \cdot 10^3$$

E8.1 Si dica con quante cifre significative sono dati i valori degli esercizi E6.1, E6.2, E6.3.

E8.2 Misurando la lunghezza di due oggetti si sono trovati i seguenti risultati
$$7,52\ m \qquad 0,752\ m$$
Il numero delle cifre significative è lo stesso nelle due misure?

E8.3 I valori $5,3cm$; $0,082cm$; $0,00074cm$ hanno lo stesso numero di cifre significative?

E8.4 I valori $5,3cm$; $5,30cm$; $5,300cm$ hanno lo stesso numero di cifre significative? Che differenza c'è tra loro?

E8.5 In una tabella di costanti fisiche è riportato il valore della velocità della luce
$$c = (299792,458 \pm 0,0012)\ km/s$$
Quante sono le cifre significative con cui è noto il valore della velocità della luce? Qual è l'errore relativo?

E8.6 Si arrotondino alla terza cifra significativa i seguenti numeri:
$3,14159$; $3,4178$; 65447; $0,071561$; $0,0094624$

Come abbiamo visto nei paragrafi precedenti, quando il valore di una grandezza è ottenuto in modo diretto attraverso una sola misura o dall'analisi di più misure ripetute, il numero che rappresenta il valore della grandezza è costituito da un numero limitato di cifre, l'ultima delle quali, a causa della incertezza della misura, è sicuramente incerta.

Quando invece il valore di una grandezza è ottenuto in modo indiretto mediante una operazione matematica sui valori di altre due o più grandezze, il numero che si ottiene può avere molte cifre (si pensi ad esempio al rapporto di due numeri primi tra di loro). Come si può stabilire quante devono essere le cifre significative?

Consideriamo ad esempio il caso dell'area della striscia di carta studiato nel paragrafo precedente. Il prodotto dei valori intermedi dei due lati (relazione 7.3) dà un risultato con tre cifre decimali. Tuttavia si è mostrato come l'incertezza del valore dell'area è di alcuni cm^2. Nel caso del risultato 7.3 non ha quindi alcun significato scrivere le tre cifre dopo la virgola. Vediamo allora come si può stabilire in modo generale il numero di cifre significative con cui si deve scrivere il risultato di una operazione matematica su numeri che rappresentano il risultato di una misura sperimentale.

a. *Moltiplicazione e divisione*

Abbiamo visto nel paragrafo precedente che nel caso della moltiplicazione o della divisione l'errore relativo con cui si ottiene il risultato, quando le misure sono eseguite con precisione molto diversa, è praticamente dato dall'errore relativo della misura meno precisa; possiamo quindi dire che:
il prodotto o il quoziente di due o più numeri che rappresentano il risultato di misure sperimentali non può avere in generale più cifre significative di quante ne abbia il numero con il minor numero di cifre significative.

Così l'area $A = a \cdot b$ di una striscia di carta di dimensioni $a = 186,5cm$ e $b = 1,25cm$ deve essere scritta con sole 3 cifre significative

$$A = (186,5 \times 1,25)\ cm^2 = 233,125\ cm^2 \simeq 233\ cm^2$$

in accordo con quanto precedentemente visto.

Analogamente se si vuole ricavare la lunghezza di un lato l_1 di una superficie rettangolare essendo note le misure dell'area ($A = 1,17m^2$) e dell'altro lato ($l_2 = 0,32m$) si calcola il rapporto

$$l_1 = \frac{A}{l_2} = \frac{1,17\ m^2}{0,32m} = 3,65625\ m \simeq 3,7\ m$$

Osserviamo però che se il valore misurato per il perimetro di un triangolo equilatero è $P = 1,01m$, la misura di un lato risulta

$$l = \frac{1,01\ m}{3} = 0,33666...\ m \simeq 0,337\ m$$

Infatti in questo caso il numero 3 non è il risultato di una misura, ma un numero *'esatto'* e quindi il valore del lato deve essere scritto con lo stesso numero di cifre significative dell'unica grandezza misurata, cioè il perimetro.

E8.7 La misura dell'area di un quadrato ha dato come risultato $2,53m^2$. Determinare il lato del quadrato.

E8.8 Il perimetro di una stanza quadrata è risultato pari a $17,17m$. Determinare la lunghezza di un lato della stanza.

---

b. *Addizione o sottrazione*

È importante ricordare che è possibile *sommare o sottrarre* solo *grandezze* tra loro *omogenee*. Cioè è possibile sommare o sottrarre una misura di lunghezza ad un'altra misura di lunghezza; una misura di volume ad un'altra misura di volume; e così via.

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, l'errore assoluto della somma o differenza di due o più risultati, quando le misure sono eseguite con precisione molto diversa, è praticamente determinato dall'errore assoluto del risultato con l'errore assoluto più grande. Pertanto, se tutti i risultati sono stati scritti utilizzando la stessa unità di misura, possiamo dire:
la somma o la differenza di due o più numeri che rappresentano il risultato di una misura non può avere più cifre significative dopo la virgola del numero che ha meno cifre significative dopo la virgola.

Ad esempio se dobbiamo sommare due aste le cui lunghezze sono risultate $l_1 = 127cm$ e $l_2 = 1,25cm$ abbiamo

$$l = l_1 + l_2 = (127 + 1,25)\ cm = 128,25\ cm \simeq 128\ cm$$

Infatti se la lunghezza della prima asta è risultata essere $127cm$, ciò significa che l'operatore ha usato molto probabilmente uno strumento con sensibilità

$S = 1cm$. Non ha quindi significato scrivere nel risultato della somma i millimetri quando nella prima misura il numero dei centimetri è incerto.

E8.9 Determinare il perimetro di un campo rettangolare i cui lati sono stati misurati pari a $l_1 = 102m$ e $l_2 = 57,3m$.

E8.10 Se ad un nastro di carta lungo $10,5m$ se ne toglie un pezzo lungo $32cm$, quanto ne rimane?

Per concludere vogliamo osservare che l'errore di una misura deve essere scritto utilizzando *una o al massimo due cifre significative*: trattandosi di una indicazione di incertezza, non è infatti necessario precisarne il valore con troppa cura. Nella misura

$$l = (12,10 \pm 0,05)\ cm$$

il calcolo 'esatto' dell'errore relativo darebbe $0,0413223$. In realtà a noi basta sapere che l'errore vale $0,041 = 4,1\%$ o addirittura che è circa il 4%.

Il risultato di una misura, quindi, va scritto usando il numero minimo di cifre, tenuto conto dell'incertezza. Il numero è scritto in modo corretto quando l'incertezza cambia l'ultima o la penultima cifra del risultato. Se avessimo trovato ad esempio

$$l = (12,57 \pm 0,995)\ cm$$

poichè l'incertezza fa già cambiare la seconda cifra del risultato, dovremmo scrivere

$$l = (12,6 \pm 1,0)\ cm$$

Osserviamo infine che il valore $\pi = 3,14$ che si usa nel calcolo della lunghezza di una circonferenza, della superficie di un cerchio o del volume di una sfera è un valore approssimato. Il valore di π, che è un numero irrazionale, è

$$\pi = 3,1415927.......$$

Anche in questo caso, quando si usa per π il valore $3,14$ i risultati ottenuti non possono avere più di 4 *cifre* significative in quanto per il numero $3,14$ tutte e tre le cifre sono sicure. Se si vuole avere più cifre significative bisogna usare per π un valore più preciso.

E8.11 Il volume di una sfera è risultato essere $V = 536,224\ cm^3$. Calcolare il valore del raggio.

9. Ordini di grandezza

Le cifre significative che compaiono nell'espressione della misura di una grandezza non hanno tutte la stessa importanza. Supponiamo che un cartello stradale per indicare la distanza tra due città (Mogadiscio e Chisimaio) porti la scritta 546 *km* e che una tempesta di sabbia abbia reso praticamente illeggibili alcune cifre, ad esempio come in fig. 9.1, dove le cifre illeggibili sono due.

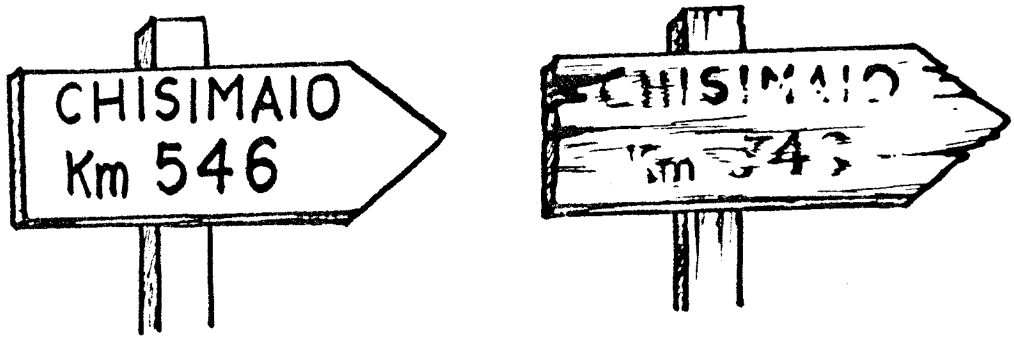


Figura 9.1

Se la cifra illeggibile è l'ultima, il danno non è grave; il viaggiatore ha ancora un'ottima idea della distanza che deve percorrere per arrivare a Chisimaio. Se però la cifra illeggibile è la prima, il danno è notevole; il viaggiatore non è assolutamente in grado di valutare, ad esempio, quanto tempo impiegherebbe per compiere il viaggio! Conoscere le *decine* e le *unità* del numero dei *kilometri* da percorrere, ma non le centinaia non serve a niente. Questo dimostra che nell'espressione del valore numerico di una misura c'è una diversa importanza delle varie cifre; la loro importanza decresce dalla prima a sinistra fino all'ultima a destra. Tuttavia anche se la sabbia ha reso illeggibile la prima cifra, il viaggiatore è ancora in grado di ricavare una certa informazione dal cartello. Non dalle cifre rimaste, che perdono significato se non si conosce il valore della prima, ma dal *numero* delle cifre. Infatti, poichè il *numero* delle cifre è tre, il viaggiatore sa che la distanza è sicuramente minore di *mille* e maggiore di *cento kilometri*.

Poiché, come abbiamo appena visto, del valore numerico di una misura la cifra che ha maggior significato è la prima, in Fisica si è soliti metterla in evidenza scrivendo il numero facendo uso delle potenze di 10, come è mostrato nei seguenti esempi

$$137\ km = 1,37 \cdot 100\ km = 1,37 \cdot 10^2\ km$$

$$0,0036m = \frac{3,6}{1000}\ m = 3,6 \cdot 10^{-3}\ m$$

Inoltre, quando non è necessario conoscere il valore esatto del risultato ma solo il suo 'ordine di grandezza', ci si può limitare ad indicare la potenza di 10 più prossima al numero, che viene appunto chiamato *ordine di grandezza*. Così l'ordine di grandezza di $137km$ è 10^2km o 10^5m, mentre l'ordine di grandezza di $0,0036m$ è $10^{-3}m$, cioè 1 *millimetro*.

In pratica per evidenziare l'ordine di grandezza di un numero occorre spostare la virgola dopo la prima cifra diversa da *zero* e moltiplicare per 10 elevato al numero di posti di cui si è spostata la virgola preso col segno positivo se si è andati da destra a sinistra (numero maggiore di 1) e col segno negativo se ci si è spostati da sinistra a destra (numero minore di 1). Ad esempio l'ordine di grandezza di

$$34714,24 \quad \text{cioè di} \quad 3,47142 \cdot 10^4$$

è 10^4, mentre quello di

$$0,003471 \quad \text{cioè di} \quad 3,471 \cdot 10^{-3}$$

è 10^{-3}.

Se la distanza tra due punti è

$$d = 2600\ m = 2,6 \cdot 10^3\ m$$

si dice che essa è dell'ordine di *mille metri* o di $10^3 m$, mentre se essa è

$$d = 0,0012\ m = 1,2 \cdot 10^{-3}\ m$$

si dice che è dell'ordine del *millesimo* di *metro* o di $10^{-3} m$.

Così l'ordine di grandezza del diametro della Terra è $10^7 m$ mentre il suo valore è $1,27 \cdot 10^7 m$.

È però necessaria una precisazione. In tutti i numeri che abbiamo considerato la prima cifra è minore di 5, cioè più prossima a 1 che a 10. Se la prima cifra è maggiore di 5, come nel numero

$$8432,4$$

è perfettamente corretto scrivere $8,4324 \cdot 10^3$ ma è necessario tener presente che, poiché 8 è più vicino a 10 che a 1, volendo approssimare questo numero con una potenza di 10 dovremo scrivere

$$8,4324 \cdot 10^3 \simeq 10 \cdot 10^3 = 10^4$$

L'ordine di grandezza di questo numero non è 10^3 ma 10^4. Per questo motivo quando la prima cifra significativa diversa da 0 è maggiore di 5 si preferisce scrivere

$$8432,4 = 0,84324 \cdot 10^4$$

che evidenzia il reale ordine di grandezza.
L'ordine di grandezza del numero $9,2 \cdot 10^{-5}$ è 10^{-4} e non 10^{-5}; infatti possiamo scrivere: $9,2 \cdot 10^{-5} = 0,92 \cdot 10^{-4}$.

La notazione che fa uso delle potenze di 10 non è solo necessaria in alcuni casi, ma è in generale sempre utile in Fisica. Essa avvantaggia molto chi deve operare con numeri molto più grandi o molto più piccoli di 1.

Ad esempio

$$\frac{390000000}{3000} = \frac{3,9 \cdot 10^8}{3 \cdot 10^3} = 1,3 \cdot (10^8/10^3) = 1,3 \cdot 10^5$$

e ancora

$$0,00032 \times 2500000 = 3,2 \cdot 10^{-4} \times 2,5 \cdot 10^6 = (3,2 \times 2,5) \cdot (10^{-4} \times 10^6) = 8 \cdot 10^2$$

D9.1 Si eseguano le operazioni sotto indicate, facendo uso della notazione con le potenze del 10:

a. $35000 \times 8000 =$
b. $3400000 : 2000 =$
c. $0,0024 \times 0,03 =$
d. $3400000 : 0,002 =$
e. $0,001 : 1000 =$

L'uso della potenze di 10 permette di dare risposte rapide, anche se approssimate, a problemi a prima vista numericamente complicati. Se si volesse determinare il numero di *secondi* contenuti all'incirca in 4 *anni*, anzichè moltiplicare 86400 (numero dei *secondi* in 1 *giorno*) per 365 (numero dei *giorni* in 1 *anno*) per 4 *anni* basterebbe molto più semplicemente fare il prodotto $9 \cdot 10^4 \times 4 \cdot 10^2 \times 4 = 144 \cdot 10^6 \simeq 10^8$.

Questi calcoli sono anche utili per un rapido controllo dei risultati ottenuti con il calcolo usuale, fatto a mano o con un calcolatore tascabile. Se avessimo ottenuto moltiplicando $86400 \times 365 \times 4$ il risultato 126144000, l'ordine di grandezza 10^8 ne confermerebbe la sostanziale correttezza.

Nelle tabelle della pagina seguente sono riportati, in termini di potenze di 10, i valori di alcune grandezze particolarmente significative.

Come abbiamo accennato nel paragrafo precedente, anche la difficoltà di scrivere un numero ad esempio maggiore di 100 con sole due cifre significative può essere superata facendo uso delle potenze di 10.
Si può infatti scrivere

$$A = 1,2 \cdot 10^2 \ cm^2$$

TABELLE 9.1

Le masse nell'Universo
(in chilogrammi)

10^{54}	massa dell'Universo conosciuto
10^{30}	massa del Sole
10^{24}	massa della Terra
10^{0} : 1 kg	massa del cilindro campione di Sèvres
10^{-26}	massa di un atomo
10^{-30}	massa dell'elettrone

Le distanze nell' Universo
(in metri)

10^{27}	
	Limite dell'universo
10^{24}	
10^{21}	Diametro della nostra Galassia
10^{18}	Stella più vicina (Proxima Centauri)
	Anno-luce (distanza percorsa dalla luce in un anno)
10^{15}	
	Diametro dell'orbita di Plutone
10^{12}	
	Distanza Terra - Sole
10^{9}	Distanza Terra - Luna
	Raggio terrestre
10^{6}	Distanza Palermo - Milano
10^{3}	1 chilometro
$1 = 10^{0}$	1 metro altezza di una persona
10^{-3}	1 millimetro
10^{-6}	1 micron
	Dimensione di un virus
10^{-9}	
	Diametro dell'atomo di idrogeno
10^{-12}	
	Diametro di un nucleo atomico
10^{-15}	

Intervalli di tempo nell' Universo
(in secondi)

10^{18}	Età dell'Universo
	Età della Terra
10^{15}	
	Età dell'umanità
10^{12}	Età delle piramidi
10^{9}	Vita umana
	1 anno: $3{,}156 \times 10^{7}$ s
10^{6}	1 giorno: $8{,}64 \times 10^{4}$ s
10^{3}	Tempo impiegato dalla luce per il percorso Sole - Terra
1	Battito cardiaco
10^{-3}	Periodo di un'onda sonora
10^{-6}	Periodo di un'onda radio
10^{-9}	
10^{-12}	
10^{-15}	Periodo di una vibrazione atomica
10^{-18}	Tempo impiegato dalla luce per percorrere un diametro atomico
10^{-21}	
10^{-24}	Tempo impiegato dalla luce per percorrere un diametro nucleare

Un altro esempio interessante riguarda il modo di scrivere la distanza media Terra-Sole: essa vale circa 150 *milioni* di *kilometri*. Se si scrive $150000000 km$, vuol dire che tutte le cifre sono significative e dal *centomila* all'*unità* valgono *zero*. Scrivendo invece $150 \cdot 10^6 km$ oppure $1,50 \cdot 10^8 km$ le cifre significative sono solo tre; in questo modo si evita di indicare, sia pure con degli *zeri*, cifre sul cui valore non si ha la minima certezza.

D9.2 Si trovi l'ordine di grandezza di:

a. l'altezza dell'uomo;
b. l'altezza delle piante di cocco;
c. l'altezza del monumento a Dhagaxtuur;
d. la lunghezza delle mosche;
e. lo spessore di uno scellino;
f. lo spessore di un foglio di carta di quaderno;
g. la distanza tra Mogadiscio e Afgoi;
h. il numero di *secondi* contenuto in 1 *ora*, in 1 *giorno*, in 1 *anno*, in 1 *secolo*;
i. il numero di abitanti di Mogadiscio, quello di tutta la Somalia, quello di tutta la Terra;
l. il volume di una stanza;
m. il numero di pacchetti di sigarette che può essere contenuto in quella stanza.

Per scrivere un numero mediante le potenze di 10 si possono anche usare dei prefissi. Alcuni di questi, ad esempio kilo- (che significa 10^3), centi- (10^{-2}) e milli- (10^{-3}), sono così usati che le parole kilogrammo, kilometro, centimetro e millimetro sono ormai entrate nel linguaggio comune.

Qui di seguito è riportata una tabella con tutti i prefissi per le potenze di 10.

TABELLA 9.2

Multiplo	Prefisso	Simbolo
10^{18}	exa-	E
10^{15}	peta-	P
10^{12}	tera-	T
10^{9}	giga-	G
10^{6}	mega-	M
10^{3}	kilo-	k
10^{2}	etto-	h
10^{1}	deca-	da
10^{-1}	deci-	d
10^{-2}	centi-	c
10^{-3}	milli-	m
10^{-6}	micro-	μ
10^{-9}	nano-	n
10^{-12}	pico-	p
10^{-15}	femto-	f
10^{-18}	atto-	a

10. Rappresentazione dei risultati sperimentali e loro analisi

Studiando i fenomeni naturali si presenta continuamente la necessità di mettere in relazione tra loro due o più grandezze; come abbiamo visto queste relazioni possono essere espresse alle volte in termini matematici, altre volte solo mediante tabelle o grafici.

Per individuare i pregi e le insufficienze di questi metodi, prenderemo in esame i dati sperimentali raccolti nel corso di una semplice esperienza, rappresentandoli in ciascuno dei modi prima indicati.

Consideriamo un recipiente cilindrico graduato nel quale viene raccolta l'acqua che esce da un rubinetto non ben chiuso (fig. 10.1).

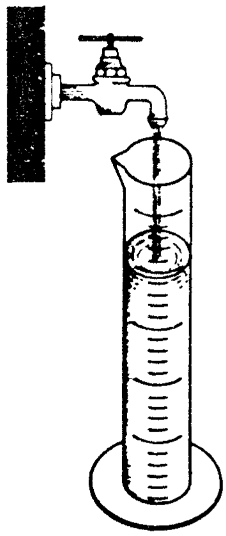


Figura 10.1

È facile osservare che al passare del tempo t, aumenta il livello h del liquido nel recipiente. Abbiamo quindi due variabili, t ed h: la prima possiamo considerarla *indipendente* e la seconda *dipendente* (la seconda varia *in con-*

seguenza della variazione della prima). Si può misurare t mediante un orologio e h mediante la graduazione incisa sul cilindro. Se quando cominciamo a contare i *secondi* il recipiente è vuoto, avremo che per $t = 0$ è $h = 0$. Rilevando i valori delle altezze ogni *minuto* potremo costruire la tabella 10.1. Si noti che, per una distrazione dell'operatore, la misura dopo 5 *minuti* non è stata rilevata.

TABELLA 10.1

t (*secondi*)	h (*mm*)
0	0
60	4
120	8
180	12
240	16
300	–
360	24
420	28
480	32

Questa presentazione dei risultati sperimentali è corretta e completa e, in questo caso particolare, è anche facile scorgere la proporzionalità tra h e t, dato che il livello del liquido aumenta sempre di $4mm$ ogni *minuto*. Non sempre però quest'ultima informazione è facilmente ricavabile da una tabella: è infatti in generale difficile cogliere, dalla lettura di una tabella, le eventuali regolarità che essa può presentare. L'andamento di un fenomeno, è in generale meglio individuato mediante una rappresentazione grafica.

Per ottenerla riportiamo i risultati della tabella 10.1 in un sistema di assi cartesiani ponendo sull'*asse delle ascisse* (come si fa di solito) i valori della variabile indipendente t e sull'*asse delle ordinate* i valori della variabile

dipendente h. Ad ogni coppia di risultati (t, h) della tabella corrisponderà nel grafico un punto. Le scale sui due assi vanno scelte in modo che tutti i risultati siano rappresentabili nel grafico e che le sue dimensioni (larghezza e altezza) siano le più grandi possibili restando però non molto diverse tra loro (un grafico molto largo e schiacciato è poco utilizzabile). Non è tuttavia necessario che i valori sui due assi partano entrambi da *zero*.
Dai dati della tabella 10.1 si ottiene la serie di punti mostrati in fig. 10.2.

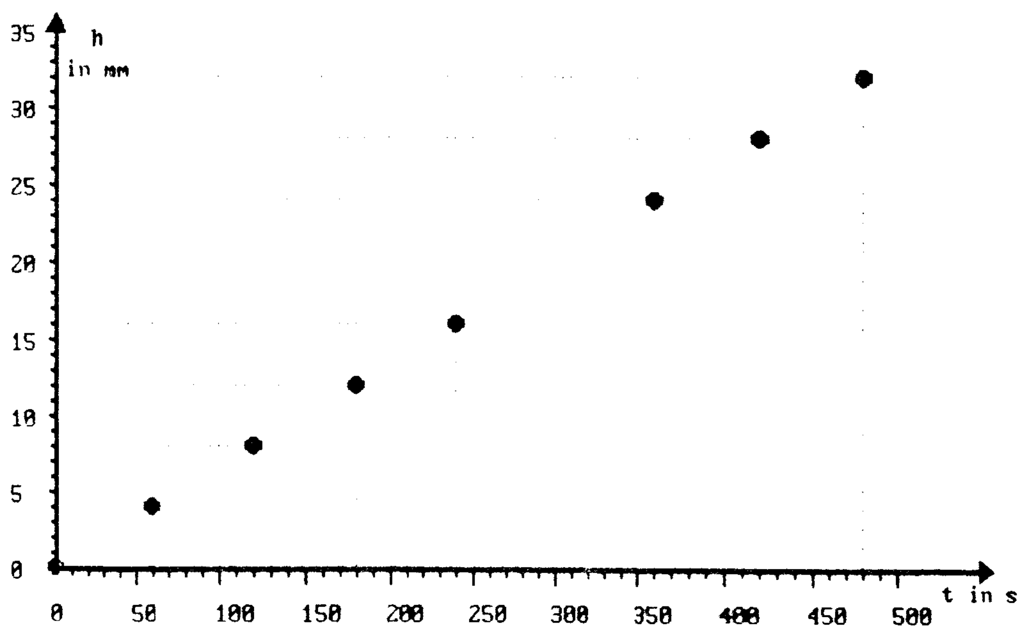


Figura 10.2

Eseguendo un maggior numero di osservazioni successive a brevissimo intervallo di tempo fra loro sarebbe possibile passare dalla serie discreta di punti ad una serie praticamente continua di punti, quale è quella che si ottiene, ad esempio, raccordando con un tratto continuo i diversi punti (vedi fig. 10.3). L'andamento di h con l'aumentare di t è così meglio visualizzato ed è possibile trovare valori di h corrispondenti a valori di t diversi da quelli riportati nella tabella 10.1. Ad es. per $t = 300s$, h risulta uguale a $20mm$, che è il dato mancante.

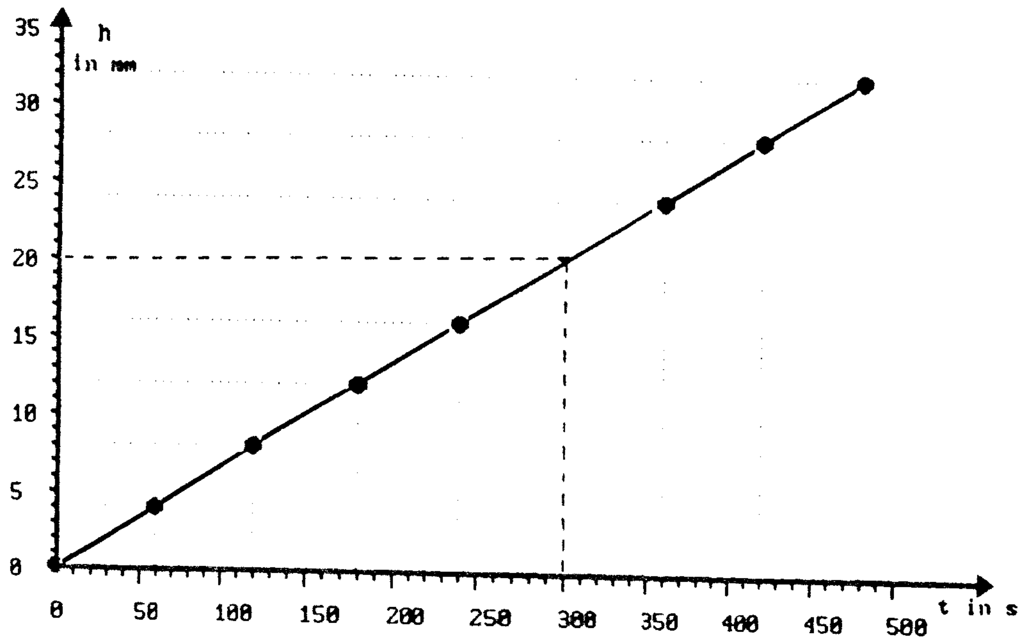


Figura 10.3

Il fatto che i dati sperimentali si trovino su di una retta che passa per l'origine delle coordinate $(0,0)$ ci permette di scrivere la relazione tra l'altezza h dell'acqua e il tempo t trascorso mediante una semplice relazione analitica, e cioè

$$h = k \cdot t \tag{10.1}$$

Per trovare il valore del coefficiente angolare k è sufficiente imporre che la retta (10.1) passi per uno dei punti della tabella 10.1, ad esempio per il punto di coordinate $(480, 32)$. Abbiamo

$$32\ mm = k \cdot 480\ s$$

da cui

$$k = (32\ mm)/480\ s = 0,066\bar{6}\ mm/s \simeq 0,067\ mm/s$$

I dati sperimentali della tabella 10.1 possono essere quindi rappresentati dalla relazione

$$h = (0,067\ mm/s) \cdot t \qquad 10.2$$

Infatti se nella 10.2 inseriamo ad esempio il valore $t = 360s$ otteniamo $h = 24mm$, che è il dato riportato nella tabella.

Il caso precedentemente studiato è abbastanza semplice e... fortunato; in generale infatti la situazione è molto più complessa.

Supponiamo ad esempio di ripetere le misure nell'intervallo compreso tra $60s$ e $120s$ eseguendo una misura ogni $5s$.

I risultati ottenuti sono riportati nella tabella 10.2 e il grafico che si

TABELLA 10.2

t (*secondi*)	h (mm)
60	4
65	4
70	5
75	5
80	5
85	6
90	6
95	6
100	7
105	7
110	7
115	8
120	8

ottiene è mostrato nella **fig.10.4**.

Unendo tra di loro i vari punti otterremmo una spezzata (linea tratteggiata in fig. 10.4) che in questo caso non ha significato fisico; infatti non si può pensare che il livello dell'acqua aumenti 'a scatti'.

Come dobbiamo comportarci?

Analizziamo come sono state eseguite le misure sperimentali.

Osserviamo prima di tutto che non si tratta di misure ripetute. Sono necessarie due letture molto rapide ed il più possibile contemporanee, una sull'orologio per determinare l'istante di tempo e l'altra sulla scala graduata per valutare l'altezza raggiunta dall'acqua. Dobbiamo allora stimare, per l'una e per l'altra lettura, l'errore che possiamo commettere. Per quanto riguarda la misura del tempo, usando un orologio in grado di segnare i *secondi*, l'intervallo di incertezza $2d$, se la misura viene fatta con una certa attenzione, non dovrebbe superare i 2 *secondi* (un po' più grande della sensibilità dello strumento).

I vari tempi saranno quindi $(60 \pm 1)s$, $(120 \pm 1)s$ (l'errore assoluto è sempre $1s$, mentre l'errore relativo continua a diminuire: $3,3\%$, $1,6\%$, ecc.).

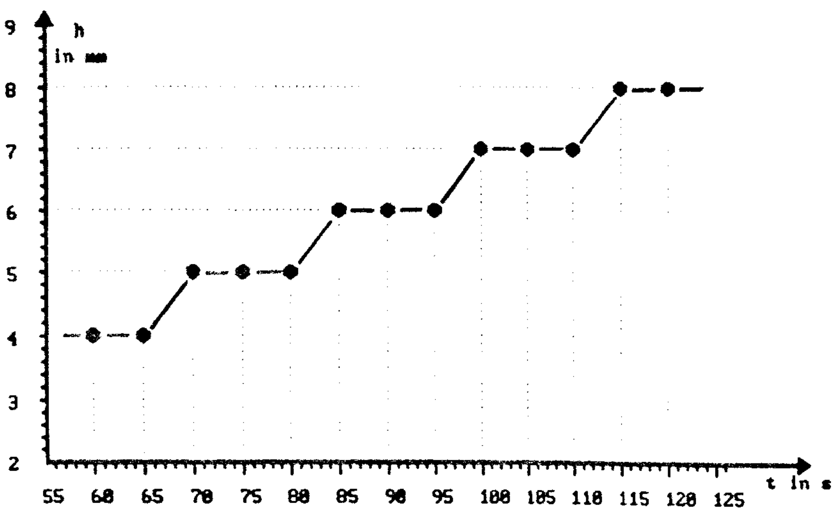


Figura 10.4

Per la valutazione dell'altezza del liquido nel cilindro dobbiamo tenere presente varie cause di errore, quali: la forma concava della superficie dell'acqua vicino alle pareti, il non allineamento dell'osservatore con il livello raggiunto dall'acqua, la trasparenza dell'acqua che la rende non ben visibile (vedi fig. 10.5). Possiamo valutare in due divisioni l'intervallo d'incertezza nella determinazione dell'altezza.

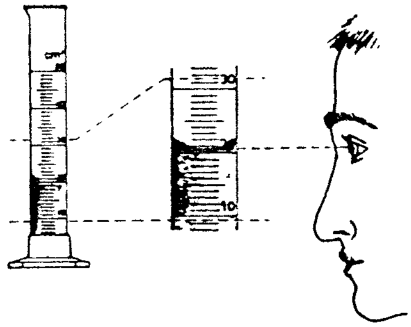


Figura 10.5

Con l'indicazione delle incertezze i dati della tabella 10.2 diventano quelli mostrati nella tabella 10.3.

Volendo riportare in grafico i risultati della tabella 10.3 dovremo tener conto del fatto che ogni coppia di dati non individua più un punto, ma un

TABELLA 10.3

t (*secondi*)	h (*mm*)
60 ± 1	4 ± 1
65 ± 1	4 ± 1
70 ± 1	5 ± 1
75 ± 1	5 ± 1
.....	.....
120 ± 1	8 ± 1

rettangolo avente il punto della tabella 10.3 come centro. Ogni punto all'interno del rettangolo rappresenta una coppia di valori accettabili per la nostra misura.

In pratica quando si riporta l'errore su un grafico si preferisce individuarlo mediante due segmenti ortogonali (barre di errore) limitati da sbarrette perpendicolari, come nell'esempio di fig. 10.6.

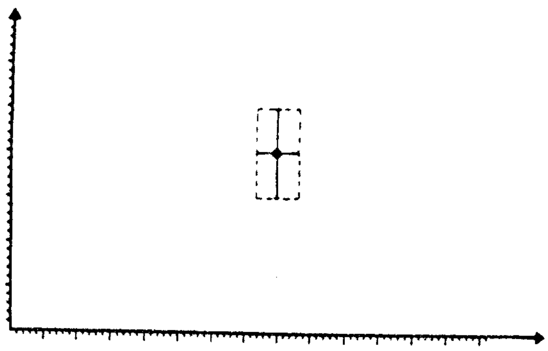


Figura 10.6

Si avrà pertanto, nel nostro caso, una rappresentazione del tipo di quella di fig. 10.7, dove è ben individuabile l'incertezza $\pm 1mm$ sulla scala delle ordina-

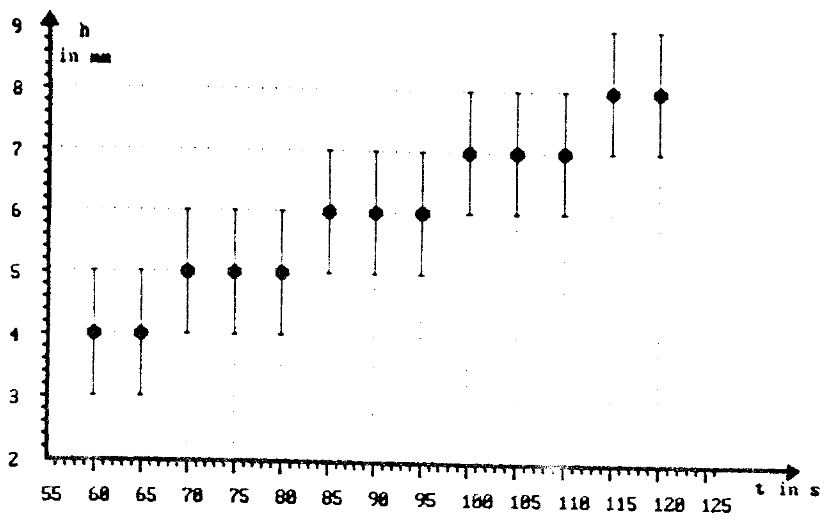


Figura 10.7

te (l'errore relativo è rilevante), mentre è poco individuabile l'incertezza $\pm 1s$ sulle ascisse (l'errore relativo è molto piccolo).

Per rappresentare il nostro fenomeno si può quindi scegliere *una qualunque linea continua* che, pur non passando necessariamente per tutti i punti, intersechi le loro barre di errore.

Proviamo a tracciare la retta precedentemente trovata, la cui equazione è data dalla relazione 10.2.
Per $t = 55s$ abbiamo $h = (0,067\ mm/s) \cdot 55s = 3,685mm \simeq 3,7mm$ e per $t = 125s$ abbiamo $h = 8,4mm$.

Disegnamo allora la retta che passa per i punti $A(55;3,7)$ e $B(125;8,4)$ (vedi fig. 10.8, retta 1). Tale retta interseca alcuni punti sperimentali, ma passa sotto o sopra altri. Tuttavia in questi ultimi casi la retta è interna alla barra dell'errore. La retta 1 quindi *può rappresentare* i dati sperimentali *nei limiti dell'errore*. Ma anche la retta 2 potrebbe andare bene, così come la 3 e molte altre.
Quale dobbiamo scegliere?

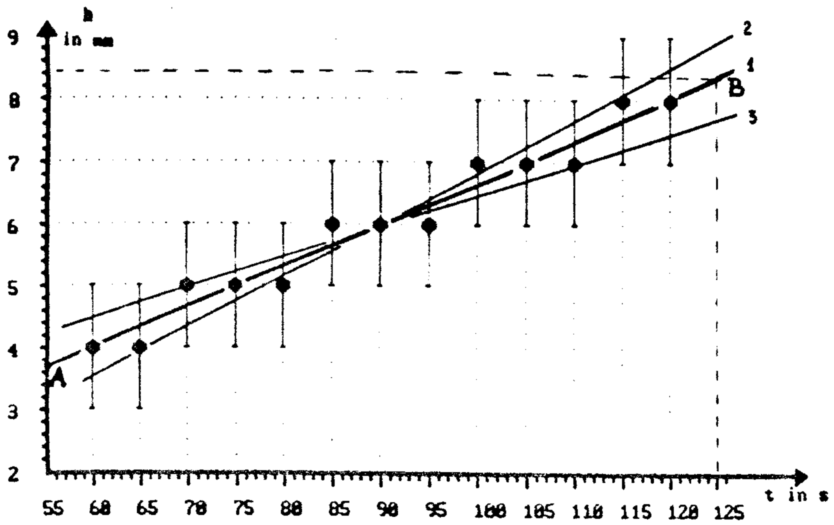


Figura 10.8

Un criterio è quello di scegliere come retta migliore quella che interseca il maggior numero di punti sperimentali, o meglio quella che passa 'più vicino' ai punti sperimentali.

La teoria degli errori (vedi Appendice) fornisce un metodo analitico per trovare la linea *più probabile*. Si avranno occasioni nei corsi superiori di studiare e applicare tale metodo.

E10.1 Un oggetto si muove di moto rettilineo uniforme su di una retta. Si sono misurate le posizioni dell'oggetto ogni $10,0s$ ottenendo i seguenti risultati

$t(s)$	0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0
$x(cm)$	0	1,5	4,5	5,7	8,5	9,3	12,7

Si riportino i dati sperimentali in un grafico e si disegni una possibile retta che rappresenti tali dati.
Qual è il valore della velocità dell'oggetto?

E10.2 Una pallina rotola lungo un piano inclinato. Si sono misurate le posizioni della pallina ogni $1,0s$ ottenendo i seguenti risultati

$t(s)$	0	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
$x(cm)$	0	9	43	97	157	243	359

Assumendo una legge di caduta del tipo $x = \frac{1}{2}at^2$ si renda lineare tale relazione e, dopo aver costruito il grafico opportuno, si determini il valore più probabile per l'accelerazione a.

APPENDICE - Cenni di teoria degli errori

Abbiamo accennato nel § 5 ad alcune cause che rendono non riproducibili i risultati di una misura. Queste però possono essere numerosissime. Di solito si distinguono gli errori che si commettono in una misura in due categorie: *errori sistematici* ed *errori casuali* (o accidentali). Gli errori sistematici sono quelli dovuti o a difetti di costruzione degli strumenti o a metodi di misura errati. Tali errori influiscono sul risultato della misura sempre nel medesimo verso, cioè portano a risultati sempre in difetto o sempre in eccesso rispetto a quelli che si avrebbero in loro assenza. Ad esempio se misuriamo delle lunghezze con un 'metro' che per qualche difetto di costruzione è lungo solo $99cm$, ogni volta che facciamo una misura troveremo un risultato più grande di quello che otterremmo con un 'metro' lungo esattamente $100cm$. Gli errori sistematici possono essere eliminati solo quando si arrivi a conoscerne la causa e per individuarla bisogna poter eseguire la misura almeno con due strumenti o due metodi diversi.

Gli errori casuali sono quelli dovuti a errori casualmente ed imprevedibilmente commessi da chi esegue la misura o a variazioni non volute e non controllabili delle condizioni ambientali nelle quali ha luogo la misura. In questo caso si può ritenere ugualmente probabile trovare valori più grandi o più piccoli di quello vero. Tali errori non possono mai essere totalmente eliminati. Se la misura però viene fatta con uno strumento tale per cui l'incertezza dovuta alla sua bassa sensibilità è molto più grande della dispersione dovuta agli errori casuali, questi non vengono registrati dallo strumento; ripetendo diverse volte la misura si trova sempre lo stesso risultato ed è corretto dire che l'incertezza della misura è quella dovuta alla sensibilità dello strumento usato per eseguirla ($d = S/2$).

Nel caso in cui invece la dispersione dovuta agli errori casuali è molto maggiore dell'incertezza delle singole misure, per stabilire in un modo più corretto di quello usato nel § 5 il valore e l'incertezza della grandezza misurata bisogna far ricorso alla *Teoria degli errori.*

È questa una teoria matematica abbastanza complessa e che può essere applicata *solo* quando il numero di misure è *abbastanza grande* (> 10). Ci limiteremo qui a riportare i risultati più importanti, cercando di darne una giustificazione con un semplice esempio.

