Franco Favilli, Paolo Fergola, Maurizia Mantovani
Benedetto Scimemi, Vinicio Villani

MATEMATICA PROPEDEUTICA

1990

Progetto « Anno di propedeutica universitaria»

Jaamacadda Ummadda Soomaaliyeed
Università Nazionale della Somalia

Franco Favilli, Paolo Fergola, Maurizia Mantovani
Benedetto Scimemi, Vinicio Villani

MATEMATICA PROPEDEUTICA

1990

Progetto « Anno di propedeutica universitaria»

Jaamacadda Ummadda Soomaaliyeed
Università Nazionale della Somalia

Indice

GLOSSARIO ITALIANO - SOMALO

COMPLEMENTARI (ANGOLI) ,81	XAGLO WADARTOODU TAHAY XAGAL QUMAN
COMPONENTE DEL VETTORE ,225	XUBNAHA LEEBKA
CONCAVO (ANGOLO) ,71	XAGAL-DIBADEED
CONDIZIONE DI PERPENDICOLARITA' ,214	SHARDIGA ISKU QOTONKA
CONDIZIONE NECCESSARIA ,56	SHARDI LAGAMA MAARMAAN AH
CONDIZIONE SUFFICIENTE ,56	SHARDI KAAFI AH
CONFRONTO ,122	ISBARBARDHIG
CONGIUNZIONE ,54	ISKU-(XIRAN,XIDHAN) #
CONGRUENZA (GEOMETRICO) ,76	ISKU-SARGO'AN
CONO ,127	TOOBIN
CONSECUTIVI (ANGOLI),72	XAGLO-FOODSAAR
CONTARE ,20	TIRIN
CONTRO-ESEMPIO ,57	LID-TUSALE
CONVESSO (ANGOLO),71	XAGAL-GUDEED
COORDINATE ,202	ADDIMADA
COPPIA ORDINATA ,204	LAMAANE HORSAN
CORDA ,114	BOQON
CORONA CIRCOLARE ,113	TEED-DHEXAAD *
CORRISPONDENZA BIUNIVOCA ,203	ISKU BEEGNAAN MID MID AH
COSENO ,246	KOSAYN
COSTANTE ,17	MADOORSOOME
CUBO ,127,128	SANDUUQ
CURVA ,230	XOOD
DECIMALE ,3	TOBNAAD
DECIMETRO CUBO ,150	DISIMITER SADDEX JIBBAARAN
DENOMINATORE ,31	HOOSEEYE
DIAGONALE 75,94	XAGAL-GOOYE
DIAMETRO ,114	DHEXROOR
DIEDRO ,136	DIYEDRO **
DIFFERENZA ,97	FARAQ
DIMOSTRAZIONE ,88,108	CADDAYN
PER ASSURDO ,110	ARAGTIIN SI MAJIRTO AH *
DIRETTRICE ,120,237	JEEDSHE
DIREZIONE ,95	JIHO
DISCRIMINANTE ,200	SOOCE *
DISEQUAZIONE ,196	DHEELLIYO
DISGIUNZIONE ,54	KALA-REEBAN
DISPARI ,23	KISI
DISTANZA ,21,203	FOGAAN
DISTANZA DI UN PUNTO DA UNA RETTA ,216	FOGAANTA BAR AY XARIIQ U JIRTO
DISTRIBUTIVA ,7	KALA-DHIGID
DISUGUAGLIANZA ,13,165	DHEELLIYO
TRIANGOLARE ,89	DHEELIGA SADDEX-XAGAL
DIVERSO ,4	KA-DUWAN
DIVIDENDO ,8	LA-QAYBSHE
DIVISORE ,8	QEYBSHE
DIVISIONE ,7,33	QAYB
INTERA ,23	ABYOONE
DODECAEDRO , 143	DOODEKAYEDRO **
ELEMENTO ,66	KUTIRSANE
ELLISSE ,120,234	QABAAL
ENUNCIATO ,108	(ORAAH,ODHAAH) #

EQUAZIONE ,188	ISLE'EG
CANONICA DELL'ELLISSE ,235	ISLE'EGTABEEGAALEE QABBAALKA
CANONICA DELL'IPERBOLE ,236	ISLE'EGTA BEEGAAL EE LABA-SAABKA
CANONICA DELLA PARABOLA ,237	ISLE'EGTA BEEGAALEE SAABKA
DELLA RETTA ,210	ISLE'EGTA XARIIQDA
EQUIVALENTE ,190	ISLEGYO ISU DHIGMA
GENERALE ,211	ISLE'EG GUUD
IN PIU' INCOGNITE ,192	ISLE'EG DAHSOONAYAAL BADAN LEH
RIDOTTA (RETTA) ,210	SANSAAN BAR-TIIRO
EQUILATERO (TRIANGOLO) ,86	SIMANE
EQUIVALENTE ,56	ISUDHIGMA
ESAGONO ,74	LIXGEESLE
ESEMPIO ,168	TUSAALE
ESPONENTE ,9	JIBBAAR
REALE ,44	MAANGAL AH
ESTRARRE LA RADICE QUADRATA ,190	KA SAARID XIDIDKA LABAJIBAARANE
ESTREMO , 70	(CIRIF,CIDHIF) #
FACCIA ,127	WAJI
FATTORE ,6	ISIR
FATTORIALE ,65	ABNAQ
FIGURA GEOMETRICA ,68	SHAXAN JOOMETRIYEED
SOLIDA ,127	ADKE AH
FORMA NORMALE ,173	QAABKA CAADIGA
FORMULA DI SOTTRAZIONE(ANGOLI),258	XEERKA FARAQA (XAGALAHA)
RISOLUTIVA ,200	FURFURISTA
ADDIZIONE ,258	WADARTA XAGLAHA
FRASE ,53	WEEDH
FRATTO ,3	LA HOOSDHIGEY
FRAZIONARIO ,30	JAJAB
FRAZIONE ALGEBRICA ,178	JAJAB ALJEBREED
FUOCO ,120,234	KULMIS
GEOMETRIA ANALITICA ,202	JOOMITIRIYADA SAAFAN
GIRO ,82	WAREEG
GONIOMETRO ,82	XAGAL-BEEG
GRADO (TRIGONOMETRIA) ,82	DIGRII
GRADO (ALGEBRA) ,174	HEER
GRADO DI UN POLINOMIO ,176	HEERKA TIBXAALE
ICOSAEDRO,143	IKOOSAYEDRO **
IDENTITA' ,189	ISKU MID AHAANSHO
IMPLICARE ,55	DHALIN
IMPOSSIBILE ,190	AAN SUURTOOBIN
INCENTRO ,87	XUDDUN-DHEXAAD
INCOGNITA ,189	DAHSOONE
INCREMENTO ,210	(KOROR,KORODH) #
INDETERMINATA ,174,189	AAN SUGNAYN
INDICE ,184	TUSE
IN DUE INCOGNITE ,194	LABA DAHSONE LEH
INSCRITTO (POLIGONO),116	KU DHEXMEERAN (GEESOOLE)
INSIEME ,59	URUR
INTERSEZIONE (INSIEME) ,60	DHEXTAAL
INTERSEZIONE (GEOM) , 72	IS GOYSKA,KULLAN
INVERSO ,6,164	WAYDAAR

IPERBOLE ,120	LABA-SAAB
IPOTENUSA ,87	SHAKAAL
IPOTESI ,55	ARAR *
ISOMETRIA (CONGRUENZA) ,76	ISDUL-BUUXIN DHAB AH
ISOSCELE ,86,92	LABAALE
LATO,70,127	DHINAC
LINEARE ,190	TOOSAN
LITRO ,150	LITIR
LOGARITMO ,44	LOGARDAM
LUNGHEZZA ,77,202	DHERER
LUOGO GEOMETRICO ,118,209	KOB JOMEETRIKAAD *
MAGGIORE ,13	KA WAYN
MEDIANA (TRIANGLO),87	DHEXFUR
MENO ,3	KA JAR
METRO , 79	MITIR
MINORE ,13	KA YAR
MISURA ,21	CABBIR
MISURA DEGLI ANGOLI IN GRADI,240	HALBEEGGA CABBIRKA XAGLAHA (DEGREE)
MODULO ,96	LAXAAD
MOLTIPLICAZIONE ,6,17,22,27,32	ISKU DHUFASHO
MONOMIO ,173	TIBIX
MONOMIO,BINOMIO,TRINOMIO ,175	HAL-TIBIX,LABA-TIBIX,SADDEX-TIBIX
MULTIPLO ,22	DHUFSANE
NEGATIVO ,13,26	TABAN
NEGAZIONE DI UNA IMPLICAZIONE,56	DIIDMO SHARDIILE
NOTAZIONE SCIENTIFICA ,47	QORMO SAYNIS
NORMALE ,82,138	LIGANE
NUMERATORE ,31	SAREEYE
NUMERO ,3	TIRO
NUMERI DECIMALI ,38	TIROOYIN TOBNAAD
INTERI ,3,26	IDIL
NATURALE ,20	TIRSIIMO
PRIMI ,23	MUTUXAN
RAZIONALI ,3,30	LAKAB
REALI ,43	MAANGAL
NUMERO DI ELEMENTI O CARDINALE ,64	TIRADA KU TIRSANAYAASHA URUR
OPERAZIONE ,3	XISAABFAL
OPPOSTI AL VERTICE (ANGOLI) ,72	XAGLO FOODSAAR AH
OPPOSTO ,6,27,32,69,70,164	LID
ORDINAMENTO ,13,18,26,32	HORRAYN
ORDINATA ,204	ORDINAYT
ORIGINE ,69,70 ,202	UNUG
ORTOCENTRO ,87	HALKA AY KULMAAN JOOGAGGA SADDEX XAGALKA
ORTOGONALE ,82,140	ISKU QOTAMA
OTTAEDRO ,143	OTAYEDRO **
OTTUSO (ANGOLO) ,81	XAGAL DAACSAN
PARABOLA ,234	SAAB
PARALLELO ,71	BARBARRO
PARALLELEPIPEDO RETTANGOLO,128	LAYDIGA BARALELEBIBEDO **
PARAMETRO ,194	UTAAGANE *

PARELLELOGRAMMA ,92	BARBAROOLE
PARI ,22	DHABAN
PENTAGONO ,74	SHAN GEESLE
PERCENTUALE ,50	BOQOLEEY
PERIMETRO ,116	WAREEG
PERIODO ,3,40	KAL
PERMUTAZIONE ,65	RAABAQAAD
PERPENDICOLARE ,82,140	ISKU QOTOMID
PIANO ,68,203	SALLAX
PIATTO,71,82,81	FIDSAN
PIEDE ,86	LUG
PIRAMIDE ,127	BIRAMIDE **
POLIEDRO ,143	BOLIYEEDRO **
POLIEDRI REGOLARI ,143	BOLIYEEDRO HUFAN
POLIGONO ,73	GEESOOLE
REGOLARE ,94	HUFAN
POLINOMIO ,173,174	TIBXAALE
POSITIVO ,13,26,55	TOGAN
POSTULATO ,111	HOWRAAR CADEYN LA'AAN RUNIMADEEDA LA QAAT
POTENZA ,9,18,33,165	JIBBAARANE
AD ESPONENTE RAZIONALE ,44	LEH JIBBAAR LAKAB AH
PRECEDENTE ,21	KA HOREEYA
PRODOTTO ,6,164	TARAN
NOTEVOLE ,170	DOOR AH
PROIEZIONE ORTOGONALE ,140	HAR QOTOME
PROPOSIZIONE ,53	HOWRAAR
PROSPETTIVA ,130	BOROSBETIFA **
PUNTO ,68,69	BAR
ESTERNO ,73	DIBEDEED
FINALE ,95	DHAMAAD
INIZIALE ,95	BILOW
INTERNO ,73	GUDEED
MEDIO ,77	DHEXAAD
PUNTINI ,3	DHIBCO
QUADRANGOLO ,74	AFAR XAGALE
QUADRANTE ,205	WAAX
QUADRATO ,92	LABA JIBBAARANE
QUADRILATERO ,74	AFAR DHINACLE
QUOZIENTE ,164	QAYB
INTERO ,23	ABYOONE
RADIANTE ,83,243	GACANSIIN
RADICALE ,183	XIDIDSHE
RADICANDO ,184	XIDIDEYN
RADICE ,3	XIDID
N-ESIMA ,183	N-AAD
QUADRATA ,10	LABAJIBBARAN
RAGGIO ,113,114	GACAN
RAMI (IPERBOLE) ,120	LAAMO (LABA SAAB)
RAPPORTO DI SIMILITUDINE ,153	SAAMIGA ISLE'EKAANSHO
REGOLE DEI SEGNI ,9,27,164	XEERKA CALAAMADAHA
RETTANGOLO ,87	LAYDI
RETTA ,68	XARRIIQ
ORIENTATA ,202	JIHAN

RETTE INCIDENTI ,135,137	XARRIQYO ISJARA
PARALLELE ,135	BARBARO AH
RETTO (ANGOLO) ,81,82	XAGAL QUMAN
RIBALTARE ,100	ROGGID *
RIDURRE ,178	YAREYN
AL COMUNE DENOMINATORE,178	U YAREYN HOOSEEYAHA AY WADAAGAAN
RIFLESSIVA (PROPRIETA') ,164	ASTAANTA ISKU NOQODKA
RIGHELLO GRADUATO ,83	MASTRAD XARDHAN
RISPETTO A ,229	LOO EEGO
RISULTATO ,6	MAXSUUL,JAWAAB
ROMBO ,92	QARDHAAS
ROTAZIONE ,98,101	WAREEJIN *
SCALENO ,86	ISMA LE'EKE
SCRITTURA POSIZIONALE ,23	GODEYN *
SECANTE ,222	GOOYE
SE E SOLO SE ,56	HADDII IYO HADDII OO (QURA,QUDHA) #
SECONDO GRADO ,190	SAABLEY
SEGMENTO ,68,70	XARIIJIN
ORIENTATO,95	JIHAYSAN
SEGMENTI UGUALI, MINORE ,77	XARIIJIMO ISKU MID, KALA YAR
SEGNO ,3	CALAAMAD
SEMICIRCONFERENZA ,114	(BADHKA,BARKA)-MEERIS #
SEMIPIANO ,68,204	SALAX-(BADH,BAR) #
SEMIRETTA ,68	XARRIIQ-(BADH,BAR) #
SEMISPAZIO ,142	ISBASIYO-(BADH, BAR) **
SEMPLICE ,73	FUDUD
SENO (DI UN ANGOLO) ,246	SAYN
SETTORE CIRCOLARE ,113	FATUUQ
SFERA ,127,148	KUBBAD
SGHEMBO ,135	JELADAN
SIMMETRIA ,101	WANQARAN
SIMMETRIA ASSIALE ,100	WANQARANKA DHIDIBEED
SIMILE ,174	ISU'EG
SIMILITUDINE ,152	ISKU EKAANSHO
SISTEMA ,197	HABKA
DI COORDINATE CARTESIANE ,202	DHIDIBADDA KAARTIS
SOLUZIONE UNICA ,189	XALKA KELIYA
SOLUZIONI ,189,196	URUR FURFURIS
SOMMA ,6	WADAR
SOMMARE ,175	ISU GEYN
SOSTITUIRE ,177	KU BEDELID
SOTTO-INSIEME ,66	HORMO URUR
SOTTRAZIONE ,7,22,27,32	KALA -(GOYN JARID)
SOVRAPPONIBILE ,76	ISDUL BUUXIN *
SPEZZATA ,73	JARJARAN
SPIGOLO ,127	FIIQ
SQUADRA ,80	MASTARAD
SUCCESSIVO ,21	KUXIGA
SUPPLEMENTARE (ANGOLI),82	XAGLO WADARTOODU TAHAY XAGAL TOOSAN
SVILUPPO PIANO ,127	KALA DHIGDHIGIDDA SALLAX *
DECIMALE ,38	TOBNAAD *

TANGENTE (GEOM) ,116,222,	TAABTE
TANGENTE (TRIGONO),246	TAANGENT
TEOREMA ,108	ARAGTIIN
DI PITAGORA ,124	ARAGTIINKA BAYTOOGARAAS
TEORIA ,110	ARAGTI
TESI ,108	BIYODHAC *
TETRAEDRO,128	TETARAYEDRO **
TRANSITIVA (PROPRIETA') ,4,13,164	ASTAAN GUDBAN
TRAPEZIO ,92	KOOR
TRASLAZIONE ,98	RARID *
TRIANGOLO ,74,86	SADDEX XAGAL
UGUALE ,3	LE'EG
UNIONE (INSIEME) ,60	UTAG (URUR)
UNITA' DI MISURA ,78,122,202	HALBEEG CABIRAADEED
UNO ED UN SOLO ,203	MID IYO MID (QURA,QUDHA) #
VALORE ASSOLUTO ,3,14,18,26,165	QIIME SUGAN
VARIABILE ,17,174	DOORSOOME
VERIFICA ,192	HUBIN
VERSO ,95	FOOL
VERTICE ,70,127,235	GEES
VETTORE ,95	LEEB
VIRGOLA ,3	HAKAD
VOLUME ,149	MUG
ZERO ,164	EBER

* : TRADUZIONE DISCUTIBILE
** : FONETICA
# : PRONUNCIA DIVERSA TRA LE REGIONI

Capitolo I: RICHIAMI DI ARITMETICA

§ 0. Lessico matematico

0	zero	10	dieci	20	venti	1 000	mille
1	uno	11	undici	30	trenta	2 000	duemila
2	due	12	dodici	40	quaranta	10 000	diecimila
3	tre	13	tredici	50	cinquanta	100 000	centomila
4	quattro	14	quattordici	60	sessanta	1 000 000	un milione
5	cinque	15	quindici	70	settanta	10 000 000	diecimilioni
6	sei	16	sedici	80	ottanta	100 000 000	centomilioni
7	sette	17	diciassette	90	novanta	1 000 000 000	un miliardo
8	otto	18	diciotto	100	cento		
9	nove	19	diciannove	200	duecento		

12 902 374 dodicimilioni-novecentoduemila-trecentosettantaquattro

1°	primo	7°	settimo		...
2°	secondo	8°	ottavo	20°	ventesimo
3°	terzo	9°	nono		...
4°	quarto	10°	decimo	100°	centesimo
5°	quinto	11°	undicesimo		...
6°	sesto	12°	dodicesimo	1 000°	millesimo

$\frac{1}{2}$	un mezzo	$\frac{7}{3}$	sette terzi	$\frac{24}{23}$	ventiquattro ventitreesimi
$\frac{7}{2}$	sette mezzi	$\frac{9}{5}$	nove quinti	$\frac{100}{121}$	cento centoventunesimi

$+$ più $\times$ per $-$ meno $:$ diviso $/$ fratto $,$ virgola

$=$	uguale a	$\neq$	diverso da
$>$	maggiore di	$<$	minore di
$\geq$	maggiore o uguale a	$\leq$	minore o uguale a

parentesi tonde$(\ldots)$ quadre$[\ldots]$ graffe $\{\ldots\}$

§ 1. Numeri

L'**aritmetica** è lo studio dei **numeri** e delle **operazioni** tra i numeri.
In questo §(leggi: *paragrafo*) richiameremo molte *definizioni* (cioè i *nomi* delle cose di cui parliamo, come si chiamano) e molte *proprietà* (cioè come si comportano). Richiameremo anche i particolari *simboli* usati (cioè come si scrivono) e il modo di leggerli.

Vi sono varie specie di numeri che abbiamo già incontrato nelle scuole elementari secondarie:

i numeri **interi**,	come ad esempio	$19; -5; -78; 1989; 1\,000\,000; \ldots$
i numeri **razionali**,	come ad esempio	$\frac{-5}{4}; \frac{99}{100}; \frac{40}{10}; \ldots$
i numeri **reali**,	come ad esempio	$1,3333\ldots; 1,3; \sqrt{2}; 1,41; \ldots$

Nell'indicare i numeri, abbiamo usato la scrittura **decimale**, che adopera vari simboli, tra cui le cifre: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ed altri **segni**:

$-$ (**meno**)   / (**fratto**, o segno di frazione)* $\sqrt{\ }$ (**radice** quadrata)   , (**virgola**)

$\overline{\ \ }$ (**periodo**) $'$ (**apice**)   ... (**puntini**) $|\ |$ (**valore assoluto**)

Ripeteremo più tardi, con maggiore precisione, il significato di questi simboli. Ma già ora osserviamo che uno stesso numero può essere indicato da simboli diversi; per esempio 3, $|-3|$, $\frac{12}{4}$, $\sqrt{9}$ indicano lo stesso numero; in questo caso usiamo il segno = (**uguale**) e scriviamo le **uguaglianze** (cioè scritture in cui si adopera =)

$$3 = |-3| = \frac{12}{4} = \sqrt{9}.$$

Così $1,3333\ldots = \frac{4}{3}$ si leggerà: 1,3333... *è uguale a* $\frac{4}{3}$. Quando invece due

* N.B. Un numero razionale (=frazione) come $\frac{-5}{4}$ si indica talvolta con $-5/4$. Così si usano, equivalentemente i segni di frazione — e /.

numeri sono diversi useremo il segno $\neq$ (**diverso**) scrivendo per esempio $3 \neq 5$ e leggendo 3 *è diverso da* 5 ecc.

Nelle uguaglianze si chiama **primo membro** ciò che è alla sinistra del segno $=$, **secondo membro** quello che è a destra. Naturalmente i due membri si possono scambiare (proprietà **simmetrica** dell'uguaglianza), cioè:

$$1,3333\ldots = \frac{4}{3} \quad \text{ha lo stesso significato di} \quad \frac{4}{3} = 1,3333\ldots$$

Se scriviamo $1,3333\ldots = 1,\overline{3}$ allora possiamo scrivere anche $\frac{4}{3} = 1,\overline{3}$. Insomma due cose eguali a una terza cosa sono anche eguali tra loro (proprietà **transitiva** dell'uguaglianza). È poi ovvio che ogni numero è eguale a se stesso (proprietà **riflessiva** dell'uguaglianza): $\frac{4}{3} = \frac{4}{3}$, $-1 = -1$ ecc.

I numeri interi sono *particolari* numeri razionali; in altre parole, alcuni numeri razionali sono interi (per esempio $\frac{40}{10} = 4$), altri non sono interi (per esempio $\frac{10}{40} = 0{,}25$).

Analogamente, i numeri razionali sono particolari numeri reali; per esempio, 1,3 è razionale, ma $\sqrt{2}$ non è razionale.

Tutti i numeri che adoperiamo sono numeri reali.

ESERCIZI

1) Scrivete in cifre i seguenti numeri:

centodue; diecimilaottantatre; tre quarti; dodici settimi; un milione; un millesimo; novantanovemilatrecentosette.

2) Scrivete in parole e leggete ad alta voce i seguenti numeri:

20; 627; $2\,400$; $-12,45$; $\frac{5}{4}$; $1\,004$; $\frac{8}{10}$; $\sqrt{3}$; $1,3$; $1,4142$; $\frac{3}{100}$; $|-3|$; $\sqrt{4}$; $1,2$

3) Quali dei numeri dell'esercizio 2) sono interi? quali sono razionali, ma non interi? quali sono reali, ma non razionali? quali sono negativi?

4) Trascrivete ciascuno dei numeri dell'esercizio 2 usando simboli diversi.
Per esempio: $20 = \frac{200}{10} = \frac{80}{4} = |-20| = \sqrt{400}$

5) Quante cifre ha il numero 572? e il numero 6? e il numero $1\,000$?

6) Che differenza c'è tra "numero" e "cifra"? Quante cifre conoscete? quanti numeri conoscete?

§ 2. Operazioni

Un'operazione tra numeri è una *regola* che a due numeri *assegnati associa* un altro numero. Questo numero si chiama il **risultato** dell'operazione.

Conosciamo da tempo le due operazioni fondamentali:

addizione, il cui risultato si chiama **somma**: $51,6 = 1,6 + 50$

moltiplicazione, il cui risultato si chiama **prodotto**: $80 = 1,6 \times 50$

Come si vede, le operazioni sono indicate con i segni:

$$+ \quad (\textbf{più}) \qquad\qquad \times \quad (\textbf{per})$$

La scrittura $51,6 = 1,6 + 50$ si legge $51,6$ *è uguale a* $1,6$ *più* 50, ma anche 1,6 *più* 50 *fa* 51,6.

Nell'addizione si usa la parola **addendi** per indicare i numeri da cui si parte. Nell'esempio precedente 1,6 e 50 sono gli addendi, 51,6 la loro somma.

Nella moltiplicazione i numeri da cui si parte si chiamano **fattori**.

Il numero 0 (*zero*) sommato a ogni altro numero lo lascia inalterato;

il numero 1 (*uno*) moltiplicato per ogni altro numero lo lascia inalterato;

il numero 0 moltiplicato per ogni altro numero dà prodotto 0:

$$51,6 + 0 = 51,6 \qquad 17,4 \times 1 = 17,4 \qquad 6,5 \times 0 = 0$$

Quando due addendi danno somma zero essi si chiamano **opposti**; quando due fattori danno prodotto 1 essi si chiamano **inversi**:

$$6,3 \quad \text{è l'opposto di} - 6,3; \qquad -2,5 \quad \text{è l'inverso di} - 0,4.$$

Le operazioni di addizione e di moltiplicazione *soddisfano* ad alcune importanti proprietà:

proprietà **commutativa** dell'addizione $3 + 1,6 = 1,6 + 3$

proprietà **commutativa** della moltiplicazione $(-7) \times 0,2 = 0,2 \times (-7)$

proprietà **associativa** dell'addizione $(3+1,6)+5 = 3+(1,6+5)$
proprietà **associativa** della moltiplicazione $(1,6\times 3)\times 5 = 1,6\times(3\times 5)$
proprietà **distributiva** della moltiplicazione sull'addizione*

$$5\times(3+1,6) = (5\times 3)+(5\times 1,6)$$

La proprietà commutativa permette di *scambiare* gli addendi o i fattori senza alterare il risultato; si può dire cioè *sommiamo* 4 e 5 senza dire qual è il primo dei due addendi e qual è il secondo.

La proprietà associativa ci permette di non usare la parentesi quando scriviamo:

$$3+1,2+5 = 9,2 \quad \text{oppure} \quad 0,9\times 2\times 6 = 9,8$$

perché il risultato non cambia, comunque si mettano le parentesi. Così la scrittura è più semplice. Con lo stesso scopo, talvolta certe parentesi si *sottintendono*. Per esempio $3+4\times 5$ significa $3+(4\times 5)$. In generale, quando non ci sono parentesi si intende che la moltiplicazione va eseguita prima della addizione.

Si definiscono altre due operazioni importanti:

la **sottrazione**: $1,6-50 = -48,4$
la **divisione**: $1,6:50 = 0,032$

---

* N.B. Nel descrivere queste ultime proprietà abbiamo usato le **parentesi**, cioè il simbolo (che si legge *apertaparentesi* e il simbolo) che si legge *chiusaparentesi*. Incontreremo varie specie di parentesi:

parentesi **tonde**$(\ldots)$ **quadre** $[\ldots]$ **graffe** $\{\ldots\}$.

Tutte queste parentesi servono ad indicare quale operazione deve essere fatta prima e quale dopo. Per esempio:

$$\{-3+[4\times(5+6)]\}=41 \qquad \{(-3+4)\times 5\}+6=11.$$

Ma le varie parentesi (tonde, quadre, graffe) si potrebbero anche scambiare tra loro o ripetere, scrivendo, con lo stesso significato,

$$(-3+\{4\times[5+6]\}) \quad \text{o addirittura} \quad (-3+(4\times(5+6))) \text{ ecc.}$$

Il risultato della sottrazione si chiama *differenza*.
Il risultato della divisione si chiama *quoziente* o *rapporto*.

Queste due operazioni si indicano con i simboli

$$-(meno) \qquad : (diviso)$$

e si chiamano *inverse* dell'addizione e della moltiplicazione. Infatti *sommando* e *sottraendo* lo stesso numero (e, analogamente, *moltiplicando* e *dividendo* per lo stesso numero) si ottiene quello di partenza:

$$(6-11,2)+11,2=6=(6+1,5)-1,5; \qquad (6\times 11,2):11,2=6=(6:1,5)\times 1,5$$

$$\begin{array}{ccccc} & & +1,5 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 6 & & & & 7,5 \\ & \nwarrow & & \swarrow & \\ & & -1,5 & & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccccc} & & \times 1,2 & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ 3 & & & & 3,6 \\ & \nwarrow & & \swarrow & \\ & & :1,2 & & \end{array}$$

Si può dividere soltanto per numeri diversi da zero; infatti qualunque significato si volesse attribuire, per esempio, al numero $5:0$, la sua moltiplicazione per 0 non potrebbe restituire 5.

Per le operazioni inverse non valgono le proprietà associativa e commutativa. Per esempio, nella divisione dobbiamo far attenzione a distinguere il primo numero (detto **dividendo**) e il secondo (**divisore**): una cosa è *dividere* 4 *per* 5, con risultato $4:5=0{,}8$, un'altra è *dividere* 5 *per* 4 con risultato $5:4=1{,}25$. Quando mancano le parentesi, si intende che la moltiplicazione e la divisione precedono l'addizione e la sottrazione:

$$3-(5-8)=6 \qquad (3-5)-8=-10 \qquad (3:5):8=0,075 \qquad 3:(5:8)=4,8$$

$$3:4-5=(3:4)-5=-4,25 \qquad 3:(4-5)=-3$$

In accordo con le proprietà delle operazioni, il segno $-$ si deve usare secondo certe **regole dei segni** che vediamo illustrate nei seguenti esempi

$$12 - (-0,1 + 5) = 12 + 0,1 - 5 = 7,1$$

$$3 \times (-6,5) = (-3) \times 6,5 = -(3 \times 6,5) = -19,5$$

Ricordiamo infine le **potenze**: scriviamo per esempio 5^2 per intendere il prodotto 5×5; scriviamo $(-1,2)^3$ per indicare il prodotto $(-1,2) \times (-1,2) \times (-1,2)$ ecc. Così risulta

$$5^2 = 25 \qquad 10^6 = 1\,000\,000 \qquad (-1,2)^3 = -1,728.$$

In questi esempi abbiamo *elevato* la **base** 5 all'**esponente** 2, la base $-1,2$ all'esponente 3 ecc. Sono particolarmente importanti le potenze di 10, cioè i numeri:

$$10^1 = 10; \qquad 10^2 = 100; \qquad 10^3 = 1\,000; \quad \cdots$$

Un numero come 10^6 si legge *dieci alla sei* oppure *dieci alla sesta* o anche la *sesta potenza di* 10.

Ci sono casi speciali; quando l'esponente è 2 oppure 3, le potenze si leggono anche in modo diverso:

5^2 si legge 5 *al quadrato* oppure *il quadrato* di 5

$(-1,2)^3$ si legge talvolta $-1,2$ *al cubo* oppure *il cubo di* $-1,2$.

Le potenze soddisfano a importanti proprietà, come si vede nei seguenti esempi:

$$(2 \times 1,2)^3 = 2^3 \times 1,2^3; \qquad 5^2 \times 5^3 = 5^{2+3};$$

$$(-2)^5 = -(2)^5; \qquad (-2)^6 = 2^6; \qquad (10^3)^2 = 10^{2\times 3} = 10^6.$$

In tutti questi esempi come esponenti abbiamo usato numeri interi positivi. Vedremo meglio in seguito certi casi in cui si può dare significato alle potenze anche quando l'esponente è un numero reale qualunque. Per esempio scriveremo

$$10^0 = 1 \qquad 10^{-1} = 0,1 \qquad 10^{-2} = 0,01 \qquad 10^{-3} = 0,001 \quad \text{ecc.}$$

Quando si trattano potenze della stessa base (per esempio 10) le moltiplicazioni e le divisioni si trasformano in addizioni e sottrazioni sugli esponenti: per esempio

$$10^{-3} \times 10^{7} = 10^{-3+7} = 10^{4} = 10^{8-4} = 10^{8} : 10^{4}.$$

Nell'uso delle potenze è facile sbagliare e si deve fare molta attenzione: per esempio non è vero che $(2+3)^2 = 2^2 + 3^2$ e non è vero che $5^3 = 5^2 + 5^1$!

Estrarre la radice di un numero è il procedimento inverso dell'elevarlo a potenza. Per esempio, 5 è la **radice quadrata** di 25 perché $5^2 = 25$.

La radice quadrata si indica con il simbolo $\sqrt{\ }$.Scriveremo dunque

$$\sqrt{25} = 5, \qquad \sqrt{1} = 1, \qquad \sqrt{100} = 10.$$

Molto spesso le radici quadrate si calcolano soltanto approssimativamente e se ne indicano soltanto le prime cifre decimali. Per esempio

$$\sqrt{2} = 1,41\ldots \qquad \sqrt{10} = 3,16\ldots$$

ESERCIZI.

1) Considerando i numeri dell'esercizio 1 nel §1:
   a) calcolare la somma dei primi due;
   b) calcolare il prodotto del terzo con il quarto;
   c) eseguire la moltiplicazione avente come fattori gli ultimi due.

2) La somma di due numeri è zero. Come si chiamano i due addendi?

3) La somma di due numeri è 5. Uno dei due addendi è zero. Qual è l'altro addendo?

4) Il prodotto di due numeri è 1. Come si chiamano i due fattori?

5) Il prodotto di due numeri è zero. Cosa si può dire dei fattori?

6) Scrivete tutti i numeri interi che danno per prodotto 12 e sistemateli nella tabella seguente:

1° fattore	1	2					-3					
2° fattore	12	6					-4					

Ripetete l'esercizio per il numero 16.

7) Osservate le seguenti uguaglianze e, per ciascuna, indicate le proprietà delle operazioni che sono state usate (esempio: $12+3=3+12$ proprietà commutativa dell'addizione; $4,5\times 11 = 4,5\times(10+1) = 45+4,5$ proprietà distributiva della moltiplicazione):

a) $15+7=7+15$ **b)** $(23+8)+2=23+10$

c) $(15+7)+5=20+7$ **d)** $32+11=40+3$

e) $(15+33)+(25+47)=40+80$ **f)** $4\times 22=22\times 4$

g) $(2\times 3)\times(4\times 5)=10\times 12$ **h)** $1,6\times 11=16+1,6$

i) $1,32\times 101=132+1,32$ **l)** $\left(-\frac{4}{7}+\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{4}{7}+\frac{1}{4}\right)=0+1$

m) $\left(\frac{4}{3}\times\frac{5}{7}\right)\times\frac{7}{5}=\frac{4}{3}\times 1$

8) Eseguite in due modi diversi le seguenti operazioni

a) $\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{9}{2}+\frac{2}{5}+\frac{3}{5}-\frac{5}{2}\right)=\cdots$ **b)** $\left(-\frac{14}{3}-\frac{21}{3}+\frac{7}{6}-42\right)\left(-\frac{3}{14}\right)=\cdots$

c) $\left(-1,25\right)\left(-32+\frac{12}{5}-\frac{7}{5}\right)=\cdots$ **d)** $(0,\overline{3}+1-0,25)(0,1)=\cdots$

9) Per i numeri $-0,5$; 2; 3; 0; $1,75$ scrivete l'opposto di ciascuno.

10) Scrivete l'inverso dei numeri dell'esercizio 9). È possibile per tutti?

11) Completate la seguente tabella

dividendo	12	12		0		5	16	
divisore	4	-1	-3	-12	4			3
quoziente	3	-12	4		-2	5	-8	0

dividendo	0	4	0	5	12	5		-20
divisore	5	0		4			-4	$4/5$
quoziente					120	$1,25$	$7/4$	

Quale casella resta vuota? Perché?

12) Scrivete il quadrato dei numeri interi seguenti

$$-3;\quad -2;\quad -1;\quad 0;\quad 1;\quad 2;\quad 3;\quad 4;\quad \ldots;\quad 9;\quad 10.$$

Scrivete poi il quadrato dei loro inversi.

13) Scrivete il cubo dei numeri dell'esercizio precedente.

14) È vera l'uguaglianza $\sqrt{(25-16)} = 5 - 4 = 1$? Perché?

§ 3. Ordinamento

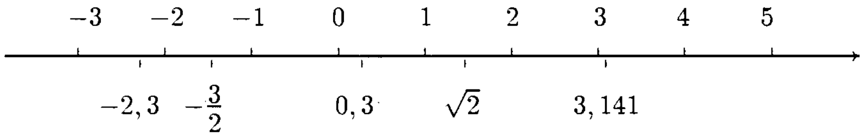
I numeri reali sono **ordinati**; ciò significa che se sono assegnati due numeri diversi, si verifica uno (e soltanto uno) dei seguenti *casi*:

il primo numero è **minore** del secondo, per esempio $-5 < 0,6$;

il primo numero è **maggiore** del secondo, per esempio $50 > 1,6$.

Dire $-5 < 0,6$ *equivale* a dire $0,6 > -5$. Si tratta di scritture diverse, che hanno lo stesso significato. Le scritture che contengono i simboli $<$ oppure $>$ si chiamano **disuguaglianze**. Dato un numero (che non sia lo zero) esso può essere maggiore di zero, e allora si chiama **positivo**, oppure minore di zero, e allora si chiama **negativo**.

L'ordinamento dei numeri si rappresenta bene usando una *linea retta* e *associando* a ogni suo punto un numero reale in modo che questi numeri diventino sempre maggiori andando da sinistra a destra, cioè secondo il *verso* della *freccia*



Vale la proprietà **transitiva** per l'ordinamento:

se so che $-5 < -2$ *e che* $-2 < 1,3$ *allora so anche che* $-5 < 1,3$.

Non vale la proprietà simmetrica; anzi, se primo e secondo membro della disuguaglianza si scambiano, si è visto che la disuguaglianza *si inverte*.

Nell'uso delle disuguaglianze sono utili certe proprietà. Per esempio, una disuguaglianza *si conserva* se ai due membri si aggiunge uno stesso numero:

se so che $5 < 12,3$ *allora so anche che* $5 + 1,3 < 12,3 + 1,3$

e che $5 - 1,3 < 12,3 - 1,3$.

Con la moltiplicazione occorre distinguere: una disuguaglianza si conserva se i due membri si moltiplicano per lo stesso numero *positivo*:

se so che $5 < 12{,}3$ *allora so anche che* $5 \times 0{,}785 < 12{,}3 \times 0{,}785$;

se invece si moltiplica per un numero *negativo*, la disuguaglianza *si inverte*:

$$5 \times -0{,}52 > 12{,}3 \times -0{,}52$$

Le disuguaglianze dello stesso *verso* (cioè, in presenza di due $>$ oppure di due $<$ o anche di due $\geq$ ecc.) si possono *sommare membro a membro*: per esempio

$$\text{da} \quad 5 < 5{,}6 \quad \text{e} \quad -7 < -6{,}8 \quad \text{segue} \quad 5 - 7 < 5{,}6 - 6{,}8.$$

Se un numero positivo si moltiplica per un numero maggiore di 1, il risultato è *maggiore* del numero di partenza; se lo si moltiplica per un numero minore di 1, il risultato è *minore*. Per esempio

$$23 \times 0{,}9 < 23 < 23 \times 1{,}1$$

$$0{,}15 \times 0{,}4 < 0{,}15 < 0{,}15 \times 1{,}2$$

In particolare, le potenze successive di un numero positivo crescono o diminuiscono a seconda che la base sia maggiore o minore di 1:

$$1{,}2 < (1{,}2)^2 < (1{,}2)^3 < (1{,}2)^4 < \cdots \qquad 0{,}5 > (0{,}5)^2 > (0{,}5)^3 > (0{,}5)^4 > \cdots$$

Le disuguaglianze non si possono moltiplicare:

$$1 > -4; \quad 2 > -1 \quad \text{ma} \quad 1 \times 2 = 2 < 4 = (-4) \times (-1).$$

Il **valore assoluto** si indica con il simbolo $|\ldots|$. Il valore assoluto di un numero è il numero stesso oppure il suo opposto, secondo che il numero sia positivo o negativo. Per esempio: $|3| = 3$; $|-3| = 3$; $\left|-\frac{5}{4}\right| = \frac{5}{4}$; $|0| = 0$.

Attenzione! $|5 + (-3)| = 2$ mentre $|5| + |-3| = 8$.

Invece $|5 \times (-2)| = 10 = |5| \times |-2|$.

ESERCIZI.

1) Tra i seguenti numeri, trovate qual è il maggiore:

tra -2 e -3 il maggiore è -2;

tra $-\frac{3}{4}$ e $-\frac{3}{5}$ il maggiore è ...;

tra $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{3}$ il maggiore è ...;

tra $\frac{12}{13}$ e $\frac{13}{14}$ il maggiore è ...;

2) Disponete in ordine crescente i seguenti numeri:

a) $-1;\ +\frac{1}{2};\ 0;\ -\frac{3}{2};\ -4.$

b) $-0,5;\ +2,5;\ -0,2;\ 0;\ -1;\ 1.$

c) $-12;\ -12,2;\ -\frac{40}{3};\ -\frac{57}{5};\ -11,7.$

3) Verificate che moltiplicando i membri per $-0,5$ le seguenti disuguaglianze si invertono:

a) $-3 > -4$ b) $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ c) $-\frac{1}{3} > -2$

d) $\frac{3}{4} > 0$ e) $\frac{21}{2} > -1$ f) $-\frac{3}{4} > -\frac{10}{5}$.

4) Quali numeri interi sono "compresi" tra le seguenti coppie di numeri?

$$-3,2 \quad \text{e} \quad 0,5 \qquad -\frac{7}{3} \quad \text{e} \quad \frac{5}{2} \qquad -\frac{11}{4} \quad \text{e} \quad -0,1$$

(per esempio: tra $-2,7$ e $0,1$ sono compresi gli interi $-2,\ -1, 0$).

5) Scrivete i valori assoluti dei numeri dell'esercizio 2a).

6) Quali tra i simboli $=$, $>$, $<$ si può inserire al posto dei ... nelle seguenti

scritture?

$$0 \ldots 2; \qquad 12+2 \ldots 7 \times 2; \qquad 13 \times 1 \ldots 14 \times 0;$$

$$|5-11| \ldots |5|-|11|; \qquad 2^3 \ldots 3^2; \qquad 0^3 \ldots 3^0.$$

7) Completate

$$-\frac{1}{5} < \frac{\cdots}{3} < \frac{1}{4}; \qquad 0 > -\frac{\cdots}{5} > -\frac{\cdots}{3} > -\frac{\cdots}{2}.$$

8) Sappiamo che $12 > 10$; allora possiamo scrivere anche $\frac{12}{5} > \frac{10}{5}$. Perché? Possiamo anche scrivere $-12 < -10$. Perché?

9) Trovate qual è il minimo esponente che occorre dare alla base 2 per trovare un numero maggiore di 1 000.

10) Un numero qualsiasi è compreso tra due potenze "consecutive" di 10. Per esempio $10^2 < 572 < 10^3$. Tra quali potenze del 10 potete collocare un numero intero di 4 cifre? e di 5 cifre? e il numero 0,023?

§ 4. Uso delle variabili

Nei precedenti paragrafi abbiamo richiamato i nomi e i simboli che si adoperano per indicare i singoli numeri, come per esempio $-1,8$; $\frac{4}{3}$; $3,14\ldots$

Questi sono in un certo qual modo nomi *propri* di quei numeri: in qualunque momento, in qualunque libro, ciascuno dei simboli $-1,8$; $\frac{4}{3}$ ecc. avrà significato **costante**, cioè sempre lo stesso.

Ma in molti casi è comodo parlare di numeri *generici*, senza specificare di quali numeri si tratta, perché si intende che diversi numeri possono andar bene in quel ruolo. Si usano allora simboli letterali come $x, y, z, \ldots, a, b, c, \ldots$ e si parla di **variabili**.

Per esempio, le proprietà (già richiamate nel §2) dell'**addizione** e **moltiplicazione** nei numeri reali si possono scrivere così:

se x, y, z indicano numeri reali, allora risulta

$$x + y = y + x; \qquad x \times y = y \times x;$$

$$(x + y) + z = x + (y + z); \qquad (x \times y) \times z = x \times (y \times z);$$

$$x \times (y + z) = (x \times y) + (x \times z);$$

Qui si intende che queste uguaglianze *valgono* (cioè sono vere) comunque si scelgano tre *particolari* numeri reali e *si sostituiscano* al posto delle lettere x, y, z. In questa circostanza si dice anche che in quelle uguaglianze le variabili x, y, z possono *assumere* tutti i *valori* reali. Naturalmente in una relazione come $x + y = y + x$, anche se non abbiamo precisato quale numero è rappresentato dal simbolo x, dobbiamo intendere che la x al primo membro rappresenta lo stesso elemento della x al secondo membro ecc. (se però lo stesso simbolo x si adopera non nella stessa uguaglianza o nello stesso discorso, ma in pagine diverse del libro, può darsi che indichi un numero diverso dal precedente).

Le principali proprietà delle **potenze** si scrivono:

$$(x \times y)^n = x^n \times y^n; \qquad x^{m+n} = x^m \times x^n; \qquad (x^m)^n = x^{m \times n}.$$

Le precedenti relazioni valgono per tutti quei valori x, y, m, n per i quali le potenze scritte hanno significato.

Consideriamo ora le proprietà dell'**uguaglianza** e dell'**ordinamento**:

Per tutti i valori reali di x, y, z

$x = x$ proprietà riflessiva;

se $x = y$ allora $y = x$ proprietà simmetrica;

se $x = y$ e $y = z$ allora $x = z$ proprietà transitiva.

Analogamente per l'ordinamento

se $x > y$ e $y > z$ allora $x > z$ proprietà transitiva;

se $x \geq y$ e $y \geq z$ allora $x \geq z$ proprietà transitiva;

e per il **valore assoluto**

$$|x \times y| = |x| \times |y|; \qquad |x + y| \leq |x| + |y|.$$

Come si vede, l'uso delle variabili produce un risparmio di scrittura: per esempio, una sola uguaglianza che coinvolge variabili, come $x + y = y + x$, ci fa risparmiare di scrivere tante singole uguaglianze tra numeri particolari.

Quando le variabili si moltiplicano, si usa spesso *omettere* (cioè non scrivere) il segno $\times$; per esempio $5zy - 3x$ significa $5 \times z \times y - 3 \times x$. Altre volte, la moltiplicazione si indica con un *puntino* a mezza riga: $5 \cdot z \cdot y - 3 \cdot x$.

ESERCIZI

1) Completate la seguente tabella

a	-2	0	3	2	$-3/4$	$+3/4$	$-5/2$	0	$7,1$	-3	$-1/3$	$1\,002$
b	1	-3							7	0	1	$2\,030$
$a+b$			-1				0					
$a-b$					1							
ab						1						
$a(-b)$												
a^2												
a^2-b^2												
$(a-b)^2$								4				
a/b				3								
b^{-1}												
$\lvert a\rvert$												
$5a+3b$												
$\lvert b\rvert$												
$\lvert a+b\rvert$												

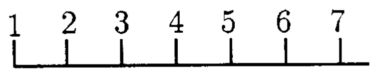
Attenzione! Certe caselle si possono riempire in molti modi; in altri casi non c'è alcun modo (per esempio: a/b non ha significato per $b=0$).

§ 5. Numeri naturali

Da questo § riprendiamo con maggior precisione quanto abbiamo già visto ai paragrafi precedenti.

I numeri interi positivi $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$ si chiamano anche **naturali**, perché servono a compiere le più semplici attività aritmetiche.

Per aiutare l'immaginazione, conviene rappresentare i numeri naturali con una figura come la seguente:



Essa ci ricorda l'ordinamento dei numeri naturali, cioè che

1	è il **primo**	cioè *precede* tutti gli altri. Scriviamo: 1°
2	è il **secondo**	cioè il *successivo* del 1° (cioè 2 *segue* 1)
3	è il **terzo**	cioè il *successivo* del 2° (cioè 3 *segue* 2)

...

(per i nomi successivi vedi tabella al §0).

L'attività aritmetica più elementare è quella del **contare** gli elementi di un insieme. Contare vuol dire rispondere alla domanda: **quanti** sono? Per esempio: quante sono le lettere qui elencate?

w h k i o b v r z t s

Per rispondere, dobbiamo disporre accanto ad ogni lettera i primi numeri naturali

w	h	k	i	o	b	v	r	z	t	s
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

Allora l'ultimo numero naturale adoperato ci fornisce la risposta:

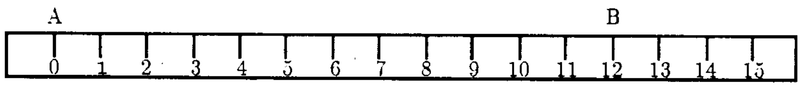
11 *è il numero delle* lettere sopra elencate;

ciò si dice anche

Le lettere sopra elencate *sono (in numero di)* 11

Come si è detto, nell'uso quotidiano si incomincia a contare dal numero 1. Ma dal punto di vista della matematica, molte ragioni suggeriscono l'opportunità di considerare tra i numeri naturali anche 0 (*zero*). Anzitutto 0 può essere comodo anche per contare: se sul tavolo vi sono 5 oggetti, quanti ne rimangono dopo che ne sono stati tolti 5? La risposta *zero* sostituisce allora un numero alla parola *nessuno*.

Lo zero serve anche nelle scale graduate di tutti gli strumenti di **misura**. Per esempio, per determinare la **distanza** tra due punti A, B del piano, si può usare un *righello* graduato, cioè un'asticella come quella in figura, che è stata divisa in parti eguali con tratti trasversali. Se questi tratti si contrassegnano con i numeri naturali a cominciare dallo 0, allora per misurare la distanza tra A e B si dispone il righello in modo che 0 corrisponda al punto A. Se il punto B viene a sovrapporsi, per esempio, al tratto su cui è scritto 12, si dice che 12 è la distanza tra A e B. Si osservi che questo procedimento porterebbe a errori se il primo numero segnato sul righello fosse 1.



Ogni numero naturale (eccetto 0) è il **successivo** di un altro numero naturale; ogni numero naturale si raggiunge, partendo dal primo, dopo un certo numero di passi successivi (come vedremo, nulla di simile si può dire per i numeri razionali o per i numeri reali). Equivalentemente, diremo che ogni numero naturale è il **precedente** di un altro: 4 *è il successivo di* 3 equivale a 3 *è il precedente di* 4 ecc.

Fissato un numero naturale n, indichiamo con $n+1$ il suo successivo. Si può ripetere $2, 3, \ldots, m$ volte il procedimento di *passare al successivo*. Si ottiene allora il numero

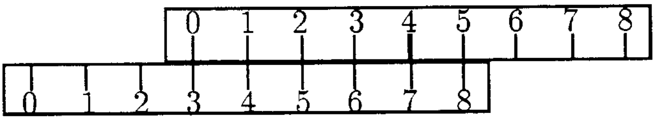
$$n + 1 + 1 + \ldots + 1 \qquad (+1 \text{ è ripetuto m volte})$$

che si indica con $n + m$.

Così la notazione di successivo permette di definire l'operazione di **addizione** nei naturali.

Se y è il successivo del successivo del successivo... (un certo numero z di volte) di x, allora y è maggiore di x, e risulta $y = x + z$, pur di scegliere opportunamente il numero z. Allora si scrive $z = y - x$ e così si definisce (ma soltanto se il primo numero è maggiore del secondo!) la **sottrazione**. In conclusione, l'operazione di sottrazione è possibile *nei numeri naturali* soltanto se il primo numero è maggiore o uguale al secondo.

Disponendo di due righelli graduati, possiamo farli scorrere uno sull'altro e realizzare le operazioni di addizione e sottrazione come indica la figura seguente:



che interpreta le somme

$$3 + 1 = 4; \qquad 3 + 2 = 5; \qquad 3 + 3 = 6; \qquad 3 + 4 = 7 : \ldots$$

o le differenze

$$4 - 3 = 1; \qquad 5 - 3 = 2; \qquad 6 - 3 = 3; \qquad 7 - 4 = 3; \ldots$$

L'addizione di n con se stesso, ripetuta m volte, porta al numero

$$n + n + n + \ldots + n$$

che si indica con $m \times n$. Così si definisce la **moltiplicazione**. Le principali proprietà di queste operazioni sono già state ricordate.

Assegnato un numero naturale a, i suoi **multipli** sono i numeri

$$0 \times a = 0, \qquad 1 \times a = a, \qquad 2 \times a, \qquad 3 \times a, \qquad 4 \times a, \ldots$$

I multipli di 2, cioè i numeri $0, 2, 4, 6, 8, 10, \ldots$ si chiamano **pari**.

Tutti gli altri numeri naturali $1, 3, 5, 7, 9, 11, \ldots$ si chiamano **dispari**.

Zero è dunque multiplo di ogni numero. Tutti i numeri sono multipli di 1 e di se stessi.

Se un numero naturale (diverso da 1) è multiplo soltanto di 1 e di se stesso, allora si chiama **primo**. I numeri primi sono

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ 29,\ 31,\ 37, \ldots$$

ma non esiste alcuna regola per continuare l'elenco.

Ogni numero naturale (maggiore di 1) o è primo o si può scrivere come prodotto di numeri primi; ad esempio:

$$12 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3; \qquad 100 = 2 \times 2 \times 5 \times 5 = 2^2 \times 5^2; \qquad 1\,111 = 11 \times 101.$$

L'operazione di divisione non sempre produce un numero naturale. Per esempio $750 : 110$ non è un numero naturale, perché non esiste un numero naturale che moltiplicato per 110 dia 750 (cioè 750 non è multiplo di 110). In molti casi è però utile cercare il numero naturale che moltiplicato per 110 si avvicini il più possibile a 750, senza superarlo. Per esempio, se possiedo 750 scellini e un uovo costa 110 scellini, quante uova posso acquistare? La risposta è: posso acquistare 6 uova e mi avanzano 90 scellini. L'operazione che a partire dai numeri naturali 750 e 110 ha prodotto il **quoziente-intero** 6 e il resto 90 si chiamo **divisione-intera** ovvero **divisione-con-resto**. Si dirà allora: 110 *sta* 6 *volte nel* 750 *con resto* 90.

Osserviamo infine che nell'indicare i numeri naturali abbiamo usato continuamente la loro **scrittura posizionale**, che è basata sulle seguenti *convenzioni*: le dieci cifre $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ indicano rispettivamente i primi dieci numeri naturali; i numeri successivi al 9 si indicano scrivendo le cifre una vicino all'altra, secondo le regole illustrate dal seguente esempio:

$$3\,902 \quad \text{indica il numero} \quad 3 \times 1\,000 + 9 \times 100 + 0 \times 10 + 2 \times 1.$$

I numeri $3, 9, 0, 2$ si dicono rispettivamente le *migliaia, centinaia, decine, unità* del numero 3 902. Naturalmente, per questa scrittura è indispensabile disporre della cifra 0 (senza la quale non potremmo distinguere, per esempio, tra i numeri $32, 302, 3\,002, 30\,0002$ ecc.).

La scrittura posizionale facilita molto le operazioni (secondo le regole che abbiamo imparato fin dai primi anni di scuola) e l'ordinamento dei numeri.

ESERCIZI

1) Quante cifre ha il numero 572? Trovate tutti i numeri che si possono scrivere usando quelle stesse cifre, ciascuna una sola volta. Quanti sono? qual è il più piccolo?

2) Scrivete i successivi dei seguenti numeri: $1; 10; 99; 360; 1\,000\,000$. Scrivete poi i precedenti degli stessi numeri.

3) Elencate tutti i numeri naturali n "compresi" tre 1 e 10, cioè quelli tali che $1 \leq n \leq 10$.

4) Scrivete tutti i multipli di 3 minori o uguali a 60 e maggiori di 0; scrivete poi tutti i multipli di 4 maggiori di 0 e minori di 60. Tra i multipli trovati, <u>sottolineate</u> i multipli comuni a 3 e 4. Qual è il minimo tra questi multipli comuni?

5) Elencate i numeri compresi tra 2 e 100. Potete trovarli costruendo il crivello di Eratostene (come descritto nel libro di Italiano, unità 1).

6) Considerate il numero $413 = 4 \times 100 + 1 \times 10 + 3 \times 1 = 4 \times 10^2 + 1 \times 10^1 - 3 \times 10^0$.
Analogamente scrivete e leggete:
$$\begin{aligned} 40\,103 &= \ldots \times 10^{\cdots} + \ldots \times 10^{\cdots} + \ldots \\ 4\,103 &= \ldots \times 10^{\cdots} + \ldots \times 10^{\cdots} + \ldots \\ 41\,300 &= \ldots \times 10^{\cdots} + \ldots \times 10^{\cdots} + \ldots \end{aligned}$$

7) Trovate il quoziente-intero e il resto nelle divisioni tra 5 e 4; tra 7 e 5; tra 200 e -17.

8) Se invece delle cifre $0, 1, \ldots, 9$ si adoperassero soltanto le due cifre $0, 1$ la scrittura posizionale di 3 sarebbe 11; quella di 4 sarebbe 100 ecc. Scrivete in questo sistema di numerazione (che si chiama *binaria*) tutti i numeri da 1 a 20.

9) Servendovi della riga graduata misurate la lunghezza dei lati del foglio su cui state scrivendo; dei lati del piano del banco sul quale siete appoggiati; della matita (o penna) con la quale scrivete.

10) L'ordine con cui si danno le lettere dell'alfabeto è molto importante (per esempio, per ordinare un elenco di nomi) e si chiama *ordine alfabetico*. Scrivete in ordine alfabetico le 26 lettere dell'alfabeto (inglese). Cercate nel vocabolario italiano queste cinque parole:

uguaglianza; ordine; ordinamento; positivo; radice.

Qual' è la prima parola? e l'ultima? Mettete in ordine alfabetico i 14 titoli dei paragrafi di questo capitolo.

11) Indicando con P un numero pari e con D un numero dispari, verificate che l'addizione e la moltiplicazione si comportano come indicato nelle seguenti tabelle

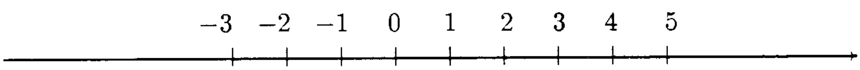
+	P	D
P	P	D
D	D	P

×	P	D
P	P	P
D	P	D

§ 6. Numeri interi

Abbiamo detto che, nei numeri naturali, l'operazione di sottrazione non sempre si può fare; per esempio $7 - 11$ non è un numero naturale, perché non esiste un numero naturale che sommato a 11 dia 7. Eppure esistono in natura problemi che suggeriscono la sottrazione di 11 da 7. Per esempio, se ieri la temperatura a Mosca era di 7 gradi, e poi si è abbassata di 11 gradi, qual'è adesso la temperatura? oppure: un tale possiede 7 000 scellini, ma ha un debito di 11 000 scellini. Qual'è la sua situazione economica?

Per rispondere a queste e a simili domande, l'insieme dei numeri naturali viene *esteso* introducendo accanto ai numeri $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ anche i nuovi numeri $-1, -2, -3, -4, \ldots$ (che dunque si indicano facendo precedere il segno $-$ ai simboli usati per i naturali). Tutti questi numeri $\ldots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ si chiamano **numeri interi**. Ad essi si dà l'**ordinamento** indicato dalla figura seguente:



in cui $-n$ precede 0 di n posizioni.

I numeri naturali che seguono 0, cioè alla sua destra nel disegno, si dicono anche interi **positivi**.

I numeri interi **negativi** sono quelli che precedono 0.

In particolare, ogni numero negativo è minore di 0 e di ogni numero positivo. Risulta per esempio $-12 < -5 < 0 < 3 < 5$.

(Qualche volta, per distinguere più chiaramente 5 da -5, si preferisce scrivere $+5$ in luogo di 5).

Il **valore assoluto** di un numero intero a si indica con $|a|$ e si definisce così:

$$\begin{cases} |a| = a & \text{se } a \geq 0 \\ |a| = -a & \text{se } a < 0 \end{cases}$$

Dunque il valore assoluto di un intero è sempre un numero positivo o nullo per esempio

$$|-12| = 12; \qquad |7| = 7; \qquad |0| = 0.$$

L'**addizione** nei numeri interi si definisce estendendo quella dei numeri naturali: sulla retta, sommare ad x un numero y significa spostarsi dal punto x verso destra o verso sinistra, a seconda che y sia positivo o negativo, percorrendo y passi.

Per ogni intero x esiste uno e un solo numero che sommato a x dà 0. Questo numero si chiama l'**opposto** di x e si indica con $-x$. (Questo simbolo è coerente con il fatto che -5 è l'opposto di 5, ma è anche vero che 5 è l'opposto di -5. Si osservi anche che 0 è l'opposto di se stesso: $0 = -0$). Quando si usano le variabili, occorre fare attenzione: il simbolo $-x$ non necessariamente rappresenta un numero negativo, perché se x è negativo, allora $-x$ è positivo. Sempre negativo (o nullo) è invece $-|x|$.

A questo punto, l'operazione di **sottrazione** si può definire per ogni scelta di x, y interi: sottrarre al numero x il numero y significa sommare a x l'opposto di y: $x - y = x + (-y)$. Con riferimento all'ordine, è bene osservare che negli interi non sempre $x + y > x$ e non sempre $x - y < x$; per esempio $3 - (-5) > 3 > 3 + (-5)$.

Riassumiamo le regole cui soddisfano il passaggio all'opposto e la sottrazione:

$$x - x = -x + x = 0 \qquad x - y = x + (-y) \qquad -(x + y) = -x - y$$

Per esempio:

$$2 - \big[(5-16) - (4-7)\big] = 2 - \big[-11 - (-3)\big] = 2 - [-11 + 3] = 2 - (-8) = 2 + 8 = 10$$

oppure $\quad = 2 - (5 - 16) + (4 - 7) = 2 - 5 + 16 + 4 - 7 = 10$

Infine la **moltiplicazione** tra due numeri interi x, y si definisce con le già ricordate **regole dei segni**

$$x \times 0 = 0 \qquad x \times (-y) = -(x \times y) \qquad (-x) \times (-y) = x \times y$$

che sono in accordo con le proprietà (associativa, commutativa, distributiva) dell'addizione e della moltiplicazione.

Si osservi che la moltiplicazione *si distribuisce* anche sulla sottrazione:

$$x \times (y - z) = (x \times y) - (x \times z).$$

Con queste regole, tutte le operazioni sui numeri interi si riportano facilmente a quelle tra numeri naturali, come nei seguenti esempi:

$$-2 \times \big[-5 + (-4) \times 7\big] - \big[-2 \times (-8+3)\big] = -2 \times [-5 - 28] - \big[-2 \times (-5)\big] =$$

$$= -2 \times (-33) - 2 \times 5 = 2 \times 33 - 10 = 56$$

oppure, distribuendo la moltiplicazione,

$$= (-2) \times (-5) + (-2) \times (-4) \times 7 - \big[-2 \times (-8) + (-2) \times 3\big] = 10 + 56 - [16 - 6] = 56.$$

ESERCIZI

1) Eseguite le seguenti operazioni

$(+2) + (-8) = \ldots$	$(-6) + (-3) = \ldots$	$(-15) + (+17) = \ldots$
$(-12) + (+12) = \ldots$	$(-8) + (-3) = \ldots$	$(+3) + (-9) = \ldots$
$(-9) \times (+2) = \ldots$	$(+9) \times (-2) = \ldots$	$(-9) \times (-2) = \ldots$
$(-2)^3 = \ldots$	$(-2)^4 = \ldots$	$-2^4 = \ldots$

2) Stabilite quali delle seguenti affermazioni sono vere e quali sono false

a) L'opposto di un numero negativo è positivo.

b) I numeri n e $2n$ sono *concordi*, cioè sono entrambi positivi oppure entrambi negativi.

c) I numeri n e n^2 sono concordi.

d) I numeri n e n^3 sono concordi.

e) La somma di due numeri concordi è positiva.

f) Il prodotto di due numeri concordi è positivo.

3) Calcolate il risultato delle seguenti espressioni:

$1-(2-3-4)=$ $\quad$ $\left[(-3)+(-7)\right]-\left[(-5)+0-(+12)\right]=$

$(1+3-6)\times(4+5-3)=$ $\quad$ $(-2)^4\times\left[(11-4)\times(-2+1)\right]=$

$-8\times\left\{2\times[-1]+3\right\}+1=$

4) Spiegate la seguente affermazione: i numeri naturali sono particolari numeri interi.

5) Quali delle seguenti operazioni danno lo stesso risultato?

$(11-4)\times(-2+1)$ $\quad$ $-7\times\left[23+2\times(-11)\right]$ $\quad$ $(-4)\times(-5)-\left[-(6-13)\times 2\right]$

§ 7. Numeri razionali

Abbiamo introdotto nell'insieme dei numeri naturali un'operazione di *divisione col resto.* Ma nella vita comune occorre talvolta dividere in modo che non vi sia resto: per esempio, se ho 340 scellini e un filone di pane costa 80 scellini, quanti filoni di pane posso acquistare? La divisione col resto fornisce la risposta 4 filoni, con il resto di 20 scellini. Ma in realtà il fornaio è disposto a suddividere ulteriormente il filone di pane, e a darci, oltre ai 4 filoni interi, anche una parte, una *frazione*, di un quinto filone. Per attribuire un valore numerico a quantità di questo tipo, introduciamo una nuova specie di numeri, i **numeri razionali** (oppure **frazionari**). Con il simbolo $\frac{340}{80}$ indichiamo dunque una quantità (in filoni) di pane che si ottiene (teoricamente) nel modo seguente: si divide ogni filone in 80 parti eguali, e si prendono 340 di queste parti. Osserviamo subito che la stessa quantità di pane si otterrebbe dividendo tutti i pani in 4 parti eguali e prendendo 17 di queste parti. In pratica, si può tagliare un solo pane e pensare $\frac{340}{80}$ come somma $4 + \frac{20}{80}$ oppure $4 + \frac{1}{4}$ ecc.

Il simbolo $\frac{1}{8}$ indicherà *l'ottava parte* del numero 1 (cioè un numero che si ottiene dividendo il numero 1 in 8 parti eguali); analogamente, il simbolo $\frac{34}{8}$ indicherà l'ottava parte di 34. Rifacendoci ancora alle quantità di pane, o simili esempi, si vede che, se questi nuovi numeri saranno anch'essi oggetto di addizioni e moltiplicazioni, occorrerà che risulti ad esempio:

$$\frac{1}{80} + \frac{1}{80} = \frac{2}{80}; \qquad \frac{7}{80} + \frac{15}{80} = \frac{22}{80}; \qquad 3 \times \left(\frac{1}{80}\right) = \frac{3}{80};$$

$$\frac{34}{80} = 34 \times \left(\frac{1}{80}\right); \qquad \left(\frac{34}{80}\right) \times 80 = 34; \quad \text{ecc.}$$

Inoltre questo stesso numero $\frac{340}{80}$ potrà essere indicato anche dal simbolo $\frac{34}{8}$ oppure $\frac{17}{4}$ ecc.

