Universitá degli Studi Roma Tre
Dipartimento di Ingegneria Meccanica ed Industriale

Risposta e Stabilitá Aeroelastica di Velivoli Tiltrotor

Tesi di Dottorato in Ingegneria Meccanica

Docente Guida

Massimo Gennaretti

Dottorando

Marco Molica Colella

Scuola Dottorale del XXII° ciclo

..'fare..o non fare: non c'è provare!
Maestro Yoda, *Star Wars, 'Episode V: Empire Strikes Back'*

A me stesso, a coloro che mi amano..a Saori

Indice

1 Introduzione **2**
1.1 Generalità sui Convertiplani 2
1.2 Cenni Storici 6
1.3 Inserimento dei Tiltrotor nel contesto aeronautico: possibili sviluppi 10
1.4 Configurazioni Tiltrotor di Prossima Generazione: *ERICA* 11
1.5 Obiettivi del lavoro 13

2 Modelli Aeroelastici **18**
2.1 Descrizione generale 20
2.1.1 Ala 20
2.1.2 Gondola 23
2.1.3 Rotore 24
2.2 Modellazione strutturale di ala e pala 28
2.2.1 Sistemi di riferimento e definizoni 28
2.2.2 Equazioni dell'equilibrio per una trave elastica: metodo Newtoniano 41
2.2.3 Relazioni costitutive 43
2.2.4 Ordering-scheme 48
2.2.5 Carichi Inerziali 51
2.3 Modelli Aerodinamici 53
2.3.1 Modellazione della scia 56
2.3.2 Aerodinamica quasi-stazionaria 2D: modello di Greenberg 59

2.3.3 Aerodinamica interazionale 3D: modello BEM . 63
2.4 Descrizione cinematica 68
2.4.1 Velocità ed aerodinamica 69
2.4.2 Accelerazione ed Inerzia 76
2.5 Trasmissione dei carichi dal rotore all'ala 78
2.5.1 I carichi all'Hub 80
2.5.2 I carichi all'estremità alare 86
2.6 Equazioni dell'Equilibrio Aeroelastico per i modelli di ala e pala 91
2.6.1 Equazioni della pala 96
2.6.2 Equazioni dell'ala: Modello Base 97
2.6.3 Equazioni dell'ala: Modello avanzato 99
2.6.4 Modalità di inclusione nella modellazione della catena di comando: accoppiamenti cinematici . 107
2.7 Modellazione dell'Hub *Flappante* e del gimbal 110
2.7.1 Le Equazioni del moto dell'Hub 112

3 Metodi per lo studio di Stabilità e Risposta 114
3.1 Discretizzazione delle equazioni 114
3.1.1 Determinazione numerica delle matrici 116
3.2 Risposta all'equilibrio 118
3.2.1 Natura periodica del sistema Tiltrotor 118
3.2.2 L'Harmonic-Balance 121
3.2.3 Applicazione degli Jacobiani al problema della risposta 124
3.2.4 Procedura di calcolo dei carichi al mozzo ed alla radice alare: integrazione dei modelli aerostrutturali 125
3.3 Stabilitá dell' equilibrio 127
3.3.1 Linearizzazione del sistema mediante gli Jacobiani 128
3.4 Struttura delle matrici per Risposta e Stabilità 130

4 Controllo delle Vibrazioni 132
4.1 Elementi di controllo 133
4.2 Il Controllo Ottimo 135
4.3 Calcolo della matrice di trasferimento 137

5 Risultati numerici 139
5.1 Configurazione *ERICA*, prima validazione: analisi aeroelastica del rotore e dell'ala 140

5.1.1 Frequenze proprie del rotore in vacuo 140
5.1.2 Analisi aeroelastica del rotore 140
5.1.3 Analisi della dinamica strutturale dell'ala . . . 152
5.1.4 Whirl-Flutter 154
5.1.5 Calcolo dei carichi vibratori alla radice dell'ala 159
5.2 Configurazione ERICA, seconda validazione 170
5.2.1 Dinamica strutturale del rotore e dell'ala 171
5.2.2 Calcolo dei carichi vibratori 175
5.3 XV-15: analisi aeroelastica vibrazionale 183
5.3.1 Carichi in airplane-mode 185
5.3.2 Carichi in Helicopter-mode 186
5.4 XV-15: controllo delle vibrazioni 191
5.4.1 Controllo armonico in AM 192
5.4.2 Controllo armonico in HM 192
5.4.3 Possibili alternative: controllare i carichi all'hub o alla radice 194

Conclusioni **196**

Appendice **201**
Appendice A: Coefficienti strutturali per la pala 202
Appendice B: Coefficienti strutturali per l'ala 202
Appendice C: Equazioni Discretizzate 204
Appendice D: Complementi sulla modellazione dell'ala. . . 207
Appendice E: Trasformazione in variabili multipala. 209

Bibliografia **213**

Elenco delle figure

1.1 *Modalità operative di un Tiltrotor V-22* 3
1.2 *Tecniche di controllo sul Boeing-Bell V-22* 4
1.3 *Tiltwing HillerX-18* 4
1.4 *Efficienza in Hover - Carico Disco Rotorico* 5
1.5 *Trascendental 1-G* 6
1.6 *Bell Helicopters XV-3* 7
1.7 *Bell Helicopters XV-15* 8
1.8 *Bell-Boeing V-22 'Osprey'* 8
1.9 *Bell-Agusta BA609* 9
1.10 *UAV Bell-Textron 'Eagle-eye'* 9
1.11 *Inviluppo di volo del Boeing V-22* 10
1.12 *Plastico di Vertiporto per Tiltrotor* 10
1.13 *Grafica di ERICA di Agusta-Westland in helicopter mode e in airplane mode* 12

2.1 *Configurazione esemplificativa di un' Ala completa basata su ERICA di Agusta-Westland* 20
2.2 *Esempio di Nacelle, basata su ERICA di Agusta-Westland* 23
2.3 *Esempio di moderna architettura Rotorica basata su ERICA di Agusta-Westland* 24
2.4 *Variabili di gimbal nei sistemi di riferimento rotante e non* 27
2.5 *Riferimento Inerziale* 29
2.6 *Riferimento ala-indeformata* 30
2.7 *Deformazione dell'ala* 30
2.8 *Angoli di Eulero per l'ala* 32
2.9 *Riferimento pilone* 32

2.10 *Riferimento hub non rotante: vista in cruise-flight* . . . 33
2.11 *Riferimenti rotanti pala* 34
2.12 *Modi Rigidi in un rotore completamente articolato* . . . 35
2.13 *Riferimento pala indeformata di sezione: vista da tip della pala assumendo nulli gli spostamenti rigidi ed elastici* 37
2.14 *Riferimento pala indeformata di sezione* 37
2.15 *Riferimento pala deformata di sezione: vista dal tip della pala* 39
2.16 *Angoli di Eulero per la pala* 40
2.17 *Equilibrio di forze su un tratto infinitesimo di trave* . . 41
2.18 *Equilibrio dei momenti su un tratto infinitesimo di trave* 42
2.19 *Panoramica del campo aerodinamico su un elicottero* [Leishman, 2000] 53
2.20 *Analisi free-wake da codice 3D su rotore quadripala in discesa: vista da dietro e dettaglio di impatto pala-scia* 54
2.21 *Illustrazione schematica della scia di una pala e dell'interazione con la scia della pala precedente* [Leishman, 2000] 56
2.22 *Velocità di sezione nel modello di Greenberg applicato da Hodge e Ormiston* 61
2.23 *Forze Aerodinamiche nel modello di Greenberg applicato da Hodge e Ormiston* 62
2.24 *Scia del gruppo ala-rotore in analisi free-wake* 63
2.25 *Regioni di scia vicina e di scia lontana,[16]* 66
2.26 *Schematizzazione di alcuni punti notevoli nella descrizione cinematica* 68
2.27 *Schema a blocchi per l'interazione ala-rotore* 78
2.28 *Rappresentazione dei carichi alla radice della i-esima pala e al mozzo* 81
2.29 *Vista dei riferimenti di pala in un sistema quadripala* . 84
2.30 *Descrizione schematica dell' equilibrio rotore-gondola-ala* 87
2.31 *Assi Baricentro* 88
2.32 *Schema dell'ala del Tiltrotor ERICA di Agusta-Westland* 99
2.33 *Schema a travi del modello avanzato* 102
2.34 *Esempio di Swashplate in rotore da modellismo* 107
2.35 *Effetto di Pitch-Flap Coupling, [8]* 109
2.36 *Schema della modellazione dell'hub* 111

3.1 *Diagramma di flusso per il procedimento di calcolo dei carichi al mozzo ed alla radice mediante i modelli aerodinamici e strutturali presentati* 125

4.1 *Swashplate*, [3] 134
4.2 *Smart-spring* 134

5.1 *Frequenze dei modi collettivi del rotore di Erica in vacuo, partner* 142
5.2 *Frequenze dei modi collettivi del rotore di Erica in vacuo* 142
5.3 *Frequenze dei modi ciclici di flap del rotore di Erica in vacuo, partner* 143
5.4 *Frequenze dei modi ciclici di flap del rotore di Erica in vacuo* 143
5.5 *Frequenze dei modi ciclici di gimbal e di lag del rotore di Erica in vacuo, partner* 144
5.6 *Frequenze dei modi ciclici di gimbal e di lag del rotore di Erica in vacuo* 144
5.7 *Frequenze dei modi ciclici di torsione del rotore di Erica in vacuo, partner* 145
5.8 *Frequenze dei modi ciclici di torsione del rotore di Erica in vacuo* 145
5.9 *Smorzamento dei modi collettivi di lag e torsione del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri: partner* 146
5.10 *Smorzamento dei modi collettivi di lag e torsione del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri* . 146
5.11 *Smorzamento dei modi collettivi del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri: partner* 147
5.12 *Smorzamento dei modi collettivi del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri* 147
5.13 *Smorzamento dei modi ciclici di gimbal e del primo di flappeggio del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri: partner* 148
5.14 *Smorzamento dei modi ciclici di gimbal e del primo di flappeggio del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri* 148
5.15 *Smorzamento dei modi ciclici del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri: partner* 149
5.16 *Smorzamento dei modi ciclici del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri* 149

5.17 *Smorzamento dei modi ciclici di lag del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri: partner* 150
5.18 *Smorzamento dei modi ciclici di lag del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri* 150
5.19 *Smorzamento dei modi ciclici di torsione del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri: partner* . 151
5.20 *Smorzamento dei modi ciclici di torsione del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri* 151
5.21 *Frequenze proprie dell'ala di ERICA* 153
5.22 Frequenze proprie dell'ala di ERICA, partner 153
5.23 *Frequenze dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in AC* 154
5.24 *Frequenze dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in AC, partner* 155
5.25 *Smorzamenti dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in AC* 155
5.26 *Smorzamenti dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in AC, partner* 156
5.27 *Frequenze dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in EOC* 157
5.28 *Frequenze dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in EOC, partner* 157
5.29 *Smorzamenti dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in EOC* 158
5.30 *Smorzamenti dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in EOC, partner* 158
5.31 *Carichi all'hub in AM* 160
5.32 *Carichi alla radice della Fixed-wing in AM in assenza di aerodinamica sull'ala* 161
5.33 *Carichi alla radice del Torque-tube in AM in assenza di aerodinamica sull'ala* 161
5.34 *Carichi alla radice della Fixed-wing in AM* 162
5.35 *Carichi alla radice del Torque-tube in AM* 162
5.36 *Carichi vibratori aerodinamici alla radice del tubo dovuti alla Movable Wing* 163
5.37 *Carichi alla radice della Fixed-wing in AM in assenza di momento di inerzia del carburante* 164
5.38 *Carichi alla radice della Fixed-wing in AM in assenza del carburante* 164
5.39 *Carichi alla radice del Torque Tube in AM in assenza di momento di inerzia del carburante* 165

5.40 *Carichi alla radice della Torque-tube in AM in assenza del carburante* 165
5.41 *Frequenze in AM dell'ala al variare della modellazione del carburante* 166
5.42 *Carichi all'hub in HM* 167
5.43 *Carichi alla radice del Torque-tube in HM* 168
5.44 *Carichi alla radice della Fixed-wing in HM* 168
5.45 *Carichi alla radice del Torque-tube in HM in assenza di aerodinamica sull'ala* 169
5.46 *Carichi alla radice della Fixed-wing in HM in assenza di aerodinamica sull'ala* 169
5.47 Frequenze in HM al variare della modellazione della stiva di carburante 170
5.48 *Frequenze in vacuo dei primi cinque modi collettivi in AM* 171
5.49 *Frequenze in vacuo dei primi dieci modi ciclici in AM* . 172
5.50 *Frequenze in vacuo dei primi cinque modi differenziali in AM* 172
5.51 *Frequenze in vacuo dei primi cinque modi collettivi in HM* 173
5.52 *Frequenze in vacuo dei primi cinque modi ciclici in HM* 173
5.53 *Frequenze in vacuo dei primi cinque modi differenziali in HM* 174
5.54 Curva di zero-power per il collettivo del rotore 174
5.55 Frequenze proprie dell'ala incastrata 175
5.56 *Carichi all'hub in AC* 179
5.57 *Carichi alla radice del Torque-tube in AC* 179
5.58 *Carichi alla radice della Fixed-wing in AC* 180
5.59 *Carichi all'hub in LS* 180
5.60 *Carichi alla radice della Fixed-wing in LS* 181
5.61 *Carichi alla radice del Torque-tube in LS* 181
5.62 *Carichi all'hub in HC* 182
5.63 *Carichi alla radice della Fixed-wing in HC* 182
5.64 *Carichi alla radice del Torque-tube in HC* 183
5.65 *Frequenze proprie dell'ala in airplane-mode, confronto dei primi tre modi con [1]* 184
5.66 *Frequenze proprie dell'ala in helicopter-mode* 184
5.67 *Carichi alla radice in AM, con e senza aerodinamica sull'ala* 186
5.68 *Influenza della deformazione elastica sui carichi aerodinamici di rotore alla radice in AM* 187

5.69 *Influenza della deformazione elastica sui carichi aerodinamici di ala alla radice in AM* 187
5.70 *Carichi alla radice in AM, confronto tra modelli aerodinamici interazionali* 188
5.71 *Carichi alla radice in HM, con e senza aerodinamica sull'ala* 189
5.72 *Influenza della deformazione elastica sui carichi aerodinamici di rotore alla radice in HM* 189
5.73 *Influenza della deformazione elastica sui carichi aerodinamici di ala alla radice in HM* 190
5.74 *Carichi alla radice in HM, confronto tra modelli aerodinamici interazionali* 190
5.75 *Controllo con HHC in AM* 192
5.76 *Controllo con SS in AM* 193
5.77 *Controllo con HHC e SS in AM* 193
5.78 *Controllo con HHC in HM* 194
5.79 *Controllo con SS in HM* 195
5.80 *Controllo con HHC e SS in HM* 195
5.81 *Effetti sui carichi alla radice di una sintesi effettuata minimizzando i carichi all'hub in AM* 196
5.82 *Effetti sui carichi alla radice di una sintesi effettuata minimizzando i carichi all'hub in HM* 197
5.83 *Effetti sulle armoniche del controllo di una sintesi effettuata minimizzando i carichi all'hub in AM* 197
5.84 *Effetti sulle armoniche del controllo di una sintesi effettuata minimizzando i carichi all'hub in HM* 198

Elenco delle tabelle

5.1 *Dati di volo per configurazioni ERICA* 159
5.2 *Dati di volo per configurazioni ERICA* 176
5.3 *Dati di volo per configurazioni XV-15* 185

CAPITOLO 1

Introduzione

Il presente lavoro di tesi è teso a racchiudere ed armonizzare il percorso scientifico seguito nel triennio di dottorato, che ha preso inizio lì dove si era interrotto quello di laurea, seguendo lo scopo di ottenere un tool aeroelastico il più versatile possibile, in grado di poter affrontare a largo spettro le prinicipali problematiche inerenti le configurazioni Ala-Rotore proprie dei convertiplani.
Prima di addentrarsi nella parte tecnica del lavoro, però, è necessario e doveroso visionare in breve storia e prospettive di queste complesse e affascinanti macchine.

1.1 Generalità sui Convertiplani

I convertiplani sono veicoli *ibridi*. Essi sono caratterizzati da due rotori di tipo elicotteristico, basculanti, attuati in modo tale da poter alternare, a seconda del proprio posizionamento, prestazioni VTOL[1] a volo di crociera con prestazioni del tutto simili a velivoli propulsi ad elica. Essi sfruttano dunque sia superfici portanti fisse, le ali, che hanno bisogno di essere propulse attraverso un fluido per generare portanza, sia superfici rotanti, le pale rotoriche, che generano portanza anche a velivolo fermo in quanto messe in rotazione da un motore. Da questa combinazione nascono

[1] Vertical Take Off Landing

tre possibili configurazioni che il convertiplano può mantenere, rendendolo estremamente versatile:

Helicopter Mode si ha con gondola in posizione verticale; come per un elicottero il sostentamento è tutto affidato ai rotori, che quindi devono generare grande spinta verticale. In questo stato è possibile avanzare a moderate velocità in una direzione inclinando il disco rotore per orientare la forza portante, conferendole così anche il ruolo di spinta propulsiva. I comandi sono del tutto analoghi a quelli elicotteristici e si basano su comando collettivo e ciclico delle pale, attuati mediante uno *swashplate*. La presenza del doppio rotore conferisce capacità di controllo del velivolo basate su valori di comando differenziati tra i due rotori.

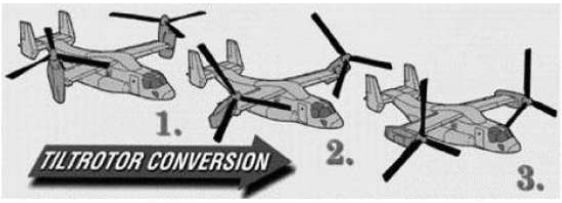


Figura 1.1: *Modalità operative di un Tiltrotor V-22*

Convesion Mode è definita una configurazione in cui le gondole sono inclinate di angoli importanti, le velocità del velivolo sono maggiori, e quota parte della portanza può essere generata dalle ali. La capacità di operare in queste condizioni è rilevante perchè permette al velivolo di decollare e atterrare come un aereo convenzionale, operando però su piste più brevi, il che annovera il convertiplano tra i velivoli V/STOL[2]. In questo stadio i sistemi di controllo possono essere ibridi tra aereroplano ed elicottero, e la transizione viene gestita da opportuni sistemi automatici ([29]).

Airplane Mode si ha dopo aver sfruttato la rotazione delle gondole per accelerare il velivolo per effetto della proiezione della spinta rotorica nella direzione di avanzamento, l'ala diventa completamente portante ed i rotori servono solo per un' efficiente propulsione, i controlli acquisiscono caratteristiche convenzionali per i normali aerei ad elica ([29]).

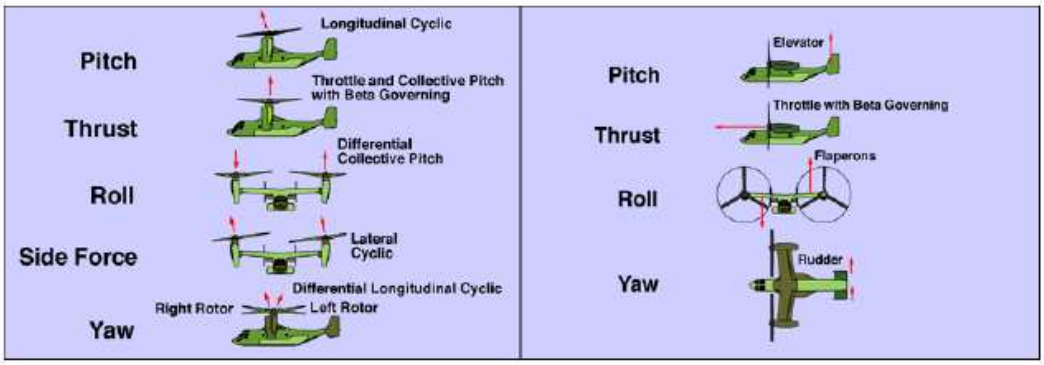


Figura 1.2: *Tecniche di controllo sul Boeing-Bell V-22*

Storicamente i convertiplani si sono divisi in due famiglie

- velivoli Tiltwing (Fig.1.3)
- velivoli Tiltrotor (Figg.1.5-1.8)

Nei primi il rotore è spesso posto lungo l'ala, che ruota assieme ad esso. Nei secondi l'ala e fissa, ed il rotore, posizionato all'estremità, può ruotare indipendentemente.

Figura 1.3: *Tiltwing HillerX-18*

In primo luogo, il Tiltwing evita l'effetto di deportanza che l'ala esercita quando il rotore la investe con la propria scia, soprattutto in fase di sollevamento, opponendo ad essa il profilo e non la corda. Come conseguenza il disco rotorico può avere una superficie

[2]Vertical/Short Take-off landing

più limitata, risultando più performante in crociera. Tuttavia, il maggior carico agente sul disco[3] comporta un'efficienza ridotta in *Helicopter mode*, accompagnata dalla necessità di una maggiore velocità al tip della pala, che comporta in generale maggiori livelli sonori e quindi peggiora l'impatto acustico del velivolo. Dal punto di vista costruttivo, il rotore del Tiltwing ha un design molto più semplice, in alcuni esemplari è stato un vero è proprio propeller, montando rotori senza comando ciclico e presentando un solo set di comandi per tutte le configurazioni. L'assenza di ciclici, tuttavia, impone la presenza di un rotore di coda per le manovre direzionali, rendendo necessario un ulteriore consumo di potenza.
Nei Tiltrotor invece l'effetto deportante permane, ed è percentualmente importante nelle fasi di VTOL (anche il 10 per cento della spinta!), comportando la necessità di rotori più grandi, che diminuiscono l'efficienza in *Airplane Mode*, ma avvicinano di molto le prestazioni in hovering a quelle degli elicotteri (Vedi Fig.1.4), il che lo ha reso nel tempo un concorrente superiore rispetto al Tiltwing. L'aumento

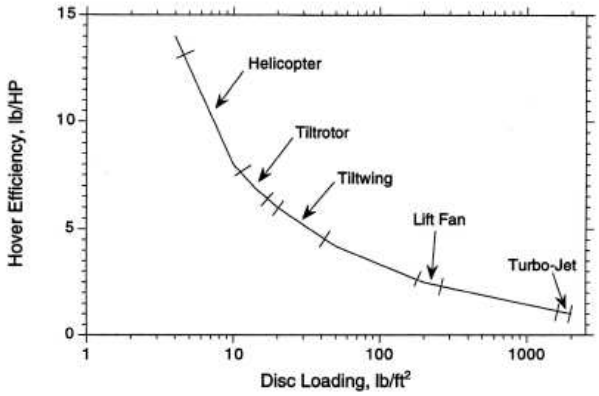


Figura 1.4: *Efficienza in Hover - Carico Disco Rotorico*

delle dimensioni del rotore, ergo l'allungamento delle pale, comporta tecnologicamente che ci si accosti ancora di più a fenomenologie aeroelastiche tipiche in elicotteristica, ed inoltre limita la capacità

[3] $\frac{T}{A}$,spinta/Area del Disco

di decollare in modalità *Airplane* per evidenti ragioni di interferenza tra pale e terreno, limitando il decollo alla condizione di V/STOL. Tuttavia, la forza delle configurazioni Tiltrotor sta proprio nella capacità di convogliare in un unico velivolo la manovrabilità e l'efficienza in *Helicopter mode*, con le alte velocità, elevate altitudini, e buone efficienze in *Airplane Mode*.