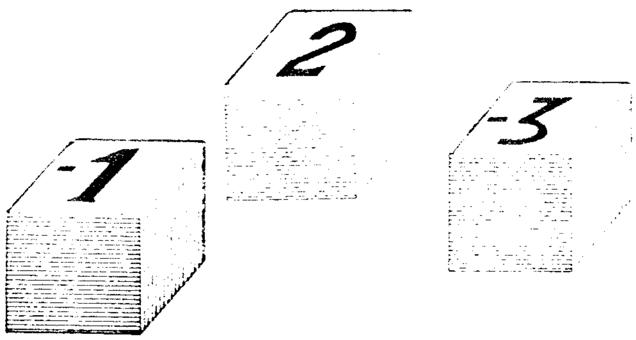
1. Il *valore 'più probabile'* per la grandezza che si sta misurando è il *valore medio dei risultati ottenuti.* Indicando cioè con x_1, x_2, ..., x_n il valore delle n misure (si trascura il valore dell'incertezza), *il valore più probabile* $\overline{x}$ è dato da

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \qquad A.1$$

Per giustificare questo risultato proviamo a fare un semplice 'esperimento'. Prendiamo tre dadi e sulle sei facce di ciascun dado scriviamo i numeri

$$-3, \quad -2, \quad -1, \quad 1, \quad 2, \quad 3$$

Gettiamo su un tavolo i tre dadi, facciamo la *somma algebrica* dei valori che compaiono sulle tre facce superiori e aggiungiamo il valore ottenuto ad un numero fisso, ad esempio 87 (vedi fig. A.1).



$$S = (-1) + (2) + (-3) = -2$$
$$x_1 = 87 + (-2) = 85$$

Figura A.1

Ripetiamo per 10 volte il lancio. I risultati ottenuti sono i seguenti

TABELLA A.1

$x_1 = 85$	$x_2 = 82$	$x_3 = 87$	$x_4 = 91$	$x_5 = 88$
$x_6 = 89$	$x_7 = 81$	$x_8 = 84$	$x_9 = 83$	$x_{10} = 89$

Nell'esperimento che abbiamo eseguito possiamo *supporre* che ogni dado *simuli* una possibile *causa di errore* in grado di influire sul 'risultato' della misura, aumentandone o diminuendone il valore in modo *casuale* di una quantità 1 o 2 o 3. Il numero fisso 87 rappresenta quindi il valore 'vero' della grandezza che vogliamo misurare e i valori ottenuti $x_1, x_2, ..., x_{10}$ i risultati delle singole misure.

Nel caso del nostro 'esperimento' troviamo per il valore medio il valore

$$\bar{x} = \frac{85 + 82 + 87 + 91 + 88 + 89 + 81 + 84 + 83 + 89}{10} = \frac{859}{10} = 85,9$$

Tale valore non coincide con il valore vero ma è abbastanza vicino ad esso.

Proviamo ora a eseguire altri 20 lanci. I valori trovati, includendo anche quelli dei primi 10 lanci, sono

TABELLA A.2

85	82	87	91	88	89	81	84	83	89
89	89	85	90	81	93	92	87	84	89
86	89	90	91	88	83	89	87	88	86

Il valor medio che si ottiene risulta ora

$$\bar{x} = \frac{1}{30}(85 + 82 + ... + 86) = \frac{2622}{30} = 87,4$$

Tale valore non coincide con il valore vero ma è molto vicino ad esso. Anzi si potrebbe verificare che quanti più lanci si fanno tanto più piccola è la differenza tra il valor medio dei risultati e il valore 'vero'.

Il valore medio dei risultati *non* è il valore vero ma un valore 'probabile', tanto più vicino al valore vero quante più misure si fanno.

2. *Per valutare l'incertezza della misura*, cioè l'intervallo di valori tra i quali dovrebbe essere compreso il valore 'vero' si deve procedere nel seguente modo:

si determina per ogni risultato la differenza σ dal valore medio (detta comunemente *scarto*)

$$\sigma_1 = x_1 - \bar{x}$$

$$\sigma_2 = x_2 - \bar{x}$$

....

$$\sigma_n = x_n - \bar{x}$$

e si calcola lo *scarto quadratico medio*

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + ... + \sigma_n^2}{n}} \qquad A.2$$

Come si può verificare, lo scarto quadratico medio non dipende dal numero di misure fatte; esso è un indice della *dispersione* dei risultati e dipende *solo* dal numero e dal tipo delle cause di errore.

Come abbiamo invece visto nell'esperimento con i dadi, la differenza tra il valore medio dei risultati e il valore vero diminuisce all'aumentare del numero n delle misure.

La teoria degli errori ci dice che tale differenza dovrebbe essere minore di 2ϵ essendo

$$\epsilon = \frac{2\sigma}{\sqrt{n-1}}$$

cioè il valore 'vero' x è *quasi sicuramente* compreso nell'intervallo

$$\bar{x} - \frac{2\sigma}{\sqrt{n-1}} < x < \bar{x} + \frac{2\sigma}{\sqrt{n-1}} \qquad A.3$$

Il risultato di una serie di n misure ripetute può quindi essere scritto nella forma

$$x = \bar{x} \pm \epsilon \qquad \text{dove} \qquad \epsilon = \frac{2\sigma}{\sqrt{n-1}} \qquad A.4$$

Proviamo a verificare queste previsioni sui risultati del nostro precedente 'esperimento'.

Considerando dapprima le prime 10 'misure' abbiamo

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
85	−0,9	0,81
82	−3,9	15,21
87	1,1	1,21
91	5,1	26,01
88	2,1	4,41
89	3,1	9,61
81	−4,9	24,01
84	−1,9	3,61
83	−2,9	8,41
89	3,1	9,61
859	0,0	102,90

$$\bar{x} = \frac{859}{10} = 85,9 \simeq 86$$

In base alla $A.2$ possiamo scrivere

$$\sigma = \sqrt{\frac{102,9}{10}} = 3,2$$

$$\epsilon = \frac{2\sigma}{\sqrt{n-1}} = \frac{6,4}{3} = 2,1\bar{3} \simeq 2$$

e quindi, per la $A.4$,

$$x = 86 \pm 2 \qquad A.5$$

che comprende il valore 'vero' 87.

Ripetendo i calcoli per i 30 valori della tabella $A.2$ si ottiene

$$\sigma = 2,94 \qquad \epsilon = \frac{2\sigma}{\sqrt{29}} = 1,1 \simeq 1$$

e quindi

$$x = 87,4 \pm 1 \qquad A.6$$

che comprende il valore 'vero' 87.

Il risultato $A.6$ è ***più preciso*** del risultato $A.5$ in quanto ottenuto con un *numero maggiore* di misure ripetute: ϵ diminuisce all'aumentare di n.
Si osservi invece che lo scarto quadratico medio σ *non dipende* sensibilmente dal *numero* di misure ripetute.

Nella tabella $A.3$ sono riportati i risultati di 100 lanci di 3 dadi uguali a quelli precedentemente usati. I valori ottenuti sono stati quindi aggiunti al numero 46. Per ogni gruppo di 10 lanci sono riportati (ultime due colonne) il valor medio $\bar{x}$ e lo scarto quadratico medio σ. Nell'ultima sono riportati infine il valore medio relativo a tutte le 100 misure e il relativo scarto quadratico medio.

DA.1 Si discutano i risultati della tabella $A.3$.

Applichiamo ora la teoria degli errori alle misure della lunghezza della automobile riportate nella tabella 5.1.

x_i	$(x_i - \bar{x}) \times 10^3$	$(x_i - \bar{x})^2 \times 10^6$
4,256	6	36
4,251	1	1
4,269	19	361
4,221	−29	841
4,230	−20	400
4,320	10	100
4,249	−1	1
4,252	2	4
4,261	11	121
4,254	4	16
42,503		1881

TABELLA A.3

											$\overline{X}$	σ
52	45	47	52	41	46	46	45	51	49	---->	47.4	3.38
50	45	48	47	46	45	51	46	51	51	---->	48	2.4
48	45	48	44	47	47	44	45	51	49	---->	46.8	2.18
45	48	43	45	51	44	41	40	50	46	---->	45.3	3.4
47	41	41	47	46	43	47	42	49	40	---->	44.3	3.06
50	51	45	42	41	51	51	47	51	42	---->	47.1	4.03
42	46	47	45	46	51	44	42	52	52	---->	46.7	3.6
48	44	44	42	47	44	47	47	46	47	---->	45.6	1.85
47	46	46	46	46	43	49	49	51	47	---->	47	2.09
44	47	47	43	41	43	44	43	42	40	---->	43.4	2.15
											46.16	3.22

$$\bar{x} = \frac{42,503}{10} \simeq 4,25 \qquad \sigma = \sqrt{\frac{1881}{10}} \cdot 10^{-3} = 0,0137$$

$$\epsilon = 2\frac{0,0137}{\sqrt{9}} = 0,009$$

Per quanto abbiamo visto, la lunghezza dell'automobile risulta

$$l = (4,250 \pm 0,009)\ m \simeq (4,25 \pm 0,01)\ m$$

L'intervallo di incertezza nella misura risulta quindi di circa $2cm$.

Tale intervallo è minore di quello ottenuto nel § 5 ($2\delta = 5cm$) utilizzando la dispersione massima.

Tuttavia se il numero di misure è piccolo o se l'incertezza dovuta alla sensibilità dello strumento non è trascurabile rispetto alla dispersione dei risultati, *non ha significato applicare la teoria degli errori* e ci si deve limitare al risultato ottenuto mediante la 5.1.

Ritornando alle misure della lunghezza dell'automobile osserviamo che il risultato finale della misura è stato ottenuto con un'incertezza di $\pm 1cm$. La fatica che abbiamo fatto per apprezzare i *millimetri* nelle singole misure è stata quindi praticamente inutile!

In generale è inutile utilizzare strumenti con una sensibilità S molto più piccola della dispersione dei risultati dovuta agli errori casuali, soprattutto tenendo conto che il costo di uno strumento aumenta notevolmente con l'aumentare della sua sensibilità.

Prima di finire ci preme ancora una volta sottolineare che *nessun procedimento di misura, per quanto raffinato, e nessun metodo di analisi, per quanto elaborato, sono in grado di determinare il valore vero di una grandezza e che pertanto il risultato di una misura è sempre un valore approssimato di quello vero.* L'approssimazione è tanto migliore quanto più perfezionato è il metodo di misura impiegato e più accurato è il metodo di analisi dei risultati.

CAPITOLO II

STRUMENTI DI MISURA E LORO USO

1. Premessa

Qualsiasi relazione tra grandezze fisiche per passare dallo stato di semplice ipotesi allo stato di legge fisica deve essere confermata da esperimenti, cioè verificata dai risultati di misure opportune. Poiché le misure si fanno con gli strumenti, la loro corretta costruzione, la loro scelta, il modo di usarli, la lettura dei risultati che essi forniscono sono tutti problemi di importanza fondamentale.

Questa affermazione è vera non solo nel mondo scientifico ma anche nella vita di ogni giorno. Un orefice per vendere l'oro non userebbe mai la bilancia che usa al mercato il venditore di mais. Voi stessi non pensereste certo di misurare con un 'metro' la distanza tra Mogadiscio e Afgoi o lo spessore di un foglio di carta.

D1.1 Si discutano e si giustifichino le affermazioni precedenti.

La scelta dello strumento è quindi strettamente legata alla qualità della misura che si vuole fare e quindi allo scopo per cui si effettua la misura.

Bisogna inoltre tener presente che se la misura che si vuole eseguire è una misura indiretta essa può richiedere l'uso di strumenti diversi; come abbiamo visto l'incertezza finale nella misura dipende dalla misura meno precisa e può quindi essere inutile utilizzare per alcune misure strumenti molto sensibili se per altre misure si è costretti ad usare uno strumento poco sensibile.

Tuttavia in alcuni casi si possono utilizzare degli artifici che permettono

di migliorare la precisione di una misura senza dover usare strumenti più precisi e quindi più costosi.
La bontà del risultato di una misura può quindi non dipendere solo dalla qualità degli strumenti a disposizione, ma anche dalla *capacità* e dalla *fantasia* dello sperimentatore.

Ad esempio se vogliamo conoscere lo spessore di un foglio di un libro e disponiamo solo di uno strumento con sensibilità $1mm$, possiamo misurare lo spessore di 100 fogli (pensando che siano tutti uguali) e dividere il risultato per 100.

Se facendo la misura dello spessore di 100 fogli abbiamo ottenuto $(1,25 \pm 0,05)cm$ possiamo dire che lo spessore di un foglio è

$$(\frac{1,25}{100} \pm \frac{0,05}{100})\ cm = (0,0125 \pm 0,0005)\ cm$$

con un intervallo di incertezza di $0,001cm$.

Osserviamo che in questo modo il valore dell'intervallo di incertezza del risultato è 100 volte *più piccolo* della sensibilità dello strumento usato!!

2. Misure di lunghezza

a. Il regolo

Questo strumento è costituito da un'asta rigida che riproduce l'unità di misura di lunghezza e i suoi sottomultipli tramite incisioni regolari lungo tutta la sua estensione. Generalmente la lunghezza della più piccola suddivisione è di $1mm$. A seconda della loro lunghezza i regoli vengono in genere chiamati: 'metro', 'doppio decimetro', ecc..

Nei regoli di buona qualità il materiale con cui sono costruiti (indeformabile nel tempo) e la regolarità con cui vengono tracciate le incisioni permetterebbero una sensibilità anche maggiore eseguendo incisioni intermedie. Tuttavia non conviene aumentare troppo il numero delle suddivisioni per ragioni di chiarezza e comodità di lettura. Non va dimenticato inoltre che rimane sempre la difficoltà di individuare con precisione sul regolo la posizione di inizio e fine dell'oggetto da misurare.

Nella fig. 2.1 è mostrata la corretta posizione dell'osservatore per evitare errori sistematici di *parallasse* nella misura di una lunghezza mediante un regolo.

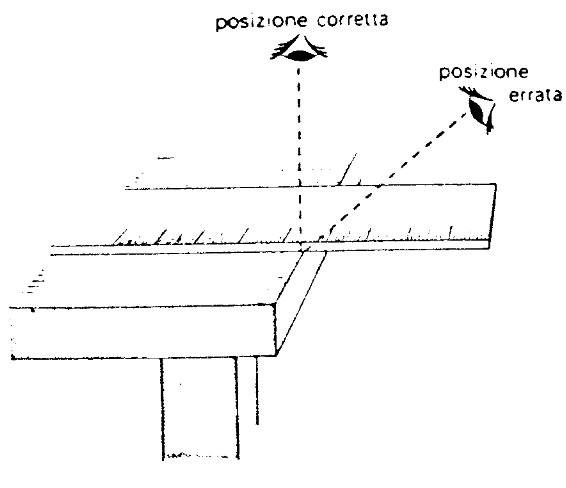


Figura 2.1

Per raggiungere incertezze di misura inferiori al *millimetro* sono stati costruiti altri strumenti che permettono di stabilire con maggior precisione le dimensioni dell'oggetto da misurare e di effettuare la lettura su scale ausiliarie sufficientemente grandi da essere chiare e comode. Il più comune di questi strumenti è il calibro.

b. Il calibro

Il calibro (fig. 2.2) è costituito da un regolo rigido opportunamente sagomato, sul quale può scorrere un cursore C. Il calibro può essere usato per misurare:

i. le dimensioni esterne (a) di un oggetto mediante le ganasce A
ii. le dimensioni interne (b) di una cavità per mezzo delle ganasce B
iii. la profondità di un foro (d) mediante l'assicella D solidale con il cursore.

La scala graduata principale P è divisa in *millimetri* ed è lunga $20cm$;

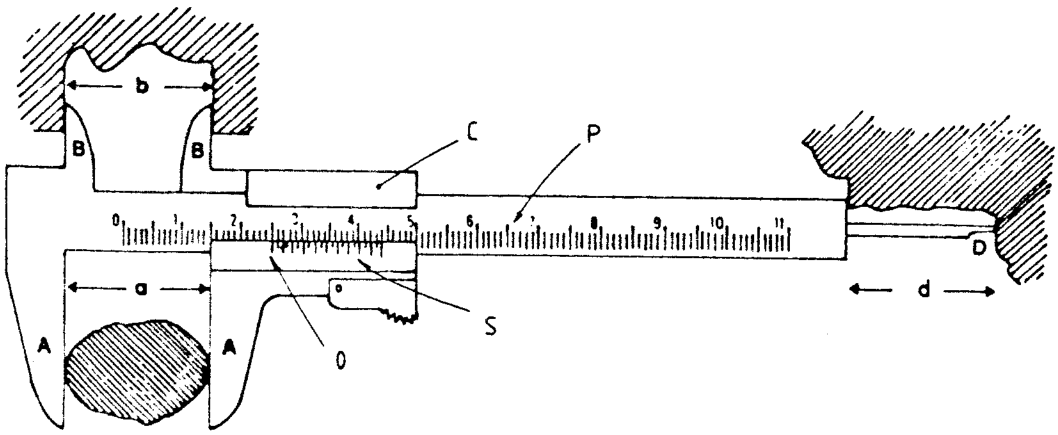


Figura 2.2

quindi il calibro ha lo stesso campo di variabilità o *portata* di un 'doppio decimetro'. La capacità di apprezzare la frazione di *millimetro* è data dalla scala graduata ausiliaria S, chiamata *nonio* o *verniero*, incisa sul cursore.

Quando il calibro è chiuso, l'indice 0 della scala ausiliaria (cioè la prima incisione della scala) coincide con lo zero della scala principale. In questo modo la lunghezza a, b oppure d che si vuole misurare coincide con la distanza tra lo zero della scala principale e l'indice 0 della scala del nonio.

Pertanto quando si vuole eseguire una misura (per esempio lo spessore di una lamina o il diametro esterno di un tubo) si serra l'oggetto tra le ganasce A e si legge sulla scala principale il numero corrispondente all'indice 0 del nonio. Se l'indice 0 coincide con una incisione della scala principale, il valore di tale incisione fornisce direttamente il valore della lunghezza da misurare. Se invece, come accade in generale, l'indice 0 si trova in una posizione che non coincide esattamente con una incisione, mediante il nonio è possibile individuare la posizione dell'indice tra due incisioni successive.

Il nonio, costruito per apprezzare il *ventesimo di millimetro*, è costituito da una serie di 21 incisioni equidistanti tracciate in uno spazio di $19mm$ oppure di $39mm$ o, in alcuni casi, di $59mm$.

Lo strumento che verrà usato in laboratorio è un calibro ventesimale nel quale le 21 incisioni sono tracciate in uno spazio di $39mm$ (vedi fig. 2.3).

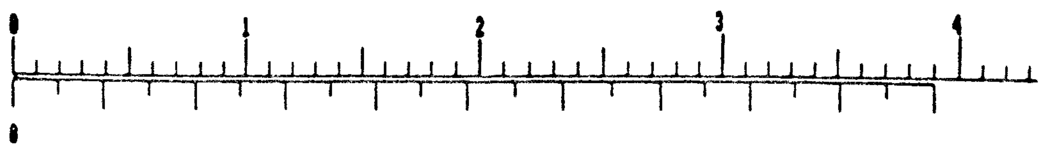


Figura 2.3

In questo caso l'intervallo tra due incisioni successive del nonio è

$$\frac{39\ mm}{20} = 1,95\ mm$$

Pertanto se, ad esempio, la seconda incisione del nonio (cioè quella successiva all'indice 0) coincide con una incisione della scala principale (vedi fig. 2.4a), la prima incisione del nonio, cioè l'indice 0, risulterà spostato a destra di $0,05mm$ rispetto all'incisione immediatamente superiore della scala principale.

Se invece la terza incisione del nonio coincide con una incisione della scala principale (vedi fig. 2.4b), l'indice 0 del nonio risulterà spostato a destra di $0,1mm$ rispetto all'incisione della scala principale, e così via.

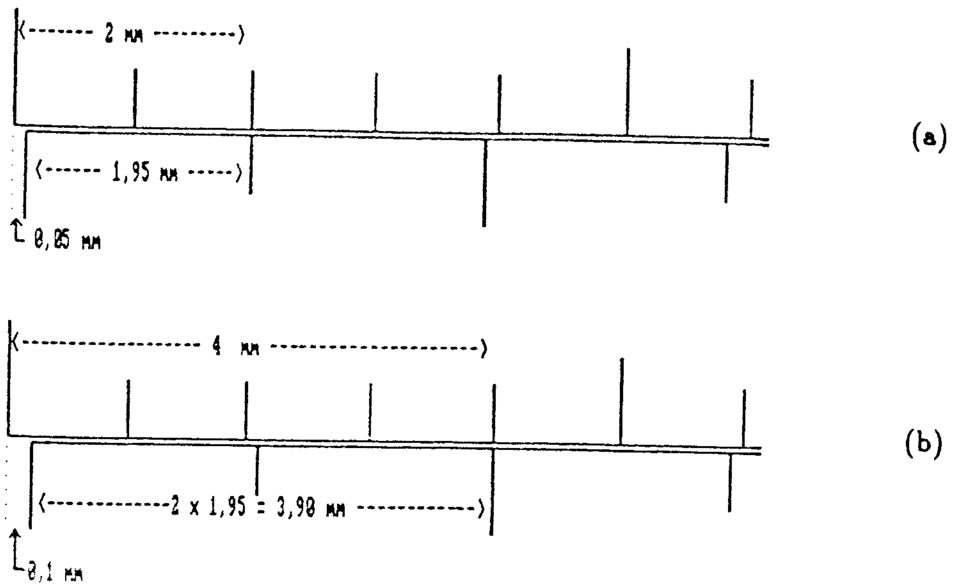


Figura 2.4

La scala del nonio viene quindi numerata in modo che la prima incisione corrisponda allo *zero*, la terza al numero 1, la quinta al numero 2 ecc.. In tal modo la seconda incisione corrisponde a 0,5, la quarta a 1,5 ecc..

In pratica, mediante il nonio la misura di una lunghezza viene fatta nel modo seguente (fig. 2.5): si osserva la posizione dell'incisione 0 del nonio: l'incisione a sinistra sulla scala principale indica il numero dei *millimetri* (62 nel caso in figura). Si individua quindi l'incisione del nonio che coincide con una incisione della scala principale; essa indica il numero dei *decimi* di *millimetro* che si devono aggiungere al valore precedente: nel nostro caso l'incisione del nonio che coincide con una incisione della scala principale è l'incisione 3,5, per cui lo spostamento rispetto all'incisione 62 della scala principale è di 3,5 *decimi* di *millimetro* cioè $0,35mm$: la nostra lettura è perciò $62,35mm$.

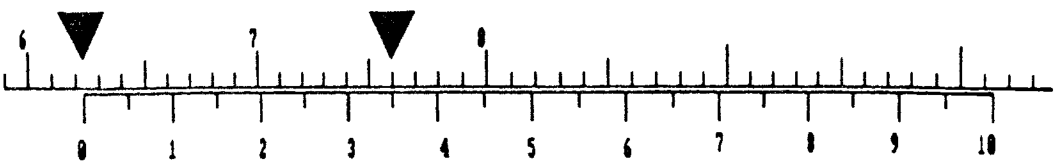
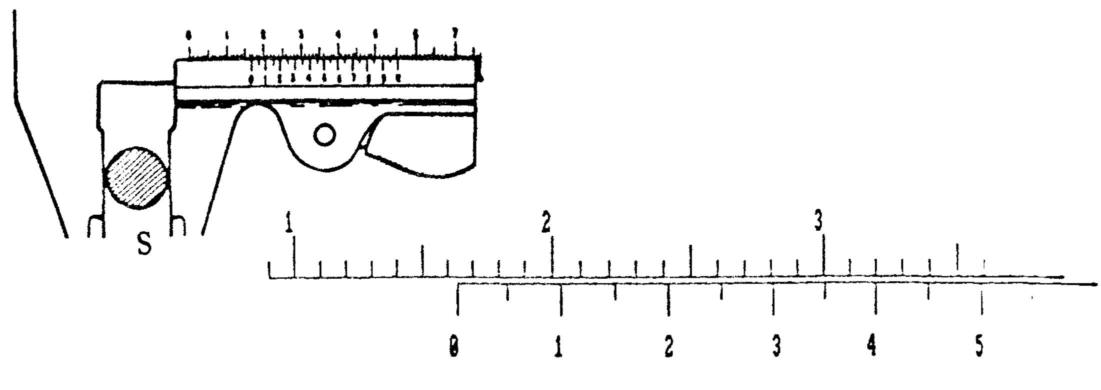
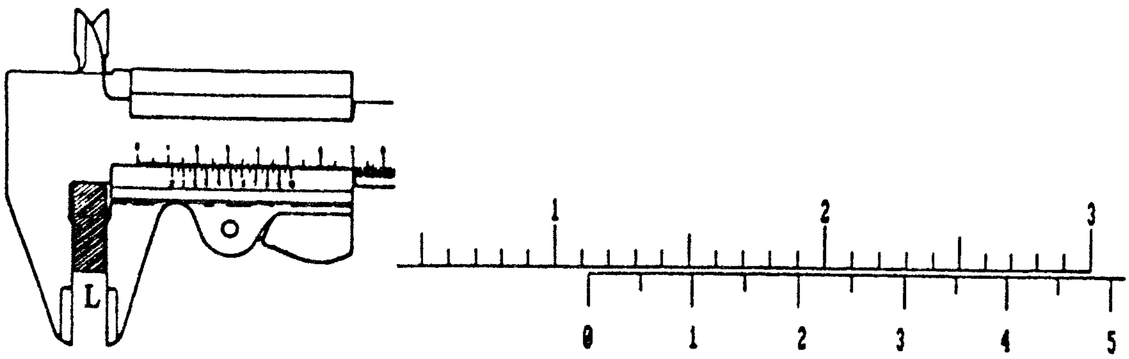


Figura 2.5

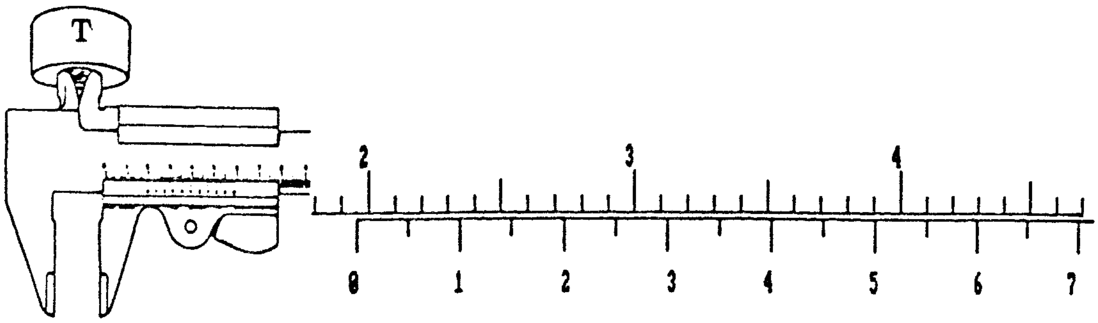
D2.1 Determinare il diametro della sbarretta cilindrica S mediante il calibro con nonio ventesimale schematizzato in figura.



D2.2 Determinare la larghezza della sbarretta L mediante il calibro con nonio ventesimale schematizzato in figura.



D2.3 Determinare il diametro interno del tubo T mediante il calibro con nonio ventesimale schematizzato in figura.



Osserviano, in generale, che uno strumento è poco preciso quando attriti, giochi meccanici, parti che variano la loro lunghezza con la temperatura, ecc. alterano il risultato della misura.

Uno strumento di misura ben costruito ed usato correttamente deve avere una precisione tale da non introdurre errori superiori a quelli calcolabili grazie alla sensibilità. Sbaglierebbe chi, per risparmiare sul materiale, si costruisse un calibro di legno, materiale che assorbe l'umidità presente nell'aria. Un calibro di legno darebbe, dello stesso oggetto, misure diverse in un giorno di pioggia o in un giorno di sole. Malgrado la grande sensibilità, i risultati sarebbero inutilizzabili perchè poco precisi.

c. Misura di grandi distanze

Per misurare distanze dell'ordine di qualche *metro* si utilizzano di norma 'metri' rigidi o pieghevoli, mentre per distanze fino ad alcune *decine* di *metri* si usano 'metri' a nastro.

Per misurare distanze maggiori, quando è impossibile riportare il 'metro' in maniera consecutiva, è necessario ricorrere ad *una misura indiretta*.

Supponiamo di voler misurare la distanza da un punto A, dove ci troviamo, ad un punto P inaccessibile perché tra A e P vi è un fiume, come mostra la fig. 2.6. Possiamo servirci del seguente metodo indiretto, chiamato *triangolazione*.

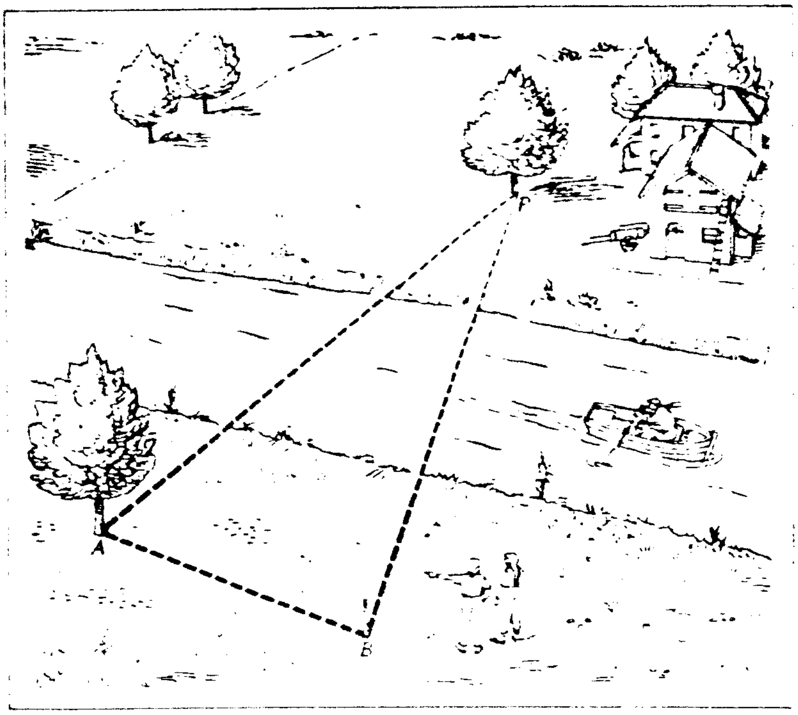


Figura 2.6

Abbiamo bisogno di un 'metro' a nastro e di un goniometro del tipo rappresentato nella fig. 2.7. Scegliamo un punto ausiliario B ad una distanza da A determinabile facilmente con il 'metro' a nastro e segnamolo con un picchetto. (La direzione di $\overline{AB}$, che d'ora in poi chiameremo *base della triangolazione*, può essere qualsiasi, però se fosse perpendicolare ad $\overline{AP}$ sarebbe meglio, come vedremo tra poco.)

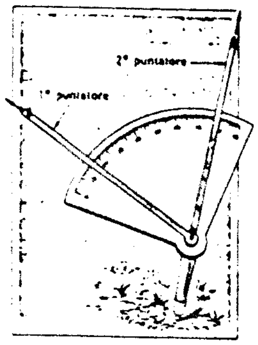


Figura 2.7

Poniamoci ora di nuovo in A e, con il goniometro, misuriamo l'angolo $P\hat{A}B$ (se avessimo avuto la possibilità di scegliere il punto B sulla perpendicolare ad $\overline{AP}$, quest'angolo non occorrerebbe misurarlo, in quanto ovviamente sarebbe di 90°). Spostiamoci poi in B e misuriamo l'angolo $P\hat{B}A$.
Supponiamo di aver trovato i seguenti risultati:

$$P\hat{A}B = 88°; \qquad P\hat{B}A = 50°; \qquad \overline{AB} = 10m$$

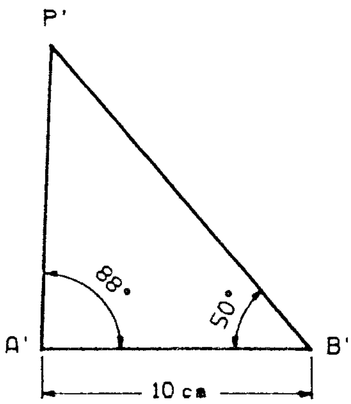


Figura 2.8

Come mostra la fig. 2.8 possiamo ora fare un disegno in scala del triangolo PAB , assumendo per esempio che $1m$ sia rappresentato nel disegno da $1cm$ (cioè utilizzando la scala 1 : 100). Da questa rappresentazione in scala è possibile misurare, in *centimetri*, la distanza $\overline{A'P'}$ e passare alla distanza reale $\overline{AP}$ moltiplicando per il fattore di scala. Nel nostro caso si ottiene:

$$\overline{AP} = \frac{\overline{AB}}{\overline{A'B'}} \cdot \overline{A'P'} = 100 \cdot \overline{A'P'}$$

D2.4 Dopo aver disegnato su un foglio in scala 1 : 100 il triangolo PAB calcola la distanza $\overline{AP}$.

Il metodo della triangolazione può essere utilizzato anche per misurare l'altezza di un oggetto. Ad esempio se volessimo misurare l'altezza dell' albero in P sarebbe sufficiente misurare l'angolo $P\hat{A}H$ (vedi fig 2.9) e costruire in scala il triangolo APH rettangolo in P di cui conosciamo, oltre all'angolo $P\hat{A}H$, il lato $\overline{AP}$ dalla misura precedente.

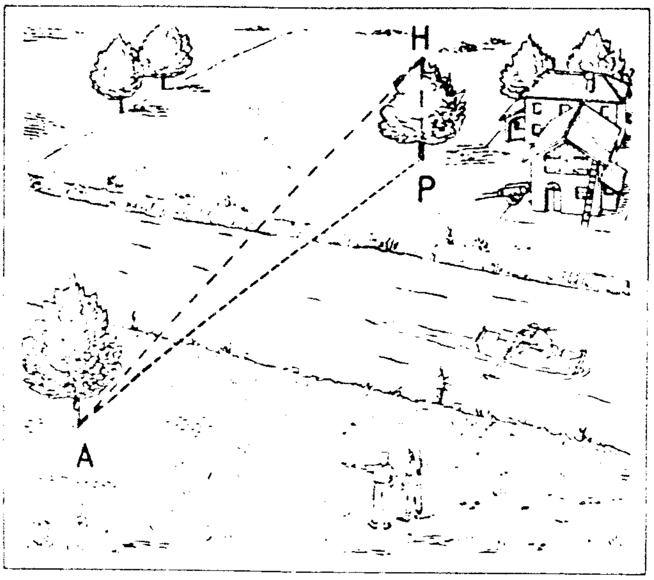


Figura 2.9

Un metodo ancora più semplice per misurare l'altezza di un oggetto era stato ideato già nel VI secolo a.C. da Talete di Mileto.
Si racconta che egli abbia applicato tale metodo, durante un viaggio in Egitto, per misurare l'altezza della piramide di Cheope, suscitando stupore e ammirazione tra gli abitanti di quel paese.

La fig. 2.10 illustra il metodo usato da Talete per questa determinazione, metodo che ciascuno di voi potrebbe adottare per determinare l'altezza di un albero, di un palazzo o di un monumento.

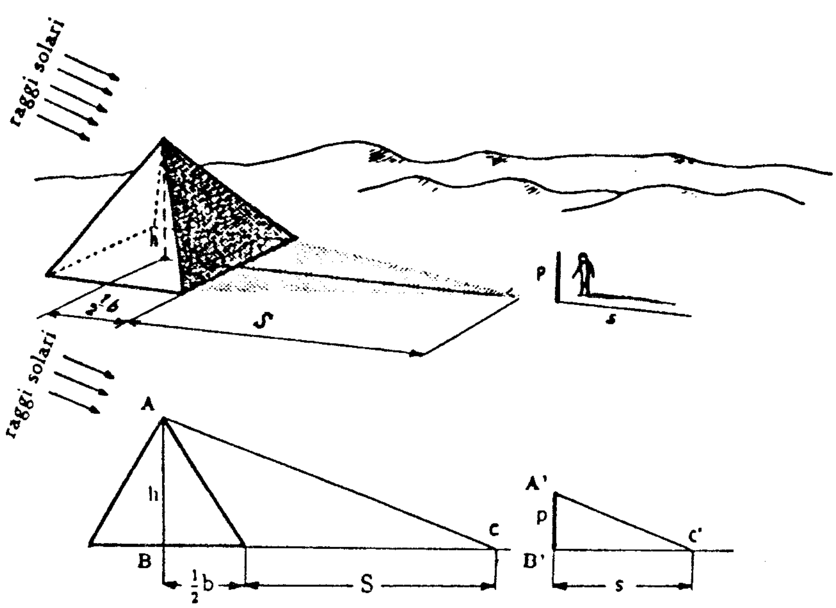


Figura 2.10

Si pianta verticalmente un bastone nel terreno: il bastone, il raggio solare che passa per la cima di esso e l'ombra proiettata dal bastone formano un triangolo rettangolo $A'B'C'$ (vedi fig. 2.10b). Questo triangolo è simile al triangolo ABC, dove A è il vertice della piramide, B è il piede dell'altezza della piramide e C è il vertice dell'ombra. Si determina il rapporto p/s tra l'altezza p del bastone e la lunghezza s della sua ombra: poiché tale rapporto è uguale al rapporto tra l'altezza h della piramide e la somma della lunghezza S dell'ombra e della metà del lato b della base della piramide, abbiamo

$$\frac{p}{s} = \frac{h}{S + b/2}$$

da cui

$$h = \frac{p}{s}\left(S + \frac{b}{2}\right)$$

Metodi essenzialmente basati sul principio della triangolazione sono stati usati fino dai tempi antichi per fare misure astronomiche (vedi Appendice).

Prima di concludere questo paragrafo sulla misura delle lunghezze vogliamo ricordare brevemente la prima determinazione della lunghezza del *metro* campione.

Il *metro* era stato definito in un primo tempo come la 40-*milionesima* parte della circonferenza terrestre.

Pertanto, se noi unissimo con il centro della Terra due punti A e B sulla superficie terrestre distanti tra loro $1m$ (vedi fig. 2.11), l'angolo $A\hat{C}B = \alpha$ così costruito avrebbe un valore dato dalla proporzione

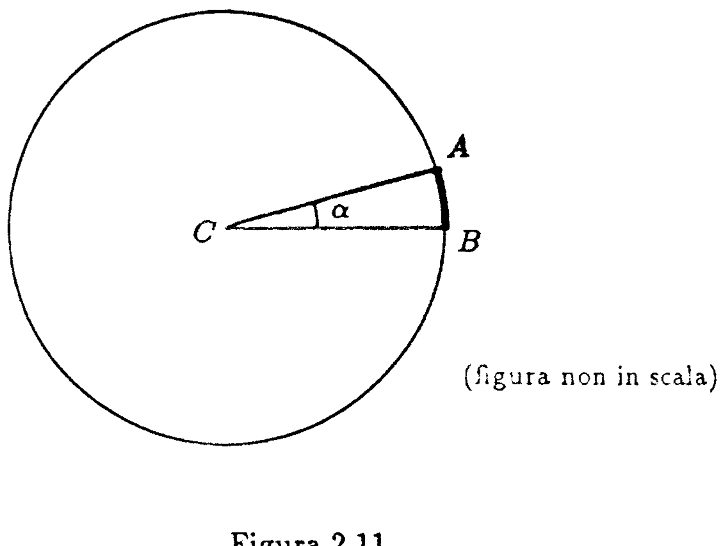


Figura 2.11

$$\alpha \quad : \quad 360^\circ = 1m \quad : \quad 40000000m$$

cioè

$$\alpha = \frac{360^\circ}{40000000}$$

Tale angolo è troppo piccolo per poter essere individuato. Tuttavia, verso la fine del '700, mediante misure astronomiche di latitudine era stato calcolato che l'angolo al centro β corrispondente a due punti situati rispettivamente nelle città di Dunkerque in Francia e Barcellona in Spagna, che si trovano sullo stesso meridiano, era $\beta = 9^\circ 20' 16''$ (vedi fig. 2.12).
La distanza d tra questi due punti doveva essere quindi uguale a

$$d = \frac{\beta}{\alpha}\, m = \frac{9^\circ 20' 16''}{360^\circ} \cdot 40000000\ m = 1037531\ m$$

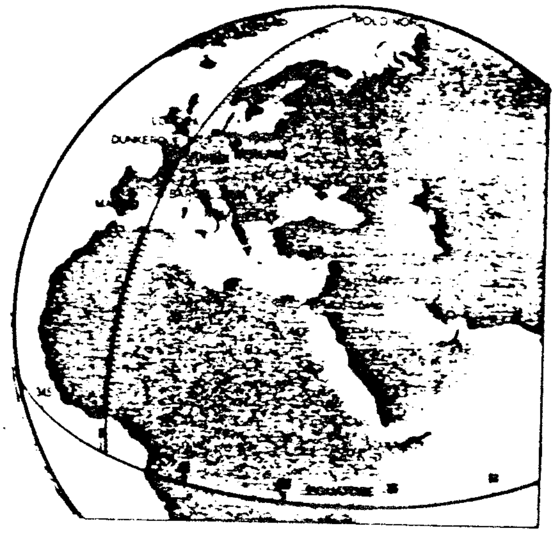


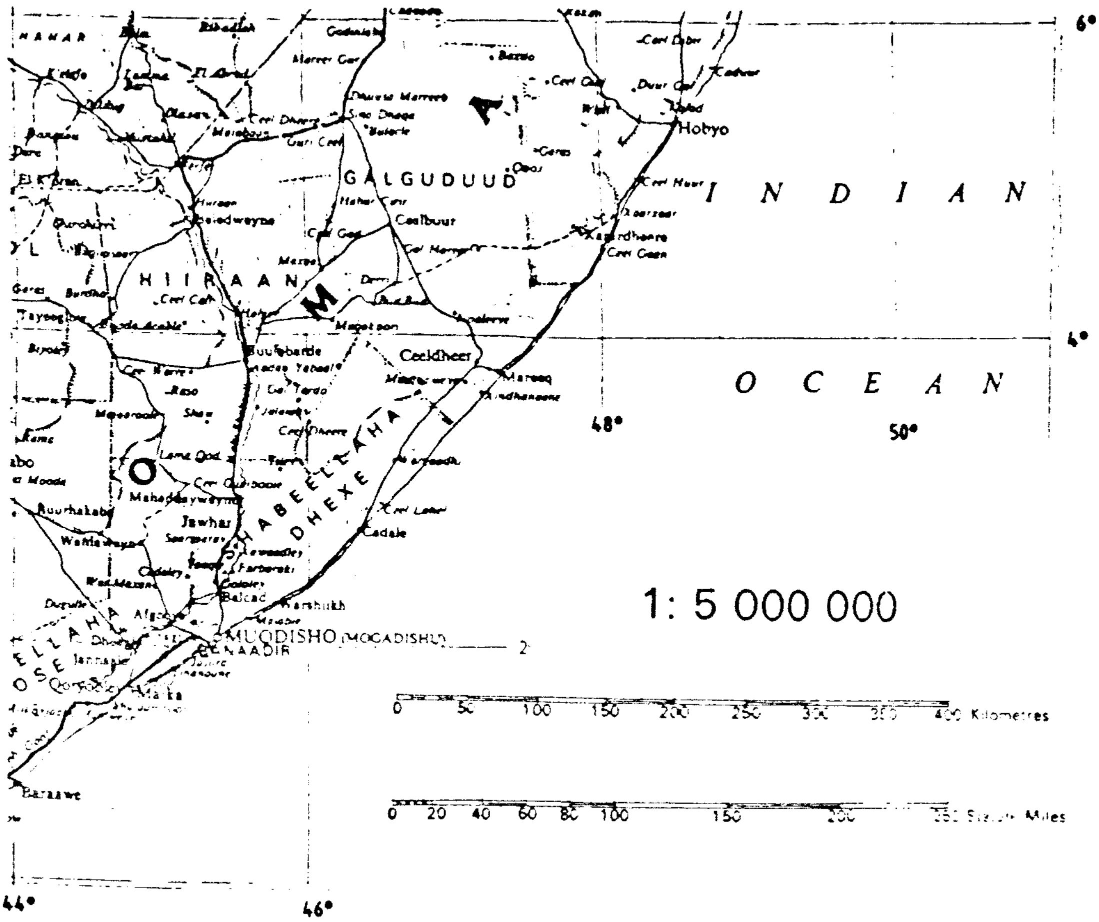
Figura 2.12

Tale distanza fu misurata con grande precisione ed il valore ottenuto per la lunghezza del *metro* fu riportato, mediante due incisioni molto sottili, su una sbarra costruita con materiale speciale avente una forma che la rende inalterabile nel tempo (vedi cap.I, § 2).