Un simbolo del tipo $\frac{m}{n}$ (in cui m, n sono numeri interi, con n diverso da zero) si chiama una frazione; m si chiama **numeratore**, n **denominatore**. Un simbolo equivalente è m/n. Il *segno di frazione* / oppure — (fratto) separa il numeratore m dal denominatore n (vedi par. 0). Due frazioni come $\frac{340}{80}$ e $\frac{17}{4}$ si chiamano *equivalenti*, perché rappresentano lo stesso numero, e si scrive senz'altro $\frac{340}{80} = \frac{17}{4}$. Se in una frazione si moltiplicano per lo stesso numero il numeratore ed il denominatore (si dice talvolta *sopra* e *sotto*) si ottiene una frazione equivalente:

$$\frac{17}{4} = \frac{34}{8} = \frac{51}{12} = \frac{68}{16} = \ldots = \frac{-17}{-4} = \frac{-34}{-8} = \ldots \quad \text{ecc.}$$

I numeri interi sono quei *particolari* numeri razionali $\frac{a}{b}$ in cui a è multiplo di b. Scriveremo dunque $\frac{12}{4} = \frac{3}{1} = 3$; $\frac{10}{-5} = -\frac{10}{5} = -2$; $\frac{0}{17} = 0$ ecc.

Per confrontare due frazioni $\frac{m}{n}, \frac{a}{b}$ conviene *ridurle allo stesso denominatore*, cioè sostituirle con frazioni equivalenti che abbiano eguale denominatore. Per esempio, assegnate le frazioni $\frac{51}{-12}$ e $\frac{-85}{20}$, possiamo moltiplicare sopra e sotto la prima frazione per 20 e la seconda per -12 per ottenere le frazioni equivalenti

$$\frac{51 \times 20}{(-12) \times 20} \qquad \frac{-85 \times (-12)}{20 \times (-12)}.$$

Confrontando i numeratori ci accorgiamo che essi coincidono

$$51 \times 20 = 1\,020 = (-85) \times (-12).$$

Allora possiamo concludere che tutte queste frazioni rappresentano lo stesso numero razionale. Invece, per esempio $\frac{3}{20} \neq \frac{32}{205}$ perché

$$3 \times 205 = 615 \neq 640 = 20 \times 32.$$

In generale

$$\frac{m}{n} = \frac{a}{b} \quad \text{equivale a} \quad m \times b = n \times a.$$

In particolare, risulta sempre $\frac{a}{-b} = \frac{-a}{b}$ e dunque tutte le frazioni si possono scrivere con denominatore positivo:

$$\frac{3}{-5} = \frac{-3}{5}; \qquad \frac{-2}{-7} = \frac{2}{7}.$$

In modo analogo si introduce nei numeri razionali un **ordinamento**. Se i denominatori n, b sono positivi si stabilisce che

$$\frac{m}{n} > \frac{a}{b} \quad \text{significa} \quad m \times b > n \times a.$$

Esempi: $\frac{4}{3} < \frac{3}{2}$ perché $4 \times 2 < 3 \times 3$ $\left(\text{e dunque } \frac{4 \times 2}{3 \times 2} < \frac{3 \times 3}{2 \times 3}\right)$

$-\frac{27}{10} < -\frac{8}{3}$ perché $-27 \times 3 = -81 < -80 = -8 \times 10$

$\frac{2}{-3} < \frac{1}{-3}$ perché $\frac{2}{-3} = \frac{-2}{3} < \frac{-1}{3} = \frac{1}{-3}$.

Anche le operazioni di **addizione** (e di **sottrazione**) nei numeri razionali si definiscono riducendo le frazioni a denominatore comune, come negli esempi:

$$\frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{4 \times 2}{3 \times 2} + \frac{3 \times 3}{2 \times 3} = \frac{8}{6} + \frac{9}{6} = \frac{17}{6}$$

$$\frac{5}{4} - \frac{7}{5} = \frac{25}{20} - \frac{28}{20} = -\frac{3}{20}.$$

Ogni numero razionale ha un **opposto**, che si ottiene passando all'opposto nel numeratore oppure nel denominatore, per es.

$$-\frac{7}{4} = \frac{-7}{4} = \frac{7}{-4}; \qquad -\frac{40}{50} + \frac{12}{15} = -\frac{120}{150} + \frac{120}{150} = 0.$$

Per introdurre la **moltiplicazione** nei numeri razionali, la riduzione al denominatore comune non serve: basta moltiplicare separatamente numeratore per numeratore e denominatore per denominatore; per esempio:

$$\left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{-6}{2}\right) = \frac{2 \times (-6)}{7 \times 2} = \frac{-12}{4}, \qquad -\frac{3}{6} \times \frac{4}{11} = -\frac{12}{66}.$$

In generale, valgono le uguaglianze

$$\frac{a}{b} + \frac{m}{n} = \frac{a \times n + b \times m}{b \times n}; \qquad \frac{a}{b} \times \frac{m}{n} = \frac{a \times m}{b \times n}.$$

Con queste definizioni dell'addizione e della moltiplicazione rimangono vere tutte le solite proprietà (commutativa, associativa, distributiva). Ma nell'ambiente dei numeri razionali, a differenza di quanto avveniva negli interi, ogni numero (purché diverso da zero) ha un **inverso**, che si ottiene semplicemente scambiando il numeratore con il denominatore:

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{e dunque} \quad \frac{3}{2} \text{ è l'inverso di } \frac{2}{3};$$

$$-\frac{1}{4} \text{ è l'inverso di } -4; \qquad 10 \text{ è l'inverso di } \frac{1}{10}.$$

Dunque l'operazione di moltiplicazione si può invertire

$$\left(\frac{2}{7} \times \frac{3}{5}\right) \times \frac{5}{3} = \frac{2}{7}$$

cioè si può definire la **divisione** tra due qualsiasi numeri razionali (purché il secondo non sia 0): dividere per un numero equivale a moltiplicare per l'inverso di quel numero.

Esempi:

$$\frac{3}{11} : \frac{5}{4} = \frac{3}{11} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{55} \qquad -5 : 7 = -\frac{5}{1} \times \frac{1}{7} = -\frac{5}{7}$$

In generale (se n, a, b non sono 0) scriveremo

$$\frac{m}{n} : \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \times \frac{b}{a} = \frac{m \times b}{n \times a}.$$

La divisione non è commutativa $\quad 3 : 2 = \frac{3}{2}; \;\; 2 : 3 = \frac{2}{3};$

La divisione non è associativa: $\quad (3 : 5) : 2 = \frac{3}{10}; \;\; 3 : (5 : 2) = \frac{6}{5};$

La divisione non è distributiva sull'addizione: $3 : (1 + 2) = 1; \;\; (3 : 1) + (3 : 2) = \frac{9}{2}.$

L'esistenza degli inversi permette di definire le **potenze intere** dei numeri razionali. Se l'esponente n è positivo, allora la potenza n–esima si definisce (come nel §2.) moltiplicando n volte la base $\frac{x}{y}$ per se stessa:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^1 = \frac{x}{y} \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^2 = \frac{x^2}{y^2} \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^3 = \frac{x^3}{y^3} \quad \cdots \quad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

Esempi: $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^2}{3^2} = \frac{4}{9}$; $\left(\frac{1}{10}\right)^3 = \frac{1}{1\,000}$.

Se poi il numero razionale $\frac{x}{y}$ è diverso da zero, definiamo $\left(\frac{x}{y}\right)^n$ anche per n negativo o nullo, ponendo

$$\left(\frac{x}{y}\right)^0 = 1 \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^{-1} = \frac{y}{x} \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^{-2} = \left(\frac{y}{x}\right)^2 \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^{-3} = \left(\frac{y}{x}\right)^3 \qquad \text{ecc.}$$

Esempi: $\left(\frac{5}{7}\right)^{-2} = \left(\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{49}{25}$; $3^{-1} = \frac{1}{3}$; $\left(\frac{5}{4}\right)^0 = 1$.

In generale , la potenza negativa di un numero si ottiene sostituendo la base con il suo inverso e l'esponente con il suo opposto

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n$$

Queste regole sono in accordo con le proprietà delle potenze, già ricordate al §2, che qui esemplifichiamo:

$$10^3 = (10)^{3+0} = 10^3 \times 10^0 = 10^3 \times 1$$

$$\frac{4}{5} = \left(\frac{4}{5}\right)^{3-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^3 \times \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{4^3 \times 5^2}{4^2 \times 5^3}.$$

ESERCIZI

1) Gli studenti iscritti al 1° anno all'UNS sono 540. Tra questi, le ragazze sono 90. Gli studenti della Facoltà di Ingegneria sono 81. Si dice che le ragazze iscritte al 1° anno dell'UNS sono 90 su 540 e che gli studenti del 1° corso di Ingegneria sono 81 su 540. È corretto dire che le studentesse iscritte al 1° corso sono un sesto? Trovate una frazione equivalente a 81/540.

2) Per controllare che $\frac{34}{8} > \frac{37}{9}$ si può fare così: $34 \times 9 = 306 > 296 = 37 \times 8$. Qual è il maggiore tra $\frac{31}{32}$ e $\frac{11}{12}$?

3) Ordinate in verso crescente i numeri $-\frac{3}{7}$; $\frac{37}{11}$; $-\frac{31}{70}$; $-12,5$; 0; $-\frac{2}{5}$; 7; -2 e rappresentateli su una retta opportunamente graduata.

4) Osservate che risulta:

$$-\frac{3}{7}+\frac{9}{4}=-\frac{12}{28}+\frac{63}{28}=\frac{-12+63}{28}=\frac{51}{28}$$

$$\frac{4}{8}-\frac{-5}{3}=\frac{1}{2}+\frac{5}{3}=\frac{3}{6}+\frac{10}{6}=\frac{3+10}{6}=\frac{13}{6}$$

$$-\frac{3}{7}\times\left(-\frac{5}{-3}\right)=-\frac{3}{7}\times\frac{5}{3}=-\frac{5}{7}$$

$$-\frac{2}{7}:\frac{3}{14}=-\frac{2}{7}\times\frac{14}{3}=-\frac{4}{3}$$

Calcolate:

a) $\frac{6}{5}+\frac{-2}{9}$; $\quad \frac{-1}{2}+2$; $\quad -\frac{3}{4}-\frac{5}{6}$; $\quad \frac{12}{-3}-\frac{4}{5}$

b) $-\frac{5}{4}\times\frac{3}{-2}$; $\quad \frac{2}{7}\times\frac{-6}{2}$; $\quad \frac{3}{6}\times\frac{4}{11}$; $\quad \frac{2}{5}\times\frac{-3}{7}$; $\quad -\frac{2}{3}\times\left(-\frac{3}{4}\right)$

c) $\frac{3}{5}:\frac{2}{6}$; $\quad -\frac{3}{2}:\frac{-9}{3}$; $\quad \frac{3}{5}:(-2)$; $\quad \frac{-3}{4}:\frac{-21}{6}$; $\quad \frac{-2}{3}:\frac{1}{3}$

5) Calcolate

a) $\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{3}\right)\times\left[-\frac{3}{4}-\left(\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\right)+\frac{13}{12}\right]-\frac{1}{12}$ $\qquad$ [*Risulta* $=1$]

b) $\left(-\frac{3}{7}\right)\times\left(-\frac{4}{5}\right)\times\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{-2}\right)\right]$ $\qquad$ $\left[=-\frac{1}{7}\right]$

c) $\left[(-10+3)\times\frac{5}{14}+\frac{1}{6}\times\left(\frac{3}{8}-\frac{3}{4}\right)+\frac{1}{16}\right]\times\left(-\frac{8}{15}\right)$ $\qquad$ $\left[=+\frac{4}{3}\right]$

d) $\left\{-\frac{3}{2}+\left(-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}\right)-\left[\frac{3}{4}-\frac{5}{3}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)\right]\right\}\times(-8)-\frac{1}{8}$ $\qquad$ $\left[=\frac{15}{8}\right]$

$$\left\{3\times\left[-\frac{1}{2}+\left(-\frac{2}{11}\right)\times\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{5}\right)\right]+\frac{7}{10}\right\}\times\left(-\frac{5}{22}\right)-\frac{1}{4} \qquad [=0]$$

$$\left(\frac{25}{11}-2\right)-\left(1+\frac{1}{4}\right)\times\left\{\frac{1}{4}-\left[\frac{3}{2}-\frac{5}{6}:\left(-\frac{5}{12}\right)\right]:\frac{7}{3}\right\}:\left(7-\frac{1}{8}\right) \qquad \left[=\frac{1}{2}\right]$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right):\frac{1}{5}+\left\{\frac{1}{5}+\left[\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{9}\right):\left(-\frac{11}{6}\right)\right]\right\}\times\left(1+\frac{9}{11}\right) \qquad \left[=\frac{2}{3}\right]$$

$$\left[\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\times\left(-1-\frac{2}{7}\right)\right]:\left[\left(\frac{5}{7}-1\right)\times\left(\frac{4}{3}-\frac{5}{2}\right)\right]-\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{36}\right)\times\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad \left[=\frac{43}{56}\right]$$

6) Calcolate $(a+b)^3-3ab(a+b)$
   a) per i valori $a=-1;\ b=-\frac{3}{2};$ $\left[=-\frac{35}{8}\right]$
   b) per i valori $a=0;\ b=-1;$ $[=-1]$

7) Calcolate $\left(\frac{x+y}{2y}+\frac{y}{x-y}\right)\times\frac{xy-y^2}{x^2+y^2}$
   a) per i valori $x=-3;\ y=-\frac{1}{4};$ $\left[=\frac{1}{2}\right]$
   b) per i valori $x=\frac{3}{4};\ y=-\frac{1}{2};$ $\left[=\frac{1}{2}\right]$

8) Osservate: $2^{-3}=\frac{1}{2^3}=\frac{1}{8};\ 3^{-2}=\frac{1}{3^2}=\frac{1}{9}$. Calcolate poi

$$5^{-2};\ (-2)^{-3};\ (-4)^{-3};\ \left(\frac{1}{2}\right)^{-1};\ \left(\frac{1}{3}\right)^{-2};\ \left(-\frac{5}{4}\right)^{-3};\ (-1)^{-2}$$

9) Calcolate le seguenti potenze utilizzando le proprietà sopra ricordate:

$(+2)^3:(+2)^{-2}=$ $\qquad (+3)^0 : (3)-3 =$ $\qquad (-3)^{-5}\times(-3)^2=$

$(-2)^2\times(-2)^{-3}=$ $\qquad \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1}:\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}=$ $\qquad \left[(-3)^{10}\right]^0 =$

10) Calcolate

$$\left\{1^{-1}-\left[1-\left(2^{-1}-\frac{2}{3}\right)\right]-\frac{3}{2}\right\}^{-2}:\left[2^{-2}+3^{-2}+6^{-2}\right]^{-3}$$

$$\left[\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}-\left(-\frac{3}{2}\right)^{-3}\right]\times\left[2^{-1}+\left(-\frac{4}{3}\right)^{-2}+\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}\right]^{-1}$$ e)

f)

11) Disponete in ordine crescente 10^3; 10^{-2}; 10^{-5}; 10^7; 10.

12) Giustificate la seguente affermazione: tra due qualsiasi numeri razionali sono compresi infiniti altri numeri razionali. g)

h)

13) Calcolate

a) $\dfrac{x^2+4y^2-4xy}{(3x+y)^3}+\dfrac{\left[(x+2y)\times(x-2y)\right]^{-1}}{\left[3x^2y\times(xy)^{-1}+y\right]^{-2}}$ per $x=1=y$

b) $\left\{\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-\left(-\frac{1}{5}\right)^{0}\right]:6^2-(-6)^2\right\}^2:\left(\frac{4}{5}\right)^0$

c) $\left\{1^{-1}-\left[1-\left(2^{-1}+\frac{2}{3}\right)\right]-\frac{3}{2}\right\}^{-2}:\left(2^{-2}+3^{-2}-6^{-2}\right)^{-3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}$

§ 8. Numeri decimali

Si chiamano **numeri decimali** quei particolari numeri razionali che *si possono* scrivere come frazioni il cui denominatore è una potenza di 10. Per esempio, sono decimali i numeri $-\frac{3}{10}$, $\frac{17}{1\,000}$, ma anche $3 = \frac{3}{1} = \frac{3}{10^0}$, oppure $-\frac{112}{5} = -\frac{224}{10}$, $\frac{34}{8} = \frac{425}{100}$, $\frac{1}{125} = \frac{8}{1\,000}$.

Per indicare una di queste frazioni, utilizziamo spesso una scrittura diversa, che usa la **virgola** (ma non usa il segno *fratto*) e si chiama **sviluppo decimale** di quella frazione. Con questa scrittura, le precedenti frazioni si indicano rispettivamente con

$$-0,3 \qquad 0,017 \qquad 3 \qquad -22,4 \qquad 4,25 \qquad 0,008$$

Viceversa, da uno sviluppo decimale di questo tipo, è facile ricostruire la frazione: come numeratore si scrivono le stesse cifre (eliminando la virgola e gli eventuali zeri iniziali); come denominatore si scrive 10^n se le cifre a destra della virgola sono in numero di n.

In particolare, si scrive

$$0,1 = \frac{1}{10} = 10^{-1}; \quad 0,01 = \frac{1}{100} = 10^{-2}; \quad 0,001 = \frac{1}{1\,000} = 10^{-3} \quad \text{ecc.}$$

In questa scrittura, a destra della virgola si leggono nell'ordine le cifre che corrispondono ai *decimi*, ai *centesimi*, ai *millesimi*, ecc. mentre a sinistra della virgola si leggono le unità, decine, centinaia ecc.(come nel §2).

Per esempio, il numero $512,437$ è la somma di

5×10^2	1×10^1	2×10^0	4×10^{-1}	3×10^{-2}	7×10^{-3}
5 centinaia	1 decina	2 unità	4 decimi	3 centesimi	7 millesimi

Questa scrittura *posizionale* ha molti vantaggi rispetto a quella delle frazioni: le operazioni e l'ordinamento si ottengono più facilmente perchè si riconducono a quelle dei numeri interi, se si fa un attento uso della virgola. Per esempio

$$1,2 < 1,229 \qquad 0,342 + 0,027 = 0,369 \qquad 1,25 \times (-0,2) = -0,25$$

Spostare la virgola a destra (o a sinistra) significa moltiplicare (o dividere) per 10:

$$451,2 : 10 = 45,12 = 10 \times 4,512$$

Naturalmente $1,2 = 1,20 = 1,2000 = \ldots$ ecc. ma, a parte questa aggiunta di zeri finali, c'è un unico modo di indicare un certo numero.

Viceversa se si parte da una frazione $\frac{x}{y}$ se ne ottiene la scrittura posizionale calcolando $x : y$ come si è imparato a fare sin dai primi anni di scuola, cioè con un certo numero di successive *divisioni con resto* (vedi §5). Per esempio, per la frazione $\frac{31}{8}$ si ottiene:

$$\begin{array}{lcl}
31 & : 8 = & 3,875 \\
\ \ 70 & & \\
\ \ \ \ 60 & & \\
\ \ \ \ \ \ 40 & & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 0 & &
\end{array}$$

Abbiamo ottenuto resto zero perché la *frazione* era *decimale*, cioè il suo denominatore è un divisore di una potenza di 10: $\frac{31}{8} = \frac{3875}{1000}$.

Si può pensare di applicare il procedimento precedente anche alle frazioni non decimali come $\frac{22}{3}$, $\frac{17}{41}$, ma in questo caso il procedimento non finisce mai, perché i resti sono sempre diversi da zero:

$$\begin{array}{lcl}
131 & : 6 = & 21,8333\ldots \\
\ \ 11 & & \\
\ \ \ \ 50 & & \\
\ \ \ \ \ \ 20 \leftarrow & & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 20 \leftarrow & & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 20 & & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 2 & & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ldots & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcl}
171 & : 41 = & 4,17073170\ldots \\
\ \ \ \ 70 \leftarrow & & \\
\ \ \ \ 290 & & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 30 & & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ 300 & & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 130 & & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 70 \leftarrow & & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ 29 & & \\
\ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ \ldots & &
\end{array}$$

Vediamo però che i resti, dopo un certo numero di passaggi, si devono ripetere e dunque si ripetono anche le cifre nella scrittura decimale del quoziente. Per indicare il gruppo di cifre che si ripetono (questo gruppo di cifre si chiama il **periodo**) si usa un simbolo speciale di *sopralineatura* scrivendo

$$21,83333\ldots = 21,8\overline{3} \qquad 4,1707317073\ldots = 4,\overline{17073}$$

Dunque, se si vuole usare la scrittura posizionale per un numero razionale non decimale si ottiene un *sviluppo decimale infinito* (cioè che usa infinite cifre) ma *periodico* (cioè con le cifre che si ripetono).

I numeri decimali 4; 4, 1; 4, 17; 4, 1707; 4, 17073 : 4, 170731; ... *si avvicinano quanto si vuole* al numero $\frac{171}{41}$ e si chiamano le sue **approssimazioni**, sempre migliori, che non ne danno mai il valore preciso.*

ESERCIZI

1) Scrivete come frazioni di numeri interi i seguenti numeri:

$0,23 \times 10^{-2} = \dfrac{23}{10\,000}$ $\qquad 382 \times 10^{-3} = \dfrac{382}{1\,000}$ $\qquad 0,0358 \times 10^{5} =$

$0,7 \times 10^{-4} =$ $\qquad 0,48 \times 10^{-3} =$ $\qquad 570 \times 10^{-6} =$

2) Calcolate nel modo più opportuno:

(Esempio: $320 \times 10^{-4} + 38 \times 10^{-3} + 2,7 \times 10^{-2} =$
$= 32 \times 10^{-3} + 38 \times 10^{-3} + 27 \times 10^{-3} = 97 \times 10^{-3}$)

$-4,28 \times 10^{-2} + 974 \times 10^{-4} - 38,9 \times 10^{-3} =$

$8,2 \times 10^{-2} + 140 \times 10^{4} - 0,012 \times 10^{5} =$

$2,1 \times 10^{-12} \times 3,5 \times 10^{9} =$

$2,7 \times 10^{-4} \times 8,1 \times 10^{3} =$

* N.B. In matematica i numeri 1,2 e 1,200 hanno lo stesso significato. In fisica il simbolo 1,200, usato per una misura, sta a indicare che la misura è esatta fino alla terza cifra decimale.

$-37 \times 10^4 \times 12 \times 10^{-3} =$

3) Scrivete la forma decimale dei seguenti numeri razionali e trovate il periodo:

$\frac{21}{10} =$ $\quad -\frac{320}{1\,000} =$ $\quad \frac{32}{5} =$ $\quad \frac{41}{2} =$

$\frac{21}{7} =$ $\quad \frac{22}{3} =$ $\quad \frac{301}{15} =$

4) a) Considerate il numero periodico $a = 2,333\ldots = 2,\overline{3}$. Osservate che $10 \times a = 23,333\ldots$ e quindi $10 \times a - a = 23,333\ldots - 2,333\ldots$ da cui $9 \times a = 23 - 2$ e, in definitiva, $a = \frac{23-2}{9} = \frac{7}{3}$.

b) Sia $b = 2,8333\ldots = 2,8\overline{3}$. Moltiplicando per 10 e per 100 sarà $10 \times b = 28,333\ldots$ e $100 \times b = 283,333\ldots$ da cui $100 \times b - 10 \times b = 283 - 28$ e perciò $b = \frac{283-28}{90}$.

Analogamente calcolate una frazione equivalente ai numeri decimali periodici $3,\overline{51}$; $0,02\overline{23}$.

5) Calcolate l'approssimazione di $4,\overline{51}$ con un errore minore di $\frac{1}{1\,000}$.

6) Quale sarà la trentesima cifra dopo la virgola nello sviluppo decimale di $\frac{38}{7}$?

7) Calcolate

a) $\frac{10}{13} - \left[0,25 + \left(\frac{9}{26} - \frac{7}{39}\right) - \left(\frac{5}{6} - 0,75\right)\right] + \left(\frac{51}{52} - 0,25\right)$ $\left[= \frac{7}{6}\right]$

b) $0,8 - \frac{4}{7} \times \left(1,25 - 0,25 \times \frac{2}{3} + \frac{5}{18}\right) + \left(\frac{3}{4} - 0,2\right) \times \frac{2}{11} + \frac{2}{3} - \frac{1}{15}$ $\left[= \frac{13}{18}\right]$

c) $\frac{1}{2} + 1,25 : \left(2 - 0,5 : 0,8 - \frac{1}{3}\right)$ $\left[= \frac{17}{10}\right]$

d) $\left(0,8 : \frac{2}{3} + 0,2\right) : \frac{2}{3} + 0,75 : \left[0,625 + \frac{1}{3} : (0,6 - 0,5 : 1,5)\right] - 0,5$ $[= 2]$

e) $0,4 + 0,875^2 : \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 0,25 \times \frac{2}{3} + 0,25^2\right] - (0,4 \times 0,5 + 1)^2 - 0,9^2$ $\left[= \frac{2}{5}\right]$

§ 9. Numeri reali

Per tutte le necessità della vita pratica sono sufficienti i soli numeri razionali, anzi bastano già i numeri decimali (con un numero finito di cifre dopo la virgola). Per esempio, dopo aver fissato un'unità di misura per le lunghezze (ad es. il metro), si potrà dire che un certo tavolo è lungo 1,5 m oppure, aumentando la precisione della misura, che lo stesso tavolo è lungo 1,502 m ecc. Ma in varie questioni di natura teorica i numeri razionali non sono più sufficienti, nemmeno per la misura delle grandezze. Consideriamo due esempi.

In un quadrato che abbia i lati lunghi 1 m, la diagonale ha una lunghezza ben precisa, che deve essere misurabile con un numero; il teorema di Pitagora ci dice che questa lunghezza è $\sqrt{2}$ m, cioè che moltiplicata per se stessa vale 2 (vedi il prossimo capitolo). Ma si può dimostrare che non esiste alcun numero razionale il cui quadrato * sia 2, anche se i numeri

$$1 \qquad 1,4 \qquad 1,41 \qquad 1,414 \qquad 1,4142 \qquad \ldots$$

che hanno per quadrati

$$1 \qquad 1,96 \qquad 1,9881 \qquad 1,99396 \qquad 1,99996164$$

ci permettono di avvicinarci quanto vogliamo a $\sqrt{2}$ con numeri decimali.

Continuando ad avvicinarsi a $\sqrt{2}$, le cifre decimali che si succedono non si ripetono periodicamente: dunque $\sqrt{2}$ non è un numero razionale.

In un cerchio che abbia il diametro lungo 1 m, la circonferenza ha una ben precisa lunghezza, che di solito si indica con la lettera greca π (*pi greco*). Questo numero è all'incirca 3,14; una sua diversa approssimazione è il numero razionale $\frac{22}{7}$, ma anche questo valore non è esatto: per avvicinarsi sempre più a π sono state calcolate moltissime cifre decimali successive, ma si può dimostrare che lo sviluppo non è periodico.

---

* N.B. Un prodotto di un numero per se stesso si chiama spesso il **quadrato** di quel numero. Così 100 è il quadrato di 10, 2 è il quadrato di $\sqrt{2}$ ecc. (cfr. il § 2)

Esistono pertanto numeri che hanno sviluppi decimali infiniti non periodici. Chiameremo **numeri reali** tutti gli sviluppi decimali finiti (e si ritrovano i numeri interi e decimali) e non finiti, periodici (e si ritrovano gli altri numeri razionali) e non periodici. Conoscere un numero reale significa dunque essere capaci, almeno in teoria, di calcolarne tutte le cifre decimali che possono interessare. Scriveremo per es.

$$\sqrt{2} = 1,4142\ldots \qquad \pi = 3,1415\ldots$$

in cui i puntini ... ricordano che l'arresto dello sviluppo decimale comporta un valore approssimato. Si dirà anche che π è **circa uguale** a $3,14$ e si scriverà qualche volta $\pi \simeq 3,14$.

Sempre usando gli sviluppi decimali *approssimati*, cioè con un numero finito di cifre, nell'insieme dei numeri reali si definiscono tutte quelle nozioni che si erano introdotte nei numeri decimali, e cioè le operazioni di addizione, moltiplicazione, sottrazione, divisione, le potenze ad esponente intero, l'ordinamento ecc.

Naturalmente, nelle applicazioni pratiche, ci si dovrà accontentare di poche cifre decimali, con la conseguenza di introdurre nei calcoli qualche errore. Per esempio, con le informazioni date sopra per $\sqrt{2}$ e π, sappiamo che i loro valori esatti verificano le disuguaglianze

$$1,4142 < \sqrt{2} < 1,4143 \qquad\qquad 3,1415 < \pi < 3,1416$$

Per calcolarne la somma e il prodotto possiamo sommare e moltiplicare a membro a membro queste disuguaglianze:

$$1,4142 + 3,1415 = 4,5556 < \sqrt{2} + \pi < 4,5559 = 1,4143 + 3,1416$$

$$1,4142 \times 3,1415 = 4,4427\ldots < \sqrt{2} \times \pi < 4,4431\ldots = 1,4143 \times 3,1416$$

e quindi le sole **cifre sicure** sono $4,555$ per la somma e $4,44$ per il prodotto e potremo scrivere $\sqrt{2} + \pi \simeq 4,55$ e $\sqrt{2} \times \pi \simeq 4,44$. Per questo motivo si cerca di solito di operare con i numeri reali, fin quando è possibile, in forma simbolica, cioè continuando ad usare simboli come $\sqrt{2}$ e π, senza preoccuparsi dei loro sviluppi decimali.

Nell'ambiente dei numeri reali, così come abbiamo trovato $\sqrt{2}$, si trovano anche le radici quadrate di tutti i numeri positivi. In generale, se n è un numero naturale, la **radice n–esima** del numero *reale positivo* a è quell'unico numero reale positivo che, elevato ad n, restituisce a. Indicheremo questo numero con $\sqrt[n]{a}$. (Quando sopra la radice non è indicato alcun valore di n, è sottinteso che si tratta di radice quadrata, cioè $n = 2$). Per esempio

$$\sqrt{0,16} = 0,4 \qquad \sqrt{0,15} = 0,3874\ldots \qquad \sqrt[3]{27} = 3 \qquad \sqrt[3]{10} = 2,154\ldots$$

In generale, risulta $\sqrt[n]{a^n} = (\sqrt[n]{a})^n = a$ e dunque *estrarre la radice* n–esima è l'operazione inversa dell'*elevare a potenza* n–esima.

Invece che $\sqrt[n]{a}$ scriveremo anche $a^{\frac{1}{n}}$. Questo ci permetterà di mantenere le proprietà (cioè la regola sugli esponenti) di cui godevano le potenze intere: $(a^{\frac{1}{n}})^n = (a^n)^{\frac{1}{n}} = a$. Questa scrittura ci suggerisce anche il modo di definire le **potenze ad esponente razionale** $\frac{m}{n}$ di un numero reale $a > 0$ ponendo $a^{\frac{m}{n}} = (a^m)^{\frac{1}{n}}$. Per esempio

$$2^{\frac{3}{2}} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^3 = (1,4142\ldots)^3 = 2 \times 1,4142\ldots = 2,8284\ldots$$

$$10^{-\frac{5}{3}} = \left(10^{-\frac{1}{3}}\right)^5 = \left(\frac{1}{2,154\ldots}\right)^5 = (0,8225\ldots)^5 \quad \text{oppure anche}$$

$$= \left(10^{\frac{5}{3}}\right)^{-1} = \left(10^{1+\frac{2}{3}}\right)^{-1} = \frac{1}{10} \times 10^{-\frac{2}{3}} = \ldots \text{ ecc.}$$

Usando gli sviluppi decimali si possono anche definire le potenze ad **esponente reale**. Per esempio, $5^{\sqrt{2}}$ è un numero compreso tra 5^1 e 5^2 e anzi tra $5^{1,4142}$ e $5^{1,4143}$. Ma il calcolo più preciso di $5^{\sqrt{2}}$ si fa normalmente con altro metodo (per esempio, con i **logaritmi**).È bene ricordare che, anche dopo tutte queste estensioni della nozione di *potenza*, restano vere tutte quelle proprietà delle potenze che abbiamo elencato al §4).

Disponendo dei numeri reali, tutti i principali problemi di misura (suggeriti dalla geometria) ricevono risposta soddisfacente. Questo dipende dal fatto che sulla retta rappresentativa dei numeri (che abbiamo introdotto fin dai primi §) ad ogni punto corrisponde un numero reale, e ad ogni numero reale corrisponde un punto. Questo fatto (detto talvolta **postulato di completezza della retta**) sta alla base della Geometria analitica (vedi cap. V).

ESERCIZI

1) Servendovi della definizione di $\sqrt[n]{a}$ calcolate con due cifre decimali esatte i numeri

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad 2^{\frac{1}{3}}$$

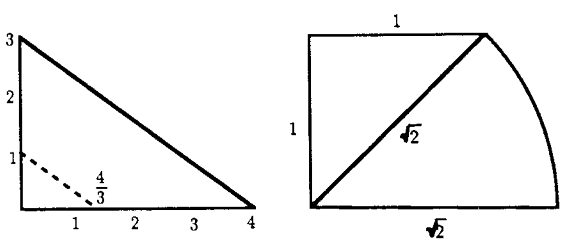
2) Calcolate con due cifre decimali esatte i numeri

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} \qquad \frac{\pi}{\sqrt{2}} \qquad \pi^2 \qquad \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

3) Disegnate su una retta orientata di origine O e unità di misura $OU = 10\text{cm}$ i punti corrispondenti ai seguenti numeri reali

$$\sqrt{3} \qquad \sqrt{5} \qquad \frac{3}{5} \qquad \frac{2}{3} \qquad -\frac{11}{10}$$

utilizzando il teorema di Pitagora (cfr. il cap. II) e seguendo la costruzione qui sotto riportata (teorema di Talete) per $\sqrt{2}$ e $\frac{4}{3}$.



4) Giustificate la seguente affermazione: i numeri razionali sono particolari numeri reali.

5) Quale dei seguenti numeri è il più vicino a $3,280$?

$$3+\frac{2}{7} \qquad 3+\frac{1}{4} \qquad 3+\frac{3}{11} \qquad 3+\frac{3}{10}$$

6) Calcolate le radici quadrate approssimate dei seguenti numeri mentalmente, come in questo esempio: $\sqrt{6,5\times 10^{-7}} = \sqrt{65\times 10^{-6}} =$ circa $8\times 10^{-3} = 0.008$:

$$135 \qquad 23\,000 \qquad 0,00072 \qquad 8.3\times 10^{-5}$$

7) Riscrivete le seguenti espressioni in forma più semplice

$$7^7\times 5^{-3} \qquad 5^{\frac{1}{3}}\times 5^6 \qquad 4^2 : 4^{-3}$$

8) Trovate quel numero intero n tale che $n < 7\times\sqrt{0,8} < n+1$.

9) Disponete in ordine crescente:

a) $-\sqrt{2}$; $\quad 1,7$; $\quad \sqrt{3}$; $\quad -2$; $\quad -0,3$; $\quad \frac{1}{7}$; $\quad \frac{1}{2}$;

b) $1,3$; $\quad \frac{4}{3}$; $\quad \sqrt{1,7}$; $\quad \sqrt{\frac{9}{5}}$;

c) $-\sqrt{3}$; $\quad -\sqrt{5}$; $\quad \sqrt{2}$; $\quad \sqrt{3}$; $\quad \sqrt{5}$; $\quad -\sqrt{10}$; $\quad -\sqrt{11}$.

§ 10. Notazione scientifica

La matematica utilizzata dalla maggior parte delle discipline sperimentali consiste spesso di una serie di calcoli –più o meno complessi– su numeri che provengono da misure sperimentali di grandezze fisiche, chimiche ecc. (peso, tempo, temperatura, corrente elettrica, ecc.). In molti casi la precisione della misura sperimentale non va oltre le due o tre **cifre (decimali) significative**. Se, per esempio, si usa una normale bilancia per pesarsi, un dato utile è normalmente del tipo 67 kg; sarebbe invece inutile cercare di leggere cifre decimali del tipo $67,4$ anche perché in ulteriori pesate probabilmente si farebbero letture diverse: $67,7$ $67,2$ ecc. Si dice allora che *le cifre significative sono due* e si tollera un errore di circa 1 kg.

Se per questa persona si deve dosare una medicina, per esempio la quantità di chinino da prendere in un giorno, si trovano spesso indicazioni del tipo 2 o 3 *mg per ogni chilo di peso*. Per 67 kg la dose di chinino consigliata risulta dunque compresa tra 130 mg e 200 mg circa, con un margine arbitrario di 70 mg. Si vede allora che la precisione di 1 kg nel peso era anche troppa.

Un'altra caratteristica delle misure fisiche, chimiche ecc. è il fatto che i numeri coinvolti sono spesso molto grandi o molto piccoli. Per queste misure si richiede spesso una precisione modesta, ma occorre non sbagliare l'*ordine di grandezza*. Se, per esempio, si deve dare un'idea di quanto dista la Luna dalla Terra, basterà dire che la distanza è *dell'ordine di* 400 000 km, con ciò intendendo che la misura esatta potrebbe essere anche 350 000 oppure 450 000. Qui l'informazione importante non è tanto data dalle prime cifre, ma dal numero degli zeri. Se questo dato va elaborato (per esempio, moltiplicato) con altre misure, sarà inutile che queste ultime siano accurate: il risultato finale sarà comunque accettabile soltanto come ordine di grandezza (cioè come numero di zeri). D'altra parte, il numero di questi zeri può essere molto alto (si pensi al numero di molecole d'acqua contenute in un litro) oppure molto piccolo (si pensi alle dimensioni, in centimetri, di una molecola).

Per questi ed altri motivi le scienze sperimentali hanno adottato per le loro misure la cosidetta **notazione scientifica**, in cui ogni numero viene rappresentato come prodotto di un numero *compreso tra* 1 *e* 10 (di solito con una o due cifre decimali ed escludendo il 10) moltiplicato per *una potenza* (intera) *di* 10.

Esempi:	notazione ordinaria	notazione scientifica
	12 300 000	$1,23 \times 10^7$
	$0,00457$	$4,57 \times 10^{-3}$

Questa notazione evidenzia subito le cifre significative e l'ordine di grandezza. Inoltre essa risulta particolarmente utile nelle moltiplicazioni e divisioni, come si vede negli esempi:

$$12\,300\,000 \times 0,00457 = (1,23 \times 4,57) \times (10^7 \times 10^{-3}) \simeq 5,62 \times 10^4$$

$$12\,300\,000 : 0,00457 = (1,23 : 4,57) \times (10^7 : 10^{-3}) \simeq 0,26 \times 10^{10} =\simeq 2,6 \times 10^9$$

Qui sono state moltiplicate (o divise) separatamente le cifre significative e le potenze di 10. Per le regole sulle potenze, la potenza di 10 risultante si calcola sommando (o sottraendo) gli esponenti. Nelle cifre significative è abbastanza facile controllare grossolani errori.

Naturalmente con le addizioni e sottrazioni non si possono usare regole simili: per esempio, per sommare $2,31 \times 10^5$ con $7,1 \times 10^3$ occorre riportarsi alla stessa potenza di 10:

$$2,31 \times 10^5 + 7,1 \times 10^3 = 2,31 \times 10^5 + 0,071 \times 10^5 \simeq 2,38 \times 10^5$$

ESERCIZI

1) Esprimete questi numeri in notazione scientifica

$23\,000 \qquad 0,00072 \qquad 0,038 \qquad 0,0604 \times 10^4$

2) Esprimete questi numeri in notazione scientifica con due cifre significative

$0,03072 \qquad 496 \times 10^{-3} \qquad 0,0000613 \times 10^4$

3) Scrivete i numeri $a = 210\,400$ $b = 330\,000$ $c = 0{,}00025$ $d = 0{,}00007$ in notazione scientifica. Poi calcolate

$$\frac{ab}{cd} \simeq 7{,}92 \times 10^{22} \qquad \frac{a^2 c}{bd^3} \simeq \qquad \frac{a^{-2} b}{c^{-3} d} \simeq$$

esprimendo i risultati in notazione scientifica.

4) Esprimete in notazione scientifica le seguenti lunghezze (in metri)

Esempio:	lunghezza del fiume Nilo	6 670 000	$6{,}7 \times 10^6$
	diametro della Terra	12,7 milioni	...
	distanza media Terra-Luna	383,3 milioni	...
	distanza media Terra-Sole	150 miliardi	...
	grandezza di un grano di polline	1 centomillesimo	...
	grandezza di un virus	1 centomilionesimo	...

5) La stella più vicina alla Terra, dopo il Sole, è l'Alfa della costellazione del Centauro, che dista da noi 4×10^{16} metri. Quanti anni impiegerebbe per raggiungerla una sonda spaziale che viaggiasse alla velocità di 50 000 km orari?

6) Una cellula, di grandezza circa 3×10^{-7} metri, dopo 5 secondi dalla sua formazione si scinde in due cellule, ciascuna di queste impiega altri 5 secondi per scindersi in altre due cellule, e così via. Dopo un'ora quante sono le cellule? Immaginando di disporre in fila queste cellule l'una vicina all'altra, quanto lunga sarebbe la fila?

§ 11. Percentuali

Per misurare le frazioni di una certa grandezza, cioè *quale parte di una certa quantità* è interessata a un certo avvenimento, si usano spesso le **percentuali**. Per esempio, se in una scuola frequentata da 240 studenti vi sono 168 maschi e 72 ragazze, la frazione di popolazione costituita da maschi è $\frac{168}{240} = \frac{70}{100}$ mentre la frazione costituita da ragazze è $\frac{72}{240} = \frac{30}{100}$. Si dice allora che in quella scuola

i maschi sono il 70% (che si legge : settanta per cento)

le ragazze sono il 30% (che si legge: trenta per cento).

Assegnata una frazione, la sua misura in % (percentuale) si ottiene eseguendo la divisione e moltiplicando il quoziente per 100. In particolare

la metà è il 50%; un quarto è il 25%; tre quarti è il 75%;

un terzo è circa il 33% ecc.

Questa nozione si usa anche quando il rapporto non è tra due interi, ma tra due numeri qualsiasi. Per esempio, se per produrre una coperta che pesa 1,25 kg sono stati impiegati 350 g di lana e il resto è cotone, si dice che la lana è circa il 28%, perché $0,35 : 1,25 = 0,28$ cioè il 28%.

I calcoli delle percentuali sono spesso approssimati, con due cifre significative. Per esempio, 13 studenti su 240 sono circa il 5,4%.

Ancora più facilmente si fa il calcolo inverso, che da una percentuale fa risalire alla quantità effettiva: è sufficiente moltiplicare per la percentuale e dividere per 100. Per esempio:

il 17% di 2 300 scellini è $(2\,300 \times 17) : 100 \simeq 390$ *scellini*

il 6% di 12 milioni di abitanti è $(12\,000\,000 \times 6) : 100 \simeq 720\,000$ *abitanti*

Le percentuali si usano spesso per gli aumenti e le diminuzioni delle quantità. Per esempio, se nella vetrina di un negozio si legge la scritta SCONTO DEL 30% SU TUTTA LA MERCE vuol dire che il negoziante venderà un prodotto che aveva prezzo

x al nuovo prezzo scontato

$$x - \frac{30}{100} \times x = 0,7 \times x,$$

per esempio 700 scellini invece di 1 000 ecc.

In certi casi si ammettono anche percentuali superiori a 100. Per esempio, esistono paesi in cui la *svalutazione* in un anno (rispetto alla lira italiana) è stata del 120%. Questo significa che, se per comprare 10 000 lire italiane bastavano x monete locali, dopo un anno ne occorrono $x + \frac{120}{100}x = 2,2 \times x$. Dunque il prezzo risulta più che raddoppiato.

Supponiamo che in un aereo vi siano 145 passeggeri così distribuiti

72 somali; 48 italiani; 15 keniani; 6 inglesi; 4 egiziani.

Le percentuali relative sono *rispettivamente* (cioè nell'ordine) circa

50%	33%	10%	4%	3%

La somma delle percentuali dovrebbe fare $100 = 50 + 33 + 10 + 4 + 3$ (qualche volta, per effetto delle approssimazioni, la somma sarà 98 oppure 101 ecc. e allora si approssimano le percentuali in modo diverso).

Sommando le percentuali $50 + 10 + 3$ si trova che i passeggeri africani sono il 63%. Sommando le rimanenti % si trova che il 37% sono europei.

Supponiamo che, tra i passeggeri somali, circa il 20% siano donne. Allora è probabile che si tratti di 14 persone, perché $(72 \times 20) : 100 = 14,4$. Con riferimento all'intera popolazione dell'aereo, le donne somale rappresentano la frazione $\frac{20}{100}$ della frazione $\frac{50}{100}$ e dunque il 20% del 50% di 145.

In definitiva si tratta della frazione $\frac{50}{100} \times \frac{20}{100} = 0,1$ cioè il 10%.

Ecco un altro esempio. In 12 mesi lo scellino si è svalutato del 20%. Nei successivi 12 mesi lo scellino si è ulteriormente svalutato del 25%.

Allora la svalutazione complessiva, nei 24 mesi, si calcola così:

$$x \qquad \text{è il valore iniziale dello scellino}$$

$$x - 0,2 \times x = 0,8 \times x = y \qquad \text{è il valore dopo 12 mesi}$$

$$y - 0,25 \times y = 0,75 \times (0,8 \times x) = 0,6 \times x \qquad \text{è il valore dopo 24 mesi}$$

In definitiva la svalutazione in 24 mesi è del 40% (e dunque non si ottiene sommando le due percentuali parziali!).

ESERCIZI

1) Qual è il 5% di 3 000? Rappresentate un punteggio di 97 su 136 con una percentuale. Aumentate 120 000 del 12%.

2) Il 40% della popolazione di un paese è di maschi. Il 25% della popolazione maschile e il 30% della popolazione femminile sono minorenni (cioè di età < 18). Trovate la percentuale della popolazione totale che è minorenne.

3) Quali sono gli errori percentuali $\left(= \frac{\text{errore}}{\text{valore}} \right)$ se si esprime
   a) una temperatura di $24°$, esatta a meno di $0,1°$?
   b) un peso di circa 71 grammi, esatto a meno di $0,01$ grammo?

4) Nell'affitto di una casa è compreso il 10% di spese per il personale. In tutto si spendono 600$ al mese. Qual è l'affitto mensile e quali le spese per il personale?

5) Un abito scontato del 5% costa 1 200 scellini. Qual era il prezzo intero?

§ 12. Logica

Nel linguaggio matematico si costruiscono **frasi** (o **proposizioni**) che sono vere ed altre che sono false. Per esempio, sono vere le proposizioni

$$2 \times 3,1 = 6,2; \qquad 1 < 2 < 3; \qquad \textit{se} \quad x < y \quad \textit{allora} \quad x + z < y + z.$$

Sono false le proposizioni

$$2 \neq 2; \qquad -5 < -3; \qquad x^2 < 0.$$

Le frasi che contengono una o più variabili si chiamano **aperte**. Queste frasi spesso non sono né vere né false, finché non si scelgono i valori delle variabili. Per esempio

la frase $x^2 < 0,25$ è vera soltanto quando $-0,5 < x < +0,5$

la frase *se* $x > y$ *allora* $x \times z > y \times z$ è vera se $z > 0$, è falsa se $z < 0$.

Altre frasi, pur contenendo variabili, sono sempre vere (o sempre false) per ogni scelta delle variabili. Per esempio

la frase $x^2 < 0$ è falsa per ogni scelta del numero (reale) x

la frase *se* $x > y$ *allora* $x + z > y + z$ è vera per ogni scelta di x, y, z

A partire da una frase vera, si ottiene una frase falsa (e viceversa) facendola precedere dalla frase *non è vero che...* La nuova frase si chiama **negazione** della precedente. Per esempio

non è vero che $2 \times 3,1 = 6,2$ è una frase falsa

non è vero che $x^2 < 0$ è una frase vera per ogni scelta di x.

Conosciamo già alcuni simboli matematici che indicano negazioni. Per esempio

la negazione di $x = y$ si scrive $x \neq y$

la negazione di $x > y$ si scrive $x \leq y$ ecc.

Tuttavia la negazione di frasi aperte richiede particolare attenzione, soprattutto quando le variabili siano usate in contesti del tipo

per ogni valore di x risulta...	*comunque si scelga x...*
per qualche valore di x succede che...	*esistono valori di x per cui...*
se x... allora...	*questa relazione vale soltanto se x...*

Esempio 1. Si consideri la frase

per ogni numero reale x risulta $x^2 + x + 1 > 0$.

Allora la sua negazione è:

non è vero che per ogni numero reale x risulta $x^2 + x + 1 > 0$.

Il significato di quest'ultima frase è:

esiste qualche numero reale x per cui $x^2 + x + 1 \leq 0$.

Tutt'altro significato avrebbe la frase

per ogni numero reale risulta $x^2 + x + 1 \leq 0$.

Esempio 2. Come negazione della frase

per qualche numero razionale risulta $x^2 = 2$

non si deve dire

per qualche numero razionale risulta $x^2 \neq 2$,

bensì

per nessun numero razionale risulta $x^2 = 2$,

o in altre parole, *non esistono numeri razionali il cui quadrato sia* 2.

Partendo da due frasi, si possono costruire altre frasi, per esempio con

	la congiunzione	delle due frasi per mezzo della particella e (= e inoltre)
oppure	**la disgiunzione**	delle due frasi per mezzo della particella o (= oppure).

Per esempio, si considerino le due frasi

a) $x + y$ *è positivo* **b)** $x \times y$ *è negativo.*

Allora la loro congiunzione è la frase

c) $x + y$ *è positivo e (inoltre)* $x \times y$ *è negativo*

mentre la loro disgiunzione è la frase

d) $x + y$ *è positivo o (oppure)* $x \times y$ *è negativo.*

Affinché la congiunzione di due frasi sia vera, occorre che siano vere entrambe. Affinché sia vera la disgiunzione, basta che sia vera una delle due. Per esempio in corrispondenza a varie scelte dei valori x, y le frasi **a**), **b**), **c**), **d**), sono vere (V) oppure false (F) come indica la seguente tabella:

x	y	(a)	(b)	(c)	(d)
1	1	V	F	F	V
-1	2	V	V	V	F
-3	1	F	F	F	V
-1	-1	F	F	F	F

Consideriamo ora un altro modo di combinare due frasi per ottenerne una terza. Per esempio, usiamo le variabili x, y, z per riscrivere le proprietà transitive dell'ordine:

$$se \quad x < y \quad e \quad y < z \quad allora \quad x < z.$$

Una frase come la precedente ha la struttura

se **[ipotesi]** *allora* **[tesi]**

e si chiama qualche volta una **implicazione**. Qui si mettono a confronto due fatti; e non si dice che sia sempre vero il primo fatto (che abbiamo chiamato *ipotesi*) né si dice che sia sempre vero il secondo (che abbiamo chiamato *tesi*). E infatti si potrebbero scegliere x, y, z in modo che non sia vera nessuna delle $x < y$, $y < z$, $x < z$. Si vuole invece dire che *se* si scelgono x, y, z in modo da verificare l'ipotesi, allora questi stessi x, y, z verificano la tesi (nel nostro caso la tesi non coinvolge y).

Facciamo un altro esempio: sappiamo che

se x e y **sono positivi** allora $x \times y$ **è positivo**

..........ipotesi........... ....tesi...........

Con lo stesso significato qualche volta si dice anche

è sufficiente (= basta) che x, y siano positivi *affinché* $x \times y$ sia positivo

oppure anche

se x, y sono positivi, *è necessario* (= occorre) che $x \times y$ sia positivo.

In un'implicazione, l'ipotesi si chiama anche **condizione sufficiente** (affinché sia vera la tesi) e la tesi si chiama **condizione necessaria** (cioè conseguenza dell'ipotesi). Consideriamo per esempio la frase:

affinché la somma di due numeri interi sia pari è sufficiente ma non necessario che entrambi gli addendi siano pari.

Qui si intende che è vera l'implicazione:

se x, y sono pari allora $x + y$ è pari

ma non è vera l'implicazione:

se $x + y$ è pari allora x e y sono pari.

Dunque occorre fare attenzione a non scambiare tra loro tesi e ipotesi. Un ultimo esempio: non è vera la frase *se $x \times y$ è positivo allora x e y sono positivi.*

Infatti non occorre che x e y siano positivi per avere $x \times y$ positivo (c'è un'altra possibilità : basta che siano tutti e due negativi).

Vi sono però dei casi in cui scambiando la tesi con l'ipotesi si ottiene ancora una implicazione vera. Per esempio valgono tutte e due le implicazioni

$$se \quad x > y \quad allora \quad x + z > y + z$$

$$se \quad x + z > y + z \quad allora \quad x > y.$$

In questi casi si riassumono le due implicazioni dicendo

$$x > y \qquad \textbf{se e solo se} \qquad x + z > y + z$$

oppure dicendo

$x > y$ è **condizione necessaria e sufficiente** affinché $x + z > y + z$.

Quando, come in questo caso, due fatti sono necessari e sufficienti l'uno per l'altro, si dice che sono **equivalenti** (cioè hanno lo stesso *valore* di informazione, perché se si sa che una cosa è vera si sa già che è vera anche l'altra).

Ci proponiamo ora di studiare la **negazione di un'implicazione**. Per esempio consideriamo l'implicazione

$$se \quad x^2 = y^2 \quad allora \quad x = y$$

e cerchiamo di negarla. Conviene allora sostituirla con la frase equivalente

per tutti gli x, y *per i quali* $x^2 = y^2$ *risulta necessariamente* $x = y$

di cui sappiamo già costruire la negazione, nella forma

esistono numeri x, y *per i quali è vero* $x^2 = y^2$ *ma è falso* $x = y$.

In conclusione, per vedere che è falsa una certa implicazione, contenente certe variabili, basta procurarsi *particolari* valori di quelle variabili (nel nostro caso, ad esempio $x = -1 \neq y = 1$) per i quali non è vera la tesi ma è vera l'ipotesi ($x^2 = y^2$). Questi valori particolari si chiamano qualche volta **controesempi**, cioè esempi che servono a provare che una certa implicazione non è vera.

ESERCIZI

1) Decidete quali delle seguenti frasi sono vere e quali sono false:

$$2^3 + 2 = 2^4 \qquad 2^3 \times 2^2 = 2^6 \qquad (3^2)^3 = 3^6 \qquad (x+1)^2 < 0 \qquad 2^0 = 0^2$$

2) Costruite la negazione di ciascuna delle seguenti frasi:

a) $x \geq 0$	a') $x < 0$
b) $x \neq 1$	b')
c) Il numero naturale n è pari	c')
d) Il numero naturale n è primo	d')
e) $k^2 - 2k + 3 > 0$	e')
f) Per ogni x reale risulta $x^2 \neq 2$	f') Esiste qualche x reale per cui $x^2 = 2$
g) Per qualche x razionale risulta $x^2 = 3$	g')

3) Partiamo dalle due frasi a) $x > 1$ b) $y \leq 2$.
Scrivete la congiunzione c) e la disgiunzione d).
Scegliete $x = 3$, $y = -1$ e stabilite se a), b), c), d) sono vere o false.

4) Dite se sono vere le seguenti implicazioni:

a) se $x \geq 1$ allora $x^2 \geq 1$;

b) se $|x| = 7$ allora $x \geq 0$;

c) se $x + y = 0$ e $x = 7$ allora $y = -7$;

d) se $xy = 0$ e $x = 0$ allora $y = 7$;

e) se $xy = 0$ e $x = 7$ allora $y = 0$.

Nel caso di un'implicazione falsa trovate un controesempio.

5) Nelle seguenti frasi, quali condizioni necessarie sono anche sufficienti? (cfr. il cap. II)

a) se un triangolo ha due lati eguali allora ha due angoli eguali;

b) se un triangolo ha tre lati eguali allora ha tre angoli eguali;

c) se un quadrangolo ha tutti i lati eguali allora ha tutti gli angoli eguali;

d) se un quadrangolo ha i lati a due a due paralleli, allora ha i lati a due a due eguali;

e) se un quadrangolo ha tutti gli angoli retti allora ha le diagonali eguali;

f) se un quadrangolo è un quadrato, allora è un rombo.

Quando le condizioni necessarie non sono sufficienti, indicate un controesempio.

§ 13. Linguaggio degli insiemi

Abbiamo già usato nei primi paragrafi la parola **insieme** per indicare una collezione di numeri o di oggetti qualsiasi. Spesso gli insiemi si indicano con lettere *maiuscole* come $A, B, U, K \ldots$ mentre i loro **elementi** si indicano con lettere *minuscole* come $a, y, t, s \ldots$ Ma non ci sono vere regole fisse. Per esempio consideriamo

l'insieme N dei numeri naturali, i cui elementi sono $1, 2, 3, \ldots$

l'insieme Z dei numeri interi, i cui elementi sono $\ldots -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$

l'insieme Q dei numeri razionali, i cui elementi sono le frazioni $\frac{x}{y}$ tra numeri interi x, y

l'insieme R dei numeri reali ecc.

Per conoscere un insieme, cioè per sapere di quale insieme si intende parlare, occorre e basta conoscere quali sono i suoi elementi. La scrittura

$x \in A$ si legge x *appartiene a* A oppure x *è un elemento di* A.

La negazione di $x \in A$ si scrive

$x \notin A$ e si legge x *non appartiene a* A oppure x *non sta in* A o simili.

Per esempio $-3 \in \mathrm{Z}$; $\frac{1}{2} \notin \mathrm{Z}$; $\sqrt{2} \notin \mathrm{Q}$; $\sqrt{2} \in \mathrm{R}$ ecc. Il simbolo $\in$ si chiama **di appartenenza**.

Per descrivere un insieme A si usano varie scritture che utilizzano le parentesi graffe $\{\ldots\}$. Se gli elementi di A sono $a, b, c, \ldots, z$ si scrive $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$; per esempio, $A = \{1, 2, 3, 4\}$ è l'insieme i cui elementi sono tutti e soli i numeri $1, 2, 3, 4$. Spesso gli elementi non sono tutti elencabili (per esempio, perché non sono un numero finito); allora si usano i puntini e se ne lascia al lettore l'interpretazione. Esempi:

$$\mathrm{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}; \quad \mathrm{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}; \quad T = \{1, 4, 7, 10, 13, \ldots\}.$$

A volte si individuano gli elementi di A mediante una o più *proprietà caratteristiche*. Per esempio la scrittura $A = \{x; x \in \mathrm{N}; 2 < x^2 < 20\}$ si legge:

A è l'insieme dei numeri x tali che: x è un naturale; x^2 è maggiore di 2; x^2 è minore di 20.

Poichè i numeri che soddisfano queste condizioni sono soltanto $2, 3, 4$ la descrizione precedente equivale alla scrittura $A = \{2, 3, 4\}$.

Infatti scrivendo $A = B$ vogliamo intendere che i due insiemi A, B sono *eguali*, cioè possiedono esattamente gli stessi elementi.

Assegnati due insiemi A, B la loro intersezione è l'insieme

$$A \cap B = \{x; x \in A; x \in B\}.$$

Gli elementi dell'intersezione sono dunque quelli *comuni* ai due insiemi, che appartengono ad A e anche a B.

L'*unione* di A e B è invece l'insieme

$$A \cup B = \{x; x \in A \text{ oppure } x \in B\}$$

i cui elementi appartengono ad A oppure a B (o eventualmente ad entrambi).

Esempi: Siano $\quad A = \{2, 3, 4\} \qquad B = \{1, 3, 5, 7\}$.
Allora $\quad A \cap B = \{3\} \qquad A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$

Qualche volta due insiemi C, D non hanno alcun elemento in comune; allora si considera ugualmente la loro intersezione, ma si dice che essa è *vuota*, scrivendo

$$C \cap D = \emptyset$$

Il simbolo $\emptyset$ indica dunque l'*insieme vuoto*.
Esempi: $\quad \{10, 3, 5\} \cap \{12, 4, 6\} = \emptyset; \qquad \emptyset = \{x; x \neq x\}$.

Si osservi che risulta $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$ per ogni scelta di A. È anche evidente che risulta $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$.

Una *coppia ordinata* di numeri è un simbolo del tipo (a, b) in cui il numero a si chiama la *prima componente* e il numero b la *seconda componente* (se $a \neq b$ le coppie ordinate (a, b) e (b, a) sono da considerarsi distinte).

Assegnati due insiemi A, B, si indica con

$$A \times B = \{(a,b);\ a \in A;\ b \in B\}$$

l'insieme delle coppie ordinate (a,b) con a elemento di A, b elemento di B. Esso si chiama il *prodotto cartesiano* di A per B.

Per esempio, se $A = \{2,4,6,8,10\}$ e $B = \{1,2,3\}$ le coppie ordinate ottenibili sono tutte e sole le seguenti:

$$\begin{array}{ccccc} (2,1), & (4,1), & (6,1), & (8,1), & (10,1) \\ (2,2), & (4,2), & (6,2), & (8,2), & (10,2) \\ (2,3), & (4,3), & (6,3), & (8,3), & (10,3) \end{array}$$

Se costruissimo $B \times A$, ne risulterebbe un insieme diverso: per esempio, la coppia $(1,6)$ appartiene a $B \times A$ ma non a $A \times B$. Concludiamo che, in generale $A \times B$ e $B \times A$ non sono lo stesso insieme.

Se $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ è l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali. Questo insieme, che spesso si indica con $\mathbb{R}^2$, è importante nella geometria analitica del piano.

Partendo con tre insiemi A, B, C si può considerare il prodotto cartesiano

$$A \times B \times C = \{(a,b,c);\ a \in A;\ b \in B;\ c \in C\}$$

cioè l'insieme delle *terne ordinate* che hanno le tre componenti, nell'ordine, negli insiemi A, B, C. L'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^3$ si incontra nella geometria analitica dello spazio (tridimensionale).

Assegnato un insieme A, un suo sottoinsieme S è un insieme i cui elementi sono elementi di A. In altre parole, un sottinsieme S di A si ottiene *cancellando* da A alcuni elementi (eventualmente anche tutti, o nessuno). I sottoinsiemi di A si chiamano anche le *parti* di A.

Per esempio, l'elenco delle parti di $A = \{2,5,7\}$ è il seguente:

$\{2,5,7\}$ cioè A stesso; è l'unico sottoinsieme che possiede 3 elementi;

$\{2,3\}, \{5,7\}, \{2,5\}$ questi sono i tre sottoinsiemi che possiedono 2 elementi;

$\{2\}, \{5\}, \{7\}$ questi sono i tre sottoinsiemi che possiedono 1 elemento;

$\emptyset$ cioè l'insieme vuoto, è l'unico sottoinsieme che contiene 0 elementi.

Per indicare che l'insieme S è un sottoinsieme dell'insieme A scriveremo $A \supset S$ oppure $S \subset A$ che leggeremo A *contiene* S oppure S *è contenuto* (oppure *incluso*) in A. Esso significa dunque che

ogni elemento di S è elemento di A.

Il simbolo $\supset$ si chiama di *inclusione.*

La negazione di $A \supset S$ si scrive $A \not\supset S$ e significa che

qualche elemento di S non è elemento di A.

Come si è visto nell'esempio, risulta sempre $A \supset A$, $A \supset \emptyset$, cioè ogni insieme è sottoinsieme di se stesso; l'insieme vuoto è sottoinsieme di ogni insieme. Sono anche evidenti le inclusioni

$$A \supset A \cap B \qquad A \cup B \supset A \quad \text{e simili.}$$

Quando si vuol provare che due insiemi A, B sono uguali, è spesso utile spezzare la dimostrazione in due parti: prima si prova che $B \supset A$, poi si prova $A \supset B$. Infatti, se ogni elemento di A sta in B e ogni elemento di B sta in A, allora A e B possiedono gli stessi elementi, cioè $A = B$. Per negare l'uguaglianza si scrive $A \neq B$; ciò equivale al fatto che $A \not\supset B$ oppure $B \not\supset A$ (nell'esempio precedente, abbiamo visto $A \times B \not\supset B \times A$).

Per esercizio consideriamo i seguenti insiemi di numeri interi:

$P = \{p;\ p = 2 \times x;\ x \in \mathbb{Z}\}$ cioè i numeri pari

$S = \{s;\ s = 6 \times y;\ y \in \mathbb{Z}\}$ cioè i multipli di 6*

$T = \{t;\ t = 8 \times z;\ z \in \mathbb{Z}\}$ cioè i multipli di 8

$W = \{w = s + t;\ s \in S;\ t \in T\}$ cioè le somme dei multipli di 6 con quelli di 8.

* N. B. Quando si parla di **multipli** in $\mathbb{Z}$ si intende che i moltiplicatori possono essere anche negativi; così i multipli di 6 sono ...−12,−6,0,6,12,... ecc. Analogamente, i **divisori** (interi) di 6 sono −6,−3,−2,−1,1,2,3.

Ci proponiamo di dimostrare che risulta $P \supset S$; $P \neq T$; $P = W$.

La prima inclusione si dimostra osservando che $s = 6 \times y = 2 \times (3 \times y)$ cioè ogni multiplo di 6 è pari.

Per $P \neq T$ basta fornire un esempio: 10 è pari ma non è multiplo di 8, dunque c'è un elemento in P che non è in T, e tanto basta.

Per $P = W$, spezziamo la dimostrazione:

$P \supset W$ perché i multipli di 6 e di 8 sono pari, e la loro somma è dunque pari.

$W \supset P$ perchè $2 \times x = (8-6) \times x = 6 \times (-x) + 8 \times x$ è del tipo $s + t$, cioè somma di un multiplo di 6 con un multiplo di 8.

ESERCIZI

1) Dati gli insiemi

$A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$ $\quad B = \{2,3,4\}$

$C = \{1,2,7\}$ $\quad D = \{1,2,3,4,5\}$

Elencate gli elementi degli insiemi

$A \cap C = \{\ldots\}$ $\quad A \cap D =$ $\quad A \cap D =$

$B \cup C =$ $\quad C \cup D =$

$B \times C =$ $\quad C \times D =$

Tra gli insiemi dati e quelli trovati dite quali sono sottoinsiemi dell'insieme D.