1.2 Cenni Storici

E' già alla fine degli anni '40, con la definitiva affermazione dell'aviazione, affiancata dallo sviluppo dell'elicotteristica, che prende corpo l'idea di fondere assieme in un unico velivolo i vantaggi dell'elicottero e del turboelica. Ciò nonostante, i modelli ad oggi effettivamente realizzati sono estremamente pochi, quelli funzionanti con successo ancora meno. Questo dà un indice della complessità e onerosità del compito del ricercatore, che ha pochi predecessori con cui conforontarsi.
Nel 1951 lo US ARMY congiuntamente all' AIR FORCE indicono una *Convertiplane Competition*, ciò nonostante il primo dimostratore delle potenzialità, nonchè della effettiva fattibilità dei convertiplani, fu il Trascendental Model 1-G, realizzato senza alcun finanziamento statale (Fig.1.5).

Figura 1.5: *Trascendental 1-G*

Esso si alzò la prima volta in volo il 6 di Luglio del 1954, a Bellanca, Newcastle, Delaware, ma effettuò la sua prima conversione sei mesi più tardi. Dopo 23 ore in aria e più di 100 voli, il modello 1-G si schiantò il 20 Luglio 1955 per non essere poi mai ricostruito. Nell'anno successivo l'aviazione militare mise sotto contratto la Trascendental per un secondo Tiltrotor, il 2-G, stesso modello di base, maggiore potenza: non volò mai.

L'interesse di aviazione ed esercito era però già chiaro, e la competition del '51, che aveva visto vittoriosa la Bell Helicopters, dava i suoi primi frutti con l'XV-3, equipaggiato con rotori tripala completamente articolati [4]. L'XV-3 (Fig.1.6) volò con successo nel 1955 per poi schiantarsi; un secondo XV-3 fu allora costruito con rotori bipala basculanti [5]. Fu con l'XV-3 che si presentò per la prima volta il fenomeno del Whirl-Flutter, e grazie ad esso si prese confidenza con alcuni limiti di stabilità e con necessità tecniche dei convertiplani.

Figura 1.6: *Bell Helicopters XV-3*

Nel 1968 la Bell iniziò lo sviluppo del Modello 300, impostandolo come un tripala, ma stavolta con gimbal[6]. Vennero eseguiti test in galleria sull'architettura Ala-Rotore, ma non venne mai costruito il prototipo. Tantò bastò per realizzare che la struttura con gimbal, ovvero 'stiff inplane[7]' si preannunciava stabile ben oltre la velocità di crociera.
Nel 1972/73, Nasa e US ARMY finanziarono la Bell Helicopter sul Model 301, che presto venne rinominato XV-15 (Fig.1.7).

Fu un successo totale come manovrabilità, comfort e sicurezza, che si guadagnò l'appellativo di miglior V/STOL mai costruito. L'XV-15 mostrò subito grandi prospettive, aprendo la via anche all'utilizzo civile della tecnologia del convertiplano. I due prototipi

[4]Fully Articulated.
[5]Teetering Rotors.
[6]Tre pale rigidamente attaccate ad un hub libero di basculare attorno ad un giunto universale.
[7]Ovvero con prima frequenza per il moto di pala nel piano di rotazione maggiore della frequenza giro.

Figura 1.7: *Bell Helicopters XV-15*

costruiti sono stati molto longevi e usati a tutt'oggi come dimostratori per tecnologie da applicarsi su modelli successivi.
Col conforto della positiva esperienza dell'XV-15, iniziò il programma militare V-22 'Osprey', affidato a Boeing Helicopters e Bell Textron per lo sviluppo e produzione per centinaia di esemplari. I primi sei prototipi vennero assemblati a fine anni ottanta e venne definito l'iter di produzione. 'Sopravvissuto' a due catastrofici incidenti, uno dei quali è costato la vita a 19 marines USA, e migliorato nel tempo, ad oggi il V-22 è operativo in Iraq come in Afghanistan, ed è il primo ed unico Tiltrotor costruito su numeri così importanti (Fig.1.8).

Figura 1.8: *Bell-Boeing V-22 'Osprey'*

In tutto ciò l'industria italiana si è ritagliata una nicchia importante grazie ad *Agusta-Westland*, che assieme a Bell tentò di sfruttare le conoscenze raggiunte con il V-22 per uno sviluppo di Tiltrotor civile più piccolo, ispirato all'XV-15, adatto a trasporti a

corto/medio raggio. Prese così forma il BA-609 (Fig.1.9), i cui voli di collaudo risalgono al 2003 in Texas e al 2006 in Italia (Varese) e che è ad oggi in commercio.

Figura 1.9: *Bell-Agusta BA609*

In questa corsa attraverso gli step principali di sviluppo dei convertiplani non può, infine, mancare il Bell Textron 'Eagle-eye', Tiltrotor UAV[8] in forza tra gli altri alla guardia costiera USA (Fig.1.10).

Figura 1.10: *UAV Bell-Textron 'Eagle-eye'*

[8]Unmanned Air Vehicle.

1.3 Inserimento dei Tiltrotor nel contesto aeronautico: possibili sviluppi

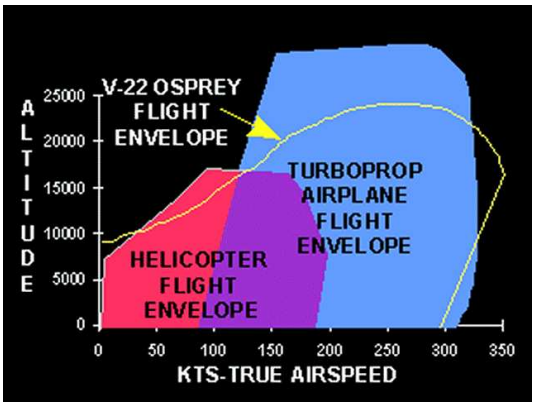


Figura 1.11: *Inviluppo di volo del Boeing V-22*

Da quanto illustrato poc'anzi, i Tiltrotor, tra i convertiplani, sono un'ottima soluzione là dove serva una sostenuta velocità di crociera, capacità di decollo e atterraggio in spazi limitati, e manovrabilità in hovering Fig.1.11.
Studi specifici di settore hanno definito il profilo di missione tipico per questi velivoli per quanto riguarda l'uso civile: un servizio punto-a-punto, (ovvero città-città, isola-isola) tra *vertiport*[9] (vedi Fig.1.12).

Figura 1.12: *Plastico di Vertiporto per Tiltrotor*

[9]Aeroporti per velivoli VTOL.

La capacità di decollo/atteraggio in spazi brevi rende inoltre i Tiltrotor adatti a tratte più lunghe, e quindi allo sfruttamento di infrastrutture già esistenti con carichi paganti maggiori. Per autonomia, velocità e manovrabilità, l'uso militare è ben prevedibile e, come visto, già attualizzato nel V-22, ma anche servizi di soccorso e sorveglianza sono profili di missione estremamente attuabili. La capacità di percorrere lunghe tratte a quote più alte, rende i Tiltrotor estremamente competitivi con gli elicotteri, mentre il confronto con aeromobili ad ala fissa va fatto non sul piano dei costi (il Tiltrotor è una macchina complessa e tendezialmente più costosa), ma sul piano delle minori infrastrutture richieste per operare.
Proprio gli spazi stretti necessari a velivoli V/STOL, se uniti a capacità di carico adeguate, fanno inserire questi velivoli molto bene nel previsto scenario di congestione dei grandi Hub internazionali. Se le piste tenderanno ad essere occupate soprattutto dagli aeromobili più grandi, le piccole tratte dovranno essere dirottate in aree dedicate all'interno degli stessi aeroporti, ed i vertiporti risulterebbero in questo senso una soluzione quantomeno auspicabile. Senza contare che, previa una ridefinizione di alcune procedure nel controllo del traffico aereo, i velivoli VTOL possono gestire l'avvicinamento all' aeroporto in modi molto più sostenibili dal punto di vista dell'impatto ambientale.

1.4 Configurazioni Tiltrotor di Prossima Generazione: *ERICA*

ERICA è un Tiltrotor di seconda generazione in sviluppo da parte di *Agusta-Westland* le cui caratteristiche base sono:

- il diametro rotorico minimo compatibile con alte *performance* in hover.
- La porzione esterna dell'ala, quella retrostante al rotore, tiltabile in maniera indipendente dalla nacelle.
- La continuità strutturale del meccanismo di tiltaggio, che sincronizza perfettamente le due nacelle con una singola barra tubolare, che fornisce al contempo integrità all'ala e supporto per la sua parte tiltabile.

Figura 1.13: *Grafica di ERICA di Agusta-Westland in helicopter mode e in airplane mode*

Queste caratteristche rendono di fatto *ERICA* un ibrido Tiltrotor-Tiltwing e promettono di conferirgli maggior versatilità (piena capacità di decollo/atterraggio in *airplane mode* con conseguente usufruibilità delle strutture già esistenti ed un'aumentata sicurezza) e migliori prestazioni, soprattutto in crociera, anche in termini di comfort ed impatto acustico, come verrà meglio illustrato nel capitolo successivo.

Lo sviluppo di *ERICA* si muove all'interno del progetto *NICETRIP*,[10] di cui fanno parte i seguenti progetti:

1. *DART* (Advanced rotor for tilt rotor)
2. *ADYN* (Tilt rotor behaviour in forward flight)
3. *TRISYD* (Drive system and tilting mechanisms)
4. *ACT-TILT* (Design of a Flight Control System for a Civil Tilt Rotor)
5. *TILTAERO* (Interactional Aerodynamic)

I modelli strutturali sviluppati nell'ambito di questo lavoro di ricerca per affrontare configurazioni avanzate, sia per quel che concerne il rotore, che per quanto riguarda l'ala, così come quelli aerodinamici utilizzati, sono stati applicati ad Erica grazie al *data base* costituito dai Rif.[30]-[32], cui ho avuto accesso durante il triennio di scuola dottorale, nell'ambito di una collaborazione dell'*Università degli studi Roma Tre* con *Agusta-Westland*.

[10]Novel Inovative Competitive Effective TiltRotor Integrated Project

1.5 Obiettivi del lavoro

Il triennio di dottorato è stato teso alla realizzazione di un tool per l'analisi aeroservoelastica di configurazioni ala-rotore proprie dei velivoli Tiltrotor, prevalentemente in condizioni di volo rettilineo uniforme.
L'utilità del convertiplano, come visto, ne fa una macchina complessa, ricca di caratteristiche ibride tra elicotteri ed aerei elica-propulsi. La conseguenza di questa complessità è evidente nella storia quarantennale di questi velivoli, in cui la 'selezione naturale' è stata serrata e ha lasciato pochi esemplari operativi con successo; spesso è stata proprio l'importanza dei fenomeni aeroelastici che governano i Tiltrotor a determinare la severità della selezione. Se da una parte i grandi diametri delle pale rotoriche le fanno potenzialmente incorrere in instabilità tipiche degli elicotteri, dall'altra l'interazione cinematico-dinamica del rotore con il corpo macchina e con l'ala ha manifestato negli anni, sulle varie configurazioni, più forme di instabilità, che in questa sede ci limitiamo a nominare, quali **Ground-Resonance**, **Air-Resonance** e **Whirl-Flutter**. Se l'ultima, che compare ad alte velocità ed è fortemente influenzata dall'aerodinamica, è a tutt'oggi un vincolo fondamentale nel definire inviluppo di volo e caratterizzazione di ala e rotore, le prime due, che possono verificarsi rispettivamente a terra ed in aria a basse velocità e regimi di rotazione, dipendono fortemente dalla struttura ed hanno decisamente orientato lo sviluppo delle configurazioni Tiltrotor verso rotori *stiff in-plane*[11] per poterle eliminare. Specularmente, dal punto di vista prettamente aerodinamico, i grandi diametri necessari al rotore per garantire l'efficienza in hovering comportano notevoli interferenze sia con i piani di coda che con l'ala e la fusoliera, in situazioni di regime come nei transitori che governano, ad esempio, la fase di conversione[12]. Buona parte di ciascuna semiala viene infatti investita dalla scia del rotore, con effetti rilevanti sia sull'efficienza che sul comfort, generando vibrazioni e rumore, ed un effetto analogo può aversi sui piani di coda.
La diffusione su larga scala del Tiltrotor nel panorama aeronautico ha bisogno in primo luogo della piena sicurezza, in secondo luo-

[11] Ovvero con prima frequenza per il moto di pala nel piano di rotazione maggiore della frequenza giro.

[12] Si pensi al distruttivo *Vortex Ring State*, che, nel 2000, ha portato alla morte di 19 Marines USA nello schianto di un V-22 in discesa rapida.

go di caratteristiche di comfort, sia in termini di vibrazioni che di rumore. Le prime hanno impatto, oltre che sulla vivibilità, sulla fatica delle strutture e quindi sui costi di manutenzione, il rumore è invece fondamentale per l'impatto ambientale e l'immissione nelle rotte di trasporto commerciale/civile.
Da qui la forte esigenza nel settore di *Ricerca e Sviluppo* di affiancare alle campagne sperimentali (comunque sempre necessarie) dei tool per la simulazione numerica. Questi, una volta validati ad ampio raggio, debbono essere in grado di riprodurre il più possibile i complessi fenomeni aeroelastici, fornendo previsioni efficaci e coadiuvando quindi la velocità dell'analisi, nonchè la sua versatilità ed adattabilità, con confronti parametrici ad esempio, limitando considerevolmente i costi che ogni campagna sperimentale porta con sè. Senza contare che, nel caso soprattutto dei Tiltrotor, i prototipi funzionanti e i dimostratori non sono stati storicamente tantissimi, e prima di giungere alla realizzazione di uno di essi, solo le simulazioni numeriche possono fare da guida alle importanti scelte entro cui si muove la fase di progettazione preliminare.
Dai pioneristici lavori di Johnson negli anni '70 (si consultino a titolo di esempio i Rif.[1]-[3]), in cui si tracciavano i requisiti base per la dinamica dei Tiltrotor con modelli a pochi gradi di libertà, si è giunti oggi all'applicazione di modelli *multy-body* e agli elementi finiti che descrivono con grande accuratezza le strutture di ala e rotore.
Il presente lavoro di ricerca ha voluto inseririsi in quest'ambito, proponendo un modello aeroelastico i cui elementi principali sono:

Un Modello Strutturale basato sulle classiche equazioni per travi elastiche sviluppate da Hodges, Dowell, e Ormiston nei Rif.[4] e [7] e su un approccio modale, ampliato e rielaborato, come si vedrà meglio in seguito, per tenere in conto caratteristiche importanti, proprie anche delle configurazioni Tiltrotor di prossima generazione, quali ad esempio pale ad asse curvo e ali a geometria variabile[13].

Un Modello Aerodinamico capace di tenere in conto la complessa Aerodinamica Interazionale che si instaura tra rotore e ala mediante una formulazione B.E.M.[14] ottimizzata per casi di intenso impatto scia-corpi (Rif.[16]).

[13]Ovvero con parte dell'ala tiltabile indipendentemente dalla gondola.
[14]Boundary Element Method.

L'uso combinato di questi modelli, secondo modalità che saranno esplicate in seguito, ha permesso l'applicazione ai problemi notevoli di *Stabilità* e *Risposta Aeroelastiche*, non necessariamente in ordine di importanza.

La Stabilità Aeroelastica è stata affrontata individuando un metodo numerico perturbativo per la definizione delle matrici del sistema a partire dalle forze di natura inerziale ed aerodinamica, definendo queste ultime con un modello 2-D basato sulla nota formulazione di
Theodorsen (Rif.[5]-[6]), arricchita da modelli di inflow 3-D. Dopo più indagini comparative, e seguendo l'uso più canonicamente diffuso nel settore tecnico-scientifico, si è scelto di condurre le analisi utilizzando la trasformazione in *variabili multi-pala*. I risultati ottenuti hanno permesso sia di catturare fenomeni notevoli di instabilità aeroelastica, che di identificare le caratteristiche dinamico-strutturali di configurazioni Tiltrotor via via più complesse.
La definizione di **Risposta Aeroelastica** comprende invece in questa sede più livelli di analisi. In primo luogo essa è intesa come identificazione delle deformazioni elastiche e degli spostamenti legati direttamente alle cedevolezze di alcuni organi di comando ed attuatori, se presenti nel modello.
L'identificazione delle matrici del sistema è stata ottenuta con lo stesso metodo numerico utilizzato per la stabilità, ma il metodo risoultivo è stato un *Harmonic-Balance* iterativo (a causa della non linearità dei sistemi in esame). Nel panorama delle possibili applicazioni si è scelto di orientare l'uso della conoscenza della Risposta Aeroelastica al *calcolo dei carichi trasferiti dal rotore al mozzo e dal sistema ala-rotore alla fusoliera*. In particolare modo, si è incentrata l'attenzione sulla componente armonica dei carichi trasmessi a regime alla struttura, ergo sulle vibrazioni, dannose sia per il comfort che per la longevità del velivolo. Questi carichi sono generati dall'aerodinamica e dai carichi inerziali legati alla deformazione della struttura. Il contributo aerodinamico è stato valutato con più gradi di complessità e completezza. Nel primo grado di approssimazione, utilizzando modelli 2-D[15] e arricchendoli con modelli di inflow analitici classici[16]; in un secondo step, usando invece una velocità indotta completamente 3-D, basata sull'interazione della struttura con il solutore aerodinamico B.E.M.,

[15]Theodorsen
[16]Momentum Theory,Drees,Glauert e altri sul rotore

che comprende quindi gli importanti effetti interazionali tra i vari corpi presenti e le rispettive scie. Infine, nella versione più completa, utilizzando direttamente sulla struttura i carichi aerodinamici ottenuti dal solutore B.E.M., a loro volta contenenti l'informazione della deformazione strutturale-elastica.

I *Carichi Vibratori* sono stati calcolati per diverse configurazioni del velivolo e su di essi sono state portate avanti due tipologie di analisi:

- da prima ci si è concentrati sulle differenze nell'uso dei vari modelli aerodinamici per il loro computo, onde stabilire gli elementi essenziali per una buona descrizione del fenomeno.

- Successivamente si è arrivati ad introdurre nel modello degli *Elementi di Controllo delle Vibrazioni innovativi*. Il procedimento di soppressione si è basato sull'uso combinato di più elementi, in questa sede definibili tutti senza perdita di generalità come Higher Harmonic Control. Per la sintesi della legge di controllo ci si è basati su metodi di *Controllo Ottimo* per sistemi armonici. Diverse caratteristiche del controllo sono state prese in considerazione, in particolar modo l'efficacia e la robustezza di architetture a *ciclo aperto o chiuso*[17] al variare del modello aerodinamico utilizzato.

Segue per completezza un breve sommario del presente lavoro:

- Capitolo 2: contiene la descrizione approfondita dei modelli strutturali ed aerodinamici sia per l'ala che per il rotore, si sofferma inoltre sulla descrizione degli elementi presenti e riguardanti le configurazioni Tiltrotor di nuova generazione, sia per il rotore, che per la struttura alare

- Capitolo 3: descrive i metodi di risoluzione adottati. Il set di equazioni di cui sopra viene discretizzato e risolto con metodologie diverse per i due problemi notevoli di risposta e stabilità.

- Capitolo 4: si sofferma sui meccanismi principali alla base delle vibrazioni nei convertiplani, e descrive i sistemi utilizzati per sopprimerle, così come i metodi numerici per determinarne l'attuazione.

[17] Definite *Open-Loop e Closed-Loop*

- Capitolo 5: contiene i risultati numerici ottenuti in entrambe le analisi.

CAPITOLO 2

Modelli Aeroelastici

In questo Capitolo vengono descritti i modelli Strutturale ed Aerodinamico sviluppati per questo lavoro di ricerca. In particolare una premessa è necessaria riguardo al primo tra i due. Si è già fatto accenno al fatto che nel tentativo di modellare quanto più completamente possibile la dinamica strutturale, soprattutto in ambito industriale, si è arrivati ad applicare alle configurazioni Tiltrotor modelli *multy-body* e F.E.M.[1]. Il cuore del presente modello descrive ala e rotore basandosi sulle equazioni per travi elastiche sviluppate da Hodges, Dowell e Ormiston nei primi anni '70 (Rif.[4]-[7]), e approccia il problema aeroelastico con una soluzione modale. E' per questo che, nei paragrafi che seguono, non si è soltanto descritto lo stato attuale del modello, ma si è fatto anche accenno ad alcuni passi dell'iter che vi hanno portato, allo scopo di evidenziarne la necessità, gli elementi di innovazione e, la dove siano stati riscontrati, i limiti.

Stabilità e Risposta Aeroelastica di velivoli Tiltrotor sono gli obiettivi dichiarati del presente lavoro di ricerca. La descrizione comprende Ala e Rotore, che ne sono i principali artefici, non è dunque compresa la fusoliera, ne in termini inerziali trattando condizioni di volo rettilineo uniforme, ne di interferenza aerodinamica. La giustificazione sta nel fatto che essa introduce modi a bassa frequenza che non si accoppiano con i fenomeni aeroelastici in esame

[1] Basati sul 'Metodo degli Elementi Finiti'.

per quanto concerne la Stabilità, mentre per quanto riguarda la Risposta l'effetto di interferenza aerodinamica, ovvero di impatto con la scia è stato ritenuto trascurabile a questo livello di analisi.