Tuttavia ci si rese conto che ogni volta che il progresso tecnologico avesse permesso di effettuare misure più precise, si sarebbe dovuto cambiare la 'lunghezza' del 'metro' campione.

Si decise quindi di assumere come *metro* campione non più la 40-*milionesima* parte della circonferenza terrestre, ma la distanza tra quelle due incisioni che erano state praticate sulla sbarra di platino-iridio.

D2.5 La distanza fra Afgooye e Beledweyne è $d = 300\ km$. Se unissimo tali città con il centro della Terra che angolo formerebbero le due semirette? Che caratteristiche geografiche hanno queste due città? Verificare il risultato sulla carta geografica della Somalia qui riportata determinando la latitudine delle due città.



3. Misure di tempo

Le nostre sensazioni di esseri umani non ci aiutano a definire cosa è il tempo, ma ci danno piuttosto la percezione del suo trascorrere, sempre nello stesso verso, dal passato al presente e da questo al futuro. Qualsiasi fenomeno fisico avviene mentre il tempo sta trascorrendo e tutti i fenomeni quindi vanno riferiti alla loro durata, cioè all'intervallo di tempo compreso tra il loro inizio e la loro fine.

Non è quindi una definizione astratta del tempo che ci interessa, quanto piuttosto la definizione concreta, operativa, di come si misura un intervallo di tempo. A questo scopo è la natura a venirci in aiuto. Essa infatti ci presenta vari fenomeni *periodici*, ossia che si ripetono nel tempo sempre con regolarità e che possono quindi essere utilizzati per la misura di un intervallo di tempo. Dalle fasi della Luna per misurare i *mesi*, al moto apparente del Sole attorno alla Terra per misurare i *giorni*, fino al battito del cuore per misurare intervalli di circa 1 *secondo* (i battiti del cuore tuttavia non si ripetono in modo così regolare e soprattutto uguale per tutti da poter offrire un campione valido per la misura del tempo).

L'uomo però ha imparato a sfruttare altri fenomeni naturali per costruire strumenti semplici e di facile lettura in grado di misurare intervalli di tempo lunghi e brevi. Citiamo come esempio a partire dai più antichi le meridiane, che sfruttano la variazione della direzione dell'ombra di un oggetto durante il giorno, e le clessidre, che sfruttano la lenta caduta della sabbia attraverso una strozzatura praticata in un recipiente di vetro.
Un tipo molto comune di clessidra è mostrato in fig. 3.1.
La sabbia contenuta nella parte superiore del recipiente cade lentamente in quella inferiore. Una scala graduata permette di leggere il tempo trascorso in base alla quantità di sabbia caduta. Quando la parte superiore è vuota, il

Figura 3.1

recipiente viene capovolto e il processo riprende.

Strumenti di questo tipo, anche se non molto precisi, erano praticamente i soli largamente usati fino al 1600.

Fu solo grazie ad una osservazione di Galileo che si ebbe in questo campo un notevole progresso. Egli notò infatti che un pendolo, se le sue oscillazioni sono abbastanza piccole, compie un'oscillazione completa, cioè un moto di andata e ritorno, in un intervallo di tempo costante, anche se l'ampiezza dell'oscillazione va progressivamente diminuendo; le piccole oscillazioni del pendolo sono *isocrone*, hanno cioè sempre la stessa durata.

Il tempo che il pendolo impiega a compiere *un'oscillazione completa* è detto *periodo* delle oscillazioni e indicato normalmente con la lettera T.

Utilizzando un pendolo la misura del tempo è ottenuta attraverso il conteggio delle oscillazioni e due intervalli di tempo vengono detti uguali se durante questi intervalli il pendolo compie un ugual numero di oscillazioni.

Sfruttando questa proprietà del pendolo, si cominciò così a costruire orologi che potevano essere usati come efficienti strumenti di misura (vedi fig. 3.2).

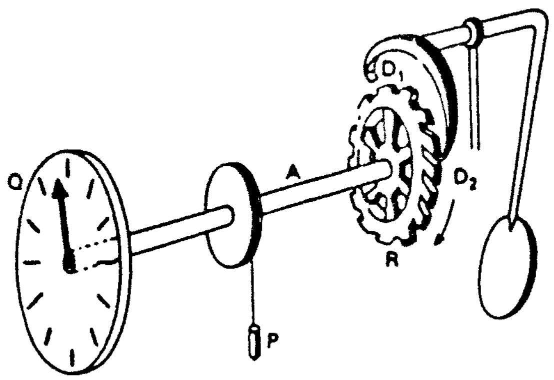


Figura 3.2

Anche se ancora in uso, gli orologi a pendolo sono stati via via sostituiti da orologi che sfruttano altri fenomeni periodici, quali le oscillazioni di una molla elicoidale (sistema a bilanciere) (vedi fig. 3.3) o di un piccolo cristallo di quarzo.

Mediante sistemi meccanici od elettrici tali oscillazioni producono la rotazione regolare di lancette (indici) su un quadrante o l'accensione di numeri su di un piccolo visore. Questi strumenti hanno il vantaggio di essere più precisi e di poter essere costruiti di dimensioni più piccole, come gli orologi da polso. Gli orologi a bilanciere hanno normalmente sensibilità che va da 1 *minuto* a 1 *decimo* di *secondo*; quelli a quarzo, più moderni, possono avere una sensibilità che arriva fino al *centesimo* di *secondo*.

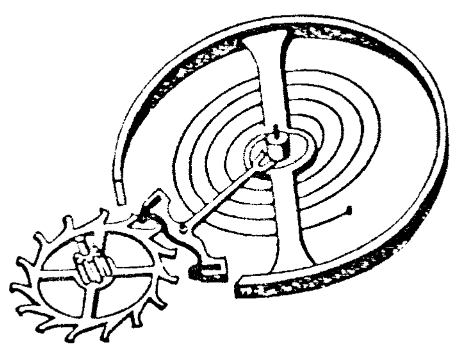


Figura 3.3

In laboratorio per misurare brevi intervalli di tempo è utile usare i *cronometri*. Questi strumenti differiscono dai comuni orologi per il fatto di possedere un meccanismo che permette di iniziare e fermare a piacere il moto delle lancette o il succedersi dei numeri (cioè il conteggio del tempo). Un tipico cronometro contasecondi meccanico (a bilanciere) è mostrato nella fig. 3.4.

La scala graduata grande (circolare) è suddivisa in 60 *secondi*; ogni *secondo* (in questo modello) è a sua volta suddiviso in 5 parti. Lo strumento permette quindi di apprezzare il *quinto* di *secondo* $(0,2s)$. La lancetta grande compie un giro completo in un *minuto*. Quella piccola compie invece un giro ogni 30 *minuti*.

Le due lancette si mettono in moto premendo un pulsante e si fermano premendo un altro pulsante. Così si può eseguire comodamente la lettura dell'intervallo di tempo trascorso fra il momento in cui le lancette si sono

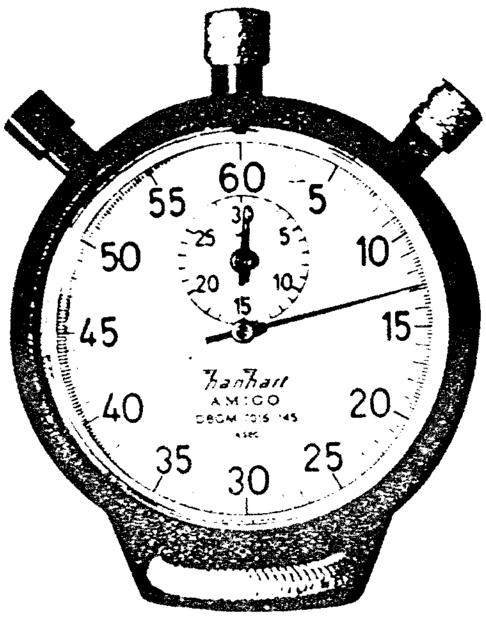


Figura 3.4

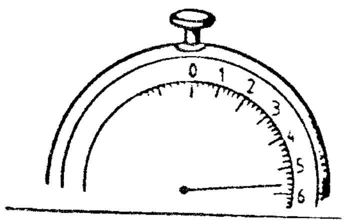
messe in moto e quello in cui si sono fermate.

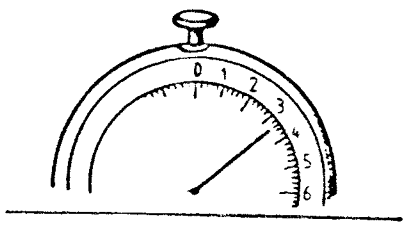
Nella misura di tempo con un normale cronometro lo sperimentatore interviene con le sue capacità personali; infatti tra l'inizio del fenomeno da misurare e l'effettiva partenza del cronometro passa un breve intervallo di tempo che dipende dalla rapidità dei riflessi di chi schiaccia il pulsante. Lo stesso avviene quando il cronometro viene fermato; ma questi due intervalli di tempo di solito non sono esattamente uguali (possono differire di diversi *centesimi di secondo*). Per questo un cronometro con una sensibilità dell'ordine di un *centesimo di secondo* non dovrebbe essere azionato manualmente, ma mediante sistemi meccanici, elettrici, magnetici o ottici, come avviene ormai nelle più importanti manifestazioni sportive.

D3.1 Una clessidra si svuota mentre un pendolo compie 100 oscillazioni complete. Se il periodo del pendolo è $1,5s$, quanto tempo impiega la clessidra a svuotarsi? A quale intervallo di tempo corrisponde il passaggio di una quantità di sabbia pari a $1/3$ del totale?

D3.2 Un pendolo di periodo uguale a $6s$ compie, mentre avviene un certo fenomeno, 167 oscillazioni più una frazione di oscillazione. Qual è la durata del fenomeno? Qual è l'errore di misura (assoluto, relativo e percentuale)? Qual è la sensibilità del pendolo?

D3.3 Leggere l'intervallo di tempo segnato dalle lancette dei cronometri mostrati in figura.





4. Misure di massa

Le parole *peso* e *massa* sono usate nel linguaggio comune per indicare praticamente la stessa proprietà di un oggetto. Quando si vuol dire che un oggetto ha una grande massa (termine al quale viene intuitivamente associata la quantità di materia di cui è fatto il corpo) si dice che l'oggetto è molto pesante.

In Fisica invece peso e massa sono due grandezze distinte: *la massa di un corpo indica la sua inerzia al moto, il peso di un corpo indica invece la forza con la quale esso in un dato luogo viene attratto dalla Terra.* Cioè, se vogliamo *lanciare* un sasso dall'altro lato della strada, la forza che dobbiamo esercitare è tanto più grande quanto più grande è la *massa* del sasso. Se invece vogliamo *tenere sollevato* in aria un sasso, la forza che dobbiamo esercitare è tanto più grande quanto più grande è il *peso* del sasso.

Inoltre, mentre la massa è una caratteristica dell'oggetto, il suo peso dipende, sia pure poco, dal luogo dove l'oggetto si trova. Infatti $P = Mg$, dove g (accelerazione di gravità) varia leggermente da luogo a luogo.

La misura della massa di un oggetto si esegue in generale *per confronto* con la massa campione (o con i suoi multipli o sottomultipli). Poichè, a parità di g, la massa è direttamente proporzionale al peso, è possibile eseguire misure di massa eseguendo misure sulla forza-peso che agisce sull'oggetto.

Gli strumenti normalmente usati per tali misure sono le bilance.
Una bilancia può essere costruita semplicemente appoggiando un'asta rigida (detta *giogo*) nel suo punto di mezzo 0 sopra un sostegno (detto *fulcro*) attorno al quale l'asta è libera di ruotare, come è mostrato in fig. 4.1.
Con questo strumento è possibile confrontare la forza-peso che agisce su un oggetto (e quindi la sua massa) con quella che agisce su un campione noto.
Basta porre la massa incognita M in A e porre delle masse campione m in

B fino a quando il giogo resta in *equilibrio, in posizione orizzontale.* Quando ciò avviene vuol dire che l'azione della forza-peso $P = Mg$ dell'oggetto, che tende a far ruotare il giogo in un senso, è bilanciata dall'azione della forza-peso $p = mg$ dei campioni che tende a farlo ruotare nell'altro senso. Più precisamente, se i *bracci* l_1 e l_2 della bilancia sono uguali, si ha $P = p$, cioè

$$M = m$$

Uno strumento così semplice è però poco pratico da usare ed è poco preciso.

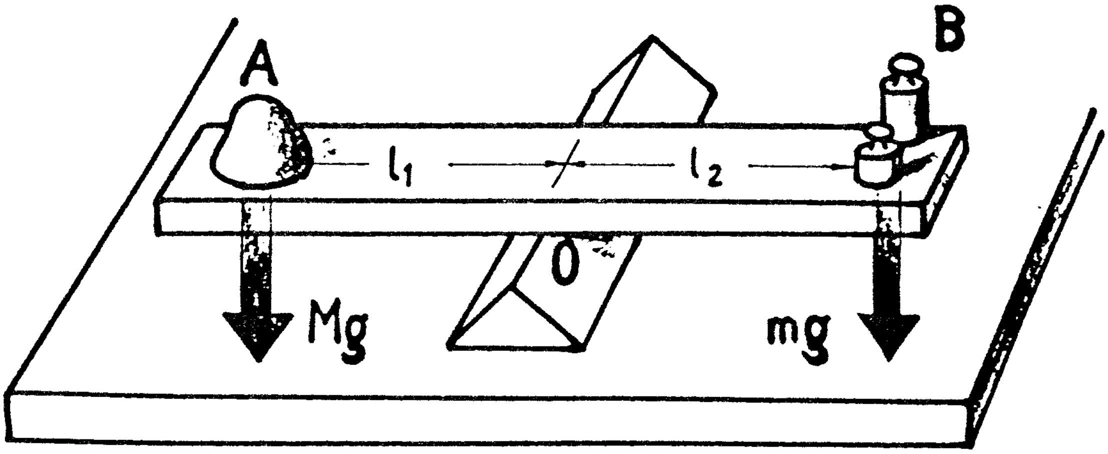


Figura 4.1

Più adatte a fare misure, anche se più complicate, sono le bilance analitiche (o di precisione) a bracci uguali (vedi ad esempio la fig. 4.2).

Queste bilance sono costituite sostanzialmente da un giogo a bracci uguali al centro del quale è fissato un coltello con il taglio molto affilato. Il coltello appoggia su un piano di materiale duro (acciaio o agata).

Agli estremi del giogo sono appesi due piattelli uguali, sui quali vengono poste in uno la massa da misurare e nell'altro le masse campione.

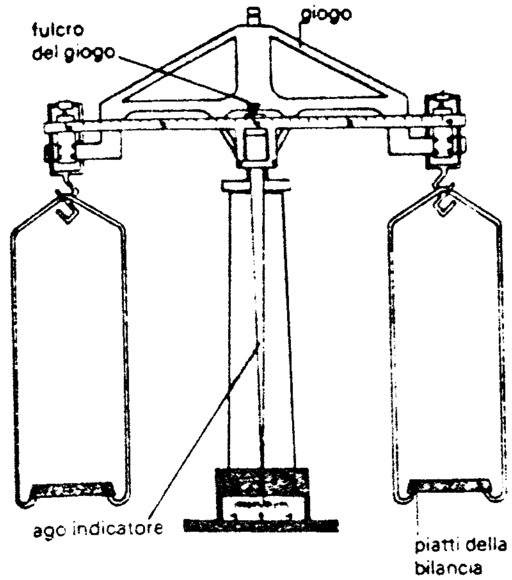


Figura 4.2

Al giogo è collegato un *indice* che ne segnala l'inclinazione (vedi fig. 4.3) su

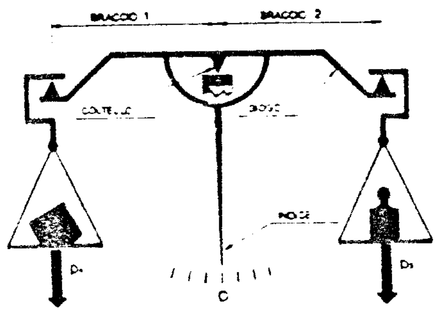


Figura 4.3

una *scala graduata* messa in una posizione opportuna.

La *sensibilità* di una bilancia è data dalla più piccola massa che si deve aggiungere, in condizioni di equilibio, su uno dei due piattelli per sbilanciare il giogo, cioè per spostare l'indice dalla posizione di equilibio O.
Se la bilancia è poco sensibile, ciò può essere fatto aggiungendo delle piccole masse fino a quando si vede spostare l'indice.
Se invece la bilancia è molto sensibile, la più piccola massa disponibile produce già una deviazione dell'indice dalla posizione di equilibrio di varie divisioni. In questo caso si definisce sensibilità della bilancia la quantità

$$S = \frac{m}{n}$$

dove n è il numero di divisioni, sulla scala graduata, di cui si è spostato l'indice quando si è aggiunta su un piattello la massa m.

Ogni bilancia è corredata da una scatola, detta impropriamente 'pesiera', nella quale sono contenuti i campioni di massa. A seconda della *portata* della bilancia, cioè del massimo carico che la bilancia può sopportare senza rovinarsi (ad es. $200g$), e della sensibilità (ad es. 1 *millesimo di grammo*), i campioni sono tali e tanti da poter permettere di ottenere tutti i valori di *milligrammo* in *milligrammo* compresi tra 1 *milligrammo* e 200 *grammi* (vedi fig. 4.4). Nella pesiera delle bilance di precisione, per evitare

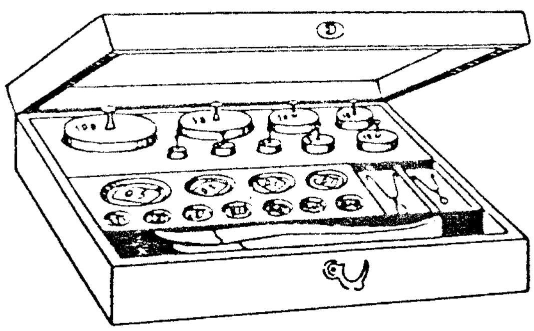


Figura 4.4

che risulti variata la massa dei campioni toccandoli con le mani, è posta di solito una pinzetta con la quale afferrare i campioni. Infatti sostanze estranee (quali ad esempio sudore, polvere, ecc.) portate sulla superficie dei campioni più piccoli potrebbero alterare il valore della loro massa di una quantità dell'ordine della sensibilità della bilancia.

Per fare una misura con la bilancia analitica il *metodo* più semplice (detto *pesata semplice*) che si può seguire è quello di porre la massa da misurare su un piattello e di cercare l'equilibrio della bilancia (l'indice nella posizione verticale) ponendo sull'altro piattello le opportune masse campione. Questo metodo presenta l'inconveniente di fornire valori sistematicamente sbagliati nel caso in cui le lunghezze dei due bracci non siano 'esattamente' uguali.
Esistono però altri metodi per eseguire la misura che riducono o eliminano questo possibile inconveniente (tra i più semplici il metodo della *doppia pesata* e quello della *tara*) e che vengono utilizzati quando siano necessarie misure molto precise anche con bilance che possano avere i bracci di lunghezze non 'esattamente' uguali.
Con il metodo della doppia pesata, dopo aver eseguito una misura ponendo l'oggetto di massa M sul piatto di sinistra e le masse campione m_1 su quello di destra, si esegue una seconda misura ponendo l'oggetto di massa M sul piatto di destra e le masse campione (che indicheremo ora con m_2) su quello di sinistra. Se i valori m_1 e m_2 sono poco diversi, è corretto ritenere che

$$M = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)$$

Vogliamo infine osservare che le bilance ad un solo piatto usate dai commercianti, del tipo di quella mostrata nella fig. 4.5, sono dei dinamometri.

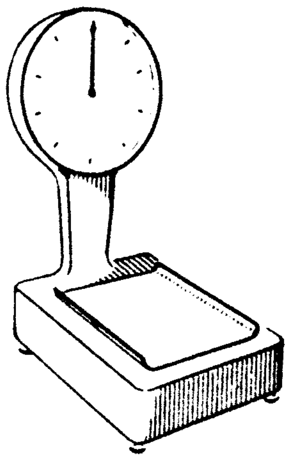


Figura 4.5

Esse vengono chiamate *bilance a molla*(*) e il loro schema di funzionamento è quello mostrato nella fig. 4.6.

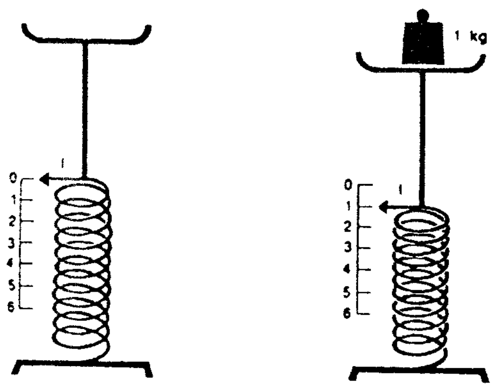


Figura 4.6

Queste bilance forniscono quindi la forza-peso dell'oggetto posto sul piatto e per essere usate per misurare la massa devono essere *tarate* in *kilogrammi* e *grammi* usando delle masse campione. Poiché, come abbiamo visto, il peso di un corpo varia da luogo a luogo, tali bilance dovrebbero essere utilizzate

(*) - Il nome *bilancia* deriva dal verbo *bilanciare*. Tale nome è quindi usato in modo improprio nel caso degli strumenti a molla.

solo nello stesso luogo nel quale sono state tarate.

Supponiamo infatti di utilizzare una bilancia a molla tarata a Pavia ($g = 9,805 m/s^2$). In questo caso mettendo un oggetto di massa $m = 1kg$ sul piatto della bilancia, l'ago indica

a Pavia	$m = 1kg$
al Polo Nord ($g = 9,832 m/s^2$)	$m = 1kg \times \frac{9,832}{9,805} = 1,003\ kg$
a Mogadiscio ($g = 9,780 m/s^2$)	$m = 1kg \times \frac{9,780}{9,805} = 0,997\ kg$

Tuttavia, poiché le variazioni sono piccole (dell'ordine di qualche 0,1%) rispetto alla sensibilità che normalmente hanno queste bilance (dell'ordine dell'1%) gli errori sistematici nella misura di una massa dovuti alle variazioni del valore di g sulla superficie della Terra non sono apprezzabili.

Inoltre queste bilance sono più semplici da usare. Infatti, una volta tarate, possono essere usate senza avere a disposizione delle masse campione, che sono invece indispensabili nelle bilance a bracci uguali.

D4.1 Utilizzando la tabella sottoriportata, determinare il peso di un oggetto di massa $m = 3kg$ a Stoccolma, a Auckland e a Kariba. Per la misura si usa una bilancia a molla tarata a Mogadiscio.

Località	*Latitudine*	*Altitudine* (m)	g (m/s^2)
Polo Nord	90°	0	9,83217
Umanak (Groenlandia)	70°	20	9,825
Stoccolma	59°	45	9,818
Greenwich	51°	48	9,81185
Banff (Canadà)	51°	1376	9,808
Roma	42°	49	9,80367
Denver (USA)	40°	1638	9,796
San Francisco (USA)	38°	114	9,800
Khartoum	15°	300	9,78330
Canale di Panama	9°	6	9,782
Equatore	0°	0	9,78049
Kisimaio	1° Sud	0	9,7805
Djakarta (Indonesia)	6° Sud	7	9,782
Kariba (Zambia)	15° Sud	1000	9,78187
Durban (Sud Africa)	30° Sud	0	9,7932
Auckland (Nuova Zelanda)	37° Sud	3	9,800

5. Densità

È esperienza comune che esistono materiali che, a parità di volume, 'pesano' di più.

Siamo abituati a riempire completamente di vestiti una grande valigia: sappiamo che riusciremo a trasportarla. La stessa valigia non la riempiamo certo di tubi di ferro o anche di libri: sappiamo che non saremmo più capaci di sollevarla!

La caratteristica di ogni materiale di avere, a parità di volume, una massa diversa (e quindi un peso diverso) viene facilmente descritta dal rapporto tra la massa del materiale e il suo volume. Questo rapporto viene chiamato *densità* e normalmente viene indicato dalla lettera ρ dell'alfabeto greco:

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad 5.1$$

dove con m abbiamo indicato la massa e con V il volume del materiale.
Se misuriamo la massa in kg e il volume in m^3, la densità è misurata in kg/m^3; analogamente se m è misurata in g e V in cm^3, ρ è misurata in g/cm^3.

La densità è una *proprietà* della sostanza di cui è composto l'oggetto e può essere determinata una volta per tutte. Nota la densità si può ottenere la massa di un oggetto conoscendone il volume, oppure ottenere il volume conoscendone la massa.

Siccome $1m^3$ d'acqua distillata ha una massa pari a $10^3 kg$, la densità dell'acqua è

$$\rho = 1000\ kg/m^3 = 1\ g/cm^3$$

Nella tabella 5.1 sono riportate le densità di alcune sostanze di uso comune o particolarmente significative. Poichè al variare della temperatura varia il volume degli oggetti, *la densità dipende leggermente dalla temperatura* e il suo valore andrebbe dato insieme a quello della temperatura a cui è stato determinato. Nel caso dei dati qui riportati (in kg/m^3) la temperatura è di $20°C$ tranne che per l'acqua distillata, per la quale la temperatura è $4°C$.

TABELLA 5.1

Acciaio	$\sim 7,84 \cdot 10^3$	Magnesio	$1,74 \cdot 10^3$
Acqua distillata	$1,000 \cdot 10^3$	Marmo	$\sim 2,7 \cdot 10^3$
Acqua di mare	$\sim 1,03 \cdot 10^3$	Mattone	$\sim 1,8 \cdot 10^3$
Alcool etilico	$0,79 \cdot 10^3$	Mercurio	$13,55 \cdot 10^3$
Alluminio	$2,70 \cdot 10^3$	Nafta	$0,76 \cdot 10^3$
Argento	$10,49 \cdot 10^3$	Nichel	$8,8 \cdot 10^3$
Argilla	$\sim 2,1 \cdot 10^3$	Olio d'oliva	$0,91 \cdot 10^3$
Avorio	$\sim 1,9 \cdot 10^3$	Oro	$19,3 \cdot 10^3$
Benzina	$0,78 \cdot 10^3$	Osmio	$22,5 \cdot 10^3$
Bronzo	$\sim 8,8 \cdot 10^3$	Osso	$\sim 1,8 \cdot 10^3$
Burro	$0,86 \cdot 10^3$	Ottone giallo	$8,5 \cdot 10^3$
Calcina	$\sim 1,7 \cdot 10^3$	Petrolio	$0,81 \cdot 10^3$
Canfora	$0,99 \cdot 10^3$	Piombo	$11,34 \cdot 10^3$
Carbone di legna	$\sim 0,5 \cdot 10^3$	Platino	$21,37 \cdot 10^3$
Caucciù	$\sim 0,95 \cdot 10^3$	Polivinile	$\sim 1,2 \cdot 10^3$
Cemento da presa	$\sim 2,8 \cdot 10^3$	Potassio	$0,87 \cdot 10^3$
Cuoio secco	$0,86 \cdot 10^3$	Rame	$8,93 \cdot 10^3$
Cuoio grasso	$1,02 \cdot 10^3$	Sabbia	$\sim 1,4 \cdot 10^3$
Diamante	$3,52 \cdot 10^3$	Silicio	$2,42 \cdot 10^3$
Ferro	$7,86 \cdot 10^3$	Sodio	$0,97 \cdot 10^3$
Gesso	$\sim 2,3 \cdot 10^3$	Stagno	$7,29 \cdot 10^3$
Glicerina	$1,26 \cdot 10^3$	Sughero	$\sim 0,24 \cdot 10^3$
Ghiaccio	$0,917 \cdot 10^3$	Uranio	$18,7 \cdot 10^3$
Grafite	$\sim 2,25 \cdot 10^3$	Vetro	$\sim 2,6 \cdot 10^3$
Iridio	$22,42 \cdot 10^3$	Zinco	$7,1 \cdot 10^3$
Latte	$1,04 \cdot 10^3$	Zolfo	$1,96 \cdot 10^3$
Legno	$\sim 0,6 \cdot 10^3$	Zucchero	$1,61 \cdot 10^3$

D5.1 Un ragazzo ha riempito tre secchi rispettivamente con acqua, limatura di ferro e sughero. In base alla figura sotto riportata, indicare quale secchio è stato riempito con acqua.

(a) (b) (c)

La densità definita dalla relazione 5.1 si chiama anche *densità assoluta* per distinguerla da un'altra grandezza chiamata *densità relativa* e definita come il rapporto tra la densità assoluta dell'oggetto in considerazione e la densità assoluta dell'acqua distillata, a $4°C$. La densità relativa è espressa da un numero puro, cioè non ha dimensioni.

E5.1 In base ai valori riportati in tabella 5.1 calcolare il volume di $1kg$ delle diverse sostanze.

E5.2 Se avessimo definito densità relativa il rapporto tra la densità di una sostanza e quello dell'oro, quale sarebbe la densità relativa delle varie sostanze riportate in tabella 5.1?

E5.3 Se un oggetto non è omogeneo, ad esempio se esso è costituito da due sostanze diverse, la relazione 5.1 ci fornisce una densità media. Si calcoli la densità media di una sfera cava di ferro di raggio $R = 20cm$ e di spessore $d = 1cm$ riempita di acqua distillata. Si calcoli la densità media della stessa sfera quando nel suo interno si sia fatto il vuoto.

E5.4 Due sfere piene della stessa sostanza pesano l'una il doppio dell'altra. In che rapporto stanno i loro raggi?

E5.5 Dalla tabella 5.1 si vede che la densità dell'acqua è maggiore di quella del ghiaccio. Di quanto cambia il volume di $1kg$ di acqua quando essa solidifica?

APPENDICE A - Le distanze nel cielo

a. Il raggio della Terra

Anticamente gli uomini pensavano che la Terra fosse piatta e la immaginavano come una specie di disco galleggiante sull'Oceano.

Il riconoscimento della sfericità della Terra è attribuito a Pitagora (570-490 a.C.) ed ai suoi discepoli, ma le prime citazioni a sostegno della rotondità della Terra si trovano nel *De Coelo* di Aristotele (384-322 a.C.) e riguardano: il fatto che durante l'eclissi di Luna si può vedere l'ombra circolare della Terra proiettata sulla superficie lunare (vedi fig.A.1); l'osservazione che quando una nave si avvicina compaiono all'orizzonte prima la sommità degli alberi e poi, gradualmente, le parti inferiori della nave; il fatto che un osservatore che abita una regione a sud vede tutt'altro cielo di un altro osservatore che abita una regione più a nord. Scrive Aristotele:

"Certe stelle che si vedono in Egitto e nei dintorni di Cipro sono invisibili in paesi più settentrionali ed altre, invece, visibili continuamente nelle zone settentrionali, sono scorte al tramonto nelle altre zone ... "

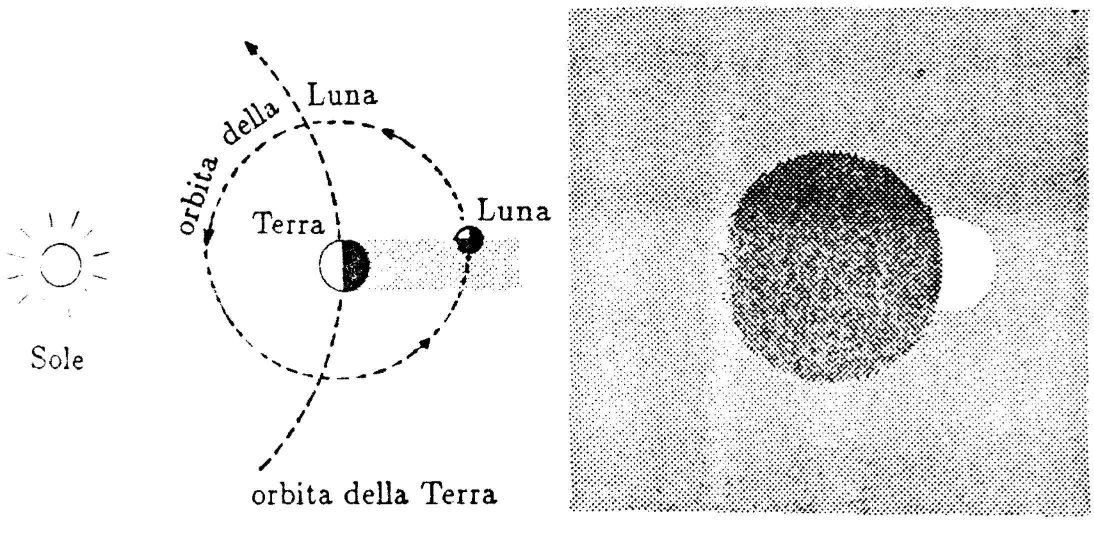


Figura A.1

Naturalmente, una volta riconosciuta la forma sferica della Terra, nacque il problema di come misurarne il raggio.

Il primo calcolo accurato è dovuto ad Eratostene (276-194 a.C.), geografo ed astronomo che lavorava nella famosa biblioteca di Alessandria in Egitto, la più grande e la più ricca biblioteca dell'antichità.

Il metodo sviluppato da Eratostene consiste nel misurare la distanza tra due punti posti sullo stesso meridiano e determinare l'ampiezza dell'arco corrispondente a tale distanza.

I punti scelti da Eratostene per questa determinazione furono la città di Alessandria e quella di Siene (oggi Assuan) che si trovano quasi sullo stesso meridiano, sulle rive del Nilo ed erano unite da una strada lunga 5000 *stadi*(*).

Eratostene sapeva dell'esistenza a Siene di un pozzo molto profondo nelle cui acque il Sole si specchiava a mezzogiorno del giorno più lungo dell'anno; il fatto che il Sole si specchiasse nell'acqua di un pozzo indicava che l'astro si trovava sulla verticale (vedi fig. $A.2$).

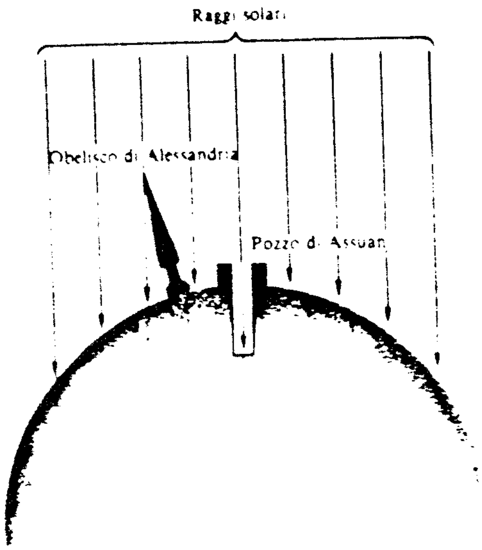


Figura $A.2$

(*) - Antica misura di lunghezza usata in Grecia e pari a circa $160m$.

Misurando a mezzogiorno dello stesso giorno dell'anno l'inclinazione dei raggi solari ad Alessandria mediante la lunghezza dell'ombra di un obelisco, Eratostene scoprì che essi formavano un angolo $\alpha = 7°12'$ con la verticale. Come si vede dalla fig. $A.3$, a causa della enorme distanza del Sole dalla Terra, i raggi del Sole si possono considerare paralleli e l'angolo α si può ritenere uguale all'angolo al centro $A\hat{O}S$ corrispondente all'arco $\overset{\frown}{AS}$.

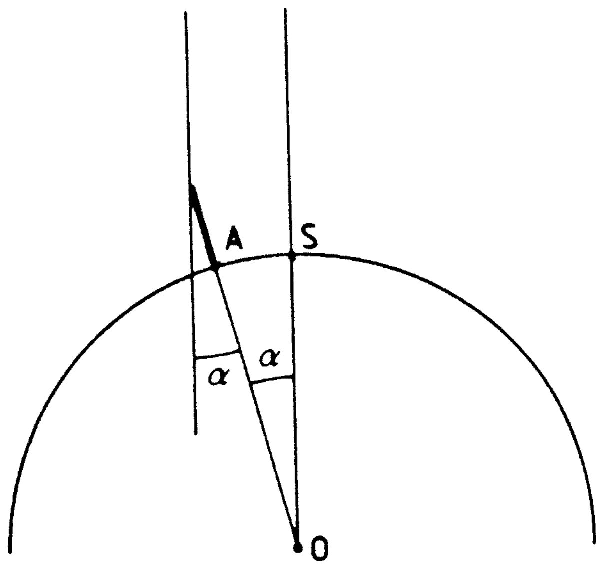


Figura $A.3$

Disponendo di questo dato e sapendo che $\overset{\frown}{AS}$ misurava 5000 *stadi*, fu facile per Eratostene calcolare la lunghezza della circonferenza terrestre moltiplicando 5000 per $360/7,2 = 50$, cioè per il numero di volte che l'arco $\overset{\frown}{AS}$ era contenuto nella circonferenza della Terra.
Egli ottenne così il valore di 5000×50 *stadi* = 250000 *stadi* che corrisponde ad una lunghezza di 250000×160 *metri* = 40000000 *metri*, valore assai vicino a quello vero (medio) della circonferenza terrestre.
Da questo valore si ottiene per il raggio della Terra il valore $R = 6370\ km$.

b. La Luna: diametro e distanza dalla Terra

Già Aristarco nel terzo secolo avanti Cristo aveva notato, osservando l'ombra della Terra sulla Luna durante una eclisse (vedi fig. $A.1$), che il diametro della Terra era circa tre volte quello della Luna, ricavando quindi il valore

$$d = 2R_{Terra}/3 = 4240\ km$$

Misure più precise hanno dato per il diametro della Luna: $d = 3476\ km$, cioè circa 1/4 del diametro terrestre.

Per misurare la distanza l tra la Luna e la Terra si può notare che per un osservatore sulla Terra la Luna *appare* grande circa come un disco di $1cm$ di diametro posto ad una distanza di $1m$ (vedi fig. $A.4$).

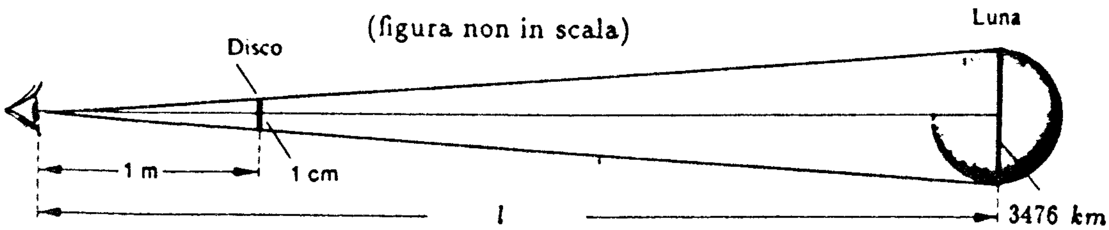


Figura $A.4$

Abbiamo allora

$$1\ cm\ :\ 1\ m = 3476\ km\ :\ l$$

da cui

$$l = 3476\ km \cdot \frac{100cm}{1cm} = 347600\ km$$

Misure più precise hanno dato per la distanza media Terra-Luna il valore

$$l = 384000\ km$$

c. Il Sole: distanza dalla Terra e diametro

Sempre Aristarco suggerì un metodo molto semplice per misurare la distanza tra la Terra e il Sole.