2) Siano:

$A = \{1,2,3,4,6,12\}$ l'insieme dei numeri naturali che sono divisori di 12,

$B = \{1,3,5,15\}$ l'insieme dei numeri naturali che sono divisori di 15,

$C = \{1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60\}$ l'insieme dei numeri naturali che sono divisori di 60.

Trovate gli elementi degli insiemi $A \cap B$; $A \cap C$; $A \cup B$; $A \cup C$.

§ 14. Calcolo combinatorio

Qualche volta, nel *contare* gli elementi di un insieme, si presenta una trappola: per esempio, quanti sono i numeri nell'insieme

$$A = \left\{3, \frac{2}{4}, 4, \sqrt{9}, \frac{1}{2}, 5, \frac{6}{2}\right\}?$$

Se rispondiamo 7 vuol dire che trascuriamo il fatto che $3 = \frac{6}{2} = \sqrt{9}$ compare tre volte e che anche $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ è ripetuto due volte. In matematica invece si vogliono contare gli elementi *distinti* di un insieme. Si devono dunque eliminare le ripetizioni e contare soltanto i numeri distinti; in effetti

$$A = \left\{3, \frac{1}{2}, 4, 5\right\}$$

e la risposta giusta è 4. Scriveremo allora che $\#(A) = 4$ e diremo: A *possiede* 4 *elementi*. La scrittura $\#(A)$ indica cioè il **numero di elementi o cardinalità** dell'insieme A.

In presenza di due insiemi A, B vogliamo contare quanti sono gli elementi che compaiono nell'uno oppure nell'altro insieme, cioè nella loro unione $A \cup B$. Se i due insiemi non hanno elementi comuni, possiamo contare separatamente gli oggetti dei due insiemi e poi fare la loro somma. Ma il calcolo sarebbe errato, se qualche elemento comparisse in entrambi gli insiemi. Per esempio, quanti numeri distinti compaiono nei due elenchi seguenti?

$$2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20; \qquad 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21.$$

La risposta esatta non è $10 + 7 = 17$, bensì $14 = (10 + 7) - 3$ perchè vi sono i tre numeri $6, 12, 18$ che compaiono in entrambi gli elenchi, e non devono essere contati due volte. Perché il conteggio sia esatto, dobbiamo cioè sottrarre a quella somma il numero di elementi che stanno nell'intersezione. Questa osservazione si generalizza così: il numero di elementi dell'insieme unione di due insiemi A, B è dato dalla formula

$$\#(A \cup B) = \#(A) + \#(B) - \#(A \cap B).$$

Nel §13, partendo dagli insiemi $A = \{2,4,6,8,10\}$, $B = \{1,2,3\}$ abbiamo sistemato in un rettangolo tutti gli elementi di $A \times B$. Quella sistemazione ne facilita il conteggio: le coppie sono in numero di $15 = 5 \times 3$. In generale, se nell'insieme A vi sono m elementi e nell'insieme B vi sono n elementi, allora le coppie ordinate sono $m \times n$, cioè risulta $\#(A \times B) = \#(A) \times \#(B)$.

In particolare, se si considera il prodotto cartesiano di un insieme con se stesso, risulta $\#(A \times A) = \left(\#(A)\right)^2$. Per esempio, con i numeri naturali da 1 a n si possono costruire n^2 coppie ordinate.

Poniamoci ora un altro problema di conteggio: assegnate le 3 lettere a, b, u quante parole possiamo costruire utilizzando tutte le tre lettere una e una sola volta? Troviamo che le parole possibili sono le 6 seguenti:

$$abu \qquad aub \qquad bau \qquad bua \qquad uab \qquad uba.$$

Riponiamoci il problema disponendo di una lettera in più, per esempio m: quante parole si possono costruire usando una sola volta le 4 lettere a, b, u, m? Il nuovo elenco si costruisce subito, utilizzando il precedente. Per esempio, partendo con la parola abu si costruiscomo 4 nuove parole inserendo la lettera m nelle 4 possibili posizioni:

$$m\,abu \qquad a\,m\,bu \qquad ab\,m\,u \qquad abu\,m \qquad .$$

Ripetendo il procedimento con le altre 5 parole di 3 lettere, si ottengono in definitiva 6×4 parole di 4 lettere.

Queste 24 parole si chiamano le **permutazioni** dei 4 simboli a, b, u, m. Consideriamo ora n oggetti qualsiasi. Utilizzando quanto sopra, ci proponiamo di contare quante sono le permutazioni di questi n oggetti. Indichiamo intanto questo numero con il simbolo

$n!$ che si legge *il* **fattoriale** *di* n o anche n *fattoriale.*

Risulta $1! = 1$ (perché con una sola lettera si può costruire una sola parola); $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$. Generalizzando il ragionamento fatto prima, risulta $n! = (n-1)! \times n$; infatti come sopra, la nuova lettera n–esima si può inserire in n modi diversi in ciascuna delle permutazioni costruite prima con $n-1$ oggetti. Allora

$$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n$$

cioè $n!$ è il prodotto dei primi n numeri naturali (non nulli).

Per esempio $5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$, $6! = 720$ ecc. Quando n cresce, $n!$ diventa rapidamente un numero molto grande.

Nel §13, partendo dall'insieme $\{1,2,3\}$, abbiamo trovato 8 suoi **sottoinsiemi** distinti. Se si considera un quarto elemento 4, esso si può aggiungere a ciascuno degli 8 sottoinsiemi già trovati per trovare altrettanti sottoinsiemi distinti dell'insieme $\{1,2,3,4\}$. Dunque l'insieme $\{1,2,3,4\}$ possiede questi 8 sottoinsiemi (che contengono l'elemento 4), più gli 8 precedenti (che non lo contengono), in totale $8+8=16$ sottoinsiemi. Generalizzando, se $\#(A) = n$, si vede che i sottoinsiemi distinti di A sono in numero di 2^n. Per esempio, se A ha 10 elementi, il numero delle sue parti è $2^{10} = 1\,024$.

Ecco un altro problema di conteggio che ha importanza in vari capitoli della matematica. Se sul piano disegnamo 6 punti (ai quali associamo i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6), quanti *segmenti* possiamo disegnare, che abbiano quei punti come estremi? Si tratta di contare in quanti modi si possono scegliere due numeri *distinti* tra quei sei: $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, ..., $\{5,6\}$. Naturalmente non dobbiamo contare come segmenti $\{1,1\}$, $\{2,2\}$ ecc. Inoltre, una volta contato il segmento $\{1,2\}$, non dobbiamo più contare $\{2,1\}$ ecc. Ci accorgiamo allora che ciò equivale a contare i **sottoinsiemi** di $\{1,2,3,4,5,6\}$ che possiedono esattamente **2 elementi**. Consideriamo inizialmente tutte le $6 \times 6 = 36$ coppie ordinate (a,b) di quei numeri. Tra queste dobbiamo escludere le 6 coppie $(1,1)$, $(2,2)$, ecc. e tra le rimanenti $30 = 36 - 6$ dobbiamo contare come una sola le coppie del tipo (a,b) e (b,a). Si vede allora che il numero dei segmenti è $\frac{30}{2} = 15$.

Più generalmente la formula $\frac{n^2 - n}{2}$ dà il numero dei segmenti che hanno estremi scelti tra n punti.

Assegnato un insieme A che abbia n elementi, scegliamo un numero naturale $k \le n$ e chiediamoci: quanti sono i **sottoinsiemi** di A che possiedono esattamente k **elementi**? Indichiamo questo numero con il simbolo $\binom{n}{k}$ e osserviamo che, in qualche caso, le considerazioni che abbiamo già fatto ci aiutano a calcolarli. Per esempio, sappiamo che risulta:

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{2} = \frac{n \times (n-1)}{2}$$

Si può dimostrare che, in generale, risulta

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \times (n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdots k}$$

Tutti questi numeri si chiamano i coefficienti binomiali. Per esempio

$$\binom{10}{6} = \frac{10!}{6! \times 4!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 210.$$

ESERCIZI

1) Trovate il numero cardinale degli insiemi $A \cup B$, $A \cup C$ trovati nell'es. 2 del § precedente, utilizzando $\#(A \cup B) = \ldots$.

2) Trovate tutti i numeri di tre cifre che si possono scrivere con le cifre $1, 2, 3$ senza ripetizioni (cioè usandole una sola volta). Quanti sono?

3) Quanti sono i numeri di 4 cifre che si possono scrivere con le sole cifre $6, 7, 8, 9$, senza ripeterle?

4) Verificate le seguenti eguaglianze:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$;

b) $\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} = n^2$

c) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} - \binom{n}{k-1}$;

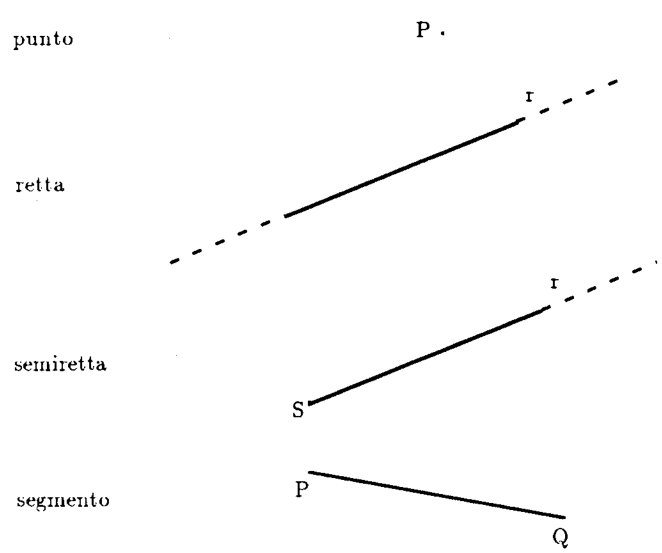
d) $(n+2)! - 3(n+1)! + n! = n^2 \times n!$.

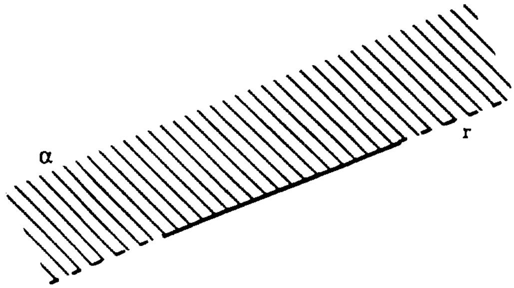
Capitolo II: RICHIAMI DI GEOMETRIA PIANA

§ 1. Lessico geometrico

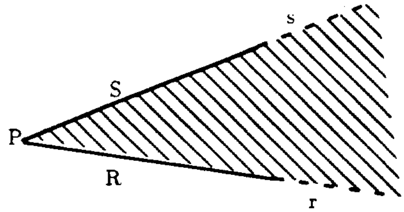
Nel capitolo sull'Aritmetica abbiamo parlato soprattutto di numeri; in questo capitolo ci dedichiamo alla Geometria e parliamo di **punti**, **rette**, **piani**. Si incomincia con questi oggetti fondamentali, e se ne costruiscono poi tanti altri (segmenti, angoli, poligoni, ecc.) che si chiamano talvolta **figure geometriche**. In tutto questo capitolo ci occuperemo di geometria **piana**, cioè limiteremo la nostra attenzione a un particolare piano (che potremo pensare come il piano del nostro quaderno, o quello della lavagna): è in questo piano che sceglieremo tutti i punti, le rette ecc.

Le figure che seguono illustrano le nozioni di **punto, retta, semiretta, segmento, semipiano, angolo**:





semipiano



angolo

I **punti** si indicano con le lettere maiuscole $P, Q, R, \ldots$

Le **rette** (e le **semirette**) si indicano con lettere minuscole $r, s, t, \ldots$

I **piani**, i **semipiani** e gli **angoli** si indicano spesso con lettere dell'alfabeto greco: $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \pi, \rho, \ldots$[1]

Le seguenti frasi hanno lo stesso significato:

Il punto P *sta sulla* (ovvero *appartiene alla*) retta r.

La retta r *passa per* (ovvero *contiene*) il punto P.

Con i simboli degli insiemi (cfr. cap. I §13) si scrive allora $P \in r$.

Tre punti A, B, C si dicono **allineati** se stanno sulla stessa retta: $A, B, C \in r$.

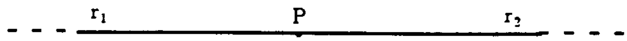
Un punto P sulla retta r divide la retta in due **semirette** Pr_1, Pr_2 che si dicono **opposte**. Il punto P si chiama l'**origine** delle due semirette. Spesso si scrive

---

[1] Le lettere greche più usate in matematica sono le seguenti

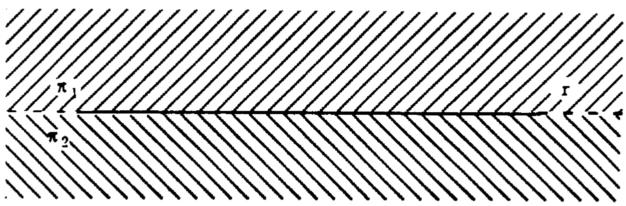
α (alpha), β (beta), γ (gamma), δ (delta), ε (epsilon), θ (theta), λ (lambda),

μ (mi), π (pi), ρ (ro), σ (sigma), τ (tau), φ (fi), ω (omega) semplicemente r_1, r_2 invece di Pr_1, Pr_2.

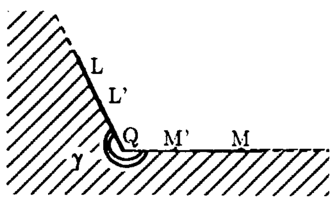


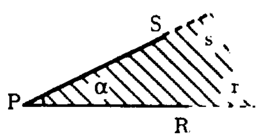
Due punti P, Q su una retta r dividono la retta in tre parti: una semiretta di origine P, una semiretta di origine Q e il **segmento** di **estremi** P, Q cioè l'insieme dei punti sulla retta r che sono *compresi* tra P, Q. Si dice che il segmento PQ ***sta*** ovvero *giace* su r (e si scrive $r \supset PQ$; cfr. il linguaggio degli insiemi nel cap. I).

Una retta r sul piano π lo divide in due semipiani **opposti** $r\pi_1$, $r\pi_2$. La retta r si chiama **origine** dei due semipiani. Spesso si scrive semplicemente π_1, π_2 invece di $r\pi_1$, $r\pi_2$.

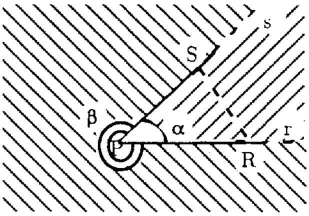


Un angolo α è una porzione di piano limitata da due semirette Pr, Ps che hanno la stessa origine P. Per l'angolo α il punto P si chiama **vertice**, le semirette Pr, Ps si chiamano **lati**. Un tale angolo si indica talvolta con il simbolo $\alpha = r\widehat{P}s$, oppure, scegliendo un punto R su Pr e un punto S su Ps, si scrive anche $\alpha = R\widehat{P}S$. (I punti si possono scegliere più o meno lontani dal vertice; per esempio nella figura lo stesso angolo $L\widehat{Q}M$ si indica anche con $L'\widehat{Q}M'$).



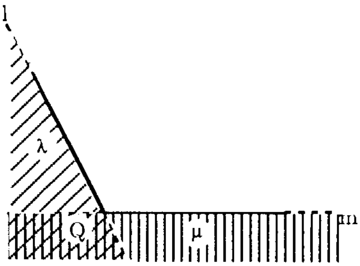


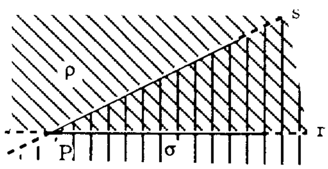
Due semirette Pr, Ps che hanno la stessa origine P sono lati di due diversi angoli; il piano resta infatti da esse diviso in due zone (una ***interna***, l'altra ***esterna*** all'angolo). Il simbolo $r\widehat{P}s$ non basta quindi ad individuare quale dei due angoli si intende, e perciò nei disegni si usa segnare un archetto (oppure scrivere il nome dell'angolo, per es. α) nella zona interessata.



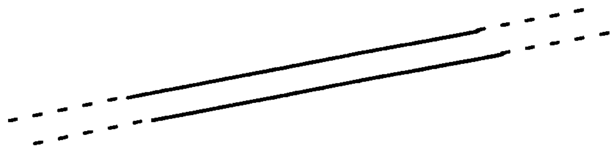
Se le due semirette Pr, Ps giacciono sulla stessa retta (cioè se sono opposte), allora esse danno luogo a due angoli **piatti**, che sono i due semipiani opposti.

Se invece Pr, Ps non sono opposte, allora di questi angoli uno (α nella figura) è **convesso**, l'altro (β nella figura) è **concavo**; un angolo si dice convesso se, comunque si prendano due punti, R sulla semiretta Pr, S sulla semiretta Ps, il segmento RS è interamente contenuto nell'angolo (con il linguaggio degli insiemi, un angolo convesso è l'intersezione di due semipiani $\alpha = \rho \cap \sigma$, un angolo concavo è la loro unione $\gamma = \lambda \cup \mu$). Quando non vi sia un'altra precisazione, il simbolo $r\widehat{P}s$ indicherà l'angolo convesso che ha per lati Pr, Ps.

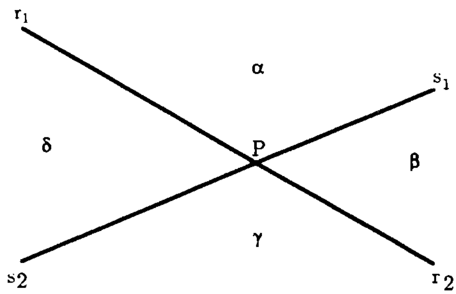




Due rette r, s del piano si chiamano **parallele** se non hanno punti in comune (si dice anche *non si incontrano*: $r \cap s = \emptyset$). È bene considerare anche il caso di due rette *coincidenti*: $r = s$; anche in questo caso si dirà che r, s sono parallele. Quando due rette sono parallele, si dice anche che esse hanno la stessa **direzione**.



Se due rette del piano non sono parallele, allora hanno un solo punto T in comune, che si chiama la loro **intersezione** (si dice anche: *le due rette si incontrano* o *si segano* o *sono incidenti* nel punto T: $r \cap s = \{T\}$).



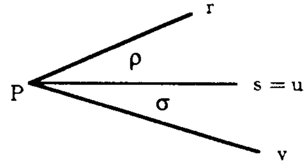
Due rette r, s che si incontrano in un punto P separano il piano in quattro parti che sono quattro angoli convessi di vertice P: siano $\alpha = r_1\widehat{P}s_1$; $\beta = s_1\widehat{P}r_2$; $\gamma = r_2\widehat{P}s_2$; $\delta = s_2\widehat{P}r_1$.

Gli angoli α, γ si dicono **opposti al vertice**.

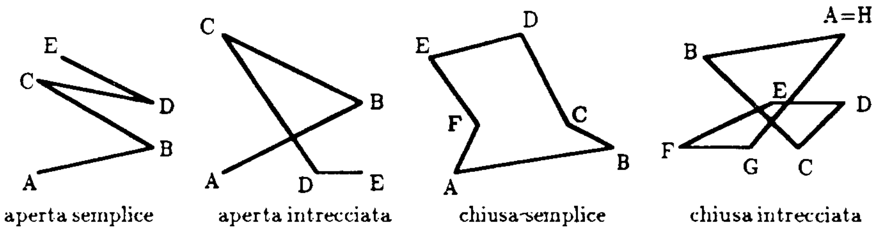
Gli angoli α, β si dicono **adiacenti**.

Naturalmente sono opposti al vertice anche gli angoli β, δ; sono adiacenti anche β, γ ecc.

Due angoli $\rho = r\widehat{P}s$, $\sigma = u\widehat{P}v$ si dicono **consecutivi** se hanno un lato in comune e stanno da due parti opposte di questo lato:



Le figure che seguono sono (linee) **spezzate**; esse si ottengono congiungendo i **vertici** $A, B, C, \ldots$ per mezzo dei segmenti (**lati**) $AB, BC, \ldots$ Distinguiamo spezzate semplici o intrecciate, chiuse o aperte:

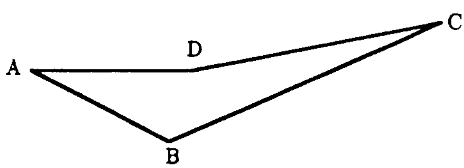


Le spezzate **semplici** si possono *percorrere* (per esempio con la matita, senza staccarla dal foglio) in modo che, partendo dal primo vertice, tutti gli altri punti della spezzata si incontrino una volta sola. Al contrario, nelle spezzate **intrecciate** vi sono punti che si incontrano più di una volta. Le spezzate **chiuse** sono quelle in cui il primo estremo del primo lato coincide con il secondo estremo dell'ultimo lato: nell'esempio dell'ultima figura $A = H$). Una spezzata semplice chiusa separa il piano in due regioni, costituite dai punti **interni** e da quelli **esterni**.

Si osservi che i vertici di una spezzata non la *individuano*, nel senso che usando gli stessi punti ma congiungendoli in ordine diverso si ottiene un'altra spezzata.

Un **poligono** è la parte di piano *racchiusa da* (cioè interna a) una spezzata semplice chiusa.

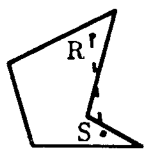
Per un poligono come quello della figura i punti A, B, C, D si chiamano **vertici**, i segmenti AB, BC, CD, DA si chiamano **lati**. Gli **angoli** del poligono sono $D\widehat{A}B$, $A\widehat{B}C$, $B\widehat{C}D$, $C\widehat{D}A$; essi si indicano spesso con i simboli $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}$ (gli angoli che qui si considerano sono quelli interni al poligono).



Il poligono della figura precedente ha 4 lati e si chiama perciò **quadrilatero**; di conseguenza ha anche 4 vertici e 4 angoli e perciò si chiama anche **quadrangolo**. Più generalmente, i poligoni si classificano secondo il numero dei loro angoli (che è uguale a quello dei lati), e in corrispondenza assumono i seguenti nomi:

Numero dei lati e angoli	Nome
3	**triangolo**
4	**quadrangolo o quadrilatero**
5	**pentagono**
6	**esagono**
...	......

Tra i poligoni che hanno 4 lati o più si distinguono quelli concavi da quelli convessi. Un poligono è **convesso** quando, presi due qualsiasi punti R, S all'interno del poligono, tutto il segmento RS è interno al poligono. I poligoni che non sono convessi si chiamano concavi. Nel seguito considereremo soltanto poligoni convessi.



pentagono-concavo

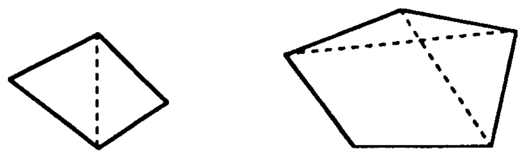
esagono-convesso

ESERCIZI

1) Nelle figure delle spezzate intrecciate, cambiate l'ordine dei vertici, in modo da ottenere una spezzata semplice.

2) A pag. 73 è disegnato un quadrilatero di vertici A, B, C, D. Quanti altri quadrilateri si possono ottenere congiungendo in modo diverso gli stessi 4 vertici?

3) Nelle figure seguenti sono tratteggiate alcune **diagonali** dei poligoni, cioè segmenti che hanno per estremi i vertici ma non sono lati.



Quante sono le diagonali di un quadrilatero? Si contino e si disegnino anche le diagonali di un pentagono e quelle di un esagono.

4) La proprietà di parallelismo tra due rette è riflessiva? (cfr. cap. I) È simmetrica? È transitiva?

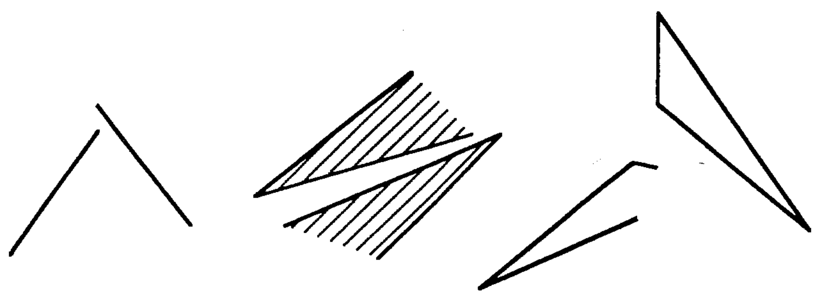
5) Si traccino due rette parallele, poi una terza retta che le interseca. Quanti angoli vengono individuati?

6) È vero che in un poligono convesso tutti gli angoli interni sono convessi?

§ 2. Congruenze - Misura

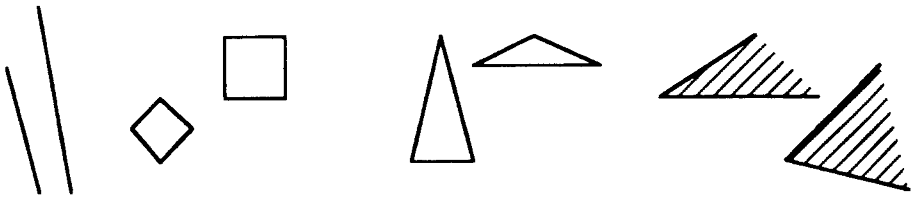
Consideriamo due figure geometriche (per esempio due triangoli) che siano disegnate su due diversi fogli di carta. Appoggiamo tutti e due i fogli, uno sopra l'altro, al vetro della finestra (per aumentare la trasparenza) e facciamoli *scorrere* (= scivolare, slittare) uno sull'altro cercando di far *sovrapporre* esattamente le due figure, fino a renderle indistinguibili. È chiaro che riusciamo a farlo soltanto in certi casi, e allora diremo che le due figure sono **congruenti** (o *sovrapponibili*). Nella ricerca si deve considerare anche la possibilità di rovesciare uno dei fogli in modo che la faccia su cui è l'inchiostro sia rivolta verso il vetro. In certi casi la sovrapponibilità si realizza soltanto dopo questo *ribaltamento*.

Senza bisogno di realizzare materialmente il precedente scorrimento ed eventuale ribaltamento (tutti questi spostamenti si chiamano **isometrie** o **congruenze** o anche **movimenti rigidi**) ma soltanto pensandoli nella nostra mente, siamo in grado di confrontare due figure geometriche – nel senso spiegato – anche se esse sono disegnate sullo stesso foglio. Due figure di un piano si diranno **congruenti** (ovvero **sovrapponibili**) se si può pensare un movimento rigido del piano su se stesso che porta una figura a sovrapporsi all'altra. I disegni che seguono rappresentano coppie di figure geometriche congruenti:



due segmenti — due-angoli — due-triangoli

Si osservi che per sovrapporre i due triangoli della terza figura occorre ricorrere a un ribaltamento. È chiaro che un movimento rigido *porta* (ovvero *trasforma*) un punto in un punto, una retta in una retta, un segmento in un segmento, un angolo in un angolo ecc. Ma non sempre sono sovrapponibili due segmenti, né due angoli, né due poligoni. Ecco alcune coppie di figure non sovrapponibili:



Vogliamo utilizzare le congruenze per *misurare* certi enti geometrici.

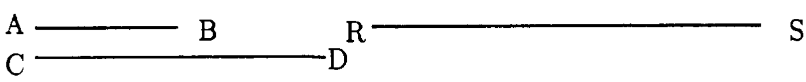
Dati due segmenti AB, CD, diremo che AB ha la stessa **lunghezza** di CD se AB, CD sono sovrapponibili, cioè se un opportuno movimento rigido sovrappone AB a CD; in questo caso si usa scrivere $|AB| = |CD|$; con improprietà di linguaggio, si dirà spesso che i due segmenti sono **eguali** e si scriverà $AB = CD$ oppure $\overline{AB} = \overline{CD}$.

Diremo invece che la lunghezza di AB è **minore** (ovvero *inferiore*) di quella di CD (equivalentemente: CD è *più lungo* di AB) se un opportuno movimento rigido porta AB a sovrapporsi a una *parte propria* di CD (per esempio, porta A su C e B all'interno di CD); in tal caso scriveremo $|AB| < |CD|$ e impropriamente anche $AB < CD$.

Ci proponiamo ora di dare significato a espressioni del tipo $CD = 2AB$ oppure $CD = \frac{3}{4}RS$ ecc. che leggeremo:

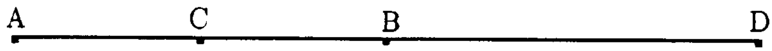
CD è il doppio di AB oppure *AB e CD stanno in rapporto* 1 *a* 2

CD è i tre quarti di RS oppure *il rapporto tra CD e RS è* $0,75$ ecc.



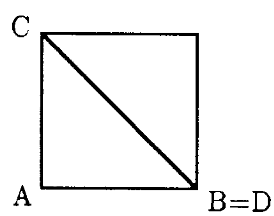
Incominciamo con il definire il **punto medio di un segmento** AB: è quel punto C che *divide il segmento AB in due parti eguali*, per cui cioè risulta $AC = CB$;

scriveremo anche $AC = 0,5AB$; oppure $AB = 2AC$.



Viceversa, partendo da AB possiamo costruire il segmento $AD = 2AB$ scegliendo il punto D in modo che sia allineato con AB e tale che $AB = BD$. Analogamente possiamo considerare segmenti che sono $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$ oppure $3, 4, \ldots$ volte quello assegnato. Combinando le due operazioni precedenti, possiamo scrivere, per esempio $AB = 0,6RS = \frac{3}{5}RS$. Questa relazione significa che un terzo di AB è uguale a un quinto di RS.

Viceversa, assegnati due segmenti, AB e CD, possiamo chiederci in che *rapporto* (di lunghezza) stanno, cioè per quale numero r risulta $AB = rCD$. Talvolta si troverà un numero intero o razionale; ma è ben nota l'esistenza di segmenti il cui rapporto non è un numero razionale e dunque l'opportunità di estendere la nozione anche ai numeri reali scrivendo, per esempio, $AB = \sqrt{2}CD$ (come avviene quando AB, CD sono la diagonale e il lato di un quadrato, cfr. cap.I).



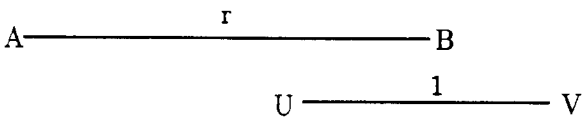
Viceversa, dato un segmento AB e un numero reale positivo r si può considerare il segmento $CD = rAB$.

Fissiamo una volta per tutte un certo segmento UV che chiameremo **unità di misura** (delle lunghezze). Se per il segmento AB risulta $AB = rUV$ diremo che (con riferimento a quell'unità di misura) *il segmento AB ha lunghezza r*

ovvero *r è la misura del segmento AB.*

Naturalmente due segmenti congruenti hanno la stessa misura, e viceversa.

Se r, s sono le misure dei segmenti AB, CD allora risulta $AB = \frac{r}{s} CD$.



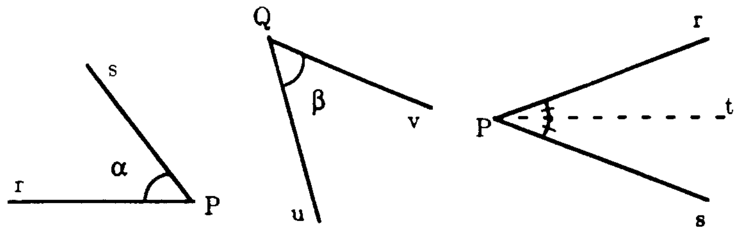
Per misurare (la lunghezza di) un segmento AB disegnato sul quaderno, un'unità di misura comoda è il **centimetro**. Il **righello graduato** (o *centimetrato*, cfr. cap.I) serve appunto a compiere—con una certa approssimazione—questa misura. Se l'unità di misura è il centimetro, si scriverà qualche volta $AB = 5$ cm per indicare che 5 cm è la lunghezza del segmento AB.

Dati due punti A, B, la lunghezza del segmento AB si chiama anche la **distanza** tra A e B (oppure *da A a B*, oppure *da B a A*). La distanza tra due punti dipende dunque dalla scelta dell'unità di misura per le lunghezze.

Dati due angoli $\alpha = r\widehat{P}s$, $\beta = u\widehat{Q}v$ si dirà che essi hanno la stessa **ampiezza** se essi sono **sovrapponibili** (= **congruenti**), cioè se un opportuno movimento rigido li sovrappone. In tal caso, anche qui impropriamente, si usa scrivere $\alpha = \beta$ e dire che i due angoli sono **eguali**. Per esempio, si usa dire: due angoli opposti al vertice (cfr. §1) sono eguali. (Si osservi che non richiediamo solo che si sovrappongano il vertice e il lati, ma anche i punti interni all'angolo, altrimenti risulterebbero eguali l'angolo concavo e quello convesso che hanno gli stessi lati).

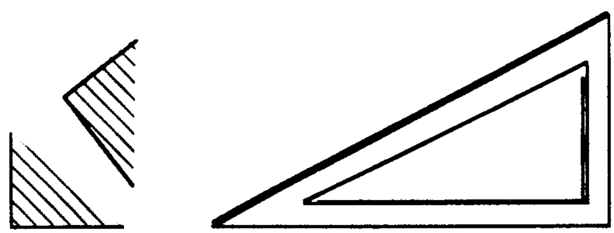
Un angolo $\alpha = r\widehat{P}s$ si dirà minore (o meglio *di minore ampiezza*) dell'angolo $\beta = u\widehat{Q}v$ se c'è un movimento rigido che porta il primo angolo in un angolo $r'\widehat{Q}s'$ contenuto nel secondo.

Si scriverà allora $\alpha < \beta$ oppure $\beta > \alpha$. Per esempio, gli angoli minori di un angolo piatto sono angoli convessi.



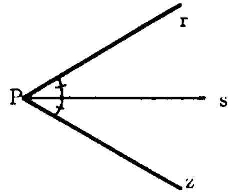
Per introdurre la *misura per gli angoli* incominciamo anche qui con la nozione di **bisettrice** dell'angolo $r\widehat{P}s$; essa è quella semiretta Pt interna all'angolo $r\widehat{P}s$ per cui risulta $r\widehat{P}t = t\widehat{P}s$. Diremo allora che $r\widehat{P}t$ è la **metà** di $r\widehat{P}s$ e scriveremo $r\widehat{P}s = 2r\widehat{P}t$. Per esempio, un angolo si chiama *retto* se è la metà di un angolo piatto (ricordiamo che l'angolo $r\widehat{P}t$ è piatto se Pr, Pt sono semirette opposte).

Per disegnare un angolo retto, si usa la **squadra** (o **squadretta**). (Sono angoli retti quelli formati dai bordi dei normali fogli di carta, ecc.)



angoli retti squadretta

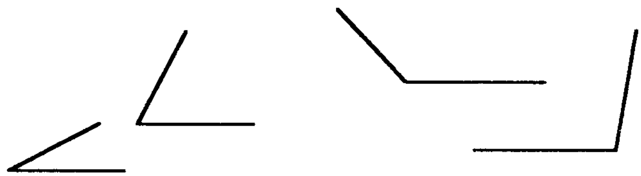
Per *raddoppiare* un angolo convesso $\alpha = r\widehat{P}s$ cerchiamo una semiretta Pz tale che $s\widehat{P}z = r\widehat{P}s$; allora 2α è, per definizione, quell'angolo $r\widehat{P}z$ che contiene al suo interno la semiretta Ps.



Per esempio, raddoppiando un angolo retto si ottiene un angolo **piatto**.

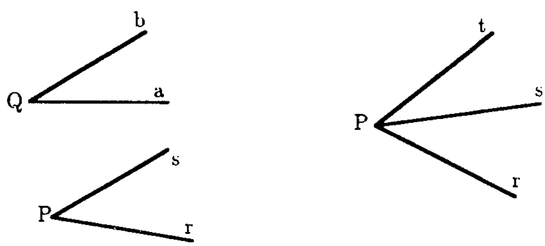
Un angolo si chiama **acuto** se è minore di un angolo retto.

Un angolo convesso si chiama **ottuso** se è maggiore di un angolo retto.



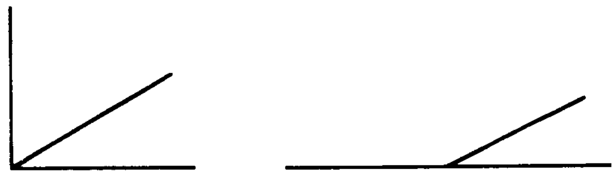
angoli acuti angoli ottusi

Più in generale, due angoli convessi $\alpha = r\widehat{P}s$, $\beta = a\widehat{Q}b$ si possono *sommare* procedendo così: si *sposta* (con un movimento rigido) uno degli angoli in modo che risulti consecutivo all'altro e si considera la loro unione; cioè si considera la semiretta t tale che $a\widehat{Q}b = t\widehat{P}s$ e i due angoli stanno da parti opposte di s; allora la somma è $\alpha + \beta = r\widehat{P}t$. Questa somma si può fare anche con un angolo concavo, purché mettendo i due angoli l'uno accanto all'altro (si dice qualche volta: *giustapponendo* i due angoli) non si copra tutto il piano (questa restrizione si potrà togliere – cfr. il §6 – quando introdurremo un altro tipo di angoli; si potranno considerare anche angoli maggiori di un giro).



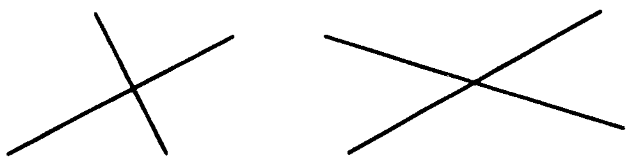
Due angoli si dicono **complementari** se la loro somma è un angolo retto.

Due angoli si dicono **supplementari** se la loro somma è un angolo piatto.



angoli complementari   angoli supplementari

Per esempio, due rette che si incontrano in un punto formano quattro angoli: due di questi quattro angoli sono eguali (se opposti al vertice) oppure supplementari (se adiacenti). Se le due rette formano quattro angoli eguali (e dunque quattro angoli retti) allora le rette si dicono **perpendicolari** oppure **ortogonali** o anche **normali**.



due rette perpendicolari   due rette non perpendicolari

Come per i segmenti, la possibilità di dividere un angolo in n parti eguali oppure di considerare un angolo che ha ampiezza m volte quello di partenza, suggerisce il modo di moltiplicare un angolo per un numero razionale positivo $\frac{m}{n}$, possibilità che poi si estende ai numeri reali.

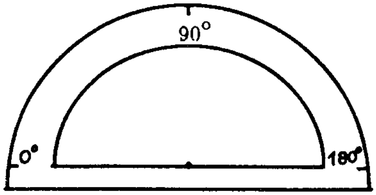
Per misurare le ampiezze degli angoli si usano i **gradi**, per i quali si adopera il simbolo °. Precisamente

l'ampiezza di un angolo **giro** è 360° (leggi: 360 *gradi*);

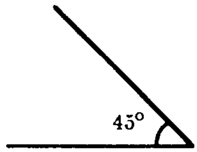
l'ampiezza di un angolo **piatto** è 180°;

l'ampiezza di un angolo **retto** è 90°.

Come i segmenti si misurano con il righello graduato, così la misura pratica (approssimata) di un angolo si effettua con il **goniometro**, che è un semicerchio (spesso di materiale trasparente) il cui bordo circolare è stato appunto ***graduato***, cioè vi sono segnati i gradi da 0 a 180.



goniometro



angolo di 45°

I matematici usano più spesso misurare gli angoli in **radianti**, secondo le seguenti equivalenze:

$$360° = 2\pi \text{ radianti} \qquad 180° = \pi \text{ radianti} \qquad 90° = \frac{1}{2}\pi \text{ radianti} \qquad \text{ecc.}$$

In queste equivalenze, di cui daremo una spiegazione nel successivo §8, π è il numero introdotto nel cap. I §9.

Si scrive anche qualche volta $A\widehat{B}C = 45°$ per indicare che 45° è l'ampiezza dell'angolo $A\widehat{B}C$.

ESERCIZI

In tutti i seguenti esercizi si useranno il righello graduato e il goniometro; in alternativa, si realizzeranno i movimenti rigidi con i fogli trasparenti.

1) Si disegnino tre punti A, B, C. Si disegni poi il segmento AB. Si scelga un punto D in modo che AB, CD siano congruenti.

2) Si disegnino quattro segmenti che a due a due sono congruenti ma non paralleli.

3) Sia assegnato il segmento AB. Si disegnino segmenti di lunghezza $2AB$, $3AB$, $\frac{1}{2}AB$, $\frac{1}{4}AB$, $\frac{3}{4}AB$.

4) Si disegni un triangolo in cui un lato è il doppio di un altro lato.

5) Si misuri, in centimetri, il lato (bordo) più lungo AB di una pagina di questo libro; si tracci un segmento di lunghezza $\frac{1}{10}AB$.

6) Si misurino i due bordi di questa pagina e se ne valuti il rapporto. Si ripeta la stessa cosa con un foglio di giornale e si confrontino i rapporti.

7) Sia assegnato un angolo $r\widehat{P}s$ e un punto Q. Si disegni un angolo $a\widehat{Q}b$ congruente a $r\widehat{P}s$.

8) Sia assegnata la semiretta Pr. Si disegni una semiretta Ps in modo che l'angolo $r\widehat{P}s$ sia retto. C'è un solo modo di scegliere s?

9) Guardate un orologio che segna le 3. Qual è l'ampiezza dell'angolo (convesso) che ha per lati le lancette? Ripetete l'esercizio per un orologio che segna le 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, ...

10) Si disegnino angoli di ampiezza $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $120°$, $135°$, $270°$.

11) Si disegni un triangolo ABC in cui AB è 4 cm, BC è $3,2$ cm, $B\widehat{A}C$ è $48°$.

12) Si disegni un triangolo ABC in cui AB è 5 cm, $B\widehat{A}C$ è $45°$, $A\widehat{C}B$ è $45°$. Che si può dire dei lati di questo triangolo?

13) Come nell'esercizio precedente, ma con $AC = 3,5$ cm, $B\widehat{A}C = 30°$, $A\widehat{C}B = 60°$.

14) Dati un punto P e una retta r, c'è un'unica retta n che passa per P ed è perpendicolare a r. Si usi la squadra per tracciare n.

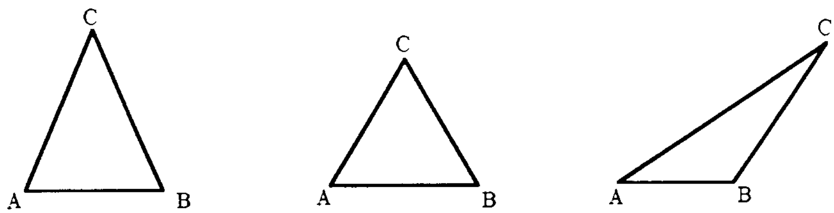
15) Dati un punto P e una retta r, c'è un'unica retta p che passa per P ed è

parallela a r (per tracciarla, si usi l'esercizio precedente; allora p è la retta per P perpendicolare a n).

16) Perché due angoli opposti al vertice sono eguali?

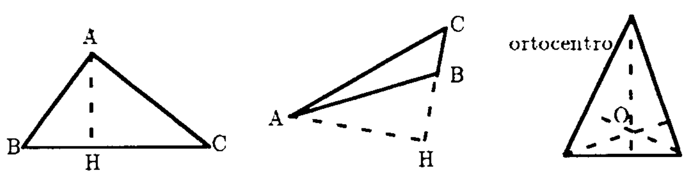
§ 3. Triangoli

Nelle figure seguenti sono rappresentati alcuni tipi di triangoli:



isoscele	**equilatero**	**scaleno**
due lati sono uguali	*i tre lati sono eguali*	*i tre lati sono a 2 a 2 diversi*

In un triangolo isoscele sono eguali anche due degli angoli. In un triangolo equilatero i tre angoli sono eguali. Diversamente dal linguaggio corrente, in matematica con la frase *due lati sono eguali* si intende che almeno due dei lati sono *eguali*; perciò è isoscele anche un tiangolo equilatero.

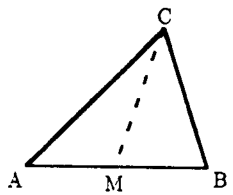


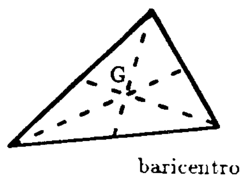
Nei triangoli qui disegnati sono stati tratteggiati alcuni segmenti. In tutti i triangoli questi segmenti sono stati tracciati come segue.

Il segmento AH forma angoli retti con la retta che contiene il segmento BC: esso si chiama l'**altezza** del triangolo *relativa al* vertice A (oppure *della* **base** BC). In generale, un triangolo ha dunque tre diverse basi e tre diverse altezze, relative ai tre vertici. Come gli esempi mostrano, il **piede** H dell'altezza può cadere fuori della base.

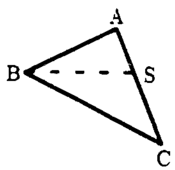
Osservando le figure si nota che le tre altezze di un triangolo (o meglio, le tre rette che contengono questi segmenti) si incontrano in un punto, detto **ortocentro**.

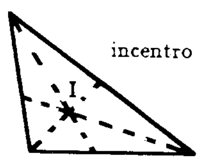
Il segmento CM divide il lato AB in due parti eguali (M è il punto medio di AB) e si chiama la **mediana** del triangolo *relativa al vertice* C (*o del lato* AB). Le tre mediane si incontrano in un punto, detto **baricentro**.



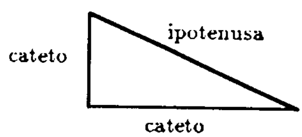


Il segmento BS (o meglio, la semiretta che contiene BS) divide l'angolo $A\widehat{B}C$ in due parti eguali e si chiama la **bisettrice** del triangolo *relativa al vertice* B (oppure *dell'angolo* $A\widehat{B}C$). Le tre bisettrici si incontrano in un punto, detto **incentro**.





In un triangolo isoscele ABC (con $AC = BC$), l'altezza relativa al vertice C è anche mediana e bisettrice; in un triangolo equilatero ogni altezza è anche una mediana e una bisettrice, dunque i tre centri *concidono*.



Il triangolo della figura si dice **rettangolo**, perchè uno dei suoi angoli è retto. I lati dell'angolo retto si chiamano i **cateti** del triangolo; il terzo lato si chiama l'**ipotenusa**.

In ogni triangolo la somma degli angoli (interni) è un angolo piatto (cioè misura 180°). (Possiamo convincerci di questa importante proprietà generale usando il goniometro su tutti i triangoli disegnati finora [2]).

Per stabilire se due triangoli sono congruenti (anche qui si dirà spesso, ma con improprietà: triangoli **eguali**) sono molto utili le seguenti proposizioni (che non vogliamo qui dimostrare) che prendono il nome di *criteri di uguaglianza per i triangoli*:

1) se due triangoli hanno eguali *due lati e l'angolo compreso*, allora sono eguali;
2) se due triangoli hanno eguali *due angoli e il lato tra essi compreso*, allora sono eguali;
3) se due triangoli hanno eguali *i tre lati*, allora sono eguali.

Come si vede da esempi, due triangoli che hanno i tre angoli eguali possono

---

[2] Qui come già abbiamo fatto all'inizio del § e altre volte in seguito ci riferiremo ai disegni del testo per scoprire e mettere in evidenza alcune proprietà delle figure geometriche. A questo proposito dobbiamo tener presente che

— il disegno è sempre approssimato;

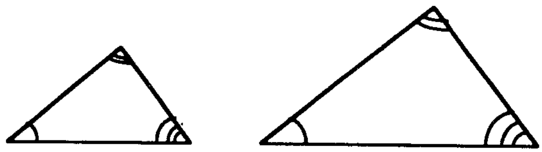
— il disegno rappresenta un caso particolare.

Trattiamo invece proprietà che hanno una certa **generalità e precisione**. Si consideri, per esempio, la frase

In un triangolo le tre mediane hanno un punto in comune.

Utilizzando un disegno e il righello, possiamo soltanto verificare che in quel particolare triangolo intersecando a due a due le mediane si ottengono tre punti molto vicini, cioè all'incirca coincidenti. Al disegno spetta pertanto il solo compito di stimolare l'intuizione di alcune proprietà, che dovrebbero poi essere verificate attraverso una **dimostrazione**. Nel §7 si spiegherà che cosa si intende, in matematica, con questo termine. È un paragrafo che si può saltare. Infatti in questo testo si è deciso —per semplicità— di rinunciare quasi sempre alle dimostrazioni, riservandole eventualmente a uno studio successivo.

non essere eguali:



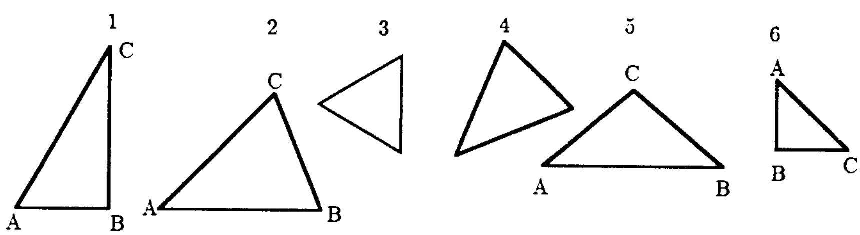
Le lunghezze dei lati di un qualsiasi triangolo soddisfano alla seguente disuguaglianza (detta appunto **disuguaglianza triangolare**):
la somma delle lunghezze di due lati è maggiore della lunghezza del terzo lato:

$$|AB| + |BC| > |AC|.$$

(In un triangolo ABC i tre vertici A, B, C non sono mai allineati: se invece A, B, C stanno sulla stessa retta il triangolo si riduce ad un segmento. Se gli estremi di questo segmento sono A e C, e se B appartiene al segmento AC vale l'uguaglianza $|AB| + |BC| = |AC|$).

ESERCIZI

1) Dopo aver osservato i triangoli qui disegnati



completatate con dei SÌ oppure NO la seguente tabella

Il triangolo	1	2	3	4	5	6
è equilatero	NO					
è isoscele	NO					
è scaleno						
è rettangolo						

2) Nei triangoli $1, 2, 5$ disegnate le altezze relative ai vertici B e C.

3) Nel triangolo 2 qual è la bisettrice dell'angolo $B\widehat{A}C$? e la mediana del lato BC? Misuratene i lati.

4) Misurate i lati del triangolo 6. Che cosa si può dire dell'altezza relativa a B e della mediana di AC?

5) Può un triangolo essere contemporaneamente

equilatero e isoscele?

equilatero e rettangolo?

isoscele e rettangolo?

scaleno e rettangolo?

6) Può un triangolo avere

tre angoli diversi a due a due?

due angoli retti?

un angolo retto e uno ottuso?

tre angoli acuti?

7) È vero che in un triangolo rettangolo i due angoli che non sono retti sono complementari?

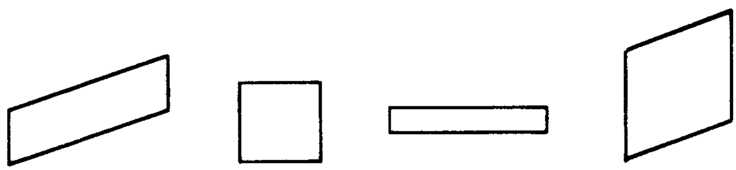
8) Qual è la misura di un angolo in un triangolo equilatero?

9) Usando carta quadrettata, righello e squadra, disegnate
un triangolo rettangolo i cui cateti misurino $3,5$ cm e $5,2$ cm;
un triangolo isoscele che abbia la base di $4,4$ cm e la relativa altezza di 6 cm;
un triangolo isoscele e rettangolo con un cateto di 4 cm;
un triangolo isoscele e rettangolo con l'ipotenusa di 4 cm.

§ 4. Quadrangoli

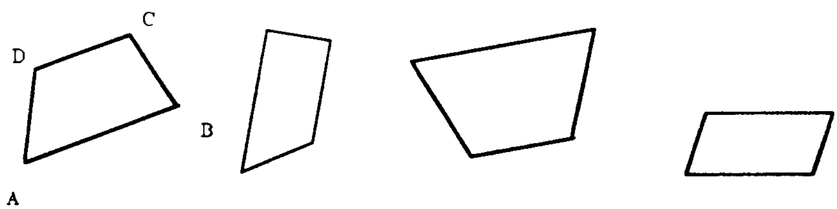
Nelle seguenti figure sono rappresentati alcuni particolari tipi di quadrangoli.

Parallelogrammi:



parallelogramma quadrato rettangolo rombo

Trapezi:



trapezio rettangolo trapezio isoscele parallelogramma

I **parallelogrammi** sono quei quadrangoli che hanno i lati *opposti* eguali e paralleli; anche gli angoli *opposti* sono eguali.

I **rettangoli** sono quei parallelogrammi che hanno tutti gli angoli retti.

I **rombi** sono quei parallelogrammi che hanno tutti i lati eguali.

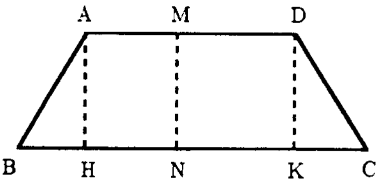
I **quadrati** sono quei rettangoli che hanno tutti i lati eguali.

I **trapezi** sono quei quadrilateri $ABCD$ che hanno due lati AB, CD opposti e paralleli. Se i due angoli $D\widehat{A}B$, $A\widehat{B}C$ sono eguali, il trapezio si dice **isoscele**; se due angoli $C\widehat{D}A$, $D\widehat{A}B$ sono retti, il trapezio si dice **rettangolo**.

Completando la seguente tabella rispondere a domande del tipo: ogni quadrato è un rombo? ogni parallelogrammo è un trapezio? ecc.

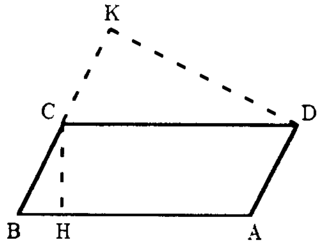
ogni... ↓ è anche ... →	quadrato	parallelogrammo	rettangolo	rombo	trapezio
quadrato	sì	sì	...	...	...
parallelogrammo	no	...	...	...	...
rettangolo	...	...	...	...	...
rombo	...	...	...	...	...
trapezio	...	...	...	...	...

In un trapezio, i due lati paralleli si chiamano talvolta **basi** (base maggiore, base minore). **Altezza** del trapezio è un segmento che ha estremi sulle due basi e ad esse è perpendicolare. Per esempio in figura



l'altezza del trapezio $ABCD$ è data dal segmento AH; ma anche dal segmento DK o dal segmento MN: tutti questi segmenti sono tra loro uguali.

Anche per un parallelogramma $ABCD$ (cfr. la figura) si parla talvolta di base AB e altezza CH; per lo stesso parallelogramma si può considerare anche base BC e la corrispondente altezza DK.



Una certa importanza, nei quadrilateri, hanno le **diagonali**, cioè i segmenti che hanno per estremi due vertici non consecutivi.

Facendo uso di righello e goniometro si possono verificare nelle figure altre proprietà, per esempio:

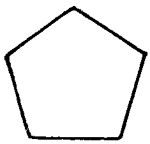
in un parallelogramma le diagonali si incontrano in un punto che le divide a metà (punto medio);

in un rettangolo le diagonali sono eguali;

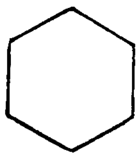
in un rombo le diagonali sono perpendicolari.

Nel presente paragrafo abbiamo visto che il quadrato ha, come il triangolo equilatero (cfr. §3), la proprietà di avere tutti gli angoli uguali.

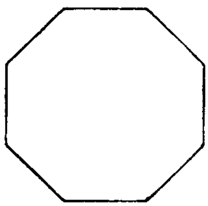
In generale, diremo che un poligono è **regolare** se ha tutti i lati e tutti gli angoli uguali; i triangoli equilateri ed i quadrati sono quindi poligoni regolari, così come lo sono i poligoni illustrati nelle seguenti figure.



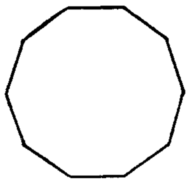
pentagono regolare



esagono regolare



ottagono regolare

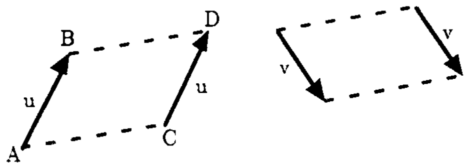


decagono regolare

§ 5. Vettori

La nozione di **vettore** è molto utile in geometria e ha importanti applicazioni nello studio di alcune grandezze fisiche, come gli spostamenti, le velocità, le accelerazioni, le forze ecc.

Un segmento AB si dice **orientato** se su di esso si è scelto un **verso** di percorrenza (si dice anche: *un orientamento*), cioè se si è precisato che A *è il primo* estremo (detto anche **punto iniziale** o **origine**) e B è il *secondo* estremo (o **punto finale** o semplicemente **estremo**). Parlando di segmenti orientati dovremo dunque distinguere AB da BA. Nelle figure un segmento orientato si rappresenta con una *freccia*:



In molti problemi, di un segmento orientato AB interessano soltanto la direzione (cfr. §1), la lunghezza e il verso ma non la sua origine. In questo caso si parla di **vettore** e si scrive $\overrightarrow{AB}$. Per esempio i naviganti, parlando del vento in una certa zona del mare, lo descrivono con frasi del tipo *vento da sud-ovest forza sette*. Queste informazioni si possono rappresentare sulla carta con una freccia che–purché si resti in quella zona di mare–si può far iniziare indifferentemente in un punto o nell'altro della carta. Un simbolo come $\overrightarrow{AB}$ indica dunque il segmento orientato AB e ogni altro che abbia la direzione, il verso e la lunghezza di AB; uno qualsiasi di questi segmenti *rappresenta* lo stesso vettore.

In altre parole, due vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ si diranno *eguali* (e si scriverà $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$) se hanno eguali

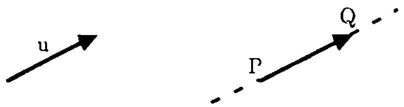
la *lunghezza*, la *direzione* (cioè sono paralleli), il *verso*.

Come è chiaro dalle figure, risulta $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ se e solo se i punti $ABCD$ (in quest'ordine) sono i vertici di un parallelogrammo.

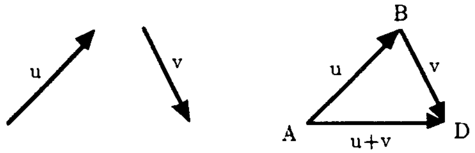
Spesso un vettore si indica semplicemente con una lettera minuscola soprassegnata come $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$, ecc.; in altri casi si usano lettere in grassetto, come **a**, **b**, **u**, ecc. Nelle figure un vettore si descrive con una *freccia*, corrispondente a un segmento orientato (uno dei tanti) che rappresenta quel vettore.

Se $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, la lunghezza di AB si chiama **modulo** (o *valore assoluto*) di **u** e si indica spesso con $|\mathbf{u}|$.

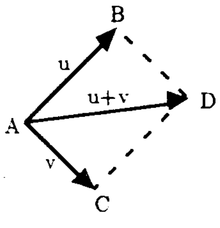
Assegnati un certo segmento orientato AB e un punto P, c'è un unico modo di scegliere il punto Q in modo che $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AB}$: per trovare Q si deve considerare la retta passante per P e parallela a $\overrightarrow{AB}$ e su di essa scegliere Q, in modo che $|PQ| = |AB|$ e che Q stia dalla parte indicata dalla freccia, come nella figura.



Due vettori **u**, **v** si possono sommare nel seguente modo: se $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, *si applica* **v** al secondo estremo di **u**, cioè si cerca il punto D tale che $\mathbf{v} = \overrightarrow{BD}$. Allora la somma dei due vettori è, per definizione, il vettore $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$.

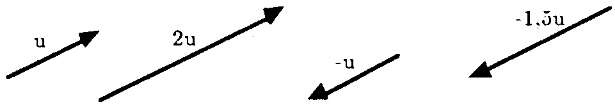


Un modo equivalente di procedere è il seguente: *si applicano* entrambi i vettori al medesimo punto A, cioè si scelgono i punti B, C in modo che sia $\overrightarrow{AB} = \mathbf{u}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{v}$. Allora il quarto vertice D del parallelogrammo $ABDC$ (nell'ordine, come nella figura) individua il vettore $\mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{AD}$.



Se $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$, l'opposto di $\mathbf{u}$ è $-\mathbf{u} = \overrightarrow{BA}$. Sommando un vettore con il suo opposto si ottiene il vettore nullo $\mathbf{0} = \mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA}$. Il vettore nullo ha tutte le direzioni, nel senso che è parallelo ad ogni altro vettore. Si introduce anche la **differenza** di vettori scrivendo $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ invece di $\mathbf{u} + (-\mathbf{v})$.

Il vettore $\mathbf{u}$ si può moltiplicare per il numero reale r nel modo seguente. Se $r > 0$, allora $r\mathbf{u}$ è un vettore di lunghezza $r|\mathbf{u}|$ che ha la stessa direzione e lo stesso verso di $\mathbf{u}$. Se $r < 0$, il vettore prodotto ha verso opposto, cioè si definisce ponendo $r\mathbf{u} = -(-r)\mathbf{u}$.



ESERCIZI

1) Dati tre punti A, B, C si trovi il punto D in modo che $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

2) Dati i punti A, B, C, D si disegnino i segmenti orientati (cioè le frecce) che rappresentano i vettori $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$.

3) Dati tre punti A, B, C si verifichi che $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \mathbf{0}$.

4) Se $ABC \ldots VZ$ è una spezzata, si verifichi che risulta

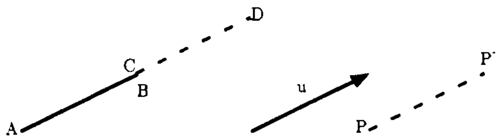
$$\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \ldots + \overrightarrow{VZ}.$$

§ 6. Traslazioni, rotazioni, simmetrie

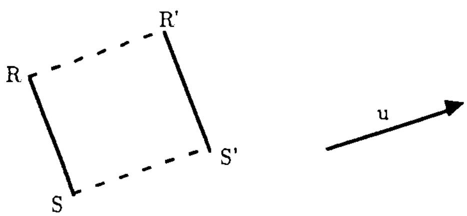
Riprendiamo la nozione di isometria o spostamento rigido, per individuarne alcuni tipi particolari. Ricordiamo che, per introdurre questo concetto, abbiamo usato dei fogli di carta che scorrono uno sopra l'altro (o si ribaltano) trasformando una figura geometrica in un'altra (cioè spostandola, girandola, ribaltandola, ecc.).

1) TRASLAZIONI.

Fissiamo un segmento orientato AB. Ad ogni punto P associamo quel punto P' (cfr. §5) per il quale risulta $\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{AB}$. Otteniamo così uno spostamento rigido che si chiama **traslazione** di un vettore $\mathbf{u} = \overrightarrow{AB}$.

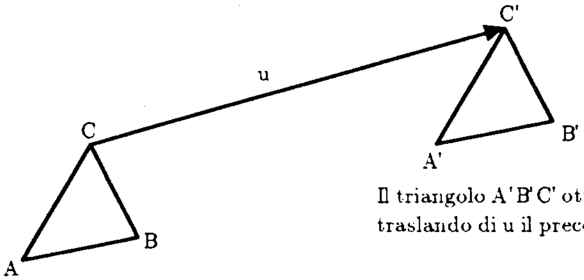


Con la tecnica dei due fogli di carta sovrapposti (e appoggiati al vetro delle finestra per maggiore trasparenza) la traslazione (il cui vettore è) $\mathbf{u}$ si può realizzare nel seguente modo: disegnamo sul foglio inferiore il segmento orientato AB che rappresenta il vettore $\mathbf{u}$, poi sul foglio superiore un segmento CD sovrapposto ad AB. Facciamo ora strisciare un foglio sull'altro, muovendo quello superiore *nella direzione, nel verso e per la lunghezza di* $\mathbf{u}$ cioè in modo che i due segmenti AB, CD restino sempre paralleli, finché C non sia sovrapposto a B.



Qual è l'effetto di una traslazione su un (qualunque) segmento RS?

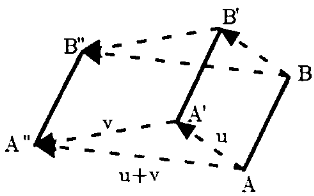
L'esperienza dei fogli trasparenti ci suggerisce che tutti i segmenti si spostano *restando paralleli a se stessi.* Più precisamente: se R si sposta in R' e S si sposta in S', poiché – per come abbiamo definito la traslazione – risulta $\overrightarrow{RR'} = \overrightarrow{SS'} = \mathbf{u}$, si osserva che si è ottenuto un parallelogramma $RR'S'S$. Allora anche RS e $R'S'$ sono paralleli, e anzi rappresentano lo stesso vettore: $\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{R'S'}$. Concludiamo che una traslazione trasforma ogni segmento orientato in un altro che ha non solo la stessa lunghezza (ciò che accade con tutti gli spostamenti rigidi) ma ha anche la stessa direzione e lo stesso verso. In particolare, ogni retta viene trasformata in un'altra retta parallela alla prima; diremo dunque che in ogni traslazione tutte le *direzioni si conservano.*



Il triangolo A'B'C' ottenuto traslando di u il precedente

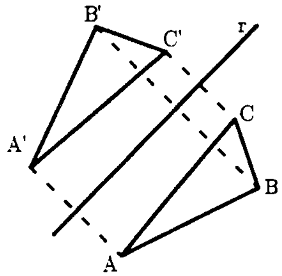
Un triangolo ABC

Due traslazioni $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si possono *comporre*, cioè eseguire una dopo l'altra. Il risultato complessivo è ancora una traslazione, il cui vettore è la somma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, come si vede illustrato nella figura.



2) SIMMETRIE.

Sui soliti due fogli di carta disegnamo una retta r e, per esempio, un triangolo ABC. Per descrivere la **simmetria rispetto alla retta** r (oppure **simmetria assiale**; la retta r si chiama l'*asse* della simmetria), ***pieghiamo*** il foglio superiore lungo la retta r, cioè in modo che r sia la linea della piegatura.



Sfruttando, come sempre, la trasparenza, osserviamo che il nuovo triangolo $A'B'C'$ (*trasformato* di ABC) è tale che

i segmenti AA', BB', CC' sono perpendicolari alla retta r e la incontrano nel loro punto medio.