2.1 Descrizione generale

Le componenti del sistema preso in esame sono dunque:

- Ala
- Gondola[2]
- Rotore

Figura 2.1: *Configurazione esemplificativa di un' Ala completa basata su ERICA di Agusta-Westland*

2.1.1 Ala

L'Ala[3] di un Tiltrotor è vincolata nella sua geometria da alcune caratteristiche peculiari del velivolo. Di norma non è lunghissima, soprattutto se paragonata alla lunghezza delle pale al rotore, è poco rastremata, a volte per nulla, e ha spessori notevoli. Essa deve infatti, a titolo di esempio, essere molto rigida a torsione per allontanarsi da condizioni di *Whirl-Flutter*, e deve ospitare la struttura di trasmissione e attuazione che permette il funzionamento dei motori ed il tiltaggio delle Gondole. Questa struttura è di base

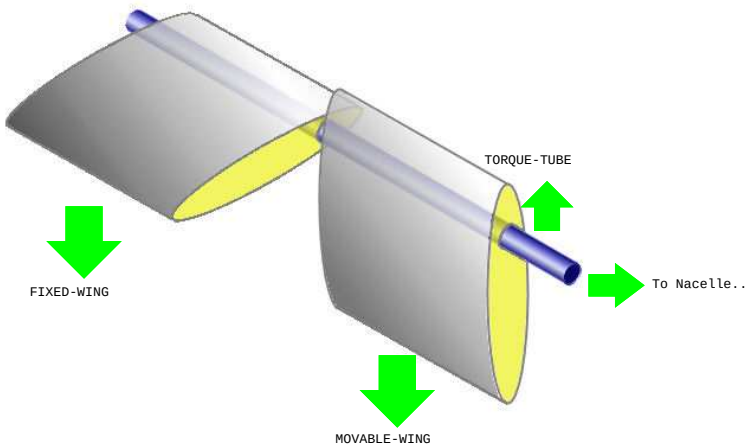
[2]Definita anche *Nacelle* o *Pilone*.
[3]Qui si considera una *semiala* per essere precisi.

semplice, cilindrica, una barra tubolare che corre attraverso l'ala da una gondola all'altra (spesso questo ha portato alla necessità di scelta di un ala alta), per permettere che la potenza venga dirottata da un rotore all'altro in caso di avaria di uno dei due motori. La barra sostiene poi la gondola, con pesi che superano anche la tonnellata, e attraverso di essa riceve i carichi provenienti dal rotore. Essa non genera ovviamente alcuna portanza, ma è lasciata libera di ruotare all'interno della struttura alare esterna, a cui è vincolata negli spostamenti attraverso alcune centine lungo la sua apertura. Guardando ai Tiltrotor di prossima generazione, come accennato in 1.4, *Agusta-Westland* ha ufficialmente introdotto nello sviluppo del suo convertiplano *ERICA* la caratteristica dell'ala a geometria variabile: prendendo in prestito una prerogativa degli ormai obsoleti convertiplani Tiltwing, la parte estremale dell'ala viene resa tiltabile attorno alla barra. Differentemente dai predecessori però, in cui era tutta l'ala a ruotare, la rotazione è indipendente da quella della gondola e quindi del rotore. Questo meccanismo permette di aumentare drasticamente l'efficienza in decollo verticale, evitando i fenomeni di deportanza che si hanno nei Tiltrotor convenzionali che espongono la corda e non il profilo dell'ala alla scia rotorica, ed inoltre allontanano la possibilità di stallo dell'ala, soprattutto in fase di conversione, sia quando le gondole stanno effettivamente ruotando, che quando sono stazionarie con ampi angoli di inclinazione. In poche parole, la presenza di un' ala mobile migliora notevolmente le capacità di V/STOL[4] del velivolo ampliandone il *corridoio di conversione*.

Il modello realizzato per il seguente lavoro di ricerca, prevede la modellazione di ali anche in presenza di configurazioni innovative com'è quella di *ERICA*, ma con diverse possibilità per renderlo più conforme alle proprie esigenze e soprattutto ai dati in proprio possesso.
Nel **modello base**, il primo realizzato cronologicamente, tutte le cratteristiche aerostrutturali dell'ala vengono attribuite ad un unico corpo: una trave elastica di lunghezza L_w, incastrata alla radice nella struttura della fusoliera con angolo di incidenza aerodinamica *costruttiva* i_{rst}[5] ed un diedro Δ. Genericamente, il modello costruito prevede la non coincidenza di punti notevoli delle sezioni quali cen-

[4]Short Take Off Landing
[5]Root-incidence

tro aerodinamico, baricentro e centro di figura, individuati rispetto all' asse elastico da una serie di offset variabili lungo l'ascissa x_w. Si considera inoltre la presenza di parte dell'ala tiltabile attraverso l'incidenza variabile $\Delta i_(x_w)$.
Talvolta invece è necessaria, nonchè possibile in base ai dati di cui si è in possesso, una modellazione più realistica dell'ala. E' questo il caso del presente lavoro di ricerca, uno dei cui temi principali è la descrizione del passaggio dei carichi, ergo delle vibrazioni, dal rotore e dall'ala alla fusoliera. Se si vuole rendere il modello competitivo con i raffinati FEM disponibili, nonchè ampliare le possibilità di analisi, è infatti necessario descrivere gli scambi di forze ed i percorsi di carico attraverso la struttura interna e le superfici aerodinamiche in cui l'ala è divisa.
Basandosi sulla struttura del convertiplano *ERICA* è stato dunque previsto un **modello avanzato**, in cui l'Ala è divisa in tre corpi:



La struttura interna o *Torque-tube* [6] che percorre tutta la semiala di lunghezza L_w

L'ala fissa o *Fixed-Wing* [7], che parte dall'incastro in fusoliera ed è lunga L_{fw}.

L'ala Mobile o *Movable-Wing* [8] che comincia dove finisce quella fissa e termina all'estremità della barra.

[6] A volte di qui in avanti indicato con la sigla **TT**
[7] A volte di qui in avanti indicato con la sigla **FW**
[8] A volte di qui in avanti indicato con la sigla **MW**

sulla cui modellazione si rimanda al paragrafo dedicato.

2.1.2 Gondola

All'ultima sezione dell'ala[9] è innestata la gondola.

Figura 2.2: *Esempio di Nacelle, basata su ERICA di Agusta-Westland*

Il punto di ancoraggio, per il quale passa l'asse attorno a cui la gondola ruota nella conversione tra una modalità e l'altra del velivolo, è definito Pivot-point ed indicato con PVP. Senza perdita di generalità, sia che si parli del **modello avanzato**, sia del **modello base**, a volte ci si riferirà alla sezione di connessione ala-gondola come sezione di *Wing-tip* o di *estremità alare*. La gondola contiene nella sua struttura il rotore e, genericamente, il motore e parte dell'impianto di trasmissione, è dunque una componente essenziale con la sua massa imponente (dai 700 ai 1500 Kg di peso a seconda del velivolo) ed influenza molto sia la dinamica strutturale dell'ala, che la trasmissione dei carichi dal gruppo rotore.
Nel modello sviluppato la gondola è considerata un corpo rigido e come tale partecipa alla cinematica ed alla dinamica attraverso le sue caratteristiche principali che sono massa e momenti di inerzia. L'angolo di inclinazione relativa tra gli assi corda della sezione di Wing-tip e l'asse longitudinale della gondola, ovvero dell'asse di rotazione del rotore e definto *angolo di shaft* ed è indicato con :

$$\alpha_{sh} = \begin{cases} 0^o & \text{se in volo in hover} \\ 90^o & \text{se in volo di crociera} \end{cases}$$

[9]Del **Torque-Tube** se si parla del modello avanzato.

in accordo alla nomenclatura classica elicotteristica[10].
Dal punto di vista aerodinamico, il modello 3D del solutore BEM di cui si è parlato nel Capitolo 1 può includerla o meno. Dato il dispendio in termini di tempi di calcolo che questo può comportare, l'opportunità di farlo è da valutarsi caso per caso, a seconda del grado di raffinatezza dell'analisi necessaria.

2.1.3 Rotore

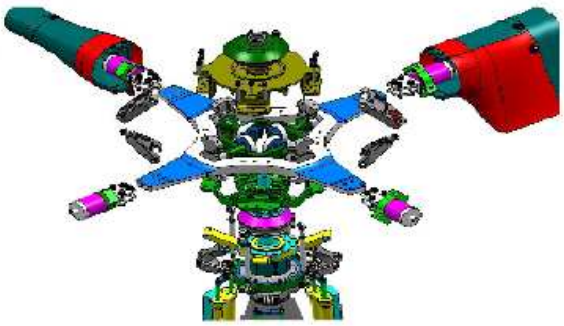


Figura 2.3: *Esempio di moderna architettura Rotorica basata su ERICA di Agusta-Westland*

Il rotore è probabilmente il cuore pulsante dei Tiltrotor, da cui dipendono più che da ogni altro componente efficienza, affidabilità e comfort della macchina. Sicuramente al centro della sua architettura ci sono le pale, che determinano le caratteristiche aerodinamiche e la gran parte di quelle dinamico-strutturali che un modello deve saper cogliere per essere rappresentativo della realtà fisica. Con ragionamento analogo a quello fatto per la modellazione dell'ala però, per poter rendere il modello rotorico qui presentato in grado di stare al passo con rappresentazioni superiori come i FEM, che ne includono dettagliatamente ogni singola componente, la sola pala non basta. La modellazione è stata dunque pensata per descrivere il rotore nella sua completezza. Per fare ciò sono stati introdotti degli elementi che si è deciso di includere nella definizione del tutto generica di *Hub 'flappante'*, descritto qui di seguito.

[10]Questi valori valgono nel caso in cui fusoliera ed ala abbiano angolo di incidenza nullo.

La Pala

Ciascun rotore è costituito da N_{blade} pale di lunghezza R. Esse sono corpi elastici, rotanti con velocità Ω, descritti secondo i Rif[7]-[4]. Il modello qui presentato si è però evoluto e completato nel tempo per tenere in conto elementi di strutture via via più complesse. Per capire su che linee ci si è mossi nello sviluppo, è bene guardare al futuro, ovvero alle richieste tecniche che si stanno facendo ai Tiltrotor innovativi di prossima generazione.
Come è stato descritto precedentemente, uno dei limiti dei Tiltrotor è stato quello di aver bisogno di grandi diametri rotorici, soprattutto per le fasi di hovering o di VTOL, al fine di migliorare la propria efficienza in queste condizioni. Questa struttura ha comportato una minore prestanza in volo di crociera, che è comunque la condizione di volo principale durante la vita del velivolo, ed una maggiore suscettibilità a fenomeni aeroelastici dannosi come il Whirl-Flutter, che a sua volta limita la velocità massima possibile. Dal punto di vista tecnico, inoltre, grandi diametri impediscono il decollo e l'atterraggio in modalità aeroplano, limitando col primo la versatilità e con il secondo la sicurezza del velivolo.
Le configurazioni di prossima generazione dovranno dunque mirare a migliorare questo aspetto, ottimizzando il rotore sotto ogni punto di vista. *ERICA* di *Agusta-Westland* si muove in questo senso con l'introduzione di ali a geometria variabile come quelle descritte poc'anzi, il che aiuta decisamente il rotore a liberarsi di buona parte della deportanza esercitata dall'ala nelle fasi di VTOL, e quindi coadiuva una diminuzione di diametro. Allo stesso tempo si rendono necessari studi miranti all'ottimizzazione aerodinamica volta sia alle prestazioni, che al comfort in termini di vibrazioni ed impatto acustico.
Nel tentativo di soddisfare tutte queste caratteristiche, la struttura del rotore si complica. Le pale si modificano, sfruttando materiali compositi ed assumendo forme più complesse, in cui l'asse elastico può non essere rettilineo, ne parallelo ne coincidente con quello di feathering[11]. Le caratteristiche di sezione divengono estremamente variabili in termini di svergolamento, profili aerodinamici e forma. Il modello qui presentato, applicato al rotore in sviluppo per *ERICA* nell'ambito del progetto *NICETRIP*, ha dovuto evolversi introducendo offset di massa (e^b), di figura (e^b_A), ed aerodinamico (e^b_{AE}) vari-

[11] Il *feathering-axis* è quello su cui agisce il comando.

abili lungo l'ascissa x_b, che si sviluppa lungo l'apertura della pala e che può essere curvilinea, essendo presente una predeformazione geometrica dell'asse elastico rispetto al feathering-axis. Ciascuna pala è soggetta ad una legge di svergolamento costruttivo, ovvero un built-in-twist che indichiamo con $\vartheta_{tw}(x_b)$ e si deforma elasticamente; sono altresì includibili i moti rigidi attorno alle cerniere di flappeggio, lag e torsione, ove presenti. Le cerniere sono dislocabili rispetto al centro di rotazione dell'hub per mezzo di due offset, l'*Hinge-offset* e_H e il *Torque-offset* e_o. In particolare il primo dei due può definire, in una pala priva di una cerniera effettiva, il tratto di pala nel quale essa non è da considerarsi elastica. Rispetto al piano definito dalla rotazione della sua estremità, definito *Tip-path plane*, ciascuna pala può essere inclinata con un *angolo di precone* β_{pc}. Un' ascissa di cut-off aerodinamico, $x_{cut-off}$, indica da dove, lungo l'apertura, la pala diventi effettivamente portante.

Hub flappante e gimbal

Con la definizione che da il nome alla presente sezione, evidentemente anglofona, si vogliono rappresentare, e si intenderanno da qui in poi, tutte le componenti del rotore che partecipano alla dinamica strutturale, influenzando cinematicamente le pale, e descrivendo la propria dinamica in base alle forze che esse vi scaricano. Questi elementi devono quindi essere considerati sia in termini di rigidezza che di massa. Tra essi includiamo una vasta serie di componenti che variano a seconda delle architetture, quali i cuscinetti di attuazione dei comandi, le filettature che uniscono i vari componenti nonchè le strutture di raccordo tra pala e disco rotante, oltre che eventuali molle e componenti elastomeriche. Tra questi elementi, al primo posto per importanza, consideriamo il gimbal.

Il **gimbal** è un elemento tipico nei rotori di *Tiltrotor*, la sua presenza ne caratterizza la dinamica strutturale a tal punto, da identificare una classe di rotori. Esso è principalmente costituito da una componente elastomerica che può essere schematizzata come un giunto sferico nel centro di rotazione e determina un movimento basculante del disco di rotazione sotto l'azione dei momenti al mozzo nel piano. Il moto che ne deriva può essere descritto per ciascuna pala, in un sistema rotante con essa, da un angolo indicato con β_G, o nel sistema non rotante, attraverso gli angoli di

tiltaggio del disco, rispettivamente quello longitudinale β_C, e quello laterale β_S, in relazione tra loro attraverso la seguente:

$$\beta_G = \beta_C \cos\psi + \beta_S \sin\psi \tag{2.1}$$

dove ψ è l'angolo azimuthale della pala, che ne descrive la posizione rispetto al riferimento non rotante e che definiremo meglio in seguito.

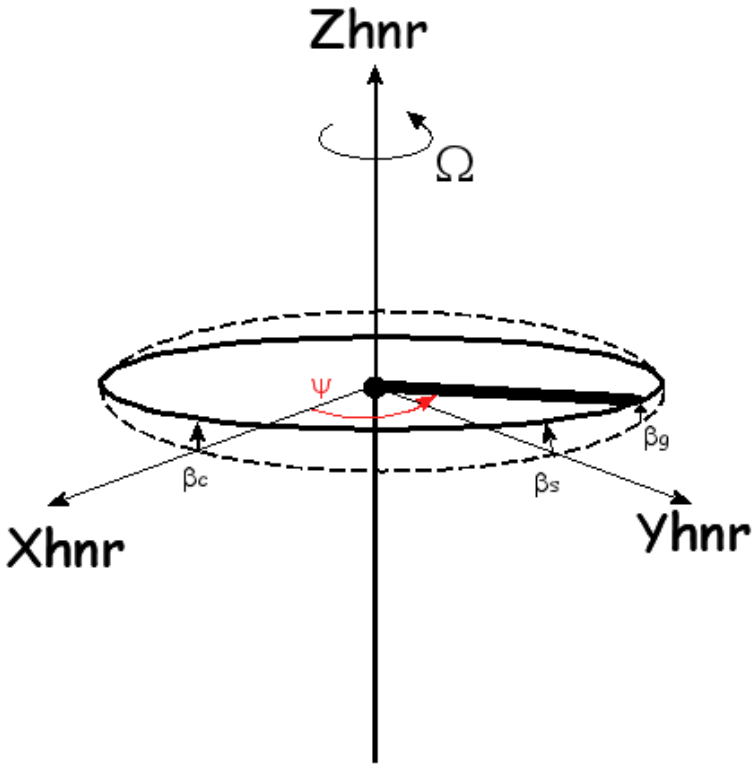


Figura 2.4: *Variabili di gimbal nei sistemi di riferimento rotante e non*

2.2 Modellazione strutturale di ala e pala

Il modello utilizzato nel presente lavoro per Ala e pala si sviluppa a partire da quello formulato nei Rif.[4] e [7], dove si determinarono le equazioni della dinamica per una pala elicotteristica svergolata ed a caratteristiche strutturali omogenee. Esse vengono qui descritte come travi: corpi elastici snelli, isotropi, non omogenei, sottoposti a moderate deformazioni per tenere in conto effetti geometrici non lineari. Per essi valgono le caratteristiche note dalla *Teoria dell'elasticità lineare* in condizioni di sforzo assiale diverso da zero lungo la direzione longitudinale e di indeformabilità delle sezioni.
Il modello è dunque monodimensionale, biflesso-torsionale, il che vuol dire che ogni grandezza, in particolar modo le variabili del problema aeroelastico, varia solo lungo l'apertura della pala/ala ed è riferibile quindi alla sezione corrispondente. In particolare lo stato di deformazione viene descritto attraverso gli spostamenti del centro elastico di ogni sezione,[12] oltre che dalla torsione attorno all'asse elastico della trave in configurazione deformata.
Sebbene nel Rif.[4] si contemplino anche termini di ingobbamento a torsione[13], in questo lavoro sono stati a priori eliminati.

2.2.1 Sistemi di riferimento e definizoni

Prima di addentrarsi nel richiamo dei modelli aerostrutturali, é bene definire i principali *sistemi di riferimento* usati per descrivere il sistema elencandoli qui di seguito.

Il Riferimento Inerziale o Fusoliera (IN) $\{O, X_{in}, Y_{in}, Z_{in}\}$ ha origine nel centro elastico della sezione alla radice dell'ala. Considerando un'ala destra, l'asse Y_{in} è allineato alla Velocità del velivolo[14], l'asse Z_{in} è ad essa perpendicolare, mentre l'asse X_{in} forma con essi una terna destra. La velocità d'avanzamento del velivolo viene descritta in questa terna:

$$\mathbf{V}_{ava}^{in} = \begin{Bmatrix} 0 \\ V_{ava} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

[12] Dato dall'intersezione di ciascuna sezione con l'asse elastico.
[13] Warping.
[14] Si considera Volo Rettilineo Uniforme.

In questo lavoro di tesi l'apice, $'in'$ in questo caso, indica il riferimento in cui sono espresse le componenti di un dato vettore, definendone quindi l'*immagine*.

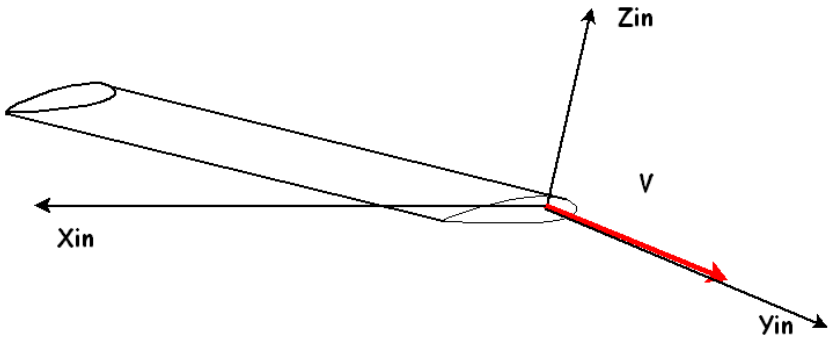


Figura 2.5: *Riferimento Inerziale*

Il Riferimento ala-indeformata (AI) $\{O, X_{ai}, Y_{ai}, Z_{ai}\}$ si ottiene dal primo attraverso due rotazioni: la prima attorno all'asse Y_{in} dell' angolo di Diedro Δ; la seconda attorno all'asse X, definito a valle della prima rotazione, dell'angolo i_r, che rappresenta l'incidenza alla radice dell'ala e che tiene in conto sia del calettamento strutturale con cui l'ala è incastrata alla fusoliera, che l'assetto della fosoliera stessa[15].

$$\mathbf{R}_{in-ai} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos i_r & \sin i_r \\ 0 & -\sin i_r & \cos i_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\Delta & 0 & \sin\Delta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\Delta & 0 & \cos\Delta \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

In questa terna di riferimento sono definiti gli spostamenti elastici di ogni sezione per l'ala, sia essa descritta da un solo corpo elastico, **modello base**, sia da più corpi[16], **modello avanzato**:

$$\mathbf{s}_w = \begin{Bmatrix} u_w \\ v_w \\ w_w \end{Bmatrix} \tag{2.3}$$

si noti che nel caso si usi il quest'ultimo per descrivere l'ala, a ciascun corpo considerato in cui essa venga suddivisa corrisponde un diverso riferimento **AI**, differente non nell'orientamento degli assi, bensì nell'origine nei diversi centri elastici alla radice.