Il suo metodo consiste nel misurare la distanza angolare α esistente tra la Luna e il Sole (vedi fig. A.5) quando la Luna è al primo quarto, cioè nel momento in cui essa forma con la Terra e il Sole un triangolo rettangolo con il vertice dell'angolo retto nella Luna. Conoscendo α si può ricavare $\beta = 90^\circ - \alpha$ e calcolare il rapporto tra le distanze $\overline{TS}$ e $\overline{TL}$ con una semplice proporzione. Infatti, considerando il triangolo TSL come settore circolare di raggio $\overline{TS} \simeq \overline{LS}$ (essendo β molto piccolo), vale la proporzione:

$$\frac{\beta}{360^\circ} = \frac{\overline{TL}}{2\pi\overline{TS}}$$

da cui

$$\frac{\overline{TS}}{\overline{TL}} = \frac{360^\circ}{2\pi\beta} \qquad A.1$$

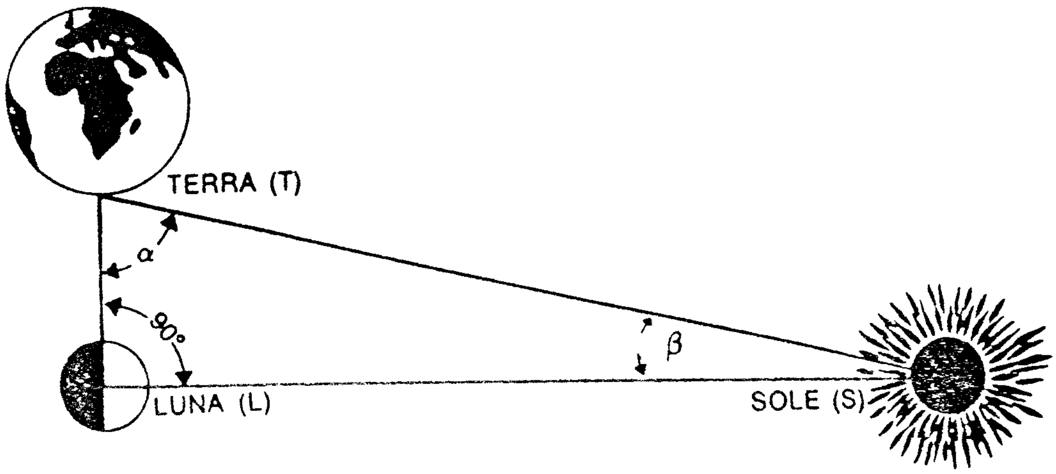


Figura A.5

Il metodo è corretto e geniale, ma conduce a risultati non troppo precisi a causa della difficoltà con cui si può determinare l'angolo α che è quasi di 90°, per cui basta un lieve errore nella sua misurazione per avere un errore sensibile nel risultato. Aristarco ottenne per α un valore di 87° e ne dedusse che la distanza Terra-Sole era 20 volte quella Terra-Luna.
Infatti dalla relazione $A.1$ abbiamo

$$\frac{\overline{TS}}{\overline{TL}} = \frac{360^\circ}{2\pi 3^\circ} \simeq 20$$

Oggi sappiamo che la distanza Terra-Sole è

$$l \simeq 150 \cdot 10^6\ km$$

cioè circa 400 volte la distanza Terra-Luna.

DA.1 Utilizzando i valori attualmente noti per $\overline{TS}$ e $\overline{TL}$, calcolare in base alla relazione A.1 il valore dell'angolo β.

Per valutare il diametro del Sole si può osservare che la grandezza 'apparente' del Sole è uguale a quella della Luna.
Come risulta dalla fig. A.6 possiamo scrivere

$$\frac{d_{Sole}}{d_{Luna}} = \frac{150 \cdot 10^6\ km}{384 \cdot 10^3\ km} \simeq 390$$

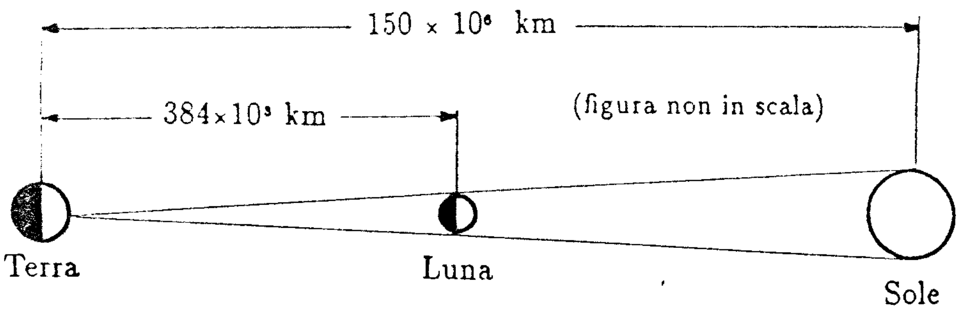


Figura A.6

da cui si ottiene per il diametro del Sole

$$d \simeq 390 \cdot 3,5 \cdot 10^3\ km \simeq 1,36 \cdot 10^6\ km$$

cioè più di 100 diametri terrestri.

d. Le distanze delle stelle più vicine

Per misurare la distanza di una stella si può utilizzare il metodo della triangolazione usando come base il diametro dell'orbita terrestre (vedi fig. A.7).

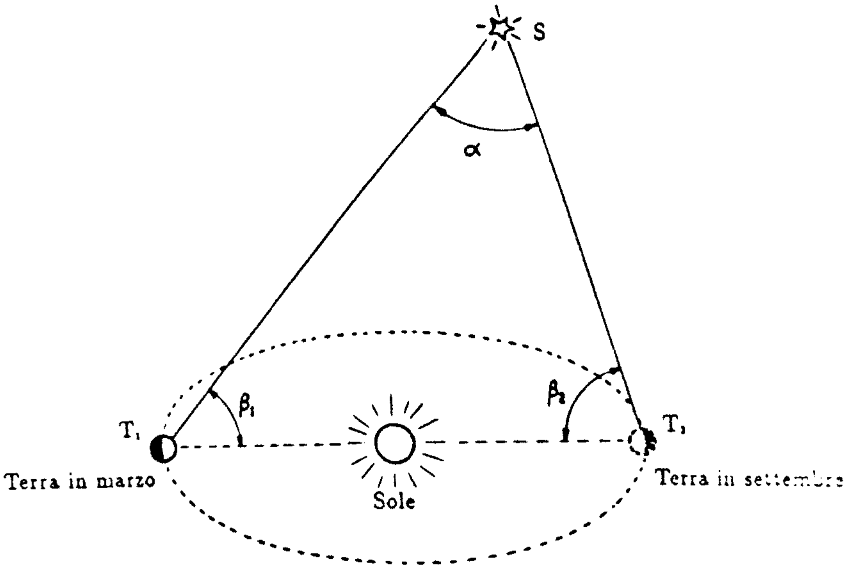


Figura A.7

Misurando l'angolo β a distanza di 6 *mesi*, quando cioè la Terra si trova in due posizioni opposte sull'orbita, si ottiene

$$\alpha = 180^\circ - \beta_1 - \beta_2$$

Considerando il triangolo T_1ST_2 come un settore circolare di raggio $\overline{T_1S} = \overline{T_2S} = \overline{TS}$ abbiamo

$$\alpha \ : \ 360^\circ = \overline{T_1T_2} \ : \ 2\pi\overline{TS}$$

da cui

$$\overline{TS} = \overline{T_1T_2} \cdot \frac{360^\circ}{2\pi\alpha}$$

La misura dell'angolo α è estremamente difficile e fu ottenuta per la prima volta solo nel 1837.

Per la stella più vicina alla Terra, la Proxima Centauri, si è ottenuto

$$\alpha \simeq 1,5''$$

Risulta allora

$$\overline{TS} = \overline{T_1T_2} \cdot \frac{360 \cdot 3600}{2\pi \cdot 1,5} \simeq 300 \cdot 10^6\ km \times 1,4 \cdot 10^5 = 4,2 \cdot 10^{13}\ km$$

Prima di concludere questa Appendice osserviamo che il *metro* o il *kilometro* sono unità di misura troppo piccole per indicare le distanze astronomiche.

In Astronomia si preferisce utilizzare, a seconda dei casi, le seguenti unità di misura

- *unità astronomica* (UA): è la distanza media tra le Terra ed il Sole.

$$1\ UA = 1,496 \cdot 10^{11}\ m$$

- *anno-luce* ($a.l.$): è la distanza percorsa in un *anno* dalla luce. Poiché la velocità di propagazione della luce nel vuoto è $c = 2,998 \cdot 10^8\ m/s$ abbiamo

$$1\ a.l. = 2,998 \cdot 10^8\ m/s \times 3,1557 \cdot 10^7\ s = 9,46 \cdot 10^{15}\ m$$

- *parsec* (pc): è la distanza alla quale un segmento di lunghezza pari ad $1\ UA$ è visto sotto un angolo di $1''$.

$$1\ pc = (360 \cdot 3600/2\pi)\ UA = 2,06 \cdot 10^5\ UA = 3,09 \cdot 10^{16}\ m$$

DA.2 Calcolare in $a.l.$ la distanza della stella più vicina alla Terra.

DA.3 Quanto tempo impiega la luce per venire dal Sole alla Terra? E dalla Luna alla Terra?

APPENDICE B - Il calendario

"Oggi oggi è Oggi;
domani Oggi sarà Ieri
e Domani Oggi"

1. *Introduzione*

Il termine italiano *calendario* ha origine dal latino *calendarium*, che significa libro dei conti. Calendarium a sua volta deriva da *calendae*, nome che gli antichi Romani davano al primo giorno di ogni mese; in questo giorno venivano annunciate le giornate di mercato, le feste e tutti i momenti importanti del mese.

Noi ora chiamiamo *calendario* un modo *convenzionale* di suddividere il trascorrere del tempo in *periodi* in modo conveniente per *regolare* la vita civile e le osservanze religiose, per *datare* gli avvenimenti e celebrarne il ricordo. I calendari utilizzati nelle diverse comunità umane (a partire dai più antichi calendari pratici dell'antico Egitto o da quello chiamato Juliano degli antichi Romani, fino a quello Islamico e a quello Gregoriano) si basano sul moto apparente del Sole attorno alla Terra e/o su quello della Luna e quindi su periodi naturali.

2. *I periodi naturali*

Il più evidente periodo naturale è il *giorno*. Si usa oggi definire il giorno come l'*intervallo di tempo tra una mezzanotte e quella successiva*. Troviamo tuttavia anche altre definizioni come, per esempio, quella ebraica, che definisce il giorno da un tramonto a quello successivo, e quella somala (non ufficiale) che intende il giorno da un'alba a quella successiva.

Il ciclo delle fasi lunari, semplice da osservare e riconoscere, è un altro periodo adottato per scandire il tempo. Esso viene chiamato *mese*. Molti fenomeni naturali hanno delle scadenze mensili e per questo il mese ha assunto un grande significato soprattutto per le osservanze religiose. La datazione del Ramadan e dell'Adha per i musulmani e della Pasqua per i cristiani sono i più celebri esempi.

L'alternarsi delle stagioni, siano esse *due* (nelle regioni tropicali), *tre* (per gli Egizi) o *quattro* (per i popoli delle regioni temperate) fu presto ricondotto al moto apparente del Sole sulla volta celeste (da nord a sud). Questo periodo, che conta più di dodici mesi, viene chiamato *anno*.

Tra i periodi più usati quasi ovunque dobbiamo ricordare la *settimana*, introdotta come intervallo di tempo tra un giorno di mercato e il giorno di mercato successivo e che pertanto aveva in passato durata variabile nelle diverse comunità. Furono i Babilonesi ad associare la settimana alle fasi della Luna, definendola, come facciamo noi oggi, come un gruppo di sette giorni con nomi derivati da quelli del Sole, della Luna e dei pianeti.

3. *Determinazione dei periodi*

Risulta comodo assumere il giorno, che è il più breve dei periodi naturali, come unità di misura del tempo. Il *giorno* è il periodo dell'apparente moto del Sole dovuto alla rotazione della Terra attorno al suo asse ed è definito come l'intervallo di tempo tra due passaggi consecutivi del Sole sopra un meridiano. Tale durata varia, seppur di poco, a seconda delle stagioni. Si definisce, perciò, il giorno solare medio che corrisponde al moto di un Sole fittizio che ruota uniformemente. Di questo giorno si definiscono i sottomultipli che sono: l'*ora*, uguale ad un ventiquattresimo del giorno (antica usanza egizia), il *minuto*, uguale ad un sessantesimo dell'ora, ed il *secondo*, uguale ad un sessantesimo del minuto (tradizione sumera).

Il *mese* è l'intervallo di tempo tra una Luna nuova e quella successiva. A questo intervallo, detto *mese sinodico*, è attribuito oggi il valore di 29,53059 *giorni*.

Una determinazione conveniente della durata dell'anno è quella che fa riferimento all'apparente moto del Sole da sud a nord e ritorno tra i due solstizi. Si definisce quindi *l'anno solare tropico* come l'intervallo di tempo tra due equinozi di primavera successivi, a cui oggi si attribuisce il valore di $365,242199$ *giorni* (solari medi).

Nell'antichità le durate del mese e dell'anno non erano note con questa precisione. Il valore di $29,5$ *giorni* per la durata del mese era però ben noto fin dai tempi più antichi, come pure quello di $365,25$ *giorni* per la durata di un anno. Con il progresso dei metodi impiegati nelle osservazioni astronomiche Ipparco (secondo secolo a.C.) riuscì a determinare la durata dell'anno in $365,242$ *giorni*. Quattro secoli fa il valore di $365,2422$ *giorni* venne assunto alla base del calendario Gregoriano.

Risultava quindi, fin dai tempi più remoti, che l'incommensurabilità tra il mese e l'anno e tra questo e il giorno doveva creare difficoltà nella costruzione di un calendario che evidenziasse le fasi della Luna come un importante raggruppamento di giorni e tenesse il passo con il susseguirsi delle stagioni. La tecnica dell'intercalare i periodi definiti con un giorno (o più giorni) o con un mese seguendo delle regole fisse apparve presto indispensabile nella compilazione di un calendario.

4. *Il calendario Egizio*

È un calendario luni-solare in cui i mesi sono fissati di trenta giorni ciascuno e l'anno è costituito da dodici mesi. Gli egiziani determinavano la durata dell'anno mediante osservazioni sul sorgere eliaco (cioè contemporaneo al Sole) di una particolare stella, Sirio. Essi sapevano che l'anno misura $365,25$ *giorni*, tuttavia, nel compilare il calendario, trascuravano la frazione del giorno e correggevano gli sfasamenti intercalando cinque giorni dopo l'ultimo giorno dell'ultimo mese. Si ha così :

$$1\ \textit{anno di calendario} = 12\ \textit{mesi} \times 30\ \textit{giorni} + 5\ \textit{giorni} = 365\ \textit{giorni}$$

I cinque giorni extra non venivano attribuiti ad alcun mese. La frazione di

$0,25$ *giorni* trascurata causava uno sfasamento di un giorno ogni quattro anni e quindi di un anno intero ogni 1460 anni. Più precisamente 1461 anni di calendario misuravano 1460 anni solari. Dopo questo lungo periodo tutto ricominciava come prima.

Le stagioni per gli Egizi erano soltanto tre: la stagione dell'inondazione del Nilo; la stagione della semina, quando il Nilo rientrava nel suo letto; la stagione della raccolta, quando l'acqua del Nilo era bassa.

I mesi non avevano nomi, ma venivano numerati, ciascuno nella propria stagione.

Il giorno aveva inizio col sorgere del Sole e veniva diviso in parte diurna e parte notturna, ciascuna divisa in dodici ore. La durata dell'ora non era quindi la stessa durante l'anno.

5. *Il calendario Gregoriano*

È il sistema più perfezionato, in uso oggi nella maggior parte dei paesi della Terra. Esso è basato sull'assunzione del valore di $365,2422$ *giorni* per la durata dell'anno solare tropico e sul principio di mantenere in fase i mesi del calendario e le stagioni. Quest'ultimo principio è ricondotto al mantenimento di una data fissa (21 Marzo) per l'equinozio di primavera.

I mesi sono 12, di cui 7 hanno la durata di 31 giorni, 4 hanno la durata di 30 giorni e 1 di 28 giorni (negli anni bisestili di 29 giorni). Si ha così in un anno normale:

$$1\ anno = 7 \times 31 + 4 \times 30 + 28 = 365\ giorni$$

I nomi dei mesi e la loro durata sono: Gennaio (31), Febbraio (28 o 29), Marzo (31), Aprile (30), Maggio (31), Giugno (30), Luglio (31), Agosto (31), Settembre (30), Ottobre (31), Novembre (30) e Dicembre (31).

Ogni anno normale di calendario risulta più breve di $0,2422$ *giorni* rispetto all'anno solare tropico. Pertanto, se ogni 4 anni di calendario si aggiunge un giorno, cioè si rende il quarto anno di 366 giorni (*anno bisestile*), si ottiene che la durata dei 4 anni è più lunga dei corrispondenti 4 anni solari di 0,0312 *giorni*. Per eliminare questo inconveniente si introduce nel sistema un correttivo: gli anni centenari, pur essendo divisibili per 4 e quindi bisestili, non sono bisestili a meno che non siano divisibili per 400. Così l'anno 1600 era un anno bisestile, gli anni 1700, 1800 e 1900 non lo erano, mentre l'anno 2000 sarà bisestile.

L'anno numero 1 del calendario Gregoriano è l'anno della nascita di Cristo. Oggi è il ..... del mese di .... dell'anno .... dell'Era Cristiana (d.C.).

6. *Il calendario Musulmano*

L'Era Musulmana inizia con il giorno dell'Hejira, individuabile con il 16 Luglio dell'anno 622 dell'Era Cristiana.

Questo calendario è interamente lunare. I mesi in un anno sono 12. Di essi 6 hanno 29 giorni e 6 ne hanno 30. Si ha così:

$$1\ anno\ = 6 \times 29 + 6 \times 30\ =\ 354\ giorni$$

L'anno musulmano è così di 11 giorni più corto dell'anno normale del calendario Gregoriano.

Ogni mese inizia con la Luna nuova. Tale regola è rigorosamente rispettata con testimonianze oculari per l'inizio e la fine del mese del *Ramadan*.

I nomi dei mesi e la loro durata sono: Muharram (30), Safar (29), Rabi I (30), Rabi II (29), Jamada I (30), Jamada II (29), Rajab (30), Sha'ban (29), Ramadan (30), Shawwal (29), Thul-Qa'dah (30) e Thul-Hijjah (29).

Il calendario Musulmano non tiene il passo con le stagioni. Infatti i mesi retrocedono lungo le stagioni compiendo un ciclo intero ogni 32.5 anni solari. Risulta pertanto facile ricavare l'anno dell'Hejira che corrisponde ad esempio all'anno 1987 dell'Era Cristiana.

Abbiamo infatti

$$anno\ dell'Hejira\ :\ 1987 - 622 + (1987 - 622)/32,5 = 1365 + 42 \ = \ 1407$$

Oggi è il ..... del mese di .... dell'anno .... dell'era Musulmana.

7. *I fusi orari*

Abbiamo visto che in un dato luogo geografico dovrebbero essere le *ore* 12 quando il Sole si trova nel punto più alto del suo moto apparente nel cielo. Ma quando sono le *ore* 12 a Mogadiscio, a Kisimaio il Sole non ha ancora raggiunto il culmine della sua orbita, che raggiungerà invece 11 minuti più tardi. Infatti, siccome Kisimaio si trova a circa 300 km a ovest di Mogadiscio, possiamo scrivere la proporzione

$$24h \ : \ t \ = \ 40000km \ : \ 300km$$

da cui si ricava

$$t = 24h \cdot \frac{300}{40000} = 0,18h \simeq 11\ minuti$$

Pertanto quando a Mogadiscio è mezzogiorno a Kisimaio dovrebbero essere le *ore* 11 e 49 *minuti* (ora solare).

Poiché avere ore diverse in diverse località del Paese complicherebbe la vita di una Nazione, si è deciso di *unificare* l'ora di intere regioni per le quali le differenze di ora fossero abbastanza piccole da non creare problemi.

La Terra è stata così suddivisa in 24 'spicchi' verticali detti *fusi*: tutte le località all'interno del fuso hanno la stessa ora ed essa coincide con l'ora solare corrispondente al meridiano che passa nel mezzo del fuso (vedi fig. B.1). Tra un fuso e l'altro c'è la differenza di 1 *ora*, pertanto ogni fuso si estende in longitudine per 15° (infatti $360^o : 24 = 15^o$) cioè per

$$40000km/24 \simeq 1667km$$

Poiché i limiti dei fusi tengono conto dei confini degli Stati e di particolari esigenze delle popolazioni, essi assumono spesso contorni molto irregolari. Si è scelto come fuso di riferimento quello che ha come meridiano centrale il meridiano di Greenwich (Londra): l'ora dei fusi ad oriente di quello di Greenwich è avanti rispetto a quella del fuso base, mentre quella dei fusi ad occidente è in ritardo.

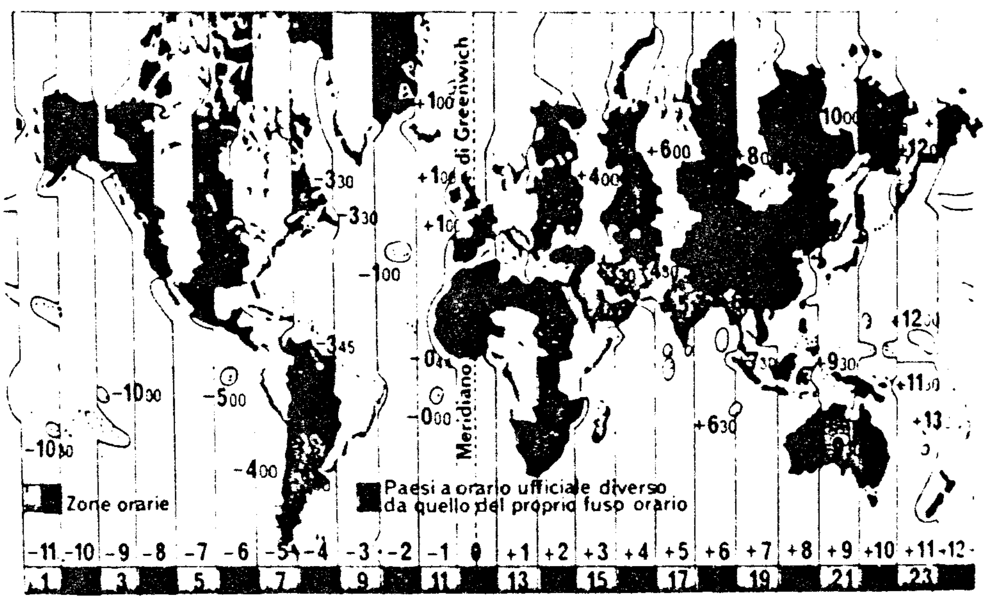


Figura $B.1$

All'antimeridiano di Greenwich si ha la *linea del cambiamento di data*; essa attraversa l'oceano Pacifico senza incontrare neppure un'isola. Quando un viaggiatore attraversa questa linea muovendosi verso oriente (cioè dall'Asia o Australia verso le Americhe) 'rivive' due volte lo stesso giorno; chi invece viaggia verso occidente (dalle Americhe verso l'Asia o l'Australia) deve saltare un giorno.

PARTE C

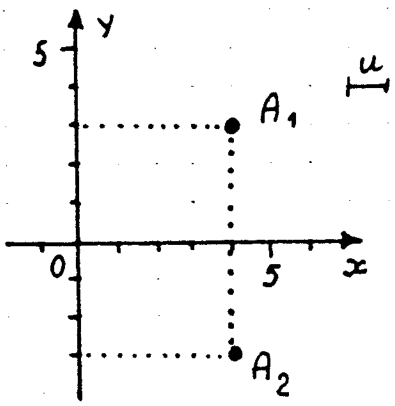
ESERCIZIARIO

In un eserciziario può essere scomodo scrivere sempre tutti i dati col numero corretto di cifre significative. Così, per semplicità, scriveremo che una stanza rettangolare di lati $l_1 = 3,3m$ *e* $l_2 = 8m$ *ha un'area* $S = 26,4m^2$, *invece di scrivere correttamente che una stanza rettangolare di lati* $l_1 = 3,30m$ *e* $l_2 = 8,00m$ *ha un'area* $S = 26,4m^2$.
Assumeremo cioè, in generale, che tutti i dati forniti negli esercizi siano noti con tre cifre significative, a meno che non venga data esplicitamente una diversa indicazione.

CAPITOLO IA

ESERCIZI RISOLTI

1. Fissato un sistema di assi cartesiani Oxy, si determini il punto A di ascissa $x_A = 4\,u$ la cui distanza dall'origine O è $\overline{OA} = 5\,u$.



La distanza del punto A dall'origine è data da

$$\overline{OA}^2 = x_A^2 + y_A^2$$

sostituendo i valori dati ottengo

$$25u^2 = 16u^2 + y_A^2$$

da cui
$$y_A^2 = (25-16)u^2 = 9u^2$$

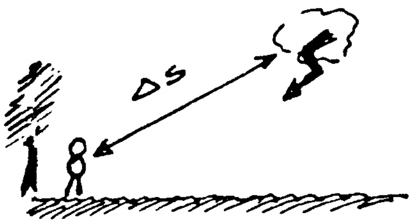
e
$$y_A = \sqrt{9u^2} = \pm 3u$$

Esistono quindi due punti di coordinate

$A_1(4,3)$ e $A_2(4,-3)$

che soddisfano al problema.

2. Un ragazzo, durante un temporale, vede un lampo e ode il rumore del tuono dopo 3,5 s. Sapendo che la velocità del suono nell'aria è $v = 340\ m/s$, calcolare la distanza a cui è avvenuto il lampo.



$v = 340\ m/s$

$\Delta t = 3,5\ s$

Per trovare a quale distanza Δs è avvenuto il lampo è sufficiente applicare la relazione

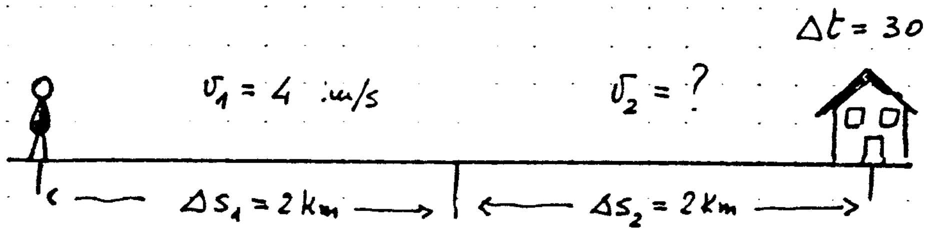
$$\Delta s = v \cdot \Delta t$$

Sostituendo i valori dati ottengo

$$\Delta s = 340\ m/s \cdot 3,5\ s = 1190\ m$$

Il lampo è avvenuto ad una distanza $\Delta s = 1190\ m \cong 1,2\ Km$ dalla posizione in cui si trovava il ragazzo.

3. Un ragazzo per tornare a casa ha corso per 2 Km ad una velocita' di 4 m/s e quindi ha camminato per altri 2 Km. Sapendo che per tornare a casa ha impiegato in tutto 30 minuti, calcolare a quale velocita' ha camminato.



Il ragazzo per percorrere i primi 2 Km ha impiegato un intervallo di tempo

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta s_1}{v_1} = \frac{2000 \text{ m}}{4 \text{ m/s}} = 500 \text{ s}$$

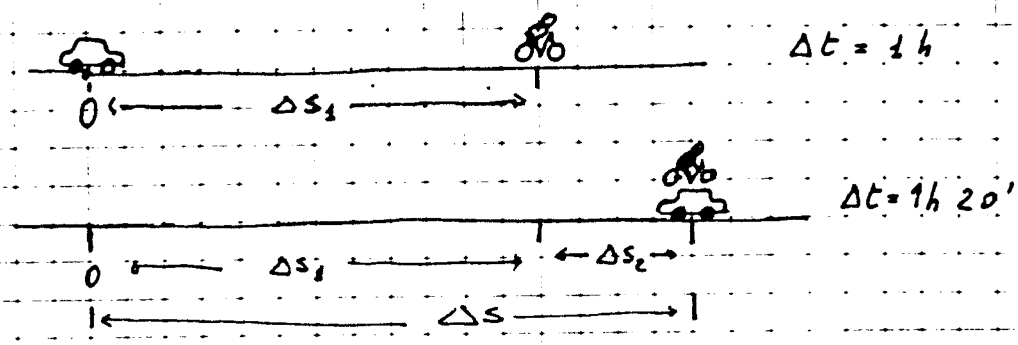
Per percorrere gli altri 2 Km ha quindi impiegato un intervallo di tempo

$$\Delta t_2 = \Delta t - \Delta t_1 = 30 \cdot 60 \text{ s} - 500 \text{s} = 1300 \text{ s}$$

Il ragazzo ha quindi camminato ad una velocita'

$$v_2 = \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} = \frac{2000 \text{ m}}{1300} = 1{,}54 \text{ m/s}$$

4. Un ciclista parte da Mogadiscio e viaggia alla velocita' $v = 5\ m/s$. Dopo un'ora, dallo stesso punto, parte un'automobile che raggiunge il ciclista in 20 minuti. A quale velocita' ha viaggiato l'automobile?



Quando l'automobile parte da Mogadiscio il ciclista ha percorso uno spazio

$$\Delta s_1 = v \cdot \Delta t = 5\ m/s \cdot (60 \cdot 60)\ s$$
$$= 18000\ m = 18\ km$$

Quando l'automobile raggiunge il ciclista, esso ha percorso ancora uno spazio

$$\Delta s_2 = 5\ m/s \cdot (20 \cdot 60)\ s =$$
$$= 6000\ m = 6\ km$$

Per raggiungere il ciclista l'automobile ha quindi percorso uno spazio $\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = 24\ km$ in un intervallo di tempo $\Delta t = (20 \cdot 60)\ s = 1200\ s$

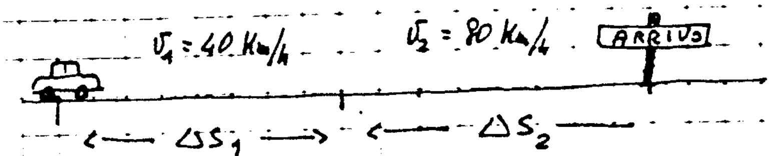
La sua velocità è stata quindi

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{24\,000\,m}{1200\,s} = 20\,m/s$$

$$= 72\ Km/h$$

— ★ — ★ — ★ —

5. Un'automobile percorre la prima metà del percorso alla velocità $v_1 = 40\ Km/h$ e la seconda metà alla velocità $v_2 = 80\ Km/h$. Calcolare la velocità media sull'intero percorso.



$\Delta s_1 = \Delta s_2$

Per trovare la velocità media posso utilizzare la relazione

$$v_m = v_1 \frac{\Delta t_1}{\Delta t} + v_2 \frac{\Delta t_2}{\Delta t} \qquad 1)$$

dove $\Delta t_1 = \dfrac{\Delta s_1}{v_1}$ $\quad \Delta t_2 = \dfrac{\Delta s_2}{v_2}$ $\quad \Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$

Non conosco il valore di Δs_1 e Δs_2 ma so che

$\Delta s_1 = \Delta s_2$ e $\cancel{v_2 = 2 v_1}$ $v_1 = \frac{1}{2} v_2$

Posso allora scrivere

$$\Delta t_1 = \frac{\Delta s_2}{v_2/2} = 2\,\frac{\Delta s_2}{v_2} = 2\,\Delta t_2$$

e

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 2\Delta t_2 + \Delta t_2 = 3\,\Delta t_2$$

La relazione 1) diventa allora

$$v_m = v_1 \cdot \frac{2\Delta t_2}{3\Delta t_2} + v_2\,\frac{\Delta t_2}{3\Delta t_2} = \frac{2}{3}v_1 + \frac{1}{3}v_2$$

Sostituendo i valori dati ottengo

$$v_m = \frac{2}{3}\,40\ \mathrm{Km/h} + \frac{1}{3}\,80\ \mathrm{Km/h} = \frac{160}{3}\ \mathrm{Km/h}$$

cioè $v_m = 53{,}3\ \mathrm{Km/h}$

Osservo che v_m è minore del valor medio delle due velocità

$$\frac{v_1 + v_2}{2} = 60\ \mathrm{Km/h}.$$

Infatti l'automobile si è mossa per un tempo doppio alla velocità minore!

CAPITOLO IA

ESERCIZI PROPOSTI

1. Si disegni su un foglio un sistema di assi cartesiani $0xy$ assumendo come unità di misura $1cm$. Si individuino i punti $A(-4,0)$ e $B(4,0)$ e si determinino le coordinate del punto C che costituisce il terzo vertice del triangolo equilatero ABC. Si controlli mediante un regolo che $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CA}$.

2. Il raggio della Terra è di circa 6400 km; quanti *minuti* impiega un astronauta, su una capsula spaziale che viaggia a 8 km/s ad una altezza di 160 km sopra la Terra, per compiere un'orbita completa?
($\sim 86\ min$)

3. Un'automobile percorre un tratto di strada alla velocità costante di $108km/h$. Quanti *kilometri* percorre in $45s$?
($1,35km$)

4. A $3,6km$ dal traguardo due ciclisti si trovano insieme. Il ciclista A viaggia alla velocità costante di $36km/h$, il ciclista B alla velocità costante di $39,6km/h$. Chi dei due vincerà la gara e con quale vantaggio?
(vince B con $32,7s$ di vantaggio)

5. Un automobilista percorre 3 giri di un circuito lungo $22km$ impiegando in ciascun giro i seguenti tempi: $t = 13'$, $t = 12'$, $t = 12'15''$.
Calcolare le velocità medie in ciascun giro e la velocità media sull'intero percorso.
($v = 102\ km/h$; $v = 110\ km/h$; $v = 108\ km/h$; $v = 106\ km/h$)

6. Un ciclista percorre 3480 m in $10min$, poi ancora 810 m in $4min$ e $30s$. Calcolare la velocità media nel primo tratto, nel secondo e sull'intero percorso, esprimendola in km/h e in m/s.
($v = 5,8m/s = 21km/h$; $v = 3m/s = 11km/h$; $v = 4,9m/s = 18km/h$)

7. Un atleta percorre i $100m$ in $10,2s$ e i $200m$ in $20,1s$. In quale delle due gare ha tenuto la maggiore velocità media? Calcolare le velocità in m/s e in km/h.
($v = 9,80m/s = 35,3km/h$; $v = 9,95m/s = 35,8km/h$)

8. Un'automobile copre un percorso alla velocità media di $120km/h$ impiegando $1h13min30s$. Quale è la lunghezza del percorso?
($\Delta s = 147km$)

9. Un'automobile percorre un circuito lungo $36,4km$ alla velocità media di $120km/h$. Quanti *minuti* impiega a compiere il circuito?
($\Delta t = 18min\ 12s$)

10. Un bambino è fermo in mezzo a una strada mentre a $500m$ di distanza un'automobile procede verso il bambino con velocità di $20m/s$. Quanto tempo rimane al bambino per non essere investito?
$(\Delta t = 25s)$

11. Due veicoli procedono l'uno verso l'altro rispettivamente alla velocità di $45km/h$ e $75km/h$. All'istante $t = 0$ essi si trovano alla distanza di $3km$. Dopo quanto tempo si incontreranno?
$(\Delta t = 1min\ 30s)$

12. Un'automobile percorre un terzo di un percorso alla velocità di $40km/h$ e gli altri due terzi alla velocità di $80km/h$. Trovare la velocità media.
$(v = 60\ km/h)$

13. Due veicoli A e B procedono nello stesso verso, il primo alla velocità di $40km/h$ e il secondo alla velocità di $60km/h$. Supposto che essi partano contemporaneamente dallo stesso luogo, dopo quanto tempo il secondo veicolo avrà distanziato il primo di $5\ km$?
$(\Delta t = 15\ min)$

14. Un veicolo A rincorre un altro veicolo B, partito $5min$ prima, con l'incarico di raggiungerlo. Supposto che il primo viaggi alla velocità di $100km/h$ e il secondo di $60km/h$, dopo quanto tempo A raggiungerà B?
$(\Delta t = 7min\ 30s)$

15. Un'automobile A tenta di raggiungere un'altra automobile B, partita $10s$ prima. Supposto che la velocità di B sia di $20m/s$, quale dovrà essere la velocità di A per raggiungere B in $1min$ e $30s$?
$(v = 22{,}2\ m/s)$

16. All'istante $t = 0$ un veicolo A ha un vantaggio di $120m$ su un altro veicolo B che procede nello stesso verso. Supposto che la velocità di B superi quella di A di $5m/s$, dopo quanto tempo A sarà raggiunto?
$(\Delta t = 24s)$

CAPITOLO IA

TEST E QUESITI

1. Un oggetto che si muove di moto rettilineo uniforme ha percorso 240 m in 2 *minuti*. Dire se le seguenti affermazioni sono *vere* o *false*.
   a. L'oggetto si è mosso con una velocità $v = 120\ m/s$.
   b. L'oggetto si è mosso con una velocità $v = 120\ km/h$.
   c. L'oggetto si è mosso con una velocità $v = 2\ m/s$.
   d. L'oggetto in 1 *ora* percorre $7,2\ km$.

2. Un automobile ha impiegato 3 *ore* per percorrere 120 km. Dire se le seguenti affermazioni *sono false* o *potrebbero essere vere*.
   a. L'automobile ha percorso i primi 90 km ad una velocità di 30 km/h.
   b. L'automobile ha viaggiato sempre a velocità costante.
   c. L'automobile ha percorso gli ultimi 80 km ad una velocità di 30 km/h.
   d. L'automobile ha viaggiato per 2 *ore* a 60 km/h e si è fermata per 1 *ora*.

3. Un oggetto si muove con velocità costante $v = 30\ km/h$. Dire se le seguenti affermazioni sono *vere* o *false*.
   a. In 10 *minuti* percorre 5000 m.
   b. Percorre 90 km in 3 *minuti*.
   c. Per percorrere $30m$ impiega $1s$.
   d. Per percorrere 3 km impiega 10 *minuti*.

4. Due automobili A e B possono viaggiare rispettivamente alla velocità $v_A = 50\ km/h$ e $v_B = 100\ km/h$. Dire se le seguenti affermazioni sono *vere* o *false*.
   a. Se l'automobile A per percorrere un certo percorso impiega 30 min, l'automobile B per percorrere lo stesso percorso impiega 15 min.
   b. Se l'automobile A impiega 10 *minuti* per andare in un certo paese, l'automobile B per andare nello stesso paese impiega 20 *minuti*.
   c. Se l'automobile B in un certo intervallo di tempo percorre 50 km, nello stesso intervallo di tempo l'automobile A percorre 100 km.
   d. Se le due automobili sono partite insieme alle *ore* 8 del mattino e l'automobile B è arrivata in un certo paese alle *ore* 9.30, l'automobile A arriverà nello stesso paese alle *ore* 11.

5. Un oggetto si muove con velocità v_1 per un intervallo di tempo Δt_1 e con velocità v_2 per il successivo intervallo di tempo Δt_2. Qual è la sua velocità media? Indicala con una crocetta.

a. $\dfrac{v_1 + v_2}{2}$

b. $\dfrac{v_1\Delta t_1 + v_2\Delta t_2}{2}$

c. $\dfrac{v_1\Delta t_1 + v_2\Delta t_2}{v_1 + v_2}$

d. $\dfrac{v_1 + v_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$

e. $\dfrac{v_1\Delta t_1 + v_2\Delta t_2}{\Delta t_1 + \Delta t_2}$

f. I dati sono insufficienti.

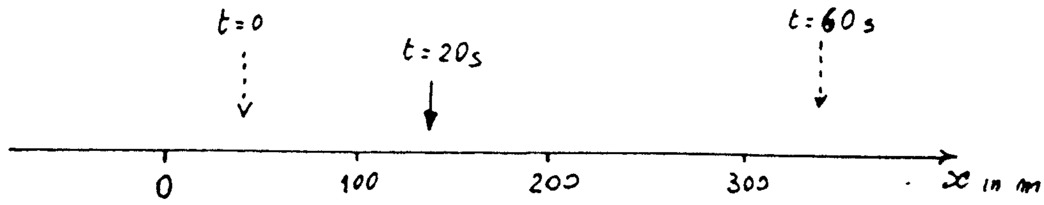
6. Alcuni studenti discutono sul modo di calcolare la velocità media di un oggetto che percorre Δs_1 *metri* in Δt_1 *secondi* e, successivamente, Δs_2 *metri* in Δt_2 *secondi*. Qual è la risposta giusta fra quelle qui elencate? Indicala con una crocetta.
   a. Si calcola la velocità media v_1 dell'oggetto nel primo intervallo di tempo e quella v_2 nel secondo intervallo. La velocità media nell'intervallo di tempo $\Delta t_1 + \Delta t_2$ è data dalla somma $v = v_1 + v_2$.
   b. Si calcolano le velocità medie v_1 e v_2 relative agli intervalli di tempo Δt_1 e Δt_2 e si fa la loro media aritmetica: $v = (v_1 + v_2)/2$.
   c. Per calcolare la velocità media si calcola lo spazio totale $\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2$ e si divide per l'intervallo di tempo totale $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2$ impiegato a percorrerlo.

7. Nel seguente brano è contenuta una affermazione sbagliata.
Ahmed racconta all'amico: "Quando ero in Italia ho viaggiato sul nuovo treno superveloce MIRO da Milano a Roma e ad un certo momento il treno viaggiava ad una velocità superiore a 180 km/h. Infatti ha impiegato meno di $20s$ per percorrere 1 km."
"È impossibile!" interviene Mohamed "Quel treno impiega 4 *ore* per andare da Milano a Roma e siccome la distanza tra Milano e Roma è circa 600 km, la velocità del treno è solo di 150 km/h."
Chi ha ragione, Ahmed o Mohamed?