Diremo che $A'B'C'$ è il triangolo *simmetrico* di ABC *rispetto alla retta* r. Senza piegare la carta, possiamo ottenere la stessa simmetria assiale ribaltando il foglio superiore (cioè facendo in modo che la faccia superiore del foglio diventi quella inferiore) avendo cura che ogni punto dell'asse r vada a sovrapporsi a se stesso. Perciò una tale simmetria si chiama anche **ribaltamento** attorno alla retta r.

Le simmetrie assiali rispetto a r sono dunque quelle congruenze che *tengono fissi* i punti di r e trasformano ogni punto P del piano in un punto P' tale che r sia l'**asse** del segmento PP' (cioè la retta perpendicolare a PP' che lo divide a metà).

P' si chiama *il (punto) simmetrico di P rispetto alla retta r.*

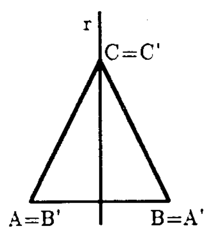
Due simmetrie si possono *comporre*, cioè eseguire una dopo l'altra. Se una simmetria si compone con se stessa, si ritorna alla figura originaria; infatti, se si considera il simmetrico P'' del simmetrico P' del punto P (rispetto alla stessa retta), si riottiene il punto di partenza: $P'' = P$.

Se invece si compongono due simmetrie di assi diversi si ottiene una rotazione o una traslazione, come vedremo tra poco.

3) FIGURE SIMMETRICHE.

Una figura si dice **simmetrica** (rispetto all'asse r) se la figura rimane *inalterata* (oppure *invariante*) per effetto di quella simmetria. La retta r si chiama **asse di simmetria** per quella figura. Per esempio un triangolo isoscele ABC (in cui $AC = BC$) è simmetrico rispetto all'asse di AB. Infatti se r è la retta per C perpendicolare ad AB (quella dell'altezza, mediana e bisettrice per C), ribaltando rispetto ad r si ottiene $A' = B$, $B' = A$, $C' = C$ e dunque i vertici, i lati, gli angoli del triangolo vengono scambiati tra loro. La figura $B'A'C'$ (cioè il triangolo ABC) è dunque indistinguibile da quella originaria: quel triangolo è simmetrico rispetto a r, cioè la retta r è un asse di simmetria per quel triangolo.

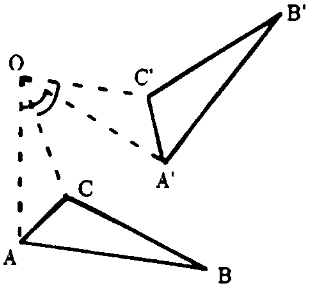
Per un triangolo equilatero, vi sono tre assi di simmetria. Per un quadrato, gli assi di simmetria sono quattro ecc.(cfr. gli esercizi).



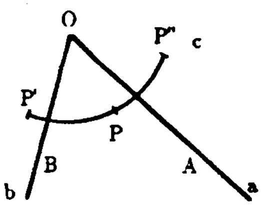
4) ROTAZIONI.

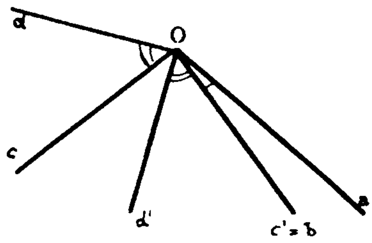
Riprendiamo i due fogli trasparenti, su cui sia disegnato, per esempio, il triangolo ABC. Fissiamo un punto O e, come se un chiodo fosse piantato in O, facciamo *ruotare* un foglio sull'altro. Consideriamo cioè una spostamento rigido che lascia fermo il punto $O = O'$. Il triangolo $A'B'C'$ così ottenuto soddisfa alla seguente proprietà:

sono eguali gli angoli $A\hat{O}A' = B\hat{O}B' = C\hat{O}C' = \alpha$.



Si dice anche che $A'B'C'$ è stato ottenuto ***ruotando*** il triangolo ABC di un *angolo orientato* α attorno al *centro* O. La nozione di angolo orientato è un po' diversa da quella di ***angolo*** che abbiamo introdotto nel §2. Infatti, introdotte le semirette a, b che hanno origine in O e passano rispettivamente per A, B possiamo denotare l'angolo orientato con una coppia di semirette e scrivere $a\hat{O}b$, ecc. **Dobbiamo distinguere l'angolo orientato $a\hat{O}b$ dall'angolo orientato $b\hat{O}a$** (cioè distinguere $A\hat{O}B$ da $B\hat{O}A$). Infatti la rotazione che trasforma la semiretta Oa nella semiretta Ob porta il punto P della figura nel punto P'. Diversa è la rotazione che trasforma la semiretta Ob nella semiretta Oa (che porta P in P'').





Una rotazione è dunque identificata da un punto O (che resta fisso) e da una coppia *ordinata* di semirette di origine O, cioè appunto da un angolo orientato.

In conclusione, una rotazione di un angolo orientato α e di centro O è una congruenza che fissa il punto O e manda il punto P in quel punto P' per cui risulta $P\hat{O}P' = \alpha$ (si osserva cioè che l'angolo orientato è lo stesso per ogni scelta del punto P).

Componendo due rotazioni di angoli orientati α e β che abbiano lo stesso centro O si ottiene ancora una rotazione attorno ad O; l'angolo orientato di questa rotazione si chiama la somma $\alpha + \beta$. Dunque se $\alpha = a\widehat{O}b$, $\beta = c\widehat{O}d$ la loro somma è $\alpha + \beta = a\widehat{O}d'$ in cui la semiretta d' si ottiene come segue: si considera una rotazione che trasforma il lato c nel lato $b = c'$; allora d è trasformato in d'. Per misurare gli angoli orientati si usano di solito i gradi o i radianti, da 0° (rotazione nulla: tutto resta fermo) a 360° ovvero da 0 a 2π radianti (escluso quest'ultimo valore).

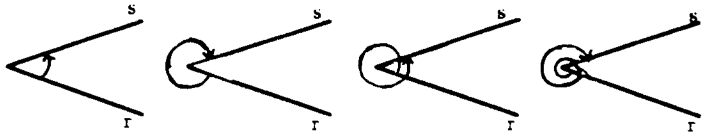
Attenzione: a differenza di quanto accadeva per gli angoli introdotti nel §2, due angoli orientati si possono sempre sommare, ma si presentano nuove circostanze; per esempio, componendo–una dopo l'altra–due rotazioni si può ritornare alla posizione originaria. Dunque può essere nulla la misura di $\alpha + \beta$ anche se non lo sono quella di α né quella di β.

Componendo due diverse simmetrie di assi r, s non paralleli, si ottiene una rotazione attorno al punto O, intersezione delle due rette.

N.B. Una rotazione di un angolo piatto di centro O si chiama anche una **simmetria centrale rispetto al punto O.** Una tale congruenza non è una simmetria nel senso precedente (nessuna retta resta fissa): per ogni punto P risulta che O è il punto medio del segmento PP'.

Partendo dalla nozione di *rotazione*, possiamo introdurre una nuova nozione di *angolo*, che per certi scopi occorre conoscere.

Sopra i soliti due fogli trasparenti consideriamo due semirette Or, Os con la stessa origine O. Vogliamo tener ferma–nel foglio inferiore–la semiretta Os, e far ruotare il foglio superiore attorno al punto O finché Or si sovrapponga a Os. Abbiamo allora varie possibilità: col minimo sforzo possiamo far descrivere a Or l'angolo convesso $r\widehat{O}s$; ma possiamo anche scegliere l'altro verso di rotazione, e cioè far descrivere a Or un angolo concavo. Inoltre–pur compiendo fatica inutile–possiamo far compiere a Or un intero giro (in un verso o nell'altro; o anche più giri) e poi continuare fino alla sovrapposizione.



Finora la nozione di rotazione da noi considerata si è basata sulle. . .fotografie delle figure iniziali e sulle loro immagini finali, senza badare al modo in cui si passava dall'una all'altra.

In certi casi è invece opportuno considerare (non solo il risultato finale, ma anche) i vari modi per realizzarlo, cioè distinguere vari movimenti che si possono effettivamente compiere tenendo fermo il centro O in modo che Or si sovrapponga ad Os. A questo scopo, immaginiamo che il nostro foglio sia il terreno, e pensiamo a un uomo in piedi su questo terreno, con i piedi in O e la testa dalla nostra parte (cfr. il disegno). Questo osservatore è in grado di distinguere le rotazioni

in verso *orario*	cioè quelle in cui Or si sposta nello stesso senso delle lancette dell'orologio;
in verso *antiorario*	cioè quelle in cui Or si sposta nel senso inverso alle lancette dell'orologio.

(La parola *orario* si riferisce al fatto che, se il terreno fosse un grande quadrante di orologio, l'osservatore vedrebbe, col passar del tempo, avanzare le lancette in quel verso).

Per *misurare* questi nuovi angoli, che si chiamano **orientati e generalizzati**, oltre a scegliere l'unità di misura, per esempio il radiante, dobbiamo scegliere—una volta per tutte—uno dei due versi di rotazione sul piano (di solito si sceglie quello antiorario). Allora la misura dell'angolo orientato $r\widehat{O}s$ è

positiva	se la rotazione va nel verso prefissato
negativa	se la rotazione va nel verso opposto.

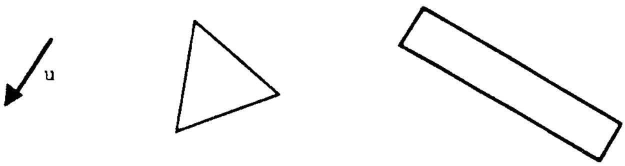
Si possono allora considerare angoli positivi e negativi (per esempio $-\frac{\pi}{3}, -\frac{5\pi}{4}$), minori o maggiori di un angolo giro (per esempio $3\pi, -5\pi, \frac{17\pi}{3}$), cioè rotazioni ottenute compiendo eventualmente più che un intero giro attorno a O, in un verso o nell'altro. Si ottengono così tanti angoli diversi (che hanno gli stessi lati Or, Os) di misura

$-4\pi + \alpha$	$-2\pi + \alpha$	α	$\alpha + 2\pi$	$\alpha + 4\pi$	$\dots$	in radianti
$-720° + \alpha$	$-360° + \alpha$	α	$\alpha + 360°$	$\alpha + 720°$	$\dots$	in gradi

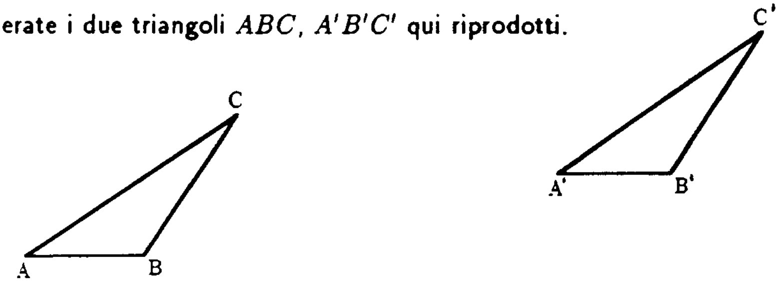
Se si usano queste misure generalizzate di angoli, si ottengono nuove possibilità, che risultano utili per lo sviluppo di altri capitoli della geometria (per es. la trigonometria).

ESERCIZI

1) Si disegnino le figure ottenute *traslando* del vettore **u** le figure geometriche qui riprodotte:

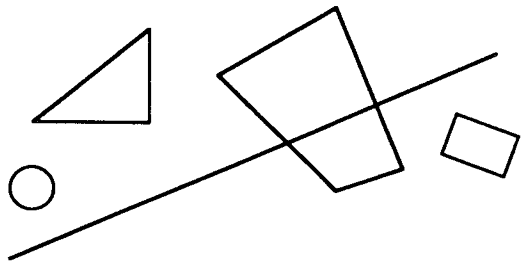


2) Considerate i due triangoli ABC, $A'B'C'$ qui riprodotti.

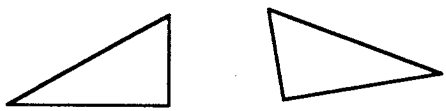


Disegnate il vettore **u** che produce la traslazione di ABC su $A'B'C'$. Disegnate il vettore **v** che produce la traslazione di $A'B'C'$ su ABC. Che relazione c'è tra i vettori **u** e **v**?

3) Disegnate le figure simmetriche di quelle qui riprodotte, rispetto all'asse r.



4) Considerate i seguenti triangoli



Determinate una retta rispetto alla quale i due triangoli sono simmetrici l'uno dell'altro. È unica questa retta? (cioè: può esserci un altro asse di simmetria che porta quei due triangoli uno sull'altro?). E perché?

5) Quali congruenze trasformano ogni retta r in una retta r' ad essa parallela?

6) Sia assegnata una retta r. Si determinino le congruenze per le quali la retta r' risulta parallela ad r. (Si cerchino opportune traslazioni, simmetrie e rotazioni).

7) Esistono assi di simmetria per un segmento? e per una retta?

8) Esistono assi di simmetria per un triangolo scaleno?

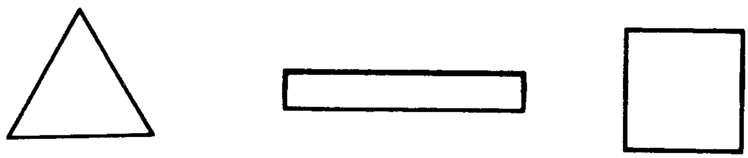
9) Quanti e quali sono gli assi di simmetria per un rettangolo? e per un quadrato? e per un parallelogrammo? e per un rombo?

10) Le seguenti figure geometriche sono invarianti rispetto ad opportune rotazioni. Si dica qual è il centro e l'angolo di queste rotazioni per

a) un triangolo equilatero

b) un rettangolo

c) un quadrato.



§ 7. Dimostrazioni

(questo § si può saltare senza pregiudicare la comprensione del seguito)

Dato un segmento AB del piano π, abbiamo già definito il suo **asse**, cioè la retta r che è perpendicolare al segmento nel suo punto medio. Se AB è disegnato sul foglio, si può trovare il suo punto medio M (con il righello graduato), poi tracciare la retta r (con la squadra). Scelto un qualunque punto P di r, possiamo misurare (sempre con il righello) le distanze $|PA|$ e $|PB|$ e accorgerci che sono eguali. Viceversa, partendo sempre dal segmento AB, possiamo cercare i punti P del piano che abbiano eguale distanza da A e da B: si trovano tutti i punti dell'asse ma nessun altro. Questo ci suggerisce la possibilità di descrivere l'asse del segmento AB dicendo che

un punto P del piano appartiene all'asse del segmento AB
se e soltanto se sono eguali le sue distanze da A e da B.

L'argomentazione precedente è di tipo *sperimentale*, nel senso che abbiamo utilizzato un particolare disegno e ci siamo accontentati di misure approssimate (cfr. la nota 2 nel §3).

Vogliamo ora invece aprire una parentesi per illustrare – a titolo di esempio – come si può produrre una **dimostrazione** di quella proposizione, che riguarderà non più un caso particolare ma una *proprietà generale.*

Un **teorema** è una frase di contenuto matematico (che si dice l'**enunciato** del teorema) che normalmente consiste di

una (o più di una) **ipotesi**	cioè una frase del tipo *se...*
una (o più di una) **tesi**	cioè una frase del tipo *allora...*

La **dimostrazione** del teorema è un *ragionamanto* (si dice anche: un'*argomentazione*) con la quale la tesi viene *dedotta* (cioè ottenuta come conseguenza logica) dall'ipotesi e da eventuali altre proprietà, che si sono già dimostrate in precedenza o che si accettano comunque per vere (queste ultime si dicono *assiomi* o *postulati*; vedi più avanti).

ESEMPIO 1: *Se un punto P appartiene all'asse di un segmento AB, allora le sue distanze dagli estremi sono uguali:* $|AP| = |BP|$.

IPOTESI: Il punto P appartiene all'asse del segmento di AB.

TESI: Risulta $|AP| = |BP|$.

DIMOSTRAZIONE: Sia M il punto medio del segmento AB. Consideriamo i due triangoli PMA e PMB e osserviamo che:

il lato PM è in comune (cioè lo stesso segmento PM è lato dell'uno e dell'altro);

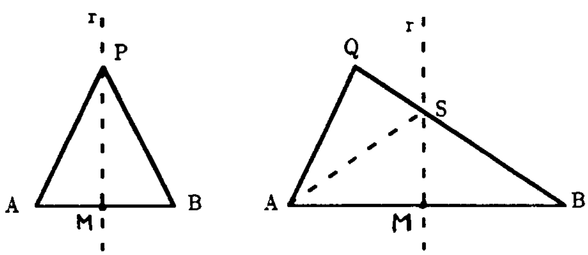
i lati AM, BM sono congruenti, perché M è il punto medio del segmento AB;

gli angoli $A\widehat{M}P$, $B\widehat{M}P$ sono eguali, perché P sta sull'asse e perciò PM è perpendicolare a AB.

Allora si può applicare il primo criterio di uguaglianza (cfr. §3) e concludere che i due triangoli AMP, BMP sono eguali (meglio: sovrapponibili); in particolare, sono allora sovrapponibili le due ipotenuse, cioè: $|AP| = |BP|$. **c.v.d.**

OSSERVAZIONI: 1) Nella dimostrazione, oltre all'ipotesi abbiamo utilizzato il primo criterio di uguaglianza, dandone per scontata la validità (In un testo di geometria di livello superiore questo criterio sarebbe stato dimostrato, al momento opportuno).

2) La sigla **c.v.d.** sta per la frase *come volevasi dimostrare* e indica la fine della dimostrazione.



ESEMPIO 2: *Se un punto P è equidistante dai due punti A, B allora P appartiene all'asse del segmento AB.*

IPOTESI: Per il punto P risulta $|AP| = |BP|$.

TESI: Il punto P appartiene all'asse di AB.

DIMOSTRAZIONE: Consideriamo un punto Q che non appartenga alla retta r, asse di AB; supponiamo, per esempio, che Q stia nel semipiano di origine r che contiene A. Poiché Q non sta sull'asse ($Q \neq S$), vale la disuguaglianza triangolare: $|QS| + |SA| > |QA|$; poichè S sta sull'asse di AB, risulta $|SA| = |SB|$, come si è visto nell'esempio 1.
Ne segue $|QB| = |QS| + |SB| = |QS| + |SA| > |QA|$. Dunque, ogni punto che non sta sull'asse ha distanze diverse da A e B; in altre parole, se P ha eguale distanza, P deve stare sull'asse. **c.v.d.**
Abbiamo supposto arbitrariamente che Q stesse nel semipiano di A; ma se Q fosse caduto nell'altro semipiano sarebbe bastato ripetere il ragionamento scambiando ogni volta A e B.

Osserviamo la particolare tecnica di dimostrazione (detta talvolta **dimostrazione per assurdo**). Invece di partire con l'ipotesi, abbiamo supposto che la tesi fosse falsa, e da qui dedotto che allora doveva essere falsa anche l'ipotesi.

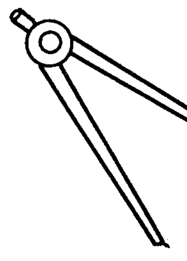
Anche qui, oltre all'ipotesi abbiamo utilizzato risultati precedenti, per esempio la disuguaglianza triangolare. Volendo rendere la dimostrazione ancora più precisa e completa, occorrerebbe considerare altri dettagli. Per esempio: non abbiamo detto esplicitamente che i punti A, B devono essere diversi, $A \neq B$; abbiamo dato per scontato che unendo due punti che stanno in semipiani opposti si deve incontrare la retta origine r, ecc.

Osserviamo infine che il secondo esempio si ottiene dal primo scambiando il ruolo della tesi e dell'ipotesi (è molto importante distinguere i due enunciati!). Possiamo dunque riunire i due enunciati 1 e 2 in uno solo dicendo: *Un punto appartiene all'asse di un segmento se e solo se è equidistante dai suoi estremi.*

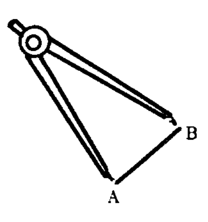
Gli esempi precedenti sono intesi a spiegare come una **teoria** matematica (a differenza delle sue **applicazioni**, cioè del suo uso pratico) consiste nell'inventare sempre nuove nozioni e nuovi enunciati, producendo opportune dimostrazioni che riconducano i nuovi enunciati ai precedenti. Tuttavia, in questo procedimento all'indietro ci si deve necessariamente fermare a un certo punto, di fronte a nozioni ed enunciati che non sono riconducibili a niente che li preceda, e si accettano come *primitivi*. Questi enunciati, per i quali appunto non si cerca una dimostrazione, si chiamano **assiomi** o **postulati**. Si tratta dei *fondamenti* sui quali poggia l'intera costruzione di una teoria.

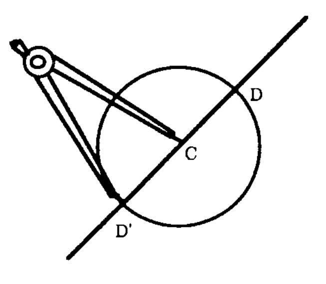
§ 8. Circonferenze

La figura accanto illustra uno strumento molto utile in geometria: il **compasso**. Esso consiste in due bracci della stessa lunghezza, collegati con una cerniera che permette ai due bracci di formare diversi angoli di apertura; un braccio termina con una punta metallica, l'altro di solito con una punta scrivente.



Nel suo uso più semplice il compasso può sostituire il righello graduato nel realizzare il *trasporto di una lunghezza*, cioè nel risolvere il seguente problema: *assegnati un segmento AB e un punto C su una retta s, trovare un punto D su s tale che AB e CD siano sovrapponibili.* Infatti, dopo aver regolato l'apertura del compasso in modo che le due punte si sovrappongano a A, B, si porta la punta metallica (senza alterare l'apertura) sul punto C e si ruota lo strumento finché la punta della matita incontra la retta s (si trovano naturalmente due diverse soluzioni, cioè due punti D, D' da parti opposte rispetto a C).

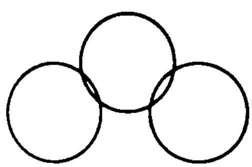


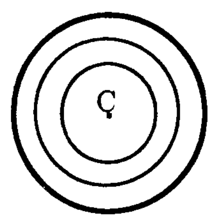


Supponiamo che il compasso sia aperto in modo che la distanza tra le due punte sia r. Se si pianta la punta metallica sul foglio in un punto C e si fa compiere allo strumento un intero giro, la punta della matita disegna la **circonferenza** che ha **centro** C e **raggio** r, cioè una linea continua che consiste di tutti e soli i punti del piano che hanno distanza r dal punto C.

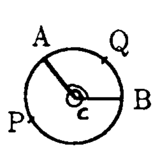
La regione piana limitata che ha per contorno una circonferenza si chiama **cerchio** (oppure **circolo**); il cerchio di centro C e raggio r è dunque l'insieme dei punti del piano la cui distanza da C non supera r. Senza alterare l'apertura del compasso ma cambiando il centro C, si ottengono tante circonferenze distinte, che hanno lo stesso raggio e sono tutte sovrapponibili.

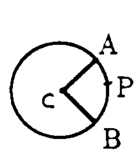
Se invece si tiene fisso il centro C e si ripete la costruzione con aperture variabili si ottengono circonferenze *concentriche*.

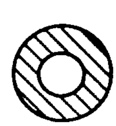




Sia data una circonferenza di centro C e su di essa siano assegnati due punti A, B. La circonferenza ne risulta divisa in due parti, che si chiamano gli **archi** (della circonferenza) di estremi A, B. Per distinguere i due archi (che talvolta si chiamano *opposti*), basta indicare un terzo punto della circonferenza che vi appartiene. Così nella figura distinguiamo gli archi APB, AQB che hanno gli stessi estremi.

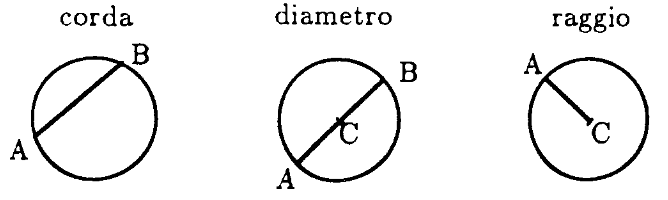




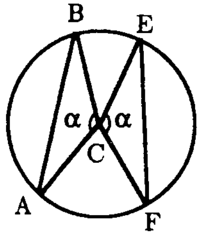


A ciascuno di questi archi corrisponde un **angolo al centro** $A\widehat{C}B$ che lo contiene.

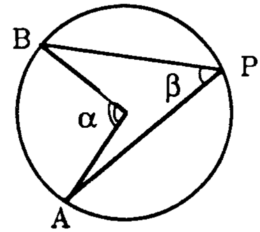
La regione piana che ha per contorno l'arco APB e i raggi CA, CB costituisce il **settore circolare** $CAPB$. Si chiama **corona circolare** la regione che ha per contorno due circonferenze concentriche.



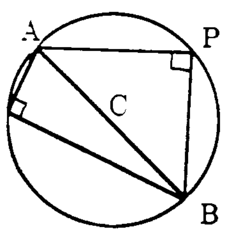
Il segmento AB si chiama la **corda** (della circonferenza) di estremi A, B. Se una corda passa per il centro, si chiama **diametro** (della circonferenza); tutti i diametri hanno la stessa lunghezza, che è il doppio del raggio (anzi, confondendo un segmento con la sua misura, si chiama talvolta **raggio** della circonferenza ogni segmento del tipo CA, CB, ecc. cioè ogni segmento che ha per estremi il centro e un punto della circonferenza). Un diametro divide la circonferenza in due **semicirconferenze** e in questo caso gli angoli al centro sono piatti.

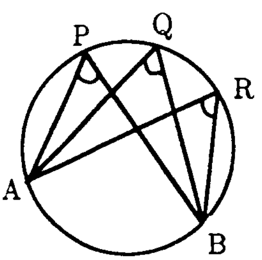


Consideriamo due corde AB, EF della stessa circonferenza di centro C, e supponiamo che esse abbiano la stessa lunghezza $AB = EF$; allora sono congruenti (a due a due) anche i corrispondenti archi e gli angoli al centro: infatti c'è una rotazione di centro C che porta A, B sui punti E, F. Viceversa, due angoli al centro sono eguali solo se sono congruenti le due corrispondenti corde.



Su una circonferenza di centro C consideriamo tre punti distinti A, B, P. L'angolo $\beta = A\widehat{P}B$ si chiama **angolo alla circonferenza** ***sotteso*** dall'arco APB. Si può vedere negli esempi (misurando con il goniometro) che l'arco opposto di APB sottende un angolo al centro $\alpha = A\widehat{C}B$ che è il doppio del precedente $\alpha = 2\beta$. È particolarmente importante il caso in cui A, B sono gli estremi di un diametro; allora $\alpha = A\widehat{C}B$ è piatto e dunque, comunque si scelga il punto P sulla circonferenza, l'angolo $\beta = A\widehat{P}B$ è retto.

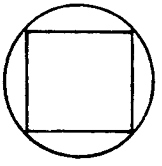


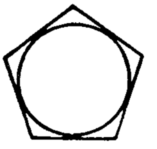


Se in un certo arco APB scegliamo un altro punto Q diverso da P, possiamo verificare (con il goniometro), che l'angolo alla circonferenza $A\widehat{Q}B$ è uguale al precedente: $A\widehat{P}B = A\widehat{Q}B$. Se (invece che verificarlo sperimentalmente) di questo fatto volessimo dare una dimostrazione (cfr. §7), si potrebbe osservare che i due angoli in questione sono la metà di uno stesso angolo al centro, e dunque sono eguali.

Consideriamo una circonferenza e dividiamola in un qualsiasi numero di archi eguali (almeno tre); il poligono che ha per vertici gli estremi di questi archi è

inscritto (interamente racchiuso) nella circonferenza e risulta essere regolare. È regolare anche il poligono che ha per lati i segmenti **tangenti** (che hanno un solo punto in comune con la circonferenza) negli estremi degli archi considerati: tale poligono racchiude la circonferenza e si dice **circoscritto** ad essa.





Poniamoci ora il problema di misurare la lunghezza di una data circonferenza di raggio r. Questa lunghezza coincide con la lunghezza del segmento ottenuto *rettificando* tale circonferenza (basta pensare ad un filo flessibile sovrapposto ad essa e poi disteso).

Osserviamo allora che:

1) il **perimetro** (cioè la somma delle lunghezze dei lati) di ogni poligono regolare inscritto nella circonferenza è minore della lunghezza di questa;
2) il perimetro di ogni poligono circoscritto è maggiore della lungezza della circonferenza;
3) quando aumenta il numero dei lati del poligono regolare inscritto il suo perimetro dà una migliore approssimazione per difetto della lunghezza della circonferenza; analogamente, se i poligoni sono circoscritti otteniamo migliori approssimazioni per eccesso.

Si verifica inoltre che, *al variare della circonferenza il rapporto tra la lunghezza della circonferenza e del suo diametro è costante (cio è non varia)*: tale costante è indicata con π, il cui valore approssimato è stato già indicato nel cap.I §9.

Quindi possiamo concludere dicendo che *la lunghezza della circonferenza di raggio r (e diametro $2r$) è $2\pi r$.* (cfr. cap.I §9, dove $2\pi = 1$)

Quanto detto giustifica l'introduzione dei radianti (cfr. §2) per la misura degli angoli: un radiante è la misura dell'angolo corrispondente ad un arco di lunghezza uguale al raggio.

ESERCIZI

1) Si disegni con il compasso una circonferenza di raggio $3,7$ cm. Si usi il righello graduato per misurare un suo diametro.

2) Si cerchino gli assi di simmetria per una circonferenza.

3) In una circonferenza si scelgano due angoli al centro eguali (con il goniometro); si confrontino (con il righello graduato) le lunghezze delle due corde corrispondenti.

4) In una circonferenza si tracci una corda, poi il suo asse. Si osservi che l'asse passa per il centro. Perché?

5) Assegnati tre punti A, B, C non allineati, si usi l'esercizio precedente per individuare il centro di una circonferenza che passa per A, B, C. Si osservi che ce n'è una sola.

6) In una circonferenza si tracci un diametro AB. Si scelga un qualunque punto P sulla circonferenza e si misuri l'angolo $A\widehat{P}B$.

7) In una circonferenza di raggio 5 cm, si disegni una corda lunga 5 cm. Si misuri (con il goniometro) l'angolo al centro corrispondente all'arco individuato dalla corda.

8) Su una circonferenza si scelgano tre punti A, P, B e si misuri l'angolo alla circonferenza $A\widehat{P}B$. Si sostituisca il punto P con un altro Q che stia sulla circonferenza e si misuri l'angolo $A\widehat{Q}B$. Conviene distinguere le due possibilità: Q sta nello stesso arco di P; Q sta nell'altro arco di circonferenza.

9) Sia assegnato un quadrato. Ricordando le proprietà delle sue diagonali, si disegni (con il compasso) una circonferenza che passa per tutti i suoi vertici.

§ 9. Luoghi geometrici

Le considerazioni del §7 ci permettono di descrivere l'**asse** del segmento AB dicendo che si tratta di

tutti e soli i punti (del piano) per i quali sono eguali le distanze da A e da B.

Più generalmente, un **luogo geometrico** è una figura che si può descrivere con una frase del tipo

tutti e soli i punti (del piano) per i quali vale una certa proprietà

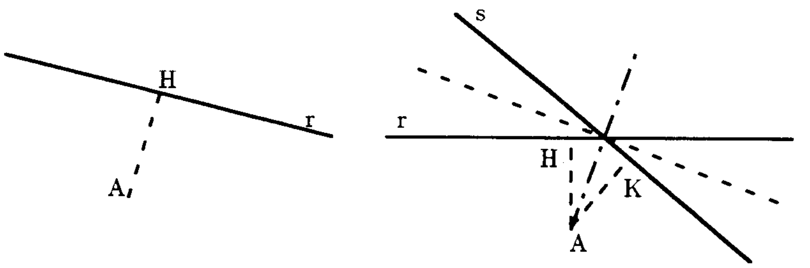
In questo paragrafo descriveremo come *luoghi* varie figure geometriche.

BISETTRICI.

Abbiamo già osservato (cfr. §1) che due rette r, s che si incontrano nel punto C formano quattro angoli (convessi). Le **bisettrici** di r, s sono le rette per C che dividono questi angoli in due parti eguali. La figura mostra che vi sono due diverse bisettrici di r, s che sono tra loro perpendicolari. Per descrivere le bisettrici come luoghi, introduciamo la nozione di **distanza di un punto da una retta**[3]: se r è una retta e A è un punto (del piano), consideriamo la retta passante per A e perpendicolare a r (cfr. §2) e sia H la sua intersezione con r. La lunghezza $|AH|$

[3] La nozione di distanza tra due punti A,B è stata introdotta nel §2. Se invece del punto B si considera un insieme $\mathcal{B}$ di punti (per esempio una figura geometrica come un cerchio, o un segmento ecc.) la distanza di A da $\mathcal{B}$ si definisce come la minima distanza di A da B, al variare di B in $\mathcal{B}$. Nel caso che $\mathcal{B}$ sia una retta r, si verifica (o si dimostra, per esempio usando la disuguaglianza triangolare) che la minima distanza si ottiene appunto in corrispondenza al punto H che viene qui costruito.

si chiama la distanza del punto A dalla retta r.



Allora si vede che, assegnate due rette (incidenti) r, s, i punti che appartengono a (una o l'altra de) le bisettrici sono

tutti e soli i punti del piano che hanno eguale distanza dalle rette r, s.

CIRCONFERENZA.

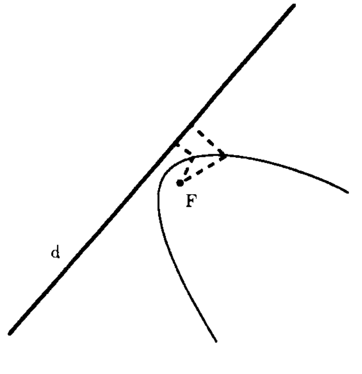
Anche una circonferenza si descrive facilmente come luogo geometrico: assegnato un punto C ed un numero positivo r, la circonferenza di centro C e raggio r è l'insieme di

tutti e soli i punti (del piano) la cui distanza da C *è uguale a* r.

PARABOLA.

Fissiamo una retta d (nel piano) e un punto F che non appartenga a d. Consideriamo il seguente luogo geometrico:

tutti e soli i punti (del piano) le cui distanze dal punto F *e dalla retta* d *sono eguali*



Si tratta di una curva, che si chiama **parabola**: il punto F si chiama **fuoco**: la retta d si chiama **direttrice**.

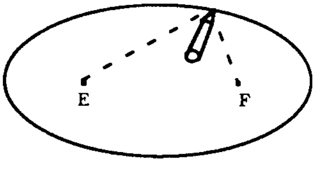
ELLISSE.

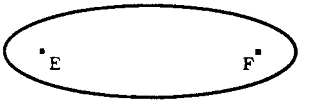
Fissiamo adesso due punti E, F del piano e consideriamo un numero r che sia maggiore della distanza $|EF|$. Cerchiamo

i punti P del piano per cui la somma delle distanze da E e da F è uguale a r:

$$|PE| + |PF| = r.$$

Questo luogo geometrico si chiama **ellisse** e i punti E, F sono i suoi **fuochi**. La curva che ne risulta è chiusa (cioè vi è una zona ad essa interna ed una esterna), una sorta di circonferenza deformata, del tipo di quelle disegnate qui di seguito.



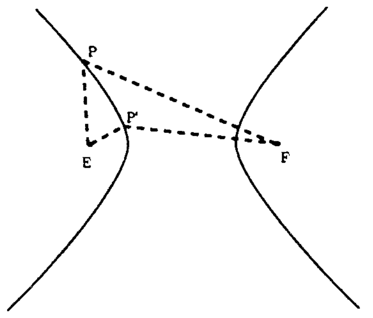


Per disegnare un'ellisse, conviene procurarsi due spilli e un pezzo di filo. Si legano le estremità del filo ai due spilli, in modo che il filo tra i due spilli sia lungo r. Si piantano poi i due spilli sul foglio, nei punti E, F. Naturalmente deve essere $|EF| < r$. Si procede come indicato nel disegno, con la punta della matita che tiene il filo in tensione.

IPERBOLE. Partendo ancora da due **fuochi** E, F, e fissato un numero reale positivo r, tale che $r < |EF|$, si chiama **iperbole** il luogo dei *punti P (del piano) per cui la differenza delle distanze da E e da F è uguale a r*

$$|PE| - |PF| = r \qquad \text{oppure} \qquad |PF| - |PE| = r.$$

Un'iperbole possiede due **rami**, cioè consiste di due tratti di curva che non si incontrano.



ESERCIZI

1) Si disegni un segmento AB di lunghezza 7 cm. Con il righello graduato se ne trovi il punto medio e con la squadra se ne disegni l'asse. Si scelgano vari punti P dell'asse e si confrontino le distanze $|PA|$, $|PB|$.

2) Si disegni una retta e un punto fuori di essa. Si misuri la distanza del punto dalla retta.

3) Assegnato un punto P, si disegni una retta r che disti 7 cm da P. Si disegni un'altra retta, perpendicolare ad r, che abbia la stessa distanza da P.

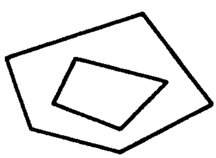
4) Si disegnino due rette r, s incidenti e una loro bisettrice (con il goniometro). Si scelgano vari punti P sulla bisettrice e si confrontino le distanze di P da r e da s.

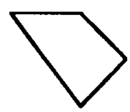
5) Si trovino assi di simmetria per la figura costituita da due rette r, s. Si studino separatamente i due casi: r, s incidenti; r, s parallele.

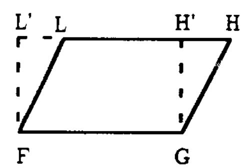
§ 10. Area

Una qualunque linea chiusa non intrecciata, per esempio una spezzata semplice o una circonferenza, racchiude al suo interno una parte (= *una porzione*) del piano, che ha una sua ben precisa *estensione*. Queste regioni del piano si chiamano anche *superficie* (*piane*) e la misura della loro estensione si chiama l'**area** di quella *superficie*.

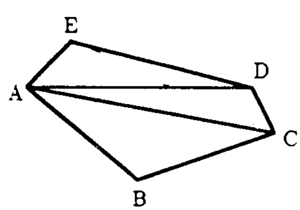
Come nella misura delle lunghezze, per introdurre la misura delle superficie occorrerà introdurre un **confronto** tra le superficie, che ci permetta di dire, per esempio, qual è la maggiore tra due superficie, e anzi stabilire che una è il doppio o la metà dell'altra ecc. Inoltre occorrerà riferirsi a un'**unità di misura** (delle aree) cioè stabilire una ben precisa superficie cui attribuire area unitaria (=1).

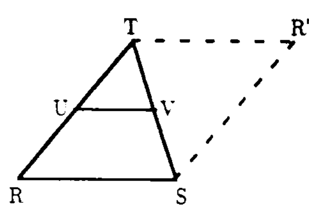






Se confrontiamo due superficie, vogliamo anzitutto che due figure congruenti (per esempio, due poligoni sovrapponibili) abbiano la stessa area; se poi una superficie è tutta contenuta in un'altra, la prima dovrà avere area minore della seconda. Inoltre, se una superficie si suddivide in due porzioni disgiunte (cioè senza punti comuni), vogliamo che l'area complessiva si ottenga sommando l'area delle due parti; in generale, le aree si potranno sommare e sottrarre, come nei seguenti esempi:





– l'area del pentagono $ABCDE$ è la somma delle aree dei triangoli ABC, ACD, ADE; l'area del quadrilatero $ABCD$ si ottiene sottraendo l'area del triangolo ADE a quella del pentagono;

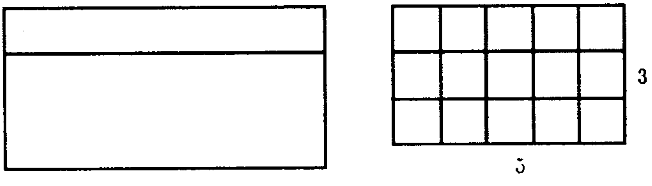
– l'area del trapezio $RSUV$ si ottiene sottraendo all'area del triangolo RST quella del triangolo UVT;

– l'area del triangolo RST è la metà di quella del parallelogrammo $RSR'T$ che ha la stessa base e la stessa altezza;

– l'area del parallelogrammo $FGHL$ è uguale a quella del rettangolo $FGH'L'$ che ha la stessa base e la stessa altezza;

– se due rettangoli hanno la stessa base, il rapporto tra le due aree è eguale al rapporto tra le due altezze;

– se un rettangolo ha una base lunga 5 cm e un'altezza lunga 3 cm, allora la sua area è $15 = 5 \times 3$ volte l'area di un quadrato che ha lato lungo 1 cm.



Con queste regole, si vede che l'area di un qualunque poligono si può ricondurre – tracciando opportune diagonali – alle aree di triangoli, e quest'ultime si possono ricondurre ad aree di rettangoli e di quadrati.

Se il cm (*centimetro*) è l'unità di misura delle lunghezze, come unità di misura dell'area si sceglie il cm^2 (leggi: *centimetro quadro*): essa è l'area di un quadrato che ha il lato lungo 1 cm. L'ultima osservazione ci dice allora che conoscendo le misure a, b (in cm) dei due lati di un rettangolo, la sua area è (in cm^2) il prodotto $a \times b$. Analogamente, l'area delle figure piane più familiari si calcola, a partire dalle misure delle lunghezze dei segmenti, con le seguenti formule:

parallelogrammo	$b \cdot h$	base per altezza
rettangolo	$b \cdot h$	base per altezza (= prodotto dei lati)

quadrato	b^2	base per altezza (= quadrato del lato)
triangolo	$\dfrac{b \cdot h}{2}$	base per altezza diviso due
trapezio	$\dfrac{(b_1 + b_2) \cdot h}{2}$	somma delle basi per altezza diviso due
cerchio	$\pi \cdot r^2$	$3,14\ldots$ per il quadrato del raggio

Nel calcolo delle aree è di grande importanza il seguente **Teorema di Pitagora**: *In un triangolo rettangolo la somma delle aree dei quadrati aventi per lati i cateti è eguale all'area del quadrato avente per lato l'ipotenusa.*

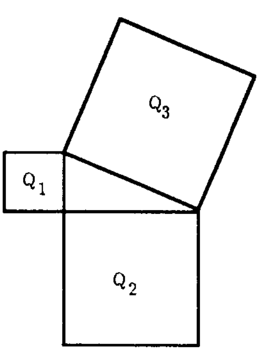
Nella prima figura il teorema è stato visualizzato: $\mathcal{A}(Q_1) + \mathcal{A}(Q_2) = \mathcal{A}(Q_3)$. Nella seconda figura si trova invece una traccia di dimostrazione: Q_1, Q_2, Q_3 sono, nell'ordine, i quadrati $ACRS$, $AQPB$, $BCTU$. Il teorema deriva dalle uguaglianze

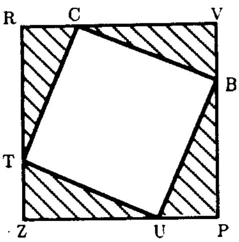
$$\mathcal{A}(AQPB) + \mathcal{A}(ACRS) = \mathcal{A}(RVPZ) - 4\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(BCTU)$$

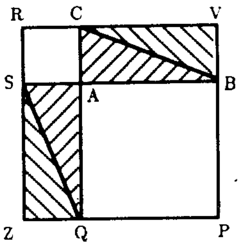
che si ottengono *decomponendo* in modi diversi la stesso quadrato $RZPV$.

Se indichiamo con a la lunghezza di un cateto di un triangolo rettangolo
b la lunghezza dell'altro cateto
c la lunghezza dell'ipotenusa

il teorema di Pitagora afferma che $a^2 + b^2 = c^2$. Estraendo la radice quadrata si ottengono le formule $c = \sqrt{a^2 + b^2}$; $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ecc.







ESERCIZI

1) Disegnato un quadrato di lato 5 cm, lo si decomponga in 25 quadratini di area 1 cm.

2) Sia dato un rettangolo, con i lati lunghi 8 e 6 cm. Si disegni un rettangolo che ha un lato di 12 cm e area eguale al precedente.

3) Si disegni un triangolo con la base lunga 5 cm e gli altri lati lunghi 3 e 4 cm. Si disegni un altro triangolo che ha la stessa base e la stessa altezza del precedente. Se ne calcoli approssimativamente l'area, suddividendolo in quadrati di area 1 cm^2.

4) Si disegnino due diversi parallelogrammi che hanno entrambi la base di 5 cm e l'altezza di 3,6 cm. Si dispongano opportunamente, in modo da evidenziare che hanno la stessa area.

5) Si disegni un triangolo equilatero di lato 5 cm; si misuri l'altezza e se ne calcoli l'area.

6) Usando un righello graduato, si misurino le lunghezze dei lati di tutti i poligoni disegnati (in queste pagine) e se ne calcolino le aree.

7) Nel quadrato dell'esercizio 1 si disegni una diagonale e la si misuri con il righello graduato. Si confronti questa misura con quella dedotta dal teorema di Pitagora.

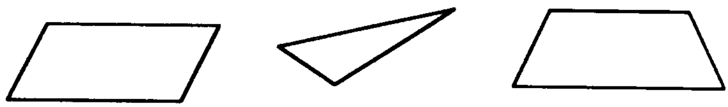
8) Come l'esercizio 7, riferito al rettangolo dell'esercizio 2.

9) Si applichi il teorema di Pitagora per calcolare le quantità qui indicate con i puntini, che si riferiscono a triangoli rettangoli:

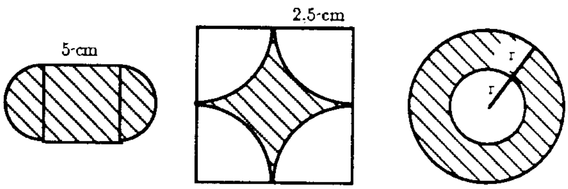
Primo cateto	*Secondo cateto*	*Ipotenusa*	*Area*
4 cm	3 cm	...	...
6 cm	...	10 cm	...
7 cm	...	...	28 cm
0,5 cm	1,2 cm	...	...

10) Si disegnino tre cerchi con raggio 2 cm., 4 cm., 6 cm. e se ne calcolino le aree.

11) Dopo aver misurato (col righello graduato) le lunghezze dei segmenti che intervengono nelle formule, calcolate le aree delle seguenti figure.



12) Si calcolino le aree delle figure tratteggiate:



Capitolo III: GEOMETRIA DELLO SPAZIO

§1. FIGURE DELLO SPAZIO E LORO RAPPRESENTAZIONI PIANE

Nel Cap. II abbiamo studiato varie figure geometriche del piano. Consideriamo ora lo spazio.

Poiché lo spazio contiene infiniti piani, possiamo interpretare tutte le figure geometriche di un qualsiasi piano anche come figure geometriche dello spazio. Per es. possiamo disegnare un punto, o un segmento, o un triangolo sul pavimento della nostra aula, ma possiamo disegnare le stesse figure anche su una parete oppure sul tetto. Naturalmente continuano a valere per queste figure tutte le proprietà già viste nel cap. II.

Ma nello spazio vi sono anche figure che non sono contenute in un unico piano. Le chiameremo **figure solide** o brevemente **solidi**, per es. un **cubo**, una **piramide**, un **cono**, un **cilindro**, una **sfera**.

Una notevole difficoltà nasce dal fatto che, per rappresentare la realtà spaziale nella quale viviamo, noi dobbiamo ricorrere a immagini piane: disegni su un foglio di carta, fotografie, figure sullo schermo di un televisore o sulla retina dei nostri occhi, ecc.

L'immagine piana di un solido risulta dunque sempre "deformata". Occorre stabilire regole opportune per passare dalle figure solide alle loro rappresentazioni piane; viceversa, occorre stabilire regole opportune per ricostruire i solidi a partire dalle loro rappresentazioni piane.

Un primo metodo di rappresentazione consiste nel disegnare lo **sviluppo piano** dei solidi che ci interessano. Si pensi per es. ad una scatola di cartone: essa è costituita da 6 **facce** rettangolari; i 12 segmenti dove le facce si incontrano a due a due si chiamano **lati** o **spigoli**; gli 8 punti dove le facce si incontrano a tre a tre si chiamano **vertici**. Se si immagina di "aprire" la scatola lungo alcuni dei suoi lati, questa perde la sua rigidità, e tutte le facce possono essere stese su uno stesso piano. Si dice allora che si è ottenuto uno **sviluppo piano** della scatola (vedi fig. 1).

Viceversa, a partire da uno sviluppo piano si può sempre ricostruire la figura solida corrispondente. È sufficiente ritagliare lo sviluppo, piegare opportunamente la carta lungo le linee tratteggiate e infine "incollare" fra loro i lati che si vengono a toccare.

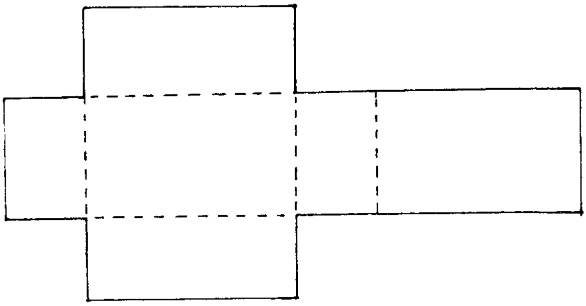


fig. 1

In linguaggio matematico, un solido a forma di "scatola" si chiama **parallelepipedo rettangolo**. Se in particolare tutte le facce della "scatola" sono dei quadrati (uguali tra loro) il solido si chiama **cubo**.

In fig. 2 è rappresentato uno sviluppo piano di un *cubo*.

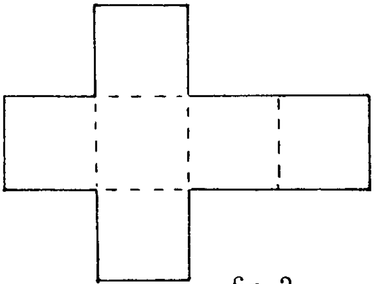


fig. 2

In fig. 3 è rappresentato uno sviluppo piano di una particolare piramide a base triangolare (in linguaggio matematico: **tetraedro**).

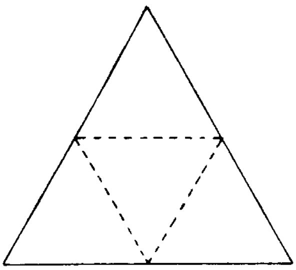


fig. 3

Negli sviluppi piani le singole facce conservano la loro forma e le loro dimensioni; tuttavia non si ha una buona visione d'insieme, perché lati e vertici diversi degli sviluppi piani possono andare a coincidere nella ricostruzione dei solidi.

Descriviamo ora un metodo del tutto diverso per la rappresentazione piana delle figure solide.

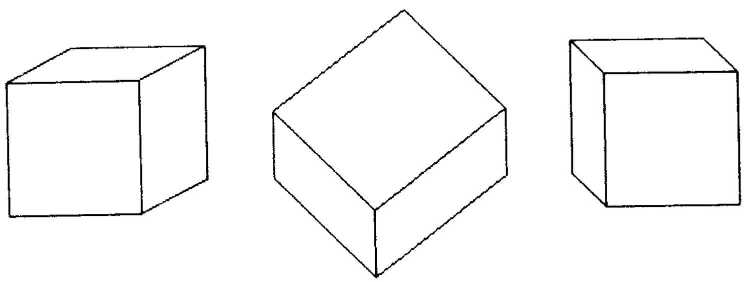


fig. 4

Osservate attentamente la fig. 4. I disegni sono stati realizzati su questo foglio di carta e quindi possono essere visti come figure piane, fatte di tre parallelogrammi. Ma con un po' di fantasia si possono interpretare le stesse figure anche come rappresentazioni piane di un cubo, visto da posizioni diverse. Una migliore percezione spaziale si ottiene tratteggiando nei disegni le facce del cubo. Il tratteggio sarà più o meno chiaro a seconda che la faccia del cubo sia più o meno illuminata (vedi fig. 5).

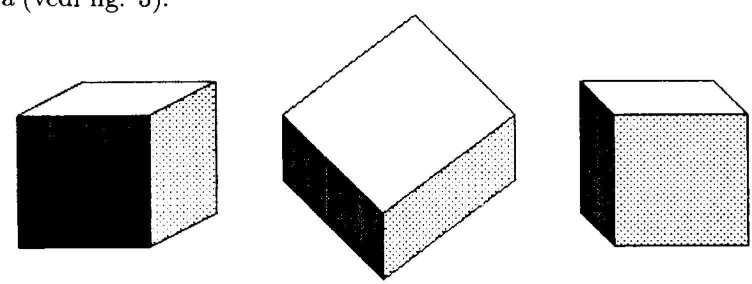


fig. 5

Il metodo di rappresentazione usato per disegnare le figure 4 e 5 si chiama **assonometria**. Per capire di cosa si tratta, si pensi per es. ai raggi del sole che generano l'ombra del solido su uno schermo piano.

Le rappresentazioni assonometriche conservano il parallelismo: se due lati del solido sono paralleli tra loro, anche le immagini degli stessi lati risultano parallele nel disegno. Invece non vengono conservate né le lunghezze dei lati, né le ampiezze degli angoli.

Vi è una notevole somiglianza tra le rappresentazioni assonometriche e le immagini fotografiche (o le immagini che si formano sulla retina dei nostri occhi). Tuttavia questa somiglianza non è perfetta; infatti, osservando per es. la fotografia di una scatola o di un cubo, si vedrà che non si conserva neppure il parallelismo: a due lati paralleli della figura solida non corrispondono in generale due lati paralleli nell'immagine fotografica. In ciò consiste il cosiddetto effetto di **prospettiva**. Si pensi per es. ai raggi di una lampadina che generano l'ombra del solido su uno schermo piano. La differenza essenziale tra l'assonometria e la prospettiva consiste nel fatto che nell'assonometria i raggi proiettanti sono tutti paralleli tra loro, mentre nella prospettiva i raggi proiettanti escono tutti da un fissato punto S.

In fig. 6 sono riprodotte varie immagini prospettiche di un cubo.

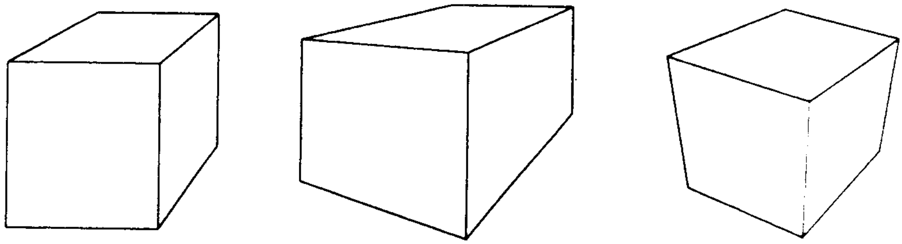


fig. 6

Data la maggiore difficoltà nell'uso della prospettiva, noi di solito preferiremo usare le rappresentazioni assonometriche.

ESERCIZI

1). Costruite i solidi delle figure 1,2,3, dopo avere ridisegnato i loro sviluppi (ingranditi) su un foglio di carta abbastanza rigida.

Suggerimento. Quando due spigoli vanno incollati tra loro, conviene lasciare esternamente, da una delle due parti, una piccola linguella (striscia di carta) per facilitare l'incollamento. Un esempio dello sviluppo di un cubo con le linguelle è rappresentato in fig. 2 bis.

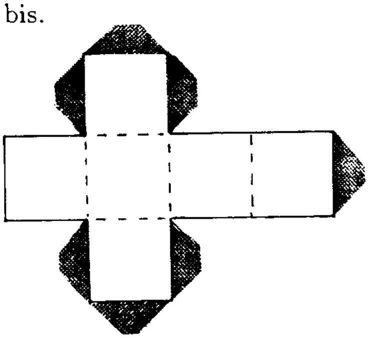


fig. 2 bis

2). Costruite gli "scheletri" degli stessi solidi dell'esercizio precedente, servendovi di stuzzicadenti o di cannucce per bibite, o di altro materiale disponibile.

3). Ponete lo "scheletro" di un cubo, costruito secondo le indicazioni dell'esercizio precedente, alla luce del sole e osservate l'ombra proiettata da questo scheletro su uno schermo piano (chiamato anche "piano di proiezione"), facendo variare le posizioni dello scheletro e dello schermo.

a). È vero che l'ombra di un lato è sempre lunga esattamente quanto il lato stesso? O può essere più lunga ? O più corta ?

b). È vero che l'ombra dell'angolo formato da due lati è sempre retto (come lo era l'angolo stesso)? O può essere acuto ? O ottuso ?

c). È vero che le ombre di due lati paralleli sono ancora due segmenti paralleli?

4). Ripetete l'esercizio precedente per gli altri "scheletri" che avete realizzato, e fate le vostre osservazioni.

5). In fig. 7 abbiamo rappresentato gli scheletri di tre solidi (un cubo, un parallelepipedo rettangolo, un tetraedro), proiettati secondo una direzione che consente una buona visualizzazione di tutti i loro lati. Abbiamo tratteggiato i lati che sarebbero nascosti alla vista, se invece dello scheletro si fosse usato un modello di carta o di altro materiale non trasparente.

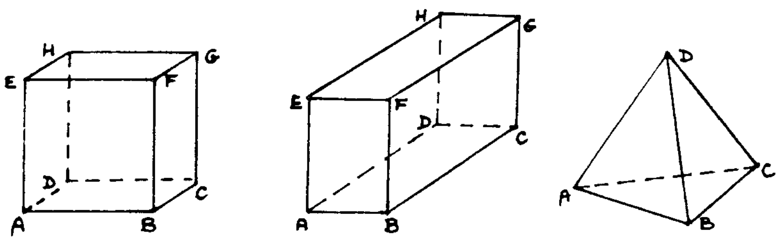


fig. 7

a). In quale posizione (rispetto ai raggi del sole) dobbiamo mettere il piano di proiezione e lo scheletro di un cubo, per fare in modo che l'ombra dello scheletro si riduca ad un unico quadrato ? Dove vanno a proiettarsi in tale caso gli altri lati ?

b). In quale posizione dobbiamo mettere il piano di proiezione e lo scheletro di un parallelepipedo rettangolo per fare in modo che l'ombra dello scheletro si riduca ad un unico rettangolo? Dove vanno a proiettarsi in tale caso gli altri lati?

c). In quale posizione dobbiamo mettere il piano di proiezione e lo scheletro di un tetraedro per fare in modo che l'ombra dello scheletro si riduca ad un unico triangolo? Dove vanno a proiettarsi in tale caso gli altri lati?

6). Uno stesso solido può avere sviluppi piani diversi. Quali tra le seguenti figure sono sviluppi piani di un cubo?

Per gli sviluppi possibili, completate le figure disegnando opportune linguelle per l'incollamento.

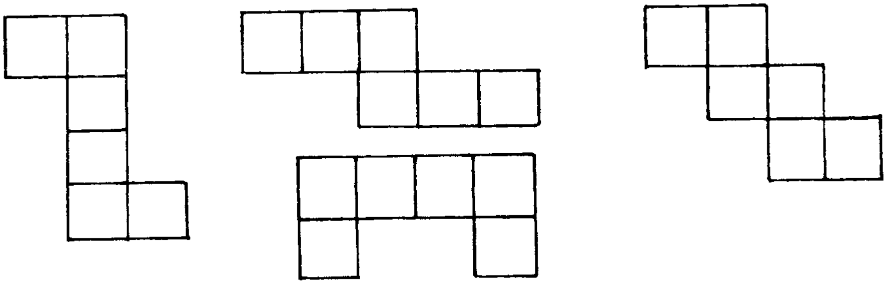


fig. 8

7. Quali tra le seguenti figure sono sviluppi piani di un tetraedro?

Per gli sviluppi possibili, completate le figure disegnando opportune linguelle per l'incollamento.

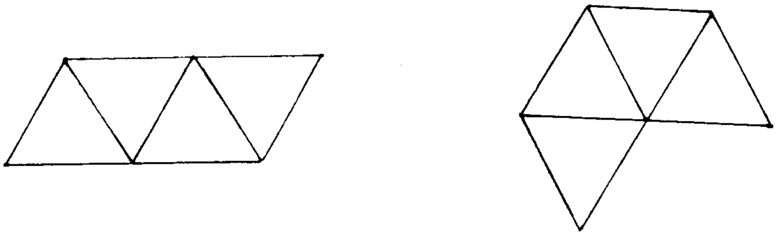


fig. 9

8. Quali tra le seguenti figure sono sviluppi piani di un solido (piramide a base quadrata)?

Per gli sviluppi possibili, completate le figure disegnando opportune linguelle per l'incollamento.

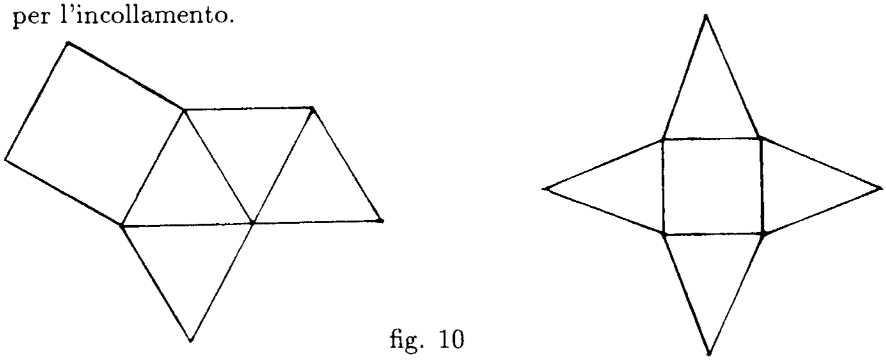


fig. 10

9. Quali tra le seguenti figure sono sviluppi piani di un solido (prisma a base

esagonale)?

Per gli sviluppi possibili, completate le figure disegnando opportune linguelle per l'incollamento.

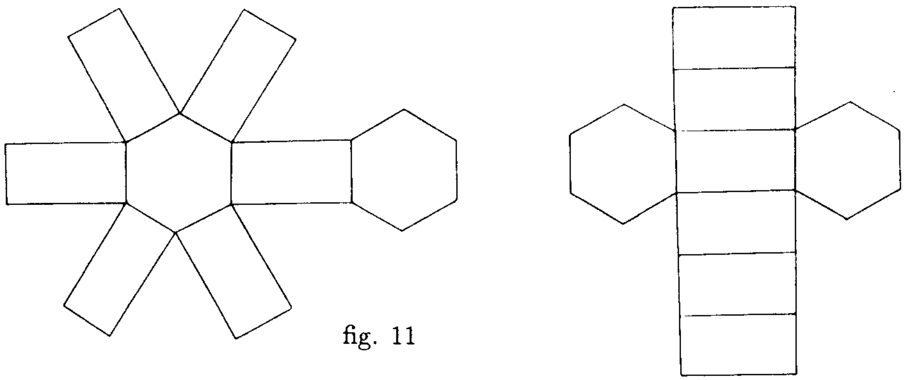


fig. 11

10. Costruite con carta o cartone il solido corrispondente allo sviluppo piano di fig. 12.

Costruite poi lo scheletro dello stesso solido, usando stuzzicadenti o cannucce per bibite.

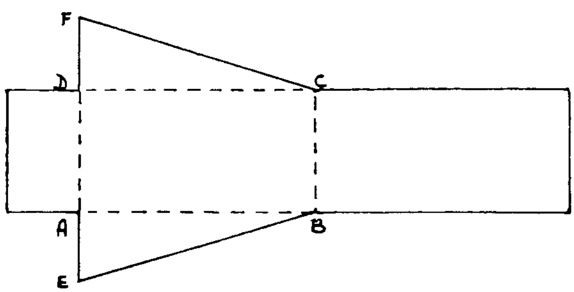


fig. 12

Se appoggiate il solido con la base ABCD posta su un piano orizzontale, ottenete un modellino di "piano inclinato". L'inclinazione è data dall'ampiezza dell'angolo ABE.

Disegnate una rappresentazione assonometrica di questo solido, aiutandovi (se necessario) con l'osservazione delle ombre dello scheletro che avete costruito, esposto ai raggi del sole.

11). L'ombra del "piano inclinato" costruito nell'esercizio precedente può assumere le forme disegnate in fig. 13 ?

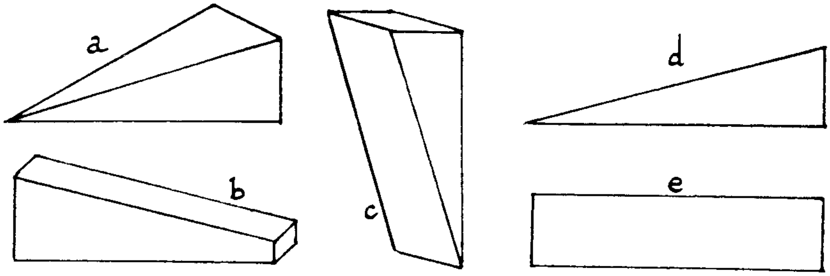


fig. 13

§ 2. LESSICO DI GEOMETRIA DELLO SPAZIO

Prima di affrontare l'argomento specifico di questo paragrafo, facciamo ancora un'osservazione. Nel paragrafo precedente abbiamo visto che l'immagine assonometrica di un quadrato ha in generale la forma di un parallelogrammo (si pensi alle facce dei cubi rappresentati in fig. 4). Perciò, quando vorremo rappresentare visivamente un piano dello spazio, seguiremo la seguente convenzione: *penseremo* ad un quadrato che simboleggia l'intero piano, e *disegneremo* l'immagine assonometrica di tale quadrato, ossia un parallelogrammo (vedi fig. 14 a).

Analogamente, quando vorremo rappresentare visivamente una retta dello spazio, *penseremo* ad un segmento che simboleggia l'intera retta, e *disegneremo* l'immagine assonometrica di tale segmento, ossia ancora un segmento.

Tenuto conto delle deformazioni delle rappresentazioni assonometriche, le lunghezze dei segmenti e le ampiezze degli angoli disegnati in figura saranno in generale diverse dalle lunghezze dei segmenti e dalle ampiezze degli angoli reali. Per es. la fig. 14 b si può interpretare come il disegno dei tre spigoli dove si incontrano le pareti di una stanza.