[15] Ovvero $i_r = i_{rst} - \alpha_{Fus}$
[16] TT,FW,MW,

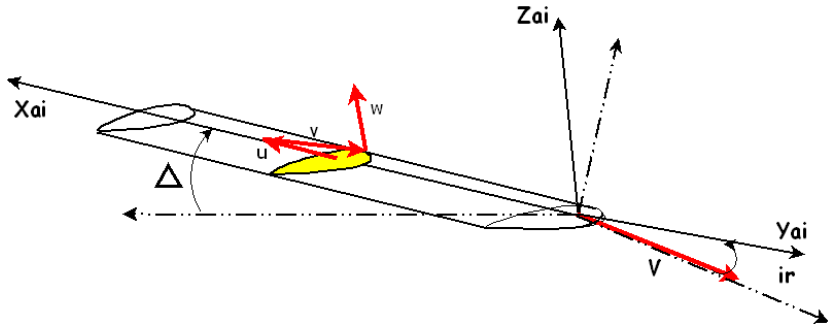


Figura 2.6: *Riferimento ala-indeformata*

Il Riferimento ala-deformata (AD) $\{O', X_{ad}, \eta_w, \zeta_w\}$ è un riferimento *di sezione*, dipendendo dalle deformazioni elastiche del corpo e coincide con gli assi principali della sezione stessa. Ha origine in O', ovvero nel centro elastico, la cui distanza dalla sezione di radice è data dalla coordinata longitudinale x_w; η_w e ζ_w giacciono sulla sezione e ne sono assi principali, mentre X_{ad} è normale alla sezione e forma con i precedenti una terna destra. E' in questa terna che risulta conveniente descrivere gli offset di sezione, nell'ordine aerodinamico $\mathbf{e}^w_{AE}$, di massa $\mathbf{e}^w$ e di figura $\mathbf{e}^w_A$. In base a quanto descritto in prece-

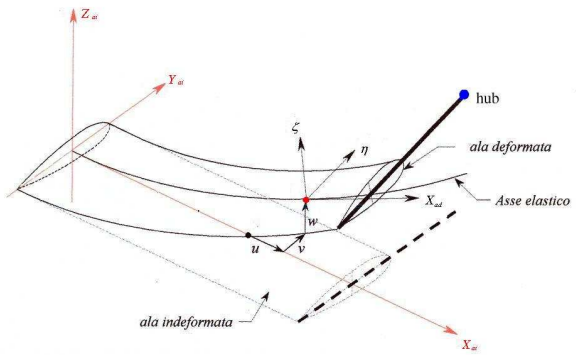


Figura 2.7: *Deformazione dell'ala*

denza, la matrice di rotazione che porta a questo riferimento dal precedente è univocamente identificata o meno a seconda che l'ala venga descritta da un singolo corpo elastico, quindi col **modello base**, o con più corpi, **TT, FW** e **MW** come nel **modello avanzato**, ovvero esiste un **Riferimento deformato**

per ciascun corpo deformabile componente la struttura alare. Genericamente comunque, tale matrice di rotazione è definita nel Rif.[4] e tiene conto di tre rotazioni dovute sia alle deformazioni angolari v'_w, w'_w e ϕ_w che alla eventuale variazione di incidenza Δi_r presente nelle configurazioni tiltwing:

$$\mathbf{R}_{ai-ad} = \begin{bmatrix} \cos\bar{\beta}^w \cos\bar{\zeta}^w & \cos\bar{\beta}^w \sin\bar{\zeta}^w & \sin\bar{\beta}^w \\ -\sin\bar{\theta}^w \sin\bar{\beta}^w \cos\bar{\zeta}^w - \cos\bar{\theta}^w \sin\bar{\theta}^w & \cos\bar{\theta}^w \cos\bar{\zeta}^w - \sin\bar{\zeta}^w \sin\bar{\beta}^w \sin\bar{\theta}^w & \cos\bar{\beta}^w \sin\bar{\theta}^w \\ -\cos\bar{\theta}^w \sin\bar{\beta}^w \cos\bar{\zeta}^w + \sin\bar{\theta}^w \sin\bar{\zeta}^w & -\sin\bar{\theta}^w \cos\bar{\zeta}^w - \sin\bar{\zeta}^w \sin\bar{\beta}^w \cos\bar{\theta}^w & \cos\bar{\beta}^w \cos\bar{\theta}^w \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Nella 2.4 si è lasciata la rappresentazione del tutto generica della matrice attraverso gli *angoli di Eulero*, per l'ala definiti nell'ordine come segue:

$$\begin{cases} \bar{\zeta}^w = \arcsin w'_w \\ \bar{\beta}^w = \arcsin \dfrac{v'_w}{\sqrt{1 - w'^2_w}} \\ \bar{\theta}^w = \Theta_\Delta + \hat{\phi}_w \end{cases} \tag{2.5}$$

Con $\square'$ si indica la derivata di $\square$ rispetto ad x_w.
L'angolo $\hat{\phi}$ è dato da

$$\hat{\phi}_w = \phi_w - \int_0^x v''_w w'_w dx \tag{2.6}$$

e rappresenta la variazione di calettamento geometrico della sezione, dovuta alla rotazione di torsione più un termine di ordine due dovuto alla variazione di orientamento dell'asse elastico, come da Rif.[4]. Definiamo poi l'angolo Θ_Δ come

$$\Theta_\Delta = \Delta i_r. \tag{2.7}$$

Diversamente dal Rif.[4], quindi, associamo alle rotazioni anche quella eventuale dovuta al cambiamento di incidenza di alcune sezioni.

Il Riferimento Pilone (PIL) $\{H, X_{Pil}, Y_{Pil}, Z_{Pil}\}$ ha origine nel centro di rotazione dell'hub H la cui distanza dal PVP della Wing-Tip è definita dal vettore $\mathbf{h_P}$. Si ottiene dal precedente effettuando una rotazione attorno all'asse $X_{ad} \equiv X_{Pil}$ pari all'angolo α_{sh}, precedentemente definito.

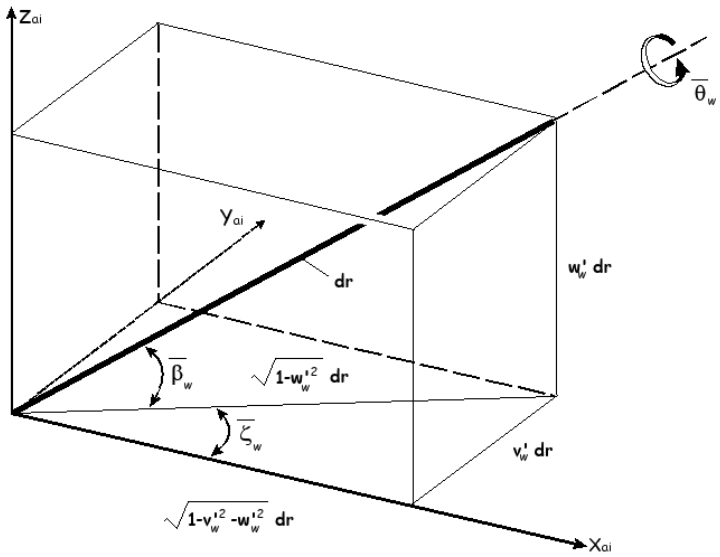


Figura 2.8: *Angoli di Eulero per l'ala*

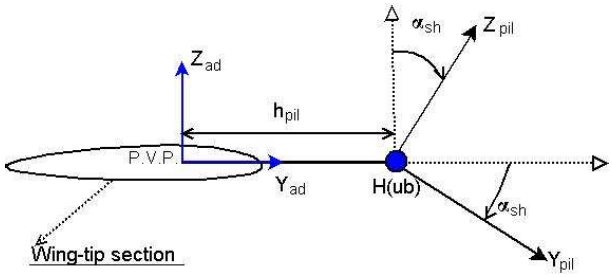


Figura 2.9: *Riferimento pilone*

Questa trasformazione si ottiene mediante la matrice:

$$\mathbf{R}_{ad-Pil} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha_{sh} & -\sin\alpha_{sh} \\ 0 & \sin\alpha_{sh} & \cos\alpha_{sh} \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

essendo α_{sh} l'angolo di shaft che è già definito.

Il Riferimento Hub-non-rotante (HNR) $\{H, X_{hnr}, Y_{hnr}, Z_{hnr}\}$ è centrato al centro del mozzo. Si distingue dal precedente per il fatto di portare gli assi in una posizione conforme a consuetudini elicotteristiche per cui, pensando ad esempio alla condizione di hover nel tiltrotor, l'asse X_{hnr} punta verso la coda del velivolo, l'asse Z_{hnr} è quello della velocità angolare Ω, e quindi Y_{hnr}, essendo una terna destra, punta nel verso di apertura della semiala destra. La matrice di rotazione che effettua questo cambiamento di assi rispetto al riferimento *pilone* è:

$$\mathbf{R}_{Pil-hnr} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

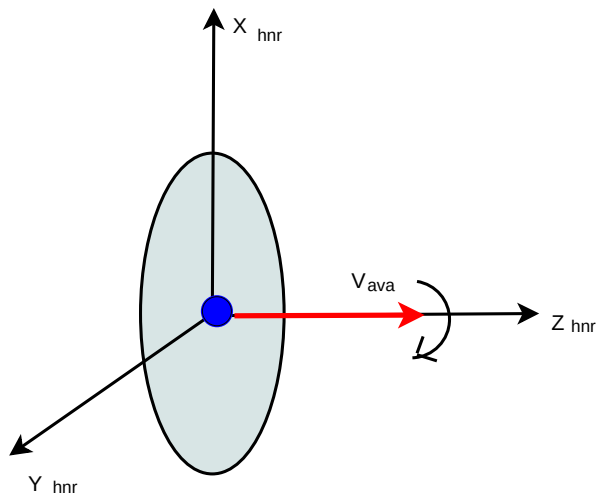


Figura 2.10: *Riferimento hub non rotante: vista in cruise-flight*

Il Riferimento Hub-rotante (HR) $\{H, X_{hr}, Y_{hr}, Z_{hr}\}$ è quello che scandisce la posizione delle pale durante un giro rispetto al riferimento **NRH**. In particolare individua la posizione della prima

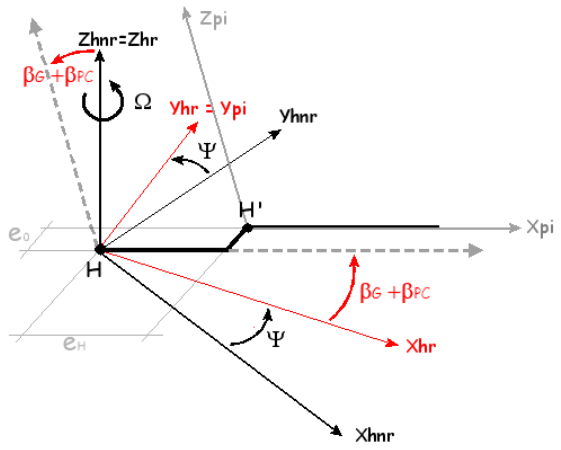


Figura 2.11: *Riferimenti rotanti pala*

pala, denominata di riferimento, cui corrisponde in termini angolari l'*angolo azimuthale* ψ. Per quanto concerne le pale successive (o antecedenti) esse sono individuate dall'angolo $\psi_i = \psi \pm \frac{(i-1)2\pi}{N_{blade}}$. La matrice di rotazione azimuthale è:

$$\mathbf{R}_{hnr-hr} = \begin{bmatrix} \cos\Psi & \sin\Psi & 0 \\ -\sin\Psi & \cos\Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Il Riferimento pala-indeformata (PI) $\{H', X_{pi}, Y_{pi}, Z_{pi}\}$ tiene conto dell'angolo di *precone* e di quello di *gimbal* ruotando il precedente attorno all'asse Y_{hr} dell'angolo $\beta_{pc} + \beta_G$. In presenza di *hinge-offset* e *torque-offset*, l'origine degli assi **PI** si distingue da quella di **HR** passando da H, il centro del mozzo, ad H', sulla cerinera di flap/lag, come da figura 2.11. L'asse X_{pi} va dunque a coincidere con l'asse di feathering della pala, mentre la velocità di rotazione Ω si proietta sia sull'asse Z_{pi} che su X_{pi}, determinando un' importante accoppiamento tra moti di lag e di flap. La matrice di rotazione tra i riferimenti **HR** e **PI** è:

$$\mathbf{R}_{hr-pi} = \begin{bmatrix} \cos(\beta_{pc} + \beta_G) & 0 & \sin(\beta_{pc} + \beta_G) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\beta_{pc} + \beta_G) & 0 & \cos(\beta_{pc} + \beta_G) \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

Riferimento Pala indeformata di Sezione (PIS) $\{O'', X_{pis}, Y_{pis}, Zpis\}$ E' stata già evidenziata la necessità di modellare configurazioni

rotoriche in cui l'ottimizzazione di prestazioni aerodinamiche e acustiche richiede geometrie più complesse. In queste configurazioni, ricercate nel progetto di Tiltrotor di prossima generazione, la pala può risultare estremamente varia in tutte le caratteristiche aero-strutturali: sopratutto l'asse elastico risulta moderatamente curvo. Il modello qui presentato, pur mantenendo il nucleo della modellazione strutturale dei Rif. [7] e [4], tiene in conto gli effetti di curvatura, in particolare nella descrizione cinematica della pala, che ne influenza inerzia ed aerodinamica. In quest'ottica si è resa necessaria una maggiore complicazione del modello, che ha portato a ulteriori sistemi di riferimento rispetto a quelli utilizzati implicitamente in [7] e [4]. Il *sitema di riferimento pala indeformata*

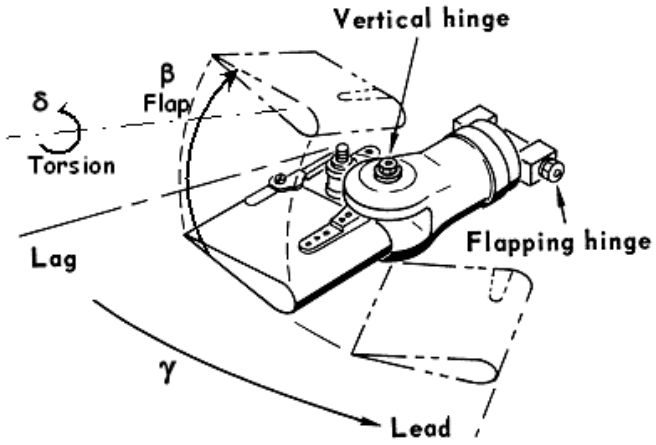


Figura 2.12: *Modi Rigidi in un rotore completamente articolato*

di sezione tiene in conto sia la presenza di un asse elastico non rettilineo e quindi della pre-deformazione geometrica, sia di alcuni effetti della sua presenza in termini di modellazione, primo tra tutti la necessità di dover separare i gradi di libertà elastici, definiti sezione per sezione, da quelli rigidi, omogenei sulla pala essendo angoli definiti a partire dalle cerniere. Il riferimento **PIS** ha origine sul centro elastico di sezione O", il passaggio dal riferimento precedente avviene mediante due matrici di rotazione: nella prima si tiene conto delle deflessioni angolari legate ad atti di moto rigido attorno alle cerniere, nella seconda si includono gli effetti legati alla curvatura dell'asse elastico. Per quanto concerne la prima si ha:

la rotazione attorno al feaethering-axis legata ai comandi, definita da

$$\theta_{com}(t) = \theta_{coll} + \theta_{1c}\cos\psi + \theta_{1s}\sin\psi \tag{2.12}$$

dove si indica con θ_{coll} il comando collettivo, con θ_{1c} il comando ciclico longitudinale, e con θ_{1s} il ciclico laterale;

le rotazioni attorno ad eventuali cerniere, nell'ordine di lag, flap e torsione, definite dagli angoli:

$$\begin{cases} \delta & \text{Torsione} \\ \beta & \text{Flappeggio} \\ \gamma & \text{Lead-lag} \end{cases} \tag{2.13}$$

La matrice che ne deriva è definita:

$$\mathbf{R}_{\theta_{com}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta_{com}+\delta) & \sin(\theta_{com}+\delta) \\ 0 & -\sin(\theta_{com}+\delta) & \cos(\theta_{com}+\delta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\gamma & \sin\gamma & 0 \\ -\sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La seconda serie di rotazioni è legata all'inclinazione dell'asse elastico rispetto a quello di feathering. Vengono a tal fine introdotti gli spostamenti che, sezione per sezione, definiscono la deviazione tra i due assi: v_{geom} e w_{geom}, cui corrispondono gli angoli tra i due, che compongono la rotazione:

$$v'_{geom} = \frac{\partial v_{geom}}{\partial x_{pi}} \quad ; \quad w'_{geom} = \frac{\partial w_{geom}}{\partial x_{pi}} \frac{1}{\sqrt{1 + v'^2_{geom}}} \tag{2.14}$$

Ne deriva una matrice di rotazione così composta:

$$\mathbf{R}_{geom} = \begin{bmatrix} \cos w'_{geom} & 0 & \sin w'_{geom} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin w'_{geom} & 0 & \cos w'_{geom} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos v'_{geom} & \sin v'_{geom} & 0 \\ -\sin v'_{geom} & \cos v'_{geom} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Il passaggio al riferimento **PIS** da quello **PI** si ottiene dunque attuando in sequenza le due serie di rotazioni prima descritte, ovvero:

$$\mathbf{R}_{pi-pis} = \mathbf{R}_{geom}\mathbf{R}_{\theta_{com}} \tag{2.15}$$

Appare chiaro ora che essendo v_{geom} e w_{geom} variabili lungo l'apertura, quando si è in presenza di un asse elastico non

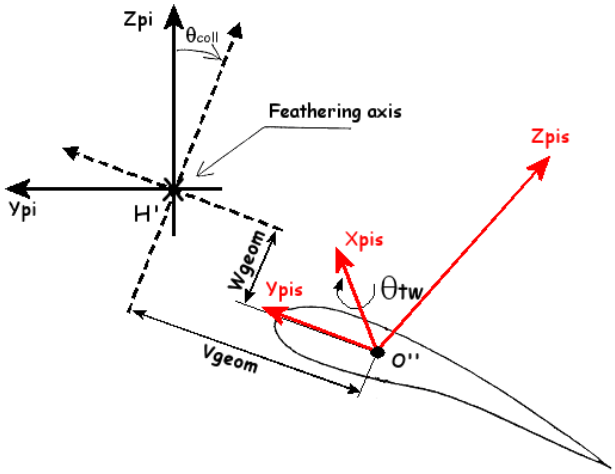


Figura 2.13: *Riferimento pala indeformata di sezione: vista da tip della pala assumendo nulli gli spostamenti rigidi ed elastici*

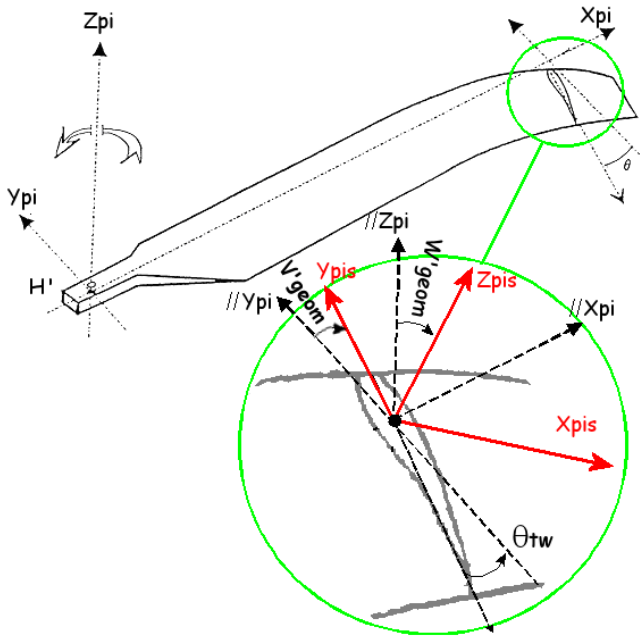


Figura 2.14: *Riferimento pala indeformata di sezione*

rettilineo il riferimento **PIS** è definito come un riferimento locale, ergo di sezione.
Questa caratteristica porta ad una differenza sostanziale del presente modello rispetto a quello originale, sviluppato a partire da [7] e [4], riguardo la definizione degli spostamenti, che qui si ritiene opportuno rimarcare.

$$\mathbf{s}_b = \begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \end{Bmatrix} \tag{2.16}$$

Nel modello originale infatti, gli spostamenti definiti nel modello strutturale venivano dati nel riferimento **PI**, ovvero nell'ultimo sistema di riferimento a monte di quello descrivente la deformazione della pala. In questo modo essi si mantenevano univocamente definiti, in termini di direzione, su tutte le diverse sezioni. Nel modello presentato si è scelto ancora di descrivere gli spostamanti elastici nell'ultimo sistema a monte della deformazione, onde mantenere le equazioni il più conformi possibile alle originali, (per lo meno fin quando non si esplicitino i termini inerziali ed aerodinamici che non potranno essere uguali, vista la curvatura dell'asse elastico) ammettendo però in questo modo di definire degli spostamenti direzionati diversamente sezione per sezione.
Questo non toglie nulla alla bontà del modello, che è *ab origine* inteso per descrivere equilibri locali di sezione, ma comporta delle opportune accortezze, qualora si necessiti ad esempio di conoscere, per una data sezione, gli spostamenti elastici in direzioni notevoli quali ad esempio quelle *fuori* e *nel piano di rotazione*, o quando si abbia necessità di individuare la caratterizzazione di un *autovettore* nel corso di un'analisi di dinamica strutturale.

Il Riferimento pala-deformata (PD) $\{O'', X_{pd}, \eta_b, \zeta_b\}$ è finalmente l'ultimo da descrivere. E' un riferimento di sezione che coincide, nella configurazione deformata, con gli assi principali della stessa: η_b è l'asse della corda c^b, X_{pd} è normale alla sezione e passa per O" che ne è centro elastico. L'asse ζ_b costituisce con gli altri una terna destra.