CAPITOLO IIA

ESERCIZI RISOLTI

1. Un oggetto si muove in linea retta allontanandosi dall'origine con velocità costante $v = 5\ m/s$. All'istante $t = 20s$ si trova a $140m$ dall'origine. Dove si trovava all'istante $t = 0$? Dove si troverà all'istante $t = 60s$?



In questo caso l'equazione del moto è

$$x = x_0 + vt \qquad 1)$$

Poiché la velocità è costante, all'istante $t = 20s$ *conosco dell'oggetto la sua posizione* $x = 140m$ *e la sua velocità* $v = 5\ m/s$. *Le grandezze che compaiono nell'equazione* 1) *sono tutte note tranne la posizione iniziale* x_0, *che posso ricavare. Infatti*

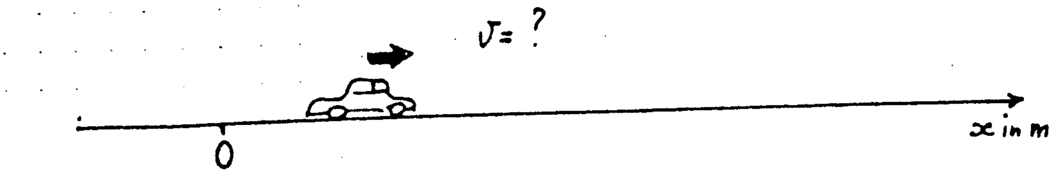
$$x_0 = x - vt = 140m - 5m/s \cdot 20s = 40m$$

All'istante $t = 0$, *l'oggetto si trovava quindi a* $40m$ *dall'origine.*
All'istante $t = 60s$ *l'oggetto si troverà nella posizione*

$$x = 40m + 5\ m/s \cdot 60s = 340m$$

cioè a $340m$ *dall'origine.*

2. Un'automobile si muove lungo un rettilineo con una legge oraria $x = A + Bt$ con $A = 5m$ e $B = 10\ m/s$. Calcolare
   a. la posizione dell'automobile all'istante $t_1 = 1s$;
   b. la velocità all'istante $t_1 = 1s$;
   c. lo spazio percorso nell'intervallo di tempo tra $t_2 = 5s$ e $t_3 = 10s$.



a. Per trovare la posizione dell'automobile all'istante $t_1 = 1s$ sostituisco questo valore del tempo nella legge oraria e ottengo

$$x_1 = 5m + 10m/s \cdot 1s = 15m$$

L'automobile si trova quindi a una distanza di 15m dall'origine dell'asse di riferimento.
b. La legge oraria è quella di un moto uniforme: la velocità quindi è sempre costante e vale $v = A = 10\ m/s$.
c. Per tovare lo spazio Δx percorso nell'intervallo di tempo $t_3 - t_2$ posso calcolare la posizione dell'automobile ai due istanti t_3 e t_2 e porre

$$\Delta x = x_3 - x_2$$

Essendo $x_3 = 5m + 10m/s \cdot 10s = 105m$ e $x_2 = 5m + 10m/s \cdot 5s = 55m$ ottengo

$$\Delta x = 105m - 55m = 50m$$

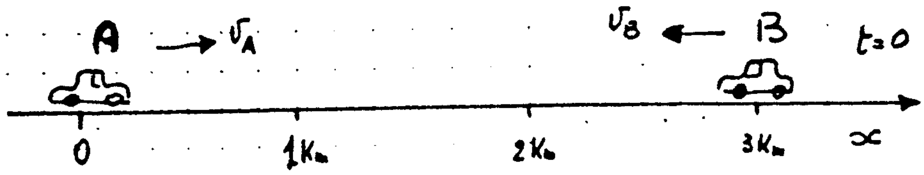
Per rispondere alla domanda potevo osservare che, essendo la velocità costante, vale sempre la relazione

$$\Delta x = v_x \cdot \Delta t$$

cioè

$$\Delta x = 10m/s \cdot (10s - 5s) = 50m$$

3. Due automobili A e B partono contemporaneamente dai due estremi di un rettilineo lungo 3 km e si muovono l'una verso l'altra con velocità costante $v_A = 10\ m/s$ e $v_B = 20\ m/s$. Trovare dopo quanto tempo e in quale posizione si incontrano.



Assumo un asse di riferimento con origine nella posizione iniziale dell'automobile A e diretto verso l'automobile B.
In tale riferimento le posizioni iniziali ($t = 0$) *delle due automobili sono*

$$x_A = 0 \qquad x_B = 3000m$$

Siccome i moti sono uniformi, le leggi orarie sono
per l'automobile A $\qquad x = v_A t$
per l'automobile B $\qquad x = x_B - v_B t$
Quando le due automobili si incontrano la loro posizione deve coincidere, cioè

$$v_A t = x_B - v_B t$$

Portando i termini con il tempo al primo membro ottengo

$$v_A t + v_B t = x_B$$

da cui

$$t = \frac{x_B}{v_A + v_B}$$

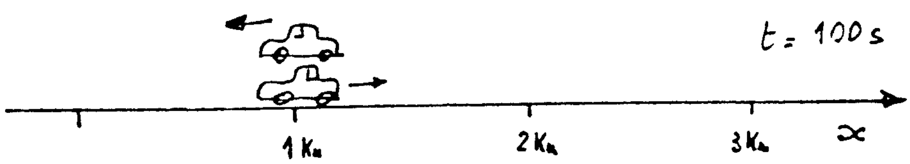
Sostituendo i dati del problema

$$t = \frac{3000m}{10\ m/s + 20\ m/s} = \frac{3000m}{30\ m/s} = 100s = 1'40''$$

Al tempo $t = 100s$ *la posizione dell'automobile A è*

$$x = v_A t = 10m/s \cdot 100s = 1000m = 1\ km$$

Quindi le due automobili si incontrano dopo 100s *ad una distanza di* 1 km *dal punto dove si trovava inizialmente l'automobile A.*



Per risolvere il problema potevo ragionare anche nel seguente modo. Ogni secondo l'automobile A percorre uno spazio $\Delta s_1 = v_1 \cdot 1s = 10m$ *e l'automobile B uno spazio* $\Delta s_2 = v_2 \cdot 1s = 20m$ *Quindi ogni secondo le due automobili si avvicinano di*

$$\Delta s = \Delta s_1 + \Delta s_2 = 10m + 20m = 30m$$

Perchè si incontrino deve passare un numero n *di secondi pari a*

$$n = \frac{3000m}{30m} = 100$$

cioè si incontrano dopo 100 *secondi.*

4. Un oggetto si muove lungo una linea retta per 5 *minuti* con velocità costante $v_1 = 1\ cm/s$, quindi si ferma per altri 5 *minuti* per poi ritornare al punto di partenza con velocità $v_2 = 0,5\ cm/s$. Disegnare il grafico spazio-tempo del moto.

Assumo come asse delle x *la retta del moto, come origine la posizione iniziale dell'oggetto e come verso positivo quello del moto.*
Per poter scegliere in modo corretto le unità di misura sugli assi determino dapprima lo spazio percorso Δx *nei primi* 5 *minuti e l'intervallo di tempo* Δt *impiegato a ritornare al punto di partenza. Siccome il moto è uniforme ho*

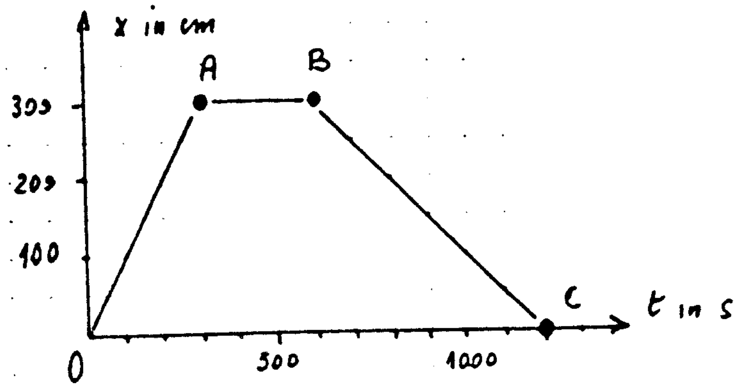
$$\Delta x = v_1 \cdot \Delta t_1 = 1cm/s \cdot (5 \cdot 60)s = 300cm$$

$$\Delta t_2 = \frac{|\Delta x|}{|v_2|} = \frac{300cm}{0,5\ cm/s} = 600s$$

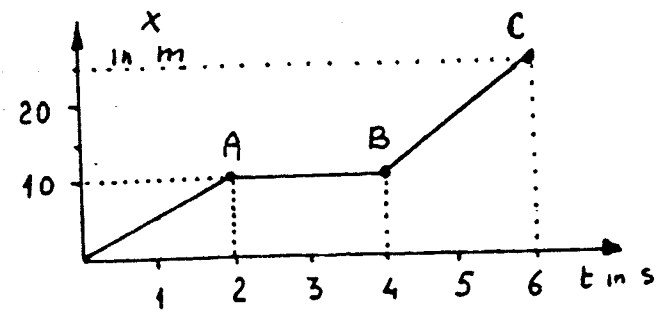
Assumo allora sull'asse dei tempi $1u = 100s$ *e sull'asse delle* x *assumo* $1u = 100cm$.
Ottengo

per $t = 0$	$x = 0$	*origine degli assi*
per $t = 5 \times 60s = 300s$	$x = 300cm$	*punto A*
per $t = 300s + 5 \times 60s = 600s$	$x = 300cm$	*punto B*
per $t = 600s + 600s = 1200s$	$x = 0$	*punto C*

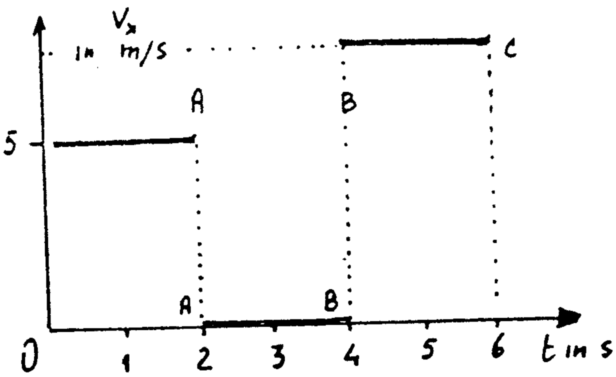
Disegno quindi i punti $A(300,\ 300)$, $B(600,\ 300)$ *e* $C(1200,\ 0)$ *e unisco tali punti con dei segmenti in quanto il moto è uniforme.*



5. Dal grafico spazio-tempo sotto riportato costruire il corrispondente grafico velocità-tempo e determinare la velocità media sull'intero percorso.



L'oggetto si muove nell'intervallo di tempo compreso tra $t_0 = 0$ *e* $t_1 = 2s$ *con moto uniforme percorrendo uno spazio* $\Delta x = 10m$. *La velocità è quindi* $v_1 = 10m/2s = 5\ m/s$. *Nell'intervallo di tempo tra* $t_1 = 2s$ *e* $t_2 = 4s$ *l'oggetto è fermo, quindi* $v_2 = 0$. *Nell'intervallo di tempo tra* $t_2 = 4s$ *e* $t_3 = 6s$ *l'oggetto si muove ancora di moto uniforme ma, siccome percorre uno spazio* $\Delta x = x_C - x_B = 15m$, *ha una velocità* $v_3 = 15m/2s = 7,5m/s$. *Il grafico velocità-tempo è quindi*



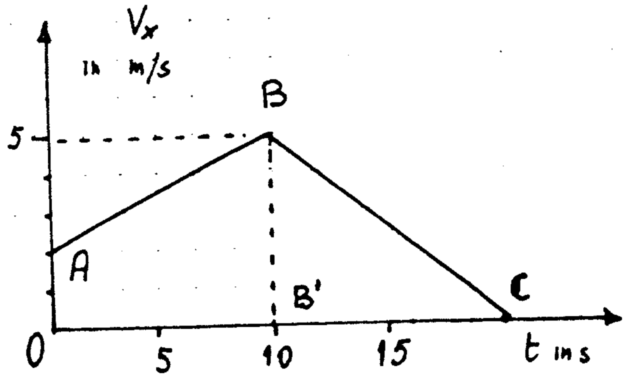
L'oggetto percorre in totale uno spazio $\Delta x = 10m + 15m = 25m$ impiegando un intervallo di tempo $\Delta t = 6s$. La velocità media è quindi

$$v_m = \frac{25m}{6s} = \frac{25}{6} m/s$$

Per trovare la velocità media potevo anche usare la formula

$$v_m = v_1 \frac{\Delta t_1}{\Delta t} + v_2 \frac{\Delta t_2}{\Delta t} + v_3 \frac{\Delta t_3}{\Delta t} = 5m/s \cdot \frac{2}{6} + 0 + 7,5m/s \cdot \frac{2}{6} =$$
$$= \frac{10+15}{6} m/s = \frac{25}{6} m/s$$

6. Un oggetto si muove nell'intervallo di tempo compreso tra $t = 0$ e $t = 20s$ con una velocità il cui valore è mostrato nel grafico sotto riportato. Descrivere il moto e calcolare lo spazio percorso in questo intervallo di tempo. Calcolare anche la velocità media nell'intervallo di tempo considerato.



Il grafico mostra che la velocità aumenta in modo uniforme nell'intervallo di tempo compreso tra $t = 0$ e $t = 10s$. In tale intervallo di tempo Δt_1 il moto è uniformemente accelerato con velocità iniziale $v_a = 2\ m/s$, velocità finale $v_b = 5\ m/s$ e quindi accelerazione $a_x = (5m/s - 2m/s)/10s = 0,3m/s^2$. Lo spazio percorso è dato dall'area del trapezio che ha come basi $\overline{OA} = v_a$ e $\overline{B'B} = v_b$ e come altezza $\Delta t_1 = 10s$, cioè

$$\Delta x_1 = \frac{v_a + v_b}{2} \cdot \Delta t_1 = \frac{2\ m/s + 5\ m/s}{2} \cdot 10s = 35m$$

Nell'intervallo di tempo compreso tra $t = 10s$ e $t = 20s$ il moto è uniformemente ritardato con velocità iniziale $v_b = 5\ m/s$, velocità finale $v_c = 0$ e quindi accelerazione $a_x = (0 - 5m/s)/10s = -0,5m/s^2$. Lo spazio percorso in tale intervallo di tempo Δt_2 è dato dall'area del triangolo rettangolo che ha come base $\overline{B'B} = v_b$ e come altezza $\Delta t_2 = 10s$, cioè

$$\Delta x_2 = \frac{v_b \cdot \Delta t_2}{2} = \frac{5\ m/s \cdot 10s}{2} = 25m$$

Lo spazio totale percorso è quindi

$$\Delta x = \Delta x_1 + \Delta x_2 = 35m + 25m = 60m$$

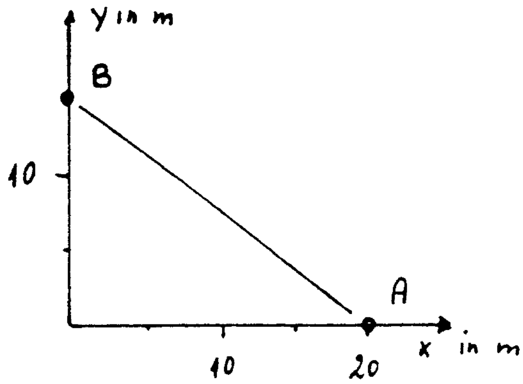
La velocità media è

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t_1 + \Delta t_2} = \frac{60m}{20s} = 3\ m/s$$

7. Due oggetti si muovono di moto uniforme su due semirette perpendicolari; i due oggetti sono partiti allo stesso istante dall'origine comune. A quale distanza si troveranno dopo $5s$, se le loro velocità sono rispettivamente $4m/s$ e $3m/s$?

Detti $\overline{OA}$ ed $\overline{OB}$ i cammini percorsi dai due oggetti, si ha

$$\overline{OA} = (4 \times 5)m = 20\ m$$
$$\overline{OB} = (3 \times 5)m = 15\ m$$



Applicando il teorema di Pitagora al triangolo OAB si trova

$$\overline{AB} = \sqrt{(20m)^2 + (15m)^2} = 25\ m$$

8. Un oggetto si muove di moto rettilineo con la seguente legge oraria
$$x = At + Bt^2$$
dove $A = 5\ m/s$ e $B = 10\ m/s^2$. Calcolare la velocità media nell'intervallo di tempo compreso tra $t_0 = 0$ e $t_1 = 1s$ e la velocità istantanea ai tempi t_0 e t_1.

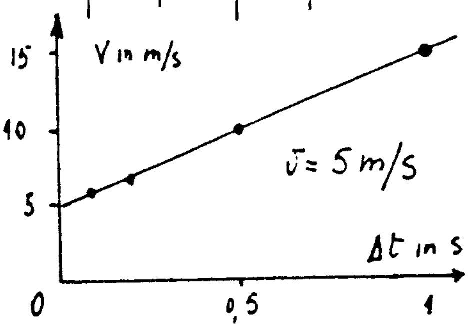
Per trovare la velocità media determino la posizione dell'oggetto ai due istanti t_0 e t_1. Sostituendo $t = 0$ e $t = 1s$ nella legge oraria ottengo

$$x_0 = 0 \qquad x_1 = 5m/s \cdot 1s + 10m/s^2 \cdot (1s)^2 = 15m$$

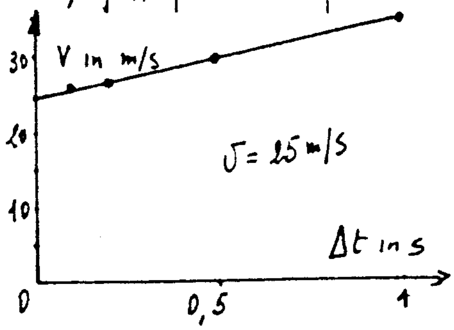
Quindi
$$v_m = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0} = \frac{15m}{1s} = 15\ m/s$$

Per calcolare le velocità istantanee ai tempi t_0 e t_1 posso calcolare le velocità medie per intervalli di tempo Δt sempre più piccoli e determinare graficamente il valore a cui tende il rapporto $\Delta x/\Delta t$.

t (s)	x (m)	Δx (m)	Δt (s)	Δx/Δt (m/s)
0	0			
1	15	15	1	15
0,5	5	5	0,5	10
0.2	1,4	1,4	0,2	7
0.1	0,6	0,6	0,1	6



t (s)	x (m)	Δx (m)	Δt (s)	Δx/Δt (m/s)
1	15			
2	50	35	1	35
1,5	30	15	0,5	30
1,2	20,4	5,4	0,2	27
1,1	17,6	2,6	0,1	26



Ottengo

per $t = 0$ $\quad v_0 = 5\ m/s$ $\quad$ *per* $t = 1$ $\quad v_1 = 25\ m/s$

Osservo che la velocità media nell'intervallo di tempo compreso tra t_0 *e* t_1 *è uguale al valor medio della velocità agli istanti* t_0 *e* t_1. *Infatti si ha*

$$\frac{v_0 + v_1}{2} = \frac{5 + 25}{2} m/s = 15\ m/s$$

9. Un'automobilista, mentre sta viaggiando ad una velocità $v_0 = 72\ km/h$, vede improvvisamente ad una distanza di $50m$ un autocarro fermo in mezzo alla strada. Sapendo che la massima decelerazione prodotta dai freni è $a = 5\ m/s^2$, riuscirà l'automobilista ad evitare lo scontro? Si supponga che l'automobilista inizi a frenare nell'istante stesso in cui vede l'autocarro.

Dall'istante in cui l'automobilista inizia a frenare ($t = 0$) *il moto dell'automobile è uniformemente ritardato. Assumendo come verso positivo dell'asse* x *quello in cui si muove l'automobile e come origine la posizione dell'automobile quando il guidatore vede l'autocarro ho*

$$a_x = -a \qquad v_{0x} = v_0 \qquad x_0 = 0$$

e le equazioni del moto diventano

$$x = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \qquad 1)$$

$$v_x = v_0 - at \qquad 2)$$

L'automobile si ferma all'istante t_f *tale che nella 2) si abbia* $v_x = 0$, *cioè*

$$0 = v_0 - a t_f$$

da cui

$$t_f = \frac{v_0}{a}$$

Sostituendo $t = t_f$ *nella* 1) *trovo la posizione* x_f *dell'automobile quando si ferma. Ottengo*

$$x_f = v_0 \cdot \frac{v_0}{a} - \frac{1}{2} a \cdot \frac{v_0^2}{a^2} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a}$$

Sostituendo i dati dell'esercizio ho

$$x_f = \frac{1}{2} \cdot \frac{(72\ km/h)^2}{5\ m/s^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(20\ m/s)^2}{5\ m/s^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{400\ m^2/s^2}{5\ m/s} = 40m$$

Siccome $x_f < 50m$ *non ci sarà lo scontro.*

10. Si consideri di nuovo l'esercizio n° 9 e si assuma che l'intervallo di tempo tra l'istante in cui l'automobilista vede l'autocarro fermo e quello in cui inizia a frenare sia $\Delta t = 0,4s$ (tale intervallo di tempo è detto *tempo di reazione*). Riuscirà ancora l'automobilista ad evitare lo scontro?

Per risolvere questo nuovo esercizio è sufficiente che tenga conto che prima di iniziare la frenata l'automobile si muove di moto uniforme, con velocità v_0, *per un intervallo di tempo* $\Delta t = 0,4s$ *percorrendo quindi uno spazio*

$$\Delta x = v_0 \cdot \Delta t = 20m/s \cdot 0,4s = 8m$$

All'istante in cui inizia a frenare ($t_1 = 0$) *l'automobile si trova quindi nella posizione* $x_0 = 8m$ *e la relazione* 1) *dell'esercizio precedente diventa*

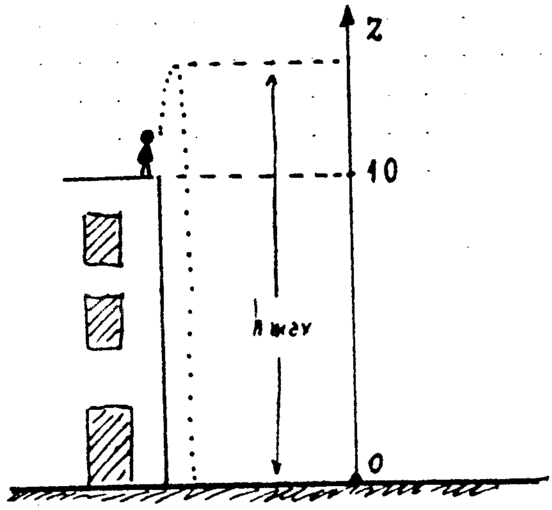
$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} a t^2$$

Sostituendo a t *il valore* $t_f = v_0/a$ *trovato nell'esercizio precedente ottengo*

$$x_f = x_0 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{a} = 8m + 40m = 48m$$

Siccome abbiamo ancora $x_f < 50m$, *l'automobilista riesce, anche in questo caso, a fermare l'automobile prima di scontrarsi con l'autocarro.*

11. Un ragazzo, stando sul tetto di una casa alta $10m$, lancia verso l'alto un sasso con velocità $v_0 = 10\ m/s$. Calcolare
   a. l'altezza massima, rispetto al suolo, raggiunta dal sasso;
   b. la velocità con cui il sasso arriva al suolo.



Assumo come riferimento un asse verticale con verso dal basso verso l'alto e origine al suolo. In tale riferimento le leggi del moto sono

$$z = z_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad 1)$$

$$v_z = v_0 - gt \qquad 2)$$

L'accelerazione è negativa in quanto il sasso viene accelerato dall'alto verso il basso, inoltre

$$z_0 = 10m \qquad e \qquad v_0 = 10\ m/s$$

Nell'istante in cui raggiunge la massima altezza il sasso è fermo, cioè $v_z = 0$. *Dalla* 2) *si ottiene che questo avviene al tempo* t_1 *tale che*

$$0 = v_0 - g t_1$$

da cui

$$t_1 = \frac{v_0}{g}$$

Sostituendo tale valore di t nella 1) *ottengo per l'altezza massima raggiunta dal sasso (ponendo, per semplicità,* $g = 10m/s^2$*)*

$$h_{max} = z_0 + v_0 \frac{v_0}{g} - \frac{1}{2} g \frac{v_0^2}{g^2} = z_0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{v_0^2}{g} \simeq 10m + \frac{1}{2} \cdot \frac{100m^2/s^2}{10m/s^2} = 15m$$

Quando il sasso arriva al suolo vuol dire che $z = 0$. Dalla 1) ottengo che questo avviene al tempo t_2 tale che

$$0 = z_0 + v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2$$

e anche

$$t_2^2 - \frac{2v_0}{g} t_2 - \frac{2z_0}{g} = 0$$

È questa una equazione di 2° grado con incognita t_2, le cui soluzioni sono

$$t_2 = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2z_0}{g}}$$

Sostituendo i valori numerici

$$t_2 = \frac{10\ m/s}{10\ m/s^2} \pm \sqrt{\frac{(10m/s)^2}{(10m/s^2)^2} + \frac{20m}{10\ m/s^2}} = 1s \pm \sqrt{1s^2 + 2s^2} =$$
$$= 1s \pm \sqrt{3s^2} = (1 \pm 1,73)s$$

Scartando la soluzione negativa che non ha significato fisico, ottengo $t_2 = 2,73s$. Sostituendo tale valore di t nella 2) ho

$$v_z = v_0 - g t_2 = 10\ m/s - 10m/s^2 \cdot 2,73s = -17,3\ m/s$$

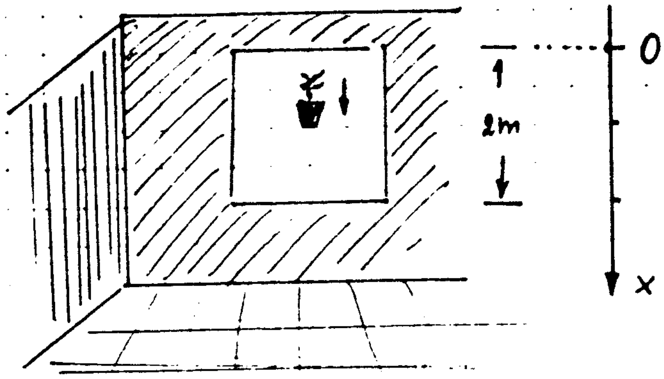
La velocità ha segno meno in quanto è diretta verso il basso, cioè nel verso negativo dell'asse z.
Per calcolare il valore della velocità con cui il sasso arriva a terra potevo anche usare direttamente la relazione

$$v = \sqrt{2 g h_{max}}$$

sostituendo

$$v = \sqrt{2 \cdot 10\ m/s^2 \cdot 15m} = \sqrt{300\ m^2/s^2} = 17,3\ m/s$$

12. Un ragazzo, stando nella sua stanza al primo piano di una casa a più piani e guardando attraverso una finestra alta $2m$, vede cadere un vaso. Egli valuta che l'intervallo di tempo impiegato dal vaso a percorrere la luce della finestra sia stato di $0,2s$. È possibile valutare da quale altezza è stato lasciato cadere il vaso?



Consideriamo il vaso all'istante $t = 0$ in cui arriva all'inizio della finestra. Cadendo dall'alto esso possiede a quell'istante una velocità v_0 che non conosciamo. Sappiamo però che successivamente esso, muovendosi di moto uniformemente accelerato con accelerazione g, percorre uno spazio $\Delta x = 2m$ in un intervallo di tempo $\Delta t = 0,2s$.
Assumendo un sistema di riferimento diretto verso il basso con origine nel punto più alto della finestra, posso scrivere l'equazione di moto

$$x = v_0 \cdot t + \frac{1}{2}gt^2 \qquad 1)$$

essendo $x_0 = 0$. Dai dati dell'esercizio si ha che per $t = 0,2s$ è $x = 2m$. Sostituendo tali valori nella 1) e ponendo $g = 10m/s^2$, ottengo

$$2m = v_0 \cdot 0,2s + \tfrac{1}{2} \cdot 10m/s^2 \cdot (0,2s)^2$$

da cui

$$v_0 = \frac{2m - 0,2m}{0,2s} = 9\ m/s$$

A questo punto posso utilizzare la relazione

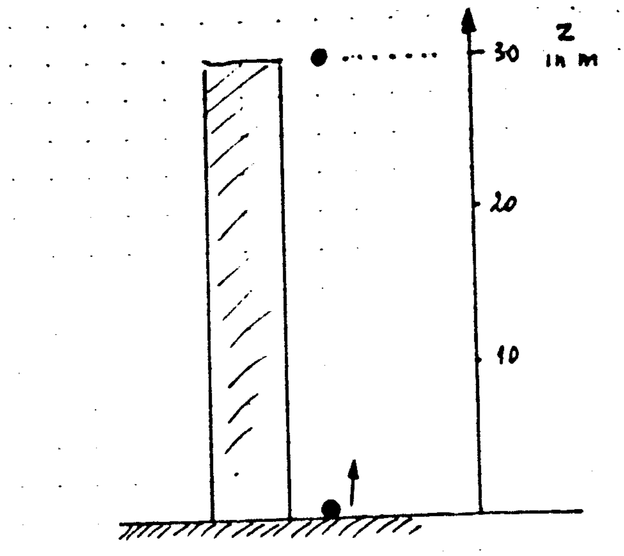
$$v = \sqrt{2gh}$$

che fornisce il valore della velocità finale di un oggetto che cade da un'altezza h: il vaso per possedere all'inizio della finestra una velocità $v_0 = 9\ m/s$ deve essere caduto da una altezza

$$h = \frac{v_0^2}{2g} \simeq 4m$$

Il vaso è stato lasciato cadere dalla finestra del terzo piano.

13. Da una torre di altezza $h = 30m$ viene lasciato cadere un sasso, mentre, nello stesso istante, dal suolo viene lanciato verso l'alto verticalmente un altro sasso con velocità iniziale $v = 10\ m/s$. Calcolare dopo quanto tempo i due sassi si incontrano e a quale distanza dal suolo.



Assumo come asse di riferimento un'asse verticale diretto dal basso verso l'alto e con origine il suolo. Assumendo come istante iniziale $t = 0$ l'istante in cui il sasso A viene lasciato cadere ($z_0 = h$, $v_0 = 0$) e il sasso B viene lanciato verso l'alto ($z_0 = 0$, $v_0 = v$), le leggi orarie per i due moti sono

$$z_A = h - \frac{1}{2}gt^2$$

$$z_B = vt - \frac{1}{2}gt^2$$

I due sassi si incontrano all'istante t_1 per cui $z_A = z_B$, cioè quando

$$h - \frac{1}{2}gt_1^2 = vt_1 - \frac{1}{2}gt_1^2$$

da cui

$$t_1 = \frac{h}{v} = \frac{30m}{10\ m/s} = 3s$$

In tale istante abbiamo

$$z_A = z_B = 30m - \frac{1}{2} \cdot 10\ m/s^2 \cdot (3s)^2 = 30m - 45m = -15m$$

Tale posizione corrisponde ad un punto sotto terra. I due sassi quindi non si incontrano durante il loro moto.
Infatti il sasso B per salire e scendere impiega un intervallo di tempo

$$\Delta t_B = 2\frac{v_0}{g} = 2 \cdot \frac{10\ m/s}{10\ m/s} = 2s$$

mentre il sasso A per raggiungere il suolo impiega un intervallo di tempo

$$\Delta t_A = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 30m}{10\ m/s^2}} = \sqrt{6s^2} \simeq 2,5s$$

CAPITOLO IIA

ESERCIZI PROPOSTI

1. Due veicoli procedono l'uno verso l'altro rispettivamemte alla velocità di 45 km/h e 75 km/h. All'istante $t = 0$ essi si trovano alla distanza di 3 km. Dopo quanto tempo si incontreranno?(•)

   ($\Delta t = 1min\ 30s$)

2. Due veicoli A e B procedono nello stesso verso, il primo alla velocità di 40 km/h e il secondo alla velocità di 60 km/h. Supposto che essi partano contemporaneamente dallo stesso luogo, dopo quanto tempo il secondo veicolo avrà distanziato il primo di 5 km?(•)

   ($\Delta t = 15\ min$)

3. Un veicolo A rincorre un altro veicolo B, partito 5 min prima, con l'incarico di raggiungerlo. Supposto che il primo viaggi alla velocità di 100 km/h e il secondo alla velocità di 60 km/h, dopo quanto tempo A raggiungerà B?(•)

   ($\Delta t = 7min\ 30s$)

4. Un'automobile A tenta di raggiungere un'altra automobile B, partita $10s$ prima. Supposto che la velocità di B sia di $20m/s$, quale dovrà essere la velocità di A per raggiungere B in $1min$ e $30s$?(•)

   ($v = 22\ m/s$)

5. All'istante $t = 0$ un veicolo A ha un vantaggio di $120m$ su un altro veicolo B che procede nello stesso verso. Supposto che la velocità di B superi quella di A di 5 m/s, dopo quanto tempo A sarà raggiunto?(•)

   ($\Delta t = 24s$)

6. Un ciclista parte da Mogadiscio e viaggia alla velocità $v_C = 5\ m/s$. Dopo $1h$, dallo stesso punto, parte un'automobile che raggiunge il ciclista in 20 min. A che velocità v_A ha viaggiato l'automobile?

   ($v_A = 20\ m/s = 72\ km/h$)

7. Due successive letture del tachimetro di un'automobile, eseguite ad un intervallo di tempo di $50s$, danno: $v_1 = 20\ km/h$; $v_2 = 74\ km/h$. Calcolare l'accelerazione media durante i $50s$.

   ($a = 0,3\ m/s^2$)

(•) - Questi esercizi sono già stati proposti nel cap.IA. Risolvili nuovamente usando la legge oraria e/o le velocità relative.

8. Calcolare l'accelerazione costante di un oggetto che, partendo da fermo, percorre $2,2m$ in $3,5s$.

$(a = 0,36\ m/s^2)$

9. Un oggetto avente velocità iniziale $v_0 = 3\ m/s$ si muove con un'accelerazione costante $a = 2,7\ m/s^2$. Qual è la sua velocità dopo avere percorso $22m$?

$(v = 11,3\ m/s)$

10. Un oggetto dotato di velocità iniziale $v_0 = 21,6\ km/h$ si muove con una accelerazione costante $a = 0,75\ m/s^2$. Calcolare la velocità raggiunta dopo $12s$ e lo spazio percorso.

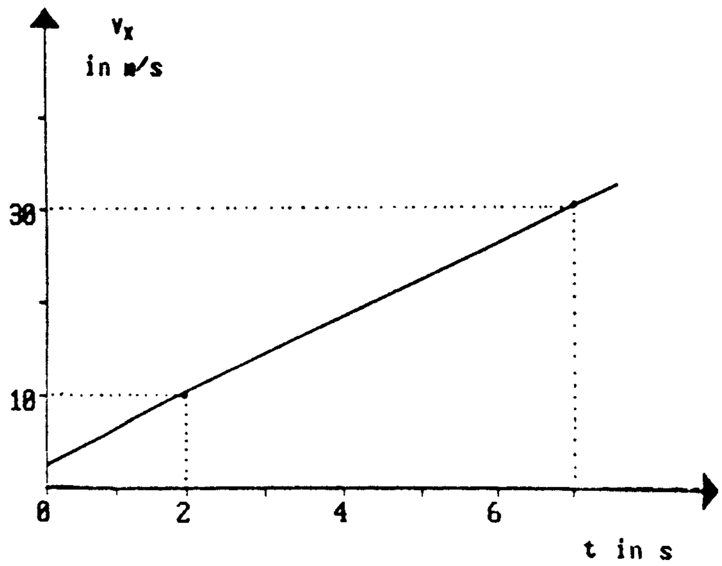
$(v = 15\ m/s; \quad \Delta x = 126\ m)$

11. Un'automobile che viaggia alla velocità di $90\ km/h$ decelera e si ferma in $50s$. Quale è il valore della decelerazione media durante la frenata?

$(a = 0,5\ m/s^2)$

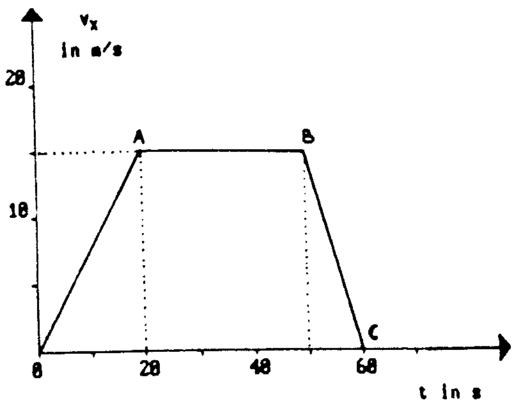
12. Nella figura riportata sotto è mostrato il grafico velocità-tempo per un oggetto che si muove con accelerazione costante.
   a. Quale è la sua accelerazione in m/s^2?
   b. Ricavare dal grafico lo spazio percorso per passare dalla velocità di $10\ m/s$ alla velocità di $30\ m/s$.
   c. Con il calcolo controllare la risposta ricavata graficamente in b.

$(a = 4\ m/s^2; \quad \Delta x = 0,1\ km)$



13. Nella figura riportata sotto è mostrato il grafico del moto di un'automobile che si sposta da un semaforo ad un altro.
   a. Qual è la sua accelerazione durante gli intervalli di tempo corrispondenti a OA, AB, BC?
   b. Qual è lo spazio percorso in ogni intervallo?

$$(a_{OA} = 0,75\ m/s^2;\ \ \Delta x_{OA} = 1,5 \cdot 10^2\ m;\ \ a_{AB} = 0;$$
$$\Delta x_{AB} = 4,5 \cdot 10^2\ m;\ \ a_{BC} = -1,5\ m/s^2;\ \ \Delta x_{BC} = 75\ m)$$



14. Nelle prove di accelerazione di un'automobile si registrano i dati sottoriportati. Calcolare le accelerazioni medie in m/s^2 nei due casi.
   a. Sulla base di 1000 m con partenza da fermo: tempo $= 36,6s$.
   b. Sulla base di 1000 m con inizio da 30 km/h, in IV marcia: tempo $= 41,7s$.

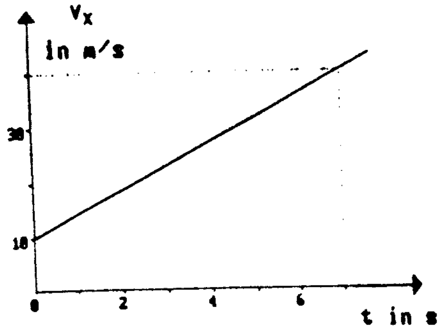
$$(a \doteq 1,5\ m/s^2;\quad a = 0,75\ m/s^2)$$

15. Esaminando le seguenti tabelle di marcia:

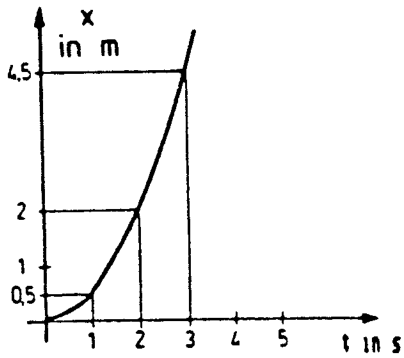
$t\ (s)$	$x\ (m)$	$t\ (s)$	$x\ (m)$	$t\ (s)$	$x\ (m)$
0	0	0	0	0	0
1	0,5	1	0,5	1	0,8
2	1	2	2	2	2,5
3	1,5	3	4,5	3	4,7
4	2	4	8	4	5,2
(a)		(b)		(c)	

definire le caratteristiche dei tre movimenti.

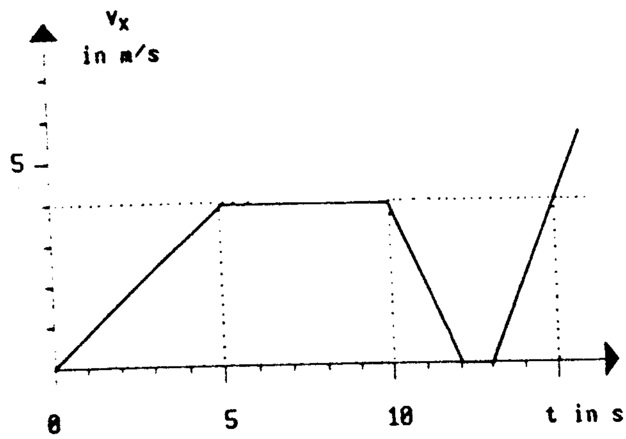
16. Dal diagramma della velocità in funzione del tempo riportato qui sotto determinare le equazioni del moto.



17. Dal diagramma spazio-tempo riportato qui sotto ricavare quello velocità-tempo e scrivere le equazioni del moto.



18. Dal diagramma dell'esercizio 16 determinare il valore dell'accelerazione e fare un diagramma dell'accelerazione in funzione del tempo.
19. Dal grafico qui sotto riportato ricavare il grafico dell'accelerazione in funzione del tempo.