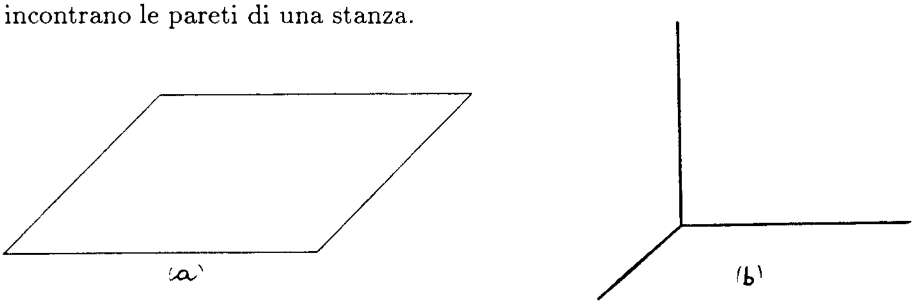


fig. 14

Dopo questa premessa, necessaria per una corretta interpretazione dei disegni che faremo nel seguito, possiamo affrontare lo studio delle situazioni che si presentano nella geometria dello spazio.

POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE RETTE. Se due rette r,s dello spazio giacciono in uno stesso piano, esse si dicono **complanari**. Se invece non esiste alcun piano che le contiene entrambe, r ed s si dicono **sghembe**. Per es. le rette individuate dai lati AB, FG del cubo di fig. 7 sono *sghembe.* Anche le rette individuate dai lati AB e CD del tetraedro di fig. 7 sono *sghembe.*

Poiché nel caso delle rette complanari continuano a valere tutte le considerazioni della geometria del piano, potremo parlare di rette (complanari) *incidenti* e di rette (complanari) *parallele.* Due rette *sghembe* non sono invece né incidenti, né parallele. In conclusione, nello spazio si hanno tre situazioni distinte:

1. rette incidenti, ossia rette complanari che hanno un punto in comune

2. rette parallele, ossia rette complanari che non hanno alcun punto in comune (o che coincidono)

3. rette sghembe, ossia rette non complanari.

Osservazione. Se due rette r,s hanno un punto in comune, allora esiste sempre un piano che le contiene entrambe. Quindi nella definizione di *rette incidenti* la precisazione che si tratta di rette "complanari" è superflua; la stessa precisazione è invece necessaria nella definizione di *rette parallele*, per distinguere questo caso da quello delle *rette sghembe.*

POSIZIONI RECIPROCHE DI DUE PIANI. Nello spazio possiamo parlare anche di parallelismo tra piani: due piani α , β si dicono **paralleli** (vedi fig. 15) se non hanno punti in comune (o se coincidono).

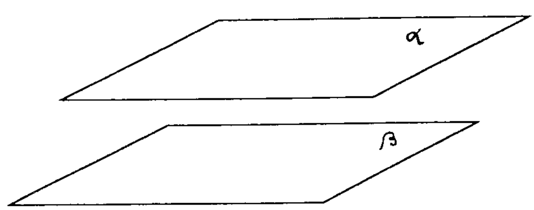


fig. 15

Invece due piani (distinti) α , β che hanno qualche punto in comune si dicono **incidenti**. In tal caso i punti in comune sono tutti e soli i punti di una retta r (vedi fig. 16).

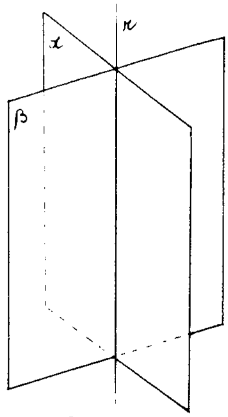


fig. 16

La retta r, comune ai piani α e β divide ciascuno di questi piani in due semipiani. Consideriamo per es. il semipiano α_1 e il semipiano β_1 , che hanno la stessa retta origine r (vedi fig. 17).

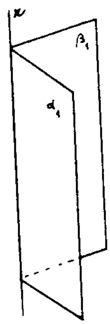


fig.17

Essi dividono lo spazio in due zone, chiamate **diedri**. Escludiamo il caso che i due semipiani α_1 e β_1 siano semipiani opposti di uno stesso piano; allora uno dei due diedri è convesso , l'altro è concavo (la definizione di *diedro convesso* e di *diedro concavo* è del tutto analoga a quella di *angolo convesso* e di *angolo concavo*, già ricordata nel par. 1 del cap II). Normalmente, quando parleremo senza altre precisazioni del diedro individuato dai due semipiani α_1 e β_1, ci riferiremo al diedro *convesso* e lo denoteremo col simbolo $\alpha_1 r \beta_1$.

In conclusione possiamo dire che due piani incidenti individuano 4 diedri: $\alpha_1 r \beta_1$, $\alpha_1 r \beta_2$, $\alpha_2 r \beta_1$, $\alpha_2 r \beta_2$.

POSIZIONI RECIPROCHE DI RETTE E PIANI. Nello spazio, per una retta e per un piano si possono presentare le seguenti tre situazioni:

– la retta e il piano non hanno punti in comune
– la retta e il piano hanno un unico punto in comune
– la retta è tutta contenuta nel piano.

Se una retta r e un piano α non hanno punti in comune o se la retta è tutta contenuta nel piano, si dice che r e α sono paralleli (fig. 18).

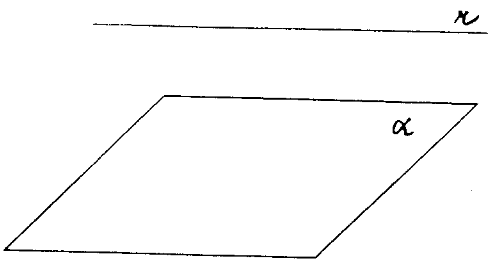


fig. 18

Se invece la retta e il piano hanno in comune un unico punto, si dice che r e α sono **incidenti** (fig. 19).

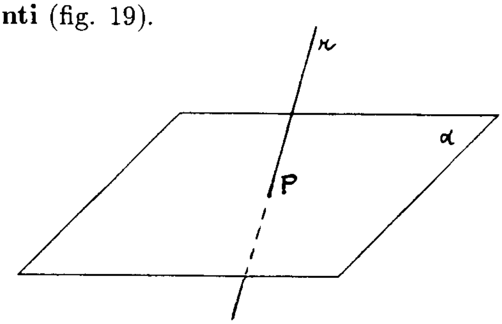


fig.19

LE NOZIONI DI ANGOLO E DI PERPENDICOLARITÀ. Nello spazio si può parlare di *angoli* e di *perpendicolarità* in tre situazioni diverse:

- tra due rette (o semirette)
- tra due piani (o semipiani)
- tra una retta e un piano.

Probabilmente nel rispondere a qualcuna delle domande degli esercizi del paragrafo precedente avrete già usato questi stessi termini, che ora ci proponiamo di precisare meglio.

Se r ed s sono due rette incidenti (o due semirette con la stessa origine), esse sono necessariamente complanari. Quindi – anche se ora ci troviamo nello spazio – possiamo considerare il piano che contiene r ed s, e parlare di *angoli* e di *perpendicolarità* tra r ed s nel senso della geometria piana.

Se invece r ed s sono due rette sghembe, possiamo tornare al caso precedente: consideriamo un punto P qualsiasi dello spazio e le rette r', s' passanti per P e rispettivamente parallele ad r e ad s: per definizione, gli angoli formati da r , s sono gli angoli formati da r' , s' (nel senso della geometria del piano). In particolare, si dirà che r , s sono **perpendicolari** (oppure **ortogonali**, o anche

normali) se lo sono r' , s'. Per es. le rette contenenti gli spigoli AB , CG del cubo di fig. 7 sono sghembe. Consideriamo allora le due rette parallele alle rette date, passanti per il punto B. Esse sono: la retta AB e la retta BF. Queste due rette sono perpendicolari nel senso usuale, nel piano che contiene la faccia ABFE. Diremo dunque che anche AB e CG sono perpendicolari. Naturalmente avremmo potuto scegliere altre due rette parallele alle rette date, passanti per il punto D, oppure passanti per un qualsiasi altro punto dello spazio, e avremmo ottenuto lo stesso risultato.

La situazione diventa più complicata se vogliamo parlare di angoli *tra due piani*, o *tra una retta e un piano*. Dobbiamo infatti ricondurci sempre a situazioni di geometria piana.

Ecco una prima idea. Siano dati due piani α e β, incidenti in una retta r. Sappiamo già che essi formano quattro diedri. Possiamo pensare di intersecare questi diedri con un terzo piano π, e chiamare per es. "angolo" del diedro $\alpha_1 r \beta_1$ l'angolo formato dalle due semirette a_1, b_1 (vedi fig. 20).

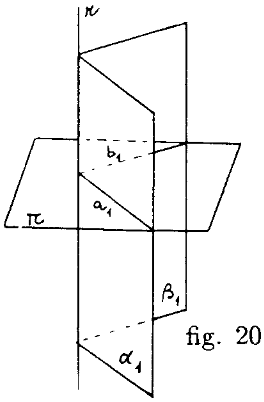


fig. 20

Ma si vede subito che questa non è una buona definizione, perché al variare dell'inclinazione del piano π varia l'ampiezza dell'angolo $a_1 b_1$. Occorre quindi precisare come si deve scegliere il piano π.

Lo stesso inconveniente capita se si vuole definire l'angolo tra una retta r e un piano α. Possiamo pensare di considerare un piano π passante per r e che interseca α secondo una retta s e chiamare "angolo" tra r e α l'angolo formato dalle due semirette r_1 , s_1 (vedi fig. 21). Ma si vede subito che anche in questo caso non si tratta di una buona definizione, in quanto al variare della scelta di π, varia in generale l'ampiezza dell'angolo $r_1 s_1$. Anche in questo caso occorre quindi precisare come si deve scegliere il piano π.

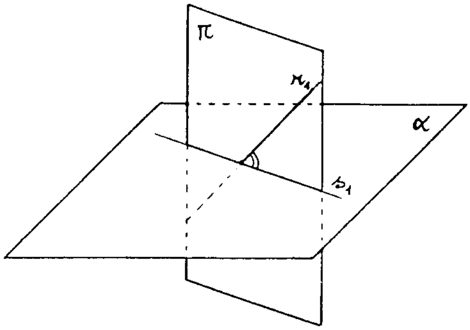


fig. 21

Per poter fornire le precisazioni necessarie, introduciamo una nozione preliminare: quella di *perpendicolarità* tra una retta r e un piano α.

Poco fa abbiamo detto che, in generale, al variare della scelta di π, varia l'ampiezza dell'angolo $r_1 s_1$ (vedi fig. 20). C'è però un caso in cui questo fatto non avviene: può darsi che per qualunque scelta del piano π, le due rette r , s siano perpendicolari (vedi fig. 22). Quando ciò avviene, si dice che la retta r è **perpendicolare** al piano α.

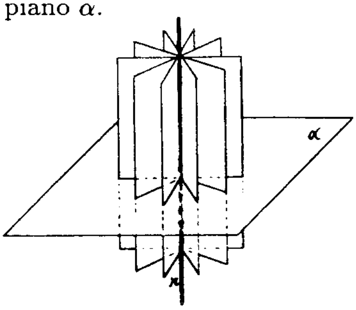


fig.22

Osservazione. Questa definizione è corretta, ma poco utilizzabile in pratica. Infatti per decidere se r è perpendicolare ad α si dovrebbero effettuare infinite verifiche di perpendicolarità (tra la retta r e le infinite rette s che si ottengono facendo variare in tutti i modi possibili il piano π). Fortunatamente ci viene in aiuto un importante teorema di geometria dello spazio. Il teorema afferma:

Se si scelgono **due** piani distinti π' , π'' passanti per r, che intersecano il piano α in due rette s , t e se r risulta perpendicolare ad s e a t, allora r risulta perpendicolare anche a tutte le infinite altre rette che si ottengono intersecando α con un qualsiasi piano π passante per r.

Questo teorema riconduce dunque il controllo sulla perpendicolarità tra una retta e un piano a **due** sole verifiche di perpendicolarità tra rette, nel senso della geometria piana.

Si noti che il teorema citato giustifica a livello teorico il sistema pratico usato dai falegnami e dai muratori, che controllano la perpendicolarità tra il piano di appoggio e lo spigolo di un mobile o di una casa servendosi di due squadre, disposte come illustrato in fig 23.

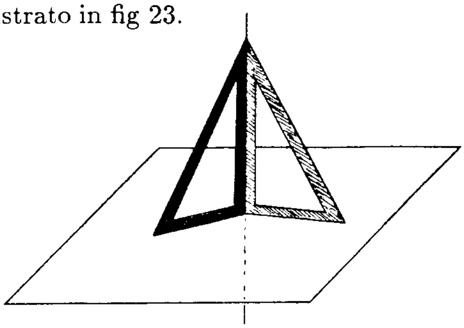


fig. 23

Ora siamo finalmente in grado di dare le definizioni corrette di "angolo diedro", "angolo tra due piani", "angolo tra una retta e un piano".

Dato un diedro, formato da due semipiani α_1, β_1, incidenti in una retta r, consideriamo un terzo piano π, che sia **perpendicolare** ad r. Siano a_1, b_1 le intersezioni di α_1 con π e di β_1 con π. Per definizione, si chiama **ampiezza dell' angolo diedro** $\alpha_1\beta_1$ l'ampiezza dell'angolo a_1b_1 (nel senso della geometria piana).

Dati poi due piani α , β, incidenti in una retta r, abbiamo già osservato che essi formano quattro diedri. I corrispondenti *angoli diedri* risultano a due a due uguali: per definizione, si dice che essi sono gli **angoli** formati dai due piani α, β. In particolare, se i quattro angoli diedri sono tutti uguali tra loro (ossia se sono retti) i due piani si dicono **perpendicolari**.

Diamo infine la definizione di angolo tra una retta e un piano. Consideriamo una retta r e un piano α, incidenti in un punto P. Può darsi che r sia perpendicolare ad α (nel senso precisato prima), e allora si dice che r forma un *angolo retto* con α. Se invece r non è perpendicolare ad α, sia t la retta passante per P e perpendicolare ad α e sia π il piano contenente r e t. Sia infine s l'intersezione di π con α. Si dice che s è la **proiezione ortogonale** di r su α. Nel piano π le rette r ed s formano quattro angoli, a due a due uguali: uno di questi angoli è acuto, l'altro ottuso. Per definizione, l'angolo acuto rappresenta l'**angolo tra la retta** r **e il piano** α.

ESERCIZI

1). In un cubo, in un parallelepipedo rettangolo, in un tetraedro, i lati e le facce individuano altrettante rette e piani che li contengono. Servendovi dei modelli o dei disegni di questi solidi, individuate le eventuali coppie di:

– rette parallele
– rette perpendicolari
– piani paralleli
– piani perpendicolari
– rette e piani tra loro paralleli
– rette e piani tra loro perpendicolari.

2). Se due rette sono parallele ad uno stesso piano, esse sono anche parallele tra loro?

Se due piani sono paralleli ad una stessa retta, essi sono anche paralleli tra loro?

3). Sono dati un punto P e un piano α. Quante sono le rette passanti per P e perpendicolari ad α ?

E quante sono le rette passanti per P e parallele ad α?

4) Sono dati un punto P e una retta r.

a). Quanti sono i piani passanti per P e paralleli alla retta r?

b). Quanti sono i piani passanti per P e perpendicolari alla retta r?

c). Quante sono le rette passanti per P e parallele alla retta r?

d). Quante sono le rette passanti per P e perpendicolari alla retta r? (Ricordare che nello spazio due rette perpendicolari non sono necessariamente incidenti).

5). Se si intersecano due piani paralleli π_1, π_2 con un altro piano α, si ottengono due rette r_1, r_2. Si tratta di rette parallele, incidenti o sghembe?

6). Nello spazio si possono considerare tre piani, a due a due perpendicolari. Costruite un modellino di carta (o di cartone) per visualizzare concretamente questa situazione.

In quante regioni distinte lo spazio resta diviso da questi tre piani?

7). Sono dati un piano α e una retta r non perpendicolare ad α, incidente ad α. Quanti sono i piani contenenti r e perpendicolari ad α?

§3. POLIEDRI

Nel par. 1 abbiamo già considerato alcuni esempi di solidi delimitati da facce piane (il cubo, il parallelepipedo, il tetraedro,...). Tutti questi solidi sono esempi di *poliedri*. Vogliamo ora dare una definizione generale di *poliedro*. Cominciamo con l'osservare che ogni piano π divide lo spazio in due regioni disgiunte, dette **semispazi**. Se due punti A,B appartengono allo stesso semispazio, il segmento AB non interseca π; invece se due punti A,C appartengono a semispazi distinti, il segmento AC interseca π (vedi fig. 24).

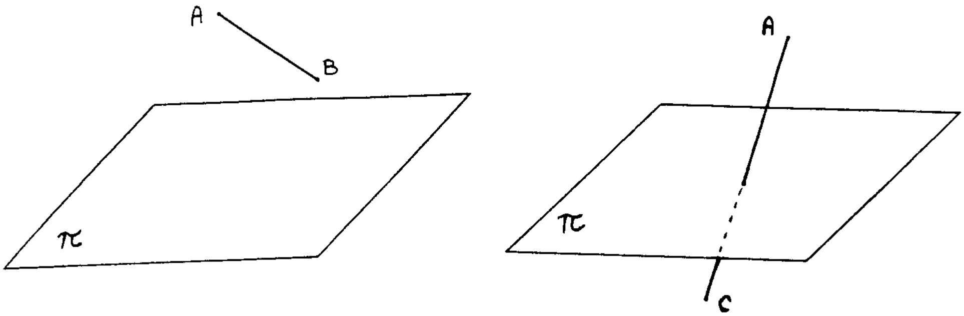


fig. 24

Consideriamo ora l'insieme Σ dei punti dello spazio appartenenti all'intersezione di un numero finito di *semispazi*. L'insieme Σ può assumere forme e proprietà diverse, che dipendono dalle posizioni dei piani che delimitano i semispazi e dal loro numero. Per es. l'intersezione di due semispazi delimitati da due piani incidenti dà luogo ad un *diedro*; l'intersezione di tre semispazi delimitati da tre piani passanti per uno stesso punto V dà luogo ad una figura chiamata *"triedro"* (vedi fig. 25).

Queste figure, anche se sono delimitate da due o da tre piani, vengono dette *illimitate* perché non sono tutte contenute in una parte finita di spazio.

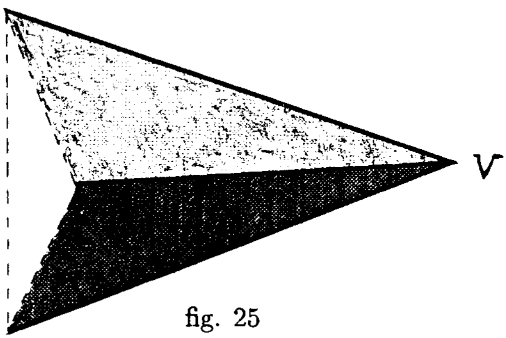


fig. 25

Un tetraedro è invece un esempio di figura *limitata*, che può essere vista come l'intersezione di quattro semispazi scelti opportunamente.

In certi casi, l'intersezione Σ di un numero finito di semispazi può anche essere vuota oppure può essere tutta contenuta in un unico piano.

Si chiama **poliedro** (convesso) l'intersezione Σ di un numero finito di semispazi, che sia limitata, ma non tutta contenuta in un unico piano. Dalla definizione risulta che ogni poliedro è una figura solida, delimitata da un numero finito di **facce** piane, che sono poligoni. I segmenti dove si incontrano due facce si chiamano **lati** o **spigoli**. I punti dove si incontrano 3 o più di 3 facce si chiamano **vertici**.

In fig. 26 sono rappresentati gli sviluppi piani di 5 poliedri. Oltre al tetraedro e al cubo, che già conosciamo. si tratta dell'**ottaedro**, del **dodecaedro** e dell'**icosaedro**: i loro nomi si riferiscono al numero delle facce. Si dimostra che nello spazio questi sono gli unici **poliedri regolari**, ossia gli unici poliedri che godono delle due proprietà seguenti:

1. Ogni vertice appartiene allo stesso numero di facce;
2. Le facce sono poligoni regolari, uguali tra loro (si ricordi che un poligono si dice *regolare* se tutti i suoi lati e tutti i suoi angoli sono uguali tra loro).

Si noti una differenza sostanziale tra la geometria del piano e quella dello spazio: nel piano esistono infiniti tipi di *poligoni regolari* (con un numero qualsiasi di lati); nello spazio esistono invece solo 5 tipi di *poliedri regolari*.

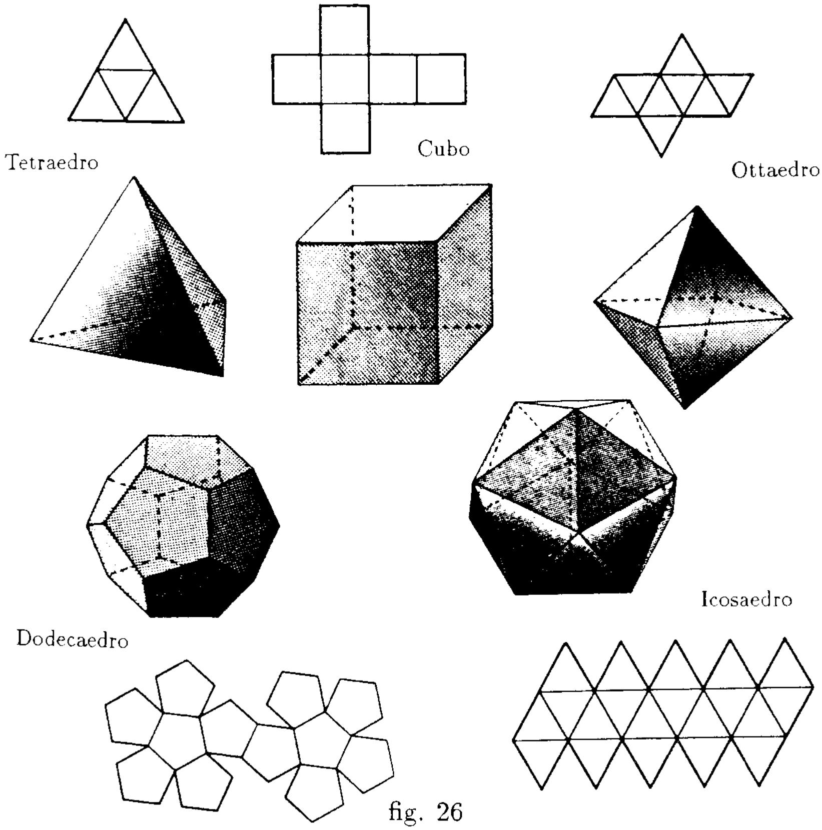


fig. 26

Naturalmente, oltre ai poliedri regolari, nello spazio esistono infiniti altri poliedri che non sono regolari: per es. i parallelepipedi, le piramidi, ecc. In fig. 27 sono rappresentati gli sviluppi piani di due ulteriori poliedri non regolari.

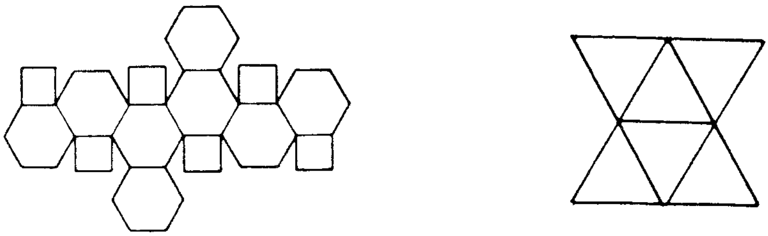


fig. 27

Oltre ai poliedri convessi, dei quali abbiamo parlato finora, si possono considerare anche figure di tipo più generale (*poliedri concavi*). Non approfondiremo questo argomento; ci limitiamo a mostrare lo sviluppo piano di un poliedro concavo (fig. 28).

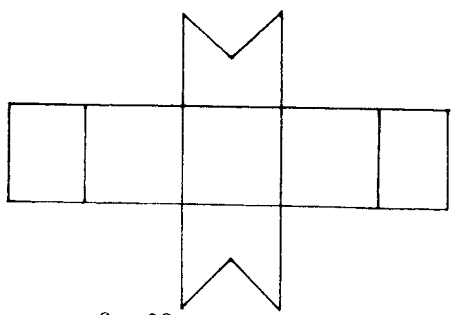


fig. 28

Ricordiamo infine la seguente definizione: data una piramide di vertice V e con base situata in un piano π , consideriamo la retta passante per V e perpendicolare al piano π. Sia H il punto di intersezione tra la retta e il piano. Il segmento VH si chiama **altezza** della piramide.

ESERCIZI

1). Costruite con carta o con cannucce da bibita: un ottaedro, un dodecaedro, un icosaedro, servendovi degli sviluppi piani disegnati in fig. 26.

2). Costruite con carta o con cannucce da bibita i poliedri i cui sviluppi piani sono disegnati in fig. 27 e in fig. 28.

3). Spiegate perché gli sviluppi piani disegnati in fig. 27 e in fig. 28 danno luogo a poliedri non regolari.

4). Indicate con F il numero delle facce, con S il numero degli spigoli e con V il numero dei vertici di un poliedro. Verificate, sulla base dei modellini di poliedri che avete costruito, che risulta sempre: F+V=S+2.

Osservazione. Questa uguaglianza è nota come *relazione di Eulero*. La dimostrazione del fatto che la relazione di Eulero vale in generale (per qualsiasi poliedro) non è facile.

5). Descrivete a parole: un cubo; un parallelepipedo rettangolo; un tetraedro; una piramide a base quadrata.

Suggerimento. Si tratta di precisare il numero e la forma delle facce, il numero dei lati e quello dei vertici.

6). In un cubo o in un parallelepipedo rettangolo i segmenti che congiungono due vertici non appartenenti alla stessa faccia si chiamano "diagonali".

(a) Quante sono queste diagonali?

(b) Se il lato di un cubo ha lunghezza a = 4 cm, calcolate la lunghezza di una diagonale del cubo. Se i lati di un parallelepipedo rettangolo hanno lunghezze a = 4 cm, b = 3 cm, c = 12 cm, calcolate la lunghezza di una diagonale del parallelepipedo.

Suggerimento. Individuate (nella figura spaziale) alcuni triangoli rettangoli e applicate ripetutamente il teorema di Pitagora.

7). Sopra una base quadrata con lato di 12 cm, si vuole costruire una piramide di altezza 8 cm. Calcolate le lunghezze dei lati dei 4 triangoli isosceli che formano la superficie laterale della piramide.

§4. SOLIDI ROTONDI

Oltre ai poliedri, nello spazio si possono considerare altre figure, già citate in precedenza: i coni, i cilindri, le sfere.

Vi sono vari modi per descrivere un **cono**:

(a) Con il suo sviluppo piano (vedi fig.29).

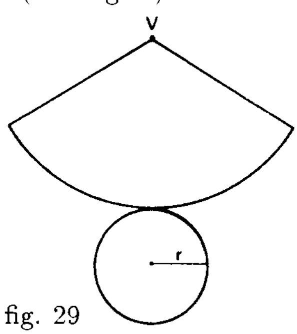


fig. 29

(b) Come la figura dello spazio che si ottiene col seguente procedimento:

si considera una circonferenza posta in un piano π ;

sulla retta passante per il centro della circonferenza e perpendicolare al piano π si fissa un punto V (vertice del cono);

si considerano i segmenti che congiungono V con i punti della circonferenza (vedi fig. 30).

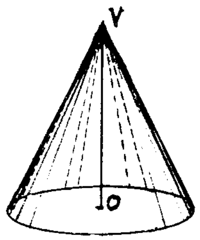


fig.30

(c) Come la figura generata (nello spazio) dalla rotazione di un triangolo rettangolo VAB intorno alla retta r che contiene il cateto VB (vedi fig. 31).

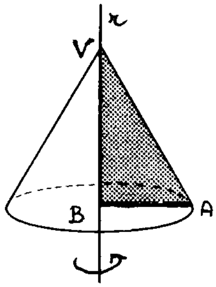


fig. 31

Nota. In questa rotazione, l'ipotenusa VA del triangolo VAB genera la "superficie laterale" del cono; il cateto AB genera invece la "base" del cono.

Il *cono*, come è stato definito qui, è una figura limitata dello spazio. Ma la stessa parola "cono" si usa spesso anche in un senso un po' diverso. Precisamente, nella costruzione (c), invece di far ruotare il triangolo VAB, si può far ruotare la *semiretta* Vs_1 (che contiene l'ipotenusa VA) intorno alla solita retta r (passante per V). Si ottiene una figura illimitata che viene chiamata ancora "cono", o – più esattamente – "cono illimitato" (intuitivamente si può pensare al fascio dei raggi luminosi di un faro di automobile, con la lampadina situata nel vertice V).

Infine, si può far ruotare addirittura tutta la *retta* s (che contiene l'ipotenusa VA) intorno alla retta r . Si ottiene una figura, formata da *due* coni illimitati, opposti l'uno all'altro, con lo stesso vertice. Anche questa ulteriore figura dello spazio viene chiamata "cono", oppure – volendo essere più precisi – "doppio cono (illimitato)".

fig. 32

Anche un **cilindro** può essere descritto in vari modi:
(a) Con il suo sviluppo piano (vedi fig. 33).

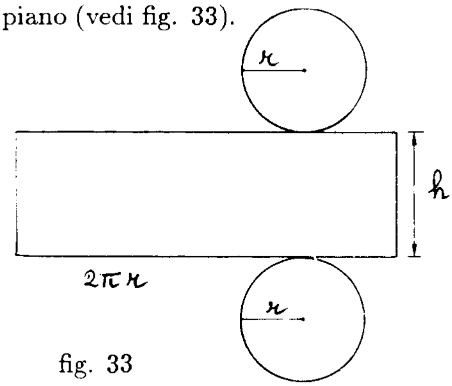


fig. 33

(b) Come la figura dello spazio che si ottiene a partire da due circonferenze uguali, disegnate in due piani paralleli e disposte in modo tale che la retta congiungente i centri O, O' delle circonferenze sia perpendicolare ai due piani: si congiungono poi tutti i punti della prima circonferenza con i corrispondenti punti della seconda, mediante segmenti paralleli ad OO' (vedi fig. 34).

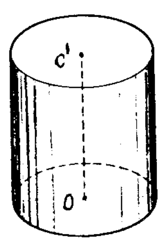


fig. 34

(c) Come la figura dello spazio che si ottiene facendo ruotare un rettangolo OO'AB intorno alla retta r che contiene il segmento OO' (vedi fig. 35).

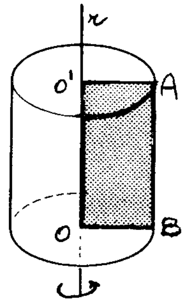


fig. 35

Nota. Esattamente come nel caso del cono, in questa rotazione il segmento AB genera la "superficie laterale" del cilindro, mentre la rotazione dei segmenti OA, O'B genera le due "basi" del cilindro.

Sempre in analogia col caso del cono, si può pensare di far ruotare intorno ad r tutta la retta s che contiene il segmento AB. Si ottiene una figura illimitata, che viene chiamata ancora "cilindro" o – piú esattamente – "cilindro illimitato".

Infine, la **sfera** viene definita come il luogo dei punti dello spazio che hanno una distanza fissata r da un punto C, detto **centro** della sfera; r si chiama **raggio** della sfera (vedi fig. 36).

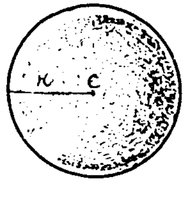


fig. 36

Per ottenere una sfera si può anche far ruotare nello spazio una circonferenza intorno alla retta r che contiene un suo diametro (anzi, basta far ruotare una semicirconferenza intorno al diametro che la delimita) (vedi fig. 37).

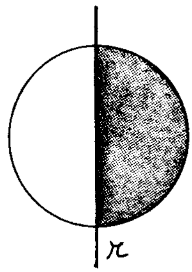


fig. 37

Nota. A differenza dei cilindri e dei coni, che pur essendo superficie "curve" possono essere sviluppate su un piano, la sfera non possiede questa proprietà (la dimostrazione non è elementare). Ciò spiega la difficoltà che si incontra quando si vuole rappresentare una porzione anche limitata della superficie terrestre mediante una carta geografica piana: sono inevitabili delle "distorsioni". In termini intuitivi, per sovrapporre la carta piana sulla porzione sferica rappresentata, si deve pensare ad una carta fatta di materiale elastico, che possa essere opportunamente allungato, accorciato, deformato. Non ci addentriamo in questo argomento. Osserviamo solo che esistono carte geografiche che godono di qualcuna delle seguenti proprietà, mentre non esiste nessun tipo di carta che gode simultaneamente di tutte queste proprietà:

(a) carte equivalenti (mantengono le proporzioni tra le aree)

(b) carte geodetiche (le distanze più brevi sulla superficie sferica, che sono gli archi di circonferenza massima, sono trasformate sulla carta in segmenti di rette)

(c) carte isogonali (mantengono le ampiezze angolari)

ecc.

ESERCIZI

1. Quali figure si ottengono intersecando una sfera con un piano?
2. Quali figure si ottengono intersecando un cilindro con un piano?
3. Quali figure si ottengono intersecando un cono con un piano?
4. Date la definizione di "altezza" di un cono, in analogia con la definizione di "altezza" di una piramide, già vista nel paragrafo precedente.
5. Descrivete il procedimento che si deve seguire per disegnare correttamente lo sviluppo piano di un cono con raggio di base r = 6 cm e altezza h = 8 cm.

§5. Volumi

Come nel caso delle figure del piano si parla di "aree", così nel caso delle figure dello spazio si parla di "volumi". Misurare il **volume** di una figura solida (si pensi per es. ad un cubo, ad una piramide o ad una sfera) equivale a stabilire la quantità di spazio che la figura racchiude. In termini intuitivi si può pensare alla figura come ad un contenitore vuoto al suo interno e allora il suo volume rappresenta la quantità di un liquido (o di sabbia) che può essere contenuta in quella figura. Due figure solide hanno lo stesso volume se possono contenere la stessa quantità di liquido (o di sabbia); il volume di una figura F_1 è minore del volume di una figura F_2 se la prima figura può contenere una minore quantità di liquido (o di sabbia).

Sarebbe assai scomodo dover misurare direttamente i volumi delle figure geometriche col metodo descritto sopra: per es. anche un'aula ha un suo volume, ma per misurarlo non sarebbe ragionevole riempirla di acqua o di sabbia. Per evitare questa difficoltà, i matematici hanno stabilito delle formule, che consentono di calcolare i volumi delle principali figure geometriche solide sulla base delle misure di certe lunghezze.

Di solito, si assume come unità di misura per i volumi un cubo di lato unitario. Per es. se il lato di un cubo misura 1 cm, si dice che il suo volume è 1 **centimetro cubo** (in simboli 1 cm^3); se il lato di un cubo misura 1 dm, si dice che il suo volume è 1 **decimetro cubo** (in simboli 1 dm^3); se il lato di un cubo misura 1 m, si dice che il suo volume è 1 **metro cubo** (in simboli 1 m^3), ecc. Il volume di 1 dm^3 viene chiamato anche **litro**.

In base alla definizione data, un solido come quello disegnato in fig. 38, formato da 6 cubi di lato 1 cm, avrà un volume di 6 cm^3.

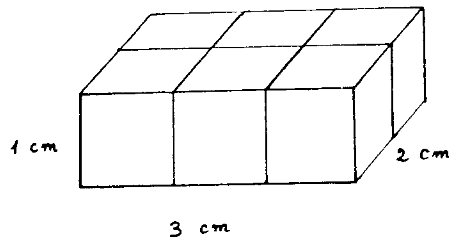


fig. 38

Le formule che consentono di calcolare il volume V di particolari solidi, a partire da opportune misure lineari, sono in genere difficili da ricavare. Ci limitiamo a ricordarne alcune, senza dimostrazione:

Cubo con lato di lunghezza a:

$$V = a^3$$

Parallelepipedo rettangolo coi lati di lunghezze a, b, c:

$$V = a \cdot b \cdot c$$

Cilindro con raggio di base r ed altezza h:

$$V = \text{Area della base} \cdot h = \pi \cdot r^2 \cdot h \ (dove\ \pi = 3,14...)$$

Piramide con base qualsiasi ed altezza h:

$$V = \frac{\text{Area della base} \cdot h}{3}$$

Cono con raggio di base r ed altezza h:

$$V = \frac{\text{Area della base} \cdot h}{3} = \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot h \ (dove\ \pi = 3,14...)$$

Sfera di raggio r:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3 \ (dove\ \pi = 3,14...).$$

Come nel piano si distingue tra la superficie di una figura e il suo contorno (perimetro), così nello spazio si deve distinguere tra il *volume* di una figura solida e la sua *superficie*. Non diamo formule esplicite in proposito. Osserviamo solo che, se un solido possiede uno sviluppo piano, l'area della sua superficie si può calcolare in base alla conoscenza di tale sviluppo.

Per es. la misura della superficie di un cubo di lato a è data dalla somma delle aree dei sei quadrati che la compongono; quindi, in formule: $A = 6a^2$.

Analogamente, la misura della superficie di un cilindro è data dalla somma della sua area laterale e delle aree delle due basi, ecc.

Se invece il solido non possiede sviluppi piani, il calcolo dell'area della sua superficie diventa più difficile. Per es. si potrebbe dimostrare che la formula per la superficie di una sfera di raggio r è:

$$A = 4\pi r^2 \quad (\text{dove } \pi = 3,14...)$$

ESERCIZI

1). Esprimete in cm^3, in dm^3, in m^3 il volume di un cubo di lato 1 m.

2). I lati di un parallelepipedo rettangolo hanno le seguenti misure: a = 4 cm, b = 5 cm, c = 7 cm. Calcolatene il volume.

3). Una piramide con base quadrata ha le seguenti misure: lato di base a = 6 cm, altezza h = 18 cm.

(a) Calcolatene il volume.

(b) Calcolate la lunghezza del lato di un cubo che abbia lo stesso volume della piramide.

4). Calcolate il volume di un cilindro con raggio di base r = 5 cm e altezza h = 7 cm.

5). Calcolate il volume di un cono con raggio di base r = 5 cm e altezza h = 7 cm.

6). Calcolare il volume di una sfera con raggio r = 4 cm.

7). Una sfera è inscritta in un cilindro, come disegnato in figura. Calcolate il rapporto tra i loro volumi.

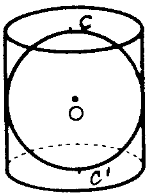


fig. 39

8). Tenendo presente che 1 dm^3 equivale per definizione ad 1 litro e sapendo che 1 litro di acqua pesa 1 kg, calcolate il peso di un cubo con lato a = 1 m, riempito di acqua.

6. SIMILITUDINE

Osservate la situazione visualizzata in fig. 40. Un disegno, realizzato nel piano α, viene proiettato dal punto S in un piano β. Se i due piani sono tra loro paralleli, come in figura, allora i due disegni hanno la stessa forma, ma grandezza diversa. Si dice che si è realizzata una **similitudine** tra il piano α e il piano β.

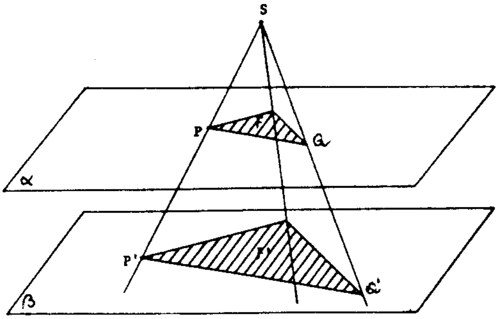


fig. 40

Naturalmente questo è solo uno dei modi possibili per realizzare concretamente una similitudine. Più in generale, svincolandoci dal particolare metodo di costruzione usato e dalla particolare posizione dei piani α, β nello spazio, possiamo dare la seguente definizione: una corrispondenza biunivoca tra i punti P,Q,R,.... di un piano α e i punti P',Q',R',... di un piano β si chiama **similitudine** se i rapporti tra le lunghezze dei segmenti corrispondenti sono tutti uguali tra loro:

$$\frac{P'Q'}{PQ} = \frac{Q'R'}{QR} = ... = k.$$

Il numero k si dice **rapporto di similitudine.**

Due figure si dicono simili, se esiste una similitudine che trasforma l'una nell'altra.

A volte non si fa distinzione fra i due piani α e β e si parla semplicemente di figure simili di uno stesso piano.

Dal fatto che le similitudini mantengono la forma delle figure, segue (lo si potrebbe dimostrare rigorosamente) che: *in una similitudine tutte le ampiezze angolari rimangono invariate.*

Esempi.

1. Due figure uguali sono sempre simili (con rapporto di similitudine $k = 1$).

2. Due quadrati sono sempre simili tra loro. Se per es. si disegna un quadrato con lato a = 2 cm, e poi un quadrato con lato a'= 7 cm, la similitudine che fa passare dal primo quadrato al secondo ha rapporto di similitudine $k = \frac{7}{2} = 3,5$.

3. Invece un rettangolo con i lati a = 3 cm , b = 5 cm non risulta simile ad un rettangolo con i lati a' = 6 cm , b' = 15 cm , perchè i rapporti fra le lunghezze dei lati corrispondenti sono diversi tra loro.

Si faccia molta attenzione al seguente fatto: se due figure si corrispondono in una similitudine, con rapporto di similitudine k, il rapporto tra le aree delle due figure è k^2.

Quanto ai triangoli, si hanno i seguenti tre criteri di similitudine, analoghi ai tre criteri di uguaglianza, già visti nel cap. II (per le notazioni, ci riferiamo alla figura 41):

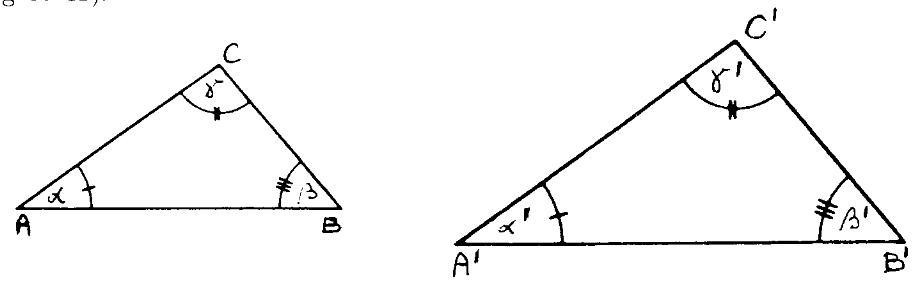


fig. 41

1) Se due triangoli hanno gli angoli a due a due uguali ($\alpha = \alpha', \beta = \beta', \gamma = \gamma'$) allora essi sono simili.

2) Se due triangoli hanno due lati in proporzione e l'angolo compreso uguale (per es. $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$ e $\alpha = \alpha'$) allora essi sono simili.

3) Se due triangoli hanno i tre lati in proporzione ($\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$) allora essi sono simili.

La nozione di similitudine si può estendere anche alle figure solide. Non affronteremo questo argomento; ci limitiamo ad osservare che se due figure solide si corrispondono in una similitudine con rapporto di similitudine k, il rapporto tra i volumi delle due figure è k^3.

ESERCIZI

1). Due triangoli equilateri sono sempre simili?

2). Due triangoli rettangoli sono sempre simili?

3). Due circonferenze sono sempre simili?

4). Due rombi sono sempre simili?

5). Una carta geografica è stata realizzata in scala di $1 : 250\,000$. Ciò significa che (a parte le inevitabili distorsioni della rappresentazione) 1 cm sulla carta equivale a 250000 cm = 2500 m nella realtà.

(a). Sulla carta la distanza tra due località misura 3 cm; qual è la distanza reale tra le due località?

(b). Sulla carta una provincia copre (approssimativamente) l'area di un quadrato con lato di 12 cm; qual è l'area reale di quella provincia?

Capitolo IV: ALGEBRA

§ 1. Generalizzare

Abbiamo già usato molte volte le parole *generale* e *particolare* per indicare due concetti l'uno opposto all'altro:

particolare è una proprietà o un risultato che si riferisce a un singolo caso;
generale si riferisce invece a un insieme di molti casi, spesso in numero infinito.

Generalizzare significa estendere un risultato ottenuto in un singolo esempio (cioè in un caso particolare) in modo che sia valido per tutta una classe di altri casi.

Per esempio, le proprietà delle operazioni aritmetiche sono state da noi in un primo momento (cap I, §1) introdotte con esempi su numeri particolari, come $(3-5)\cdot 2 = 3\cdot 2 - 5\cdot 2$. In seguito (cap I, §4) abbiamo scritto analoghe uguaglianze in forma più generale, come $(x-y)\cdot z = x\cdot z - y\cdot z$. Quest'ultima vale per ogni scelta di x, y, z; da essa si ottiene la prima sostituendo i particolari valori $x = 3$, $y = 5$, $z = 2$.

L'uso delle lettere x, y, z, serve a trattare un insieme di casi che non si potrebbero mai elencare uno per uno. È dunque importante imparare a compiere le operazioni (addizioni, moltiplicazioni ecc.) sulle lettere, e questo è appunto il soggetto di questo capitolo. Ecco alcuni problemi che illustrano l'uso delle lettere per generalizzare.

A) Consideriamo un triangolo rettangolo con i cateti lunghi 3 cm e 4 cm. Se scopriamo (misurando con il righello) che l'ipotenusa misura 5 cm, otteniamo un risultato relativo a quel particolare triangolo rettangolo (fig. 1). Se invece affermiamo (cfr. cap II, §10) che per un triangolo rettangolo qualunque, indicate con a, b le lunghezze dei cateti e con c quella della sua ipotenusa, vale la relazione

(Teorema di Pitagora, cfr. cap II §10)

$$a^2 + b^2 = c^2$$

questa informazione non riguarda solo un particolare rettangolo, ma *tutti* i possibili triangoli rettangoli. Il caso particolare si ha sostituendo $a = 3$, $b = 4$ e porta a $c = 5$.

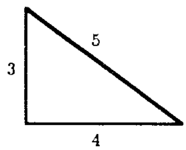


Fig 1

generalizzare

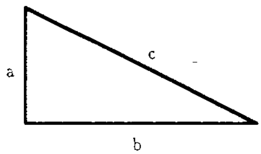


Fig 2

B) Ecco un semplice indovinello:

"*Pensa ad un numero, raddoppialo, aggiungi 6, dividi la somma trovata per due, togli al risultato il numero stesso. È vero che si ottiene sempre 3?*"

Si può provare con qualche esempio. Proviamo con 5, poi con 7.

– il numero è	5	7
– lo raddoppio:	$2 \cdot 5 = 10$	$2 \cdot 7 = 14$
– aggiungo 6:	$2 \cdot 5 + 6 = 16$	$2 \cdot 7 + 6 = 20$
– divido la somma per due:	$\frac{2 \cdot 5 + 6}{2} = 8$	$\frac{2 \cdot 7 + 6}{2} = 10$
– sottraggo al risultato il numero da cui sono partito:	$\frac{2 \cdot 5 + 6}{2} - 5 = 3$	$\frac{2 \cdot 7 + 6}{2} - 7 = 3$

Sarà un caso? Si può riprovare con altri numeri più grandi, più piccoli, frazionari, negativi, ecc. Si otterrà sempre 3. Per essere certi che il risultato sia *sempre* 3, non posso provare con tutti i numeri: conviene sostituire al posto del numero una lettera, per esempio n, e operare così:

– il numero è	n
– lo raddoppio:	$2n$
– aggiungo 6:	$2n + 6$
– divido la somma per due:	$\frac{2n+6}{2} = \frac{2n}{2} + \frac{6}{2} = n + 3$
– sottraggo al risultato il numero pensato:	$n + 3 - n = 3$

Poichè n sta al posto di un qualsiasi numero, siamo certi che otterremo *sempre* 3.

C) Prendiamo uno spago lungo 60 cm e annodiamo le due estremità. Tendiamolo con le dita delle mani fino ad ottenere un rettangolo. Cambiando la posizione delle dita possiamo ottenere rettangoli diversi, che però avranno lo stesso perimetro (= la lunghezza dello spago). Si nota che l'area invece cambia. Per esempio:

base	**altezza**	**area**
20 cm	10 cm	200 cm^2
25 cm	5 cm	125 cm^2
12 cm	18 cm	216 cm^2
15 cm	15 cm	225 cm^2

L'area massima sembra corrispondere al rettangolo con base ed altezza uguali, cioè al quadrato. Si può pensare che, in generale, valga la proprietà: "*tra i rettangoli che hanno un perimetro assegnato, il quadrato è quello di area massima*".

Ma per essere certi che questo enunciato sia vero, non bastano molte prove su casi numerici; occorre una dimostrazione in cui ai numeri si sostituiscono le lettere. Procediamo così:

Si consideri un quadrato di lato a (e perimetro $4a$ = lunghezza dello spago). Allora ogni rettangolo che ha lo stesso perimetro del quadrato si ottiene allungandone la base di una quantità x e accorciandone l'altezza della stessa quantità x. Il rettangolo ha dunque base $a + x$ ed altezza $a - x$ e la sua area vale $A' = (a+x) \cdot (a-x)$. Osservando la fig. 3, si vede che il rettangolo si può pensare ottenuto dal quadrato di area a^2, prima togliendogli il rettangolo in alto di area $a \cdot x$, poi aggiungendogli il rettangolo a destra di area $x \cdot a$, infine sottraendo il quadratino di area x^2. Allora $A' = a^2 - ax + ax - x^2 = a^2 - x^2$. Questo numero è ottenuto da a^2 sottraendovi un numero x^2 che è sempre positivo se $x \neq 0$ (cioè se non si tratta del quadrato). Si vede allora che risulta $A' < a^2$, cioè il quadrato ha area maggiore di tutti i rettangoli con lo stesso perimetro.

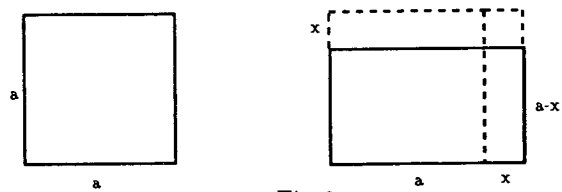


Fig.3

Ci chiediamo ora: è possibile calcolare $(a+x)(a-x)$ senza ricorrere alla rappresentazione geometrica? Trattiamo le lettere come se fossero numeri e adoperiamo le note proprietà delle operazioni (cap. I,§4): se nell'operazione $(a+x)(a-x)$ applichiamo la proprietà distributiva tre volte, otteniamo $A' = a\cdot(a-x)+x\cdot(a-x)$ $= a\cdot a - a\cdot x + x\cdot a - x\cdot x = a^2 - x^2$. Questo è quanto ci serviva.

D) Consideriamo un trapezio $ABCD$ con le dimensioni indicate nella fig.4. Facendolo ruotare attorno alla sua base maggiore si ottiene una figura solida (fig.4), di cui vogliamo calcolare il volume V.

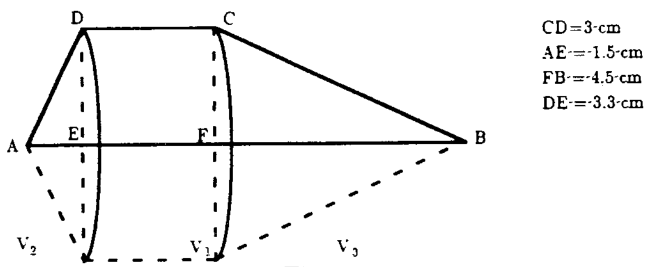


Fig.4

Questo solido si può pensare ottenuto dalla somma di tre sue parti: il cilindro centrale di volume V_1 (ottenuto ruotando il rettangolo $CDEF$), il cono di sinistra di volume V_2 (ottenuto ruotando il triangolo AED) e quello di destra di volume V_3 (ottenuto ruotando CFB). Allora $V = V_1 + V_2 + V_3$. Possiamo calcolare i tre volumi (cfr. cap IV,§5)

$$V_1 = \pi\cdot(3,3)^2\cdot 3, \qquad V_2 = \frac{1}{3}\pi\cdot(3,3)^2\cdot 1,5, \qquad V_3 = \frac{1}{3}\pi\cdot(3,3)^2\cdot 4,5$$

e poi sommarli. Ma in questo modo si deve fare un gran numero di moltiplicazioni e infine una somma. È molto più conveniente osservare invece che in ciascuno dei tre calcoli di volume compaiono dei fattori comuni, e cioè: il numero π e la misura del raggio r (comune alla base di coni e cilindri) elevata al quadrato.

Usando la proprietà distributiva, scriviamo

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot 3 + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot 1,5 + \frac{1}{3}\pi \cdot r^2 \cdot 4,5 = \pi \cdot r^2 \cdot (3 + 0,5 + 1,5) = \pi \cdot r^2 \cdot 5$$

Se ora sostituiamo al posto di r il numero $3,3$ siamo ridotti a calcolare

$$V = 5 \cdot \pi \cdot (3,3)^2 = \pi \cdot 54,25$$

Per il calcolo complessivo, il vantaggio è evidente: dopo la facile somma, ci restano da fare poche moltiplicazioni.

E) Problema: *Calcolate le somme dei primi numeri naturali dispari:* 1, $1+3$, $1+3+5$, $1+3+5+7\ldots$ *ecc. È vero che tutte queste somme sono quadrati (cioè numeri naturali elevati alla potenza 2)?*

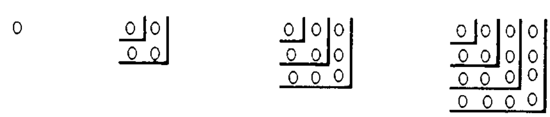
Proviamo anzitutto con le prime 5 somme; ma poi cerchiamo di scoprire una *legge* che si riferisca al caso generale:

$1 = 1$	il primo
$1 + 3 = 4$	i primi 2
$1 + 3 + 5 = 9$	i primi 3
$1 + 3 + 5 + 7 = 16$	i primi 4
$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25$	i primi 5

Qui si osserva che le somme sono dei *quadrati* e anzi, se chiamiamo n il numero degli addendi, si può pensare che, in generale, valga l'enunciato:

La somma dei primi n numeri dispari è n^2.

Anche qui si possono fare delle figure che ci suggeriscono che l'enunciato è vero.



1=1 1+3=4 1+3+5=9 1+3+5+7=16

Fig.5

Proviamo ora a dimostrare lo stesso risultato con l'algebra. Osserviamo che

il 1° di questi numeri è	$1 = 2 \cdot 1 - 1$
il 2° è	$3 = 2 \cdot 2 - 1$
il 3° è	$5 = 2 \cdot 3 - 1$
il 4° è	$7 = 2 \cdot 4 - 1$
......	......
e dunque l'n−esimo è	$2 \cdot n - 1$

Allora la somma dei primi n numeri dispari vale

$$S = 1+3+5+\ldots+(2n-1) = (2\cdot 1-1)+(2\cdot 2-1)+(2\cdot 3-1)+\ldots+(2\cdot n-1).$$

Supponiamo anzitutto che n sia pari e osserviamo che gli addendi (cioè i numeri tra le parentesi) si possono associare il primo con l'ultimo, il secondo col penultimo ecc. secondo lo schema

$$\begin{array}{lcrl}
2\cdot 1-1 & + & 2\cdot n-1 & = 2n \\
\quad 2\cdot 2-1 & + & 2\cdot(n-1)-1 & = 2n \\
\qquad 2\cdot 3-1 & + & 2\cdot(n-2)-1 & = 2n \\
\qquad\quad 2\cdot 4-1 & + & 2\cdot(n-3)-1 & = 2n \\
\qquad\qquad \ldots\ldots & + & \ldots\ldots & = 2n
\end{array}$$

Abbiamo qui riscritto gli addendi usando $\frac{n}{2}$ righe, per accorgerci che il contributo di ogni riga alla somma è sempre lo stesso e vale $2n$. In definitiva la somma complessiva vale $S = \frac{n}{2} \cdot 2n = n^2$ come volevamo. Resta da studiare il caso in cui n è dispari; ma allora $n-1$ è pari e dunque, per quanto appena visto, la somma dei primi $n-1$ numeri vale $(n-1)^2 = (n-1)\cdot(n-1) = n^2 - 2\cdot n + 1$. Aggiungendo a questa somma anche l'ultimo addendo $2n-1$ si ottiene di nuovo n^2. La dimostrazione è finita.

E) Prendiamo un foglio di carta (rettangolare) e pieghiamolo parallelamente al lato più lungo in 4 parti uguali (fig. 6). Prendiamo poi un altro foglio eguale al precedente e pieghiamolo parallelamente al lato più corto, ancora in 4 parti eguali (fig. 7).

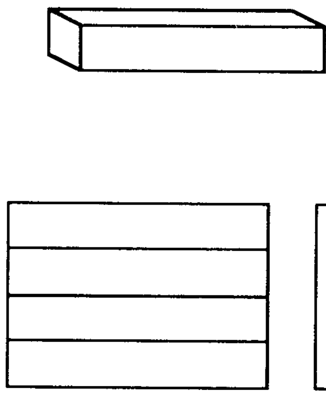


Fig. 6

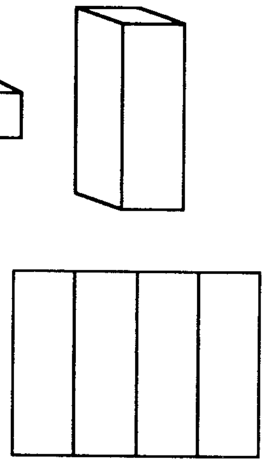


Fig. 7

Pensiamo a queste due figure come sviluppi delle superficie laterali di due differenti parallelepipedi a base quadrata. Problema: *quali sono i volumi dei due solidi? quale dei due ha volume maggiore?*

Naturalmente possiamo misurare i lati del particolare foglio di cui disponiamo e incominciare a fare i calcoli numerici dei volumi. Ma è più conveniente lasciare indicate le dimensioni del foglio con due lettere. Indichiamo con

a la lunghezza del lato lungo

b la lunghezza del lato corto

Primo parallelepipedo: la base è un quadrato di lato $\frac{b}{4}$; dunque ha area $\frac{b^2}{16}$.

L'altra dimensione (altezza) è a e dunque il volume è $\frac{a \cdot b^2}{16}$.

Secondo parallelepipedo: la base è un quadrato di lato $\frac{a}{4}$; dunque ha area $\frac{a^2}{16}$.

L'altra dimensione (altezza) è b e dunque il volume è $\frac{a^2 \cdot b}{16}$. Allora il rapporto tra i due volumi è

$$\frac{\frac{a \cdot b^2}{16}}{\frac{a^2 \cdot b}{16}} = \frac{b}{a}.$$

Poiché abbiamo preso $a > b$ concludiamo che il secondo ha volume maggiore del primo. Ora abbiamo una formula generale, un'informazione molto più ricca di quanto avremmo ottenuto partendo dai particolari dati dei nostri fogli.

(Si può provare a costruire i due parallelepipedi con un cartoncino $20 \cdot 30$ cm^2, appoggiarli sulla base quadrata e riempirli di sabbia. Ci si accorgerà che per riempire il secondo, cioè quello ottenuto piegando parallelamente al lato più corto, occorre una quantità di sabbia maggiore, il 50% in più di quella occorrente per riempire il primo).

G) *Un capitale viene depositato in una banca al tasso d'interesse annuo del 10%. Quant'è diventato il capitale dopo 5 anni? E dopo 10? E dopo n anni?*

Indichiamo con C il capitale [per esempio $C = 1\,000\,000$ scellini]. Dopo un anno ho l'interesse del 10% : $i = 0,1 \cdot C$ [= 100 000 scellini]. Quindi dopo un anno in banca trovo un nuovo capitale

$$C' = C + i = C + 0,1 \cdot C = C(1 + 0,1) = C \cdot 1,1$$

[= 1 000 000 + 100 000 = 1 100 000 scellini]

L'interesse del prossimo anno si applica al nuovo capitale. Perciò dopo due anni lo stesso capitale è diventato

$$C'' = C' + 0,1 \cdot C' = C \cdot (1 + 0,1)^2$$

$$[= 1\,100\,000 + 110\,000 = 1\,210\,000 = 1\,000\,000 \cdot (1,1)^2 = 1\,000\,000 \cdot 1,21].$$

L'interesse del terzo anno si applica a C'', perciò dopo 3 anni il capitale è diventato

$$C''' = C'' \cdot (1 + 0,1) = C' \cdot (1 + 0,1)^2 = C \cdot (1,1)^3 = C \cdot 1,331.$$

Dopo un numero n qualunque di anni posso direttamente trovare il capitale scrivendo

$$C^{(n)} = C \cdot (1 + 0,1)^n$$

Con questi esempi si è voluto sottolineare il vantaggio che offre il calcolo con le lettere. Tutte le regole di questo *calcolo letterale* dipendono in definitiva dalle proprietà delle operazioni tra i numeri, esposte nel Cap. I, che nella prossima pagina riassumiamo per comodità.

ESERCIZI

1) Indicato con x un qualsiasi numero naturale, rappresentate mediante le espressioni polinomiali nella varibile x i seguenti numeri:
   1) un numero pari
   2) un numero dispari
   3) la somma di due numeri pari consecutivi
   4) il prodotto di quattro numeri dispari consecutivi
   5) il quadrato della somma di due numeri consecutivi
   6) la somma dei quadrati di due numeri consecutivi, diviso il prodotto del doppio del primo per il secondo.

2) Un capitale C frutta il 100% l'anno; ecco i successivi valori del capitale:

inizio 1° anno	C
fine 1° anno	C+C
inizio 2° anno	C+C= 2C
fine 2° anno	2C+2C= 4C

quale sarà il capitale alla fine del 5° anno? E alla fine dell' n−esimo anno?
Si ripeta l'esercizio sapendo che il rendimento è del 50%.

3) Dimostrate che se si aggiunge alla somma di due numeri la loro differenza si ottiene come risultato il doppio del primo numero.

Alcune proprietà delle operazioni e relazioni

(cfr. Cap.I, §2, 3, 4)

riflessiva
$$x = x$$

simmetrica
$$x = y \quad \Rightarrow \quad y = x$$

transitiva
$$x = y, \quad y = z \quad \Rightarrow \quad x = z$$

commutativa
$$x + y = y + x \qquad xy = yx$$

associativa
$$(x + y) + z = x + (y + z) \qquad (xy)z = x(yz)$$

zero e uno
$$x + 0 = x \qquad x \cdot 1 = x$$

opposto e inverso
$$x + (-x) = 0 \qquad x \cdot \frac{1}{x} = 1$$
$$-(-x) = x \qquad \frac{1}{1/x} = x$$

$$x + (-y) = x - y \qquad x \cdot \frac{1}{y} = \frac{x}{y}$$
$$-(x + y) = -x - y \qquad \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$$

prodotti e quozienti
$$\frac{x}{y} = \frac{w}{z} \quad \Leftrightarrow \quad xz = yw$$
$$\frac{x}{y} + \frac{w}{z} = \frac{xz + wy}{yz} \qquad \frac{x}{y} \cdot \frac{w}{z} = \frac{xw}{yz}$$
$$\frac{x}{y} - \frac{w}{z} = \frac{xz - wy}{yz} \qquad \frac{x/y}{w/z} = \frac{xz}{yw}$$

distributiva
$$x(y + z) = xy + xz \qquad x(y - z) = xy - xz$$
$$\frac{x + y}{z} = \frac{x}{z} + \frac{y}{z} \qquad \frac{x - y}{z} = \frac{x}{z} - \frac{y}{z}$$
$$x \cdot 0 = 0$$

regole dei segni
$$x(-y) = (-x)y = -(xy) \qquad \frac{x}{-y} = \frac{-x}{y} = -\frac{x}{y}$$
$$(-x)(-y) = xy \qquad \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y}$$

potenze

$$x^0 = 1 \qquad x^1 = x \qquad x^{m+1} = x^m x \qquad x^{-n} = \frac{1}{x^n}$$

$$x^m x^n = x^{m+n} \qquad (x^m)^n = x^{mn} \qquad (xy)^m = x^m y^m$$

disuguaglianze

$$x > y, \quad y > z \quad \Rightarrow \quad x > z$$

$$x > y \quad \Leftrightarrow \quad x + m > y + m$$

$$Se\ m > 0: \ x > y, \quad \Leftrightarrow \quad xm > ym$$

$$Se\ m < 0: \ x > y, \quad \Leftrightarrow \quad xm < ym$$

$$x^2 \geq 0$$

valore assoluto

$$|x| \cdot |y| = |x \cdot y| \qquad |x + y| \leq |x| + |y|$$

§ 2. Calcolo con le lettere

RIORDINARE I FATTORI

Cominciamo da un esempio numerico. Per calcolare il prodotto

$$\left[4\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(-7)\right]$$

possiamo procedere in vari modi. Per esempio

I) eseguire prima le operazioni entro le parentesi quadre e poi l'altra

$$\left[4\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(-7)\right]=\left[-\frac{4}{7}\right]\cdot\left[-\frac{7}{2}\right]=2$$

oppure

II) applicare la proprietà associativa e commutativa e riscrivere

$$\left[4\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)\right]\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)\cdot(-7)\right]=\left[4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\right]\cdot\left[\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot(-7)\right]=2.$$

Si vede che il secondo metodo è più conveniente.

Se invece che con i numeri abbiamo a che fare con le lettere, nel moltiplicare

$$[-axb]\cdot[-abcx]$$

i prodotti entro le parentesi quadre non si possono scrivere in modo più conveniente; possiamo però togliere le parentesi (associativa), cambiare l'ordine dei fattori (commutativa) e, usando la notazione delle potenze, riscrivere in forma più semplice

$$[-axb]\cdot[-abcx]=a^2b^2cx^2$$

Osserviamo anche che abbiamo disposto le lettere in ordine alfabetico; è una scelta comoda, non obbligatoria.