Come per l'ala è in questa terna che risulta conveniente descrivere gli offset di sezione, nell'ordine aerodinamico $\mathbf{e}^b_{AE}$, di

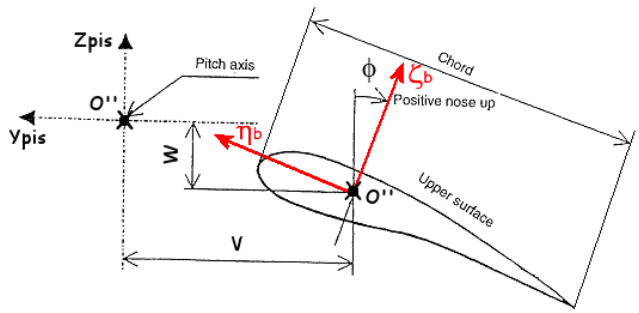


Figura 2.15: *Riferimento pala deformata di sezione: vista dal tip della pala*

massa $\mathbf{e}^b$ e di figura $\mathbf{e}^b_A$.
Per ogni sezione, di ascissa longitudinale x_b, si passa a questo riferimento dal precedente grazie alla matrice di rotazione sviluppata nel Rif.[4], che in analogia a quanto fatto con l'ala qui esprimeremo in funzione dei generici *angoli di Eulero*.

$$\mathbf{R}_{pi-pd} = \begin{bmatrix} \cos\bar{\beta}^b \cos\bar{\zeta}^b & \cos\bar{\beta}^b \sin\bar{\zeta}^b & \sin\bar{\beta}^b \\ \begin{matrix} -\sin\bar{\theta}^b \sin\bar{\beta}^b \cos\bar{\zeta}^b \\ -\cos\bar{\theta}^b \sin\bar{\theta}^b \end{matrix} & \begin{matrix} \cos\bar{\theta}^b \cos\bar{\zeta}^b \\ -\sin\bar{\zeta}^b \sin\bar{\beta}^b \sin\bar{\theta}^b \end{matrix} & \cos\bar{\beta}^b \sin\bar{\theta}^b \\ \begin{matrix} -\cos\bar{\theta}^b \sin\bar{\beta}^b \cos\bar{\zeta}^b \\ \sin\bar{\theta}^b \sin\bar{\zeta}^b \end{matrix} & \begin{matrix} -\sin\bar{\theta}^b \cos\bar{\zeta}^b \\ -\sin\bar{\zeta}^b \sin\bar{\beta}^b \cos\bar{\theta}^b \end{matrix} & \cos\bar{\beta}^b \cos\bar{\theta}^b \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

Le tre rotazioni sono dovute alle deformazioni angolari della pala w'_b, v'_b e, sull'asse X_{pd}, alla somma del termine elastico $\hat{\phi}$, che ha significato analogo a quello per l'ala nella Eq.2.6, e del termine θ_{tw} di svergolamento costruttivo. Il legame con gli angoli di Eulero è il seguente:

$$\begin{cases} \bar{\zeta}^b = \arcsin w'_b \\ \bar{\beta}^b = \arcsin \dfrac{v'_b}{\sqrt{1 - w'^2_b}} \\ \bar{\theta}^b = \theta_{tw} + \hat{\phi}_b = \theta_{tw} + \phi_b - \displaystyle\int_0^{x_b} v''_b w'_b \, dx \end{cases} \tag{2.18}$$

Si noti ora come, in presenza di asse elastico curvo, per quanto descritto in precedenza, non sia possibile sommare sullo stesso asse X_{pd} gli angoli relativi allo svergolamento, ai co-

mandi, alla deformazione torsionale rigida e a quella elastica, mentre, nel caso opposto, si. Questo accadeva di fatto nel modello originale, dove l'unica approssimazione era confondere il comando applicato all' asse X_{pd} anzichè al X_{pi}, il che comportava un'approssimazione agli ordini superiori del tutto accettabile. Risulta infine che, trascurando la deformazione, gli unici angoli presenti tra gli assi principali di sezione e quelli di **PI** sono nell'ordine θ_{com}, v'_{geom}, w'_{geom} e θ_{tw}, che si riducono alla somma $\theta_{com} + \theta_{tw}$ nelle configurazioni classiche ad asse elastico rettilineo.

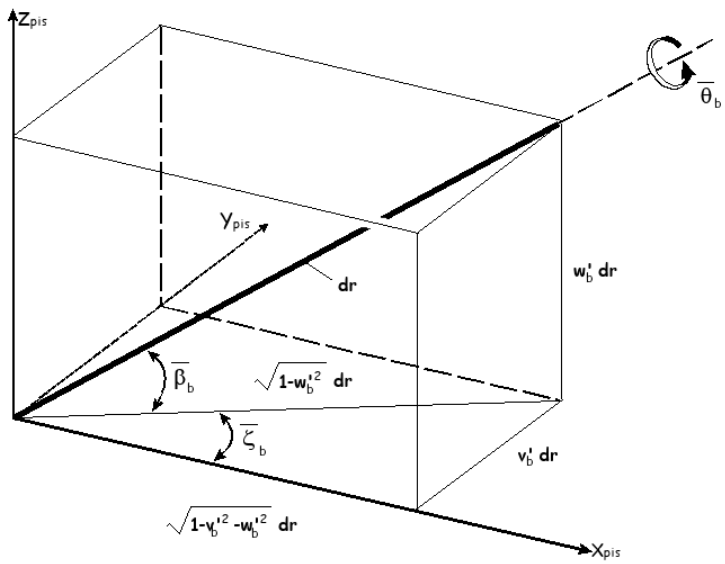


Figura 2.16: *Angoli di Eulero per la pala*

2.2.2 Equazioni dell'equilibrio per una trave elastica: metodo Newtoniano

Le equazioni dell'equilibrio elastico vengono qui ottenute considerando l'uguaglianza tra le forze esterne distribuite, nel nostro caso aerodinamiche ed inerziali, e le coazioni interne legate alle deformazioni elastiche su un tratto infinitesimo di pala/ala in condizioni deformate[17].

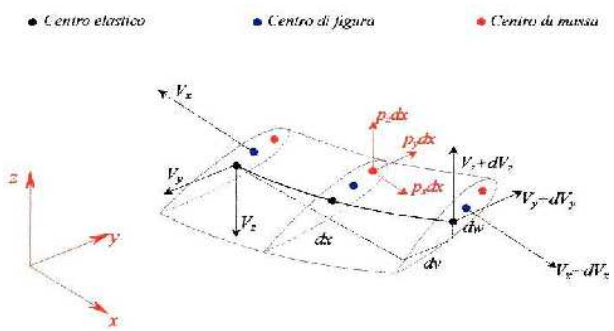


Figura 2.17: *Equilibrio di forze su un tratto infinitesimo di trave*

La figura 2.17 mostra un concio in equilibrio, definisce al contempo le direzioni prese positive, e porta alle seguente relazione invariante:

$$\left(\mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} dx\right) - \mathbf{V} + \mathbf{p} dx = 0 \tag{2.19}$$

essendo **V** il vettore delle forze interne e **p** quello delle forze esterne di sezione. Per i momenti egualmente si ha, dalla figura 2.18:

$$\left(\mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial x}\right) - \mathbf{M} + dx\mathbf{i}' \times \left(\mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x} dx\right) + \mathbf{q} dx = 0 \tag{2.20}$$

che definisce l'equilibrio alla rotazione, essendo **M** il momento di coazione interna e **q** il momento esterno distribuito, inerziale ed aerodinamico nel problema aeroelastico in esame. Le due relazioni vettoriali espresse dalle Eq.2.19 e 2.20 vengono proiettate, a seconda si tratti di ala o pala, nei riferimenti **AI/PIS** ottenendo le

[17]Da qui compaiono giá delle non linearitá.

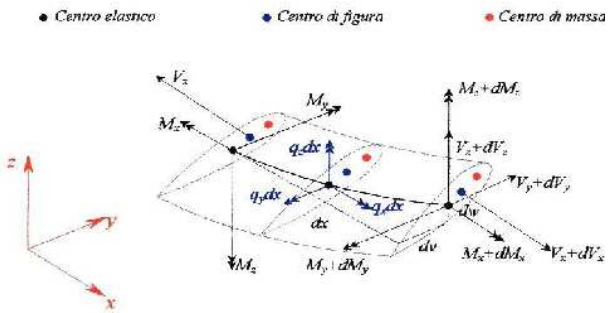


Figura 2.18: *Equilibrio dei momenti su un tratto infinitesimo di trave*

seguenti sei equazioni scalari :

$$\begin{cases} V_x' + p_x = 0 \\ V_y' + p_y = 0 \\ V_z' + p_z = 0 \\ M_x' + V_z v' - V_y w' + q_x = 0 \\ M_y' - V_z + V_x w' + q_y = 0 \\ M_z' + V_y - V_x v' + q_z = 0 \end{cases} \tag{2.21}$$

dove con $\square'$ si indica $\partial\square/\partial x$ per compattezza.

Il sistema di equazioni viene poi ridotto con i seguenti passi:

- Dalla quinta e dalla sesta delle 2.21 si ottengono i tagli V_y *e* V_z da sostituire nella quarta.
- Si derivano in x le stesse equazioni inserendovi stavolta le espressioni dei tagli date dalla seconda e dalla terza.
- Si eliminano tutti i termini di ordine superiore ottenuti.

É cosí possibile ottenere un set di sole quattro equazioni, dato da:

$$\begin{cases} V_x' + p_x = 0 \\ M_x' + M_y' v' + M_z' w' + q_x + q_y v' + q_z w' = 0 \\ M_y'' + (V_x w')' + q_y' + p_z = 0 \\ M_z'' - (V_x v')' + q_z' - p_y = 0 \end{cases} \tag{2.22}$$

Le equazioni della dinamica strutturale per l'ala, cosí come per la pala, descritte nelle Eq.2.22 vengono poi completate inserendo:

- Le relazioni strutturali tra sforzi e deformazioni che, *ridotte*, ovvero integrate sulla sezione, definiscono le forze interne.

- Le espressioni dei carichi esterni aerodinamici.

- Le espressioni dei carichi inerziali.

Il primo punto di cui sopra viene completato qui di seguito valendo un modello comune per ala e pala. Per quanto concerne il secondo e terzo punto, si fa riferimento ai paragrafi successivi.

2.2.3 Relazioni costitutive

Le relazioni costitutive usate nel presente lavoro di tesi sono quelle descritte dai Rif. [4] e [7]. Esse sono naturalmente definite nei sistemi di riferimento **ala/pala deformata**. Dalla teoria dell'elasticitá lineare per le travi snelle, le relazioni sforzo-deformazione sono date dalle seguenti:

$$\begin{cases} \sigma_{\eta\eta} = \sigma_{\zeta\zeta} = \tau_{\eta\zeta} = 0 \\ \sigma_{xx} = E\epsilon_{xx} \\ \tau_{x\eta} = G\gamma_{x\eta} \\ \tau_{x\zeta} = G\gamma_{x\zeta} \end{cases} \tag{2.23}$$

La prima relazione tra le Eq.2.23 esprime l'uniassialitá degli sforzi, mentre nelle rimanenti tre equazioni non é resa esplicita l' indeformabilitá a taglio che é propria del modello di trave, e che porta a scrivere:

$$\begin{cases} \gamma_{x\eta} = 0 \\ \gamma_{x\zeta} = 0 \end{cases} \tag{2.24}$$

Stanti queste condizioni, gli unici gradi di libertá di un punto generico dell'asse elastico sono gli spostamenti $u(x,t)$,$v(x,t)$,$w(x,t)$ e $\phi(x,t)$, che assumono il ruolo di variabili lagrangiane del problema aeroelastico in esame. Le quattro Eq.2.22 sono dunque risolvibili in funzione delle suddette incognite.
Le deformazioni elastiche ottenute nei Rif.[4] e [7] vengono qui di seguito aggiunte per completezza a meno dei termini di ingobba-

mento a torsione:

$$\begin{cases} \epsilon_{xx} = u' + \dfrac{v'^2}{2} + \dfrac{w'^2}{2} + \left(\eta^2 + \zeta^2\right)\left(\theta'\phi' + \dfrac{\phi'^2}{2}\right) \\ \quad - v''\left[\eta\cos\left(\theta+\phi\right) - \zeta\sin\left(\theta+\phi\right)\right] \\ \quad - w''\left[\eta\sin\left(\theta+\phi\right) + \zeta\cos\left(\theta+\phi\right)\right] \\ \epsilon_{x\eta} = -\dfrac{1}{2}\zeta\phi' \\ \epsilon_{x\zeta} = \dfrac{1}{2}\eta\phi' \end{cases} \tag{2.25}$$

Le coazioni interne vengono ottenute riducendo le sollecitazioni puntuali definite dalle sforzi a forze e momenti di sezione da inserire nelle equazioni 2.22. Poiché peró le Eqq. 2.23 e 2.25 sono date nel riferimento deformato, dall' integrazione si ottengono le coazioni in tale terna e poi, mediante un'opportuna proiezione, si riportano nel riferimento indeformato in cui sono scritte le 2.22.
Le coazioni interne nei riferimenti **ala/pala deformata**[18] sono le seguenti:

$$\begin{cases} V_{x'} = \iint\limits_A \sigma_{xx} d\eta d\zeta \\ M_{y'} = \iint\limits_A \zeta\sigma_{xx} d\eta d\zeta \\ M_{z'} = -\iint\limits_A \eta\sigma_{xx} d\eta d\zeta \\ M_{x'} = \iint\limits_A \left(\eta\tau_{x\zeta} - \zeta\tau_{x\eta}\right) d\eta d\zeta + \left(\phi+\theta\right)' \iint\limits_A \sigma_{xx}\left(\eta^2+\zeta^2\right) d\eta d\zeta \end{cases} \tag{2.26}$$

nelle quali il tiro $V_{x'}$ é applicato nel centro di figura, mentre i momenti di sezione $M_{x'}$, $M_{y'}$, $M_{z'}$ sono calcolati con polo nel centro elastico corrispondente. Sostituendo le Eqq.2.25 nelle 2.23, e queste nelle 2.26 si ottengono le seguenti espressioni:

[18] Qui indicato con gli assi x' , y' , z'

$$
\begin{cases}
V_{x'} = EA\Bigg(u' + \dfrac{v'^2}{2} + \dfrac{w'^2}{2} + k_A^2\theta'\phi' \\
\qquad - e_{A,\eta}[v''\cos(\theta+\phi) + w''\sin(\theta+\phi)] \\
\qquad + e_{A,\zeta}[v''\sin(\theta+\phi) - w''\cos(\theta+\phi)]\Bigg) \\
M_{y'} = EI_{y'}\left[v''\sin(\theta+\phi) - w''\cos(\theta+\phi)\right] + EB_3^*(\theta'\phi' + \dfrac{\phi'^2}{2}) \\
\qquad + EAe_{A,\zeta}\left(u' + \dfrac{v'^2}{2} + \dfrac{w'^2}{2}\right) + EI_{y'z'}[-v''\cos(\theta+\phi) - w''\sin(\theta+\phi)] \\
M_{z'} = EI_{z'}\left[v''\cos(\theta+\phi) + w''\sin(\theta+\phi)\right] - EB_2^*\theta'\phi' \\
\qquad - EAe_{A,\eta}\left(u' + \dfrac{v'^2}{2} + \dfrac{w'^2}{2}\right) - EI_{y'z'}[v''\sin(\theta+\phi) - w''\cos(\theta+\phi)] \\
M_{x'} = JG\phi' + EAk_A^2(\theta+\phi)'\left(u' + \dfrac{v'^2}{2} + \dfrac{w'^2}{2}\right) + EB_1^*\theta'^2\phi' \\
\qquad - EB_2^*\theta'\left[v''\cos\theta + w''\sin\theta\right]
\end{cases}
\tag{2.27}
$$

definendo gli integrali notevoli

$$
\begin{cases}
A = \iint\limits_A d\eta d\zeta \\
Ae_{A,\eta} = \iint\limits_A \eta d\eta d\zeta \quad Ae_{A,\zeta} = \iint\limits_A \zeta d\eta d\zeta \\
I_{y'} = \iint\limits_A \zeta^2 d\eta d\zeta \quad I_{z'} = \iint\limits_A \eta^2 d\eta d\zeta \quad I_{y'z'} = \iint\limits_A \eta\zeta d\eta d\zeta \\
Ak_A^2 = \iint\limits_A \left(\eta^2+\zeta^2\right) d\eta d\zeta \quad J = \iint\limits_A \left(\hat{\eta}^2+\hat{\zeta}^2\right) d\eta d\zeta \\
B_1^* = \iint\limits_A \left(\eta^2+\zeta^2\right)^2 d\eta d\zeta \quad B_2^* = \iint\limits_A \eta\left(\eta^2+\zeta^2\right) d\eta d\zeta \\
B_3^* = \iint\limits_A \zeta\left(\eta^2+\zeta^2\right) d\eta d\zeta
\end{cases}
\tag{2.28}
$$

Si noti come, rispetto ai Rif.[7] e [4], la sezione non è più supposta simmetrica attorno all'asse η, motivo per il quale comapiono sia la componente lungo ζ del *tensile offset*, $e_{A,\zeta}$, che il termine di

rigidezza mista $EI_{y'z'}$ assieme all'integrale notevole di accoppiamento flesso torsionale qui definito B_3^*. In particolar modo però si vuole far notare come la non simmetria della sezione sia condizione sufficiente per l'esistenza di $e_{A,\zeta}$, ma non di $EI_{y'z'}$: quest'ultimo termine infatti risulta comunque nullo ponendosi in una *terna centrale di figura*, come usualmente accade. Si ricordano poi i significati di A, l'area di sezione e di $Ak_A^2 \equiv J$ in assenza di ingobbamento. Come abbiamo preannunciato le Eqq. 2.27 devono essere opportunamente riportate nei riferimenti **AI/PIS** mediante la matrice $\mathbf{R}_{pis-pd}$, ovvero:

$$\mathbf{V}^{pis} = \mathbf{R}_{pis-pd}^{-1}\mathbf{V}^{pd}$$

$$\mathbf{M}^{pis} = \mathbf{R}_{pis-pd}^{-1}\mathbf{M}^{pd}$$

ottenendo:

$$
\begin{cases}
V_x \approx V_{x'} = EA\Bigg(u' + \dfrac{v'^2}{2} + \dfrac{w'^2}{2} + k_A^2\theta'\phi' \\
\qquad - e_{A,\eta}[v''\cos(\theta+\phi) + w''\sin(\theta+\phi)] \\
\qquad + e_{A,\zeta}[v''\sin(\theta+\phi) - w''\cos(\theta+\phi)]\Bigg) \\
\\
M_x \approx M_{x'} = JG\phi' + EAk_A^2(\theta+\phi)'\left(u' + \dfrac{v'^2}{2} + \dfrac{w'^2}{2}\right) \\
\qquad + EB_1^*\theta'^2\phi' - EB_2^*\theta'[v''\cos\theta \ + w''\sin\theta] \\
\\
M_y = -\left[EI_{y'}\cos^2(\theta+\phi) + EI_{z'}\sin^2(\theta+\phi)\right]w'' \\
\qquad - (EI_{z'} - EI_{y'})\sin(\theta+\phi)\cos(\theta+\phi)v'' \\
\qquad + EA\left(u' + \dfrac{v'^2}{2} + \dfrac{w'^2}{2}\right)(e_{A,\eta}\sin(\theta+\phi) + e_{A\zeta}\cos(\theta+\phi)) \\
\qquad + \left[EI_{y'z'}(\sin^2(\theta+\phi) - \cos^2(\theta+\phi))\right]v'' \\
\qquad - EI_{y'z'}\sin 2(\theta+\phi)w'' \\
\\
M_z = \left[EI_{y'}\sin^2(\theta+\phi) + EI_{z'}\cos^2(\theta+\phi)\right]v'' \\
\qquad + (EI_{z'} - EI_{y'})\sin(\theta+\phi)\cos(\theta+\phi)w'' \\
\qquad - EA\left(u' + \dfrac{v'^2}{2} + \dfrac{w'^2}{2}\right)(e_{A,\eta}\cos(\theta+\phi) - e_{A,\zeta}\sin(\theta+\phi)) \\
\qquad - EI_{y'z'}[(\sin^2(\theta+\phi) - \cos^2(\theta+\phi)^2)w'' + \sin 2(\theta+\phi)v'']
\end{cases}
\tag{2.29}
$$

Le Eqq.2.29 sono le espressioni da inserire nelle equazioni di equilibrio 2.22. Su di esse si debbono fare delle necessarie osservazioni:

- le espressioni dei momenti flettenti mostrano chiaramente che, a fronte della torsione e dell'angolo θ, una trave che sia anche biflessa vede un accoppiamento tra le due deflessioni sia nel che fuori dal piano di rotazione; parte di questo accoppiamento puó essere eliminata su travi con sezioni ad eguali rigidezze $EI_{y'} = EI_{z'}$;

- il tensile-offset e_A, implica la partecipazione della coazione dovuta al tiro, V_x, ai momenti di flessione M_y ed M_z rispetto all'asse elastico;

- il momento torcente M_x presenta oltre al termine classico legato alla rigidezza JG, il termine con coefficiente EAk_A^2. Esso rappresenta ció che in lettertura é definito *effetto caramella*, legato al fatto che gli sforzi σ_{xx} sono applicati a fibre avvolte elicoidalmente attorno all' asse elastico a causa dello svergolamento. Tali fibre si proiettano quindi sulla sezione stessa, generando un contributo torcente. Sono presenti inoltre i termini in EB_1^* , EB_2^* ed EB_3^* che, seppure di ordini superiori, e quindi trascurabili di qui in seguito, divengono importanti qualora si considerino configurazioni a bassa rigidezza e con ampi angoli di torsione.