20. La velocità istantanea di un'automobile è di $3m/s$ dopo $1s$ dalla partenza e di $9m/s$ dopo $5s$ dalla partenza. Calcolare l'accelerazione media.
($a = 1,5\ m/s^2$)

21. Un'automobile raggiunge i 72 km/h in $10s$ partendo da ferma. Qual è la sua accelerazione media in m/s^2?
($a = 2\ m/s^2$)

22. Calcolare lo spazio percorso da un oggetto in 6 s sapendo che la sua velocità iniziale è $v_0 = 2,4\ m/s$ e la sua accelerazione costante è $a = 0,6\ m/s^2$.
($\Delta x = 25,2\ m$)

23. Un oggetto che si muove di moto uniformemente accelerato ha in un dato istante la velocità di $0,5\ m/s$; dopo $5s$ la sua velocità è diventata $2,7\ m/s$. Calcolare lo spazio percorso dall'oggetto in tale intervallo di tempo.
($\Delta x = 8m$)

24. Un aereo che viaggia a 600 km/h aumenta costantemente la sua velocità di 10 km/h ogni *secondo*. Assumendo che la velocità del suono all'altezza a cui viaggia l'aereo sia di 1100 km/h, per quanto tempo dovrà volare l'aereo prima di raggiungere la velocità del suono?
($\Delta t = 50s$)

25. Un ciclista partendo da fermo accelera di 2 m/s^2 per $5s$. Quale sarà la sua velocità finale? Se avesse cominciato ad accelerare da una velocità iniziale di 1 m/s, quale sarebbe stata la sua velocità finale?
($v = 10\ m/s$; $v = 11\ m/s$)

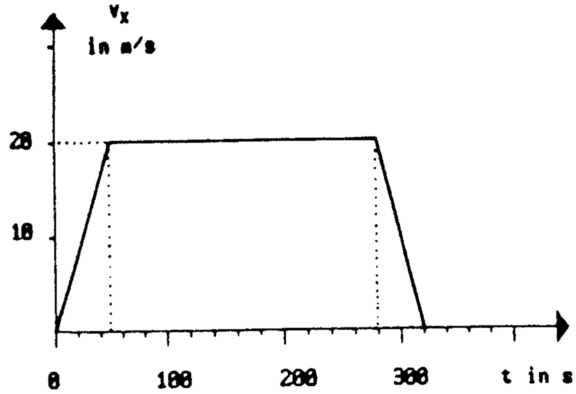
26. Un'automobile accelera da 0 a $20m/s$ in $5s$ e da $20m/s$ a $40m/s$ in $10s$.
a. Qual è l'accelerazione, considerata costante, durante i primi $5s$ e durante i successivi $10s$?
b. Trovare lo spazio totale percorso dall'automobile nei $15s$.
($a = 4\ m/s^2$; $a = 2\ m/s^2$; $\Delta x = 350\ m$)

27. Un'automobile che viaggia a una velocità di 36 km/h frena con una decelerazione costante di 2 m/s^2.
a. Quanto tempo impiega a fermarsi?
b. Quanto spazio percorre in questo intervallo di tempo?
($\Delta t = 5s$; $\Delta x = 25m$)

28. Un'automobile aumenta in modo costante la sua velocità da 24 km/h a 60 km/h in 1 min.
    a. Qual è la sua accelerazione in m/s^2?
    b. Quale spazio percorre (in km) nell'intervallo di tempo in cui aumenta la sua velocità?
    ($a = 0,17\ m/s^2$; $\Delta x = 0,7\ km$)
29. Un autobus viaggia a 72 km/h. Se vengono azionati i freni ed esso decelera costantemente fino a fermarsi in $20s$ quanto spazio percorre prima di fermarsi?
    ($\Delta x = 200m$)
30. Una nave, che viaggia alla velocità costante di 10 m/s, riesce, azionando i motori all'indietro, a sviluppare una decelerazione di $0,1\ m/s^2$. In quanti secondi la nave riesce a fermarsi?
    ($\Delta t = 100s$)
31. Un'automobile parte con accelerazione costante di $0,5 m/s^2$ che mantiene finchè raggiunge la velocità di $7,5\ m/s$. Calcolare l'intervallo di tempo impiegato per raggiungere questa velocità e lo spazio percorso.
    ($\Delta t = 15s$; $\Delta x = 56,3m$)
32. Un oggetto impiega $2s$ a percorrere con moto uniformemente accelerato un tratto AB di una strada. Si sa che la velocità in A è di 5 m/s e quella in B di 9 m/s. Quanto è lungo il tratto percorso?
    ($\Delta x = 14m$)
33. Un'automobile ha la velocità di 72 km/h e per $5s$ le si imprime una accelerazione costante di $1,2\ m/s^2$. Quale sarà la velocità dell'automobile dopo tale intervallo di tempo? Quanti metri avrà percorso durante tale intervallo di tempo?
    ($v = 26\ m/s$; $\Delta x = 115\ m$)
34. Un treno parte da una stazione accelerando con una accelerazione di $1,4\ m/s^2$ per $8s$. Quindi prosegue a velocità costante per $45s$ e decelera con decelerazione costante di $2,6\ m/s^2$, finchè si arresta. Qual è lo spazio totale percorso? Qual è stata la velocità media sull'intero percorso?
    ($\Delta x = 573\ m$; $v_m = 10\ m/s$)
35. Un oggetto, partendo da fermo, si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione $a = 6,3\ m/s^2$. Qual è la sua velocità dopo aver percorso $1,3\ km$?
    ($v = 128\ m/s$)

36. Un treno parte dalla località A e si ferma nella località B. Il diagramma delle velocità è mostrato nel grafico sotto riportato. Descrivere le tre fasi del moto, scriverne le equazioni e calcolare lo spazio percorso dal treno per andare da A a B.

$(\Delta x = 5,5\ km)$



37. Davanti ad un posto di blocco O posto su una strada diritta transita un automobilista A con velocità costante di 72 km/h. Un poliziotto in motocicletta B inizia l'inseguimento con $3s$ di ritardo.
Se l'accelerazione della motocicletta è di 1 m/s^2, dopo quanti *secondi* B raggiunge A? A quale distanza da O?

$(\Delta t = 42,8s; \quad \Delta x = 916\ m)$

38. Due oggetti A e B transitano contemporaneamente dal punto O muovendosi nella stessa direzione e nello stesso verso. L'oggetto A si muove di moto rettilineo uniforme con velocità di $3,3\ m/s$; l'oggetto B ha velocità $v = 1,2\ m/s$ e dopo il passaggio dal punto O acquista un'accelerazione costante $a = 1,4\ m/s^2$. Calcolare:
a. dopo quanti *secondi* e a quale distanza dal punto O l'oggetto B raggiunge A;
b. dopo quanti *secondi* l'oggetto B si trova ad una distanza da O doppia di quella di A.

$(\Delta t = 3\ s; \quad \Delta x = 9,9\ m; \quad \Delta t = 7,7\ s)$

39. Due oggetti si muovono con moto uniformemente accelerato sulla stessa retta, uno incontro all'altro. Per entrambi l'accelerazione vale $a = 1,8\ m/s^2$.
L'oggetto A transita per il punto O con velocità $v_A = 1,2\ m/s$ e nello stesso istante B transita con velocità $v_B = 2,3\ m/s$ per il punto O', distante $12m$ da O. Calcolare dopo quanto tempo e a quale distanza da O si incontrano i due oggetti.

$(\Delta t = 1,8s; \quad \Delta x = 5m)$

40. La tabella sottostante fornisce i valori della velocità di un oggetto in successivi istanti del suo moto. Costruite il corrispondente grafico velocità-tempo. Individuate, nei vari intervalli unitari di tempo, il tipo di moto di cui è animato l'oggetto. Calcolate infine lo spazio totale percorso e la velocità media relativa all'intero movimento.

$t\ (s)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$v\ (m/s)$	5	5	5	7	9	11	13	15	15	15

$(\Delta x = 90m; \quad v_m = 10\ m/s)$

41. Un oggetto, partendo da fermo, si muove per $3s$ con accelerazione costante $a = 5m/s^2$, mantiene la velocità acquistata per $6s$, infine mantiene una decelerazione costante $a = 2\ m/s^2$ fino a fermarsi. Tracciare il grafico della velocità in funzione del tempo. Calcolare la velocità media sull'intero percorso e disegnarla sul grafico.
42. Un oggetto, partendo da fermo, percorre $6,4m$ in $8s$ con accelerazione costante. Calcolare l'accelerazione e la velocità finale. Quale velocità avrebbe dovuto avere per percorrere lo stesso spazio nello stesso tempo muovendosi di moto uniforme?

$(a = 0,2\ m/s^2; \quad v = 1,6\ m/s; \quad v = 0,8\ m/s)$

43. Un'automobile che viaggia a 108 km/h, per effettuare un sorpasso, accelera uniformemente portandosi in $250m$ alla velocità di $126km/h$. Calcolare l'accelerazione e l'intervallo di tempo impiegato.

$(a = 0,65\ m/s^2; \quad \Delta t = 7,7s)$

44. Un'automobile ed un autocarro partono nello stesso istante e dallo stesso luogo procedendo nello stesso verso. L'autocarro ha una accelerazione costante di $1,9\ m/s^2$ e l'automobile un'accelerazione di $2,2\ m/s^2$. Dopo quanto tempol'automobile avrà distanziato l'autocarro di $45m$?

$(\Delta t = 17,3\ s)$

45. Un oggetto, partendo da fermo, si muove per $5s$ con un'accelerazione a. Quindi percorre $450m$ in $18s$ con moto uniforme. Trovare l'accelerazione a e tracciare il diagramma velocità-tempo.

$(a = 5\ m/s^2)$

46. Una pallina cade da un'altezza di $20m$. Calcolare la sua velocità a $10m$ dal suolo e quanto tempo impiega per toccare il suolo.

$(v = 14\ m/s; \quad \Delta t = 2s)$

47. Un automobilista viaggia a 90 km/h su una strada e si accorge che a $50m$ da lui e dopo $2s$ un ostacolo gli sbarrerà la strada. Sapendo che se preme il pedale del freno la sua automobile rallenta con una decelerazione di 6 m/s^2 e se preme il pedale dell'acceleratore l'automobile accelera di 3 m/s^2, calcolare se per evitare l'ostacolo l'autista deve frenare o accelerare (cioè se in $2s$ riesce a percorrere una distanza maggiore di quella che lo separa dall'ostacolo e quindi passare prima che l'ostacolo blocchi la strada).
48. Una pallina viene lanciata verso l'alto con velocità di 20 m/s. A quale altezza arriva? Dopo quale intervallo di tempo ritorna al suolo? Con quale velocità?
$(h = 19,6\ m; \quad \Delta t = 4,08s; \quad v = 20\ m/s)$
49. Con quale velocità deve essere lanciato verso l'alto un oggetto affinchè possa raggiungere l'altezza di $500m$?
$(v = 99\ m/s)$
50. Un pozzo è profondo $44,1\ m$. Quanto tempo impiega un sasso a raggiungere il fondo? Dopo quanto tempo si udirà il rumore dell'urto, sapendo che il suono si propaga ad una velocità di 340 m/s?
$(\Delta t_1 = 3s; \quad \Delta t_2 = 3,13)$
51. Una pietra, abbandonata a se stessa dalla sommità di un grattacielo, giunge al suolo in $5,2s$. Quanto è alto il grattacielo?
$(132\ m)$
52. Si lascia cadere un sasso in un pozzo e dopo $9,3s$ si sente il rumore dell'urto del sasso sul fondo. Quanto è profondo il pozzo?
$(h = 340m)$
53. Un oggetto, lanciato verticalmente verso l'alto, raggiunge la quota massima dopo $5s$. Con quale velocità è stato lanciato? A che altezza arriva?
$(v = 49\ m/s; \quad h = 123\ m)$
54. Un grave cade da un'altezza h, partendo da fermo. Esso percorre gli ultimi $10m$ in $0,5s$. Determinare il valore dell'altezza h.
$(h = 25,7m)$

CAPITOLO IIA

TEST E QUESITI

1. La legge oraria di un oggetto che si muove di moto uniforme è

$$x = 8m + 4m/s \cdot t$$

Dire se le seguenti affermazioni sono *vere* o *false*.

a. All'istante $t = 0$ l'oggetto si trova ad una distanza di $8\ m$ dall'origine dell'asse di riferimento.

b. All'istante $t = 1s$ l'oggetto si trova nel punto di ascissa $x = 4m$.

c. Nell'intervallo di tempo $\Delta t = 4s$ l'oggetto ha percorso uno spazio di $8m$.

d. L'oggetto si muove con una velocità costante $v = 4\ m/s$.

2. Due oggetti A e B si muovono rispettivamente lungo l'asse x e lungo l'asse y di un sistema di assi cartesiani Oxy con legge oraria

$$x = -4m + 4m/s \cdot t \qquad \text{e} \qquad y = -4m + 2m/s \cdot t$$

Dire se le seguenti affermazioni sono *vere* o *false*.

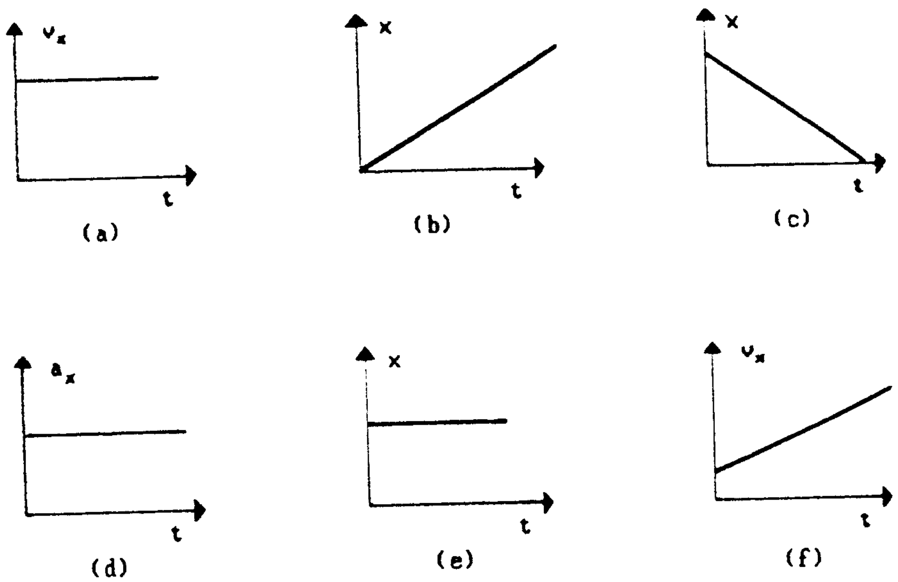
a. I due oggetti passano contemporaneamente per l'origine O.

b. Quando l'oggetto A passa per l'origine l'oggetto B si trova a $2m$ dall'origine.

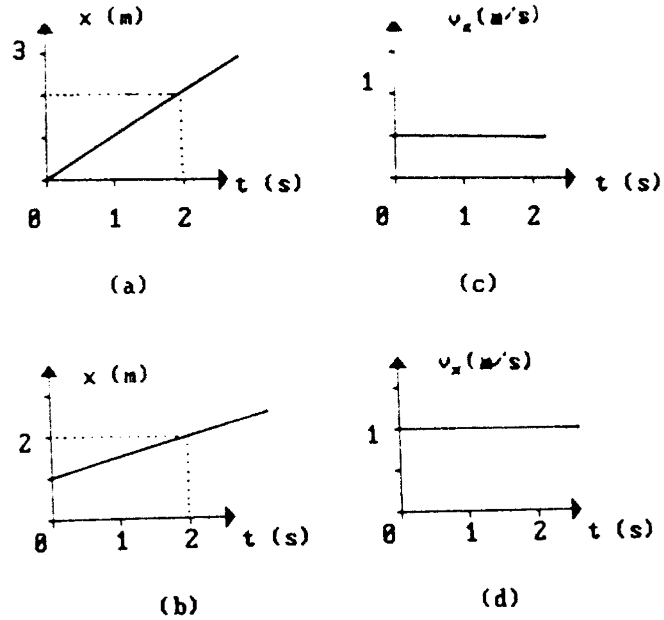
c. La velocità con cui si muove l'oggetto A è doppia di quella con cui si muove l'oggetto B.

d. Quando l'oggetto A si trova nel punto di ascissa $x = 8m$, l'oggetto B si trova nel punto di ordinata $y = 2m$.

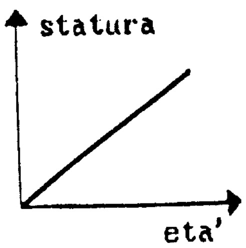
3. Quali dei seguenti grafici rappresentano un moto uniforme? Indica con una crocetta il grafico o i grafici corretti.



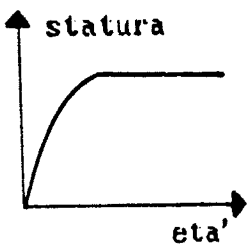
4. Nella figura sottoriportata sono mostrati a sinistra due grafici spazio-tempo e a destra due grafici velocità-tempo. Indica con una crocetta quale dei due grafici velocità-tempo corrisponde al grafico spazio-tempo tempo (a). L'altro grafico velocità-tempo corrisponde al grafico spazio-tempo (b)?



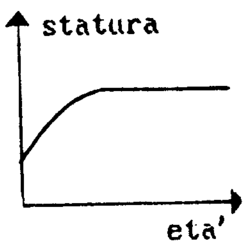
5. Quali dei seguenti grafici rappresenta meglio la relazione esistente tra la statura e l'età di una persona? Indica con una crocetta il grafico corretto.



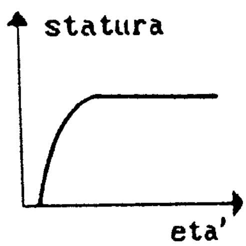
(a)



(b)



(c)

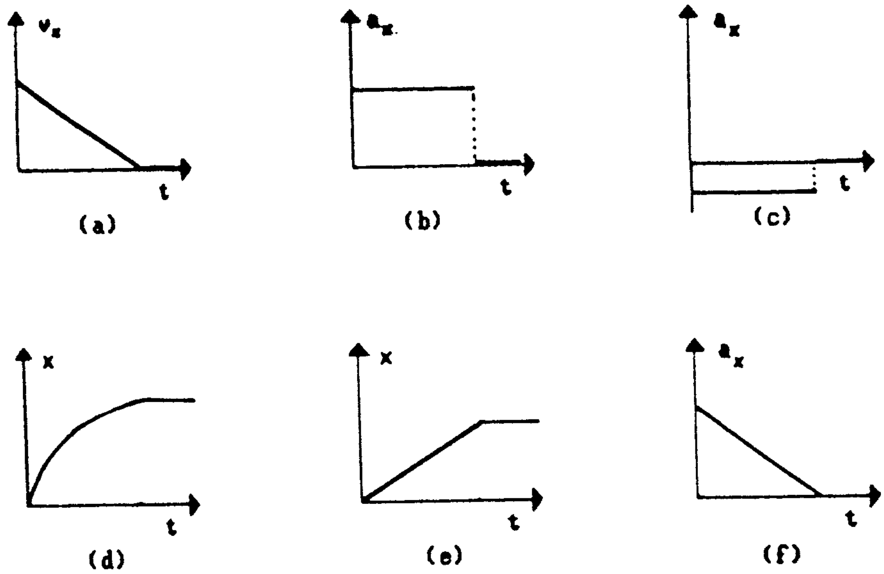


(d)

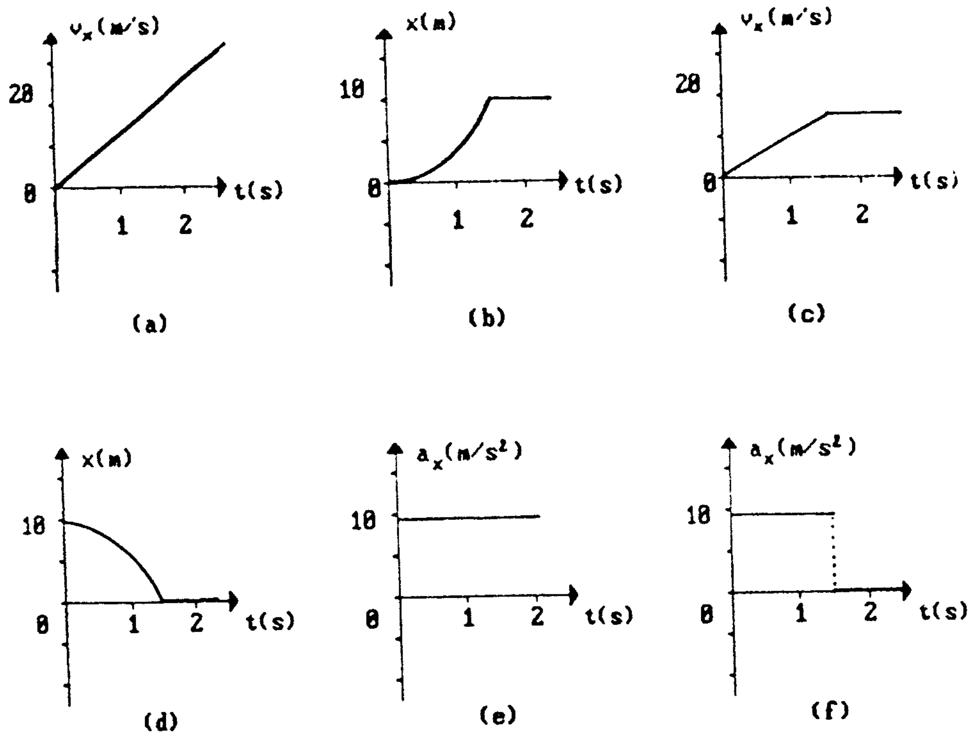
6. Dire se le seguenti affermazioni sono *vere* o *false*.
   a. In un moto uniforme l'accelerazione è uguale *zero*.
   b. In un moto uniformemente accelerato l'accelerazione è sempre positiva.
   c. Se un oggetto si è mosso con velocità media v la velocità istantanea non può mai essere stata maggiore di $2v$.
   d. Ad un certo istante la velocità di un oggetto può essere uguale a *zero* e la sua accelerazione diversa da *zero*.

7. Un treno parte da fermo con accelerazione costante uguale a $3\ m/s^2$. Quali delle seguenti affermazioni sono *vere* e quali sono *false*?
   a. Dopo $10s$ la sua velocità è $30\ m/s$.
   b. Dopo $5s$ la sua velocità è $54\ km/h$.
   c. In $10s$ il treno percorre lo spazio $\Delta x = 150\ m$.
   d. Dopo ogni intervallo di tempo di $1s$ la sua velocità triplica.

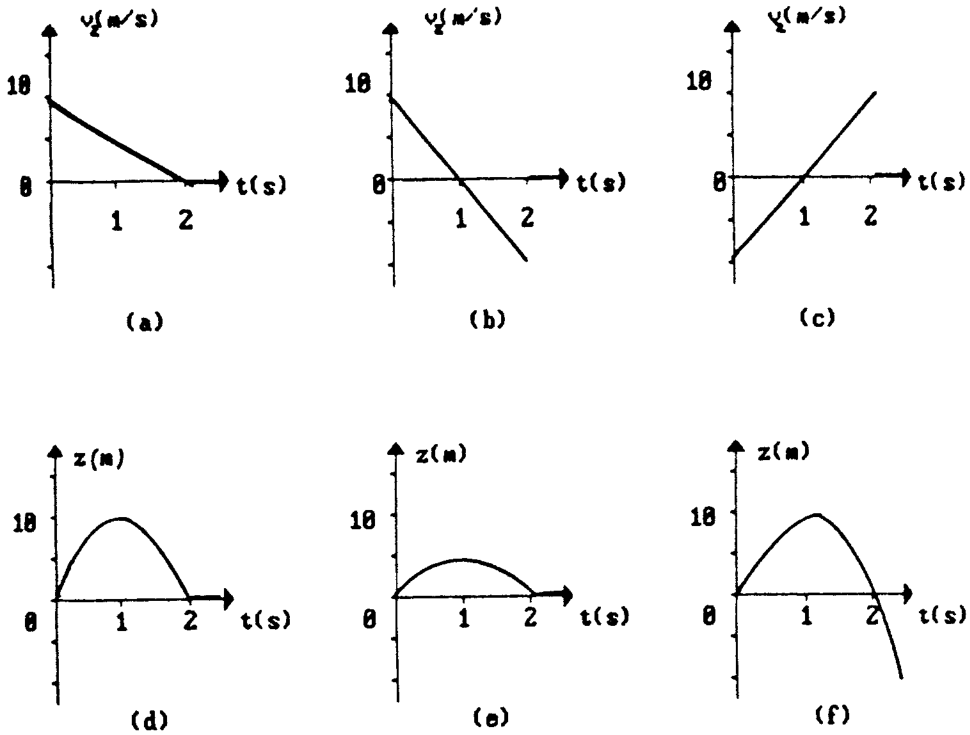
8. Quali dei seguenti grafici rappresentano il moto di un'automobile che si ferma ad un semaforo? Indica con una crocetta il grafico o i grafici corretti.



9. Quali dei seguenti grafici rappresentano il moto di un sasso lasciato cadere da una altezza $h = 9,8\ m$? Indica con una crocetta il grafico o i grafici corretti.



10. *Quali dei seguenti grafici rappresentano il moto di un sasso lanciato in alto verticalmente con velocità iniziale $v_0 = 9,8\ m/s$? Indica con una crocetta il grafico o i grafici corretti.*



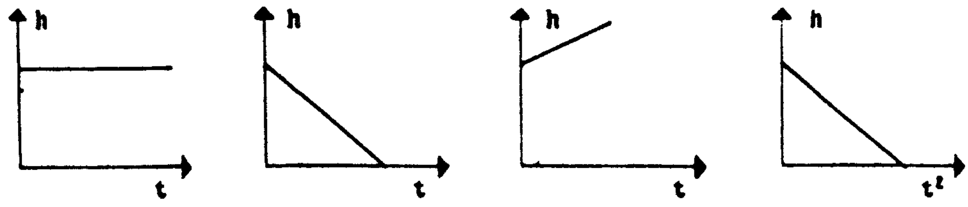
11. Due gravi A e B cadono nel vuoto rispettivamente dalle altezze h_A ed h_B con $h_A = 4h_B$. Dette v_A e v_B le velocità con cui raggiungono il suolo, indica con una crocetta quale delle seguenti relazioni è corretta.

a. $v_A = 4v_B$
b. $v_A = 16v_B$
c. $v_A = v_B/2$
d. $v_A = 2v_B$
e. $v_B = v_A/8$

12. Detti t_A e t_B i tempi di caduta dei gravi del precedente quesito, indica con una crocetta quale delle seguenti relazioni è corretta.

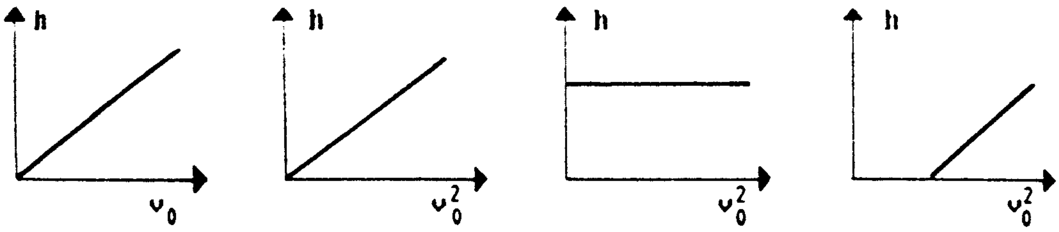
a. $\Delta t_A = \Delta t_B$
b. $\Delta t_A = \Delta t_B/2$
c. $\Delta t_A = 8\Delta t_B$
d. $\Delta t_A = 4\Delta t_B$
e. $\Delta t_A = 2\Delta t_B$

13. Un grave cade liberamente dall'altezza h. Quale dei seguenti grafici rappresenta la relazione tra h e t? Indica con una crocetta il grafico corretto.



(a) (b) (c) (d)

14. Detta h l'altezza massima raggiunta da un grave lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0, quale dei seguenti grafici rappresenta la relazione tra h e v_0? Indica con una crocetta il grafico corretto.



(a) (b) (c) (d)

15. Siano h_L e h_T le altezze massime raggiunte da due gravi lanciati verticalmente verso l'alto con la stessa velocità iniziale rispettivamente sulla Luna e sulla Terra, dove le accelerazioni di gravità sono g_L e g_T. Indica con una crocetta quale delle seguenti relazioni è corretta.

a. $\dfrac{h_L}{h_T} = \dfrac{g_L}{g_T}$

b. $\dfrac{h_L}{h_T} = \dfrac{g_T}{g_L}$

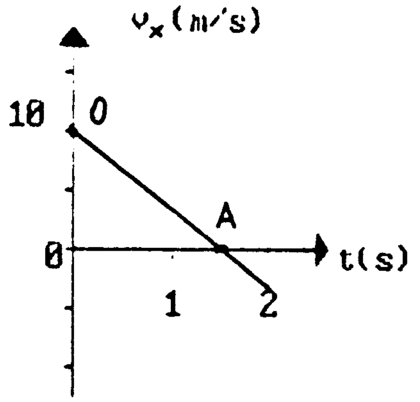
c. $\dfrac{h_L}{h_T} = 2\dfrac{g_T}{g_L}$

d. $\dfrac{h_L}{h_T} = \left(\dfrac{g_T}{g_L}\right)^2$

e. $\dfrac{h_L}{h_T} = \left(\dfrac{g_L}{g_T}\right)^2$

16. Siano t_L e t_T i tempi di caduta di due gravi dalla stessa altezza rispettivamente sulla Luna e sulla Terra, dove le accelerazioni di gravità sono g_L e g_T. Indica con una crocetta quale delle seguenti relazioni è corretta.
   a. $\frac{t_L}{t_T} = \frac{g_L}{g_T}$
   b. $\frac{t_L}{t_T} = \frac{g_T}{g_L}$
   c. $\left(\frac{t_L}{t_T}\right)^2 = \frac{g_T}{g_L}$
   d. $\frac{t_L}{t_T} = \left(\frac{g_L}{g_T}\right)^2$
   e. $\frac{t_L}{t_T} = \left(\frac{g_T}{g_L}\right)^2$

17. Alcuni studenti discutono sul tipo di moto rappresentato dal grafico seguente. Qual è la risposta corretta? Indicala con una crocetta.



   a. È un moto vario perchè la velocità non è costante, ma non è possibile dire se si tratta di un moto accelerato o decelerato.
   b. Si tratta di un moto uniformemente decelerato perchè la velocità diminuisce sempre.
   c. Il moto rappresentato è uniformemente decelerato perchè il grafico è una retta avente coefficiente angolare negativo.
   d. Il grafico rappresenta un moto uniformemente decelerato nel tratto OA e un moto uniformemente accelerato da A in poi.
   e. La velocità è positiva nel tratto OA e negativa da A in poi: perciò nel primo tratto il moto è accelerato, mentre nel secondo è decelerato.

18. Dire se le seguenti affermazioni sono *vere* o *false*.
La formula

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$$

a. Può descrivere solo il moto uniformemente accelerato.
b. Può descrivere anche il moto uniformemente decelerato pur di assumere $a_x < 0$.
c. Può descrivere solo un moto nello stesso verso dell'asse di riferimento.
d. Si riferisce solo a moti rettilinei.
e. Non può essere utilizzata nel caso in cui velocità ed accelerazione abbiano verso opposto.
f. È valida solo se a_x è costante.

19. Dire se le seguenti affermazioni sono *vere* o *false*.
a. Lo spazio percorso è sempre uguale al prodotto della velocità media per l'intervallo di tempo impiegato a percorrerlo.
b. La velocità media è sempre uguale al valor medio tra la velocità iniziale e la velocità finale.
c. Un oggetto non può essere in movimento se la sua accelerazione è nulla.

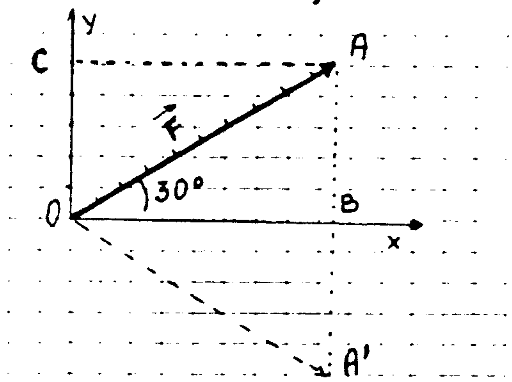
20. Una palla viene lanciata verso l'alto con velocità iniziale $v_0 = 15 m/s$. Se si assume un sistema di riferimento diretto verso l'alto, quanto vale l'accelerazione a_x della palla quando si ferma nel punto più alto della sua traiettoria? Indica con una crocetta la risposta corretta.
a. $a_x = -15\ m/s^2$
b. $a_x = 9,8\ m/s^2$
c. $a_x = 15\ m/s^2$
d. $a_x = 0$
e. $a_x = -9,8\ m/s^2$

21. L'episodio descritto nel seguente brano tratto dall'articolo di un giornale può essere avvenuto nel modo descritto dal giornalista?
"*Pavia, ottobre 89.* La prontezza e l'agilità di un ragazzo hanno salvato la vita ad una anziana signora. Ieri mattina la signora Maria Rossi stava camminando su un marciapiede di via Lungoticino quando improvvisamente, sopra la sua testa, si staccava dal tetto di un palazzo alto 10 *metri* un pezzo di cornicione. Il ragazzo Carlo Bianchi, che si trovava sul marciapiede opposto, intuendo il grave pericolo che stava correndo la signora, con uno scatto rapidissimo attraversava la strada, in quel punto larga più di 10 *metri*, e riusciva a spostare la signora un attimo prima che il grosso pezzo di cornicione arrivasse a terra."

CAPITOLO III

ESERCIZI RISOLTI

1. Una forza $\vec{F}$ di intensità $F = 10\ N$ forma un angolo $\alpha = 30^\circ$ con l'asse x. Trovare le componenti F_x e F_y.



$$\overline{OB} = F_x$$
$$\overline{OC} = \overline{BA} = F_y$$

Usando la trigonometria ottengo

$$F_x = F\cos\alpha = 10N \cdot 0{,}87 = 8{,}7N$$
$$F_y = F\sin\alpha = 10N \cdot 0{,}5 = 5N$$

Senza fare uso della trigonometria posso osservare che, essendo l'angolo $O\hat{B}A = 90^\circ$ ho che l'angolo $O\hat{A}B = 60^\circ$. Se considero allora il punto A', simmetrico di A rispetto all'asse x, il triangolo OAA' è un triangolo equilatero. Pertanto ho

$$\overline{AA'} = \overline{OA}$$

ed essendo $\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{AA'}$ ottengo

$$\overline{AB} = \frac{1}{2}\overline{OA}$$

cioè

$$F_y = \frac{1}{2}F = 5\ N$$

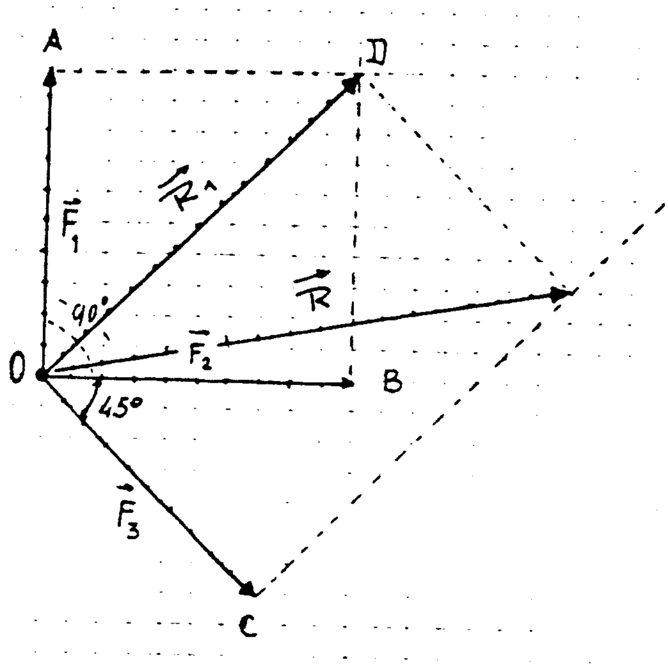
Per il teorema di Pitagora ho inoltre

$$\overline{OB} = \sqrt{\overline{OA}^2 - \overline{AB}^2}$$

cioè

$$F_x = \sqrt{F^2 - \frac{1}{4}F^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}F = 0{,}87F = 8{,}7\ N$$

2. Tre forze di uguale intensità $F_1 = F_2 = F_3 = 10\ N$ hanno la direzione e il verso mostrato su figura.
Disegnare la forza risultante $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$ e calcolarne l'intensità.



Pongo

$$\vec{R}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Siccome le due forze $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ sono perpendicolari tra loro e di uguale intensità, il parallelogramma $OADB$ è un quadrato e la diagonale $\overline{OD} = R_1$. Ho allora

$$R_1 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} = \sqrt{100\ N^2 + 100\ N^2} = 14,1\ N$$

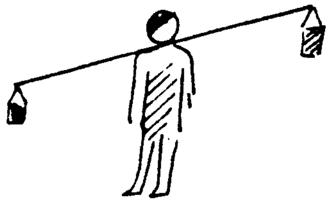
e

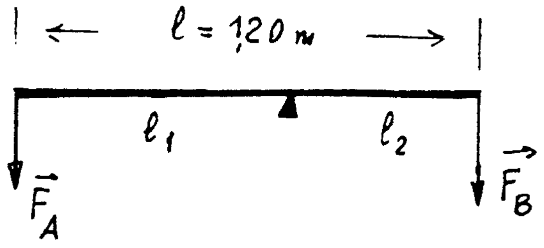
$$D\hat{O}B = 45°$$

Anche le due forze $\vec{R}_1$ e $\vec{F}_3$ sono quindi perpendicolari tra loro, per cui

$$R = \sqrt{R_1^2 + F_3^2} = \sqrt{200\ N^2 + 100\ N^2} = \sqrt{300\ N^2} = 17,3\ N$$

3. Un contadino porta sulle spalle un'asta lunga $1,2m$ alle cui estremità A e B sono sospesi due secchi pieni di acqua. Il secchio A pesa $120N$ e quello B pesa $180N$. In che punto l'asta deve appoggiare sulle spalle per avere equilibrio? (Si trascuri il peso dell'asta).





Affinchè le due forze si facciano equilibrio deve essere

$$F_A \cdot l_1 = F_B \cdot l_2 \qquad 1)$$

Inoltre deve essere

$$l_1 + l_2 = l$$

da cui posso ricavare

$$l_2 = l - l_2$$

Sostituendo nella 1) ottengo

$$F_A \cdot l_1 = F_B \cdot (l - l_1)$$

$$F_A \cdot l_1 = F_B \cdot l - F_B \cdot l_1$$

$$(F_A + F_B) \cdot l_1 = F_B \cdot l$$

da cui

$$l_1 = \frac{F_B}{F_A + F_B} \cdot l$$

Sostituendo i dati ottengo

$$l_1 = \frac{180N}{120N + 180N} \cdot 1,2m = \frac{180}{300} \cdot 1,2m = 0,72m$$
$$l_2 = l - l_1 = 1,2m - 0,72m = 0,48m$$

CAPITOLO III

ESERCIZI PROPOSTI

1. Ad un oggetto sono applicate due forze concorrenti, perpendicolari tra loro, le cui intensità sono, rispettivamente, $12N$ e $16N$.
   Calcolare l'intensità della forza risultante. Rappresentare graficamente tale risultante.

   $(20N)$

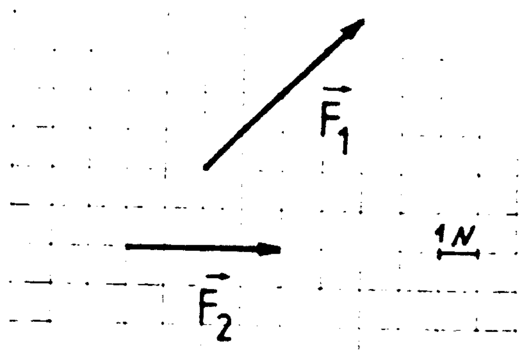
2. Due forze concorrenti, ciascuna di intensità $F = 15N$, formano tra loro un angolo $\alpha = 60^o$. Costruire graficamente la forza risultante $\vec{R}$, calcolarne l'intensità e controllare sul grafico il risultato del calcolo.

   $(R = 26N)$

3. Senza fare uso della trigonometria si trovi il valore della risultante di due forze di uguale intensità F le cui direzioni formino un angolo di 60^o.

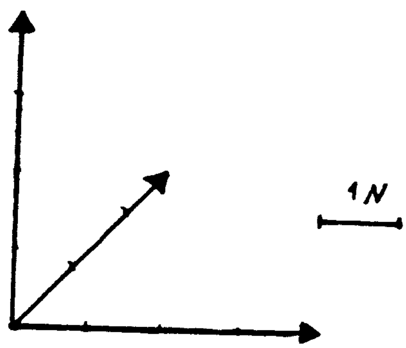
   $(R = \sqrt{3}F)$

4. Costruire per via geometrica la forza $\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, essendo $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$ le forze rappresentate in figura. Quanto valgono F_1, F_2, e R?

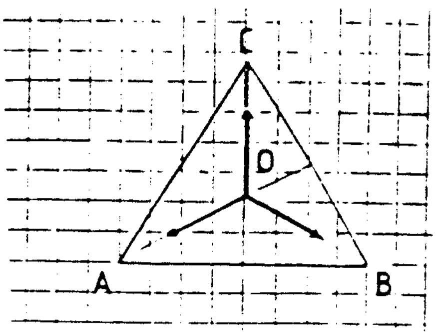


5. Addizionare i vettori in figura e calcolare il modulo del vettore somma.

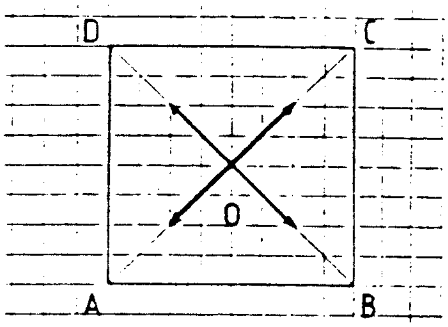
   $(S = 8,5\ N)$



6. Si consideri il triangolo equilatero ABC e sia O il punto d'incontro delle tre bisettrici. Si verifichi che tre forze di uguale intensità, applicate nel punto O e dirette verso i vertici A, B, C, hanno risultante nulla (si ricordi il risultato dell'esercizio E4.1).

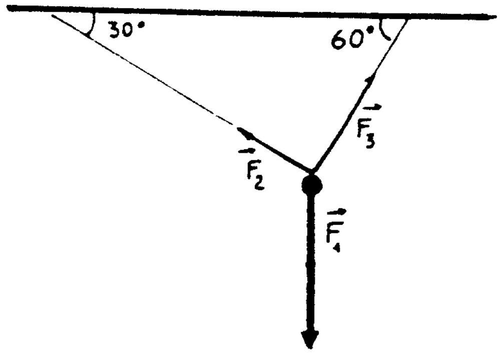


7. Si consideri il quadrato $ABCD$ e sia O il punto d'incontro delle due diagonali. Si verifichi che quattro forze di uguale intensità, applicate nel punto O e dirette verso i vertici A, B, C, D, hanno risultante nulla.