DISTRIBUIRE UN FATTORE

Anche per calcolare il prodotto

$$3 \cdot (5 + 4)$$

si può procedere in due modi:

I) eseguire subito l'addizione e poi moltiplicare per **3**, cioè scrivere

$$3 \cdot (5 + 4) = 3 \cdot 9 = 27$$

oppure

II) applicare la proprietà distributiva della moltiplicazione rispetto all'addizione

$$3 \cdot (5 + 4) = 15 + 12 = 27.$$

Se invece abbiamo a che fare con lettere

$$a \cdot (b + c)$$

non possiamo applicare il primo procedimento (perchè $b + c$ non può che rimanere così indicato); si può invece applicare il secondo procedimento, e scrivere

$$a(b + c) = ab + ac \tag{1}$$

Esempi:

$$2ab^2\left(3ab + \frac{1}{2}a^2b\right) = 6a^2b^3 + a^3b^3$$
$$4xy(x + y + 1) = 4x^2y + 4xy^2 + 4xy$$
$$(x + y)x = x^2 + xy$$
$$(x + y)a + (x + y)b = ax + ay + bx + by$$

METTERE IN EVIDENZA (o RACCOGLIERE) UN FATTORE COMUNE

Possiamo scrivere l'uguaglianza (1) scambiando il primo con il secondo membro:

$$ab + ac = a(b + c) \tag{2}$$

Diciamo allora che (nel passare dal primo al secondo membro) abbiamo *raccolto a fattor comune* la lettera a.

Esempi:

$$ax - ay + az = a(x - y + z)$$
$$5a + 15ab + 20a^2 = 5a(1 + 3b + 4a)$$
$$8x + 4xy - 2x^3 = 2x(4 + 2y - x^2)$$

ADDIZIONE E SOTTRAZIONE

Più in generale, per sommare (o sottrarre) due espressioni letterali si possono adoperare opportunamente le proprietà commutativa ed associativa dell'addizione, le regole del passaggio all'opposto e la proprietà distributiva.

Esempi:

$(a+b-c)+(3a-2b+c) = a+b-c+3a-2b+c = (a+3a)+(b-2b)-c+c = 4a-b$

$(a+b-c)-(3a-2b+c) = a+b-c-3a+2b-c = (a-3a)+(b+2b)+(-c-c) =$
$= -2a + 3b - 2c$

$a^2xy + bx^2y^2 - 10xy + 3a - 2y = x(a^2y + bxy^2 - 10y) + 3a - 2y$

Nei primi tre addendi si è raccolto x; si potrebbe invece raccogliere y in altri addendi e scrivere anche

$$.... = (a^2x + bx^2y - 10x - 2)y + 3a.$$

In generale, nel calcolo letterale certi *passaggi* (cioè rielaborazioni delle scritture) non si devono considerare obbligatori. Come nell'ultimo esempio, per certi scopi può essere utile raccogliere un fattore oppure l'altro, o anche lasciare tutto com'era.

MOLTIPLICAZIONE

Qui si richiede maggior attenzione. Premettiamo ancora un esempio numerico:

$$(8+2)(5+4)$$

I modo:	eseguo le addizioni indicate	$= 10 \cdot 9$
	poi la moltiplicazione	$= 90$
II modo:	applico la proprietà distributiva	$= (8+2)\cdot 5 + (8+2)\cdot 4$
	eseguo le addizioni nelle parentesi	$= 10 \cdot 5 + 10 \cdot 4$

	poi le moltiplicazioni	$= 50 + 40$
	infine le addizioni	$= 90.$
III modo:	applico la proprietà distributiva	$= (8+2)\cdot 5 + (8+2)\cdot 4$
	applico di nuovo la proprietà distributiva	$= 8\cdot 5 + 2\cdot 5 + 8\cdot 4 + 2\cdot 4$
	poi eseguo le moltiplicazioni	$= 40 + 10 + 32 + 8$
	infine le addizioni	$= 90.$

Passiamo al caso letterale:(a+b)(c+d)

Qui l'unico modo di procedere nel calcolo è il III:

$$(a+b)(c+d) = (a+b)c + (a+b)d = ac + bc + ad + bd \tag{3}$$

oppure

$$= a(c+d) + b(c+d) = ac + ad + bc + bd$$

In definitiva: *per moltiplicare due somme si moltiplica ciascun addendo del primo fattore per ciascun addendo del secondo fattore e poi si sommano i prodotti ottenuti.*

Esempi:

$(6x^2+2)(3x^2-1) = 18x^4 - 6x^2 + 6x^2 - 2 = 18x^4 - 2$

$(3u-2v)(10u+v) = 30u^2 + 3uv - 20vu - 2v^2 = 30u^2 - 17vu - 2v^2$

SCOMPOSIZIONE IN FATTORI

La (3) si può guardare da destra a sinistra, e allora si tratta di mettere in evidenza (varie volte) dei fattori comuni

$$ac + bc + ad + bd = (a+b)c + (a+b)d = (a+b)(c+d) \tag{4}$$

Poiché il risultato è un prodotto, si dice anche che si è ottenuta una scomposizione (o decomposizione) in fattori, o *fattorizzazione*.

Esempi:

$3a + 3x + ab + bx = 3(a+x) + b(a+x) = (3+b)(a+x)$

$a^2x^2y - b^2x^2y - a^2x + b^2x = x[xy(a^2-b^2) - (a^2-b^2)] = x(a^2-b^2)(xy-1)$

DIVISIONE

Una frazione tra espressioni letterali si può scrivere in modo più semplice *cancellando* uno stesso *fattore* che compaia al numeratore e al denominatore. Qualche volta un fattore comune non si vede subito, ma si può metterlo in evidenza (raccoglierlo).

Per esempio:

$$\frac{5ax + 10ay}{x + 2y} = \frac{5a(x + 2y)}{x + 2y} = 5a$$

$$\frac{ab^2x + 5a}{a(x + b)} = \frac{a(b^2x + 5)}{a(x + b)} = \frac{b^2x + 5}{x + b}$$

$$\frac{x^2 - y^2}{(x - y)(x^2 + xy + y^2)} = \frac{(x - y)(x + y)}{(x - y)(x^2 + xy + y^2)} = \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}.$$

Se è utile si può procedere scrivendo

$$\ldots. = \frac{x}{x^2 + xy + y^2} + \frac{y}{x^2 + xy + y^2}.$$

Abbiamo qui usato la proprietà: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$.

Attenzione: sarebbe stato sbagliato eguagliare $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ e sarebbe stato sbagliato eguagliare $\frac{a+b}{a+c} = \frac{b}{c}$.

PRODOTTI NOTEVOLI

Alcuni prodotti di espressioni letterali si incontrano ripetutamente in varie occasioni. È utile perciò eseguirne il calcolo una volta per tutte, imparandone poi i risultati a memoria. Questi prodotti si chiamano qualche volta **prodotti notevoli**. I più frequenti sono i seguenti:

1) $(a + x)(a - x) = a^2 - x^2$

2) $(a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 \qquad (a - x)^2 = a^2 - 2ax + x^2$

3) $(a + x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3$

4) $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

Abbiamo detto che è bene memorizzare questi risultati. Ma, se la memoria viene meno, occorre saperli ricavare, scrivendo per esempio

$$(a + x)^2 = (a + x)(a + x) = a^2 + ax + xa + x^2 = a^2 + 2ax + x^2$$

Di una di queste relazioni abbiamo già dato un'interpretazione geometrica (cfr. §1, fig.3). Anche le altre si possono rappresentare come un calcolo di aree o volume. Per la 4), per esempio, partendo da un quadrato di lato a (la cui area è a^2) si può aumentare ogni suo lato prima della quantità b, poi ancora di c (cfr. fig. 8) e produrre nuovi quadrati. La superficie del quadrato di lato $a+b+c$ si ripartisce in 9 parti, le cui aree corrispondono ai 9 addendi $a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2$ che poi si scrive $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.

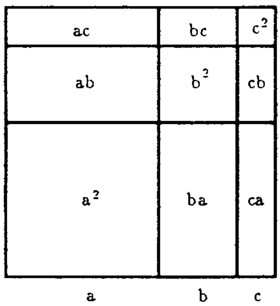


Fig.8

Si possono guardare le uguaglianze 1)... 4) anche da destra a sinistra ed ottenere altrettante *scomposizioni di particolari polinomi in fattori*:

$$a^2 - x^2 = (a+x)(a-x) \qquad a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2 \quad \text{ecc.}$$

e in particolare $\quad 4a^2 - b^2 = (2a-b)(2a+b) \qquad 4a^2 - 4ab + b^2 = (2a-b)^2$ ecc.

Aggiungiamo infine qualche altra relazione utile, che generalizza le precedenti

5) $a^n + x^n = (a+x)(a^{n-1} - a^{n-2}x + a^{n-3}x^2 + \ldots - ax^{n-2} + x^{n-1})$
valida solo per n dispari;

6) $a^n - x^n = (a-x)(a^{n-1} + a^{n-2}x + a^{n-3}x^2 + \ldots + ax^{n-2} + x^{n-1})$
valida per n qualsiasi;

7) $(a+x)^n = a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}x + \binom{n}{2}a^{n-2}x^2 + \ldots + \binom{n-2}{n}a^2x^{n-2} + $
$+\binom{n-1}{n}ax^{n-1} + x^n$

Quest'ultima uguaglianza viene chiamato lo sviluppo del **binomio di Newton**: i suoi coefficienti sono appunto i *coefficienti binomiali* $\binom{n}{k}$ che abbiamo introdotto nel §14 del Cap. I.

ESERCIZI

1) Scomporre in fattori

1)	$ac - bc$	**3)**	$abc - 3ax$
	$ac + c^2$		$4ab - 2ac$
	$b^2 - bc$		$\frac{2}{3}ab - \frac{1}{3}a$
	$a^2 + a^3$		$2a^2b^2 + 2a^3b$
2)	$a^2b - 2a$	**4)**	$4x - 4 + 4y$
	$xy^2 - y^2$		$3xy - 2x^2z + 2x^3 + 3x$
	$3c - c^2$		$5x^2 - x - 5xy$
	$ab + 2a$		$2ax - 4ay + 2a^2 + 4a$

Altri esercizi relativi a questi argomenti si trovano alla fine del §3.

§ 3. Polinomi

(In questo § introduciamo la nomenclatura matematica, cioè i nomi tecnici che si usano nel calcolo con le lettere; poiché il calcolo effettivo è già descritto nel § precedente, il presente § non è essenziale per il seguito).

Un **monomio** è una scrittura (si dice anche un'*espressione*) che indica un prodotto di numeri (reali) e lettere, del tipo

$$a \cdot y \cdot z \qquad 2 \cdot a \cdot 5 \cdot y \qquad x \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) \qquad 6 \cdot x \cdot y \cdot x.$$

In queste espressioni, le lettere *indicano* sempre numeri, che però non sono stati ancora specificati (come si è visto negli esempi del §1, le lettere svolgono un ruolo di *segnaposti* per i numeri, che solo in un secondo tempo saranno sostituiti da particolari numeri). Nella moltiplicazione, per le lettere valgono le proprietà della moltiplicazione valide per i numeri; per esempio, applicando le proprietà associativa e commutativa e la notazione delle potenze, i precedenti monomi si possono riscrivere come segue:

$$2 \cdot a \cdot 5 \cdot y = 10ay \qquad x \cdot \left(-\frac{5}{3}\right) = -\frac{5}{3}x \qquad 6 \cdot x \cdot y \cdot x = 6x^2y.$$

Più generalmente, *in un monomio* conviene moltiplicare tra loro quei fattori che sono numeri, scrivendo poi il risultato *prima* delle lettere; quanto ai fattori che sono lettere, di solito si riordinano (per esempio in ordine alfabetico) e se alcune lettere si ripetono (cioè se compaiono più volte) anche queste si conglobano in una stessa *potenza*. Il risultato di queste *manipolazioni* di un monomio si chiama la sua **forma normale**: in essa si distingue il fattore numerico, detto **coefficiente** dalla *parte letterale*. Ecco alcuni esempi:

monomio	forma normale	coefficiente (numerico)	parte letterale
$x2ya3bya$	$6a^2bxy^2$	6	a^2bxy^2
$-x^6x^4$	$(-1)x^{10}$	-1	x^{10}
$u^5(3-10,5)$	$-7,5u^5$	$-7,5$	u^5

Le lettere $x, y, a, b, \ldots$ si chiamano **indeterminate** (o **variabili**).

In un monomio, una volta scritto in forma normale, fissiamo l'attenzione su una certa variabile, per esempio x, e consideriamo l'esponente di quella lettera x. Questo numero si chiama **grado in** x (cioè *nella variabile* x) di quel monomio. Per esempio:

sono monomi di grado 2 in x: $5abx^2y^5, \quad 5x^2y, \quad x^2$

sono monomi di grado 5 in y: $5abx^2y^5, \quad -x^4y^5$

Vi sono anche monomi in cui la lettera x non appare; conviene allora considerarli

monomi di grado 0 (in x): $\qquad 2ay = 2ax^0y, \quad -5 = -5x^0.$

Un numero come -5 oppure 1 si può considerare un monomio di grado zero (in qualunque variabile). Anche il numero 0 si può pensare come monomio, ma non gli si assegna nessun grado.

Due monomi si chiamano **simili** se (in forma normale) hanno la stessa parte letterale, come negli esempi:

$$-3x^2y^5, \quad 10x^2y^5, \quad 7x^2y^5, \qquad \text{oppure} \qquad 13a^3, \quad -a^3.$$

Due monomi si possono **moltiplicare** per ottenere ancora un monomio, sempre applicando l'associatività della moltiplicazione; ecco esempi di moltiplicazioni, il cui prodotto è stato poi portato a forma normale

$$(-3x^2y^5) \cdot (10x^2y^6) = -3 \cdot 10 \cdot x^2x^2 \cdot y^5y^6 = -30x^4y^{11}$$

$$(-5ab^2y^5) \cdot (10ax^2y^5) = -50a^2b^2x^2y^{10}$$

Un **polinomio** è una somma di (uno o più) monomi. In altre parole, un polinomio è un'espressione che *indica* somme (e differenze) di prodotti di numeri e lettere. Per esempio

$$-3bx^2y + 10ax^2y^5 - 3abcx^4y^6$$

Non possiamo di solito *eseguire* questa somma come si farebbe con i numeri: dobbiamo lasciarla indicata. Impariamo a distinguere varie specie di polinomi aiutandoci con i seguenti esempi:

A) $1 + x^2 - y^2$ B) $4a^2bx^2 + by$ C) $\frac{7}{3}x^2 - \frac{2}{5}$

D) $\frac{4x - 2y}{y + x}$ E) $7z^5$ F) $x^2ya3bya$

Anzitutto osserviamo che A), B), C), E), F) sono polinomi, ma D) *non* è un polinomio, perché vi è una divisione che coinvolge lettere (torneremo più tardi su questo tipo di espressioni).

I polinomi si possono classificare secondo vari aspetti. Per quanto si riferisce *al numero degli addendi* diremo che

E) e F), come sappiamo, sono **monomi**; infatti sulle lettere si esegue soltanto la moltiplicazione (non si usano l'addizione e la sottrazione);

B) e C) sono **binomi** perché somme di due monomi;

A) è un **trinomio**: è somma di tre monomi.

Per quanto si riferisce al *numero delle indeterminate* diremo che

C) ed E) sono polinomi **in una** (sola) **indeterminata** (o **variabile**), perché vi compare una sola lettera.

A) è un polinomio **in 2 variabili** (o indeterminate) x, y.

B) e F) sono polinomi nelle 4 indeterminate a, b, x, y.

Monomi e polinomi si possono **sommare** (o sottrarre) e **moltiplicare** per ottenere altri polinomi. Anche per queste operazioni si applicano con le lettere (come con i numeri) le proprietà commutativa, associativa e distributiva. Ecco alcuni esempi:

a) $4a^2bx^2 + by = by + 4a^2bx^2 = b(y + 4a^2x^2)$

b) $(x - 5)(x + y - 2) = x(x + y - 2) + (-5)(x + y - 2) =$
$= xx + xy + x(-2) + (-5)x + (-5)y + (-5)(-2) =$
$= x^2 + xy - 2x - 5x - 5y + 10 = x^2 + xy - 7x - 5y + 10$

c) $(x + 1)^2 - y^2 = (x + 1)(x + 1) - y^2 = x \cdot x + x \cdot 1 + 1 \cdot x + 1 \cdot 1 - y^2 =$
$= x^2 + 2x + 1 - y^2$

d) $(1 + x^2 + y^2) \cdot (4a^2bx^2 + by) = 1 \cdot (4a^2bx^2 + by) + x^2 \cdot (4a^2bx^2 + by) +$
$+ y^2 \cdot (4a^2bx^2 + by) = (4a^2bx^2 + by) + (x^2 4a^2bx^2 + x^2by) + (y^2 4a^2bx^2 + y^2by) =$
$= 4a^2bx^2 + by + 4a^2bx^4 + bx^2y + 4a^2bx^2y^2 + by^3$

Si osservi, in particolare, che se due monomi sono simili, la loro somma è ancora un monomio simile ai precedenti:

$$4a^2bx^2 - 6a^2bx^2 = -2a^2bx^2 \qquad\qquad -by + 12by = 11by$$

Se due monomi non sono simili, la loro somma deve restare indicata, e non si producono semplificazioni di scrittura.

Sappiamo che un polinomio si può scrivere in varie forme. Di solito (ma non per tutti gli usi) per dare a un polinomio una forma conveniente ci si prende cura di

- scriverlo come somma di monomi (eseguendo prima le eventuali moltiplicazioni)
- ordinare le lettere in ciascun monomio
- riscrivere tutti i monomi nella forma normale, in modo da riconoscere i simili
- sommare gli eventuali monomi simili.

Queste precauzioni spesso aiutano ad effettuare correttamente le operazioni tra polinomi.

Si chiama **grado di un polinomio** il massimo tra i gradi dei suoi monomi (dopo l'eventuale conglobamento dei monomi simili). Per esempio

$$3x^5 + 12x^3 - 2 \qquad \text{è un polinomio di grado 5 (in } x\text{)}$$

In un polinomio in tre indeterminate x, y, z come $3x^2y^5z - 10x^4y^2z$ si dice che

4	è il suo grado rispetto a x
5	è il suo grado rispetto a y
1	è il suo grado rispetto a z
$8 = 2 + 5 + 1$	è il grado complessivo del primo monomio
$7 = 4 + 2 + 1$	è il grado complessivo del secondo monomio
8	è il grado complessivo del polinomio.

Tra i polinomi, hanno particolare importanza i **polinomi in una indeterminata**, cioè quelli in cui compare soltanto una lettera (per esempio la lettera x).

In questo caso un monomio, in forma normale, è il prodotto di un numero per una potenza di x, per esempio $-7x^4$, x^2, $-10x$, 2. L'esponente che compare in questa potenza è il grado del monomio. Dopo la riduzione dei monomi simili, ogni polinomio si scrive dunque come somma di potenze diverse di x, ciascuna con il suo **coefficiente**. Esempio:

Il polinomio	$3x^4 - 10x^3 + x + 20$	è un polinomio di grado	4
Coefficienti:	3	è il coefficiente di grado	4
	-10	è il coefficiente di grado	3
	0	è il coefficiente di grado	2
	1	è il coefficiente di grado	1
	20	è il coefficiente di grado	0

Mancando il monomio di grado 2, conviene pensarlo presente nella forma $0x^2$. Nella scrittura del polinomio si preferisce spesso ordinare i monomi secondo il grado: prima il monomio di grado massimo, ultimo quello di grado zero.

Un polinomio di grado n nella variabile x si indica qualche volta con la scrittura

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$$

Qui si intende che i simboli a_n, a_{n-1}, …, a_2, a_1, a_0 indicano i numeri (reali) che abbiamo chiamato **coefficienti** di grado $n, n-1, \ldots, 2, 1, 0$.

Come si è visto nel §1, si usano spesso i polinomi per effettuare calcoli generali; in un secondo tempo si **sostituiscono** le lettere con particolari numeri. Dopo le sostituzioni (cfr. anche il cap. I, §4) il *valore* del polinomio può essere calcolato eseguendo le operazioni numeriche indicate. Se si sostituiscono tutte le lettere con numeri, il risultato è un numero. Altrimenti è un nuovo polinomio.

Svolgiamo l'esercizio: *calcolare il valore che assumono i polinomi*

A) $1 + x^2 - y^2$ B) $4a^2bx^2 + by$ C) $\frac{7}{3}x^2 - \frac{2}{5}$

quando si sostituiscono i valori $x = -1$, $y = \frac{1}{3}$, $a = -2$.

Dopo le sostituzioni il polinomio A) prende il valore $\frac{17}{9}$. Infatti

$$1 + x^2 - y^2 = 1 + (-1)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 + 1 - \frac{1}{9} = \frac{17}{9}.$$

B) $4a^2bx^2 + by = 4(-2)^2b(-1)^2 + b\frac{1}{3} = 4 \cdot 4 \cdot b \cdot 1 + \frac{b}{3} = \left(16 + \frac{1}{3}\right)b = \frac{49}{3}b.$

In questo caso la sostituzione produce un polinomio nella sola variabile b.

C) $\frac{7}{3}x^2 - \frac{2}{5} = \frac{7}{3}(-1)^2 - \frac{2}{5} = \frac{29}{15}.$

Consideriamo la seguente istruzione: *Dividere la somma di due numeri a e b per un numero c.*

L'espressione che la traduce in simboli è $\dfrac{a+b}{c}$ cioè una frazione tra polinomi (qualche volta la si chiama una **frazione algebrica**).

Ecco altri esempi di frazioni aventi al numeratore e al denominatore polinomi (o monomi):

$$\frac{3a^2b}{2b}, \qquad \frac{x+y}{x-y}, \qquad \frac{3a^2 - b^2}{a^2 + 2b^2}.$$

Queste frazioni si trattano con le stesse regole delle frazioni tra numeri; per esempio

$$\frac{3x2y}{2x} = 3y; \qquad \frac{6a - 12b}{2ax - 4bx} = \frac{6(a-2b)}{2x(a-2b)} = \frac{3(a-2b)}{x(a-2b)} = \frac{3}{x}.$$

Così, se riusciamo a individuare un fattore (un polinomio) comune al numeratore e al denominatore, possiamo **ridurre** la frazione **ai minimi termini**, dividendo numeratore e denominatore per la stessa espressione. Qualche volta il fattore comune non è evidente:

$$\frac{x^3 + 8}{x + 2} = \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x + 2} = x^2 - 2x + 4.$$

In altri casi come $\dfrac{x+y}{x-y}$, non ci sono fattori comuni e non si può semplificare.

Le somme e i prodotti di frazioni di polinomi si eseguono con le solite regole. Per esempio, per sommare occorre **ridurre al comune denominatore**:

$$\frac{1}{x+y} - \frac{1}{x-y} = \frac{x-y}{(x+y)(x-y)} - \frac{x+y}{(x+y)(x-y)} = \frac{(x-y)-(x+y)}{x^2 - y^2} = \frac{-2y}{x^2 - y^2}$$

$$\frac{\dfrac{a+b+2}{\dfrac{2a+x}{a-x}}}{} = \frac{(a+b+2)(a-x)}{2a+x}.$$

Anche nelle frazioni di polinomi possiamo *sostituire* alle lettere particolari valori numerici. Però dobbiamo aver cura di non scegliere quei particolari valori che annullino i denominatori (altrimenti la divisione non ha significato).

Per esempio, nella frazione $\frac{x+y}{x-y}$ possiamo sostituire $x = 3$, $y = -2$ per ottenere $\frac{x+y}{x-y} = \frac{3-2}{3+2} = \frac{1}{5}$. Ma non possiamo sostituire $x = 3$, $y = 3$, perché si annullerebbe il denominatore $x - y = 3 - 3 = 0$.

ESERCIZI

1) Riscrivete in una forma più semplice i seguenti polinomi, precisando quale proprietà delle operazioni avete usato:

1) $aaaa =$

2) $a + a + a + a =$

3) $3aaabb =$

4) $3xxyy2yy5 =$

5) $a + a + a + b + b =$

6) $3x + 2x =$

7) $3x^2y + \frac{5}{2}x^2y + 2xy^2 + xy^2 =$

In quale caso avete ottenuto un monomio?

In quale un binomio?

Qual è il monomio di grado più alto tra quelli ottenuti?

2) Calcolate le seguenti somme di monomi (simili):

$a + a + a =$ $\qquad$ $a + 2a - a - 7a =$

$2a - (a - 3a) =$ $\qquad$ $4aba - ba(2a) =$

$xy + 3yx - yx =$

Verificate i risultati ottenuti sostituendo alla lettera a i valori $1, -3$.

(Per esempio scrivo $a + a = 2a$ e verifico che per $a = 2$ risulta $2 + 2 = 2 \cdot 2$).

3) Verificate quali delle seguenti uguaglianze sono vere e quali no:

1) $2a + 3 = 5a$
2) $1 + 3a = 4a$
3) $1 - 4x + 3 = 0$
4) $a - a = 0$
5) $ab + ba = a2b2$
6) $ab + ba = 2a + 2b$
7) $a - a = 1$
8) $4 - 6x + 2x = 0$
9) $4x - 6x = -2x$
10) $4 - 6x + 2x = 4 - 4x$
11) $2a - a + 3 = a + 1$
12) $ab + ba = 2ab$
13) $a - a - 1 = 0$
14) $aa + 1 = 2$

Controllate le risposte date, sostituendo alle lettere i valori $a = 3, b = 2, x = -2$.

4) Calcolate i seguenti prodotti, scrivendo il risultato in forma normale:

1) $2a \cdot 3a^2$
2) $a^4b \cdot ab^2$
3) $xy \cdot 3y \cdot 2x$
4) $(3x^2y)^2$
5) $\frac{8}{5}a^5b \cdot \frac{1}{3}c^3 \cdot \frac{10}{3}b^2c^3$
6) $a \cdot \frac{2}{3}$
7) $\left(-\frac{4}{5}xy^2\right)^3$
8) $3a \cdot \frac{1}{2}$

5) Trovate un monomio che moltiplicato per ciascuno dei seguenti monomi dia per risultato $20x^4y^3z^2$;

$$5x^4; \qquad 4y^3z; \qquad -20x^4y^3z^2; \qquad \frac{1}{3}z$$

6) Fra le seguenti espressioni, considerate quelle che sono monomi; scriveteli in forma normale e segnalate il grado complessivo ed il coefficiente.

1) $2a \cdot 3a$
2) $a^4b \cdot ab^2$
3) $xy \cdot 3 + y \cdot 2x$
5) $\frac{8}{5}a^5b + \frac{1}{3}c^3 \cdot \frac{10}{3}b^2c^3$
6) $a\frac{2}{3} + a$
7) $\left(-\frac{4}{3}xy^2\right)^3$

4) $(3xy)^2 + 10x^2y^2$ 8) $3a\left(\frac{1}{2} + \frac{12}{7}\right)$

7) Considerate le principali figure geometriche (triangolo, rettangolo, cerchio, cubo, cono, cilindro, ecc). Indicate con le lettere le varie dimensioni (per esempio *base* $= b$, *altezza* $= h$, *raggio* $= r$ ecc.) e scrivete le formule per le aree e i volumi di tali figure. Quali tra queste formule si possono mettere sotto la forma di un monomio? quali di un polinomio?

8) Riconoscete quali dei seguenti monomi si possono esprimere come il quadrato o il cubo di un opportuno monomio e completate l'uguaglianza (per esempio: $16a^2b^4 = (4ab^2)^2$).

1) $16x^2 =$	6) $-a^2 =$
2) $-y^6$	7) $\frac{27}{8}a^3x^9 =$
3) $\frac{25}{36}a^6x =$	8) $\frac{y^2}{4} =$
4) $-\frac{1}{8}a^{12} =$	9) $x^9y^{15} =$
5) $8x^3 =$	10) $-4x^2 =$

9) Eseguite le seguenti operazioni tra polinomi, riordinandone il risultato (addendi in forma normale ecc.)

1) $(3x - 2y) + 2(4x - 2y + 6) =$
2) $(2x - xy + 2) - (x - y + 10) =$
3) $(x - y + 1)(z - 1) - (2z - 3)(x + y) =$
4) $(x - 3)(x - y) + xy =$
5) $(3x - 5y - 3)(2x - 5y + 10) - 6x^2 + 2(3x - 4) =$
6) $(3a^2 - 5b^2 + ab - 3b)(2a + 10) - 6b + 2(3ab - 4)(4ab - 34) =$
7) $(3x^2 - 5y^2 + xy - 3)(2x - 5y + 10) - 6x^3 + 2(3xy^3 - 4) =$

10) Riducete ai minimi termini le seguenti frazioni di polinomi:

1) $\dfrac{a^2 + 2a}{a^2} = \dfrac{a(a+2)}{a^2} = \dfrac{a+2}{a}$

2) $\dfrac{a^2 - b^2}{2a - 2b} = \dfrac{(a+b)(a-b)}{2(a-b)} = \dfrac{a+b}{2}$

3) $\dfrac{a^2 - ab + 3a - 3b}{a^2 + 6a + 9} =$

4) $\dfrac{ab^2}{a^2b^2 - ab} =$

§ 4. Radicali

Finora abbiamo sviluppato il calcolo con le lettere limitatamente alle operazioni razionali (addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni, divisioni, potenze ad esponente intero positivo).

Vogliamo estenderlo al calcolo delle radici (ovvero potenze con esponente razionale).

Richiamiamo la definizione di potenza già data nel Cap. I,§7.

Se a indica un numero reale non nullo e n indica un numero intero, abbiamo chiamato potenza $n-$esima di a il numero

$$a^n = \begin{cases} a & \text{se } n = 1 & \text{cioè } a^1 = a \\ a \cdot a \cdots a \ (n \text{ volte}) & \text{se } n \geq 2 & \\ 1 & \text{se } n = 0 & \text{cioè } a^0 = 1 \\ \dfrac{1}{a} & \text{se } n = -1 & \text{cioè } a^{-1} = \dfrac{1}{a} \\ \left(\dfrac{1}{a}\right)^{-n} & \text{se } n \leq -2 & \end{cases}$$

Inoltre, se $a > 0$, $n \neq 0$, abbiamo introdotto anche le potenze con esponente frazionario facendo ricorso alle **radici $n-$esime**: la radice $\sqrt[n]{a}$ è il numero positivo la cui potenza $n-$esima vale a, cioè risulta $(\sqrt[n]{a})^n = a$. Allora abbiamo definito:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}, \qquad a^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{a})^m$$

Tra le proprietà generali delle potenze ricordiamo le seguenti:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ **2)** $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

3) $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ **4)** $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$

$$\mathbf{5)}\ (a^m)^n = (a^n)^m = a^{mn}$$

Poiché queste proprietà valgono anche per esponenti frazionari, possiamo ricavarne delle regole di calcolo con le radici, che ora vogliamo ricordare.

PROPRIETÀ DEI RADICALI

Un'espressione del tipo $\sqrt[n]{a^m}$ si chiama **radicale**; più in generale, un radicale è una radice ($n-$esima) di qualche altra espressione, per esempio di un polinomio $\sqrt{a^2+b^2}$.

n si chiama l'**indice** della radice; **radicando** è ciò che compare sotto il segno di radice. Per esempio nel radicale $\sqrt[2]{a^2+b^2}$ l'indice è 2 e il radicando è a^2+b^2.

I calcoli con i radicali si basano sulle proprietà delle potenze sopra indicate. Partiremo con esempi numerici e poi passeremo al calcolo letterale.

1) Dovendo calcolare la radice

$$\sqrt[6]{25^3}$$

si può semplificare l'indice della radice con l'esponente del radicando e scrivere

$$\sqrt[6]{25^3} = \sqrt{25} = 5.$$

Questa semplificazione è possibile perché con la proprietà 5) si calcola

$$\sqrt[6]{25^3} = 25^{\frac{3}{6}} = 25^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{2}} = 5^1 = 5$$

In generale si ha: *uno stesso fattore che compaia nell'indice e nell'esponente del radicando si può cancellare*:

$$\sqrt[np]{a^{mp}} = a^{\frac{mp}{np}} = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \tag{1}$$

2) Dovendo eseguire la moltiplicazione

$$\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{4}$$

non conviene certo calcolare separatamente le due radici cubiche. Si può fare così:

$$\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{16 \cdot 4} = \sqrt[3]{64} = 4.$$

Infatti applicando la proprietà 3):

$$\sqrt[3]{16} \cdot \sqrt[3]{4} = 16^{\frac{1}{3}} \cdot 4^{\frac{1}{3}} = (16 \cdot 4)^{\frac{1}{3}} = 64^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{64} = 4$$

e in generale

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \tag{2}$$

3) Analogo risultato vale per la divisione. Per calcolare

$$\frac{\sqrt{768}}{\sqrt{3}}$$

si può scrivere per la 4)

$$\frac{\sqrt{768}}{\sqrt{3}} = \frac{768^{\frac{1}{2}}}{3^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{768}{3}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{768}{3}} = \sqrt{256} = 16$$

e in generale:

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \tag{3}$$

Concludiamo: *Se si tratta del prodotto (o quoziente) di due radici con lo stesso indice, si può unificare la radice e moltiplicare (o dividere) i radicandi.*

4) Dovendo eseguire successive estrazioni di radici, quali

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}}$$

per la proprietà 5) si possono *moltiplicare gli esponenti* per ridursi ad un'unica radice:

$$\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \left((64)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} = (64)^{\frac{1}{6}} = (2^6)^{\frac{1}{6}} = 2^{6\frac{1}{6}} = 2^1 = 2.$$

In generale si ha

(4)
$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Osserviamo con attenzione che proprietà analoghe non valgono per l'addizione e la sottrazione di due radicali. Per esempio:

$$\sqrt{16} + \sqrt{9} = 4 + 3 = 7 \quad \text{mentre} \quad \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

$$\sqrt{1000} - \sqrt{100} = 10\sqrt{10} - 10 = 10(\sqrt{10} - 1) = 10 \cdot (3,15\ldots - 1) = 21,5\ldots$$

$$\text{e invece } \sqrt{1000 - 100} = \sqrt{900} = 30.$$

Con le proprietà (1), (2), (3) *si possono moltiplicare o dividere due radicali qualsiasi per ottenerne un terzo*: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{2^4} \cdot \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{2^4 \cdot 5^3} = \sqrt[12]{2000}$

e in generale

(5)
$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[nm]{a^m b^n}$$

(6)
$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[nm]{\frac{a^m}{b^n}}$$

Qualche volta un'espressione che contiene dei radicali si può riscrivere in forma più conveniente applicando qualche *accorgimento* (o *trucco*) di calcolo. Per esempio, ricordando il prodotto notevole $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ si calcola

$$(3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 3^2 - (\sqrt{2})^2 = 9 - 2 = 7.$$

Analogamente

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b.$$

Un altro esempio: moltiplicando numeratore e denominatore di una frazione per uno stesso fattore, si può eliminare una radice dal denominatore:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \quad \text{e più generalmente} \quad \frac{1}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a}.$$

Altre volte il fattore si deve trovare con maggiore abilità:

$$\frac{3-\sqrt{2}}{5+\sqrt{3}} = \frac{(3-\sqrt{2})(5-\sqrt{3})}{(5+\sqrt{3})(5-\sqrt{3})} = \frac{15-3\sqrt{3}-5\sqrt{2}+\sqrt{6}}{22}.$$

ESERCIZI

1) Calcolate (con approssimazione alle prime cifre decimali) le seguenti potenze:

a) 3^2; 3^{-2}; 5^3; 5^{-3}; $\left(\frac{1}{2}\right)^3$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$; $\left(\frac{1}{3}\right)^4$; $\left(\frac{1}{3}\right)^{-4}$

b) $(0,1)^3$; $(0,1)^{-3}$; $(0,9)^3$; $(0,9)^{-3}$; 4^1; 4^{-1}; 3^0; $(0,5)^0$

c) $(-8)^2$; $(-2)^3$; $(-2)^4$; $(-2)^{-3}$; $(-8)^{\frac{2}{3}}$; $(-8)^{-\frac{2}{3}}$

2) Calcolate i seguenti radicali:

a) $\sqrt[4]{4^2}$; $\sqrt[6]{4^3}$; $\sqrt[4]{16}$; $\sqrt[3]{1}$; $\sqrt[4]{0}$; $\sqrt[4]{9}$; $\sqrt[4]{\sqrt{3^2}}$; $\sqrt[3]{27}$

b) $\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt{2}$; $\sqrt[4]{2^3}\cdot\sqrt[4]{2}$; $\dfrac{\sqrt{125}}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{\sqrt[3]{81}}{\sqrt[3]{3}}$

c) $\sqrt{\sqrt{16}}$; $\sqrt[3]{\sqrt{64}}$; $\sqrt{\sqrt{10000}}$; $\sqrt{\sqrt{625}}$; $\sqrt{\sqrt[3]{1}}$; $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

§ 5. Equazioni

PRIME CONSIDERAZIONI ED ESEMPI

Esaminiamo qualche problema.

A) *Il doppio di un numero n è uguale al numero stesso aumentato di tre. Chi è n?*

B) *La somma di un numero con il suo doppio è il triplo del numero. Qual è il numero?*

C) *In un triangolo rettangolo un cateto è lungo 6cm e l'ipotenusa 10 cm. Quant'è lungo l'altro cateto?*

D) *Le velocità di due corpi A e B variano col tempo secondo le leggi*

$$V_A = t + 5, \qquad V_B = 3t + 1$$

i) *Dopo quanto tempo i due corpi hanno velocità uguale?*

ii) *Dopo quanto tempo la velocità del corpo B è tre volte quella di A ?*

In alcuni problemi è già presente una lettera (n in A, t in D) che indica una grandezza *incognita*, cioè una quantità che deve essere trovata (o *determinata*).

Anche gli altri problemi si studiano meglio se si introduce (cfr. anche il § 1) una lettera (per esempio n per il problema B; nel problema D possiamo indicare con x la lunghezza del cateto sconosciuto).

In tutti questi problemi, sono descritte le *condizioni* alle quali la grandezza incognita deve soddisfare. Con il linguaggio dell'algebra queste condizioni si scrivono rispettivamente:

A) $2n = n + 3$

B) $n + 2n = 3n$

C) $x^2 + 36 = 100$

D) i) $t + 5 = 3t + 1$ ii) $3t + 1 = 3(t + 5)$

Scritture di questo tipo si chiamano **equazioni**. Si tratta di *uguaglianze* tra due espressioni che contengono (in uno o nei due membri) una lettera che indica una grandezza **incognita**.

Non si tratta di uguaglianze tra espressioni letterali nel senso del §2; in quel caso infatti ogni sostituzione (di lettere con numeri) portava ad un'uguaglianza vera mentre ad esempio nella D i polinomi $t + 5$ e $3t + 1$ non sono eguali. In questo caso intendiamo ricercare quei *particolari numeri* che, sostituiti all'incognita, rendono l'uguaglianza vera o *soddisfatta*.

Risolvere un'equazione vuol dire trovarne le **soluzioni**, cioè determinare (di solito, con un calcolo) quei particolari numeri.

Osserviamo che vi sono equazioni che possiedono *una sola soluzione*, altre che ne hanno *più di una* (anche moltissime), altre che non ammettono *nessuna soluzione*. Per esempio:

L'equazione A) ha una **soluzione unica** che è il valore $n = 3$; ce ne possiamo convincere sostituendo sistematicamente i numeri naturali al posto dell'incognita n. Troviamo allora

valore di n	primo membro	secondo membro	
1	2	4	
2	4	5	
3	6	6	solo qui i due membri sono uguali
4	8	7	
5	10	8	

e si capisce che è inutile continuare.

B) ha molte soluzioni; anzi ogni numero è una soluzione, perché ogni numero, sostituito a n, rende vera quell'uguaglianza. Equazioni di questo tipo si chiamano equazioni **indeterminate** o **identità** (in questo caso l'uguaglianza è proprio intesa come nei §2, 3).

C) L'unico numero che sommato a 36 dia 100 è il 64. Se un numero x ha come quadrato 64 può essere soltanto 8 o -8. Allora l'equazione C) ha due soluzioni 8 e -8. Ma per il nostro problema, soltanto il valore $x = 8$ è *accettabile* (perché la misura di un segmento è un numero positivo). Un'equazione di questo tipo si chiama **di secondo grado**, perché l'incognita vi compare con esponente 2 (si dice anche *al quadrato*). Tutte le altre equazioni A), B), D), sono di 1° grado (ovvero **lineari**), cioè l'esponente con cui figura l'incognita è 1.

D_{ii}) non ha soluzioni; infatti riscrivendola $3t + 1 = 3t + 15$ si vede che non può esistere alcun numero $3t$ che produca lo stesso risultato quando viene sommato a 1 e a 15. In questo caso si dice che l'equazione è **impossibile**.

D_i) è soddisfatta solo per $t = 2$; qui però non possiamo accontentarci di verificare con i soli numeri naturali; occorre procedere con maggiore attenzione, come spiegheremo subito.

Il procedimento per risolvere un'equazione è quello di trasformarla in una **equazione equivalente**, cioè in un'altra equazione che abbia *le stesse soluzioni* della prima. Se si opera con abilità, la seconda equazione è più semplice della prima e le soluzioni si determinano facilmente. Ecco qualche esempio:

Consideriamo la A): $2n = n + 3 \Rightarrow 2n - n = n + 3 - n \Rightarrow n = 3$

La seconda eguaglianza è stata ottenuta dalla prima sottraendo ai due membri la stessa quantità n.

Consideriamo la D_i) $3t + 1 = t + 5 \Rightarrow (3t + 1) - (t + 1) = t + 5 - (t + 1) \Rightarrow$
$\Rightarrow 2t = 4 \Rightarrow t = 2$

Nel primo passaggio *sottraiamo* (= *togliamo*) $t + 1$ da ambo i membri; il secondo passaggio è un semplice calcolo letterale; nel terzo passaggio *dividiamo* i due membri per lo stesso numero 2.

Consideriamo la C): $x^2 + 36 = 100 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = \sqrt{64} = 8$

Nel primo passaggio abbiamo sottratto 36; nel secondo abbiamo **estratto la radice quadrata** dei due membri. Con questo procedimento non ci è però risultato il valore $x = -8$, che è pure una soluzione.

Enunciamo ora alcune regole generali, che aiutano a trovare il procedimento di risoluzione.

Ogni equazione si può trasformare in un'altra **equivalente** (cioè avente le stesse soluzioni) eseguendo una o l'altra (o entrambe) di queste operazioni:

(1) *sommare o sottrarre lo stesso numero o la stessa espressione letterale ad entrambi i membri dell'equazione (1° principio di equivalenza)*

(2) *moltiplicare o dividere entrambi i membri dell'equazione per lo stesso numero, diverso da zero, o per la stessa espressione letterale non nulla (2° principio di equivalenza)*

Si noti che l'operazione (1) si traduce nel *trasportare* un termine da un membro all'altro cambiandogli il segno; per esempio, un addendo sparisce dal primo membro per comparire nel secondo membro con il segno cambiato.

Esempio 1:

$1 - 12x = 4 - 3x \quad \Rightarrow$ (per liberare il 2° membro dalle lettere, sommo $3x$ ai due membri)

$\Rightarrow 1 - 9x = 4 \quad \Rightarrow$ (per isolare il monomio x, sottraggo 1 a entrambi i membri)

$\Rightarrow -9x = 3 \quad \Rightarrow$ (per trovare x divido entrambi i membri per il numero -9)

$\Rightarrow x = \dfrac{3}{-9} = -\dfrac{1}{3}.$

Esempio 2:

$\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{4}{9}\right) = x\left(x^2 - \frac{8}{9}\right) \Rightarrow$ (eseguiamo il calcolo letterale indicato)

$\Rightarrow x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{9}x - \frac{2}{3}x^2 - \frac{4}{9}x - \frac{8}{27} = x^3 - \frac{8}{9}x \Rightarrow$

$\Rightarrow x^3 - \frac{8}{27} = x^3 - \frac{8}{9}x \Rightarrow$ (cancelliamo x^3 cioè togliamolo ad entrambi i membri)

$\Rightarrow -\frac{8}{27} = -\frac{8}{9}x \Rightarrow \left(\text{dividiamo per } -\frac{8}{9}\right)$

$\Rightarrow \left(-\frac{8}{27}\right)\Big/\left(-\frac{8}{9}\right) = x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$

Esempio 3:

$\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{x^2+x} \Rightarrow$ (riscriviamo la differenza con il denominatore comune)

$\Rightarrow \dfrac{(x+1)^2 - x^2}{x(x+1)} = \dfrac{1}{x^2+x} \Rightarrow$ (ci accorgiamo che i due denominatori coincidono, moltiplichiamo entrambi i membri per questo denominatore, ma prendiamo nota che dovrà essere $x(x+1) \neq 0$)

$\Rightarrow (x+1)^2 - x^2 = 1 \Rightarrow$ (sviluppiamo il quadrato)

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 - x^2 = 1 \Rightarrow 2x = 0 \Rightarrow x = 0.$

Non possiamo accettare questa soluzione, perché con questo valore $x = 0$ la divisione per $x(x+1)$ non si sarebbe potuta eseguire.

È questo un caso in cui il procedimento generale non porta al risultato e occorre aggirare l'ostacolo con un altro ragionamento, come per esempio il seguente: non si può sostituire né $x = 0$ né $x = -1$ nell'equazione originaria (perché si annullano i denominatori). D'altra parte, se si considera qualunque altro valore $x \neq 0$, $x \neq -1$, quella divisione è lecita e conduce al valore $x = 0$. Ma allora x sarebbe simultaneamente $= 0$ e $\neq 0$. Questa *contraddizione* porta a concludere che un tale x non esiste, cioè che l'equazione è impossibile.

Quando si ritiene di aver trovato una soluzione dell'equazione, conviene sempre farne una **verifica**, cioè sostituire il valore trovato nell'equazione originaria (ossia nella forma che aveva prima di ogni elaborazione) per vedere se effettivamente i due membri risultano eguali. La verifica è il modo migliore per accorgersi di eventuali errori di calcolo o di procedimento.

Verifichiamo, per esempio, che il valore $x = \frac{1}{3}$ è effettivamente una soluzione dell'esempio 2):

1° membro $\quad \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{4}{9}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)\frac{7}{9} = -\frac{7}{27}$

2° membro $\quad \frac{1}{3}\left(\frac{1}{9} - \frac{8}{9}\right) = \frac{1}{3}\left(-\frac{7}{9}\right) = -\frac{7}{27}$

La verifica è positiva: anche se il procedimento applicato fosse stato sbagliato, sapremmo ora che il risultato $x = \frac{1}{3}$ è giusto. (Potrebbero però esserci altre soluzioni).

Si considerano anche **equazioni in più incognite** (o *variabili*). Consideriamo per esempio i problemi:

E) Trovare due numeri interi a, b tali che la somma dei loro quadrati sia 100.

F) Trovare i numeri reali x, y tali che il triplo del primo sia l'opposto del doppio del secondo.

Si vede che le condizioni richieste si scrivono rispettivamente

E) $a^2 + b^2 = 100$ F) $3x = -2y$.

In queste equazioni si chiama soluzione una coppia di numeri (a, b) oppure (x, y), e non un singolo numero.

Per esempio, per la E) si trova per tentativi la coppia di numeri $a = 6$, $b = 8$; ma altre soluzioni sono le coppie $(6, -8)$, $(-6, 8)$, $(-8, 6), \ldots$

Per la F) si vede che, comunque si scelga un numero da sostituire a x, ne esiste un altro y che soddisfa l'equazione. Per esempio: $(-10, 15)$, $\left(1, -\frac{3}{2}\right)$, $(0, 0)$ ecc.

Problema: *La somma di due numeri x, y è 100. La loro differenza è 36. Quanto valgono x, y?*

Le condizioni producono due equazioni che devono essere soddisfatte *simultaneamente*

$$\begin{cases} x + y = 100 \\ x - y = 36 \end{cases}$$

La stessa coppia (x, y) deve cioè verificare entrambe le equazioni, deve essere una *soluzione comune* alle due; trovare queste coppie significa risolvere il **sistema** delle due equazioni, e questo si rappresenta appunto con la parentesi graffa.

Per risolvere il sistema procediamo così:

– sommando i due primi membri otteniamo $2x$
– sommando i due secondi membri otteniamo 136
– queste due quantità devono essere uguali: $2x = 136$ e dunque $x = \frac{136}{2} = 68$.
– sostituiamo questo valore $x = 68$ nella prima equazione $68 + y = 100$ da cui $y = 32$.

Così la coppia $(68, 32)$ è soluzione del problema.

Ritroveremo questo tipo di problemi nel cap. V.

Alle volte un'equazione sembra avere più di un'incognita, ma è invece inteso che qualche lettera si consideri assegnata (e non da ricercare; queste lettere si chiamano talvolta **parametri**). Per esempio un'equazione come

G) $3x + 1 = 2a - 1$ si può intendere nell'incognita x e ha per soluzione $x = \frac{2}{3}(a-1)$, ma si può anche pensare nell'incognita a, con soluzione $a = \frac{1}{2}(3x+2)$.

Nel prossimo caso consideriamo x come incognita, e pensiamo al parametro a come ad una costante.

H) $ax - 3 = 2x$

Isolando x al primo membro troviamo $(a-2)x = 3$. Per trovare x dovremmo dividere per $a - 2$, ma questo richiede che sia $a - 2 \neq 0$. Si conclude che

se $a \neq 2$ l'equazione ha soluzione $x = \dfrac{3}{a-2}$

ma se $a = 2$ l'equazione è impossibile.

Un'equazione si chiama **algebrica** se si può scrivere nella forma di un polinomio eguagliato a zero, come negli esempi:

$$x^2 - 5x + 12 = 0 \qquad\qquad ax + by = 5$$

o anche se è equivalente a questa forma. Per esempio, sono equazioni algebriche anche

$$x^2 + 12 = 5x \qquad\qquad ax = 5 - by.$$

Sappiamo che i polinomi si distinguono secondo il **numero delle variabili** (o *indeterminate*) e secondo il **grado** (cfr. §3).

Anche le equazioni algebriche prendono i nomi corrispondenti, come nei seguenti esempi:

$3x = 12$; $12x - 5 = 3$ equazioni di 1° grado **in una incognita** (o variabile)

$3x^2 = 16$; $a^2 - 5a + 12 = 5$ equazioni di 2° grado in una incognita

$v = 3u + 2$; $7x - y = 2x + 3 + y$ equazioni di 1° grado **in due incognite**

$y + 2 = 5x^2$; $c^2 + t^2 = 12$ equazioni di 2° grado in due incognite

$3x = x + 2x$ sembra di 1° grado, ma equivale a $0 = 0$: è un'identità

$v = t + 1$ equazione di 1° grado in 2 incognite

$pV = k$(con k costante) equazione di 2° grado in 2 incognite (p, V)

$x = \frac{1}{2}gt^2$ occorre precisare: se x, t, g sono tre incognite allora è un'equazione di 3° grado; se g =cost è di 2° grado, ecc.

In questo § abbiamo imparato a risolvere le equazioni di 1° grado; nel §7 risolveremo le equazioni di 2° grado. Quelle di grado più elevato sono meno importanti.

ESERCIZI

1) Rispondete alle seguenti domande:

a) quando due equazioni si dicono *equivalenti*?

b) che cosa è la *soluzione* di un'equazione?

c) che cosa è il *grado* di un'equazione rispetto ad una data incognita x?

2) Riconoscete se le seguenti equazioni sono equivalenti tra loro

$$2x - 5 = x - 2$$
$$6x - 6 = 18$$

3) Un signore riscuote presso una banca la somma di 177 000 scellini, parte in biglietti da 1 000 e parte in biglietti da 10 000. Se in tutto riceve 42 banconote, quante sono quelle da 1 000 e quante quelle da 10 000?

4) Con una certa quantità d'acqua si possono riempire

3 recipienti uguali di tipo A

oppure 5 recipienti uguali di tipo B.

Ogni recipiente di tipo B ha capacità di 16 litri meno di quelli di tipo A. Quanti litri d'acqua avevo?

§ 6. Disequazioni

Riprendiamo le proprietà dell'ordinamento, già introdotte nel Cap. I, §3.

1) $x > y$ e $y > z \quad \Rightarrow \quad x > z$

2) $x > y \quad \Leftrightarrow \quad x + m > y + m$

3) $x > y, m > 0 \quad \Rightarrow \quad xm > ym$

4) $x > y, m < 0 \quad \Rightarrow \quad xm < ym$

Esse dicono che: vale la proprietà transitiva per la disuguaglianza; la disuguaglianza resta valida (= si conserva) se ai due membri si somma uno stesso addendo (qualsiasi) oppure se essi si moltiplicano per uno stesso fattore positivo; la disuguaglianza si inverte se si moltiplicano per uno stesso fattore negativo.

Una **disequazione** è una scrittura che si ottiene da un'equazione se al posto dell'uguaglianza si scrive una disuguaglianza. Esempi:

$$2x - 1 > 6 \qquad 2a - 5b > 7 - a \qquad 3x^2 - 5y^4 > 2 + x - y.$$

Anche qui si tratta di trovare le **soluzioni**, cioè quei valori numerici che, sostituiti alle lettere, rendono la disuguaglianza verificata. Di solito le disequazioni, anche quelle in una sola **incognita**, hanno un insieme (infinito) di soluzioni.

DISEQUAZIONI LINEARI (o di 1° **grado**) in una variabile.

Si tiene conto delle proprietà **1), 2), 3), 4),** che permettono di applicare procedimenti simili a quelli che abbiamo descritto per le equazioni.

Esempio 1:

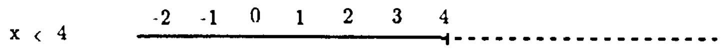
$3x + 1 > 4x - 3 \Rightarrow$ (si somma $-4x - 1$ ai due membri, per la proprietà **2)**)

$-x > -4 \Rightarrow$ (si moltiplica per -1 e si scambiano $>, <$ per la **4)**)

$\Rightarrow x < 4$.

Si conclude che ogni numero reale minore di 4 (per esempio $3,2$ oppure -1 oppure -10) è soluzione della disequazione.

Se ci si riferisce a una retta per la rappresentazione dei numeri (cfr. Cap I, §3) le soluzioni di una disequazione come la precedente si possono rappresentare con una *semiretta*.(cfr. Cap II, §1).



SISTEMI DI DISEQUAZIONI

Risolvere un sistema di due disequazioni lineari significa trovare i valori dell'incognita che soddisfano simultaneamente le due disuguaglianze:

Esempio 2: $\begin{cases} 2x - 1 > 3x - 7 \\ x + 1 > 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x > -6 \\ x > 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 6 \\ x > 3 \end{cases}$

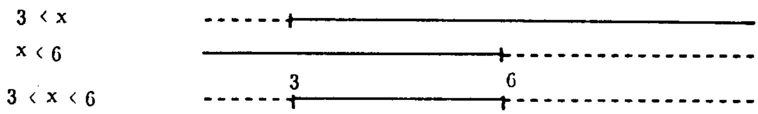
Si dice allora che i valori di x maggiori di 3 e minori di 6 sono soluzioni del sistema

$$\begin{cases} 2x - 1 > 3x - 7 \\ x + 1 > 4 \end{cases}$$

Come si è visto, questo sistema è *equivalente* alle condizioni

$3 < x < 6$ che si leggono *x compreso tra* 3 *e* 6.

Poiché le due disequazioni si rappresentano con due semirette, le soluzioni del sistema si rappresentano con l'intersezione delle due semirette (cfr. Cap I, §13), cioè con il segmento che ha per estremi i punti rappresentati da $x = 3$ e $x = 6$.



§ 7. Equazioni di 2° grado

Problema 1: *Una lavagna quadrata ha il lato lungo un metro. Applicando lungo il bordo una cornice larga 7cm, di quale percentuale aumenta la superficie totale?*

Riferiamo tutte le nostre misure ai metri (o metri quadrati). La lavagna in origine aveva area $1 \cdot 1 = 1\ m^2$. La lavagna incorniciata è un quadrato di lato $(0,07 + 1,00 + 0,07)\ m = 1,14\ m$ e la nuova superficie è $(1,14)^2 = 1,2996\ m^2$. L'aumento percentuale (cfr. Cap I,§11) è dunque $(1,2996 - 1)/1 = 0,2996$ che è circa il 30%.

Problema 2: *Se nel Problema 1 volessimo aumentare la superficie totale soltanto del* 10%*, quanto larga dovrebbe essere la cornice?*

Chiamando x questa larghezza, l'area totale vale $(1+2x)^2\ m^2$; allora dovrebbe risultare $10\% = 0,10 = [(1+2x)^2 - 1]/1$ cioè $(1+2x)^2 = 1 + 0,1 = 1,1$.

Possiamo procedere con il calcolo se sappiamo *estrarre la radice quadrata* di $1,1$. Si trova $\sqrt{1,1} = 1,0488\ldots = 1 + 2x$ da cui $2x = 0.0488\ldots$, $x = 0,024\ldots$ Si conclude che la cornice dovrebbe essere larga $0,024\ m$ cioè circa $2,4$ cm.

Problema 3: *Se nel Problema 1 la lavagna fosse rettangolare, larga 2 m e alta 1 m, con una cornice larga 7 cm, di quanto aumenterebbe la superficie totale?*

La lavagna in origine ha area $1 \cdot 2 = 2\ m^2$. Con la cornice l'area diventa $(1+0,14)\cdot(2+0,14) = 2 + 3\cdot 0,14 + (0,14)^2 = 2,4396\ m^2$ e l'aumento percentuale è $\dfrac{2,4396-2}{2} = 0,2198$ cioè circa del 22%.

Problema 4: *Se nel Problema 3 volessimo un aumento di area del* 30%*, quanto larga dovrebbe essere la cornice?*

Qui l'area diventa $(2+2x)(1+2x) = (4x^2 + 6x + 2)\,m^2$ e l'equazione è

$$0,3 = \left[(4x^2 + 6x + 2) - 2\right]/2 = 2x^2 + 3x \qquad \text{cioè} \qquad x^2 + 1,5x = 0,15.$$

L'estrazione di radice non sembra utile per procedere nel calcolo di x, perchè il primo membro dell'equazione non è un quadrato. Possiamo però applicare un accorgimento, creando un'equazione che sia equivalente alla precedente e in cui il primo membro sia un quadrato; applichiamo la formula $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ per calcolare $(x+0,75)^2 = x^2+1,5x+(0,75)^2$. Allora possiamo scrivere $x^2+1,5 = 0,15$ nella forma equivalente

$$(x+0,75)^2 - (0,75)^2 = 0,15 \quad \Rightarrow \quad (x+0,75)^2 = 0,15 + (0,75)^2 = 0,7125$$

$$\Rightarrow \quad x + 0,75 = \sqrt{0,7125} = 0,844\ldots \quad \Rightarrow \quad x = 0,094\ldots m \quad \text{cioè circa 9,4 cm.}$$

Nei precedenti problemi 2), 4) abbiamo risolto *equazioni di secondo grado in una variabile*, cioè equazioni che possono trasformarsi in una equivalente del tipo

(1) $$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{in cui } a \neq 0.$$

Qui i coefficienti a, b, c indicano numeri reali qualsiasi e dunque la (1) è la più generale equazione di 2° grado. Trattiamo prima il caso più semplice (che è quello del problema 2) in cui $b = 0$.

Scriviamo $d = -\frac{c}{a}$ e riscriviamo l'equazione nella forma

$$x^2 = d$$

se $d < 0$ allora l'equazione non ha soluzioni (equazione impossibile) perché non esiste alcun numero che elevato al quadrato dia risultato negativo;

se $d = 0$ allora l'unica soluzione è $x = 0$;

se $d > 0$ allora ci sono due numeri, opposti, che risolvono l'equazione:

$$x = \sqrt{d} = \sqrt{\frac{-c}{a}} \qquad x = -\sqrt{d} = -\sqrt{\frac{-c}{a}}.$$

Abbiamo già incontrato questo tipo di equazioni nell'esempio C del §5.

Facciamo vedere che ogni equazione di 2° grado (anche con $b \neq 0$) si può ricondurre a questo caso, usando un accorgimento che generalizza quanto abbiamo fatto per i problemi $2e4$.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right] + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2} =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right] = 0$$

Dividendo ambo i membri per $a(\neq 0)$ e aggiungendo poi ad entrambi $\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$, si ottiene l'equazione equivalente:

$$(1') \qquad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}.$$

Ponendo $d = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$ si può procedere come nel caso già visto (cioè discutendo se d è positivo o negativo) purché si usi $x + \frac{b}{2a}$ al posto di x.

Introduciamo il simbolo $\Delta = b^2 - 4ac$ e lo chiamiamo **discriminante** dell'equazione. Allora la discussione fatta prima diventa,

se $\Delta < 0$ l'equazione non ha soluzioni

se $\Delta = 0$ l'equazione ha una soluzione: $x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$

se $\Delta > 0$ x deve soddisfare una delle due condizioni

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x + \frac{b}{2a} = \frac{-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

dalle quali si ottengono due soluzioni distinte, che chiamiamo x_1 e x_2:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Queste si chiamano le **formule risolutive** dell'equazione (1).

Esempi:

1) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ $\quad \Delta = 9 - 8 = 1$ $\quad x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = 1$

2) $4x^2 + 12x + 9 = 0$ $\quad \Delta = 144 - 144 = 0$ $\quad x_1 = x_2 = -\frac{3}{2}$

3) $x^2 + x + 1 = 0$ $\quad \Delta = 1 - 4 = -3$ $\quad$ equazione impossibile

4) Problema: *la somma dei quadrati di tre numeri interi consecutivi è 194.*

Quali sono i tre numeri?

$x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 194 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 + 6x - 189 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -9, x_2 = 7$

$\Rightarrow$ tre numeri sono $7, 8, 9$; altri tre sono $-9, -8, -7$.

Sulle due soluzioni x_1, x_2 dell'equazione (1) (naturalmente nel caso $\Delta > 0$) possiamo eseguire qualche utile calcolo, per ottenere per esempio le relazioni:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 x_2 = \frac{c}{a} \tag{3}$$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{4}$$

Le (3) permettono di risolvere facilmente il

Problema: *Trovare due numeri conoscendo la loro somma s, e il loro prodotto p.*

Scegliamo $a = 1$, $b = -s$, $c = p$ nell'equazione (1), che diventa $x^2 - sx + p = 0$. Allora le (3) dicono che le soluzioni $x_1 = \dfrac{s - \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$ e $x_2 = \dfrac{s + \sqrt{s^2 - 4p}}{2}$ risolvono il problema.

Per esempio: se la somma è 14 e il prodotto è 45, si scrive $x^2 - 14x + 45 = 0$ e si trova

$$x_1 = \frac{14 - \sqrt{(14)^2 - 4 \cdot 45}}{2} = 7 - \frac{\sqrt{16}}{2} = 5; \qquad x_2 = 9.$$

Capitolo V: GEOMETRIA ANALITICA

§ 1. Coordinate sulla retta e nel piano

Il problema di *rappresentare* algebricamente (con numeri, equazioni, disequazioni, sistemi, ecc.) alcuni *enti* geometrici (quali i punti, le rette, le circonferenze, le ellissi, le iperboli, le parabole, i piani ecc.) è alla base di quella parte della matematica che viene chiamata **geometria analitica**.

L'ente geometrico più semplice è il punto; la rappresentazione algebrica di un punto varia se il punto sta su una retta, in un piano o nello spazio. Cominciamo col considerare un punto di una retta.

Sia a una retta arbitraria e scegliamo come positivo uno dei due suoi **versi** (l'altro sarà il verso negativo): diremo che a è una **retta orientata** o **asse**.

Consideriamo, per esempio, come positivo il verso che va da sinistra a destra ed indichiamo ciò con una freccia (vedi fig. 1)

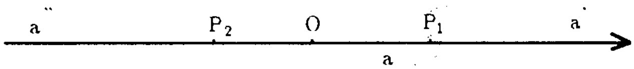


Fig.1

Scegliamo una **unità di misura** u, cioè un segmento sulla retta che, per definizione, avrà **lunghezza** 1 (cfr. cap.II, § 2). Fissiamo poi un punto O (detto **origine**) sull'asse a e osserviamo che O individua due semirette a', positiva, ed a'', negativa. Dato un punto qualsiasi P di a, sia $|OP|$ la lunghezza del segmento di estremi O e P, rispetto all'unità di misura fissata. Chiameremo **coordinata** di P il numero x così definito:

$$x = \begin{cases} |OP| & \text{se } P \in a' \\ 0 & \text{se } P \equiv O \\ -|OP| & \text{se } P \in a'' \end{cases} \quad \text{e quindi è} \quad \begin{cases} x > 0 & \text{se } P \in a' \\ x = 0 & \text{se } P \equiv O \\ x < 0 & \text{se } P \in a'' \end{cases}$$

Diciamo di avere così introdotto sull'asse a un **sistema di coordinate cartesiane**. Abbiamo già visto (cap. I §9) che "dato un numero reale qualunque x, esiste **uno ed un solo** punto $P \in a$ tale che la coordinata di P sia x": diciamo che l'insieme dei punti di a e l'insieme R dei numeri reali sono in **corrispondenza biunivoca**. Diremo anche che abbiamo *rappresentato* i punti della retta a mediante i numeri reali. L'asse a dotato di un sistema di coordinate cartesiane sarà pertanto detto **asse reale**; ogni punto P di a sarà anche indicato per mezzo della sua coordinata x.

Dati due punti P, Q della retta a, la **distanza** $d(P,Q)$ tra P e Q è la lunghezza $|PQ|$ del segmento di estremi P, Q (vedi cap.II,§2). Sia p la coordinata del punto P e sia q la coordinata del punto Q. Allora osserviamo che:

a) $P = Q$ se $p = q$

b) P *precede* Q (nel verso assegnato) se $p < q$

c) Q *precede* P se $p > q$

d) $|PQ| = |p - q|$, qualunque siano P e Q su a.

Sia M, con coordinata m, il punto medio del segmento PQ, con $P \neq Q$; poichè $|PM| = |QM|$ abbiamo $|p - m| = |q - m|$ e quindi $p - m = q - m$ oppure $p - m = -(q - m)$. Poiché nel primo caso ricaviamo $p = q$, contrariamente all'ipotesi $p \neq q$, questo caso non può mai verificarsi, mentre avremo dal secondo caso che $m = \frac{1}{2}(p + q)$.

Si osservi che, nelle figure del capitolo I § 3 e § 6, abbiamo rappresentato i numeri interi in accordo con quanto sopra detto.

Passiamo ora a rappresentare i punti di un **piano**.

Consideriamo in un piano π due assi perpendicolari $\underline{x}, \underline{y}$ che si intersecano in un punto O. Supponiamo di avere su $\underline{x}$ e $\underline{y}$ la stessa unità di misura. Fissiamo su $\underline{x}$ il riferimento cartesiano che ha per origine O e per verso quello di $\underline{x}$; in modo analogo fissiamo su $\underline{y}$ il riferimento cartesiano che ha O per origine e per verso quello di $\underline{y}$. Diciamo allora di aver assegnato un **sistema di coordinate cartesiane** Oxy od anche un **sistema di riferimento cartesiano** Oxy.