2.2.4 Ordering-scheme

Con l'espressione ordering-scheme si intende la definizione di un ordine di grandezza per tutte le variabili che definiscono nelle Eqq.2.22: le coazioni interne, i carichi inerziali e quelli aerodinamici. In un processo di modellazione, di norma, esso è propedeutico ad individuare i contributi più importanti per la descrizione del sistema; la scelta può però non essere scontata, dovendosi, ad esempio, porre molta attenzione affinché i termini ritenuti nell'analisi siano in grado di fornire operatori strutturali ed inerziali autoaggiunti[19].
Fin dal principio di questo lavoro di ricerca ci si è resi conto che il numero di termini che sarebbe derivato dall'esplicitazione della dipendenza cinematica ala-rotore sarebbe risultato di fatto ingestibile, per questo è stato deciso di calcolare le componenti aerodinamiche ed inerziali mediante le definizioni esatte di velocità ed accelerazione di sezione cui sono collegati dai modelli 2D, che sono successivamente illustrati. Velocità ed accelerazioni sono ottenuti partendo da espressioni vettoriali complete e proiettate poi negli opportuni sistemi di riferimento, senza esplicitarne la dipendenza dalle variabili lagrangiane del problema e rendendo così inutile la definizione di un ordine di grandezza. Grande attenzione è stata

[19]Questi operatori nelle equazioni modali che si ottengono, determinano matrici di massa e di rigidezza simmetriche e una matrice giroscopica antisimmetrica.

dunque data alla modellazione della cinematica che collega i diversi elementi del sistema, ala, hub e pale ed alla sua implementazione, affinchè risultasse semplice da interpretare e facilmente espandibile con ulteriori elementi della catena di corpi in gioco. Un *ordering-scheme* invece permane per quanto concerne i termini strutturali, e quindi le espressioni delle coazioni interne definite al second'ordine dalle 2.29. Differenziando i casi di ala e pala, gli ordini di grandezza sono sintetizzati nelle seguenti tabelle,

per l'ala:

$\frac{u_w}{L_w} = o(\varepsilon)^2$	$\frac{t_w}{L_w} = o(\varepsilon)$
$\frac{v_w}{L_w}, \frac{w_w}{L_w} = o(\varepsilon)$	$\Delta = o(\varepsilon)$
$\phi_w = o(\varepsilon)$	$\Theta = o(1)$
$\frac{x_w}{L_w} = o(1)$	
$\frac{\eta_w}{L_w} = o(\varepsilon)$	$\frac{K_{Aw}}{L_w}, \frac{K_{1w}}{L_w}, \frac{K_{2w}}{L_w}, \frac{K_w}{L_w} = o(\varepsilon)$
$\frac{\zeta_w}{L_w} = o(\varepsilon)$	$\frac{c^w}{L_w} = o(\varepsilon)$
$\frac{e_A^w}{L_w} = \frac{e_{AE}^w}{L_w} = \frac{e^w}{L_w} = o(\epsilon)^2$	$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx} = o(1)$

per la pala:

$\frac{u_b}{R} = o(\varepsilon)^2$	$\frac{t_b}{R} = o(\varepsilon)$
$\frac{v_b}{R}, \frac{w_b}{R} = o(\varepsilon)$	$\beta_{pc}\ ,\ \beta_G = o(\varepsilon)$
$\phi_b = o(\varepsilon)$	$\theta = o(1)$
$\frac{x_b}{R} = o(1)$	
$\frac{\eta_b}{R} = o(\varepsilon)$	$\frac{K_{Ab}}{R}, \frac{K_{1b}}{R}, \frac{K_{2b}}{R}, \frac{K_b}{R} = o(\varepsilon)$
$\frac{\zeta_b}{R} = o(\varepsilon)$	$\frac{c^b}{R} = o(\varepsilon)$
$\frac{e_A^b}{R} = \frac{e^b}{R} = o(\epsilon)^2$	$\frac{d}{dt} = \frac{d}{dx} = o(1)$

2.2.5 Carichi Inerziali

Nelle Eqq.2.22, generalmente valide per ala e pala, i contributi inerziali compaiono come quota parte delle forzanti distribuite. In questo paragrafo essi vengono definiti sia per l'ala, che per la pala, ricordando che per entrambe sono rappresentativi dell'inerzia di una sezione.
Nel riferimento [4] vengono fornite ed esplicitate le seguenti espressioni per i tagli ed i momenti su una sezione di pala; qui vengono aggiunte quelle di ala, formalmente analoghe:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{in} &= -\iint_A \rho_A \mathbf{a}_p dA \\ \mathbf{q}_{in} &= -\iint_A \rho_A \mathbf{r}_{p-ct} \wedge \mathbf{a}_p dA \end{aligned} \tag{2.30}$$

Tagli e momenti di sezione vengono visti come integrali sulla sezione A, essendo ρ_A la densità del materiale, $\mathbf{a}_p$ l'accelerazione di un punto di sezione ed $\mathbf{r}_{p-ct}$ la distanza dello stesso rispetto al polo dei momenti, ergo il centro di taglio.
In modo del tutto analogo, in questa modellazione è risultato conveniente esprimere i contributi inerziali, già proiettati nei riferimenti **AI** per l'ala e **PIS** per la pala come segue:

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{in}^{w-ai} = -m_w \mathbf{a}_{cg}^{w-ai} \\ \mathbf{q}_{in}^{w-ai} = \mathbf{R}_{ai-ad}^{-1}(-(\mathbf{J}_{cg}^{w-ad}\dot{\omega}_{\mathbf{w}}^{\mathbf{ad}} + \omega_{\mathbf{w}}^{\mathbf{ad}} \wedge \mathbf{J}_{cg}^{w-ad}\omega_{\mathbf{w}}^{\mathbf{ad}})) \\ \qquad + (\mathbf{R}_{ai-ad}^{-1}\mathbf{e}^w) \wedge \mathbf{p}_{in}^{w-ai} \end{cases} \tag{2.31}$$

per l'ala, e

$$\begin{cases} \mathbf{p}_{in}^{b-pis} = -m_b \mathbf{a}_{cg}^{b-pis} \\ \mathbf{q}_{in}^{b-pis} = \mathbf{R}_{pis-pd}^{-1}(-(\mathbf{J}_{cg}^{b-pd}\dot{\omega}_{\mathbf{b}}^{\mathbf{pd}} + \omega_{\mathbf{b}}^{\mathbf{pd}} \wedge \mathbf{J}_{cg}^{b-pd}\omega_{\mathbf{b}}^{\mathbf{pd}})) \\ \qquad + (\mathbf{R}_{pis-pd}^{-1}\mathbf{e}^b\wedge)\mathbf{p}_{in}^{b-pis} \end{cases} \tag{2.32}$$

per la pala
Le Eqq. 2.31 e 2.32 rappresentano evidentemente il contributo inerziale nella descrizione della dinamica di una sezione, che, in quanto indeformabile, risulta descrivibile come un corpo rigido sottoposto ad un moto vario legato alla deformazione dell'asse elastico cui appartiene (per le sezioni di pala ovviamente c'è il moto di trascinamento della catena ala-hub-pala).

Concordemente i tagli inerziali risultano esprimibili come prodotto della massa di sezione per l'accelerazione del baricentro, mentre i momenti rispetto al centro di taglio vengono espressi attraverso le note *equazioni di Eulero* date dalla meccanica razionale. Più nel dettaglio rimangono ancora non definiti:

- La matrice di Inerzia di sezione per la pala[20],

$$\mathbf{J}_{cg}^{b-pd} = \begin{pmatrix} m_b k_b^2 & -I_{x\eta_b} & -I_{x\zeta_b} \\ -I_{\eta_b x} & m_b k_{1b}^2 & -I_{\eta_b \zeta_b} \\ -I_{\zeta_b x} & -I_{\zeta_b \eta_b} & m_b k_{2b}^2 \end{pmatrix}$$

- La matrice di inerzia di sezione per l'ala[21]

$$\mathbf{J}_{cg}^{w-ad} = \begin{pmatrix} m_w k_w^2 & -I_{x\eta_w} & -I_{x\zeta_w} \\ -I_{\eta_w x} & m_w k_{1w}^2 & -I_{\eta_w \zeta_w} \\ -I_{\zeta_w x} & -I_{\zeta_w \eta_w} & m_w k_{2w}^2 \end{pmatrix}$$

- Le masse distribuite, ovvero di sezione, per la pala e per l'ala

$$m_b = \iint_{Ab} \rho_{Ab} d\eta_b d\zeta_b \qquad m_w = \iint_{Aw} \rho_{Aw} d\eta_w d\zeta_w$$

I vettori **p** e **q** sono così composti (definendoli nel riferimento **PIS** per la pala e **AI** per l'ala):

$$\mathbf{p}_{in} = \begin{Bmatrix} p_x^{in} \\ p_y^{in} \\ p_z^{in} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{q}_{in} = \begin{Bmatrix} q_x^{in} \\ q_y^{in} \\ q_z^{in} \end{Bmatrix} \tag{2.33}$$

Per la definizione esatta dei vettori velocità ed accelerazione angolare $\omega_\square$ e $\dot{\omega}_\square$, nonché dell'accelerazione del centro di massa $\mathbf{a}_{cg}$ per una sezione si rimanda al paragrafo dedicato.

[20]Volutamente per i termini diagonali è stata lasciata la nomenclatura e la simbologia usate in [7] e [4], dove non sono presenti i prodotti misti.

[21]Si noti che in generale la matrice è diagonale.

2.3 Modelli Aerodinamici

L'estrema versatilità dei Tiltrotor, con cui alternano manovre in *helicopter mode* a voli in *airplane mode*, li espone ad una gamma di ambienti aerodinamici estremamente variegata. Sebbene sia indiscutibile che il volo di crociera in modalità aeroplano è destinato ad occupare la maggior parte della vita operativa, anche le configurazioni da V/STOL devono mantenere il massimo grado di sicurezza e, soprattutto in ambito civile, di comfort ed impatto acustico. Si è già discusso di come la struttura del convertiplano sia evoluta e si evolva inseguendo queste caratteristiche, si vuole ora tracciare un panorama delle principali fenomenologie aerodinamiche con le quali si ha a che fare.
Il tiltrotor, a causa proprio delle molteplici configurazioni che può assumere, interlaccia le aerodinamiche dell'ala e della pala in un insieme di mutue interferenze che complicano entrambe. Se considerati isolatamente, non c'è dubbio che sia il rotore a presentare le maggiori complessità, in quanto potenzialmente sottoposto in *helicopter mode* a tutti i fenomeni che caratterizzano quelli elicotteristici, sia in hover che con avanzamenti molto lenti, o, in generale, in manovra. Tra questi ricordiamo (vedi fig.2.19):

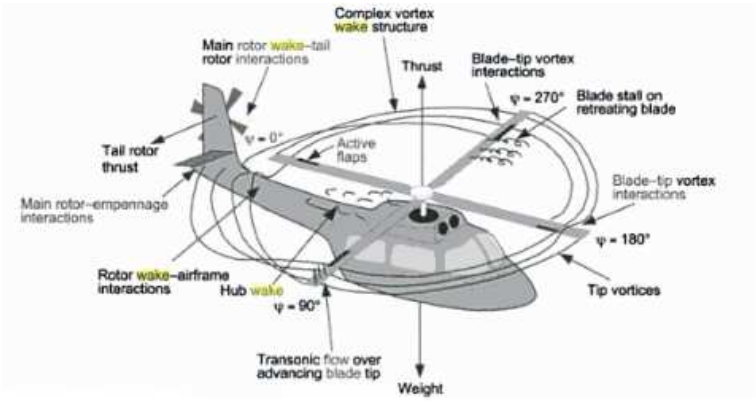


Figura 2.19: *Panoramica del campo aerodinamico su un elicottero* [Leishman, 2000]

- in primo luogo la periodicità dei carichi aerodinamici a causa della proiezione della velocità di avanzamento sul disco rotore e dell'applicazione dei comandi ciclici, può sembrare banale ma è alla base della maggior parte dei fenomeni più complessi.

- La non uniformità della velocità dovuta alla rotazione dalla radice al tip della pala, che comporta variazioni negli angoli di attacco, ergo di portanza, ed è correlata alla generazione di vortici di estremità, aumentando la tridimensionalità del campo aerodinamico.

- L'insorgenza di fenomeni di stallo dinamico dovuti alla modifica delle curve di portanza e resistenza aerodinamiche legata a distacchi fluidi lungo la corda del profilo al variare dell'angolo di attacco[22].

- Presenza di flusso inverso in avanzamento su alcune regioni della pala, in particolare sulle parti interne delle pale retrocedenti, dove la velocità di avanzamento, diretta da bordo d'uscita a bordo d'attacco, sopravanza il piccolo contributo dovuto alla velocità di rotazione.

- L'eventuale insorgenza periodica durante il giro di fenomeni di comprimibilità, con coseguente incremento di carichi e vibrazioni.

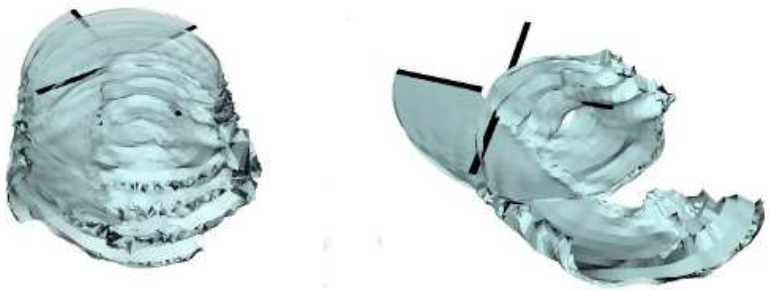


Figura 2.20: *Analisi free-wake da codice 3D su rotore quadripala in discesa: vista da dietro e dettaglio di impatto pala-scia*

Con la premessa di interessarci solamente a condizioni nelle quali non siano previsti stalli, ovvero sia in generale lecito avvalersi di

[22]Questo fenomeno di stallo, non rappresentabile con flussi potenziali, si ritrova anche in altre macchine rotative, quali le turbine eoliche, e risulta ad oggi di difficile modellazione dovuta alla difficoltà di determinazione dei parametri caratteristici al di fuori da campagne sperimentali. [21],[22].

formulazioni potenziali, rivolgiamo poi l'attenzione alla fig.2.20, ottenuta con un solutore BEM 3D[23], che vuole essere esemplificativa di una situazione molto complessa tra quelle che si possono verificare in ambito elicotteristico: un volo di discesa (con angolo di 6°). Con la sua osservazione si vogliono sottolineare alcuni fenomeni. In primo luogo la scia rimane sempre molto vicina al corpo, sia perchè questa è una caratteristica tanto più rilevante quanto più è bassa la velocità di avanzamento, sia perchè per questa manovra in particolare la scia è convetta nella stessa direzione del corpo macchina. La seconda delle due pecularietà visibili comporta l'insorgenza massiccia di un fenomeno di interferenza aerodinamica noto come *Blade Vortex Interaction*, interazione pala-scia, in quanto ogni pala incappa nella scia di quella che la precede nel giro. E' chiaro che questo fenomeno può risultare caratterizzante per questo tipo di volo sia sotto il profilo vibratorio, che è uno dei temi trattati da questo lavoro di ricerca, che quello acustico, e così in effetti è.
Partendo da questa condizione estrema, appare chiaro come le caratteristiche aerodinamiche di un rotore non possano per un elicottero prescindere da un modello aerodinamico capace di rappresentare adeguatamente la scia sulla cui modellazione si fa riferimento al paragrafo successivo. Su un Tiltrotor in *helicopter mode*, per il quale valgono tutte le precedenti considerazioni, certamente si aggiungono tutti gli effetti di interazione con l'ala sottostante, che richiedono la conoscenza del campo di velocità indotto dalla mutua interferenza tra rotore ed ala.
Considerando un Tiltrotor in *airplane mode* invece, nonostante per un propeller isolato sia uso comune non includere la velocità indotta, in quanto questa si somma a quella di avanzamento rispetto alla quale è senz'altro trascurabile, le mutue interazioni tra il rotore e l'ala dietro di esso sono alla base di importanti fenomeni oggetto di questo studio, per un'illustrazione dei quali si rimanda al paragrafo 2.3.3.

[23]Basato su flussi potenziali, [16]

2.3.1 Modellazione della scia

La caratterizzazione della scia di un rotore ha sempre rappresentato un fattore determinante in elicotteristica. In generale si suole distinguere due diversi contributi di vorticità che la determinano, la *shed vorticity*, rilasciata parallelamente al bordo d'uscita per effetto della variabilità di circolazione sul profilo, e la *trailed vorticity* rilasciata perpendicolarmente al bordo di uscita, dovuta alle variazioni di portanza lungo l'apertura, ovvero alla tridimensionalità del flusso. I due contributi sono entrambi rilevanti, anche se, a seconda della configurazione, sono presenti in maniera minore o maggiore[24].

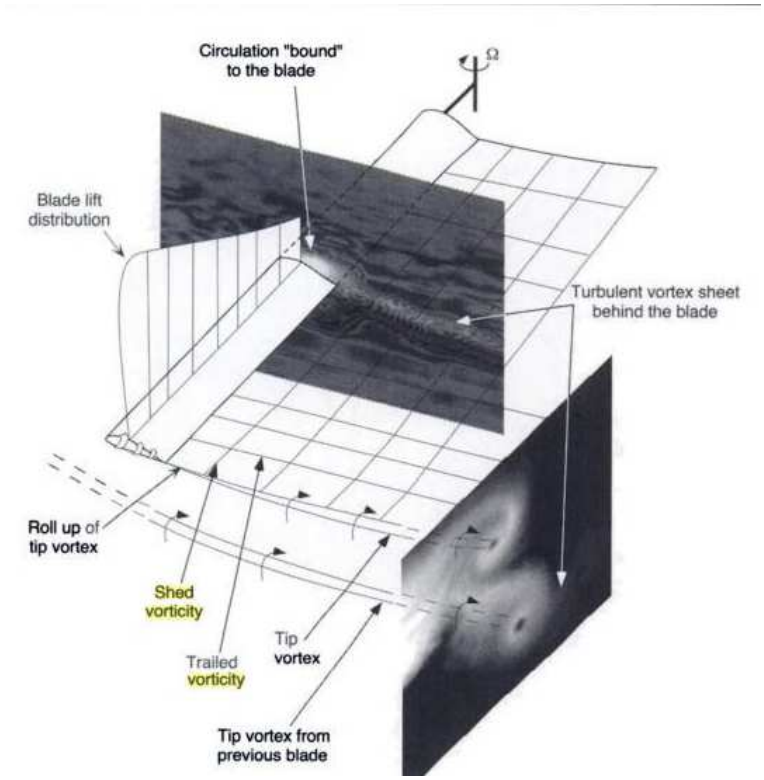


Figura 2.21: *Illustrazione schematica della scia di una pala e dell'interazione con la scia della pala precedente* [Leishman, 2000]

Un solutore 3D, sia esso un BEM come quello utilizzato in questo lavoro o un'analisi CFD, può di norma ricostruire entrambi senza

[24]Ad esempio in condizioni stazionarie, e.g. in hover, può più facilmente considerarsi assente la *shed vorticity*.

distinzioni, tuttavia, in passato come oggi, la mole dei tempi di calcolo, soprattutto quando è richiesta un interazione con dei modelli strutturali come quelli precedentemente descritti, rende molti modelli di soluzione legati ad aerodinamiche 2D, basate ad esempio sulla teoria dell'elemento di pala. Per includere gli effetti di scia in queste formulazioni limitate, si sono sviluppati nel tempo numerosi modelli di *inflow*, ovvero di velocità indotta dalla scia su ogni profilo, cui storicamente si usa riferirsi intendendo il solo contributo di *trailed vorticity*. In questa sede non ci si soffermerà sul dettaglio dei modelli di *inflow* disponibili per un rotore in letteratura, ma si farà accenno ad alcuni tra i più noti, quali ad esempio *Drees, Glauert, Mangler e Squire, Langrebe, Coleman e Castles*. Tutti questi modelli hanno cercato di considerare sempre più aspetti della realtà fisica, col risultato comune di mantenere però un campo di applicazione limitato. Ad esempio i modelli proposti da Glauert e Drees, molto comodi per la loro semplicità, partono dal principio primo della conservazione della quantità di moto del flusso attraverso il rotore visto come un disco attuatore[25] (*Momentum theory*) ed ottengono risultati semplici, che collegano la velocità indotta perpendicolarmente al disco rotore con il coefficiente di spinta (*Thrust*) esercitata, $c_T = \frac{T}{\rho\pi\Omega^2 R^4}$, particolarmente efficiente nel caso di hover, per cui risulta:

$$\lambda_i = \frac{u_i}{\Omega R} = \sqrt{\frac{c_T}{2}} \tag{2.34}$$

A Glauert in particolare si deve la formula:

$$\lambda_i = \frac{u_i}{\Omega R} = \sqrt{\frac{c_T}{2\mu}}(1 + Kr\cos\psi) \text{ essendo } \mu = \frac{V_{ava}}{\Omega R} \tag{2.35}$$

e con r coordinata lungo l'apertura. E' valida in avanzamento, e tiene in conto la variabilità dell' *inflow* sulla pala sia lungo l'apertura che durante il giro.
In riferimento alla limitatezza cui si faceva accenno, l'efficienza di molti modelli è alta se si parla di calcolo di prestazioni e in alcuni casi di risposta aeroelastica, ma può risultare inadeguata per alcuni tipi di analisi.
La limitatezza deriva dal fatto che tutti questi modelli sono definiti *statici*, ovvero non dipendenti dai gradi di libertà del sistema aeroelastico, mentre nella realtà fisica ogni contributo al moto della pala,

[25] Ovvero considerandolo come una superficie continua di discontinuità in termini di pressione.

come una deformazione elastica o quella dovuta al comando, comporta un feedback sull'*inflow*, che risulta quindi essere dotato di una propria dinamica, da cui la definizione di *inflow* dinamico.
Le possibili soluzioni per ottenere un *inflow* dinamico sono tuttora in sviluppo: l'obiettivo è mediare tra la possibilità teorica di risolvere un campo fluidodinamico tridimensionale accoppiato con strutture complesse, che risulta estremamente oneroso dal punto di vista computazionale, e l'uso prettamente statico della velocità indotta. Se l'aumento esponenziale delle potenze di calcolo rende modelli 3D sempre più alla portata, d'altro campo molta speranza risiede nei modelli definiti **ROM** (Reduced Order Model), tali da identificare un numero comunque limitato ma essenziale di *stati aggiunti* in grado di caratterizzare perfettamente la scia e la sua dinamica all'interno di modelli strutturali complessi. Nei due paragrafi successivi vengono descritti i modelli aerodinamici usati per questo lavoro di ricerca, ovvero:

- Un modello aerodinamico 2D basato sulla formulazione quasi-stazionaria del modello di Greenberg corretta da *inflow*.

- Un modello aerodinamico 3D basato su una formulazione potenziale incomprimibile agli elementi di contorno

Dal punto di vista della velocità indotta si è deciso di approcciare i problemi aeroelastici di *Stabilità* e *Risposta* con vari gradi di accuratezza.

- Per ciò che riguarda il problema della *Risposta Aeroelastica*, in particolare volta al calcolo dei *carichi vibratori trasmessi alla fusoliera dal sistema ala-rotore* si sono utilizzati diversi modelli aerodinamici, per i quali si rimanda ai paragrafi successivi. Per quanto concerne l'*inflow*, il modello migliore di cui ci si è avvalsi è stato ottenuto dal BEM 3D, tenendo conto del feedback legato al moto elastico e rigido della struttura, sia per l'ala che per la pala (si veda il capitolo successivo).

- Nel problema della stabilità, invece, ci si è spesso limitati all'uso di un'*inflow* statico.

2.3.2 Aerodinamica quasi-stazionaria 2D: modello di Greenberg

Il modello di Greenberg (Rif.[6]), pubblicato nel 1947, si basa su un'estensione di quello di Theodorsen (Rif.[5]). Entrambi si fondano sulla *strip theory*, in cui le sole componenti di velocità necessarie al fine di determinare forze e momenti aerodinamici agenti su ciascuna sezione, ovvero su un profilo bidimensionale, sono quelle nel piano della sezione stessa (gli assi η_b e ζ_b per quanto concerne la pala e quelli η_w e ζ_w per quanto riguarda l'ala (si consulti il paragrafo 2.2.1).