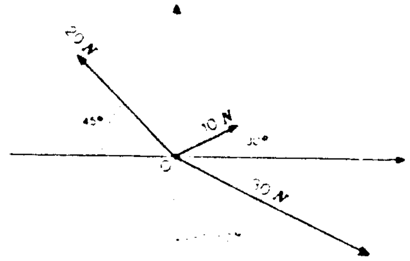
8. Un oggetto sottoposto a una forza di intensità $F_1 = 50N$ è appeso ad una fune come mostrato in figura. Determinare F_2 e F_3.

($F_2 = 25\ N$; $F_3 = 43\ N$)



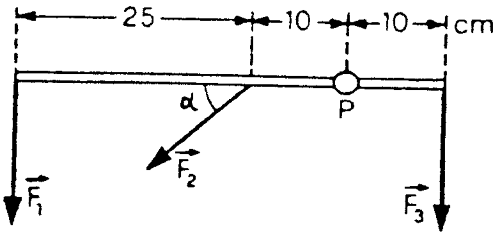
9. Determinare graficamente e matematicamente la forza risultante delle tre forze disegnate in figura.

(20,9 N)



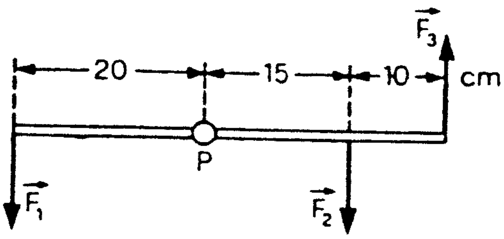
10. L'asta mostrata in figura può ruotare attorno ad un asse passante per P ed è in equilibrio. Calcolare il valore di $\vec{F}_2$ sapendo che $F_1 = 5,2N$, $\alpha = 30°$, $F_3 = 32N$.

($F_2 = 27,6$ N)



11. L'asta mostrata in figura può ruotare attorno ad un asse passante per P ed è in equilibrio. Calcolare F_1 sapendo che $F_2 = 18N$ e $F_3 = 8N$.

($F_1 = 3,5$ N)



12. Si tira una molla con una mano: la lunghezza della molla, che inizialmente era $10cm$, diventa $15cm$. Quando la stessa molla sostiene un peso di $5N$ la sua lunghezza è di $20cm$. Qual è il valore della forza muscolare esercitata?

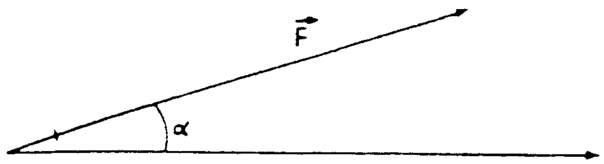
($F = 2,5$ N)

13. Una forza di valore $F = 8N$ è diretta a 45^o rispetto alla verticale discendente. Qual è il valore della sua componente verticale?

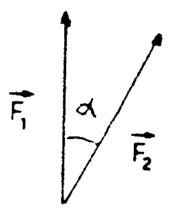
($F = 5,7\ N$)

14. Si trovino i valori della forza risultante di due forze rispettivamente di valore $2N$ e $4N$, le cui direzioni formano un angolo di:
    a. 45^o ($R = 5,6N$)
    b. 90^o ($R = 4,5N$)
    c. 135^o ($R = 2,9N$)
    d. 0^o ($R = 6N$)
    e. 180^o ($R = 2N$)

15. Trovare la componente orizzontale di una forza di $10N$ la cui direzione forma con l'orizzontale un angolo α di:
    a. 15^o ($F = 9,66N$)
    b. 23^o ($F = 9,2N$)
    c. 30^o ($F = 8,66N$)
    d. 45^o ($F = 7,07N$)
    e. 56^o ($F = 5,59N$)
    f. 60^o ($F = 5N$)
    g. 73^o ($F = 2,92N$)



16. Senza far uso della trigonometria si trovino le componenti F_x e F_y di una forza $F = 10N$ la cui direzione forma un angolo $\alpha = 60^o$ con l'asse delle x.
17. Trovare in valore, direzione e verso la forza risultante di due forze entrambe di valore $0,500N$: la prima è diretta verticalmente dal basso verso l'alto e la seconda forma con la prima un angolo α di:
    a. 10^o ($R = 0,996\ N$)
    b. 30^o ($R = 0,966\ N$)
    c. 60^o ($R = 0,866\ N$)
    d. 90^o ($R = 0,707\ N$)
    e. 100^o ($R = 0,643\ N$)

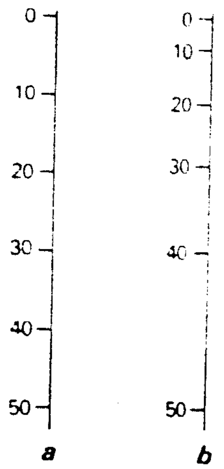


CAPITOLO III

TEST E QUESITI

1. Quanto vale la componente della forza-peso in direzione orizzontale?
2. Una forza può avere intensità nulla se una delle sue componenti è diversa da zero?
3. Due forze hanno intensità $F_1 = 10N$ e $F_2 = 5N$. Indicata con $\vec{R} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ la forza risultante, dire quali delle seguenti risposte potrebbero essere corrette e quali sono sicuramente sbagliate.
   a. $R = 15N$
   b. $R = 20N$
   c. $R = 10N$
   d. $R = 4N$

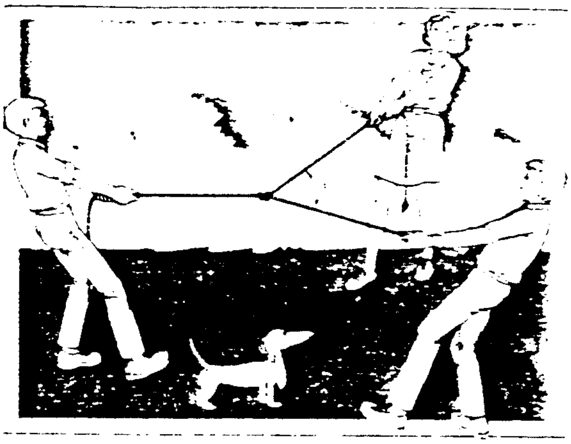
4. Nella figura sono rappresentate due scale di strumenti che misurano le forze. Quale di esse è la scala di un dinamometro?



5. Due forze $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$ applicate a un dinamometro lo allungano rispettivamente di $3cm$ e $6cm$. Quanto vale il rapporto F_1/F_2 tra le intensità delle due forze? Indica con una crocetta la risposta corretta.
   a. $F_1/F_2 = 2$
   b. $F_1/F_2 = 1/2$
   c. $F_1/F_2 = 18$
   d. $F_1/F_2 = 9$

6. Una forza ha intensità $F = 10N$. Indicate con F_x e F_y le componenti in un sistema di assi cartesiani, quali risposte potrebbero essere corrette e quali sono sicuramente sbagliate?
   a. $F_x = 8\ N$; $F_y = -6\ N$
   b. $F_x = 8\ N$; $F_y = 6\ N$
   c. $F_x = 5\ N$; $F_y = 5\ N$
   d. $F_x = 10\ N$; $F_y = 1\ N$
   e. $F_x = 9\ N$; $F_y = 4,36\ N$

7. Tre ragazzi stanno giocando al tiro alla fune, come mostra la figura. Riuscirà il ragazzo di sinistra a tener testa agli altri due ragazzi?



8. Il baricentro di un oggetto si trova sempre in un punto dell'oggetto dove c'è materia?

CAPITOLO IV

ESERCIZI RISOLTI

1. A un oggetto di massa $m = 2kg$, inizialmente fermo, è applicata per un intervallo di tempo $\Delta t = 10s$ una forza $\vec{F}$ costante di intensità $F = 10N$. Calcolare la velocità raggiunta e lo spazio percorso dopo tale intervallo di tempo.

Per determinare la velocità e lo spazio percorso devo prima determinare l'accelerazione a del moto. Dal secondo principio della dinamica ho

$$F = ma$$

da cui

$$a = \frac{F}{m} = \frac{10N}{2kg} = 5\ m/s$$

L'oggetto si muove di moto rettilineo uniformemente accelerato. Assumendo come riferimento un asse x nella direzione del moto e come origine la posizione dell'oggetto all'istante $t = 0$ in cui viene applicata la forza ho: $x_0 = 0$, $v_0 = 0$ e $a_x = a$.
Le equazioni del moto sono

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}at^2 \\ v_x = at \end{cases} \qquad 1)$$

Alla fine dell'intervallo di tempo abbiamo $t = 10s$. Sostituendo tale valore nelle 1) ottengo

$$x = \frac{1}{2} \cdot 5\ m/s^2 \cdot (10s)^2 = 250m$$

$$v_x = 5\ m/s^2 \cdot 10s = 50\ m/s$$

Alla fine dell'intervallo di tempo in cui viene applicata la forza l'oggetto ha percorso $250m$ e ha raggiunto una velocità di $50\ m/s = 180\ km/h$.

2. Una stessa forza costante $\vec{F}$ imprime a due masse m_1 e m_2 accelerazioni i cui valori sono rispettivamente $a_1 = 2,5\ m/s^2$ e $a_2 = 10\ m/s^2$. Sapendo che $m_1 + m_2 = 1 kg$ determinare il valore della forza $\vec{F}$.

Per il secondo principio della dinamica posso scrivere

$$F = m_1 a_1 \qquad 1)$$

$$F = m_2 a_2 \qquad 2)$$

da cui ottengo

$$m_1 a_1 = m_2 a_2 \qquad 3)$$

dovendo inoltre essere

$$m_1 + m_2 = M \qquad con \qquad M = 1\ kg$$

ricavo

$$m_1 = M - m_2$$

e sostituendo nella 3)

$$(M - m_2)a_1 = m_2 a_2$$

da cui

$$M a_1 = m_2(a_1 + a_2)$$

e quindi

$$m_2 = M\frac{a_1}{a_1 + a_2} = 1\ kg\frac{2,5\ m/s^2}{12,5\ m/s^2} = 0,2\ kg$$

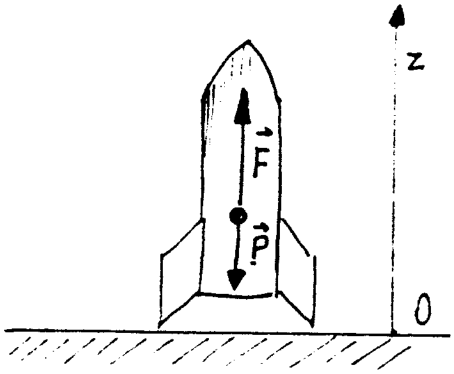
$$m_1 = 0,8\ kg$$

Utilizzando la 1) *o la* 2) *ottengo*

$$F = m_1 a_1 = 0,8\ kg \cdot 2,5\ m/s^2 = 2N$$

$$F = m_2 a_2 = 0,2\ kg \cdot 10\ m/s^2 = 2N$$

3. Quale forza deve esercitare il motore di un razzo di massa 10^4 kg perchè esso, partendo da fermo e muovendosi verticalmente verso l'alto, possa raggiungere in $5s$ una velocità di 216 km/h?



Il razzo è soggetto a due forze costanti: la forza-peso, d'intensità $P = mg$ e diretta verticalmente verso il basso, e la forza esercitata dal motore, d'intensità F e diretta dal basso verso l'alto. Il razzo si muove quindi per effetto della forza risultante di queste due forze $\vec{R} = \vec{F} + \vec{P}$. Siccome le due forze hanno la stessa direzione ma verso contrario, assunto come verso positivo l'asse z diretto dal basso verso l'alto, otteniamo

$$R = F - mg$$

Tale forza risultante imprime un'accelerazione costante

$$a_z = \frac{R}{m} = \frac{F}{m} - g \qquad 1)$$

Il razzo si muove quindi di moto uniformemente accelerato e la velocità v_z vale

$$v_z = v_0 + a_z \cdot t$$

Nel nostro caso $v_0 = 0$ e per $t = 5s$ $v_z = 216\ km/h = 60\ m/s$. Quindi abbiamo

$$a_z = \frac{v_z}{t} = \frac{60\ m/s}{5s} = 12\ m/s^2$$

Dalla 1) *otteniamo*

$$F = m(a_z + g)$$

da cui

$$F = 10^4\ kg \cdot (12 + 9,8) m/s^2 = 21,8 \cdot 10^4 N$$

4. Un'automobile, partendo da ferma, raggiunge la velocità $v = 72\ km/h$ in un intervallo di tempo $\Delta t = 8s$. Se l'automobile deve rimorchiare un'automobile uguale, in quanto tempo raggiunge la stessa velocità v?

Per risolvere il problema determino dapprima la forza esercitata dal motore. Dalla definizione di accelerazione

$$a_x = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

ottengo, essendo $v_1 = 0$, $v_2 = v$ *e* $t_2 - t_1 = \Delta t$,

$$a_x = v/\Delta t$$

Dalla legge di Newton inoltre ho

$$F_x = ma_x$$

dove m *è la massa dell'automobile; quindi*

$$F_x = mv/\Delta t \qquad 1)$$

Quando l'automobile rimorchia un'automobile uguale la massa del sistema che la forza F_x *deve mettere in moto è* $M = 2m$.
In questo caso, quindi, si deve avere

$$F_x = Mv/\Delta t' \qquad 2)$$

dove $\Delta t'$ *è il nuovo intervallo di tempo necessario per raggiungere ancora la velocità* v.
Dalla 1) *e dalla* 2) *ottengo*

$$mv/\Delta t = Mv\Delta t'$$

da cui

$$\Delta t' = \frac{M}{m}\Delta t = 2\Delta t$$

Quando l'automobile rimorchia un'automobile uguale, per raggiungere la stessa velocità impiega un tempo doppio; nel nostro caso

$$\Delta t' = 2 \cdot 8s = 16s$$

5. Un'automobile ($M = 10^3 kg$) con il solo guidatore ($m_1 = 70\ kg$), partendo da ferma, percorre i primi $160m$ in $8s$. Calcolare quanto tempo impiega a percorrere la stessa distanza quando sull'automobile vi sono anche quattro passeggeri ($m_2 = 280\ kg$).

Supponiamo che il moto dell'automobile sia uniformemente accelerato; essendo $v_0 = 0$, possiamo scrivere

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 \qquad 1)$$

per cui l'automobile per poter raggiungere al tempo $t = 8s$ la posizione $x = 160m$ deve muoversi con un'accelerazione

$$a_x = \frac{2x}{t^2} = \frac{2 \cdot 160m}{64s^2} = 5\ m/s^2$$

Per imprimere tale accelerazione il motore dell'automobile deve sviluppare una forza

$$F_x = (M + m_1) \cdot a_x = (1000 + 70)kg \cdot 5\ m/s^2 = 5350N$$

Quando sull'automobile vi sono anche quattro passeggeri questa stessa forza produce una accelerazione

$$a'_x = \frac{F_x}{(M + m_1 + m_2)} = \frac{5350N}{1350\ kg} = 3,96\ m/s^2$$

Utilizzando ancora la relazione 1) ottengo che per raggiungere la posizione $x = 160m$ l'automobile impiega un tempo

$$t' = \sqrt{\frac{2x}{a'_x}} = \sqrt{\frac{320m}{3,96\ m/s^2}} = \sqrt{80,8s^2} \simeq 9s$$

Osservo che siccome non mi era chiesto il valore della forza e delle accelerazioni, potevo aspettare a sostituire i dati dell'esercizio e scrivere

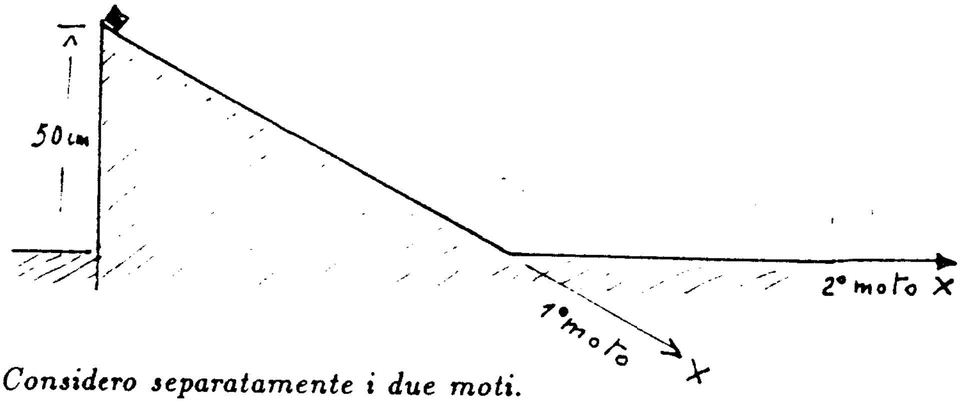
$$F_x = (M + m_1) \cdot a_x = \frac{(M + m_1) \cdot 2x}{t^2}$$

$$a'_x = \frac{F_x}{(M + m_1 + m_2)} = \frac{(M + m_1) \cdot 2x}{(M + m_1 + m_2) \cdot t^2}$$

$$t' = \sqrt{\frac{2x}{a'_x}} = \sqrt{\frac{2x}{(M+m_1)\cdot 2x}\cdot (M+m_1+m_2)\cdot t^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{M+m_1+m_2}{M+m_2}t^2} = t\cdot\sqrt{\frac{M+m_1+m_2}{M+m_2}} = 1,12\cdot t \simeq 9s$$

6. Un dischetto scivola senza attrito su un piano inclinato lungo $l = 1m$ e alto $h = 50cm$, partendo dalla posizione più alta. Giunto alla fine del piano inclinato il dischetto prosegue, con coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0,5$, su un piano orizzontale. Calcolare a quale distanza si ferma.



Considero separatamente i due moti.
Sul piano inclinato il dischetto si muove di moto uniformemente accelerato con un'accelerazione

$$a = g\cdot\sin\alpha = g\cdot\frac{h}{l} = 9,8m/s^2\cdot\frac{0,5m}{1m} = 4,9\ m/s^2$$

Assumendo come riferimento un'asse x parallelo al piano inclinato nel verso del moto e ponendo per $t = 0$ $x_0 = 0$ e $v_0 = 0$ posso scrivere

$$x = \frac{1}{2}at^2 \qquad 1)$$

$$v_x = at \qquad 2)$$

Il dischetto raggiunge la fine del piano inclinato ($x_1 = 1m$) al tempo t_1 dato dalla 1) e cioè

$$t_1 = \sqrt{\frac{2x_1}{a}} = \sqrt{\frac{2m}{4,9m/s^2}} = \sqrt{0,408s^2} = 0,64s$$

con una velocità v_1 *data dalla* 2)

$$v_1 = a \cdot t_1 = 4,9\ m/s^2 \cdot 0,64s = 3,13\ m/s^2$$

Considero ora il secondo moto lungo il piano orizzontale. Tale moto è uniformemente ritardato con una decelerazione

$$a = \frac{F}{m}$$

dove F *è la forza di attrito*

$$F = A = \mu mg$$

Ottengo quindi

$$a = \frac{\mu mg}{m} = \mu g = 0,5 \cdot 9,8\ m/s^2 = 4,9 m/s^2$$

Assumendo come nuovo riferimento un asse x *parallelo al piano nel verso del moto, le equazioni di questo secondo moto, ponendo per* $t = 0$ $x_0 = 0$ *e* $v_0 = v_1$*, sono*

$$x = v_1 t - \frac{1}{2} a t^2 \qquad 3)$$

$$v_x = v_1 - at \qquad 4)$$

Il dischetto si ferma all'istante t_2 *tale che* $v_x = 0$. *Dalla* 4) *ottengo*

$$0 = v_1 - at_2$$

da cui

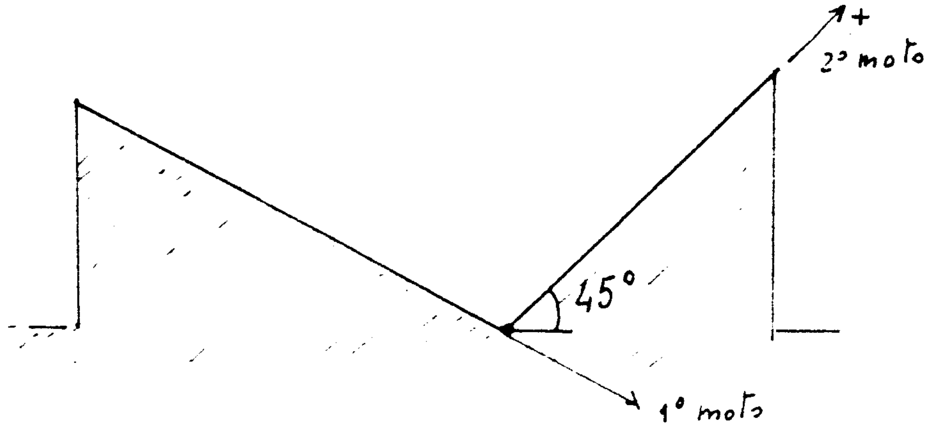
$$t_2 = \frac{v_1}{a} = \frac{3,13\ m/s}{4,9\ m/s^2} = 0,64s$$

A tale istante il dischetto ha raggiunto la posizione

$$x_2 = v_1 t_2 - \frac{1}{2} a t_2^2 = 3,13\ m/s \cdot 0,64s - \frac{1}{2} \cdot 4,9 m/s^2 \cdot 0,41 s^2 = \\ = 2m - 1m = 1m$$

Il dischetto si ferma quindi dopo aver percorso $1m$ *lungo il piano orizzontale.*

7. Un dischetto scivola senza attrito su un piano inclinato lungo $l = 1m$ e alto $h = 50cm$, partendo dalla posizione più alta. Giunto alla fine del piano inclinato il dischetto sale, ancora senza attrito, su un secondo piano inclinato che forma con l'orizzontale un angolo $\alpha = 45°$. Calcolare a quale altezza il disco si ferma.



Dall'esercizio precedente conosco la velocità con cui il dischetto arriva alla fine del piano inclinato

$$v_1 = 3,13\ m/s^2$$

Quando il dischetto sale lungo il secondo piano inclinato, esso si muove di moto uniformemente decelerato con decelerazione

$$a = g \cdot \sin\alpha$$

Assumendo un asse x di riferimento parallelo al piano e nel verso del moto posso scrivere, ponendo per $t = 0$ $\quad x_0 = 0$ e $v_0 = v_1$,

$$x = v_1 t - \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_x = v_1 - at \qquad 1)$$

Il dischetto si ferma all'istante t_2 tale che $v_x = 0$; quindi, per la 1),

$$t_2 = \frac{v_1}{a} = \frac{v_1}{g \cdot \sin\alpha}$$

A tale istante il dischetto si trova nella posizione

$$x_2 = v_1 t_2 - \frac{1}{2} a t_2^2 = \frac{v_1^2}{g \cdot \sin\alpha} - \frac{1}{2} \cdot g \cdot \sin\alpha \cdot \frac{v_1^2}{g^2 \cdot \sin^2\alpha} = \frac{1}{2} \frac{v_1^2}{g \cdot \sin\alpha} \qquad 2)$$

e sostituendo

$$x_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(3,13\ m/s)^2}{9,8\ m/s^2 \cdot (\sqrt{2}/2)} = 0,7m$$

Tale posizione si trova ad un altezza H data dalla relazione

$$H = x_2 \cdot \sin\alpha = 0,7m \cdot (\sqrt{2}/2) = 0,5m \qquad 3)$$

Il dischetto raggiunge la stessa altezza da cui era partito!

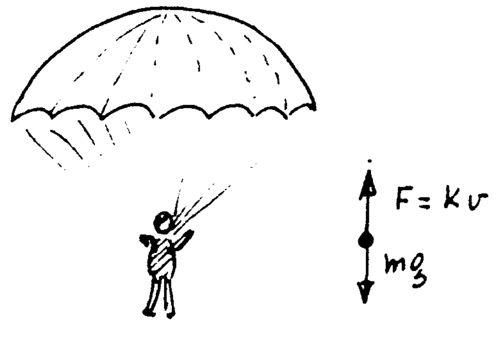
OSSERVAZIONE - Il risultato ottenuto non è casuale (come Galileo aveva dimostrato sperimentalmente) ma vale qualunque siano le inclinazioni dei due piani inclinati.
Dall'esercizio precedente, infatti, la velocità con cui il dischetto arriva alla fine del piano inclinato risulta

$$v_1 = a \cdot t_1 = a \cdot \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{2a \cdot l} = \sqrt{2g\frac{h}{l} \cdot l} = \sqrt{2gh}$$

e quindi dalla 3) e dalla 2)

$$H = x_2 \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g \cdot \sin\alpha} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\frac{v_1^2}{g} = \frac{2gh}{2g} = h$$

8. Un paracadutista di massa $m = 70\ kg$ si lancia da un aereo. Assumendo per la resistenza dell'aria una espressione $A = kv$ con $k = 70N \cdot s/m$, calcolare con quale velocità arriva a terra.



Il moto del paracadutista, inizialmente accelerato, diventa uniforme quando la forza dovuta alla resistenza dell'aria è uguale alla forza peso, cioè

$$kv_l = mg \qquad 1)$$

La velocità limite v_l è quella con cui il paracadutista arriva al suolo. Dalla 1) *abbiamo*

$$v_l = \frac{mg}{k} = \frac{70\ kg \cdot 9,8\ m/s^2}{70N \cdot s/m} = 9,8\ m/s \simeq 35\ km/h$$

CAPITOLO IV

ESERCIZI PROPOSTI

1. A un oggetto fermo di massa $m = 300g$ viene applicata una forza $F = 0,55\ N$. Calcolare l'accelerazione dell'oggetto e lo spazio percorso in $6s$.

   $(a = 1,8m/s^2; \quad \Delta s = 32,4m)$

2. Un oggetto di massa $m = 150g$ percorre, sotto l'azione di una forza, $15m$ in $8s$. Calcolare l'intensità della forza.

   $(F = 0,07\ N)$

3. Un carrello di massa $m = 1,8kg$ si muove con velocità $v = 1,3m/s$. Ad esso viene applicata una forza che lo porta in $3s$ alla velocità di $2,5m/s$. Calcolare l'intensità della forza e lo spazio percorso nel medesimo intervallo di tempo.

   $(F = 0,72\ N; \quad \Delta s = 5,7m)$

4. Un'automobile, che ha una massa di $800kg$, partendo da ferma, raggiunge la velocità di $90km/h$ in $50s$. Che forza ha sviluppato il motore?

   $(F = 4 \cdot 10^2\ N)$

5. Un'automobile di massa $m = 1500kg$, che viaggia alla velocità di $50km/h$, viene fermata in $90m$. Calcolare la forza sviluppata dai freni considerandola costante.

   $(F = 1,6 \cdot 10^3\ N)$

6. Un oggetto di massa $m = 5kg$ si muove con velocità $v = 3m/s$. Quale forza occorre applicare per portarlo in $15m$ alla velocità di $20m/s$?

   $(F = 65\ N)$

7. Un'automobile di massa $m = 1,2 \cdot 10^3 kg$, che viaggia alla velocità di $130km/h$, viene fermata in $5,3s$. Calcolare l'intensità della forza frenante e lo spazio di frenata.

   $(F = 8,2 \cdot 10^3 N; \quad \Delta s = 96m)$

8. Un oggetto, sottoposto ad una forza di $1,6N$, passa dalla velocità $v_1 = 1,4m/s$ alla velocità $v_2 = 1,8m/s$ nello spazio di $1,9m$. Calcolare la massa dell'oggetto.

   $(m = 4,7kg)$

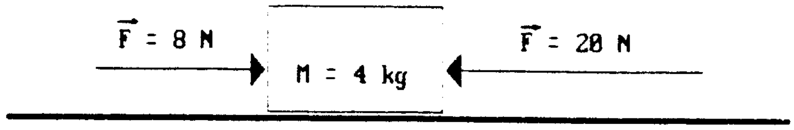
9. Un oggetto di massa incognita si muove su un piano orizzontale perfettamente liscio alla velocità di $3m/s$. Ad un certo istante gli viene applicata una forza di $14N$, agente parallelamente al piano, che in $10s$ imprime all'oggetto una velocità di $10\ m/s$. Determinare il valore della massa dell'oggetto.

$(m = 20\ kg)$

10. Un oggetto di massa $30\ kg$ si sta muovendo su un piano orizzontale liscio alla velocità di $50\ m/s$. Per quanto tempo si dovrà tenere applicata, in senso opposto al moto, una forza di $25N$ al fine di dimezzare la velocità dell'oggetto?

$(\Delta t = 30s)$

11. Un oggetto inizialmente fermo, di massa $4\ kg$ è soggetto alle due forze mostrate in figura.

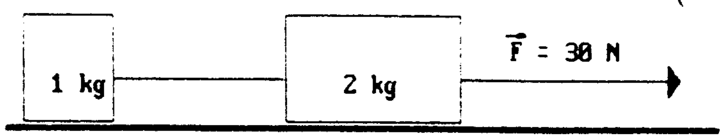


Che velocità raggiunge dopo $10s$? Se, trascorsi i $10s$, si tolgono entrambe le forze, com'è il moto dell'oggetto negli istanti successivi?

$(v = 30\ m/s)$

12. Due oggetti di massa $1kg$ e $2kg$ rispettivamente sono trascinati su un piano orizzontale liscio da una forza di $30N$ (vedi figura). Si determini la loro accelerazione.

$(a = 10\ m/s^2)$



13. Una forza di $4,3N$ viene applicata per $2,4s$ ad un oggetto fermo del peso di $65N$; cessata l'azione della forza, l'oggetto prosegue per inerzia. Trascurando gli attriti, calcolare lo spazio percorso dall'oggetto in $12s$, dopo che la forza ha cessato la sua azione.

$(\Delta s = 19m)$

14. Un carrello, sollecitato da una forza $\vec{F_1}$, percorre in $10s$ una distanza di $20m$. Sollecitato da una forza $\vec{F_2}$, percorre nello stesso intervallo di tempo una distanza di $40m$. In che rapporto stanno F_1 e F_2? Se F_1 fosse $4N$, quale sarebbe la massa del carrello?

$(F_1/F_2 = 0,5; \quad m = 10kg)$

15. Un'automobile di massa $m = 800kg$, con velocità $v_0 = 27m/s$, frena con una decelerazione $a = 3m/s^2$.
 a. Calcolare il tempo impiegato a fermarsi e lo spazio di frenata;
 b. disegnare il grafico velocità-tempo del moto;
 c. calcolare l'intensità della forza frenante.
 ($\Delta s = 121m$; $t = 9s$; $F = 2,4 \cdot 10^3\ N$)
16. Sotto l'azione di una forza costante, un carrello, partendo da fermo, acquista una velocità di $36m/s$ in $54s$. Se si raddoppia la massa del carrello, per mantenere la stessa accelerazione è necessario che la forza motrice sia di $(8/3)N$. Determinare la massa del carrello.
 ($m = 2kg$)
17. Un oggetto di massa $1,5kg$ è posto su un piano inclinato alto $1,4m$ e lungo $6m$. All'oggetto è applicata una forza, parallela al piano inclinato e diretta verso l'alto, di $11,5N$. Con quale accelerazione si muove l'oggetto se il coefficiente d'attrito è $\mu_d = 0,4$?
 ($a = 1,5m/s^2$)
18. Calcolare quale forza occorre per trascinare a velocità costante un oggetto del peso di $18N$ su un piano orizzontale con coefficiente di attrito $\mu_d = 0,4$.
 ($F = 7,2\ N$)
19. Una forza di $58N$ trascina in salita lungo un piano, inclinato di $30°$ sull'orizzontale, un oggetto del peso di $70N$, a velocità costante. Calcolare il coefficiente di attrito tra oggetto e piano.
 ($\mu_d = 0,38$)
20. Su un piano inclinato, lungo $1m$ e alto $0,3m$, è posto un blocchetto di legno di $200g$. Se il coefficiente di attrito è $0,2$, con quale velocità v_1 esso arriva sul fondo? Con quale velocità v_2 arriverebbe sul fondo se non ci fosse l'attrito?
 ($v_1 = 1,4m/s$; $v_2 = 2,4m/s$)
21. Un sasso cade dall'altezza di $15m$. Quanto tempo impiega ad arrivare al suolo?
 ($t = 1,7s$)
22. Se una goccia cadesse con accelerazione $g = 9,8\ m/s^2$ da un'altezza di $2000m$, con quale velocità raggiungerebbe il suolo? Perchè in realtà non arriva a tale velocità?
 ($v = 198m/s$)
23. Da quale altezza deve cadere un sasso per giungere al suolo alla velocità di $54km/h$ se si trascura la resistenza dell'aria?
 ($h = 11,5m$)

24. Un missile di $16000kg$ ha una spinta di $2,5 \cdot 10^5 N$. Determinare l'accelerazione con cui si muove se si alza verticalmente. Quale velocità raggiunge a $2000m$ di altezza? (Si assuma $g = 10m/s^2$.)

$(a = 5,6m/s^2; \quad v = 150m/s)$

25. Trovare il valore minimo della forza che deve agire su un cubo di pietra pesante $15000kg$ per spingerlo verso l'alto lungo un piano inclinato che forma con l'orizzontale un angolo di 30^o sapendo che il coefficiente d'attrito è $0,7$. Fare anche un disegno schematico delle forze.

$(F = 1,6 \cdot 10^4 N)$

26. Ad un oggetto libero inizialmente fermo di massa $2,5kg$ è applicata una forza di $10N$ per $16s$. Quale velocità raggiungerà?

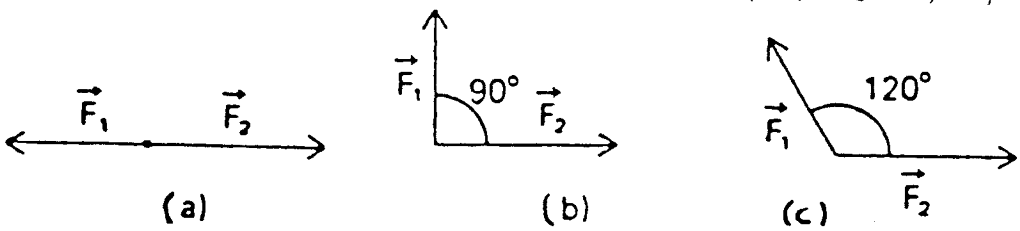
$(64m/s)$

27. Un oggetto libero, inizialmente fermo, è stato messo in moto da una forza di $24N$ e di durata $15s$. Quale forza dobbiamo applicare all'oggetto perchè si fermi in $30s$?

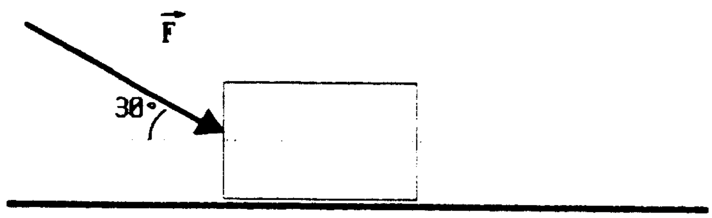
$(12\ N)$

28. Su un oggetto di massa $2kg$ agiscono le forze $F_1 = 5N$ ed $F_2 = 8N$. Trovare l'accelerazione nei casi a, b, c della figura sotto riportata.

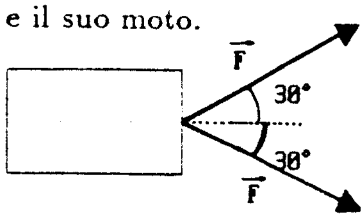
$(a_a = 1,5m/s^2; \quad a_b = 4,7m/s^2; \quad a_c = 3,5m/s^2)$



29. Un oggetto di massa $3kg$ appoggiato su un piano orizzontale liscio è spinto da una forza di $6N$ che forma con l'orizzontale un angolo di 30^o (vedi figura). Si determini l'accelerazione dell'oggetto.



30. Un oggetto di massa $3kg$ viene trascinato su un piano senza attrito da due funi che formano un angolo di 60^o fra di loro (vedi figura). Le forze applicate alle funi hanno un valore di $20N$. Determinare la direzione di spostamento dell'oggetto e il suo moto.



31. Quale forza è necessaria per accelerare un'auto di massa $1000kg$ da $10km/h$ a $64km/h$ in $5s$?

$(F = 3 \cdot 10^3 N)$

32. Un ciclista di $70kg$ su una bicicletta di $10kg$, frenando, riduce la propria velocità da $10m/s$ a $2m/s$ in $4s$. In quale direzione agisce la forza originata dalla frenata e qual è la sua intensità?

$(F = 1.6 \cdot 10^2\ N)$

33. Una forza di $10N$, applicata ad un oggetto A, produce un'accelerazione di $5m/s^2$. Aggiungendo all' oggetto A un oggetto B, l'accelerazione diventa $2m/s^2$. Qual è la massa di B?

$(m = 3kg)$

34. Un oggetto di massa $6kg$ scivola su un piano inclinato lungo $12m$ ed alto $6m$. L'oggetto all'inizio è fermo e durante la sua discesa si trova sottoposto, oltre alla sua forza peso, anche ad una forza parallela al piano e opposta al suo moto d'intensità $10N$.
Determinare la velocità dell'oggetto alla base del piano. Valutare poi quale dovrebbe essere l'altezza del piano perchè l'oggetto scivoli su esso con velocità costante. (Assumere $g = 10m/s^2$.)

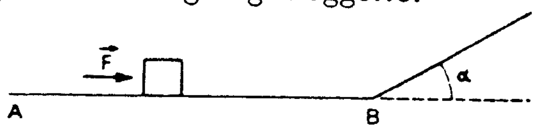
$(v = 8,9m/s; \quad h = 2m)$

35. Un oggetto di massa $m = 2,8kg$ si trova su un piano orizzontale ruvido. Se ad esso si applica una forza di $15N$ parallela al piano, quale spazio percorre in $13s$, se il coefficiente di attrito è $\mu_d = 0,4$?

$(\Delta s = 1.2 \cdot 10^2 m)$

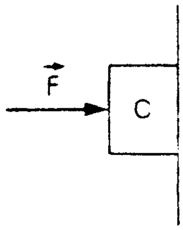
36. Un oggetto di massa $m = 500g$ scivola sul piano orizzontale AB di lunghezza $l = 36m$ (vedi figura), spinto da una forza $F = 5N$ (coefficiente di attrito dinamico tra piano e oggetto $\mu_d = 0,3$). Calcolare la velocità con cui l'oggetto giunge in B. In B la forza $\vec{F}$ cessa e l'oggetto prosegue per inerzia lungo il piano inclinato liscio ($\alpha = 30^o$). Calcolare a quale altezza giunge l'oggetto.

$(v = 22m/s; \quad h = 26m)$



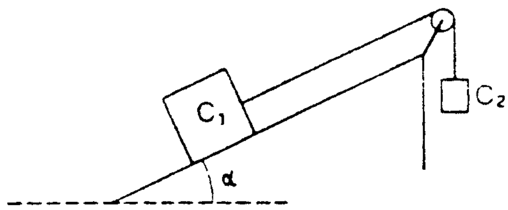
37. Calcolare qual è la minima forza orizzontale necessaria a mantenere fermo l'oggetto C (vedi figura). Si conosce la massa dell'oggetto $m = 12kg$ e il coefficiente d'attrito $\mu_s = 0,4$.

$(F = 2,9 \cdot 10^2\ N)$



38. Nel dispositivo della figura l'oggetto C_1 ha massa $m_1 = 3,2kg$, l'oggetto C_2 ha massa $m_2 = 4,5kg$, l'angolo tra il piano e l'orizzontale è $\alpha = 30^o$. Calcolare l'accelerazione del moto:
a. trascurando l'attrito;
b. se il coefficiente di attrito tra l'oggetto C_1 e il piano è $\mu_d = 0,3$.

$(a_1 = 3,7m/s^2;\quad a_2 = 2,6m/s^2)$



39. Quanto vale l'accelerazione di gravità sulla superficie di Giove se un oggetto che sulla Terra pesa $80N$ su Giove pesa $7800N$?

$(g_G = g_T \cdot 97,5)$

40. Il peso di un oggetto, misurato con un dinamometro in un punto della Terra dove $g = 9,8m/s^2$, è pari a $29,4N$. Se si porta l'oggetto su una nave spaziale a notevole distanza dalla Terra, il suo peso, misurato sempre con un dinamometro, risulta pari a $2,94N$. Quanto vale l'accelerazione di gravità in quel punto?

$(g = 0,98m/s^2)$

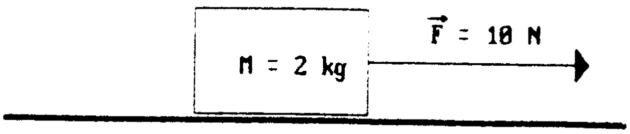
CAPITOLO IV

TEST E QUESITI

1. Dire se le seguenti affermazioni sono *vere* o *false*.
   a. Se su un oggetto non agisce alcuna forza, l'oggetto non accelera.
   b. Se un oggetto è privo di accelerazione, si può concludere che su di esso non agisce alcuna forza.
   c. Se su un oggetto agisce un'unica forza, questo deve essere soggetto a una accelerazione.
   d. Un oggetto che accelera non può mai avere velocità nulla.
   e. La massa di un oggetto dipende dalla sua posizione sulla Terra.
   f. Il peso di un oggetto dipende dalla sua posizione sulla Terra.
   g. Un oggetto a cui è applicata una forza costante si muove di moto uniforme.
   h. Due oggetti di massa e dimensioni diverse, lanciati verticalmente verso l'alto con la stessa velocità iniziale, raggiungerebbero la stessa altezza massima se non ci fosse la resistenza dell'aria.
   i. Il tempo di caduta da una certa altezza è lo stesso sia che l'oggetto cada lungo un piano inclinato (senza attrito) sia che cada liberamente.