Per ogni punto P del piano, siano (vedi fig. 2) P' e P'' le **proiezioni ortogonali** *di P su $\underline{x}$ e su $\underline{y}$, rispettivamente. Sia x la coordinata di P' su $\underline{x}$ e

* In generale, sia data una retta r ed un punto P; consideriamo il punto P' ottenuto come

sia y quella di P'' su $\underline{y}$; diremo che x è l'**ascissa** di P e y è l'**ordinata** di P od anche che *la coppia ordinata* (x, y) rappresenta le coordinate di P nel **sistema di coordinate cartesiane** Oxy fissato.

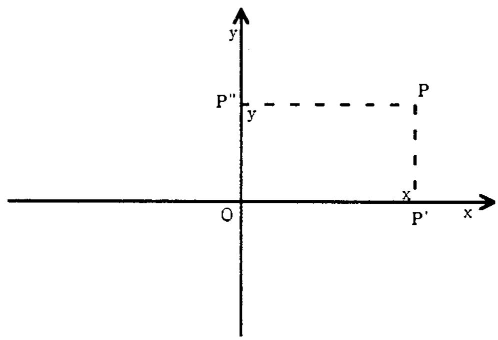


Fig.2

Osserviamo che la scelta di un sistema di coordinate cartesiane Oxy in un piano consente di *rappresentare* i punti di tale piano con le coppie ordinate di numeri reali. Infatti ad ogni punto P corrisponde una ed una sola coppia ordinata (x, y), data dalle coordinate di P; viceversa ad ogni coppia ordinata (x, y) corrisponde un solo punto P, di cui (x, y) sono le coordinate. Scriveremo pertanto $P = (x, y)$, identificando il punto con la coppia che lo rappresenta.

Abbiamo parlato di **coppie ordinate** di numeri reali, in quanto l'ordine con cui essi vengono assegnati ha un significato preciso: il primo numero rappresenta la coordinata della proiezione di P sul primo asse (che di solito è $\underline{x}$), mentre il secondo rappresenta la coordinata della proiezione di P sull'asse $\underline{y}$. Se un punto $P \in \underline{x}$ allora le sue coordinate sono della forma $(x, 0)$, mentre se $P \in \underline{y}$ allora le sue coordinate sono della forma $(0, y)$.

L'asse $\underline{x}$ divide il piano in due **semipiani**: quello positivo contiene il semiasse positivo delle y ed i suoi punti hanno tutti ordinate $y > 0$; i punti che stanno nel

intersezione di r con la sua perpendicolare passante per P. Il punto P' si chiama la **proiezione ortogonale** di P sulla retta r. Si dice **proiezione ortogonale di un segmento** di estremi P,Q su una retta r il segmento che ha per estremi le proiezioni ortogonali di P e Q su r.

semipiano negativo sono caratterizzati da (cioè sono tutti e soli quelli che hanno, cfr. cap.II § 9) $y \leq 0$. Analogamente per l'asse $\underline{y}$.

Gli assi $\underline{x}$, $\underline{y}$ suddividono il piano in quattro regioni, dette **quadranti**, caratterizzati nella seguente figura 3.

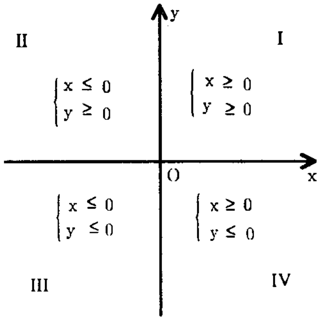
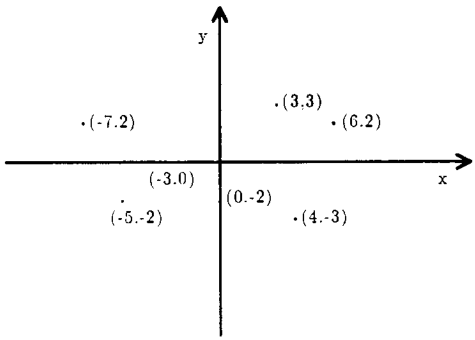


Fig.3



Studiamo ora il problema del calcolo della distanza fra due punti $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ del piano cartesiano Oxy.

La proiezione sull'asse delle ascisse $\underline{x}$ del segmento P_1P_2 (vedi fig. 4) è un segmento di lunghezza $|x_1 - x_2|$ e la sua proiezione sull'asse delle ordinate $\underline{y}$ è un segmento di lunghezza $|y_1 - y_2|$; applichiamo il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo P_1QP_2 ed otteniamo

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Poichè è $O = (0,0)$, abbiamo in particolare che, se $P = (x, y)$

$$|OP| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

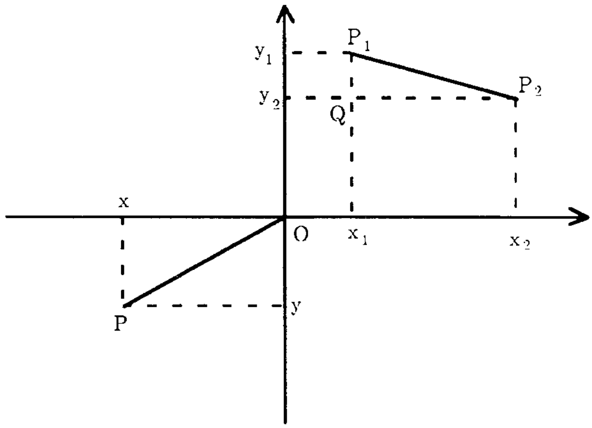


Fig.4

Osserviamo ora che se M è il punto medio del segmento P_1P_2 (vedi fig. 5), facendo uso della similitudine fra triangoli e tenuto conto di quanto già visto sulle rette, otteniamo che le coordinate (x_M, y_M) di M sono date da

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ y_M = \dfrac{1}{2}(y_1 + y_2) \end{cases}$$

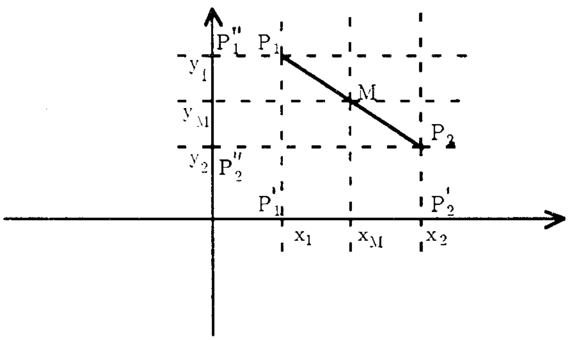


Fig.5

ESERCIZI

Sia assegnato nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali Oxy.

1) Siano dati i punti $P = (-3,2)$, $Q = (3,5)$, $R = (2,-1)$, $S = (-1,-2)$, $T = (-2,2)$, $U = (-4,-1)$, $V = (2,-2)$; dite a quale semipiano ed a quale quadrante appartiene ciascuno di essi.

2) Con riferimento all'esercizio 1), rappresentate nel piano cartesiano Oxy i punti P, Q, R, S, T, U, V. Calcolate le coordinate dei punti medi dei segmenti PQ, QR, RS, ST, ecc. Rappresentate i punti medi trovati.

3) Con riferimento ai punti dell'esercizio 1), calcolate le distanze $|PQ|$, $|QR|$, $|PR|$, $|SV|$ ecc..

4) Provate che i punti $A = (-2,1)$, $B = (1,3)$, $C = (2,-5)$ sono i vertici di un triangolo rettangolo. Disegnate il triangolo ABC.

5) Dati i punti $A = (1,3)$, $B = (-2,1)$, $C = (0,-2)$, $D = (3,0)$, provate che essi sono i vertici di un quadrato.
Verificate analiticamente (cioè usando le coordinate dei punti) che le diagonali AC e BD sono uguali e che si intersecano nel loro punto medio.

6) Dati i punti $A = (2,5)$, $B = (-1,3)$, $C = (1,0)$, determinate le coordinate del punto D tale che il quadrilatero di vertici A, B, C, D sia un quadrato avente i segmenti AC e BD come diagonali.

§ 2. Equazione di una retta nel piano

Sia Oxy un sistema di coordinate cartesiane nel piano. Consideriamo una retta r e due punti $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ fissati su di essa. Abbiamo tre casi:

I) r è parallela all'asse $\underline{x}$

II) r è parallela all'asse $\underline{y}$

III) r non è parallela né all'asse $\underline{x}$ né all'asse $\underline{y}$.

Sia $P = (x, y)$ un punto qualunque di r; per come sono state definite le coordinate cartesiane nel piano, abbiamo (vedi fig. 6) che

nel I) caso, P_1, P_2 e P hanno la stessa ordinata;

nel II) caso, P_1, P_2 e P hanno la stessa ascissa.

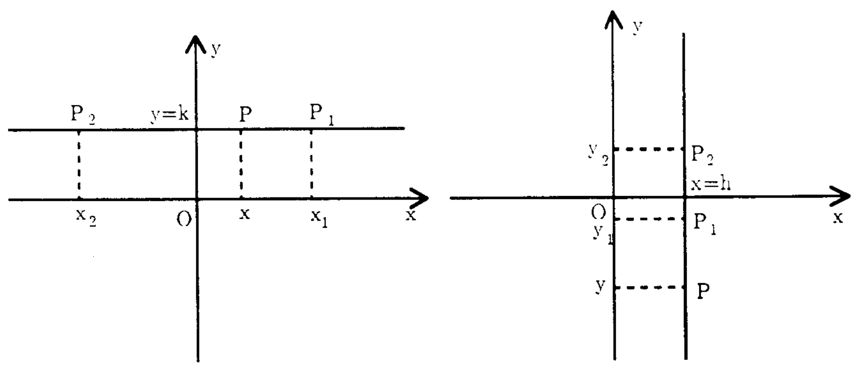


Fig.6

Diremo che

– *una retta parallela all'asse delle ascisse* $\underline{x}$ *ha equazione* $y = k$, con k numero reale (in particolare $y = 0$ è l'equazione dell'asse $\underline{x}$).

Con ciò intendiamo che

a) se P sta sulla retta, la sua ordinata è $y = k$ (e la sua ascissa è arbitraria)

b) se l'ordinata di P è $y = k$, allora P sta su quella retta.

Analogamente diremo che

– *una retta parallela all'asse delle ordinate* $\underline{y}$ *ha equazione* $x = h$, con h numero reale (in particolare $x = 0$ è l'equazione dell'asse $\underline{y}$)

Prima di esaminare il III) caso, precisiamo meglio che cosa intendiamo dire quando diciamo che **un luogo geometrico** (cfr. cap. II § 9) **ha una** determinata **equazione.** Tale espressione significa che sono vere le seguenti implicazioni

1) se P è un punto qualsiasi che appartiene a quel luogo geometrico allora le coordinate di P soddisfano quell'equazione (cioè, sostituendo alle incognite dell'equazione le coordinate del punto si ottiene una identità)
2) se Q è un qualsiasi punto che **non** appartiene a quel luogo geometrico allora le coordinate di Q **non** soddisfano quell'equazione.

Così, ad esempio, affermare che $y = 0$ è l'equazione dell'asse $\underline{x}$ significa dire che ogni punto P dell'asse $\underline{x}$ ha l'ordinata nulla e che ogni punto Q che non sta sull'asse $\underline{x}$ ha l'ordinata diversa da 0.

Nel seguito ometteremo spesso, per non appesantire l'esposizione, la verifica dell'implicazione 2).

Osserviamo esplicitamente che le equazioni $y = k$, $x = h$ sono equazioni di I grado nelle incognite x, y; inoltre, nell'equazione $y = k$ il coefficiente della variabile x è nullo, mentre nell'equazione $x = h$ è nullo il coefficiente della y.

Consideriamo ora il III) caso ed osserviamo la figura 7

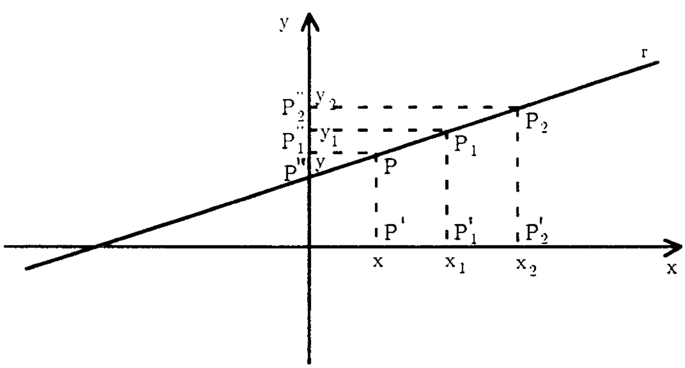


Fig.7

Se facciamo uso delle proprietá dei triangoli simili, con riferimento prima alle rette incidenti $\underline{x}$ e r e poi alle rette incidenti $\underline{y}$ e r, otteniamo

$$\frac{|P_1'P'|}{|P_1'P_2'|} = \frac{|P_1P|}{|P_1P_2|} \qquad , \frac{|P_1''P''|}{|P_1''P_2''|} = \frac{|P_1P|}{|P_1P_2|}$$

Da queste due uguaglianze deduciamo che

$$\frac{|P_1''P''|}{|P_1''P_2''|} = \frac{|P_1'P'|}{|P_1'P_2'|}$$

cioè

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

dove (x_1, y_1) e (x_2, y_2) sono fissati e (x, y) sono variabili.

L'equazione così ottenuta si chiama l'**equazione della retta** r passante per P_1 e P_2.

Questa equazione può essere così riscritta

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

ed assume quindi la forma, detta **equazione ridotta,**

$$y = mx + q$$

$\left(\text{dove } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \text{ e } q = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1\right)$.

Il numero m misura l'**incremento** della y rispetto a quello della x, quando si passa da un punto P_1 di ascissa x ad un altro punto P_2 di ascissa $x + 1$; esso dipende solo dall'angolo che r forma con l'asse $\underline{x}$ e viene pertanto detto **coefficiente angolare** della retta r. Rette parallele hanno dunque lo stesso coefficiente angolare.

Osserviamo che, se $m = 0$, l'equazione $y = mx + q$ diventa $y = q$ e rappresenta quindi una retta del tipo I).

Osserviamo anche che, se $m > 0$, i valori di y crescono al crescere di x. Se invece $m < 0$, i valori di y decrescono al crescere di x.

Abbiamo visto che, in tutti e tre i casi, una retta r del piano può essere rappresentata per mezzo di una equazione di I grado nelle incognite x, y

$$ax + by + c = 0$$

in cui a, b, c sono numeri reali, con a, b non simultaneamente nulli.

Viceversa, si può dimostrare che ogni equazione di primo grado

$$ax + by + c = 0$$

con a, b non simultaneamente nulli, rappresenta una retta; diremo pertanto che essa è l'**equazione generale** della retta.

Osserviamo esplicitamente che, se una retta ha equazione

$$ax + by + c = 0$$

allora, qualunque sia $k \neq 0$, l'equazione

$$k(ax + by + c) = 0$$

rappresenta ancora la stessa retta r.

Se nell'equazione di una retta r è $b \neq 0$, possiamo scrivere

$$y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b} \ ;$$

dunque il suo coefficiente angolare è dato da

$$m = -\frac{a}{b} \ .$$

ESERCIZI

1) Scrivete l'equazione della retta passante per i punti:

a) $A = (2, 1)$ $\quad B = (-1, 3)$

b) $A = (-1, 1)$ $\quad B = (2, -2)$

c) $A = (3, 3)$ $\quad B = (0, 0)$

d) $A = (0, 0)$ $\quad B = (4, -3)$

e) $A = (2, 0)$ $\quad B = (2, -1)$

f) $A = (3, -1)$ $\quad B = (-1, -1)$

2) Trovate le coordinate di due punti appartenenti alle rette

a) $x - 2y + 1 = 0$

b) $y = 4x - 1$

c) $3x + 2y - 2 = 0$

d) $2x - 4y + 2 = 0$

e) $4x - 5 = 0$

f) $y = -2$

[Per trovare le coordinate di un punto appartenente ad una retta avente una data equazione è sufficiente attribuire ad una delle incognite un determinato valore e ricavare il relativo valore dell'altra, risolvendo l'equazione di I grado in una incognita così ottenuta (cfr. cap IV)].

Disegnate le rette assegnate.

3) Calcolate il coefficiente angolare di ciascuna delle rette considerate negli esercizi 1) e 2). Perché nel caso e) vi trovate in difficoltà?

4) Scrivete le equazioni ridotte delle rette dell'esercizio 2).

§ 3. Parallelismo, perpendicolarità, incidenza di due rette

Siano $ax+by+c=0$ e $a'x+b'y+c'=0$ due rette r e r', che siano parallele tra loro e che non siano parallele all'asse y. Per quanto detto prima, i loro coefficienti angolari $m=-\frac{a}{b}$ e $m'=-\frac{a'}{b'}$ sono uguali; pertanto risulta

$$-\frac{a}{b}=-\frac{a'}{b'} \quad \text{o anche} \quad ab'-a'b=0.$$

Quindi se r è una retta di equazione $ax+by+c=0$ e $P_0=(x_0,y_0)$ è un punto fissato. la retta r' passante per P_0 e parallela a r ha equazione

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)=0.$$

Infatti le coordinate di P_0 verificano questa equazione ed è

$$ab'-a'b=0 \qquad (a'=a \;\text{ e }\; b'=b).$$

Osserviamo esplicitamente che, se $ax+by+c=0$ è l'equazione di una retta r, abbiamo:

- se $a=0$ $(b\neq 0)$, r è una retta parallela all'asse $\underline{x}$
- se $b=0$ $(a\neq 0)$, r è una retta parallela all'asse $\underline{y}$
- se $c=0$, r è una retta passante per l'origine O, con equazione $ax+by=0$.

Siano r e r' due rette perpendicolari passanti per l'origine O, non coincidenti con gli assi; siano

$$ax+by=0 \quad , \quad a'x+b'y=0$$

le loro equazioni e $y=mx$, $y=m'x$ quelle ridotte.

Riferendoci alla seguente figura 8,consideriamo i punti $P=(1,m)$ e $Q=\left(\frac{1}{m'},1\right)$

e le loro proiezioni P' e Q' su $\underline{x}$.

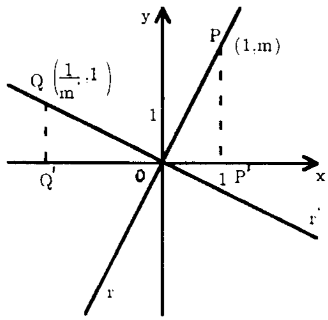


Fig.8

Osserviamo allora che P e Q stanno su r e r', rispettivamente, e formano due triangoli rettangoli $OP'P$ e $QQ'O$ che sono uguali (avendo $|QQ'| = |OP'| = 1$ e gli angoli uguali).

In particolare $|OQ'| = |PP'|$; abbiamo $|PP'| = |m - 0| = m$, $|OQ'| = = \left|\frac{1}{m'} - 0\right| = -\frac{1}{m'}$ (nella figura è $m' < 0 < m$; ma con un'altra figura arriveremmo allo stesso risultato). Dunque

$$m = -\frac{1}{m'} \quad \text{cioè} \quad mm' = -1 \quad \text{o anche,} \quad aa' + bb' = 0.$$

Questa è dunque la **condizione di perpendicolarità** tra due rette passanti per l'origine O; infatti anche le equazioni $y = 0$ e $x = 0$ degli assi $\underline{x}$ e $\underline{y}$, rispettivamente, la soddisfano.

Tale condizione risulta, evidentemente, ancora valida se r e r' sono, in generale, due rette (non necessariamente passanti per O), di equazioni

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{e} \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

oppure

$$y = mx + q \qquad \text{e} \qquad y = m'x + q'$$

purché non parallele agli assi coordinati $\underline{x}$, $\underline{y}$.

Quindi, se r è una retta di equazione $ax + by + c = 0$ e $P_0 = (x_0, y_0)$ è un punto fissato, la retta r' passante per P_0 e perpendicolare a r ha equazione

$$b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0.$$

Infatti le coordinate di P_0 verificano questa equazione ed è

$$aa' + bb' = ab + b(-a) = 0.$$

Poniamoci ora il seguente problema:
date le equazioni di due rette r, s del piano cartesiano Oxy dire se le due rette sono incidenti, parallele o coincidenti.

Quanto finora visto ci consente di dire che, se

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{e} \qquad a'x + b'y + c' = 0$$

sono le equazioni di r e s, allora

I) r e s sono incidenti se e solo se $ab' - a'b \neq 0$

II) r e s sono parallele se e solo se $ab' - a'b = 0$

III) r e s sono coincidenti se e solo se esiste un numero reale k tale che sia $a' = ka$, $b' = kb$, $c' = kc$.*

È facile verificare che la proposizione II) è equivalente a

II') r e s sono parallele se e solo se esiste un numero reale k tale che sia $a' = ka$, $b' = kb$.*

Nel caso le due rette r, s assegnate siano incidenti, può essere utile ricavare le coordinate del loro punto di intersezione $\overline{P}$. Poiché $\overline{P}$ appartiene a r, le sue coordinate $(\overline{x}, \overline{y})$ soddisfano l'equazione di r, cioè risulta $a\overline{x} + b\overline{y} + c = 0$; analogamente, poiché $\overline{P}$ appartiene anche a s, dovrà essere $a'\overline{x} + b'\overline{y} + c = 0$. Possiamo pertanto concludere che le coordinate $(\overline{x}, \overline{y})$ del punto $\overline{P}$, comune alle rette incidenti r e s, sono date dalla soluzione del sistema di I grado in due incognite (vedi cap IV § 5)

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'x + b'y + c' = 0 \end{cases}$$

---

* N.B. - Nel caso III) si dice anche che le terne (a,b,c) e (a',b',c') sono **proporzionali**. Nel caso II') si dice che le coppie (a,b) e (a',b') sono proporzionali.

Osserviamo che lo studio algebrico di un sistema di questo tipo ci porta a darne una interpretazione geometrica, che qui esplicitiamo:

a) il sistema ha una sola soluzione $(\overline{x}, \overline{y})$ se e solo se le rette r e s,rappresentate dalle due equazioni,sono incidenti nel punto $\overline{P} = (\overline{x}, \overline{y})$;

b) il sistema non ha soluzioni se e solo se le rette r e s sono parallele ma non coincidenti;

c) il sistema ha infinite soluzioni (cioè è indeterminato) se e solo se le rette r e s sono coincidenti.

Anche se non la dimostriamo, è utile infine ricordare la formula che consente di determinare la **distanza di un punto** $P_0 = (x_0, y_0)$ **da una retta** s (vedi cap. II § 3) di equazione $ax + by + c = 0$.
Abbiamo

$$d(P_0, s) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Esempi

a) Le rette r e s di equazione, rispettivamente, $x-4y+2 = 0$ e $2x+y+1 = 0$ sono incidenti in quanto $ab' - a'b = 1 \cdot 1 - 2(-4) = 1 + 8 = 9 \neq 0$. Le coordinate del loro punto di intersezione $\overline{P}$ sono date dalla soluzione $(\overline{x}, \overline{y})$ del sistema

$$\begin{cases} x - 4y + 2 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema è equivalente (cioè ha le stesse soluzioni) al seguente

$$\begin{cases} x - 4y + 2 = 0 \\ 8x + 4y + 4 = 0 \end{cases}$$

ottenuto dal precedente moltiplicando la seconda equazione per 4. Sommando membro a membro le due equazioni otteniamo una nuova equazione $9x+6 = 0$ che, sostituita ad esempio alla seconda equazione del nuovo sistema, dà il seguente sistema equivalente

$$\begin{cases} x - 4y + 2 = 0 \\ 9x + 6 = 0 \end{cases}$$

Possiamo quindi scrivere,

$$\begin{cases} x - 4y + 2 = 0 \\ x = -\dfrac{6}{9} \end{cases} \quad \text{oppure} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{2}{3} - 4y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{e dunque} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ -4y = -\dfrac{4}{3} \end{cases} ; \quad \text{abbiamo quindi} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

e possiamo dire che

$$(\overline{x}, \overline{y}) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right).$$

b) Lo stesso problema poteva essere risolto, ad esempio, passando dal sistema di partenza

$$\begin{cases} x - 4y + 2 = 0 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{al seguente} \quad \begin{cases} x = 4y - 2 \\ 2x + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Sostituiamo nella seconda equazione l'espressione della x ricavata nella prima ed otteniamo

$$\begin{cases} x = 4y - 2 \\ 2(4y - 2) + y + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = 4y - 2 \\ 8y - 4 + y + 1 = 0 \end{cases}$$

Questo sistema può essere così riscritto

$$\begin{cases} x = 4y - 2 \\ 9y = 3 \end{cases} \quad \text{da cui ricaviamo} \quad \begin{cases} x = 4y - 2 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} x = 4 \cdot \dfrac{1}{3} - 2 \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

c) Il sistema

$$\begin{cases} 3x - 4(y - x) = 2y - x + 2 \\ 4x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

rappresenta due rette parallele non coincidenti. Infatti esso può essere così riscritto

$$\begin{cases} 8x - 6y - 2 = 0 \\ 4x - 3y + 1 = 0 \end{cases}$$

Osservando che $8 = 2 \cdot 4$ e che $-6 = 2 \cdot (-3)$ possiamo dire che le due rette sono parallele: non coincidono in quanto $(8, -6, -2)$ e $(4, -3, 1)$ non sono proporzionali.
Se avessimo fatto i calcoli avremmo trovato:

$$\begin{cases} x = \dfrac{6y+2}{8} \\ x = \dfrac{3y-1}{4} \end{cases} \quad \text{da cui} \quad \begin{cases} \dfrac{3y+1}{4} = \dfrac{3y-1}{4} \\ x = \dfrac{3y-1}{4} \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} 1 = -1 \\ x = \dfrac{3y-1}{4} \end{cases} \quad ;$$

il sistema è quindi impossibile e le due rette sono dunque prive di punti comuni.

Nel seguito vedremo come rappresentare in forma algebrica per mezzo di equazioni, altri tipi di curve del piano; in tale circostanza ci potremo porre il problema di vedere se due curve, anche di tipo diverso (ad esempio, retta e circonferenza, retta ed ellisse, ecc.), abbiano o no punti in comune. Affronteremo questo problema in modo analogo a quello usato sopra per una coppia di rette: studieremo cioè il sistema formato dalle due equazioni che rappresentano le curve considerate.

ESERCIZI

1) Verificate che le rette di equazione, rispettivamente,

   a) $3x - y + 1 = 0$ e $x + y + 1 = 0$ sono incidenti
   b) $2x - 6y = 0$ e $x - 3y + 2 = 0$ sono parallele
   c) $3x + 2y - 1 = 0$ e $6x + 4y - 2 = 0$ sono coincidenti
   d) le rette del punto b) sono parallele ma non coincidenti.

2) Con riferimento ai dati dell'esercizio 5) del §1 del presente capitolo, verificate che le diagonali AC e BD del quadrato considerato sono perpendicolari.

3) Scrivete l'equazione della retta passante per il punto $P_0 = (-1, 3)$ e parallela alla retta di equazione $x - 3y + 2 = 0$.

4) Scrivete l'equazione della retta passante per il punto $P_0 = (2, -2)$ e perpendicolare alla retta di equazione $2x + y - 3 = 0$.

5) Determinate le coordinate del punto di intersezione delle rette di equazione $x+y-1 = 0$ e $2x - 3y + 2 = 0$.

6) Fra le rette passanti per l'origine O, di equazione $y = mx$, determinate
   a) quella che passa per il punto $P_0 = (2, -1)$
   b) quella che è parallela alla retta di equazione $x - 2y + 3 = 0$
   c) quella che è perpendicolare alla retta di equazione $2x - y = 0$.

7) Scrivete le equazioni di due rette incidenti nel punto $\overline{P} = (-1, -2)$.

8) Determinate la distanza del punto $P = (-1, 2)$ dalla retta di equazione $3x-y+2 = 0$ e dalla retta di equazione $x + y - 1 = 0$.

9) Calcolate la distanza tra le due rette parallele di equazioni $x-3y = 0$ e $2x-6y-1 = 0$.

§ 4. Equazione di una circonferenza

Abbiamo già visto che una **circonferenza** è il luogo dei punti P del piano per i quali la distanza da un dato punto C (detto **centro**) è uguale ad un numero reale positivo assegnato r (detto **raggio**).

Supponiamo fissato un sistema di coordinate Oxy; in tale sistema sia $C = (a, b)$ e $P = (x, y)$.

La relazione

$$|PC| = r$$

diventa

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r,$$

da cui otteniamo l'equazione equivalente

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2.$$

Se poniamo $c = a^2 + b^2 - r^2$, la precedente equazione diventa

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

che rappresenta quindi la circonferenza di centro $C = (a, b)$ e raggio r assegnati.

Viceversa, se abbiamo un'equazione della forma $x^2 + y^2 + mx + ny + p = 0$, ponendo $m = -2a$, $n = -2b$ e $p = c$ otteniamo

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$$

questa equazione può essere scritta come

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2 + b^2 - c$$

e quindi se $a^2 + b^2 - c > 0$ rappresenta la circonferenza di centro il punto (a, b) e raggio $r = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

Osserviamo in particolare che, se il centro C coincide con l'origine O del sistema, l'equazione della circonferenza di centro O e raggio r è

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

Esempi

1) La circonferenza di centro $C = (-1, 2)$ e raggio $r = 3$ ha l'equazione

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 9$$

cioè

$$x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0.$$

2) L'equazione

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 12 = 0$$

si può scrivere nella forma $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ se poniamo

$$a = 3, \qquad b = -1, \qquad c = 12.$$

Ma poichè risulta $a^2 + b^2 - c = -2 < 0$, l'equazione non ha alcuna soluzione. Infatti poiché la somma di due quadrati non può essere negativa, non esiste una coppia ordinata (x, y) di numeri reali tale che

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = -2.$$

3) Nell'equazione

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$$

abbiamo $a = 3$, $b = -1$, $c = 6$, $a^2 + b^2 - c = 4$ e dunque essa rappresenta la circonferenza di centro $C = (3, -1)$ e raggio $r = 2$.

Poniamoci ora il problema dell'intersezione di una circonferenza Γ con una retta s. Per semplicità, supponiamo (vedi fig. 9) che la circonferenza abbia centro coincidente con l'origine O e che la retta sia parallela all'asse delle ordinate.

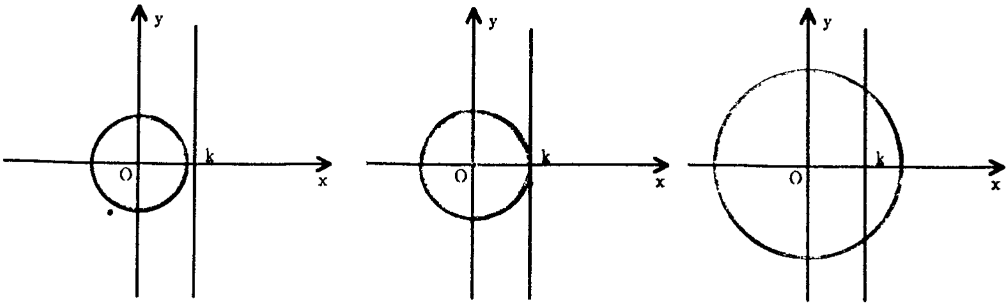


Fig.9

Le coordinate dei punti di intersezione sono date dalle eventuali soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r^2 \\ x = k \end{cases}$$

Osservando la figura 9 è facile riconoscere che:

- se $|k| > r$ (ossia se la distanza $d(O,s) > r$) allora $\Gamma \cap s = \emptyset$, cioè s è **esterna** a Γ
- se $|k| = r$ (ossia se la distanza $d(O,s) = r$) allora $\Gamma \cap s$è un solo punto, cioè s è **tangente** a Γ in quel punto $(k,0)$
- se $|k| < r$ (ossia se la distanza $d(O,s) < r$) allora $\Gamma \cap s$ è costituita da due punti P_1, P_2, cioè s è **secante** a Γ; risulta $P_1 = (k, \sqrt{r^2 - k^2})$, $P_2 = (k, -\sqrt{r^2 - k^2})$.

In generale,se Γ è una circonferenza di centro C qualunque e raggio r e se s è una retta qualsiasi,avremo ancora che

- s è esterna a Γ se e solo se $d(C,s) > r$
- s è tangente a Γ se e solo se $d(C,s) = r$
- s è secante a Γ se e solo se $d(C,s) < r$

Esempi

1) La curva di equazione

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

rappresenta una circonferenza Γ di centro $C = (2, -1)$ e raggio $r = 2$. La retta s di equazione $x - 2y - 1 = 0$ è tale che

$$d(C, s) = \frac{|1 \cdot 2 - 2(-1) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = \frac{3}{\sqrt{5}}$$

e quindi

$$d(C, s) = \frac{3}{\sqrt{5}} < 2 = r.$$

La retta s è secante la circonferenza Γ.

2) La retta s di equazione $x + 2y + 4 = 0$ è esterna alla circonferenza dell'esempio 1) in quanto

$$d(C, s) = \frac{8}{\sqrt{5}} > 2 = r.$$

3) La retta s di equazione $x = 4$ è tangente alla circonferenza dell'esempio 1) in quanto

$$d(C, s) = 2 = r.$$

4) Le coordinate dei punti di incontro della circonferenza Γ e della retta s dell'esempio 1 sono date dalle soluzioni del sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0 \\ x - 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

ESERCIZI

1) Scrivete l'equazione della circonferenza di centro $C = (-3, 1)$ e raggio $r = 1$.

2) Determinate centro e raggio della circonferenza di equazione

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0.$$

3) Calcolate la distanza del punto $O = (0, 0)$ dalla retta r di equazione $3x - y - 2 = 0$.

4) Dite se la retta di equazione $3x - y = 0$ è secante, tangente o esterna alla circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 2y - 8 = 0$. Determinate gli eventuali punti di intersezione.

§ 5. Traslazioni

Nel §6 del capitolo II è stata introdotta la nozione di traslazione nel piano. Supponiamo ora di avere fissato nel piano un sistema di coordinate cartesiane ortogonali: siano $\underline{x}$, $\underline{y}$ gli assi coordinati ed O l'origine.

Se guardiamo la seguente figura

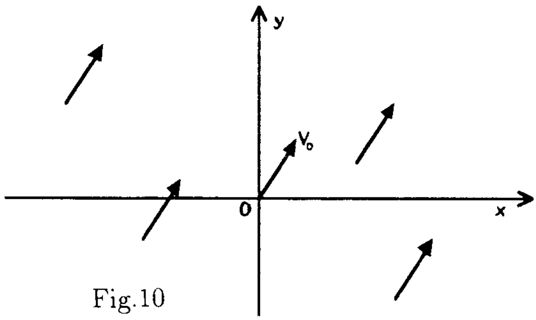


Fig.10

possiamo notare che in essa vi sono rappresentati vettori uguali fra loro: infatti hanno tutti uguale lunghezza, uguale direzione ed uguale verso. Scegliamo di rappresentare ciascuno di questi vettori per mezzo del vettore $\overrightarrow{OV_0}$, che ha la sua origine (o punto di applicazione) in O. Questo vettore $\overrightarrow{OV_0}$ rappresenta anche tutti gli altri infiniti vettori, ad esso uguali, che avremmo potuto disegnare a partire da un qualunque punto del piano.

In generale dunque, dato un qualunque vettore $\overrightarrow{v}$ nel piano, lo rappresenteremo per mezzo del vettore $\overrightarrow{OV}$ tale che $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{v}$. Ogni vettore $\overrightarrow{OV}$ è caratterizzato dunque dal punto V e, di conseguenza, dalle coordinate (a, b) di V nel sistema di riferimento Oxy fissato.

Le coordinate (a, b) di V si dicono anche le **componenti del vettore** $\overrightarrow{OV}$ e si scriverà anche $\overrightarrow{v} = (a, b)$.

Ritorniamo alla nozione di traslazione. Siano dati un punto generico $P = (x, y)$ e un particolare vettore $\overrightarrow{v} = (a, b)$. Consideriamo il vettore $\overrightarrow{OP} = (x, y)$. Chiameremo il **traslato di** P secondo $\overrightarrow{v}$ il punto P' tale che $\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{v}$ (dove la somma tra vettori è fatta seguendo la regola del parallelogramma cfr. cap II § 5).

Dalla figura seguente, possiamo ricavare che le coordinate (x', y') di P' sono date da

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}$$

che sono dette le **equazioni della traslazione** secondo il vettore $\vec{v} = (a, b)$. Una data figura geometrica si dirà traslata di un vettore $\vec{v}$ se ogni punto P della figura viene traslato di $\vec{v}$. Per esempio la **traslata** di una retta r secondo il vettore $\vec{v}$ è ancora una retta r', parallela a r (cfr. cap. II, § 6 e la figura).

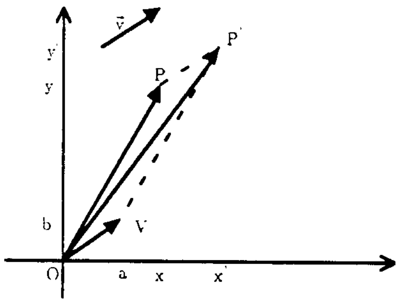


Fig.11

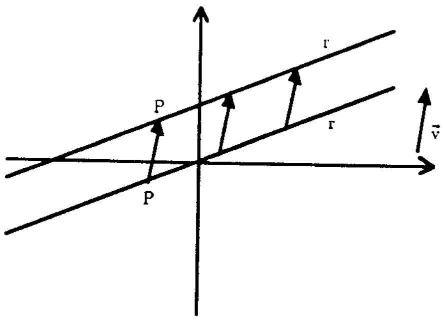


Fig.12

Ci interessa trovare l'equazione della retta traslata r' a partire dall'equazione della retta originaria r e delle componenti (a, b) di $\vec{v}$. In generale quando si voglia conoscere l'equazione della curva ottenuta traslando del vettore $\vec{v} = (a, b)$ una data curva, è utile fare ricorso alle relazioni seguenti, ricavate dalle precedenti ed illustrate dalla figura

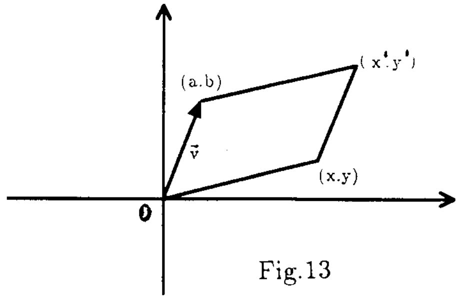


Fig.13

$$\begin{cases} x = x' - a \\ y = y' - b \end{cases}$$

Così, ad esempio, l'equazione della curva ottenuta traslando del vettore $\overrightarrow{v} = (2,1)$ la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 4$ sarà così ottenuta:

$$\text{poiché è} \quad \begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 1 \end{cases} \qquad \text{e dunque} \quad \begin{cases} x = x' - 2 \\ y = y' - 1 \end{cases}$$

sostituendo nell'equazione data, abbiamo

$$(x' - 2)^2 + (y' - 1)^2 = 4$$

e quindi

$$x'^2 + y'^2 - 4x' - 2y' + 1 = 0 \ ;$$

possiamo concludere che la curva così ottenuta è ancora una circonferenza di raggio 2 ma con centro in $C = (2,1)$ invece che in $O = (0,0)$. Infine, data l'arbitrarietà di (x', y'), possiamo scrivere (x, y) al posto di (x', y'), ottenendo la nuova equazione

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

Sottoponendo alla stessa traslazione secondo $\overrightarrow{v}$ la retta r di equazione $x - 2y - 1 = 0$ otteniamo $(x' - 2) - 2(y' - 1) - 1 = 0$ e quindi $x' - 2y' - 1 = 0$. Sostituendo a (x', y') la coppia (x, y) otteniamo di nuovo $x - 2y - 1 = 0$ e quindi la retta r', traslata di r secondo $\overrightarrow{v}$, coincide con r: $\overrightarrow{v}$ pertanto è parallelo a r.

ESERCIZI

1) In un sistema di coordinate Oxy, considerate i punti $A = (2, 1)$, $B = (3, 4)$, $C = (2, -3)$ e $D = (-3, -1)$. Scrivete le coordinate dei punti ottenuti da A, B, C, D per mezzo della traslazione secondo il vettore $\overrightarrow{v} = (-1, 1)$.

2) Scrivete le coordinate dei traslati di $A = (4, -2)$ secondo i vettori $\overrightarrow{v}_1 = (2, 0)$, $\overrightarrow{v}_2 = (0, -3)$, $\overrightarrow{v}_3 = (2, -2)$ e $\overrightarrow{v}_4 = (-2, -1)$.

3) Determinate le componenti del vettore $\overrightarrow{v}$ che trasla il punto $P = (-1, 3)$ nel punto $P' = (2, 1)$.

4) Verificate che la legge che associa ad ogni punto del piano il suo traslato secondo un vettore $\overrightarrow{v} = (a, b)$ è una isometria, cioè è tale che, se $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ sono punti qualsiasi e $P_1' = (x_1', y_1')$, $P_2' = (x_2', y_2')$ sono i loro traslati secondo $\overrightarrow{v}$, risulta $\overline{P_1P_2} = \overline{P_1'P_2'}$ (le distanze si *conservano*).

§ 6. Simmetrie rispetto ad un punto e rispetto ad una retta

Simmetria rispetto ad un punto.

Fissiamo nel piano un punto C. Dato un punto P, diciamo **simmetrico di P rispetto a C** il punto P' tale che C sia il punto medio del segmento di estremi P e P'. Qualunque sia P, il simmetrico di P rispetto a C esiste ed è unico (se $P = C$ anche $P' = C$). La legge così introdotta che ad ogni punto P del piano associa il suo simmetrico P' si chiama **simmetria rispetto al punto C**. C viene detto **centro della simmetria**.

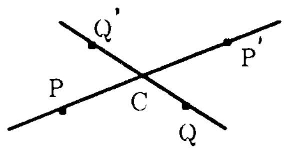


Fig. 14

Se nel piano è fissato un sistema di coordinate Oxy, le coordinate del punto $P' = (x', y')$, simmetrico di un punto $P = (x, y)$ rispetto al centro $C = (a, b)$, soddisfano le relazioni (vedi § 1)

$$\begin{cases} \dfrac{x + x'}{2} = a \\ \dfrac{y + y'}{2} = b \end{cases}$$

Da queste si ricavano le **equazioni della simmetria** di centro $C = (a, b)$

$$\begin{cases} x' = 2a - x \\ y' = 2b - y \end{cases}$$

In particolare se $C = (0, 0)$, abbiamo (vedi fig. 10)

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = -y \end{cases}$$

Così ad esempio, il simmetrico rispetto all'origine O del punto $P = (-3, 1)$ è il punto $P' = (3, -1)$.

Una curva del piano si dice simmetrica rispetto ad un punto C se il simmetrico rispetto a C di un qualsiasi punto di Γ è ancora un punto di Γ: in tale caso C si dice **centro di simmetria per la curva** Γ. Per esempio, una circonferenza è simmetrica rispetto al proprio centro.

Simmetria rispetto ad una retta.

Fissiamo ora nel piano una retta r. Dato un punto P, diciamo **simmetrico di P rispetto a r** il punto P'' tale che:

- P'' appartiene alla retta perpendicolare a r passante per P
- il punto medio del segmento di estremi P e P'' sta su r.

Qualunque sia P, il simmetrico di P rispetto a r esiste ed è unico: se $P \in r$ allora $P'' = P$. La legge così introdotta che ad ogni punto P del piano associa il suo simmetrico P'', si chiama **simmetria rispetto ad** r: r viene detto **asse della simmetria**.

Osserviamo allora (vedi fig. 15) che le coordinate (x', y') del simmetrico P''_x di un punto $P = (x, y)$ rispetto all'asse delle ascisse $\underline{x}$ soddisfano le relazioni:

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$$

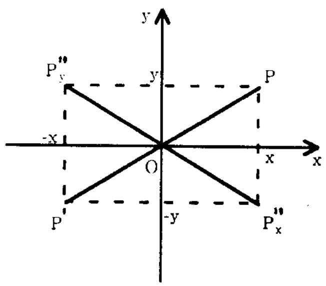


Fig.15

Analogamente le coordinate (x', y') del simmetrico P''_y di un punto $P = (x, y)$ rispetto all'asse delle ordinate $\underline{y}$ sono date da

$$\begin{cases} x' = -x \\ y' = y \end{cases}$$

Si noti che i punti P''_x e P''_y sono simmetrici rispetto all'origine O.

Esempio: Se $P = (1, -2)$ allora è $P''_x = (1, 2)$ e $P''_y = (-1, -2)$.

Una curva Γ del piano si dice simmetrica rispetto ad una retta r se il simmetrico rispetto ad r di qualsiasi punto di Γ è ancora un punto di Γ: in tale caso r si dice **asse di simmetria**. Per esempio, una circonferenza è simmetrica rispetto ad ogni retta che passa per il suo centro.

ESERCIZI

1) Determinate le coordinate del simmetrico del punto $P = (-1, -3)$ rispetto al punto $C = (2, -1)$.

2) Verificate analiticamente (cioè usando le coordinate dei punti) che l'origine $O = (0, 0)$ è centro di simmetria per la circonferenza di equazione $4x^2 + 4y^2 = 1$.

3) Verificate analiticamente che la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ è simmetrica rispetto al suo centro.

4) Verificate che le simmetrie rispetto ad un qualsiasi punto $C = (a, b)$ sono **isometrie** (vedi es. 4 § 5).

5) Scrivete l'equazione dellla retta s simmetrica rispetto all'origine O della retta r di equazione $3x - 2y - 4 = 0$ (Si tratta della retta costituita dai punti simmetrici rispetto ad O dei punti di r).

6) Scrivete l'equazione della retta simmetrica rispetto al punto $C = (-1, 2)$ della retta di equazione $x - 2y + 5 = 0$.

7) Determinate le coordinate del simmetrico del punto $P = (2, -1)$
   a) rispetto alla retta $y = x$
   b) rispetto alla retta $y = -x$
   c) rispetto alla retta $y = 2x + 1$
   d) rispetto alla retta $x - y + 2 = 0$.

8) Verificate che le simmetrie rispetto agli assi coordinati sono isometrie. (Si può verificare che sono isometrie le simmetrie rispetto ad una qualsiasi retta).

9) Scrivete l'equazione della retta s simmetrica rispetto all'asse delle ascisse della retta r di equazione $x + y - 1 = 0$. Scrivete l'equazione della retta simmetrica rispetto all'asse delle ordinate della medesima retta r.

10) Data la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$, scrivete l'equazione della circonferenza ad essa simmetrica
   a) rispetto all'origine O;
   b) rispetto all'asse delle x;
   c) rispetto all'asse delle y.

V erificate poi che:

– se l'equazione di una curva Γ contiene la variabile x solo con esponente pari, allora Γ è simmetrica rispetto all'asse $\underline{y}$;
– se l'equazione di una curva Γ contiene la variabile y solo con esponente pari, allora Γ è simmetrica rispetto all'asse $\underline{x}$;
– se l'equazione di una curva Γ contiene le variabili x e y solo con esponente pari, allora Γ è simmetrica rispetto all'origine O.

11) Dite se è vero o falso che
   a) ogni circonferenza è simmetrica rispetto al suo centro;

b) ogni retta ha un solo centro di simmetria;

c) ogni circonferenza ha due soli assi di simmetria;

d) ogni retta ha infiniti assi di simmetria.

12) Per ciascuna delle seguenti figure geometriche dite se hanno o no centro e/o assi di simmetria:

triangolo rettangolo, triangolo isoscele, triangolo equilatero, parallelogrammo, rettangolo, rombo, quadrato, trapezio.

§ 7. Ellisse, iperbole, parabola

In questo paragrafo esaminiamo alcuni luoghi geometrici del piano che, come la circonferenza, sono rappresentabili in un sistema di coordinate cartesiane mediante equazioni di secondo grado.

A) ELLISSE – *Si dice* **ellisse** *il luogo dei punti del piano per i quali la somma delle distanze da due punti fissati, detti* **fuochi**, *è costante* (cfr. cap II, § 9).

Per comodità di calcolo, indichiamo tale costante con $2a$; siano F_1, F_2 i fuochi e P un punto generico dell'ellisse: deve essere

$$(*) \qquad |PF_1| + |PF_2| = 2a.$$

Osserviamo che, poiché *

$$|PF_1| + |PF_2| > |F_1F_2|,$$

risulta necessariamente

$$|F_1F_2| < 2a.$$

Scegliamo ora il sistema di coordinate che ha l'asse delle ascisse passante per F_1 e F_2 e l'asse delle ordinate coincidente con l'asse del segmento F_1F_2.

Con queste ipotesi avremo $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ con $c > 0$; è pertanto $|F_1F_2| = 2c$ e quindi $2a > 2c$ cioè $a > c$.

Esprimendo la relazione $(*)$ tramite le coordinate di F_1, F_2 e del punto generico $P = (x, y)$ del piano, abbiamo

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

---

* Dati tre punti qualunque P, Q, R risulta

$$|PQ| + |PR| \geq |QR| \qquad (\textit{disuguaglianza triangolare});$$

in particolare abbiamo $|PQ| + |PR| = |QR|$ se e solo se P è un punto del segmento di estremi Q e R. Nella definizione di ellisse escludiamo questo caso.

Da questa, elevando due volte al quadrato e con semplici passaggi algebrici, ricaviamo l'equazione equivalente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(dove $b^2 = a^2 - c^2$), detta **equazione canonica dell'ellisse**.

Per quanto abbiamo visto nel precedente paragrafo, ricaviamo da tale equazione che l'ellisse è simmetrica rispetto all'origine O e rispetto agli assi coordinati del sistema di riferimento fissato (vedi fig. 16).

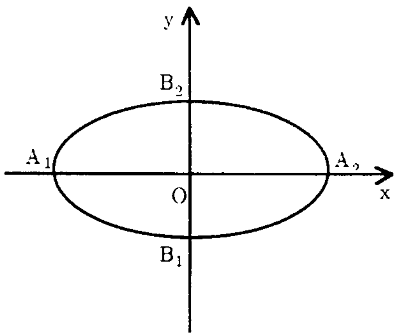


Fig.16

I punti $A_1 = (-a, 0)$, $A_2 = (a, 0)$, $B_1 = (0, -b)$, $B_2 = (0, b)$ sono detti i **vertici** dell'ellisse, il segmento A_1A_2 **asse maggiore** ed il segmento B_1B_2 **asse minore**.

B) IPERBOLE – *Si dice* **iperbole** *il luogo dei punti del piano per i quali il valore assoluto della differenza delle loro distanze da due punti fissati, detti* **fuochi**, è *costante* (cfr. cap II § 9).

Per comodità di calcolo, indichiamo tale costante con $2a$; siano F_1, F_2 i fuochi e P un punto generico dell'iperbole: deve essere

$$(**) \qquad \Big| |PF_1| - |PF_2| \Big| = 2a.$$

Osserviamo che, poiché *

$$\Big| |PF_1| - |PF_2| \Big| < |F_1F_2|,$$

* Dalla disuguaglianza triangolare si ricava che per tre punti qualunque P, Q, R abbiamo

$$\big| |PQ| - |PR| \big| \leq |QR|;$$

risulta necessariamente che

$$|F_1F_2| > 2a.$$

Scegliamo, come per l'ellisse, il sistema di coordinate che ha l'asse delle ascisse passante per F_1 e F_2 e l'asse delle ordinate coincidente con l'asse del segmento F_1F_2.

Con queste ipotesi è $F_1 = (-c, 0)$, $F_2 = (c, 0)$ con c positivo e quindi $|F_1F_2| = 2c$; dunque $2c > 2a$ cioè $a < c$.

Esprimendo la relazione $(**)$ tramite le coordinate di F_1, F_2 e del punto generico $P = (x, y)$ del piano, con passaggi algebrici analoghi a quelli precedentemente svolti per l'ellisse, troviamo l'equazione

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(dove $b^2 = c^2 - a^2$), detta **equazione canonica dell'iperbole**.

Per quanto abbiamo visto nel precedente paragrafo, ricaviamo da tale equazione che anche l'iperbole è simmetrica rispetto all'origine O e rispetto agli assi coordinati del sistema di riferimento fissato (vedi fig. 17).

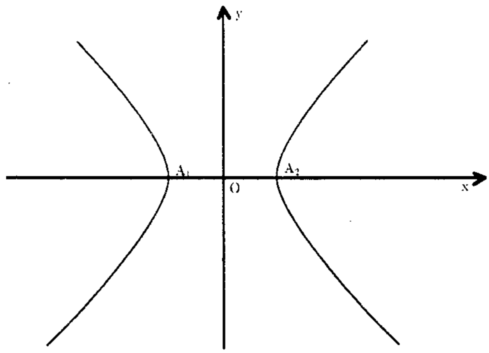


Fig.17

I punti $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ sono detti **vertici**.

l'uguaglianza è valida se e solo se P è un punto della retta per Q e R esterno al segmento $|QR|$. Nella definizione di iperbole escludiamo questo caso.

C) PARABOLA – *Si dice* **parabola** *il luogo dei punti del piano che hanno uguale distanza da un punto, detto* **fuoco**, *e da una retta, detta* **direttrice**, *fissati* (cfr. cap II § 9).

Sia F il fuoco ed r la direttrice della parabola assegnata; scegliamo il sistema di coordinate in cui l'asse delle ordinate è dato dalla perpendicolare a r passante per F (orientata da r verso F). L'origine O appartiene quindi alla parabola e viene detto **vertice**.

Se indichiamo con p la distanza di F da r, abbiamo che $F = \left(0, \frac{p}{2}\right)$ e che $y = -\frac{p}{2}$ è l'equazione di r.

Esprimiamo la relazione

$$|PF| = d(P, r)$$

tramite le coordinate di F e del punto generico $P = (x, y)$ del piano; troviamo l'equazione

$$x^2 = 2py$$

detta **equazione canonica della parabola**.

Per quanto abbiamo visto nel precedente paragrafo, ricaviamo da tale equazione che la parabola è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate $\underline{y}$ (vedi fig. **18**).

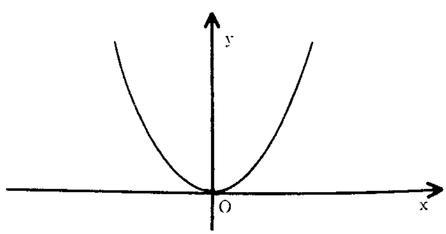


Fig.18

ESERCIZI

1) Scrivete l'equazione della ellisse avente i fuochi nei punti $F_1 = (-2, 0)$, $F_2 = (2, 0)$ e $2a = 6$. Determinatene i vertici.

2) Scrivete l'equazione della ellisse simmetrica, rispetto al punto $C = (4,0)$, della ellisse di equazione $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

3) Scrivete l'equazione della ellisse ottenuta per traslazione secondo il vettore $\overrightarrow{v} = (0,2)$ della ellisse dell'esercizio 1).

4) Determinate gli assi di simmetria della ellisse di equazione

$$\frac{(x+2)^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

5) Scrivete l'equazione della ellisse avente i fuochi nei punti $F_1 = (0,-3)$, $F_2 = (0,3)$ e $2a = 8$. Determinatene i vertici.

6) Scrivete l'equazione della iperbole avente i fuochi nei punti $F_1 = (-2,0)$, $F_2 = (2,0)$ e $2a = 2$.

7) Scrivete l'equazione della iperbole simmetrica, rispetto al punto $C = (0,4)$, della iperbole di equazione $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$.

8) Scrivete l'equazione della iperbole ottenuta per traslazione secondo il vettore $\overrightarrow{v} = (3,0)$ della iperbole dell'esercizio 6).

9) Determinate gli assi di simmetria della iperbole di equazione

$$\frac{x^2}{4} - \frac{(y+1)^2}{2} = 1.$$

10) Scrivete l'equazione della iperbole avente i fuochi nei punti $F_1 = (0,-3)$, $F_2 = (0,3)$ e $2a = 4$.

11) Scrivete l'equazione della parabola che ha il fuoco nel punto $F = (0,2)$ ed il vertice nell'origine O.

12) Scrivete l'equazione della parabola simmetrica, rispetto al punto $C \equiv 0$, della parabola di equazione $x^2 = 3y$.

13) Scrivete l'equazione della parabola ottenuta per traslazione secondo il vettore $\overrightarrow{v} = (1, 0)$ della iperbole dell'esercizio 11).

14) Determinate l'asse di simmetria della parabola di equazione $(x - 3)^2 = 6y$.

15) Scrivete l'equazione della parabola che ha il fuoco nel punto $F = (3, -1)$ ed il vertice nel punto $V = (3, 1)$.

16) Facendo uso delle definizioni, scrivete

a) l'equazione della ellisse avente i fuochi nei punti $F_1 = (1, -1)$, $F_2 = (-2, 2)$ e $2a = 5$.

b) l'equazione della iperbole avente i fuochi nei punti $F_1 = (1, 1)$, $F_2 = (-2, 2)$ e $2a = 4$.

c) l'equazione della parabola avente il fuoco nel punto $F = (2, 1)$ e la direttrice di equazione $3x - y + 1 = 0$.

Capitolo VI: TRIGONOMETRIA

§ 1. MISURA DEGLI ANGOLI (IN GRADI)

Abbiamo visto nel cap. II le prime nozioni riguardanti gli *angoli* e la distinzione tra angoli *elementari* e angoli *orientati e generalizzati.* Abbiamo anche osservato che i sistemi più usati per misurare le *ampiezze* degli angoli sono due: la misura in *gradi* (sessagesimali) e la misura in *radianti.* Nella matematica elementare e nelle applicazioni alla geografia e all'astronomia si preferisce la misura in gradi; nella matematica superiore e nella fisica, soprattutto quando si considerano angoli orientati e generalizzati, si preferisce invece la misura in radianti.

Cominciamo col parlare della **misura di un angolo in gradi**. L'unità di misura è il *grado* (simbolo °), che è *l'ampiezza dell'angolo ottenuto dividendo l'angolo giro in 360 parti uguali.* Per esempio:

l'angolo giro misura 360°
l'angolo piatto misura 180°
l'angolo retto misura 90°.

Le parti di un grado si misurano in *primi* (simbolo $'$). Un primo è un sessantesimo di grado: quindi $1° = 60'$.

Le parti di un primo si misurano in *secondi* (simbolo $''$). Un secondo è un sessantesimo di primo: quindi $1' = 60''$; di conseguenza $1° = 60' = 3600''$.

Per esempio, per indicare che un angolo α misura 42 gradi, 15 primi e 26 secondi si scrive $\alpha = 42°\,15'\,26''$. Così la quarta parte di un angolo retto misura $22°\,30'\,00''$. Nel sommare, sottrarre, moltiplicare e dividere misure in gradi, occorre fare attenzione, perché tutte le operazioni vanno fatte tenendo conto del sistema *sessagesimale*: conviene operare separatamente sui gradi, sui primi e sui secondi, e poi tenere conto delle equivalenze.

Esempi.

$46°\,35'\,27'' + 31°\,29'\,58'' = 77°\,64'\,85'' = 77°\,65'25'' = 78°\,05'\,25''$
$(35°\,39'\,26'')/2 = 17°\,30' + 19'\,30'' + 13'' = 17°\,49'\,43''$.

Analogamente un settimo di angolo giro misura $360°/7 = 51° + (3/7)° = 51° + (180/7)' = 51°\,25' + (5/7)' = 51°\,25' + (300/7)'' \simeq 51°\,25'\,42''$.

Se da queste operazioni si ottengono misure superiori a 360°, di solito si compie la cosiddetta *riduzione al primo giro*, cioè dalla misura ottenuta si sottrae il massimo multiplo intero (positivo o negativo) di 360° che non supera la misura data. Detto in altre parole, quando si opera in questo modo si trascurano i giri completi e si fissa l'attenzione solo sull'ampiezza dell'angolo restante. Per esempio, per sommare un angolo di 270° con un angolo di 230° si calcola: $270 + 230 = 500 = 360 + 140$ e si dice che la somma dei due angoli misura 140°, ignorando il giro di 360°. Analogamente, se si moltiplica un angolo di 153° per 5 si ottiene un angolo di 45° perchè $153 \cdot 5 = 765 = 2 \cdot 360 + 45$.

Esempio 1. La *latitudine* di una città C si misura in gradi, primi e secondi. Essa rappresenta la misura dell'angolo α che una retta ideale, passante per la città C e per il centro O della Terra, forma con il piano dell'Equatore. Equivalentemente: α è il complementare dell'angolo che OC forma con l'asse terrestre Sud-Nord, attorno al quale la Terra ruota, vedi fig. 1. Si distingue tra *latitudine Nord* e *latitudine Sud*: per l'Equatore la latitudine è 0° ; per il polo Nord è $90°N$; per il polo Sud è $90°S$.

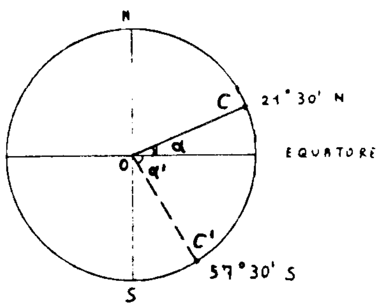


fig. 1

Mogadiscio si trova alla latitudine $2°\,1'\ N$, cioè poco sopra l'Equatore. Baghdad si trova all'incirca sullo stesso meridiano, a latitudine $33°\,21'N$. Il volo Mogadiscio-Baghdad richiede circa 4 ore. A che latitudine si trova l'aereo dopo 3 ore di volo?

La differenza di latitudine è in questo caso $33°\,21' - 2°\,1' = 31°\,20'$. Dopo 3 ore di volo ci si è spostati di $(3/4)(31°\,20') = 94°/4 = 23°\,30'$. La latitudine raggiunta è dunque $2°\,1' + 23°\,30' = 25°\,31'N$.

Esempio 2. Le distanze sul mare si misurano in *miglia marine*. Un miglio marino è la distanza che una nave percorre lungo un meridiano (cioè in direzione Nord-Sud) per variare di $1'$ la sua latitudine. Si chiede: qual è la lunghezza di un miglio marino, espressa in kilometri?

Si sa che, muovendosi lungo un meridiano, l'intero giro del mondo corrisponde a circa 40 000 km. Dunque, spostandosi lungo un meridiano dall'Equatore al Polo si percorrono circa 10 000 km; poiché con tale spostamento si passa dal parallelo 0° al parallelo 90°, per passare dal parallelo 0° al parallelo 1° si devono percorrere $10000/90 \simeq 111$ km. Dunque un miglio marino corrisponde a circa $111/60 = 1{,}85$ km. Il *miglio terrestre*, che nel mondo anglosassone viene usato per le distanze sulla terra, è più corto: circa 1,61 km.

Esempio 3. Anche il tempo si misura con un sistema sessagesimale: ore, minuti e secondi. Un'ora vale 60 minuti; un minuto vale 60 secondi. In corrispondenza, si può calcolare di quali angoli si spostano le lancette delle ore e dei minuti, ma non bisogna confondersi: la lancetta delle ore compie un giro ogni 12 ore, dunque in un'ora si sposta di un angolo di $360°/12 = 30°$; la lancetta dei minuti compie un giro ogni 60 minuti, dunque in un minuto si sposta di un angolo di $360°/60 = 6°$.

Esempio 4. (fig. 2) La *longitudine* di un punto P sulla Terra è la misura dell'angolo che un piano ideale passante per l'asse terrestre e per P forma con un analogo piano, fissato una volta per tutte come riferimento: per convenzione è stato scelto il piano del *meridiano di Greenwich* , che attraversa Londra, in Inghilterra. Si distingue tra

longitudine Est (cioè ad Est del meridiano di Greenwich, da 0° a 180° E)

e

longitudine Ovest (da 0° a 180° O).

I meridiani corrispondenti a 180° E e a 180° O coincidono tra loro: si tratta del meridiano opposto a quello di Greenwich, che passa per es. per la Nuova Zelanda.

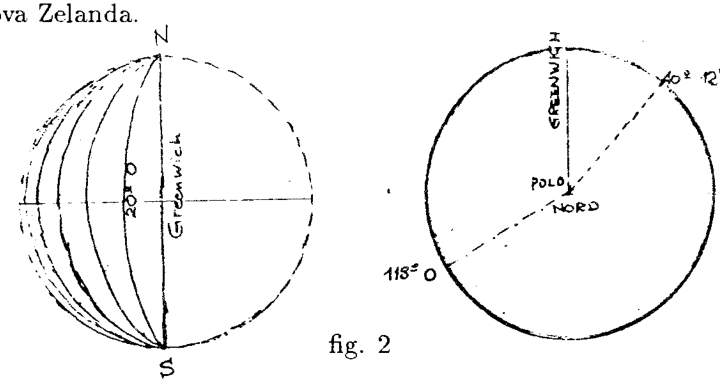


fig. 2

Un radio-satellite viene lanciato alle ore $7^h\,30'$ verso Ovest, da una nave che si trova sull'Equatore, a Sud di Mogadiscio (longitudine $45°\,20'$ E) su un'orbita equatoriale (cioè in modo che rimanga sempre sull'Equatore). Alle ore $11^h\,15'$ esso viene avvistato nel cielo delle isole Galapagos (longitudine $90°\,30'$ O) nell'Oceano Pacifico. Si chiede: a quali ore sarà nuovamente su Mogadiscio?

Per variare la longitudine di $45°\,20' + 90°\,30' = 135°\,50' = 8150'$ (primi) il satellite impiega $11^h\,15' - 7^h\,30' = 3^h\,45' = 225'$ (minuti). Dunque in un minuto la longitudine varia di $(8150/225)' = 36'\,13''$. Per compiere un intero giro del mondo, cioè perché la longitudine vari di $360° = 21\,600'$ occorreranno $21\,600' \cdot 225/8150 \simeq 596'$ (minuti) $= 9^h\,56'$. Il satellite ricomparirà dunque la prima volta su Mogadiscio verso le $17^h\,26'$ e così nuovamente ogni 10 ore circa.