Nel modello originale pubblicato da Theodorsen nel 1937 si assume il profilo basculante attorno ad un asse genericamente distinto da quello passante per il centro aerodinamico di sezione, supposto al 1/4 di corda. L'angolo di orientamento rispetto alla velocità all'infinito, $\mathbf{V}$, è $\epsilon(t)$. Il profilo inoltre si sposta verticalmente con velocità $\dot{h}$ positiva verso il basso.
Greenberg estende il modello al caso di rotori in avanzamento rendendo pulsante la velocità all'infinito $\mathbf{V} = \mathbf{V}(\mathbf{t})$, in cui include anche il moto dovuto alla deformazione elastica nella medesima direzione. Come per Theodorsen, portanza e momento aerodinamici di sezione sono suddivisi in due parti: una componente circolatoria ($\square_C$) legata appunto alla circolazione sul profilo, ed una non circolatoria ($\square_{NC}$), propria anche di corpi non portanti, che definisce l'azione impressa da corpo a fluido, e quindi da fluido a corpo, data un'accelerazione di quest'ultimo. E' dunque possibile scrivere :

$$\begin{cases} L = L_C + L_{NC} \\ M = M_C + M_{NC} \\ L_C = \dfrac{\rho a c}{2} V(\dot{h} + V\epsilon + \dfrac{c}{2}\dot{\epsilon}) \\ L_{NC} = \dfrac{\rho a c}{2}\dfrac{c}{4}(\ddot{h} + V\dot{\epsilon} + \dot{V}\epsilon + \dfrac{c}{4}\ddot{\epsilon}) \\ M_C = -\dfrac{\rho a c}{2}(\dfrac{c}{4})^2 V\dot{\epsilon} \\ M_{NC} = -\dfrac{c}{4}L_{NC} - \dfrac{\rho a c}{2}(\dfrac{c}{4})^3\dfrac{\ddot{\epsilon}}{2} \end{cases} \tag{2.36}$$

La formulazione così posta, come si può osservare in particolare dalla prima e dalla seconda delle 2.36, si definisce *quasi-stazionaria*. A priori infatti, in riferimento alla definizione di portanza Theodorsen scrive:

$$L = C(k)L_C + L_{NC} \tag{2.37}$$

dove con $C(k)$ si definisce la così detta *Lift deficiency function*: una funzione trascendente in k[26] che correla la variazione del moto con quella di portanza del profilo in funzione della frequenza del fenomeno, considerando in tal modo effetti legati alla *shed vorticity*. Essa rende la determinazione dell'aerodinamica un problema misto tempo-frequenza. Diverse sono le soluzioni a questo problema, alcune delle quali riportano ai modelli **ROM** poc'anzi menzionati. Una molto usata in elicotteristica è considerare la quasi stazionarietà, ovvero supporre le dinamiche di scia a frequenza molto bassa, nel qual caso si ha che:

$$k \to 0 \;\Rightarrow\; C(k) \to 1 \tag{2.38}$$

per poi inserire l'informazione sul campo tridimensionale attraverso un modello di *inflow* per la vorticità di tipo *trailed*.

Un ulteriore passo, consiste nel seguire quanto fatto da *Hodge e Ormiston* in [7], ed utilizzare le 2.36 riscritte in funzione delle componenti di velocità e velocità angolare nel riferimento **PD**, per la pala e **AD** per l'ala, esse sono:

- $U_t(x,t), \dot{U}_t(x,t)$, rispettivamente la componente lungo corda (η_b per la pala, η_w perl'ala) della velocità del centro aerodinamico di sezione e la sua derivata.

- $U_p(x,t), \dot{U}_p(x,t)$, rispettivamente la componente perpendicolare alla corda (ζ_b per la pala, ζ_w perl'ala) della velocità del centro aerodinamico e la sua derivata.

- $\dot{\epsilon}, \ddot{\epsilon}$ ovvero componenti della velocità angolare e della sua derivata giacenti sull'asse X_{pd} per la pala e X_{ad} per l'ala.[27].

[26] $k = \frac{\omega c}{2U_\infty(x)}$, frequenza ridotta.

[27] Dalla meccanica razionale è noto che quest'ultima coincide con l'accelerazione angolare

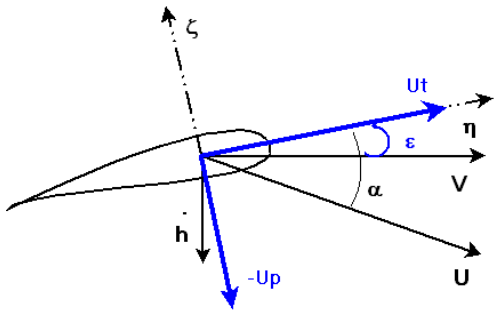


Figura 2.22: *Velocità di sezione nel modello di Greenberg applicato da Hodge e Ormiston*

Le 2.36 divengono allora:

$$\begin{cases} L_C = \frac{\rho a c}{2}\sqrt{U_t^2 + U_p^2}(-U_p + \frac{c}{2}\dot{\epsilon}) \\ L_{NC} = \frac{\rho a c}{2}\frac{c}{4}(-\dot{U}_p + \frac{c}{4}\ddot{\epsilon}) \\ M_C = -\frac{\rho a c}{2}(\frac{c}{4})^2 U_t \dot{\epsilon} \\ M_{NC} = -\frac{\rho a c}{2}(\frac{c}{4})^2(-\dot{U}_p + \frac{3c}{8}\ddot{\epsilon}) \\ D = \frac{\rho a c}{2}\frac{c d_0}{a}(U_t^2 + U_p^2) \end{cases} \tag{2.39}$$

in cui si è aggiunta per completezza ls resistenza aerodinamica D, e dove il rapporto

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{-U_p}{\sqrt{U_t^2 + U_p^2}} \tag{2.40}$$

ha il significato di angolo di incidenza del profilo. Per innestare queste equazioni nel modello strutturale bisogna riportare forze e momenti nei sistemi di riferimento adeguati, ovvero **PIS** per la pala e **AI** per quanto riguarda l'ala. Come da fig.2.23 vengono definite le forze nei riferimenti deformati di sezione **PD** ed **AD**, così come il momento aerodinamico:

$$\begin{cases} T = L_C \cos\alpha + L_{NC} + D\sin\alpha \\ S = -L_C \sin\alpha - D\cos\alpha \\ M_\phi = M_C + M_{NC} \end{cases} \tag{2.41}$$

Infine, differenziando le definizioni a seconda che si tratti dell'ala o della pala, si ottengono le espressioni delle forzanti aerodinamiche

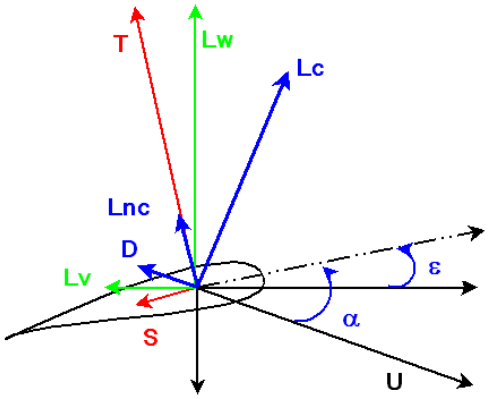


Figura 2.23: *Forze Aerodinamiche nel modello di Greenberg applicato da Hodge e Ormiston*

nei riferimenti desiderati tenendo in conto, per i momenti, il trasporto da centro aerodinamico a centro elastico, legato agli offset aerodinamici $\mathbf{e}^w_{AE}$ per l'ala e $\mathbf{e}^b_{AE}$ per la pala:

$$\mathbf{e}^w_{AE} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e^w_{AE,\eta_w} \\ e^w_{AE,\zeta_w} \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{e}^b_{AE} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e^b_{AE,\eta_b} \\ e^b_{AE,\zeta_b} \end{Bmatrix} \tag{2.42}$$

Per l'ala, tenendo conto della rotazione data da $\mathbf{R}^{-1}_{ai-ad}$, si ottiene:

$$\begin{cases} L^w_v &= S^w \cos(\phi_w + \Delta i_r) - T^w \sin(\phi_w + \Delta i_r) \\ L^w_w &= T^w \cos(\phi_w + \Delta i_r) + S^w \sin(\phi_w + \Delta i_r) \\ M^w_\phi &= M^w_C + M^w_{NC} + T^w e^w_{AE,\eta_w} - S^w e^w_{AE,\zeta_w} \end{cases} \tag{2.43}$$

Anlogamente per la pala, tenendo invece conto della rotazione $\mathbf{R}^{-1}_{pis-pd}$ si ha:

$$\begin{cases} L^b_v &= S^b \cos(\phi_b + \theta_{tw}) - T^b \sin(\phi_b + \theta_{tw}) \\ L^b_w &= T^b \cos(\phi_b + \theta_{tw}) + S^b \sin(\phi_b + \theta_{tw}) \\ M^b_\phi &= M^b_C + M^b_{NC} + T^b e^b_{AE,\eta_b} - S^b e^b_{AE,\zeta_b} \end{cases} \tag{2.44}$$

2.3.3 Aerodinamica interazionale 3D: modello BEM

L'aerodinamica dei sistemi ala-rotore è affetta in modo significativo dalle interazioni che si instaurano tra le pale del proprotor e l'ala. Il passaggio periodico di ciascuna pala vicino all'ala è di fatti un' importante fonte di oscillazione nei campi di pressione di entrambe. Tuttavia, in molte configurazioni di volo i carichi aerodinamici sull'ala sono dominati dall'impatto dell'ala stessa con la vorticità rilasciata dalla scia del rotore.
Due esempi notevoli possono illustrare questa circostanza: il primo riguarda l'*helicopter mode* in fase di volo verticale, se ne è già accennato in questo lavoro, in cui l'impatto della scia rotorica con la sezione dell'ala, soprattutto qualora questa porga la corda al disco rotorico, influisce notevolmente sui carichi trasmessi alla fusoliera, sia in termini di componente stazionaria, generando una deportanza notevole che affligge l'efficienza del velivolo, sia in termini di carichi non stazionari, pregiudicando quindi le vibrazioni ed il comfort.
Il secondo esempio, riguarda il volo di crociera in configurazione *airplane mode*, laddove i vortici rilasciati dalle pale interferiscono aerodinamicamente, ovvero impattano in modo massiccio sulla porzione dell'ala localizzata direttamente dietro il rotore, fig.2.24. Questo impatto, che influisce in modo secondario sull'efficienza del

Figura 2.24: *Scia del gruppo ala-rotore in analisi free-wake*

velivolo, genera soprattutto un problema di vibrazioni trasmesse in fusoliera, perturbando localmente la pressione. Differentemente dalle problematiche in VTOL, questo fenomeno si protrae forzatamente per tutto il volo, e sollecita la struttura per la maggior parte di vita del velivolo.
Le analisi aerodinamiche che coinvolgono forti interazioni scia cor-

po, che indicheremo genericamente come *BVI*[28], rappresentano un compito complesso, che richiede una modellazione appropriata. Nel lavoro di tesi qui presentato, in particolare per alcune applicazioni di *Risposta Aeroelastica* come l'analisi dei carichi vibratori trasmessi in fusoliera, ci si è avvalsi di una formulazione potenziale agli elementi di contorno, introdotta nel Rif.[16] come sviluppo ed adattamento ai casi di BVI della formulazione presentata in [17] e successivamente estesa ai rotori in avanzamento in [18]. Si procede ora ad un'introduzione essenziale al modello. Per flussi non stazionari incompressibili su sistemi ala-rotore, governati dall'equazione

$$\nabla^2 \varphi = 0 \tag{2.45}$$

il potenziale di velocità può descriversi mediante una rappresentazione integrale agli elementi di contorno [17, 18]:

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = \int_{S_B^w \cup S_B^r} \left(G \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial G}{\partial n} \right) dS(\mathbf{y}) - \int_{S_W^w \cup S_W^r} \Delta\varphi \frac{\partial G}{\partial n} dS(\mathbf{y}) \tag{2.46}$$

Nella 2.46 $S_B^w \cup S_B^r$ e $S_W^w \cup S_W^r$ denotano rispettivamente le superfici di ala (indicata con w per *wing*) e rotore (r per *rotor*), le prima coppia in termini di Corpo (*Body*), la seconda di Scia (*Wake*); $G = -1/4\pi r$ è la sorgente unitaria soluzione dell'equazione di *Laplace* in forma tridimensionale, dove $r = \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|$. La condizione di impermeabilità dei corpi valida su S_B^w e S_B^r comporta l'uguaglianza $\partial\varphi/\partial n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ essendo $\mathbf{v}$ la velocità del corpo nel punto del dominio considerato, e $\mathbf{n}$ la normale al corpo nel punto stesso. Inoltre $\Delta\varphi$ rappresenta il salto di potenziale attraverso le due superfici di scia: La condizione di *Kutta-Joukowski* regola il trasporto attraverso la scia affermando che è possibile conoscerlo nota la storia del salto al bordo d'uscita (trailing edge) del corpo corrispondente; ovvero

$$\Delta\varphi(\mathbf{x}_W, t) = \Delta\varphi(\mathbf{x}_W^{TE}, t - \theta) \tag{2.47}$$

dove $t - \theta$ denota l'istante in cui il punto materiale osservabile in $\mathbf{x}_W$ all'istante t si trovava al bordo di uscita staccandosene (si rimanda ai Rif.[17, 18] per ulteriori dettagli). In definitiva, l'equazione 2.46 mostra come il campo potenziale sia rappresentabile mediante una distribuzione di doppiette sulla scia e di doppiette e sorgenti sui corpi.
Nel Rif.[16] sono stati evidenziati alcuni limiti derivanti dalla soluzione

[28] Qui col significato di *Body Vortex Interaction*

numerica delle equazioni 2.46 e 2.47 nel trattare configurazioni con forte BVI.

- In primo luogo si è accertata la comparsa di alcune instabilità numeriche quando pannelli di scia impattano o sono troppo vicini alla superficie di un corpo.

- In secondo luogo un modello che veda tutta la scia come una superficie di discontinuità mal si adatta al BVI, dove la vorticità nelle zone di impatto è legata alla viscosità e non può essere ipotizzata a spessore nullo come nei flussi completamente potenziali

E' questa serie di ragioni che ha reso la formulazione BEM standard inapplicabile per i problemi aeroelastici oggetto di questo lavoro di ricerca.
Per alcune delle analisi oggetto di questa tesi, si è dunque deciso di integrare il modello strutturale precedentemente presentato col metodo integrale di contorno di cui al Rif.[16] che supera i limiti di cui sopra attraverso due step principali:

- Rimpiazzando le doppiette sulla quota parte di scia che produce BVI con un modello equivalente di filamenti vorticosi chiusi.

- Usando nelle zone di BVI il modello di *vortice di Rankine* a spessore non nullo e modulabile per avere un campo di velocità indotta regolare anche al centro del vortice[29], che tenga anche conto di effetti viscosi e che così dia una simulazione più realistica del BVI

Nella formulazione adottata si introduce la scomposizione del campo potenziale in due regioni: il *potenziale incidente* φ_I, che è generato dalle doppiette che compongono la scia più lontana (indicata con l'apice F per *Far Wake*) e a rischio BVI ($S_W^{w,F}$ e $S_W^{r,F}$) ed il *potenziale scatterato* φ_S, generato da sorgenti e doppiette sui corpi e dalle sorgenti della scia più vicina al trailing-edge, lontana da possibilità di impatto (indicata con N per *Near Wake*). Sia la scia lontana che quella vicina rimangono comunque superfici di discontinuità (si veda Fig. 2.25).

[29]Dove il modello di vortice potenziale prevede velocità infinita.

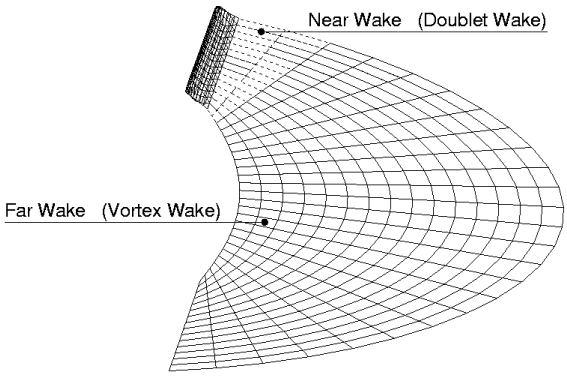


Figura 2.25: *Regioni di scia vicina e di scia lontana,[16]*

Come dimostrato nel Rif.[16], essendo $\varphi = \varphi_I + \varphi_S$, il potenziale scatterato è definito dall'espressione

$$\varphi_S(\mathbf{x}, t) = \int_{S_B^w \cup S_B^r} \left[G(\chi - \chi_I) - \varphi_S \frac{\partial G}{\partial n} \right] dS(\mathbf{y}) - \int_{S_B^{w,N} \cup S_B^{r,N}} \Delta\varphi_S \frac{\partial G}{\partial n} dS(\mathbf{y}) \tag{2.48}$$

dove si definiscono $\chi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ e $\chi_I = \mathbf{u}_I \cdot \mathbf{n}$, essendo $\mathbf{u}_I$ la velocità indotta dalla scia lontana, data da

$$\mathbf{u}_I(\mathbf{x}, t) = \nabla\varphi_{\mathbf{I}}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = -\nabla \int_{\mathbf{S_W^{w,F}} \cup \mathbf{S_W^{r,F}}} \Delta\varphi_{\mathbf{S}}(\mathbf{y_W^{TE}}, \mathbf{t} - \delta) \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{n}} \mathbf{dS}(\mathbf{y}) \tag{2.49}$$

Il potenziale scatterato è dunque influenzato da quello incidente attraverso i termini di velocità indotta χ_I, mentre al contrario quello incidente subisce l'influenza di quello scatterato per mezzo della discontinuità al bordo d'uscita che viene convetta lungo la scia.
Discretizzando l'Eq.2.49 usando N pannelli sulla scia lontana ed usando l'equivalenza vortici-doppiette, il campo di velocità incidente si può ottenere attraverso la seguente espressione:

$$\mathbf{u}_I \approx -\sum_{n=1}^{N} \Delta\varphi_S(\mathbf{y}_{W_n}^{TE}, t - \theta_n) \int_{C_n} \nabla_x G \times d\mathbf{y} \tag{2.50}$$

dove C_n denota il contorno dell n-esimo pannello di scia, $\mathbf{y}_{W_n}^{TE}$ è la posizione sul trailing edge da cui si è distaccata in $t - \theta_n$ la particella materiale che si trova all'istante t in $\mathbf{y}_{W_n}$ e ∇_x rappresenta il gradiente rispetto alla variabile $\mathbf{x}$. Quest'equazione rappresenta il campo di velocità dato dalla legge di Biot-Savart applicata a vortici

aventi la forma del contorno dei pannelli della scia lontana ed intensità $\Delta\varphi_S(\mathbf{y}^{TE}_{W_n}, t-\theta_n)$.
L'equazione 2.50 viene applicata per un duplice scopo:

- ottenere il termine χ_I nell'equazione 2.48,
- valutare, una volta estesa a tutta la scia, il campo di velocità onde calcolarne la distorsione qualora sia in atto un'analisi di scia libera (*free wake*).

Come sopra annunciato, la formulazione si completa introducendo un modello di vortice di Rankine a spessore finito e con una distribuzione di velocità regolare al suo interno. La soluzione risulta quindi stabile e regolare anche in situazioni di forte BVI della scia lontana. L'inclusione del vortice di Rankine permette anche di modularne lo spessore e la zona all'interno della quale agiscono effetti di diffusività altrimenti non inclusi in una formulazione potenziale, ma indispensabili per un'analisi di BVI (si consultino per approfondire i Rif.[19, 20]).
La soluzione numerica della 2.48 si ottiene mediante gli *elementi di contorno* all'ordine zero. Cioé discretizzando le superfici del corpo S^w_B e S^r_B e della scia vicina $S^{w,N}_W$ e $S^{r,N}_W$ in pannelli quadrilateri su cui si considerano costanti φ_S, χ, χ_I e $\Delta\varphi_S$, e risolvendo l'equazione al centroide di ciascun pannello integrando nel tempo ([16]).
Una volta ottenuto il potenziale, i carichi aerodinamici utili per gli scopi di questo lavoro di ricerca vengono ricostruiti calcolando la pressione utilizzando il teorema di Bernulli,

$$\dot{\varphi}_S + \dot{\varphi}_I - \mathbf{v}\cdot(\nabla\varphi_S + \mathbf{u}_I) + \frac{\|\nabla\varphi_S + \mathbf{u}_I\|^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} \tag{2.51}$$

ed integrando la pressione sul contorno dei profili aerodinamici ottenendo, in modo del tutto generico

$$L_v = \int_C p n_y dl\,;\;\; L_w = \int_C p n_z dl\,;\;\; M_\phi = \int_C p(y n_y + z n_z) dl \tag{2.52}$$

2.4 Descrizione cinematica

Per quanto detto nei paragrafi 2.2.5 e 2.3 è evidente che la conoscenza della cinematica di ogni sezione risulta indispensabile, sia per l'ala che per la pala, per la determinazione dei carichi inerziali, così come quelli aerodinamici. La Fig. 2.26 illustra molto schematicamente alcuni punti di riferimento nella descrizione cinematica del complesso ala rotore, come il centro di rotazione dell'Hub o il PVP che congiunge l'ala alla gondola, evidenziando infine i punti notevoli di sezione (senza perdita di generalità sia di pala che di ala) funzionali al compito, essendo CT, CG e CA rispettivamente il centro di taglio, di massa ed aerodinamico. Per quanto con-

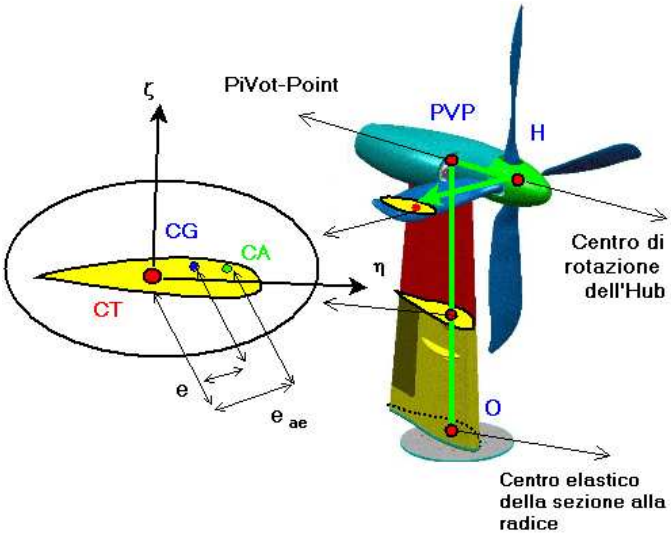


Figura 2.26: *Schematizzazione di alcuni punti notevoli nella descrizione cinematica*

cerne le componenti inerziali dei carichi, tutta l'informazione necessaria per ogni sezione è contenuta nell'accelerazione del baricentro $\mathbf{a}_{cg}$, e nelle sue accelerazione e velocità angolare ω ed $\dot{\omega}$. Per l'aerodinamica invece, la conoscenza della velocità del centro aerodinamico $\mathbf{V}_{ca}$, oltre all'accelerazione e velocità angolare, è sufficiente[30] sia al calcolo delle componenti U_t, U_p, $\dot{U}_p$ ed $\dot{e}$ necessarie con l'aerodinamica quasi stazionaria, che alla determinazione delle

[30]Ovviamente includendo anche la velocità indotta.

condizioni al contorno del modello BEM, $\chi = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$[31]. L'approccio scelto in queso lavoro di ricerca, come già espresso nel paragrafo 2.2.4, è stato quello di risolvere la cinematica in modo esatto ed implicito rispetto alle variabili lagrangiane del problema[32], attraverso semplici relazioni vettoriali, ottenendo così di:

- Non dover ricorrere ad alcuno *ordering-scheme*, non perdendo così alcun effetto legato alle non linearità.
- Rendere il modello realizzato più versatile, permettendo agevolmente l'inserimento di altri elementi nella catena cinematica ala-hub-pala, ed ottenendo in modo immediato il feedback dinamico corrispondente.
- Facilitare l'innesto di codici aerodinamici superiori, normalmente basati su modellazioni 3D.