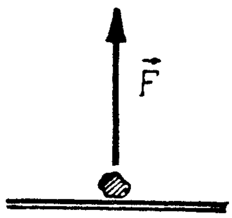
2. Dire quali delle seguenti affermazioni sono *vere* e quali sono *false*. Eseguendo misure molto accurate di accelerazione di gravità e massa, prima al livello del mare e poi a 4000 metri di quota, si trova che...
   a. accelerazione e massa non cambiano valore mentre il peso cambia valore.
   b. peso e accelerazione rimangono identiche mentre cambia il valore della massa.
   c. peso, accelerazione e massa cambiano valore in proporzione.
   d. peso e accelerazione cambiano valore mentre la massa non cambia.

3. Dire quali delle seguenti affermazioni sono *vere* e quali sono *false*.
Dato il sistema disegnato nella figura sotto riportata e supponendo un coefficiente di attrito dinamico $\mu = 0,4$ risulta che:



a. l'oggetto si muove di moto uniforme.
b. l'oggetto si muove con accelerazione $a \simeq 1m/s^2$.
c. l'oggetto si muove con accelerazione $a = 5m/s^2$.
d. l'oggetto non si muove perchè la forza è minore del peso dell'oggetto $P = mg = 19,6N$.

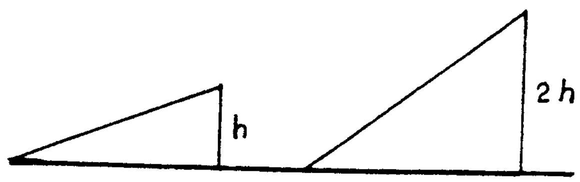
4. Dire quali delle seguenti affermazioni sono *vere* e quali sono *false*.
Se ad un sasso di massa $m = 1kg$ che si trova per terra viene applicata una forza diretta verso l'alto d'intensità $F = 5N$ ...



a. il sasso si muove verso l'alto con $a = 5m/s^2$.
b. il sasso rimane fermo.
c. il sasso sale e poi ritorna a terra.
d. il sasso si muove con velocità $v = 5m/s$.

5. Un oggetto inizialmente in quiete e poi spinto da una forza F parallela al piano su cui è appoggiato assume una velocità v dopo un intervallo di tempo Δt. Se allo stesso oggetto si applica una forza $2F$, quanto vale la velocità da esso acquisita dopo un intervallo di tempo $2\Delta t$?
a. v
b. $2v$
c. $4v$
d. $v/2$

6. Due dischi uguali scivolano lungo due piani inclinati privi di attrito di uguale lunghezza e di altezza pari rispettivamente ad h e $2h$. Detti Δt_1 e Δt_2 gli intervalli di tempo che i dischi impiegano per giungere alla base del rispettivo piano inclinato, indicare con una crocetta quale delle seguenti relazioni fra i valori di Δt_1 e Δt_2 è quella corretta.
   a. $\Delta t_1 = \Delta t_2$
   b. $\Delta t_2 = \Delta t_1/2$
   c. $\Delta t_2 = \Delta t_1/\sqrt{2}$
   d. $\Delta t_2 = \sqrt{2} \cdot \Delta t_1$



7. Due dischi uguali scivolano lungo due piani inclinati che hanno uguale altezza e lunghezza rispettivamente pari a l e $2l$. Indicati con Δt_1 e Δt_2 gli intervalli di tempo impiegati dai due dischi per giungere alla base dei rispettivi piani, indica con una crocetta quale delle relazioni seguenti è quella corretta.
   a. $\Delta t_1 = \Delta t_2$
   b. $\Delta t_2 = \Delta t_1/2$
   c. $\Delta t_2 = \Delta t_1\sqrt{2}$
   d. $\Delta t_2 = 2\Delta t_1$

8. Se un'automobile può muoversi con una accelerazione $a = 3m/s^2$, con quale accelerazione si muove se rimorchia un'automobile di massa uguale? Indicare con una crocetta la risposta corretta.
   a. $6m/s^2$
   b. $3m/s^2$
   c. $1,5m/s^2$
   d. Non si può rispondere perchè non si conosce il valore della massa.

9. Un'automobile muovendosi ad una velocità v può fermarsi in uno spazio Δs. In quale spazio si può fermare quando si muove ad una velocità $2v$? Indicare con una crocetta la risposta corretta.
   a. $2\Delta s$
   b. $\Delta s/2$
   c. $3\Delta s$
   d. $4\Delta s$
   e. Non si può rispondere in quanto non si conosce la massa dell'automobile.

10. Un'automobile muovendosi ad una velocità v si può fermare in un intervallo di tempo Δt. In quale intervallo di tempo può fermarsi se si muove ad una velocità $2v$? Indicare con una crocetta la risposta corretta.
   a. $2\Delta t$
   b. $\Delta t/2$
   c. $3\Delta t$
   d. $4\Delta t$
   e. Non si può rispondere in quanto non si conosce la forza esercitata dai freni.

CAPITOLO V

ESERCIZI RISOLTI

1. Per far funzionare un montacarichi che solleva in $20s$ ad un'altezza di $10m$ 80 mattoni ciascuno di massa $m = 1\ kg$ viene usato un motore. Qual è la minima potenza che deve avere il motore?

   Se supponiamo che i mattoni vengano sollevati senza accelerazione, la forza $\vec{F}$ verso l'alto che deve esercitare il motore ha intensità pari a quella del peso dei mattoni, cioè

   $$F = mg = 80 \cdot 1\ kg \cdot 9,8m/s^2 = 784N$$

   I mattoni vengono sollevati di $\Delta s = 10m$, per cui il lavoro L eseguito dal motore vale

   $$L = F \cdot \Delta s = 784N \cdot 10m = 7840J$$

   Poiché questo lavoro deve essere eseguito in un intervallo di tempo $\Delta t = 20s$, la potenza minima P del motore deve essere

   $$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{7840J}{20s} = 392W$$

2. Un sasso viene lanciato verticalmente verso l'alto con una velocità iniziale $v_0 = 10m/s$. A quale altezza la sua energia cinetica si riduce a metà del valore iniziale?

   Per il principio di conservazione dell'energia meccanica posso scrivere

   $$\frac{1}{2}mv_0^2 + 0 = \frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2}mv_0^2) + mgh$$

   Semplificando per m

   $$\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{1}{4}v_0^2 = gh$$

   da cui

   $$h = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{100m^2/s^2}{4 \cdot 9,8m/s^2} = 2,55m \qquad 1)$$

Per risolvere il problema senza far uso del principio di conservazione dovrei trovare a quale altezza la velocità del sasso si è ridotta a $v_0/\sqrt{2}$. *Utilizzando la relazione*

$$a = \frac{v_{z2}^2 - v_{z1}^2}{2(z_2 - z_1)}$$

con $a = -g$, $v_{z2} = v_0/\sqrt{2}$, $v_{z1} = v_0$, $z_1 = 0$, $z_2 = h$ *e sostituendo, ottengo*

$$-g = \frac{v_0^2/2 - v_0^2}{2h}$$

cioè

$$2h = \frac{v_0^2}{2g}$$

da cui si riottiene la 1).

3. Un'automobile di massa $m = 10^3 kg$ raggiunge in $20s$ la velocità $v_0 = 20\ m/s$. Trascurando gli attriti, si determini la potenza esercitata dal motore.

Quando l'automobile ha raggiunto la velocità v_0 *essa possiede un'energia cinetica*

$$E_c = \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2} \cdot 10^3\ kg \cdot 400m^2/s^2 = 2 \cdot 10^5\ joule$$

Tale energia corrisponde al lavoro compiuto dal motore. Siccome tale lavoro è stato compiuto in $\Delta t = 20s$ *la potenza esercitata dal motore è*

$$P = \frac{L}{\Delta t} = \frac{E_c}{\Delta t} = \frac{2 \cdot 10^5\ joule}{20s} = 10^4\ watt = 10kW$$

CAPITOLO V

ESERCIZI PROPOSTI

1. Qual è il lavoro compiuto da un montacarichi per sollevare di 20 m una massa di materiale di 100 kg?
   $(L = 2 \cdot 10^4\ J)$
2. Una massa di $4,2\ kg$ cade a terra dall'altezza di $3,7\ m$. Quale lavoro compie?
   $(L = 1,5 \cdot 10^2\ J)$
3. Determinare il lavoro che può compiere in un'ora una macchina che ha la potenza di 2 CV.
   $(L = 5,3 \cdot 10^6\ J)$
4. Determinare la potenza di una macchina in grado di sollevare in 10 *minuti* 1400 kg all'altezza di 12 m.
   $(P = 2,7 \cdot 10^2\ W)$
5. Un motore può sollevare in $10s$ un corpo pesante 150 kg all'altezza di 20 m. Qual'è la potenza del motore in cavalli-vapore?
   $(P = 4\ CV)$
6. Quale lavoro può sviluppare in 1 min un motore della potenza di 500 W?
   $(L = 3 \cdot 10^4\ J)$
7. Una macchina avente un rendimento del 35% (cioè in grado di fornire il 35% dell'energia assorbita) consuma $3 \cdot 10^4\ J$ in 20 min. Determinare la potenza che la macchina è in grado di fornire.
   $(P = 8,7\ W)$
8. Una macchina solleva un carico di 160 kg all'altezza di $18m$ in $7,2s$. Calcolare la potenza della macchina e il lavoro che la macchina può compiere in $1h$. Supposto che la macchina abbia un rendimento del 40% (cioè è in grado di fornire il 40% dell'energia che assorbe), determinare il consumo di energia in $1h$.
   $(P = 3,9 \cdot 10^3\ W;\quad L = 1,4 \cdot 10^7\ J;\quad E = 3,5 \cdot 10^7\ J)$
9. Un'automobile di massa 900 kg ha un motore che sviluppa la potenza di 36 CV ed ha un rendimento del $12,5\%$. Calcolare il tempo che impiega per raggiungere la velocità di 36 km/h partendo da ferma.
   $(\Delta t = 13,6s)$
10. Un motore fa funzionare una pompa capace di sollevare $10^4 l$ di acqua ad un'altezza di $6m$ in 10 min. Che potenza deve avere il motore?
    $(P = 9,8 \cdot 10^2\ W)$

11. Un'automobile con una massa di 1000 kg viaggia alla velocità di 20 m/s. Il guidatore preme l'acceleratore uniformemente raggiungendo la velocità di 25 m/s in 10s. Che supplemento di potenza ha sviluppato il motore in fase di accelerazione?

$(P = 15\ CV)$

12. Un carrello scende lungo un piano inclinato di 45° per un tratto lungo 1,41 m. Risale quindi lungo un altro piano inclinato di 30°. Poiché nel movimento non incontra attrito, quanto sarà lungo il percorso fatto sul secondo piano inclinato prima di fermarsi?

$(\Delta x = 2\ m)$

13. Calcolare l'energia di un'automobile del peso di 12 *quintali* che viaggia alla velocità di 130 km/h.

$(E = 7{,}8 \cdot 10^5\ J)$

14. Calcolare l'energia cinetica di un'automobile di massa $m = 1000\ kg$, quando viaggia a 100 km/h. A quale velocità deve viaggiare un'autocarro di massa $m = 10000\ kg$ per avere la medesima energia cinetica?

$(E = 3{,}86 \cdot 10^5\ J; \quad v = 31{,}6\ km/h)$

15. Un cubo di alluminio di 15 cm di lato è posto su un tavolo alto 80cm in un locale il cui pavimento si trova a 3,5m dal suolo. Calcolare l'energia potenziale del cubo rispetto al pavimento e rispetto al suolo.

$(E_{p1} = 71\ J; \quad E_{p2} = 3{,}8 \cdot 10^2\ J)$

16. Una forza costante di 50N viene applicata ad un carrello di massa $m = 4{,}5kg$, per un tratto di 80cm. Calcolare energia cinetica e velocità finali del carrello.

$(E_c = 40\ J; \quad v = 4{,}2\ m/s)$

17. Calcolare l'energia cinetica:

a. di un carrello di 1 kg che si muove con $v = 2\ m/s$;
b. di una pallottola di 20g che viaggia a 400 m/s;
c. di un'automobile di 500 kg che viaggia a 72 km/h;
d. di un elettrone di massa $9 \cdot 10^{-31}kg$ che viaggia a $8 \cdot 10^7 m/s$ in un tubo catodico.

$(E_{c1} = 2J; \quad E_{c2} = 1{,}6 \cdot 10^3 J; \quad E_{c3} = 1 \cdot 10^5 J; \quad E_{c4} = 2{,}9 \cdot 10^{-15} J)$

18. Due ragazzi A e B con massa di 50 kg e di 70 kg rispettivamente fanno una corsa su una scalinata di 60 scalini, ognuno alto 20 cm. Se A impiega 15s e B impiega 20s, trovare:

a. quanta energia potenziale guadagna ciascuno dei ragazzi;
b. quale ragazzo sviluppa la maggiore potenza.

$(E_{p1} = 5{,}9 \cdot 10^3\ J; \quad E_{p2} = 8{,}2 \cdot 10^3\ J; \quad B)$

19. Calcolare l'altezza massima raggiunta da un oggetto che viene lanciato con la velocità di 7 m/s diretta verso l'alto verticalmente.

20. Con quale velocità arriva a terra un grave che cade dall'altezza di 10 m?

CAPITOLO V

TEST E QUESITI

1. Dire quali delle seguenti affermazioni sono *vere* e quali sono *false*.
   a. Solo la risultante delle forze che agiscono su un oggetto può compiere lavoro.
   b. Su un oggetto che resta fermo non si compie alcun lavoro.
   c. Una forza sempre perpendicolare alla velocità di un oggetto non compie lavoro su di esso.
   d. Il kilowattora è una unità di potenza.
   e. Raddoppiando il valore della velocità di un oggetto si raddoppia la sua energia cinetica.
   f. Se il valore della velocità di un oggetto si riduce alla metà, la sua energia cinetica si riduce a un quarto.
   g. L'energia potenziale di un oggetto dipende solo dall'altezza a cui si trova l'oggetto.

2. Un'energia cinetica può essere negativa?

3. Un'energia potenziale può essere negativa?

4. Un'energia totale può essere negativa?

CAPITOLI IB e IIB

ESERCIZI RISOLTI

1. Un automobilista, per controllare il tachimetro della sua automobile, misura l'intervallo di tempo che impiega a percorrere 1 Km, mantenendo la velocità costante.

Egli trova che quando il tachimetro segna 60 Km/h ha impiegato 1 minuto e 5 secondi per percorrere il Kilometro.

Determinare l'errore assoluto e l'errore relativo sulla misura del tachimetro

★

La velocità, in un moto ~~retti~~ uniforme, è data dalla relazione

$$v = \Delta s / \Delta t$$

Nel nostro caso abbiamo

$$\Delta s = 1\,Km = 1000\,m$$

$$\Delta t = 1 \cdot 60\,s + 5\,s = 65\,s$$

La velocità con cui si muove l'automobile è quindi

$$v = \frac{1000\ m}{65\ s} = 15,4\ m/s$$

Siccome $1\ m/s = 3,6\ Km/h$, posso anche scrivere

$$v = 15,4 \cdot 3,6\ Km/h = 55,4\ Km/h$$

Il valore segnato dal tachimetro ha quindi un errore assoluto

$$E_a = (60 - 55,4)\ Km/h = 4,6\ Km/h$$

a cui corrisponde un errore relativo

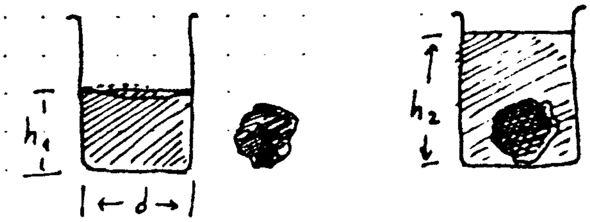
$$E_r = \frac{4,6\ Km/h}{55,4\ Km/h} = 0,08$$

cioè un errore relativo di $8/100 = 8\%$.

—★—★—★—

2. Un ragazzo per misurare il volume V di un sasso lo immerge in un bicchiere cilindrico che contiene dell'acqua fino ad una altezza ~~di~~ $h_1 = (10,1 \pm 0,1)\ cm$. Quando il sasso è completamente immerso l'acqua raggiunge un'altezza $h_2 = (17,8 \pm 0,1)\ cm$.

Sapendo che il diametro interno del bicchiere è $d = (8,0 \pm 0,05)$ cm, calcolare il volume del sasso



$h_1 = (10,1 \pm 0,1)$ cm
$h_2 = (17,8 \pm 0,1)$ cm
$d = (8,0 \pm 0,05)$ cm

Il volume del sasso è dato da

$$V = V_2 - V_1$$

dove $V_2 = \pi (d/2)^2 \cdot h_1 \qquad V_1 = \pi (d/2)^2 h_2$

Calcolo dapprima l'errore relativo delle singole misure

$d = (8,0 \pm 0,05)$ cm $\qquad E_{rd} = \dfrac{0,05}{8} = 0,0062$

$h_1 = (10,1 \pm 0,1)$ cm $\qquad E_{r1} = \dfrac{0,1}{10,1} = 0,0099$

$h_2 = (17,8 \pm 0,1)$ cm $\qquad E_{r2} = \dfrac{0,1}{17,8} = 0,0056$

L'errore relativo di V_1 è allora

$$E_{rV_1} = 2E_{rd} + E_{r1} = 0,0223 \simeq 0,02$$

e quindi essendo

$$V_1' = 3,14 \cdot (4\ cm)^2 \cdot 10,1\ cm = 507,4\ cm^3$$

l'errore assoluto di V_1 è $E_{a1} = V_1' \cdot E_{rV_1} =$

$$= 507,4\ cm^3 \cdot 0,02 \cong \mathbf{10}\ cm^3$$

Posso quindi scrivere

$$V_1 = (507 \pm 10)\ cm^3$$

Analogamente per V_2

$$E_{r V_2} = 2\ E_{rd} + E_{r2} = 0,018 \cong 0,02$$

$$V_2' = 894,3\ cm^3 \qquad E_{a2} = 17,8\ cm^3$$

$$V_2 = (894 \pm 18)\ cm^3$$

Il valore del volume V del sasso è ottenibile con un errore assoluto che è la somma degli errori assoluti delle due misure, cioè

$$E_a = 10\ cm^3 + 18\ cm^3 = 28\ cm^3$$

Ottengo quindi

$$\overline{V} = (894 - 507)\ cm^3 = 387\ cm^3$$

e quindi

$$V = (387 \pm 28)\ cm^3$$

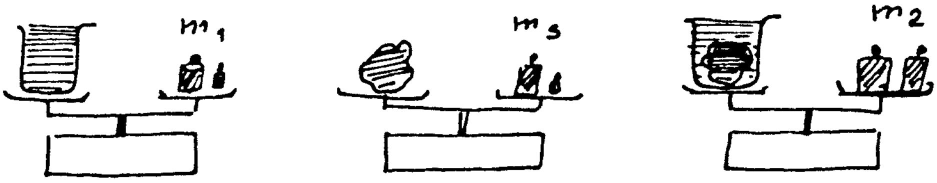
$$= (0,39 \pm 0,03)\ dm^3$$

con un errore relativo $E_r = \frac{0,03}{0,39} = 0,077$

cioè dell' 8%.

3. Il ragazzo dell'esercizio precedente non è soddisfatto della misura eseguita a causa dell'elevato errore relativo ottenuto. Dopo aver a lungo pensato, 'inventa' il seguente metodo.

Riempie d'acqua il bicchiere fino all'orlo e lo 'pesa', ottenendo $m_1 = (1013 \pm 1)\,g$. 'Pesa' il sasso e ottiene $m_s = (1017 \pm 1)\,g$. Immerge quindi il sasso nel bicchiere, buttando via l'acqua che trabocca, e 'pesa' di nuovo il bicchiere con acqua e sasso e ottiene $m_2 = (1648 \pm 1)\,g$. Che valore si ricava da queste misure per il volume V del sasso?



Il bicchiere, tutta l'acqua e il sasso dovrebbero 'pesare'

$$M = m_1 + m_s = (2030 \pm 2)\,g$$

quindi l'acqua che è uscita dal bicchiere quando è stato introdotto il sasso ha una massa

$$m_A = M - m_2 = (382 \pm 3)\,g$$

Siccome un litro di acqua ha una massa di $1\,Kg = 1000\,g$, il volume dell'acqua traboccata, che è anche il volume del sasso, è dato dalla proporzione

$$1000\,cm^3 : 1000\,g = V : M_A$$

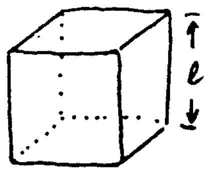
da cui $V = (382 \pm 3)\,cm^3$

con un errore relativo $E_r = \dfrac{3}{382} = 0{,}008$

dieci volte più piccolo di quello ottenuto con la misura precedente.

★ — ★ — ★

4. Si vuole determinare la densità del materiale di cui è costituito un cubo. Si pesa il cubo e si ottiene $m = (856 \pm 1)\,g$. Si misura uno spigolo del cubo e si ottiene $\ell = (5{,}35 \pm 0{,}05)\,cm$. Che valore si ottiene?



$$\rho = \frac{m}{V} \qquad V = \ell^3$$

La massa del cubo è nota con un errore relativo

$$E_{rm} = \frac{1}{856} = 0,001$$

La lunghezza di uno spigolo è nota con un errore relativo

$$E_{r\ell} = \frac{0,05}{5,35} = 0,01$$

e quindi il volume $V = \ell^3 = 153\ cm^3$

con un errore relativo $E_{rV} = 3 \cdot E_{r\ell} = 0,03$

Pertanto la densità $\rho = \frac{m}{V} = \frac{856}{153}\ \frac{g}{cm^3} = 5,6\ g/cm^3$

sarà nota con un errore relativo

$$E_{r\rho} = E_{rV} + E_{rm} \cong E_{rV} = 0,03$$

Abbiamo quindi un errore assoluto

$$E_{a\rho} = \rho \cdot E_{r\rho} = (5,6\ g/cm^3) \cdot 0,03 = 0,17\ g/cm^3$$

La densità del materiale è quindi

$$\rho = (5,6 \pm 0,2)\ g/cm^3$$

CAPITOLI IB e IIB

ESERCIZI PROPOSTI

1. Calcolare l'errore relativo percentuale nelle seguenti misure:
   $l = (3,1 \pm 0,2)m$; $t = (47,7 \pm 0,4)s$.
   (6,5%; 0,8%)
2. Scrivere le seguenti misure sotto forma di potenze del 10, tenendo solo due cifre significative: $7432s$; $0,00457kg$.
3. La base e l'altezza di un triangolo isoscele hanno rispettivamente le seguenti misure: $(12,2 \pm 0,1)cm$; $(10,4 \pm 0,1)cm$.
   Calcolare l'area del triangolo e l'errore assoluto.
   [$(63,5 \pm 1)cm^2$]
4. Abbiamo ricavato le seguenti misure dei lati di un rettangolo:
   $(5,15 \pm 0,05)cm$ e $(2,45 \pm 0,05)cm$.
   Qualè l'errore relativo percentuale sull'area? Quale l'errore assoluto?
   (3%; $0,4\ cm^2$)
5. Qual è l'ordine di grandezza dell'errore relativo che si commette nell'usare 3,14 invece di $\pi = 3,14159$ ...?
6. Quale delle seguenti misure è la più precisa e quale la meno:
   $(62 \pm 3)m$; $(12 \pm 2)mm$; $(350 \pm 50)cm$?
7. Due sperimentatori, usando un 'metro' graduato in *millimetri*, trovano le seguenti misure di una lunghezza: $350,1cm$ e $350,152cm$.
   Una di esse non è attendibile. Quale e perche?
8. Dieci studenti hanno misurato, con la stessa accuratezza, la lunghezza l di un'asta, trovando i valori: $45,6cm$; $45,8cm$; $45,8cm$; $45,6cm$; $45,9cm$; $45,5cm$; $45,8cm$; $45,8cm$; $45,5cm$; $45,7cm$.
   Quale prenderesti come valore della lunghezza e con quale errore?
9. Scrivi i seguenti numeri servendoti delle potenze di 10: 5700; 0,0000201; 1070000; 0,009; 0,0000027.
10. Se la misura della lunghezza di un'asta è $(24,7 \pm 0,5)cm$, qual è l'errore relativo nella misura?
11. Se misurando un'asta trovi che la sua lunghezza è di $67cm$ con un errore del 3%, entro quali valori è compresa la lunghezza dell'asta?
12. Qual è il risultato del prodotto $L = 3l$ con $l = (12 \pm 0,3)mm$?
13. Calcolare l'errore assoluto e relativo da cui è affetta la somma delle misure seguenti:
    a. $(12 \pm 0,3)s$ e $(15 \pm 0,2)s$
    b. $(28 \pm 0,3)mm$ e $(35 \pm 0,5)mm$.

14. Un recipiente pieno d'acqua ha la massa di $(1230 \pm 20)g$. Il recipiente vuoto ha la massa di $(290 \pm 10)g$. Qual è la massa dell'acqua?
15. $S = a + b$ con $a = (72 \pm 1,5)mm$ e $b = (95 \pm 2)mm$. Calcolare l'errore assoluto e relativo della somma. Come si esprime in modo corretto il risultato della somma?
16. $D = a - b$ con $a = (2,42 \pm 0,02)s$ e $b = (1,56 \pm 0,03)s$. Calcolare l'errore assoluto e relativo della differenza ed esprimere il valore di D in modo corretto.

    $[0,05s$; $5,8\%$; $(0,86 \pm 0,05)s]$
17. Le dimensioni di un tavolo rettangolare sono $a = (1250 \pm 2)mm$ e $b = (760 \pm 2)mm$. Calcolare l'area del tavolo indicando nel risultato l'errore assoluto.

    $[(950 \pm 4) \cdot 10^3\ mm^2]$
18. $Q = (a/b)$ con $a = (23 \pm 3)s$ e $b = (52 \pm 3)s$. Calcolare l'errore relativo e assoluto di Q.

    $(19\%;\ 0,08)$
19. Se $a = 5,32$ e $b = 2,5$, esprimere $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ e $a : b$ con il numero corretto di cifre significative.
20. Ecco i valori ottenuti (in mm) per il diametro di un'asta cilindrica in una serie di prove ripetute:
    26,6; 26,4; 26,4; 26,2; 26,4; 26,3; 26,5; 26,4; 26,2.
    Quale prenderesti come valore del diametro e con quale errore?
21. Usando un calibro ventesimale, la misura di una lunghezza risulta:
    $(12 + 13/20)\ mm < l < (12 + 14/20)\ mm$
    Esprimere la misura in scala decimale, calcolando gli errori.
22. I risultati di due misure sono uguali entro i limiti delle incertezze se i loro intervalli di variabilità hanno almeno un valore comune.
    Indicare se i risultati delle misure seguenti sono uguali o differenti nei limiti delle incertezze delle misure:
    a. $(182 \pm 2)mm$; $(187 \pm 2)mm$
    b. $(37 \pm 1)m$; $39 \pm 2)m$
    c. $(48,2 \pm 0,5)cm$; $(47,1 \pm 0,4)cm$
    d. $(29,8 \pm 0,5)s$; $(30,4 \pm 0,4)s$
    e. $(372 \pm 3)m$; $(376 \pm 3)m$.
23. Le dimensioni di un rettangolo sono rispettivamente $(8,0 \pm 0,1)cm$ e $(12,5 \pm 0,1)cm$. Trovare il perimetro e l'area del rettangolo con i loro errori assoluti.
24. Il valore del volume di un recipiente è risultato $V = 80cm^3$. V è stato determinato facendo il prodotto di tre misure a, b e c aventi errori percentuali rispettivamente del 2%, dell'1,5% e dello 0,8%. Quanto valgono l'errore percentuale ed assoluto di V?

25. Se si misura con un calibro ventesimale lo spessore di un sottile lamierino, si trova il valore di $(0,35 \pm 0,05)mm$. Se si misura con lo stesso strumento un pacco di 50 lamierini si trova il valore di $(17,40 \pm 0,05)mm$. Qual è, secondo quest'ultima misura, lo spessore di un lamierino e con quale incertezza?

[$(0,348 \pm 0,001)mm$]

26. Il diametro di un cerchio, misurato con la riga millimetrata, è risultato essere uguale a $(6,6 \pm 0,1)cm$.

a. Quanto vale il raggio? Quanto vale l'incertezza della misura del raggio?

b. Quanto vale l'area? Quanto vale l'incertezza della misura dell'area?

c. Se il cerchio è la base di un cilindro alto $(5,8 \pm 0,1)cm$, quanto vale il volume del cilindro? Quanto vale l'incertezza della misura del volume?

27. Una vettura percorre la distanza di $(40 \pm 1)km$ consumando $(3,5 \pm 0,1)$ *litri* di benzina.

a. Quanti *kilometri* ha percorso con 1 *litro* di benzina, in media? Quanto vale l'incertezza di questo calcolo?

b. Quanti *litri* di benzina ha consumato per ogni *kilometro*, in media? Quanto vale l'incertezza di questo calcolo?

28. Esprimi i numeri seguenti usando le potenze di 10, poi eseguine l'arrotondamento prima a 6, poi a 5, poi a 4, poi a 3, poi a 2, poi a 1 cifra significativa:

1320458130; 0,10029752; 0,009832549; 12348526; 1528934.

29. Calcola gli errori relativi percentuali delle misure seguenti e disponile in ordine dalla più precisa alla meno precisa:

$M_1 = (10,00 \pm 0,05)mm$ $\quad M_2 = (40,0 \pm 0,1)kg$

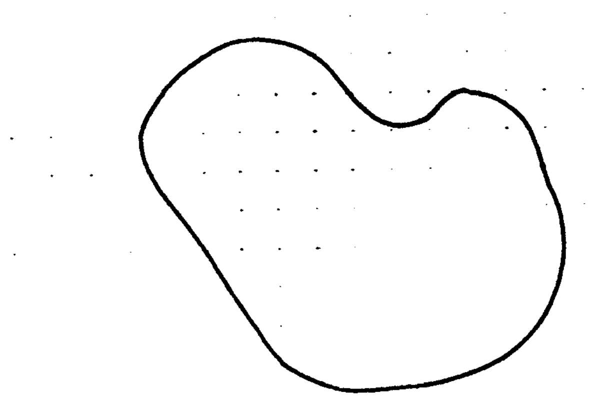
$M_3 = (80,0 \pm 0,1)cm$ $\quad M_4 = (20,0 \pm 0,4)g$

30. Nel misurare una velocità, il cui valore è di $25m/s$, si è compiuto un errore relativo percentuale del 2%. Quanto vale l'errore assoluto della misura?

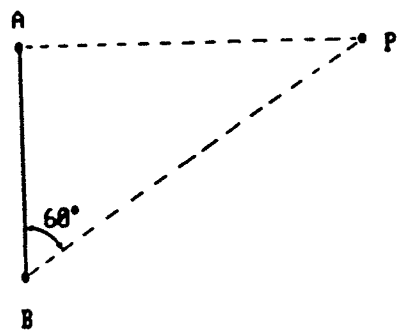
31. Un cattivo orologio va avanti di 10 *minuti* al *giorno*. Quale errore si compie misurando con quell'orologio un tempo di 2 *ore*? Le misure che si compiono con quell'orologio sono sbagliate per eccesso o per difetto?

($50s$)

32. Determinare l'area della superficie interna al contorno disegnato sotto assumendo come unità di misura l'area di un quadretto.



33. Un edificio in una certa ora del giorno proietta sulla strada un'ombra di $10m$. Per misurarne l'altezza, un ragazzo alto $1,70m$ misura la lunghezza della propria ombra sul terreno rilevando che essa vale $85cm$. Quanto è alto l'edificio? La valutazione della sua altezza dipende dall'inclinazione dei raggi solari?
34. Un punto P viene traguardato dai due punti A e B distanti fra loro $1m$. Si nota che $\overline{PB}$ forma col segmento $\overline{AB}$ un angolo di 60°. Si determini la distanza di P dal punto A.



CAPITOLI IB e IIB

TEST E QUESITI

1. Sapresti ricavare dalla figura sottoriportata a quanti metri corrisponde 1 *mile*? Come abbiamo chiamato nel testo questa unità di misura? Perchè il valore che hai trovato non corrisponde in modo 'esatto' a quello riportato nel testo?

2. Data l'espressione letterale

$$10A + \frac{B}{C} = 3D$$

dire quali delle relazioni seguenti sono *vere* e quali sono *false*.
   a. $A = (3D \cdot C - B)/(10C)$
   b. $A = 10 \cdot (3D \cdot C - B) \cdot C$
   c. $A = 0{,}3 \cdot D - 0{,}1 \cdot B/C$
   d. $A = 0{,}1 \cdot (3D - B/C)$

3. Dire quali delle seguenti affermazioni sono *vere* e quali sono *false*.
   a. La somma di due grandezze omogenee è possibile.
   b. La somma di due grandezze non omogenee è impossibile.
   c. Il prodotto di due grandezze omogenee è possibile.
   d. Il prodotto di due grandezze non omogenee è impossibile.
   e. Il rapporto di due grandezze è possibile solo se queste sono omogenee.

4. Dire quali delle seguenti espressioni sono *vere* e quali sono *false*.
   a. La somma $3 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4$ non si può fare perchè le basi 10 non sono elevate allo stesso esponente.
   b. $3 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^5$
   c. $3 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 = 6 \cdot 10^4$
   d. $3 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 = 3 \cdot 10^9$
   e. $3 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 = 3{,}3 \cdot 10^5$
   f. $3 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 = 33 \cdot 10^4$
   g. $3 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 = 300000 + 30000 = 330000$

5. Alcuni studenti discutono su come varia il volume di un cilindro raddoppiando il raggio r della base e dimezzando l'altezza h. Quale delle seguenti affermazioni è quella corretta? Indicala con una crocetta.
   a. Il volume rimane invariato.
   b. Il volume diventa doppio.
   c. Il volume diventa metà.
   d. Il volume diventa un quarto.
   e. Impossibile dirlo senza conoscere i valori di r e di h.

6. Un certo prodotto è commercializzato in lattine di due formati, grande e piccolo. L'altezza delle lattine è la stessa nei due formati, ma il diametro della lattina grande è il doppio di quello della piccola. Se la lattina grande è venduta a 1800 lire, mentre la piccola è venduta a 600 lire, quale dei due formati è più conveniente come spesa? Indica con una crocetta la risposta corretta.
   a. Quello piccolo perchè si spende meno.
   b. Quello piccolo perchè contiene metà prodotto di quello grande a un costo minore della metà.
   c. Impossibile rispondere: dipende dal prezzo unitario del prodotto.
   d. Quello grande perchè contiene quattro volte il prodotto contenuto in quello piccolo e costa solo tre volte.

7. Come varia il rapporto V/S tra la misura V del volume e la misura S della superficie di un solido geometrico, raddoppiando le sue dimensioni? Indica con una crocetta la risposta corretta.
   a. Il rapporto non varia.
   b. Il rapporto diventa il doppio.
   c. Il rapporto diventa il quadruplo.

d. Il rapporto diventa la metà
e. Il rapporto diventa la quarta parte.
f. La variazione non è la stessa per tutti i solidi geometrici.

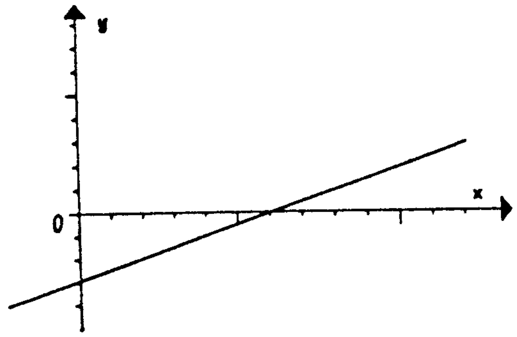
8. Quale dei seguenti numeri rappresenta la misura più precisa?
I) $1,293$; II) $12,93 \cdot 10^7$; III) $0,1293 \cdot 10^2$; IV) $1293 \cdot 10^4$.
Indica con una crocetta la risposta corretta.
   a. IV) perchè la parte intera ha il numero maggiore di cifre.
   b. III) perchè la parte decimale ha il numero maggiore due cifre.
   c. I) perchè è il numero più piccolo.
   d. II) perchè è il numero più grande.
   e. Tutti i numeri hanno la stessa precisione perchè hanno lo stesso numero di cifre significative.

9. Ritenete che sia più precisa una misura di lunghezza di una strada di circa $10000m$ alla quale è associato un errore assoluto di $1m$ o una misura di lunghezza di un blocco metallico di $10cm$ circa alla quale è associato un errore assoluto di $1mm$?

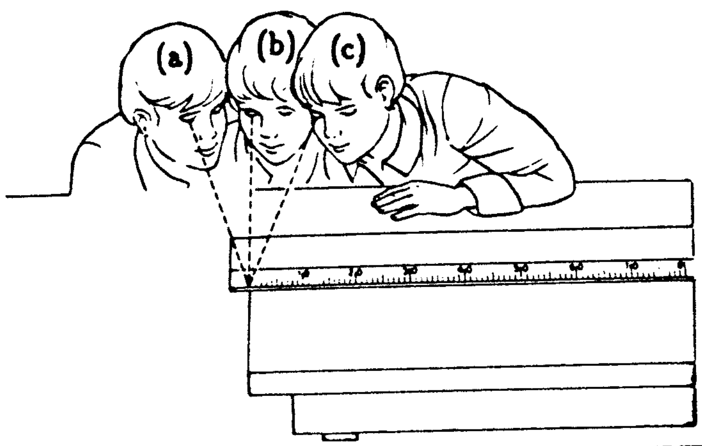
10. Quali dei seguenti numeri, che esprimono risultati di misure diverse, hanno lo stesso numero di cifre significative?
   a. $1,23 \cdot 10^2$
   b. $0,45 \cdot 10^2$
   c. $1,7 \cdot 10^2$
   d. $0,010 \cdot 10^4$
   e. $0,120 \cdot 10^3$

11. Quante sono le cifre significative del risultato $l = 5,0600m$? Indica con una crocetta la risposta corretta.
   a. Due, perchè gli zeri non sono significativi.
   b. Quattro, quante sono le cifre della parte decimale.
   c. Cinque, perchè tutte le cifre sono significative.
   d. Tre, perchè gli zeri finali della parte decimale non contano.
   e. Una, quante sono le cifre della parte intera.

12. Dire quali delle seguenti affermazioni sono *vere* e quali sono *false*.
La retta di figura rappresenta ...
    a. sicuramente una dipendenza non lineare perchè non passa per l'origine degli assi.
    b. una dipendenza lineare.
    c. una dipendenza del tipo $y = 6x$. Infatti quando $y = 0$, $x = 6$.
    d. una dipendenza del tipo $y = 0,5x$. Infatti quando x aumenta di 1, y aumenta di $0,5$.
    e. una dipendenza del tipo $y = 0,5x + 3$. Infatti quando $x = 0$, $y = 3$.
    f. una dipendenza del tipo $y = 0,5x - 3$.



13. Quale dei tre ragazzi mostrati nella figura sottoriportata sta eseguendo in maniera corretta la misura della lunghezza del tavolo?



14. Dovete cronometrare la corsa di un atleta sia sui $100m$ sia sui $400m$. In quale dei due casi l'errore associato al vostro tempo di reazione produrrà un maggior errore relativo?

15. Si supponga di voler determinare la lunghezza di un'asticciola metallica eseguendo una serie di misure prima con un regolo millimetrato, poi con calibro ventesimale. I valori intermedi delle due serie di misure saranno necessariamente identici?

16. Spiegate perchè le tre affermazioni sotto riportate sono *false*.
    a. La Fisica è una scienza esatta in quanto le misure eseguite con strumenti fisici danno come esito sempre il valore 'vero' della grandezza che si misura.
    b. Un errore dovuto a uno strumento difettoso è un errore accidentale.
    c. Confrontando gli errori assoluti di due serie di misure si può stabilire quale delle due serie è più precisa.

17. Si può valutare la massa di un corpo in base alle sue dimensioni? Se A ha un volume doppio di quello di B, significa che $m_A = 2m_B$?

18. La massa di un corpo può essere negativa?

19. Si supponga che un corpo sia stato lanciato nello spazio, lontano da galassie, stelle e altri corpi. Quale cambiamento ha subito la sua massa? E il suo peso?

20. Leggete attentamente questo brano, tratto da un racconto di fantasia, e dite se le affermazioni dello scrittore sono corrette.
    "Quando si svegliò, Ahmed non credette ai propri occhi. Tutto, intorno a lui, era cambiato! Le piante erano le stesse che era abituato a vedere tutti i giorni, ma la loro altezza non superava il mezzo metro; i cammelli erano grandi come i suoi piedi e gli uomini non erano più alti del palmo della sua mano.
    Era capitato in un mondo in miniatura, dove ogni dimensione era dieci volte più piccola!
    Con curiosità prese in mano un cammello e senza nessuna difficoltà lo sollevò in aria: infatti pesava solo un paio di kilogrammi.
    Si alzò in piedi e, con prudenza, fece alcuni passi giungendo subito nella piazza del villaggio, dove osservò con curiosità un mercante che vendeva stoffe. Erano delle strisce di vari colori, ciascuna larga meno di dieci

centimetri. Pensò allora che con la tela della sua camicia gli abitanti del villaggio avrebbero potuto confezionarsi dieci camice, e ciò lo divertiva molto.
Ma ben presto questa nuova situazione cominciò a preoccuparlo. Dove avrebbe trovato il cibo per nutrirsi, dovendo mangiare almeno come cento abitanti? ..."

INDICE

PARTE C - ESERCIZIARIO

CAPITOLO IA

CAPITOLO IIA

CAPITOLO III

CAPITOLO IV

CAPITOLO V

CAPITOLI IB e IIB