ESERCIZI

1. Riducete al primo giro i seguenti angoli:

$1538° = 98°$	$1227° 46' 58'' = 147° 46' 58''$
$1031° 14' 23'' =$	$523° 47' 11'' =$

2. Calcolate (in gradi, primi e secondi) le seguenti somme e differenze di angoli, riducendo i risultati al primo giro:

$50° + 70° = 120°$	$150° + 270° = 420° = 60°$
$25° 30' + 178° 40' =$	$213° 45' 50'' + 177° 56' 35'' =$
$125° 30' - 78° 40' =$	$113° 45' 50'' - 77° 56' 35'' =$

3. Eseguite le seguenti moltiplicazioni, riducendo i risultati al primo giro:

$3 \cdot 150° = 450° = 90°$	$2 \cdot (25° 30') =$	$2 \cdot (13° 45' 50'') =$
$2 \cdot 270° =$	$4 \cdot (25° 30') =$	$3 \cdot (77° 56' 35'' =$
$7 \cdot 145° =$	$5 \cdot (178° 40') =$	$4 \cdot (0° 25' 59'') =$

4. Eseguite le seguenti divisioni e moltiplicazioni:

$50°/2 = 25°$	$(25° 30')/2 = 12° 45'$	$(13° 45' 50'')/3 =$
$55°/2 =$	$270° \cdot 4/5 =$	$3/4(77° 56' = 35'') =$
$70°/3 =$	$(178° 40')/5 =$	$3/2(18° 50' 40'') =$

§ 2. MISURA DEGLI ARCHI E DEGLI ANGOLI ORIENTATI (IN RADIANTI)

Consideriamo una circonferenza C di centro O e raggio r qualsiasi. È possibile percorrere la circonferenza muovendosi in due versi opposti; di solito si chiama *positivo* il verso antiorario, e di conseguenza si chiama *negativo* il verso orario.

Fissati due punti A, B sulla circonferenza C, ricordiamo (vedi Cap. II, §8) che ciascuna delle due parti di circonferenza che hanno A e B come estremi si chiama *arco*: per es. in fig. 3 uno dei due archi contiene il punto P, mentre l'altro contiene il punto Q. Se consideriamo A come primo estremo e B come secondo estremo, e se pensiamo di muoverci da A fino a B lungo l'arco che contiene P, il verso di percorrenza sarà quello positivo (antiorario); se invece pensiamo di muoverci sempre da A verso B, ma lungo l'arco che contiene Q, il verso di percorrenza sarà quello negativo (orario). Gli archi, muniti di un verso di percorrenza, si diranno *archi orientati*. Per denotarli useremo simboli del tipo $\overset{\frown}{APB}$, rispettivamente $\overset{\frown}{AQB}$; talvolta scriveremo anche brevemente $\overset{\frown}{AB}$, se dal contesto è chiaro di quale dei due archi si tratta. Si noti che, scambiando l'ordine dei due estremi, cambia anche il verso di percorrenza di un arco: per es. gli archi APB e BPA coincidono in quanto insiemi di punti, ma il primo risulta percorso in verso orario, il secondo risulta percorso in verso antiorario.

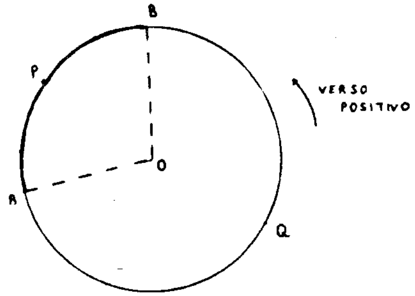


fig. 3

Per gli scopi di questo capitolo conviene estendere ulteriormente la nozione di arco, considerando anche gli archi ottenuti percorrendo più di una volta la circonferenza, in un verso o nell'altro: li chiameremo *archi orientati e generalizzati*. Per distinguere tra i vari possibili archi che hanno gli stessi estremi A, B, faremo allora uso di frecce, come illustrato in fig. 4.

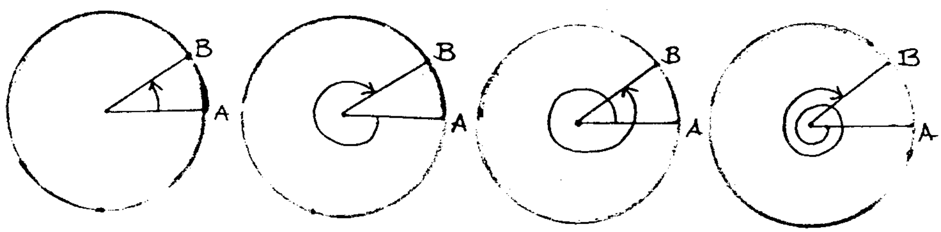


fig. 4

Gli archi (orientati e generalizzati) si possono *misurare* riportandosi alla misura delle lunghezze dei segmenti rettilinei. Per esempio, possiamo pensare di procedere così: avvolgiamo (si dice anche: arrotoliamo) un filo sulla circonferenza nel verso prescelto, come se si trattasse di una ruota. Tagliamo il filo nei punti A,B; infine raddrizziamo il filo e appoggiamolo su un righello graduato. Sia d la lunghezza del filo: diremo che la misura dell'arco orientato $\widehat{AB}$ è $h = d$ se il verso di percorrenza dell'arco coincide con quello scelto come positivo sulla circonferenza (arco percorso in verso antiorario); diremo invece che la misura di $\widehat{AB}$ è $h = -d$ nel caso opposto (arco percorso in verso orario).

Ricordiamo che la lunghezza di una circonferenza di raggio r è $2 \cdot \pi \cdot r$, dove $\pi = 3,141592.....$ Quindi le misure dei vari archi che hanno A come primo estremo e B come secondo estremo sono:

$$h \qquad h+2\pi r \qquad h+4\pi r \qquad h+6\pi r \quad ... \quad h-2\pi r \qquad h-4\pi r \quad ....$$

Per esempio, in fig. 4, se il primo arco ha lunghezza h allora il secondo arco ha lunghezza, in valore assoluto, $2\pi r - h$. Ma poiché il verso di percorrenza è opposto al precedente, la sua misura è $-(2\pi r - h) = h - 2\pi r$.

Consideriamo ora un angolo orientato e generalizzato $\alpha = A\hat{O}B$, nel senso già definito nel cap II, §6. Possiamo pensare α come angolo al centro di una circonferenza di raggio r (qualsiasi). Sia $\widehat{AB}$ l'arco orientato corrispondente e sia h la sua misura, intesa nel senso sopra descritto; dividiamo h per la misura (positiva) r del raggio della circonferenza.

Per definizione, la misura in radianti di α è data dal rapporto h/r.

Osserviamo che se la circonferenza (di raggio r) si sostituisce con un'altra (di raggio r') il rapporto h/r non cambia, perché per la misura del nuovo arco $\widehat{A'B'}$ vale la relazione $h'/r' = h/r$ (vedi fig. 5). Osserviamo inoltre che questa misura dell'angolo è positiva o negativa, a seconda che l'angolo sia percorso in verso antiorario oppure orario.

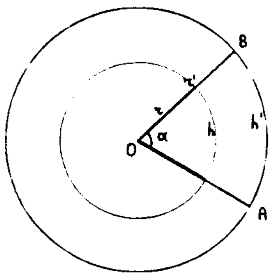


fig. 5

Possiamo chiederci qual è l'unità di misura per questo nuovo metodo di misura delle ampiezze angolari, cioè quale angolo misura 1 radiante (simbolo 1 rad). Si tratta dell'angolo, orientato positivamente, al quale corrisponde un arco di lunghezza r sulla circonferenza di raggio r. Siccome occorrono $\pi = 3,14...$ raggi per coprire una semicirconferenza, l'arco che è lungo come il raggio deve essere lungo un po' meno di un terzo di semicirconferenza, e dunque l'angolo che misura 1 rad è di poco inferiore a 60°. Le parti di radiante si misurano con il solito sistema decimale; per esempio, un quarto di radiante si indica con 0,25 rad. Gli angoli più familiari, misurati in radianti, sono:

l'angolo giro che misura $2\pi \simeq 6,28$ rad

l'angolo piatto che misura $\pi \simeq 3,14$ rad

l'angolo retto che misura $\pi/2 \simeq 1,57$ rad.

Fissati due punti A,B sulla circonferenza, i differenti angoli al centro orientati che hanno A , B rispettivamente come primo e come secondo estremo misurano, in radianti:

$$\alpha \qquad \alpha + 2\pi \qquad \alpha + 4\pi \quad \dots \quad \alpha - 2\pi \qquad \alpha - 4\pi \quad \dots$$

Per indicarli nel loro insieme, si usa scrivere $\alpha + 2k\pi$ dove k indica un qualunque numero intero $k = \dots - 2, -1, 0, 1, 2, \dots$.

N.B. Mentre nel caso della misura di un angolo in gradi, il simbolo $^\circ$ non deve essere mai tralasciato, nel caso della misura di un angolo in radianti spesso l'unità di misura "rad" viene sottintesa e quindi si scrive per es. $\pi/4$ in luogo di $\pi/4$ rad.

Poiché entrambi i sistemi di misura degli angoli sono di uso frequente, occorre familiarizzarsi con essi e imparare a passare da un sistema all'altro, trasformando una misura in gradi in una misura in radianti e viceversa, secondo le equivalenze già introdotte nel cap. II, §2: moltiplicando una misura in gradi per il numero $\pi/180$ si ottiene la corrispondente misura in radianti; viceversa, moltiplicando una misura in radianti per il numero $180/\pi$ si ottiene la corrispondente misura in gradi. Per esempio: la somma dei tre angoli interni di un triangolo vale π; gli angoli di un triangolo equilatero misurano $\pi/3$; due rette perpendicolari formano angoli di ampiezza $\pi/2$, un angolo di 30° misura $30 \cdot \pi/180 = \pi/6 \simeq 0,52$ rad, ecc.

ESERCIZI

1. Esprimete la misura dei seguenti angoli in radianti:

$60^\circ = \pi/3\ (rad)$	$45^\circ =$	$180^\circ =$	$750^\circ =$
$50^\circ = (5/18)\pi$	$75^\circ =$	$120^\circ =$	$135^\circ =$
$25^\circ\, 30' = (17/120)\pi$	$16^\circ\, 15' =$	$22^\circ\, 30' =$	$57^\circ\, 45' =$

2. Esprimete la misura dei seguenti angoli in gradi (con riduzione al primo giro):

$5\pi = 540^\circ = 180^\circ$	$(7/2)\pi =$	$(11/2)\pi =$
$(2/3)\pi =$	$(3/4)\pi =$	$(2/9)\pi =$
$(4/27)\pi =$	$(1/16)\pi =$	$(31/16)\pi =$
$0,25\,\pi =$	$1,75\,\pi =$	$12,8\,\pi =$

§3. DEFINIZIONI DI SENO, COSENO E TANGENTE

Sia α un angolo orientato. Introduciamo un sistema di coordinate ortogonali Oxy in modo che il semiasse x positivo coincida col primo lato dell'angolo α. La semiretta Op sia il secondo lato di α. Tracciamo una circonferenza di raggio r qualsiasi con centro in O e sia $P = (\overline{x}, \overline{y})$ il punto in cui Op incontra la circonferenza (cfr. fig. 6).

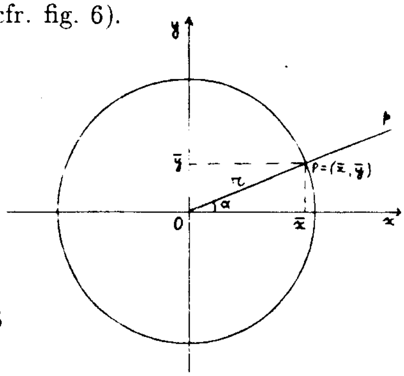


fig. 6

Il rapporto $\overline{y}/r$ si chiama il **seno** dell'angolo α e si indica con $\sin\alpha$.

Il rapporto $\overline{x}/r$ si chiama il **coseno** dell'angolo α e si indica con $\cos\alpha$.

Se P non sta sull'asse y (cioé se $\overline{x} \neq 0$) il rapporto $\overline{y}/\overline{x} = \sin\alpha/\cos\alpha$ si chiama la **tangente** dell'angolo α e si indica con $\tan\alpha$.

Esempio 1. (cfr. fig. 7). Sia $\alpha = x\hat{O}p$ l'angolo che misura $\pi/4$ radianti (ovvero 45°). Allora Op è la bisettrice del primo quadrante. Per trovare i valori $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ calcoliamo le coordinate del punto $P = (\overline{x}, \overline{y})$ in cui Op incontra la circonferenza di centro O e raggio r.

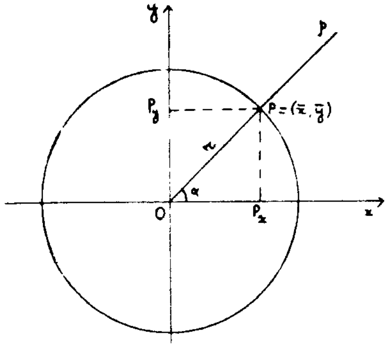


fig. 7

Osserviamo anzitutto che se P_x, P_y indicano le proiezioni ortogonali di P sugli assi x e y, allora OP_xPP_y è un quadrato; infatti se $P_x\hat{O}P = \alpha = \pi/4$ anche $P\hat{O}P_y = P_y\hat{P}O = O\hat{P}P_x = \pi/4$; sono quindi uguali i triangoli P_xOP, P_yOP e dunque le due coordinate del punto P sono uguali e positive: $\overline{x} = \overline{y} > 0$. Il segmento OP è la diagonale del quadrato e il teorema di Pitagora dà $r^2 = \overline{x}^2 + \overline{y}^2 = 2\,\overline{x}^2$, cioè $\overline{x}^2/r^2 = 2$. Visto che si tratta di numeri positivi, si ha $\overline{x}/r = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. Possiamo dunque concludere:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\alpha = 1$$

che scriveremo anche, sostituendo l'angolo con la sua misura (in radianti):

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\frac{\pi}{4} = 1.$$

Esempio 2. (cfr. fig. 8). Calcoliamo i valori di seno, coseno e tangente per l'angolo che misura $-5\pi/2$ radianti. Scegliendo sempre il semiasse x positivo come primo lato dell'angolo, per individuare la posizione del secondo lato si tratta di percorrere in verso orario un giro completo, più un quarto di giro. Quindi la semiretta Op coincide col semiasse y negativo e dunque le coordinate del punto P, intersezione con la circonferenza di raggio r, sono: $\overline{x} = 0$, $\overline{y} = -r$. Si conclude:

$$\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = -1 \qquad \cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) = 0.$$

Per questo angolo, la tangente non è definita.

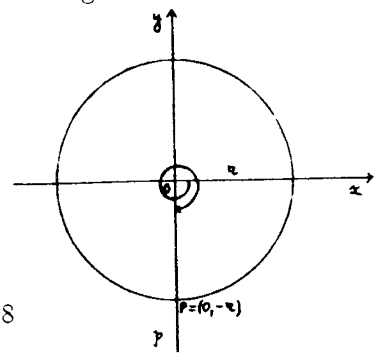


fig. 8

Si osservi che le definizioni di seno, coseno e tangente non dipendono dal raggio r: infatti se un'altra circonferenza, di raggio r' , incontra Op nel punto $P' = (x', y')$, allora risulta $x'/r' = \overline{x}/r$ come si vede dalla figura 9 (in quanto i triangoli OQP, $OQ'P'$ sono simili) e dunque $PQ/PO = P'Q'/P'O$.

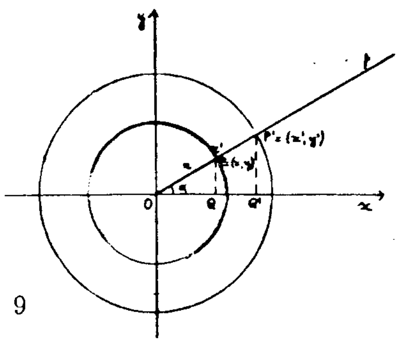


fig. 9

Per lo stesso motivo si ha $y'/r' = \overline{y}/r$ e dunque, usando circonferenze con raggi diversi, il seno, il coseno e la tangente sono sempre gli stessi tre numeri. In particolare, si può scegliere $r = 1$. La circonferenza di raggio unitario e centro nell'origine si chiama qualche volta **circonferenza goniometrica** perché su di essa le misure degli archi e quelle dei corrispondenti angoli al centro (in radianti) coincidono. Si ottiene dunque una definizione equivalente di seno e coseno dicendo:

$\sin\alpha$ *e* $\cos\alpha$ *sono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata dell'intersezione di* Op *con la circonferenza di centro* O *e raggio* $r = 1$.

Anche $\tan\alpha$ ha un semplice significato geometrico (vedi fig. 10): tracciamo la retta di equazione $x = 1$, che è tangente alla circonferenza goniometrica nel punto $U = (1,0)$. Se $Q = (1, \overline{y})$ è l'intersezione di questa retta con la semiretta Op (o con la sua opposta) allora i triangoli OP_xP e OUQ sono simili e dunque sono uguali i rapporti tra i cateti: $\sin\alpha/\cos\alpha = \overline{y}/1$, cioè $\tan\alpha = \overline{y}$. Si conclude:

$\tan\alpha$ *è l'ordinata dell'intersezione di* Op *(o della sua opposta) con la retta tangente alla circonferenza nel punto (1,0).*

Il seno e il coseno di uno stesso angolo sono legati dalla *relazione fondamentale*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

che deriva dall'applicazione del teorema di Pitagora al triangolo OP_xP, come indicato nella fig. 10.

N.B. Si usa scrivere $\sin^2\alpha$ per indicare $(\sin\alpha)^2$, ecc.

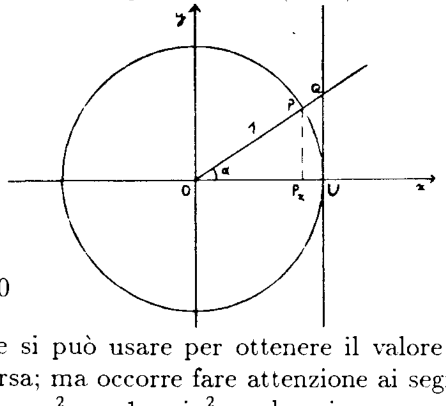


fig. 10

Questa relazione si può usare per ottenere il valore del seno da quello del coseno e viceversa; ma occorre fare attenzione ai segni. Infatti si ricava: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$; $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$, da cui:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1 - \cos^2\alpha} \qquad \cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

dove il segno va scelto a seconda dei quadranti, osservando che

nel 1° *quadrante*	$\sin\alpha \geq 0$	$\cos\alpha \geq 0$	$tan\alpha \geq 0$
nel 2° *quadrante*	$\sin\alpha \geq 0$	$\cos\alpha \leq 0$	$\tan\alpha \leq 0$
nel 3° *quadrante*	$\sin\alpha \leq 0$	$\cos\alpha \leq 0$	$\tan\alpha \geq 0$
nel 4° *quadrante*	$\sin\alpha \leq 0$	$\cos\alpha \geq 0$	$\tan\alpha \leq 0$.

Esempio 3. (cfr. fig. 11). Sia $\alpha = 5\pi/6$ (cioè 150°) e si voglia calcolarne seno, coseno e tangente. Sia $\overset{\frown}{\mathrm{OP}}$ il corrispondente arco sulla circonferenza di raggio 1; P sta nel secondo quadrante e dunque per le coordinate di $P = (x, y)$ si ha $x < 0, y > 0$. Sia $P_x = (x, 0)$ la proiezione di P sull'asse delle x e sia $P' = (x, -y)$ il simmetrico di P rispetto allo stesso asse. L'angolo $P\hat{O}P_x$ misura $\pi - \alpha = \pi - 5\pi/6 = \pi/6$ e quindi l'angolo $O\hat{P}P_x$, che è il suo complementare nel triangolo rettangolo, misura $\pi/2 - \pi/6 = \pi/3$.

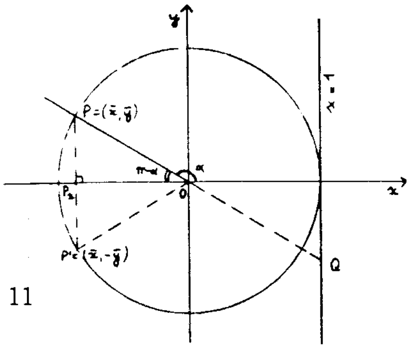


fig. 11

Ma anche gli angoli $O\widehat{P_x}P, O\widehat{P_x}P'$ sono uguali e quindi anche l'angolo $P\hat{O}P'$ misura $2 \cdot (\pi - \alpha) = \pi/3$. Pertanto il triangolo OPP' è equilatero e P_x divide il lato PP' a metà. Gli altri lati sono raggi della circonferenza e dunque la loro lunghezza è 1. In definitiva $y = -1/2$. Quanto ad x, si ricava con la relazione fondamentale: $x^2 = 1 - y^2 = 1 - 1/4 = 3/4$ e infine, visto che x deve essere negativo: $x = -\sqrt{1 - y^2} = -\sqrt{3}/2$. Concludiamo:

$$\cos\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \tan\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}.$$

Il fatto che la tangente è negativa corrisponde al fatto che il prolungamento di OP incontra la retta $x = 1$ nel quarto quadrante.

Poiché - come abbiamo visto - seno, coseno e tangente sono indipendenti dal raggio della circonferenza che si adopera per la loro definizione, in presenza di un arco $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ si parla talvolta del seno (o del coseno, o della tangente) dell'*arco* $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ per intendere il seno (o il coseno o la tangente) del corrispondente *angolo al centro.*

ESERCIZI

1. Completate:

$\sin 120° = -1/2$	$\tan 180° =$	$\cos 0° =$	$\sin 135° =$
$\sin 330° =$	$\tan 150° =$	$\sin 180° =$	$\cos 315° =$
$\sin(-\pi/2) =$	$\cos\pi =$	$\sin(3\pi/2) =$	$\cos 0 =$
$\tan(-\pi/4) =$	$\sin(7\pi/4) =$	$\sin(13\pi/3) =$	$\tan(-7\pi/6) =$

2. Calcolate il valore delle seguenti espressioni:
$5\sin 270° + 2\sin 180° - 3\cos 0° + 4\cos 180° - 5\sin 90° = -17$
$\sin 0° + \sin 90° - \sin 180° - \sin 270° =$
$a^2 \sin 90° - 2ab\cos 0° - b^2 \cos 180° - (2a^2 - b^2)\sin 180° =$

3. Calcolate il valore delle seguenti espressioni:
$2\sin\frac{\pi}{2} - \cos\pi + 5\cos\frac{3\pi}{2} - 4\cos 0 = -1$
$4\,a\cos\frac{-\pi}{2} + 5a\,\sin\frac{\pi}{2} + a =$
$(a-b)^2\sin\frac{3\pi}{2} + 4ab\cos 2\pi + (a+b)^2\sin\frac{\pi}{2} =$
$2\tan 0 + 4\sin 2\pi - 5\tan\pi + 3\cos\frac{3\pi}{2} =$

§4. PERIODICITÀ. ANGOLI SUPPLEMENTARI E COMPLEMENTARI

Sappiamo che, se due archi hanno ordinatamente gli stessi estremi, i corrispondenti angoli al centro differiscono per multipli interi di 2π. Viceversa, se due angoli α, α' differiscono per multipli interi di 2π, cioè se $\alpha' = \alpha + k\cdot 2\pi$ per qualche intero k, allora sulla circonferenza goniometrica le semirette Op, Op' individuano lo stesso punto $P = P'$ e dunque si ottengono gli stessi valori per il seno e per il coseno; questo fatto si esprime con le formule:

$$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha \qquad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha \qquad (k = 0, \pm1, \pm2, ...).$$

Consideriamo ora un angolo α' che sia l'opposto di α, cioè $\alpha' = -\alpha$. Allora sulla circonferenza il secondo estremo dell'arco α' è $P' = (x, -y)$, simmetrico di $P = (x, y)$ rispetto all'asse x. Dunque possiamo scrivere:

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha \quad \text{e quindi} \quad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha.$$

Consideriamo invece due angoli α, α' che differiscano per mezzo giro: $\alpha' = \alpha + \pi$. Allora P, P' sono simmetrici rispetto all'origine O e dunque le coordinate di P' si ottengono cambiando di segno a entrambe quelle di P. Questo vuol dire che

$$\sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha \qquad \cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha \quad \text{e quindi} \quad \tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha.$$

In definitiva, seno e coseno cambiano di segno dopo mezzo giro e si ripetono dopo un giro (e non prima); la tangente invece si ripete già dopo mezzo giro (e non prima). Si dice allora che 2π *è il* **periodo** *del seno e del coseno;* π *è il periodo della tangente.*

Combinando le formule precedenti si trova una relazione che si riferisce agli angoli supplementari, ossia tali che $\alpha' = \pi - \alpha = -\alpha + \pi$:
$\sin(\pi - \alpha) = -\sin(-\alpha) = \sin\alpha$ $\qquad \cos(\pi - \alpha) = -\cos(-\alpha) = -\cos\alpha$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan\alpha$.

Consideriamo ora due angoli α, α' che differiscono per un quarto di giro, ossia tali che $\alpha' = \alpha + \pi/2$. Siano $P = (x, y), P' = (x', y')$ i corrispondenti punti sulla circonferenza goniometrica e siano P_x, P'_y le proiezioni, rispettivamente di P sull'asse x e di P' sull'asse y. Allora i triangoli OP_xP, OP'_yP' sono uguali e perciò risulta, tenuto conto dei quadranti in cui P, P' cadono: $x = y'$, $y = -x'$. Concludiamo:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha \qquad \tan\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}.$$

Analogamente si trova:

$$\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\alpha \qquad \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\alpha \qquad \tan\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{1}{\tan\alpha}.$$

Infine, consideriamo due angoli *complementari*, ossia tali che $\alpha' = \frac{\pi}{2} - \alpha = -\alpha + \frac{\pi}{2}$. Questa relazione si può leggere come segue: per ottenere α' si deve aggiungere $\pi/2$ all'opposto di α. Pertanto, combinando le relazioni precedenti, si trova:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha \quad \text{e quindi} \quad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan\alpha}.$$

Nel seguente esempio si vedrà come queste relazioni permettano di risparmiare molti calcoli, riconducendo lo studio di vari angoli ad altri casi già studiati.

Esempio 1. Utilizzando i risultati dell'esempio 1 del paragrafo precedente e le formule per $\alpha + \frac{\pi}{2}$ ricaviamo:
$\sin\frac{3\pi}{4} = \sin(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$;
$\cos\frac{3\pi}{4} = \cos(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Utilizzando i risultati dell'esempio 3 del paragrafo precedente e le formule per $-\alpha$ e per $\alpha + \pi$ ricaviamo:
$\sin\frac{\pi}{6} = -\sin\frac{-\pi}{6} = \sin(\frac{-\pi}{6} + \pi) = \sin\frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$;
$\cos\frac{\pi}{6} = \cos\frac{-\pi}{6} = -\cos(-\frac{\pi}{6} + \pi) = -\cos\frac{5\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Utilizzando lo stesso esempio 3 e le formule per $-\alpha$ e per $\alpha - \pi/2$ ricaviamo:

$\sin\frac{\pi}{3} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
$\cos\frac{\pi}{3} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}) = \cos(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2}) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Da questi esempi si capisce che - con le formule precedenti - tutti gli angoli si possono ricondurre ad altri angoli di ampiezza compresa tra 0 e $\pi/4$. La fig. 12 illustra i vari angoli che sono stati ricondotti mediante le formule precedenti allo stesso angolo $\alpha \leq \pi/4$.

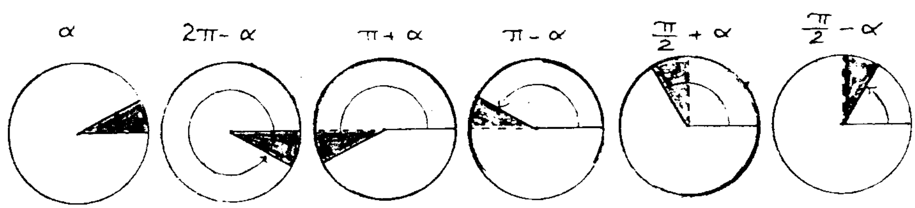


fig 12

ESERCIZI

1. Calcolate (semplificate) il valore delle seguenti espressioni (le ampiezze angolari sono espresse in gradi):

$\tan(180° + \alpha°) - \cos(-\alpha°) + \tan(-\alpha°) \cdot \cos(180° + \alpha°) + \sin(90° - \alpha°) =$
$\tan(90° - \alpha°) \cdot \tan\alpha° - \sin(180° - \alpha°) + \cos(-\alpha°) \cdot \sin(90° - \alpha°) =$
$-\cos^2(180° - \alpha°) - \sin^2(180° - \alpha°) + 2\sin(180° + \alpha°) =$

2. Calcolate il valore delle seguenti espressioni (le ampiezze angolari sono espresse in radianti):

$\tan(\alpha + \pi) - \cos(\alpha - \pi) + \tan(\pi + \alpha) \cdot \cos(\pi - \alpha) + 2\sin(-\alpha) =$
$\tan(-\alpha + \frac{\pi}{2}) \cdot \tan(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - \pi) + \cos(2\pi - \alpha) \cdot \sin(\alpha - \frac{\pi}{2}) =$
$-\cos^2(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin^2(\frac{\pi}{2} - \alpha) + 2\sin(\alpha - \frac{3\pi}{2}) =$
$\cos(-\alpha + \pi) - \cos(\alpha - \pi) + \sin(\pi + \alpha) \cdot \sin(\pi - \alpha) + 2\tan(-\alpha) =$
$\tan(-\alpha + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) - \sin(\alpha - 2\pi) + \cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) \cdot \sin(\alpha + \frac{5\pi}{2}) =$
$a\cos^2(\alpha + \frac{\pi}{2}) - b\sin^2(\frac{\pi}{2} - \alpha) + 2c\sin(\alpha + \frac{3\pi}{2}) =$

§5. TABELLE E GRAFICI

Possiamo riassumere i valori di seno, coseno e tangente per alcuni angoli di uso frequente nella seguente tabella:

angolo	*coseno*	*seno*	*tangente*
$0° = 0\ (rad)$	$1 = 1,00$	$0 = 0,00$	$0 = 0,00$
$30° = \pi/6$	$\sqrt{3}/2 \simeq 0,86$	$1/2 = 0,50$	$\sqrt{3}/3 \simeq 0,88$
$45° = \pi/4$	$\sqrt{2}/2 \simeq 0,71$	$\sqrt{2}/2 \simeq 0,71$	$1 = 1,00$
$60° = \pi/3$	$1/2 = 0,50$	$\sqrt{3}/2 \simeq 0,86$	$\sqrt{3} \simeq 1,73$
$90° = \pi/2$	$0 = 0,00$	$1 = 1,00$	
$120° = 2\pi/3$	$-1/2 = -0,50$	$\sqrt{3}/2 \simeq 0,86$	$-\sqrt{3} \simeq -1,73$
$135° = 3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2 \simeq -0,71$	$\sqrt{2}/2 \simeq 0,71$	$-1 = -1,00$
$150° = 5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2 =\simeq -0,86$	$1/2 = 0,50$	$-3/\sqrt{3} \simeq -0,58$
$180° = \pi$	$-1 = -1,00$	$0 = 0,00$	$0 = 0,00$

La tabella si può continuare facilmente, tenendo presente che per angoli negativi come $-\pi/6$ oppure maggiori di π come $3\pi/2$, i valori del seno, del coseno e della tangente si ottengono subito dai precedenti, tenuto conto delle relazioni stabilite nel § precedente.

Questi particolari angoli si incontrano spesso negli esercizi matematici, ma nelle applicazioni pratiche compaiono angoli qualunque. Sono stati fatti calcoli accurati dei valori di seno, coseno e tangente per una gran quantità di angoli. Esistono libri in cui sono riportati questi valori approssimati - con molte cifre decimali - cioè tabelle che hanno il seguente aspetto:

angolo	*coseno*	*seno*	*tangente*
...	...	...	...
$32°\,20'$	$0,844951$	$0,534844$	$0,632988$
$32°\,30'$	$0,843391$	$0,537300$	$0,637070$
$32°\,40'$	$0,841825$	$0,539751$	$0,641167$
...	...	...	

Queste tabelle si possono consultare in entrambi i versi: per es. volendo conoscere il valore della tangente di un angolo di $32°\,20'$, basta fissare l'attenzione sulla riga che corrisponde al valore dell'angolo e leggere il numero che si trova nell'ultima colonna di tale riga: nel nostro caso si ottiene $\tan 32°\,20' \simeq 0,632988$. Viceversa, volendo conoscere per es. l'ampiezza di un angolo α per il quale si sa che $\tan\alpha \simeq 0,6352$, basta fissare l'attenzione sulla riga che contiene nell'ultima colonna il numero dato; se non si trova esattamente il numero voluto, si considerano le due righe che contengono nell'ultima colonna le migliori approssimazioni di tale numero (nel nostro caso $0,632988$, approssimazione per difetto e $0,637070$, approssimazione per eccesso); poiché le due righe corrispondono rispettivamente ad un angolo di $32°20'$ e ad un angolo di $32°30'$, si conclude che l'ampiezza dell'angolo cercato α è compresa tra questi due valori. Potremo scrivere, con buona approssimazione, $\alpha \simeq 32°25'$.

Negli ultimi anni l'uso delle tabelle è stato sostituito dalle moderne calcolatrici tascabili, capaci di calcolare con grande precisione e rapidità i valori del seno, del coseno e della tangente di un angolo qualsiasi (espresso in gradi o in radianti).

Per riassumere l'insieme dei dati così calcolati e per avere un'idea dell'andamento, per es. del seno, è comodo tracciarne il *grafico*, il che significa costruire un disegno nel modo seguente. Dopo avere introdotto un sistema di coordinate cartesiane, si riportano come ascisse alcuni valori di α (espressi per es. in radianti); in corrispondenza, si riportano sulle ordinate i valori di $\sin\alpha$. Ogni dato (fornito dalla tabella o dalla calcolatrice) produce un punto del grafico: dopo aver riportato tutti i punti disponibili, essi si possono unire con un tracciato curvilineo, come in fig. 13. Nel grafico si riconoscono molto bene le zone in cui il seno è crescente (cioè dove il grafico è in salita se ci si muove verso destra) da quelle in cui è decrescente. Come sappiamo, il grafico è periodico, cioè si riproduce tale e quale dopo ogni spostamento, sulle ascisse, di lunghezza 2π.

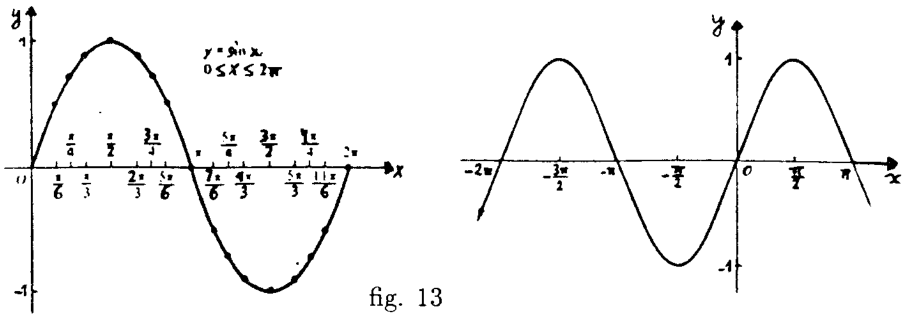


fig. 13

Analogamente, si può tracciare il grafico del coseno (fig. 14), che differisce dal precedente unicamente per una traslazione "verso sinistra" di ampiezza $-\pi/2$.

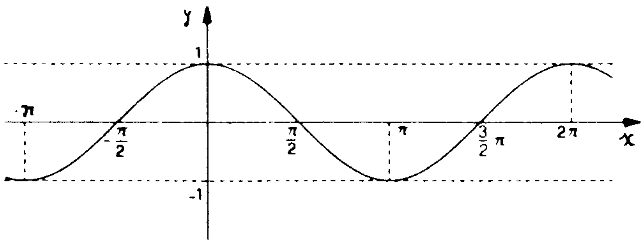


fig. 14

Quanto alla tangente, occorre osservare che, se α si avvicina al valore $\pi/2$

restandone al di sotto (per es. $\alpha = 0,45\pi$, $\alpha = 0,49\pi$, $\alpha = 0,499\pi$, ecc.), i corrispondenti valori della tangente diventano sempre più grandi, restando positivi. Se invece α si avvicina a $\pi/2$ da valori maggiori di $\pi/2$ (per es. $\alpha = 0,55\pi$, $\alpha = 0,51\pi$, $\alpha = 0,501\pi$, ecc.), si ottengono per la tangente valori "sempre più negativi" (vedi fig. 15). Si usa dire che $\tan\alpha$ tende all'infinito (simbolo: ∞) quando α si avvicina a $\pi/2$.

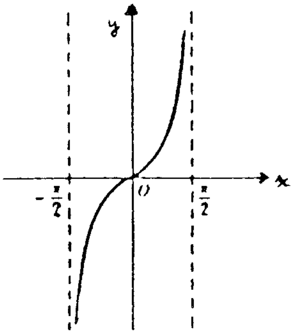
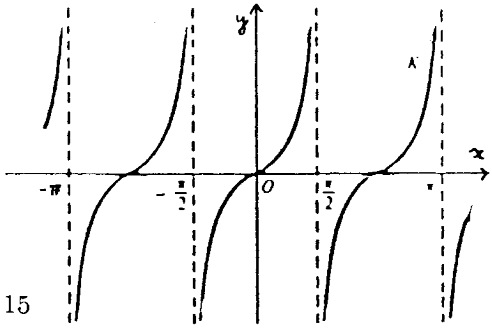


fig. 15



Il grafico di $\tan\alpha$ non si può completare in corrispondenza ai valori $\frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k = 0, \pm 1 \pm 2, \ldots$), ma la figura illustra bene quello che succede: ogni volta che, andando da sinistra verso destra sull'asse delle ascisse, α passa attraverso uno di questi valori, il grafico salta da valori "molto negativi" a valori "molto positivi".

ESERCIZI

1. Calcolate il valore delle seguenti espressioni:

$2\cos\frac{\pi}{2} + 4\sin\frac{\pi}{6} - \sqrt{3}\tan\frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}\cos 0 = -\frac{1}{2}$

$\sqrt{3}\tan\frac{\pi}{6} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{\pi}{4} + \frac{\sqrt{3}}{\cos(\pi/6)} + 2\cos\frac{\pi}{3} =$

$\frac{\sin(\pi/2)}{\cos(\pi/3)} + \tan\frac{\pi}{4}\cdot\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{6} =$

$\sqrt{3}(1 - \cos\frac{\pi}{6}) - \sqrt{3}(1 - \frac{1}{\tan(\pi/3)}) + 4\cos\frac{\pi}{3} =$

$2\sin\frac{\pi}{4} - \sqrt{3}\tan\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{2}}{\cos(\pi/4)} - \sqrt{3}(\cos\frac{\pi}{6} - \tan\frac{\pi}{3}) =$

2. Scrivete i valori di α (in radianti) che soddisfano alle seguenti condizioni:

$\sin\alpha = 0$ $\qquad \alpha = \ldots - 3\pi,\ -2\pi,\ -\pi,\ 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \ldots$ $\qquad$ che si può scrivere in forma più sintetica: $\alpha = 2k\pi$ $\quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

$\cos\alpha = -1/2 \qquad \alpha =$

$\sin\alpha = \sqrt{3}/2 \qquad \alpha =$

$\cos\alpha \neq -1 \qquad \alpha \neq$

$\tan\alpha = 1 \qquad \alpha =$

$\tan\alpha = -\sqrt{3} \qquad \alpha =$

3. Scrivete i valori di α, in radianti, che soddisfano alle seguenti condizioni:
$\cos\alpha > 0$
$\sin\alpha > \sqrt{2}/2$
$1/2 < \sin\alpha < \sqrt{2}/2$
$\sin\alpha\cos\alpha < 0$.

§ 6. ALTRE RELAZIONI UTILI

I valori di seno, coseno e tangente di uno stesso angolo non sono indipendenti: conosciuto uno dei tre, gli altri due restano determinati a meno del segno. Nel § precedente lo abbiamo già visto in parte, quando abbiamo scritto le formule $\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$, $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$ che consentono di calcolare il seno dal coseno e viceversa. Vogliamo ora calcolare il seno e il coseno a partire dalla tangente e viceversa. Se $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, cioè se $\cos\alpha \neq 0$ la relazione fondamentale $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, divisa per $\cos^2\alpha$, dà:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \tan^2\alpha + 1$$

da cui segue

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}$$

e da questa:

$$\sin\alpha = \pm\tan\alpha\sqrt{1+\tan^2\alpha}.$$

Se invece nella definizione di tangente sostituiamo le espressioni trovate nel § 4, otteniamo:

$$\tan\alpha = \pm\frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \pm\frac{\sqrt{1-\cos^2\alpha}}{\cos\alpha}.$$

Come sappiamo, il segno di queste espressioni si precisa solo quando si sa in quale quadrante ci si trova.

Esempio 1. Determinare $\cos\alpha$ e $\tan\alpha$ sapendo che $\sin\alpha = 5/7$.
Risulta:
$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-(5/7)^2} = \sqrt{24/49} = \pm 2\sqrt{6}/7$
$\tan\alpha = \sin\alpha/\cos\alpha = \pm 5/2\sqrt{6} = \pm 5\sqrt{6}/12$.

Esempio 2. Determinare $\sin\alpha$ e $\tan\alpha$ sapendo che $\cos\alpha = 5/13$ e che $0 < \alpha < \pi/2$.

La limitazione imposta ad α assicura che $\sin\alpha$ e $\tan\alpha$ sono positivi. Risulta pertanto:
$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \sqrt{144/169} = 12/13$

$\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha = 12/5$.

Esempio 3. Determinare $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ sapendo che $\tan\alpha \simeq -5,3$ e che $3\pi/2 < \alpha < 2\pi$ (e quindi il seno è negativo e il coseno è positivo).

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}} \simeq \frac{1}{\sqrt{1+(5,3)^2}} \simeq 0,18.$$

$$\sin\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha \simeq -5,3 \cdot 0,18 \simeq -0,95.$$

Capita abbastanza spesso di dover calcolare $\sin(\alpha+\beta)$ oppure $\sin(\alpha-\beta)$, conoscendo già i valori di $\sin\alpha$ e di $\sin\beta$. Sarebbe sbagliato pensare che $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha \pm \sin\beta$. Sussistono invece le seguenti formule, dette **formule di addizione e formule di sottrazione**:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta\ .$$

Analoghe formule di addizione e di sottrazione sussistono per il coseno:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

e per la tangente:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}\ .$$

Se in particolare, nelle formule di addizione si pone $\beta = \alpha$, si ottengono le cosiddette **formule di duplicazione**:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha\ ; \qquad \cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha\ ; \qquad \tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}.$$

ESERCIZI

1. A partire dal valore assegnato (per es. il seno di un angolo) calcolate gli altri due (per es. il coseno e la tangente):

$\sin\alpha = 3/5$	$\cos\alpha = \pm 4/5$	$\tan\alpha = \pm 3/4$
$\sin\alpha =$	$\cos\alpha = 5/13$	$\tan\alpha =$
$\sin\alpha =$	$\cos\alpha =$	$\tan\alpha = 8/15$

2. Trasformate la seguente espressione in un'altra in cui compare solo $\sin\alpha$:

$\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \cdot (\cos^2\alpha - \tan^2\alpha) + (1+\tan^2\alpha)/\sin^2\alpha =$

3. Trasformate la seguente espressione in un'altra in cui compare solo $\cos\alpha$:

$\frac{1}{\tan\alpha\cos\alpha} + \frac{\tan\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} + \frac{\tan\alpha - 1}{\tan\alpha} \cdot (\cos\alpha - \frac{\sin\alpha}{\tan\alpha}) =$

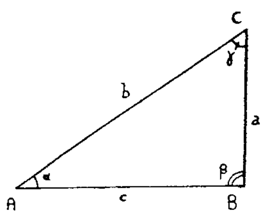
4. Trasformate la seguente espressione in un'altra in cui compare solo $\tan\alpha$:

$\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\tan\alpha} + \frac{1}{\tan\alpha} - \frac{1/\cos\alpha}{1/\sin\alpha} + \frac{2\sin\alpha\cos^2\alpha}{\tan\alpha} =$

§ 7. RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO RETTANGOLO

Il nome *trigonometria* richiama il problema della *misura* nei triangoli. In effetti, il ruolo più comune - in tutte le scienze esatte - delle nozioni introdotte nei paragrafi precedenti è quello di mettere in relazione le misure degli angoli e le misure dei lati di un triangolo. Le formule sono particolarmente semplici se il triangolo è rettangolo.

Sia ABC un triangolo rettangolo, con l'angolo retto in B. Ricordiamo che allora i lati AB , BC si chiamano *cateti* e il lato AC *ipotenusa*. Siano α, β, γ rispettivamente le misure dei tre angoli in A, B, C e siano a, b, c le misure dei tre lati opposti ($a = \overline{BC}$, $b = \overline{AC}$, $c = \overline{AB}$, cfr. fig. 16).



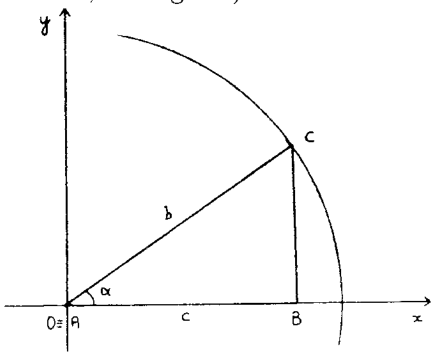


fig. 16

Introduciamo un sistema cartesiano ortogonale con l'origine O coincidente con il vertice A e il semiasse x positivo che passi per il vertice B. Allora $C = (c, a)$, $B = (c, 0)$ e perciò risulta

$$\sin\alpha = a/b; \qquad \cos\alpha = c/b; \qquad \tan\alpha = a/c$$

che possiamo riscrivere

$$a = b\ \sin\alpha; \qquad c = b\ \cos\alpha; \qquad a = c\ \tan\alpha$$

e interpretare come segue:

In un triangolo rettangolo:

la lunghezza di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa moltiplicata per il seno dell'angolo opposto al cateto;

la lunghezza di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa moltiplicata per il coseno dell'angolo adiacente al cateto;

la lunghezza di un cateto è uguale a quella dell'altro cateto moltiplicata per la tangente dell'angolo opposto al primo cateto.

Applicando le formule precedenti, se si conosce la misura di un angolo (acuto) e quella di un lato del triangolo rettangolo, si possono ricavare tutte le altre misure (purché si disponga delle apposite tabelle o di una calcolatrice atta a fornire i valori di seno, coseno e tangente dell'angolo dato). Questo procedimento viene chiamato "risoluzione" del triangolo rettangolo ABC.

Esempio 1. Nel triangolo rettangolo ABC, retto in B, l'ipotenusa è lunga $b = 5,8$ cm e un angolo misura (in radianti) $\alpha = \pi/6$. Trovare le lunghezze dei cateti.

Applicando le formule si trova:
$a = b \sin \alpha = 5,8 \cdot 1/2 = 2,9$ cm
$c = b \cos \alpha = 5,8 \cdot \sqrt{3}/2 \simeq 5,0$ cm .

Esempio 2. In un triangolo rettangolo i due cateti misurano $a = 14$ cm , $b = 17$ cm. Se α indica l'angolo minore, quanto valgono $\cos \alpha$, $\sin \alpha$, $\tan \alpha$?

Risulta: $\tan \alpha = 14/17$ (l'altro rapporto è maggiore: $17/14 > 14/17$ e dunque $17/14$ è la tangente dell'altro angolo acuto: $\pi/2 - \alpha$).

Usando le formule del § prec. si calcola:
$\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = 1/\sqrt{1 + (14/17)^2} \simeq 0,77.$

Se ne deduce poi:
$\sin \alpha = \tan \alpha \cdot \cos \alpha \simeq 0,77 \cdot 14/17 \simeq 0,63.$

Si osservi che la scelta del segno + è obbligata, perché un triangolo rettangolo non può avere angoli ottusi.

Guardando l'andamento del grafico o consultando le tabelle concludiamo che - con grossolana approssimazione - il minore dei due angoli acuti misura circa 40° e di conseguenza l'altro angolo acuto misura circa 50°.

Esempio 3. (fig. 17) Nell'impossibilità di misurare direttamente l'altezza $a = \overline{BC}$ della cima C del minareto, possiamo più facilmente procurarci altre due misure, e precisamente:

- la distanza c tra il nostro punto di osservazione A e la base B della torre
- l'angolo $\alpha = C\hat{A}B$, cioè l'inclinazione, rispetto al terreno, di una retta che punti alla cima (in pratica, si userà un "mirino").

La misura cercata è data allora da $a = c \ \tan \alpha$.

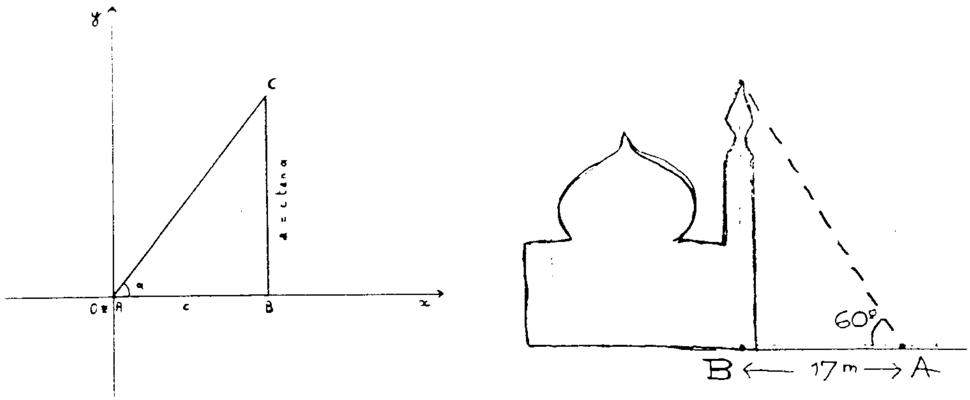


fig. 17

Per es., se avviciniamo il nostro punto di osservazione A fintantoché α vale 60° (ossia $\frac{\pi}{3}$) e se misuriamo la distanza di A da B trovando $\overline{AB} = 17$ m, possiamo concludere che l'altezza del minareto è di $a = 17\sqrt{3} \simeq 29$ m.

Esempio 4. (fig. 18). Una nave parte dal porto A, che si trova sull'Equatore e naviga in direzione SE (Sud-Est) con velocità costante di 11 nodi. Dopo 19 ore di navigazione è in una posizione C. Su quale parallelo si trova?

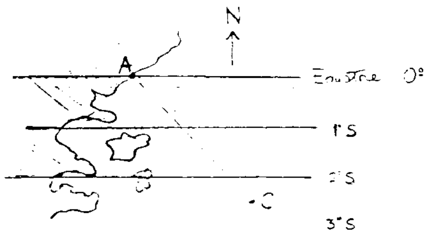


fig. 18

Un nodo significa un miglio marino all'ora, dunque la nave percorre 11 miglia in un'ora. In 19 ore, la nave avrà percorso una distanza $\overline{AC} = 19 \cdot 11 = 209$ miglia. Poiché la direzione SE (Sud-Est) forma con la direzione S (Sud) un angolo di $\pi/4$, lo spostamento della nave verso Sud sarà dato dalla lunghezza del cateto AB del triangolo rettangolo ABC disegnato in fig. 18, del quale si conosce l'ipotenusa ($AC = 209$ miglia) e l'angolo $\alpha = \pi/4$. Pertanto: $\overline{AB} = \overline{AC} \cos\alpha = 209 \cdot \sqrt{2}/2 \simeq 148$ miglia. D'altra parte sappiamo (vedi esempio 2 del §1) che lo spostamento di 1 miglio lungo un meridiano corrisponde allo spostamento di $1'$ di latitudine (nel verso Nord-Sud). Quindi al termine delle 19 ore di navigazione la nave avrà raggiunto il parallelo posto a $148' = 2°\,28'$ S.

N.B. Il ragionamento precedente non è del tutto corretto, perché abbiamo fatto riferimento alla carta geografica (che è un piano) e non alla superficie terrestre (che invece è sferica). D'altra parte, quando - come in questo esempio - si prende in considerazione solo una piccola porzione di superficie, le distorsioni dovute alla sfericità della terra sono trascurabili.

ESERCIZI

1. Sia ABC un triangolo rettangolo in A. Indichiamo con a la lunghezza (in cm) dell'ipotenusa, con b, c quelle dei cateti, e con β, γ le ampiezze (in gradi) dei due angoli acuti.

Risolvete i triangoli rettangoli per i quali sono noti i seguenti elementi:

$a = 58$	$b = 29\sqrt{2}$	$c =$	$\beta =$	$\gamma =$
$a = 48$	$b =$	$c = 24\sqrt{3}$	$\beta =$	$\gamma =$
$a = 50$	$b = 25\sqrt{2}$	$c =$	$\beta =$	$\gamma =$
$a = 6(\sqrt{5}+1)$	$b =$	$c =$	$\beta =$	$\gamma = 18°$

2. Con i simboli dell'esercizio precedente, calcolate:

$a = 50$	$b = 20$	$c =$	$\cos\beta =$	$\cos\gamma =$
$a = 48$	$b =$	$c = 24$	$\sin\beta =$	$\tan\beta =$
$a =$	$b = 25$	$c = 15$	$\tan\beta =$	$\cos\gamma =$
$a =$	$b = 12$	$c =$	$\beta =$	$\gamma = 18°$

3. Una torre è vista sotto un angolo di $16°30'$ da un punto distante 150 m (dalla base della torre). Servendovi delle tavole o di una calcolatrice tascabile determinate l'altezza della torre.

§ 8. RISOLUZIONE DI UN TRIANGOLO QUALUNQUE

Per un triangolo qualunque (cioé non necessariamente rettangolo) non vale il teorema di Pitagora. Con l'aiuto della trigonometria, possiamo procurarci un teorema che lo sostituisce, legando le lunghezze dei tre lati al coseno di uno degli angoli.

Teorema del coseno (o di Carnot). *Siano $a = \overline{BC}$, $b = \overline{CA}$ le lunghezze di due lati di un triangolo ABC, e sia $\gamma = A\hat{C}B$ l'angolo da essi formato. Allora la lunghezza c del terzo lato AB (opposto a γ) verifica la relazione:*

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Per dimostrarlo, riferiamoci alla fig. 19 in cui il triangolo AHC è retto in H. Allora risulta

$$\overline{AH} = b\sin\gamma, \qquad \overline{BH} = \overline{BC} - \overline{HC} = a - b\cos\gamma.$$

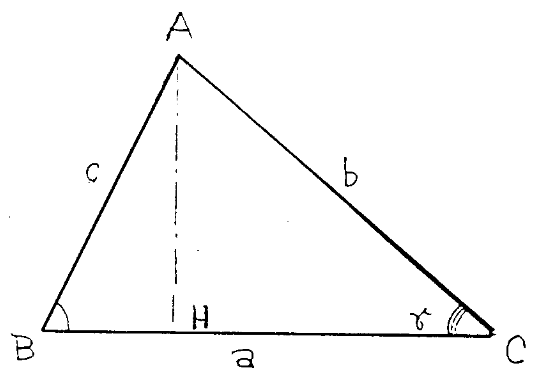


fig. 19

Per il teorema di Pitagora si ha
$c^2 = \overline{AB}^2 = \overline{BH}^2 + \overline{AH}^2 = (a - b\cos\gamma)^2 + (b\,\sin\gamma)^2 =$
$= a^2 + b^2\,\cos^2\gamma - 2ab\,\cos\gamma + b^2\,\sin^2\gamma =$
$= b^2(\cos^2\gamma + \sin^2\gamma) + a^2 - 2ab\,\cos\gamma = a^2 + b^2 - 2ab\,\cos\gamma$
dove si è usata la relazione fondamentale $\cos^2\gamma + \sin^2\gamma = 1$.

N.B. L'enunciato del teorema del coseno diventa quello di Pitagora $c^2 = a^2 + b^2$ nel caso che il triangolo sia rettangolo, perché allora risulta $\cos\gamma = 0$.

Esempio 1. Nel triangolo ABC due lati misurano: $\overline{BC} = a = 50$ cm, $\overline{AC} = b = 21$ cm e l'angolo compreso è $\gamma = \pi/3$. Si calcoli la lunghezza del terzo lato $c = \overline{AB}$.
Si trova $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\,\cos\gamma = 50^2 + 21^2 - 2\cdot 50\cdot 21\cdot\sqrt{3}/2 \simeq$
$2500 + 441 - 1818 = 1122$ da cui $c \simeq 33,5$ cm.

Esempio 2. Il teorema del coseno si può usare, inversamente, per calcolare il coseno di ognuno dei tre angoli, a partire dalla conoscenza delle lunghezze dei tre lati. Si consideri un triangolo con lati lunghi rispettivamente $a = 5$ cm ; $b = 10$ cm; $c = 7$ cm. Calcolare i coseni e risalire quindi alle ampiezze dei tre angoli.

Dal teorema del coseno si ricava: $\cos\gamma = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab = (5^2 + 10^2 - 7^2)/2\cdot 5\cdot 10 = 0,76$. Analogamente $\cos\alpha = (10^2 + 7^2 - 5^2)/2\cdot 10\cdot 7 \simeq 0,88$ e $\cos\beta = (7^2 + 5^2 - 10^2)/2\cdot 7\cdot 5 \simeq -0,37$. Quest'ultimo valore, essendo negativo, indica che l'angolo α è ottuso. Considerando le disuguaglianze $-0,5 = \cos\frac{2\pi}{3} < -0,37 < 0 = \cos\frac{\pi}{2}$ si può dedurre che l'ampiezza dell'angolo α è compresa fra $\pi/2$ e $2\pi/3$. Per avere una misura più precisa, si deve ricorrere alle tabelle o ad una calcolatrice.

Area di un triangolo. *L'area di un triangolo si ottiene facendo il prodotto delle misure di due lati per il seno dell'angolo compreso (cioè che ha quei due lati) e dividendo il risultato per 2.*

Infatti, con riferimento alla precedente fig. 19, indichiamo con $h = \overline{AB} = b\sin\gamma$ l'altezza del triangolo ABC relativa alla base BC. Allora l'area del triangolo vale $S = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

Esempio 3. L'area del triangolo dell'esempio 1 risulta:

$$S = \frac{1}{2} bc \sin \gamma = \frac{1}{2} \cdot 50 \cdot 21 \cdot \frac{1}{2} \simeq 262,5 \ cm^2.$$

Area di un parallelogramma. *L'area di un parallelogramma è il prodotto delle misure di due lati consecutivi per il seno dell'angolo compreso.*

Basta infatti osservare che l'area è data dalla formula $A = a \cdot h$ (vedi fig. 20) e osservare che $h = b \sin \alpha$.

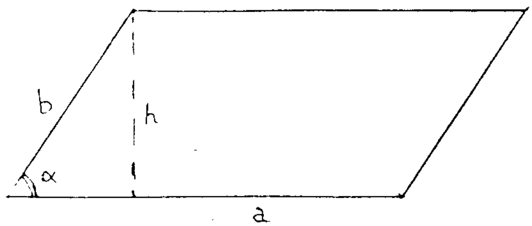


fig. 20

Esempio 4. Per ricoprire un pavimento che misura 35 m^2 si usano piastrelle nere quadrate e piastrelle bianche a forma di rombo, disposte come in fig. 21. I lati a di entrambi i tipi di piastrelle misurano 20 cm.

Quanti m^2 di piastrelle nere e quanti di piastrelle bianche occorrono?

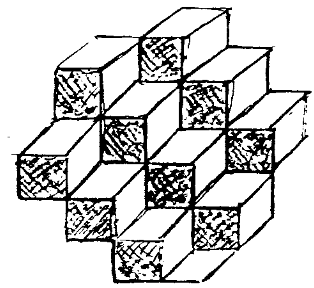


fig. 21

Osservando con attenzione il disegno si vede che:

- il lato di una piastrella nera deve essere uguale al lato di una piastrella bianca
- l'angolo minore tra due bordi della piastrella bianca deve essere $\pi/4$
- il numero delle piastrelle bianche deve essere doppio del numero delle piastrelle nere.

L'area di una piastrella nera (quadrata) è $(20)^2 = 400 \ cm^2$. L'area A di una piastrella bianca (a forma di rombo) si calcola con la formula $A = a \cdot h = a^2 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 400 \cdot \sqrt{2}/2 \simeq 283\ cm^2$. La superficie da ricoprire misura $35\ m^2 = 350\,000\ cm^2$. Indicando con x il numero delle piastrelle nere necessarie, deve essere:

$$350\,000 = 400\,x + 283 \cdot (2x) = 966\,x$$

da cui $x \simeq 362$ e $2x \simeq 724$. Occorrono quindi $362 \cdot 400 = 144\,800\ cm^2 \simeq 15\ m^2$ di piastrelle nere e $724 \cdot 283 = 204\,892 cm^2 \simeq 20\ m^2$ di piastrelle bianche. Tenuto conto degli sprechi, converrà procurarsi almeno 16 m^2 delle nere e 22 m^2 delle bianche.

Teorema dei seni. *In un qualunque triangolo il rapporto tra la lunghezza di un lato e il seno dell'angolo ad esso opposto è costante (cioè i tre rapporti, relativi ai tre lati, sono uguali).*

Infatti, abbiamo visto che l'area del triangolo vale $S = \frac{1}{2}\,ab\sin\gamma$. Questo stesso valore si deve ottenere se l'area si calcola in altri due modi, ossia usando altre due coppie di lati e gli angoli corrispondenti. Utilizzando i lati b, c e l'angolo compreso α, si ottiene $S = \frac{1}{2}\,bc\sin\alpha$. Utilizzando i lati a, c e l'angolo compreso β, si ottiene $S = \frac{1}{2}\,ac\sin\beta$. Deve essere dunque:

$$S = \frac{1}{2}ab\ \sin\gamma = \frac{1}{2}bc\ \sin\alpha = \frac{1}{2}ac\ \sin\beta.$$

Dividendo tutti i termini di queste uguaglianze per $\frac{1}{2}\,abc$ si ottengono le relazioni volute:

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}.$$

Esempio 5. Il teorema dei seni viene adoperato in *topografia*, cioè per produrre le carte geografiche. Per rappresentare una zona limitata della superficie terrestre, i cartografi fanno riferimento a certi punti ben visibili da lontano, come le cime delle montagne. Per riprodurre esattamente sulla carta le loro posizioni, occorre conoscere le distanze tra le varie cime, ma una misura diretta spesso non è possibile. I cartografi possiedono uno strumento speciale, il *teodolite*, che è una specie di canocchiale e che si adopera nel modo seguente. Si conosce già, per averla misurata precedentemente, la distanza b tra un punto C e un punto A (vedi fig. 22); si vuole misurare la distanza c da A ad un altro punto B. Si fissa lo strumento al terreno in C; lo si punta prima verso A, poi verso B e sullo strumento si legge l'angolo $\gamma = A\hat{C}B$. Ci si sposta poi con il teodolite nella posizione A; si punta verso B, poi verso C e si legge l'angolo $\alpha = B\hat{A}C$. Quanto al terzo angolo, β , esso è il supplementare di $\alpha + \gamma$, per cui risulta $\sin\beta = \sin(\alpha + \gamma)$. Poiché dal teorema dei seni si sa che $c/\sin\gamma = b/\sin\beta$, sostituendo si ottiene

$$c = b\,\frac{\sin\gamma}{\sin(\alpha+\gamma)}.$$

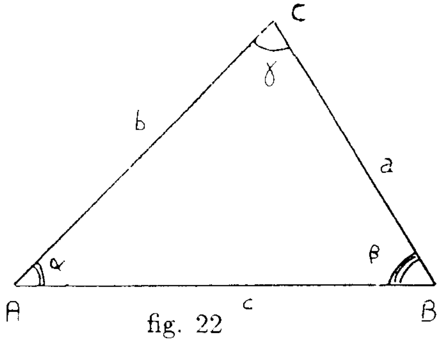


fig. 22

Poiché b, α, γ sono quantità note, la distanza incognita si calcola facilmente (al solito, purché si disponga delle apposite tabelle o di una calcolatrice atta a fornire i valori dei i seni degli angoli).

In conclusione, i teoremi enunciati in questo paragrafo consentono di "risolvere" un triangolo qualunque, vale a dire consentono di ricavare le misure di tutti i lati e di tutti gli angoli di un triangolo, non appena siano note le misure di due lati e dell'angolo compreso, oppure le misure di due angoli e del lato che essi hanno in comune, o infine le misure dei tre lati del triangolo.

ESERCIZI

1. Nel triangolo ABC indichiamo con a, b, c le lunghezze (in cm) dei suoi lati e con α, β, γ le ampiezze (in gradi) dei rispettivi angoli opposti.
Risolvete i seguenti triangoli:

a	b	c	α	β	γ
$8\sqrt{6}$	$4(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$	$29\sqrt{2}$	...	...	...
$1+\sqrt{3}$	...	...	$75°$	$45°$	...
$3-\sqrt{3}$	...	$2\sqrt{3}$	...	$120°$	...
$4\sqrt{3}$	$6\sqrt{2}$	$2(3+\sqrt{3})$	...	...	...

2. Completate la seguente tabella (nella quale le lettere a, b, c, α, β, γ hanno lo stesso significato dell'esercizio precedente):

$a = 18$	$b = 16$	$c = 12$	$\cos\alpha \simeq$	$\cos\beta \simeq$	$\cos\gamma \simeq$
$a = 10$	$b = 25$	$c = 12$	$\sin\alpha \simeq$	$\sin\beta \simeq$	$\sin\gamma \simeq$
$a = 30$	$b = 40$	$c = 50$	$\cos\alpha \simeq$	$\sin\beta \simeq$	$\cos\gamma \simeq$
$a = 25$	$b = 25$	$c = 25$	$\sin\alpha \simeq$	$\sin\beta \simeq$	$\sin\gamma \simeq$

3. In un triangolo due lati misurano $a = 12$ cm , $b = 15$ cm ; inoltre per l'angolo α compreso si sa che: $\tan\alpha = 2,1$. Calcolate l'area del triangolo.

4. In un parallelogramma due lati misurano $a = 22$ cm , $b = 16$ cm ; inoltre per l'angolo α compreso si sa che $\cos\alpha = 0,23$. Calcolate l'area del parallelogramma.

5. Con riferimento alla situazione decritta nell'esempio 5, calcolate la distanza c, sapendo che $b = 450$ m e che $\alpha = \gamma = \pi/6$.

Grafica Ragno, Ozzano (Bo) - Luglio 1993