2.4.1 Velocità ed aerodinamica

In questo paragrafo vengono descritte le velocità dei centri aerodinamici sia per le sezioni alari, che per quelle di pala, tenendo conto che nel modello se ne utilizzano le componenti nei sistemi **AD** (ala) e **PD** (pala); esse sono genericamente composte sia dal moto rigido che da quello dovuto alla deformazione elastica.

Ala

Avendo definito $\mathbf{r}_{(ca-o)}$ il vettore posizione del centro aerodinamico di sezione rispetto al centro elastico alla radice dell'ala (punto O) in condizioni deformate, e scrivendolo nel riferimento **AI** come:

$$\mathbf{r}^{ai}_{(ca-o)} = \begin{Bmatrix} x_w \\ v_w(x_w, t) \\ w_w(x_w, t) \end{Bmatrix} + \mathbf{R}^{-1}_{ai-ad} \left\{ \mathbf{e}^{ad-w}_{AE} \right\} \tag{2.53}$$

avendo definito l'offset aerodinamico di sezione alare come:

$$\mathbf{e}^{ad-w}_{AE} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e_{AE,\eta_w} \\ e_{AE,\zeta_w} \end{Bmatrix} \tag{2.54}$$

[31]Dove a rigore $\mathbf{v}$ è riferita al singolo elemento, che però puo essere facilmente ricollegata a $\mathbf{V}_{ca}$ nota la geometria di sezione e la velocità angolare ω.

[32]Le deformazioni elastiche.

risulta che l'espressione della velocità del centro aerodinamico di sezione è data da[33]:

$$\mathbf{V}_{ca}^{w} = \mathbf{V}_{ava} + \left.\frac{d\mathbf{r}_{(ca-o)}}{dt}\right|_{ai} \tag{2.55}$$

L'equazione vettoriale 2.55 va proiettata nella terna **AD**, e dopo aver aggiunto il contributo della velocità indotta si ottiene:

$$\mathbf{V}_{ca}^{ad-w} = \begin{Bmatrix} U_r^w \\ U_t^w \\ U_p^w \end{Bmatrix} + \mathbf{u}_I^{ad-w} \tag{2.56}$$

E' utile ricordare che nonostante la componente assiale della velocità U_r^w sia presente, essa non è utile all'interno di modelli bidimensionali come quello di Greenberg, mentre risulta funzionale al 'dialogo' con solutori aerodinamici 3D.
Per il calcolo di $\dot{U}_p^w$, che rappresenta la derivata della componente U_p, si sono eguagliate due definizioni di accelerazione: quella classica della cinematica che compone l'accelerazione assoluta di un corpo come somma di accelerazione relativa, di trascinamento e di Corolis (che in questo caso essendo il moto del velivolo rettilineo uniforme si riduce alla sola componente relativa dovuta alla deformazione elastica):

$$\mathbf{a}_{ca}^{w}\big|_{ass} \equiv \mathbf{a}_{ca}^{w}\big|_{rel} = \left.\frac{d^2\mathbf{r}_{(ca-o)}}{dt^2}\right|_{ai} \tag{2.57}$$

ed una seconda definizione valida, invece, quando si voglia derivare un vettore avendone le componenti in un riferimento non inerziale, in questo caso **AD**:

$$\left.\frac{d\mathbf{V}_{ca}^{w}}{dt}\right|_{in} = \left.\frac{d\mathbf{V}_{ca}^{w}}{dt}\right|_{ad} + \omega_{\mathbf{in-ad}} \wedge \mathbf{V}_{\mathbf{ca}}^{\mathbf{w}} \tag{2.58}$$

Coincidendo i primi membri di 2.57 ed 2.58, possono essere eguagliati, e l' equazione vettoriale che ne viene può essere risolta avendo come

[33]Si noti che il simbolismo della derivata nell'Eq.2.55, usato più volte qui di seguito, indica che l'operazione di derivazione è applicata sulle componenti a pedice, poi proiettate dove necessario con opportune rotazioni, ovvero: $\left.\frac{d\mathbf{r}_{(ca-o)}}{dt}\right|_{ai} \equiv \frac{d}{dt}\mathbf{r}_{ca-o}^{ai}$

incognita:

$$\left.\frac{d\mathbf{V}_{ca}^{w}}{dt}\right|_{ad} = \left.\frac{d^2\mathbf{r}_{(ca-o)}}{dt^2}\right|_{ai} - \omega_{\mathbf{in-ad}} \wedge \mathbf{V}_{\mathbf{ca}}^{\mathbf{w}} \tag{2.59}$$

che risolta nella terna **AD** fornisce,

$$\left.\frac{d\mathbf{V}_{ca}^{w}}{dt}\right|_{ad} = \frac{d}{dt}\mathbf{V}_{ca}^{ad-w} = \begin{Bmatrix} \dot{u}_r^w \\ \dot{u}_t^w \\ \dot{u}_p^w \end{Bmatrix} \tag{2.60}$$

Il vettore ω_{in-ad} è la velocità angolare tra i due riferimenti **IN** e **AD**, ed in questo caso coincide con quella dovuta alla deformazione di una generica sezione di ala[34]. La definiamo come:

$$\omega_{wd} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_w \\ \dot{v}_w' \sin(\theta_\Delta + \phi_w) - \dot{w}_w' \cos(\theta_\Delta + \phi_w) \\ \dot{v}_w' \cos(\theta_\Delta + \phi_w) + \dot{w}_w' \sin(\theta_\Delta + \phi_w) \end{Bmatrix} \tag{2.61}$$

La 2.61 definisce conseguentemente i termini legati alla $\dot{\epsilon}$ nelle 2.39, dati da:

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}^w = \dot{\phi}_w \\ \ddot{\epsilon}^w = \ddot{\phi}_w \end{cases} \tag{2.62}$$

Pala

Per quanto concerne la pala, con metodo del tutto analogo sono state definite le espressioni invarianti delle velocità del centro aerodinamico di sezione. Differentemente dal caso di un rotore isolato, la cinematica è arricchita dal contributo di trascinamento dell'hub, che si traduce attraverso le Eq.2.39 in un ulteriore contributo aerodinamico. L'approccio utilizzato in questo lavoro di ricerca, che prevede l'uso di espressioni invarianti e di nessun *ordering scheme*, ha permesso la gestione di queste interazioni, che, data la forte non linearità del sistema, avrebbero reso l'uso di espressioni analitiche difficilmente gestibile data la quantità di termini da considerare

[34]La sua espressione è fornita in [7] per quel che concerne una pala.

nelle stesse.
Date le geometrie precedentemente descritte, si è definito il vettore posizione di un generico centro aerodinamico di sezione rispetto al centro di rotazione H dell'hub, r_{ca-h}, descrivendolo nel riferimento **PI** come somma vettoriale dei seguenti termini:

$$\mathbf{r}^{pi}_{ca-h} = \mathbf{r}^{pi}_{rig} + \mathbf{r}^{pi}_{geom} + \mathbf{r}^{pi}_{ela} + \mathbf{e}^{pi-b}_{AE} \tag{2.63}$$

Ciascuno di essi è definito (per comodità non necessariamente nello stesso sistema di riferimento) come:

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}^{pi}_{rig} &= \begin{Bmatrix} e_H + X_{pi} \\ e_O + X_{pi}\gamma \\ X_{pi}\beta \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{r}^{pi}_{geom} = \mathbf{R}^{-1}_{\theta_{com}} \begin{Bmatrix} 0 \\ v_{geom} \\ w_{geom} \end{Bmatrix} \\
\mathbf{r}^{pis}_{ela} &= \begin{Bmatrix} u(x_b, t) \\ v(x_b, t) \\ w(x_b, t) \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{e}^{pd-b}_{AE} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e^b_{AE,\eta_b} \\ e^b_{AE,\zeta_b} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{2.64}$$

ed è legato:

$$\begin{cases}
\mathbf{r}_{rig} := \text{All'offset delle cerniere ed agli spostamenti rigidi attorno ad esse.} \\
\mathbf{r}_{geom} := \text{Alla geometria non rettilinea dell'asse elastico.} \\
\mathbf{r}_{ela} := \text{Alle deformazioni dell'asse elastico.} \\
\mathbf{e}^b_{AE} := \text{Alla presenza di un offset aerodinamico, già precedentemente definito.}
\end{cases}$$

L'espressione della velocità risulta pertanto:

$$\mathbf{V}^b_{ca} = \mathbf{V}_{Hub} + \omega \wedge \mathbf{r}_{(ca-h)} + \left.\frac{d\mathbf{r}_{(ca-h)}}{dt}\right|_{pi} \tag{2.65}$$

essendo

$$\begin{cases}
\mathbf{V}_{Hub} = \mathbf{V}_{pvp} + \omega_{wt} \wedge \mathbf{h}_P \\
\mathbf{V}_{pvp} = \mathbf{V}_{ava} + \left.\frac{d\mathbf{r}_{(pvp-o)}}{dt}\right|_{ai} \\
\omega = \omega_{Hub} + \Omega = \omega_G + \omega_{wt} + \Omega
\end{cases} \tag{2.66}$$

Nell'invariante 2.65, si miscelano elementi di moto rigido, ed elastico, legato cioé alle deformazioni. Indicando con i termini con apice

$\square^{()}$, come d'uso in questo lavoro, i riferimenti in cui sono date le componenti, definiamo:

$$\omega_G^{hnr} = \begin{Bmatrix} \dot{\beta}_S \\ -\dot{\beta}_C \\ \dot{\gamma}_G \end{Bmatrix} \quad \Omega^{hr} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{Bmatrix} \quad \mathbf{h}_P^{hr} = \begin{Bmatrix} h_{P,x} \\ h_{P,y} \\ h_{P,z} \end{Bmatrix}$$

ovvero
$\omega_G :=$ velocità angolare dovuta ai moti di shaft, (paragrafo 2.7), tra cui quelli legati alla presenza del gimbal.
$\Omega :=$ velocità angolare del rotore
$h_P :=$ Mast-height del pilone, distanza tra PVP[35] e centro H dell'Hub.
Nella Eq.2.65 compaiono anche:
$\omega_{wt} :=$ la velocità angolare dovuta alla deformazione della sezione di Wing-tip, che viene qui definita direttamente in componenti **AD**.

$$\omega_{wt}^{ad} = \omega_{wd}^{ad}\Big|_{L_w} \tag{2.67}$$

$\mathbf{r}_{(pvp-o)}^{ai} :=$ il vettore posizione del PVP rispetto al punto O, origine della terna **AI** e centro elastico della sezione alla radice alare:

$$\mathbf{r}_{(pvp-o)}^{ai} = \begin{Bmatrix} L_w \\ v_w(L_w, t) \\ w_w(L_w, t) \end{Bmatrix} \tag{2.68}$$

le cui derivate risultano essere:

$$\left.\frac{d\mathbf{r}_{(pvp-o)}^{ai}}{dt}\right|_{ai} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \dot{v}_w(L_w, t) \\ \dot{w}_w(L_w, t) \end{Bmatrix} \; ; \; \left.\frac{d^2\mathbf{r}_{(pvp-o)}^{ai}}{dt^2}\right|_{ai} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \ddot{v}_w(L_w, t) \\ \ddot{w}_w(L_w, t) \end{Bmatrix}$$

Inserendo le definizioni vettoriali di cui sopra nella 2.65, portando tutte le espressioni nel riferimento **PD** attraverso le opportune proiezioni, e considerando il contributo della velocità indotta

[35]PVP, Pivot Point della sezione estremale dell'ala attorno al quale bascula la nacelle. Spesso situato al quarto di corda.

si ottiene

$$V_{ca}^{pd-b} = \begin{Bmatrix} U_r^b \\ U_t^b \\ U_p^b \end{Bmatrix} + \mathbf{u}_l^{pd-b} \tag{2.69}$$

Per la determinazione di $\dot{U}_p^b$, analogamente a quanto fatto per l'ala, si è sfruttatta l'uguaglianza tra due diverse forme per la definizione dell'accelerazione del centro aerodinamico. La prima espressione si basa sulla classica definizione di accelerazione assoluta di un corpo come somma di moto di trascinamento e relativo rispetto ad un dato sistema di riferimento (**PI** in questo caso):

$$\mathbf{a}_{ca}^b\Big|_{ass} = \mathbf{a}_{ca}^b\Big|_{relat} + \mathbf{a}_{ca}^b\Big|_{coriolis} + \mathbf{a}_{ca}^b\Big|_{trasc} \tag{2.70}$$

la seconda espressione, invece, è valida per qualsiasi vettore si voglia derivare avendone le componenti in un riferimento non inerziale (**PD**):

$$\frac{d\mathbf{V}_{ca}^b}{dt}\Bigg|_{in} = \frac{d\mathbf{V}_{ca}^b}{dt}\Bigg|_{pd} + \omega_{in-pd} \wedge \mathbf{V}_{ca}^b \tag{2.71}$$

Si può dunque scivere:

$$\frac{d\mathbf{V}_{ca}^b}{dt}\Bigg|_{pd} = \mathbf{a}_{ca}^b\Big|_{ass} - \omega_{in-pd} \wedge \mathbf{V}_{ca}^b \tag{2.72}$$

che risolta nella terna **PD** da proprio,

$$\frac{d\mathbf{V}_{ca}^b}{dt}\Bigg|_{pd} = \frac{d}{dt}\mathbf{V}_{ca}^{pd-b} = \begin{Bmatrix} \dot{U}_r^b \\ \dot{U}_t^b \\ \dot{U}_p^b \end{Bmatrix} \tag{2.73}$$

L'*accelerazione relativa* al riferimento **PI** è dunque:

$$\mathbf{a}_{ca}^b\Big|_{relat} = \frac{d^2\mathbf{r}_{(ca-h)}}{dt^2}\Bigg|_{pi}$$

l'*accelerazione di Coriolis* è data da

$$\mathbf{a}_{ca}^b\Big|_{coriolis} = 2\left(\omega_G + \omega_{wt} + \Omega\right) \wedge \frac{d\mathbf{r}_{(ca-h)}}{dt}\Bigg|_{pi}$$

e l'*accelerazione di trascinamento* è dovuta al moto dell'hub e dell'ala

$$\mathbf{a}^{b}_{ca}\Big|_{trasc} = \mathbf{a}_{hub} + (\dot{\omega}_G + \dot{\omega}_{wt}) \wedge \mathbf{r}_{(ca-h)} + (\omega_G + \omega_{wt} + \Omega) \wedge (\omega_G + \omega_{wt} + \Omega) \wedge \mathbf{r}_{(ca-h)}$$

essendo infine

$$\mathbf{a}_{Hub} = \frac{d^2\mathbf{r}_{(pvp-o)}}{dt^2}\Bigg|_{ai} + \dot{\omega}_{wt} \wedge \mathbf{h}_P + \omega_{wt} \wedge \left(\omega_{wt} \wedge \mathbf{h}_P\right)$$

Nell'Eq.2.71 di cui sopra, con ω_{in-pd} si indica la velocità angolare tra i riferimenti **PD** e **IN**, che in questo caso coincide con la velocità angolare del profilo, ovvero:

$$\omega_{in-pd} = \omega_{wt} + \omega_G + \Omega + \omega_{com} + \omega_{bd} \tag{2.74}$$

che risulta essenziale alla determinazione delle Eq.2.39 essendo

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}^b &= \omega_{in-pd} \cdot \hat{\imath}^{pd}\ ^{35} \\ \ddot{\epsilon}^b &= \dot{\omega}_{in-pd} \cdot \hat{\imath}^{pd} \end{aligned} \tag{2.75}$$

Solo gli ultimi due termini componenti la 2.74 non sono ancora noti:

ω_{bd} := la velocità angolare di deformazione elastica per la generica sezione di pala. Essa è definita in [7], ed è data nella terna **PD**:

$$\omega^{pd}_{bd} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi}_b \\ \dot{v}'_b \sin(\theta_{tw} + \phi_b) - \dot{w}'_b \cos(\theta_{tw} + \phi_b) \\ \dot{v}'_b \cos(\theta_{tw} + \phi_b) + \dot{w}'_b \sin(\theta_{tw} + \phi_b) \end{Bmatrix} \tag{2.76}$$

ω_{com} := la velocità angolare dovuta al comando ciclico ed ai modi rigidi attorno alle cerniere, che è definita nella terna **PI**:

$$\omega^{pi}_{com} = \begin{Bmatrix} \dot{\theta}_{com} + \dot{\delta} \\ -\dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} \tag{2.77}$$

[35] i_{pd} versore dell'asse X_{pd}.

2.4.2 Accelerazione ed Inerzia

Come visto nelle 2.31 e nelle 2.32 i carichi inerziali vengono definiti una volta note le accelerazioni del centro di massa per ciascuna sezione di pala e di ala, $\mathbf{a}^{b}_{cg}$ e $\mathbf{a}^{w}_{cg}$ (nonché le accelerazioni e le velocità angolari ω_b, $\dot{\omega}_b$, ω_w, $\dot{\omega}_w$). Per quanto visto nel paragrafo precedente, in particolare nelle Eqq. 2.74 e 2.61, velocità ed accelerazioni angolari sono già definibili, ovvero:

$$\begin{cases} \omega_b = \omega_{in-pd} = \omega_{wt} + \omega_G + \Omega + \omega_{com} + \omega_{bd} \\ \\ \dot{\omega}_b = \dfrac{d\omega_b}{dt} \\ \\ \omega_w = \omega_{in-ad} = \omega_{wd} \\ \\ \dot{\omega}_w = \dfrac{d\omega_w}{dt} \end{cases} \tag{2.78}$$

Per quanto concerne le accelerazioni del centro di massa, invece, si procede in modo analogo a quanto visto per le velocità.

Ala

Dato il vettore posizione del centro di massa di una generica sezione alare rispetto al centro elastico alla radice, definito come:

$$\mathbf{r}^{ai}_{(cg-o)} = \begin{Bmatrix} x_w \\ v_w(x_w, t) \\ w_w(x_w, t) \end{Bmatrix} + \mathbf{R}^{-1}_{ai-ad} \left\{ \mathbf{e}^{ad-w} \right\} \tag{2.79}$$

avendo definito il *mass-offset*

$$\mathbf{e}^{ad-w} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \\ e^{w}_{\eta_w} \\ \\ e^{w}_{\zeta_w} \end{Bmatrix} \tag{2.80}$$

Si ottiene per l'accelerazione l'espressione,

$$\mathbf{a}^{w}_{cg} = \left. \frac{d^2\mathbf{r}_{(cg-o)}}{dt^2} \right|_{ai} \tag{2.81}$$

Pala

Per la pala il vettore posizione del centro di massa di una generica sezione rispetto al centro dell'hub, H, è:

$$\mathbf{r}^{pi}_{cg-h} = \mathbf{r}^{pi}_{rig} + \mathbf{r}^{pi}_{geom} + \mathbf{r}^{pi}_{ela} + \mathbf{e}^{pi-b} \tag{2.82}$$

dove l'ultimo termine rappresenta l'offset del centro di massa di sezione rispetto al centro di taglio, che sostituisce quello aerodinamico presente nella 2.63, rispetto alla quale non ci sono ulteriori differenze.

$$\mathbf{e}^{pd-b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ e^{b}_{\eta_b} \\ e^{b}_{\zeta_b} \end{Bmatrix} \tag{2.83}$$

L'espressione dell'accelerazione risulta perciò, congruentemente a quanto visto precedentemente, come somma di un termine di trascinamento, di Coriolis e relativa rispetto ad un sistema di riferimento (**PI** in questo caso):

$$\mathbf{a}^{b}_{cg}\Big|_{ass} = \mathbf{a}^{b}_{cg}\Big|_{relat} + \mathbf{a}^{b}_{cg}\Big|_{coriolis} + \mathbf{a}^{b}_{cg}\Big|_{trasc} \tag{2.84}$$

L'*accelerazione relativa* del centro di massa rispetto al riferimento **PI** è dunque:

$$\mathbf{a}^{b}_{cg}\Big|_{relat} = \frac{d^2\mathbf{r}_{(cg-h)}}{dt^2}\Bigg|_{pi}$$

per *accelerazione di Coriolis* si ha

$$\mathbf{a}^{b}_{cg}\Big|_{coriolis} = 2\left(\omega_G + \omega_{wt} + \Omega\right) \wedge \frac{d\mathbf{r}_{(cg-h)}}{dt}\Bigg|_{pi}$$

mentre l'*accelerazione di trascinamento* è dovuta al moto dell'hub e dell'ala

$$\mathbf{a}^{b}_{cg}\Big|_{trasc} = \mathbf{a}_{hub} + (\dot{\omega}_G + \dot{\omega}_{wt}) \wedge \mathbf{r}_{(cg-h)} + (\omega_G + \omega_{wt} + \Omega) \wedge (\omega_G + \omega_{wt} + \Omega) \wedge \mathbf{r}_{(cg-h)}$$

dove per completezza si ripropone

$$\mathbf{a}_{Hub} = \frac{d^2\mathbf{r}_{(pvp-o)}}{dt^2}\Bigg|_{ai} + \dot{\omega}_{wt} \wedge \mathbf{h}_P + \omega_{wt} \wedge \left(\omega_{wt} \wedge \mathbf{h}_P\right)$$

2.5 Trasmissione dei carichi dal rotore all'ala

Con l'obiettivo di descrivere compiutamente le equazioni che governano l'aeroelasticità sia dell'ala che delle pale rotoriche che compongono le configurazioni Tiltrotor esaminate in questo lavoro di ricerca, finora sono state determinate:

- Le forze interne di natura elastica, rappresentate in modo generico sia per ala che per pala dalle 2.29.
- I carichi inerziali, definiti dalle Eqq.2.31 e 2.32.
- I carichi aerodinamici definiti nel paragrafo 2.3.

a completare l'opera, manca la definizione dei carichi scambiati da ala a rotore. Nella fig.2.27 vengono rappresentatate schemati-

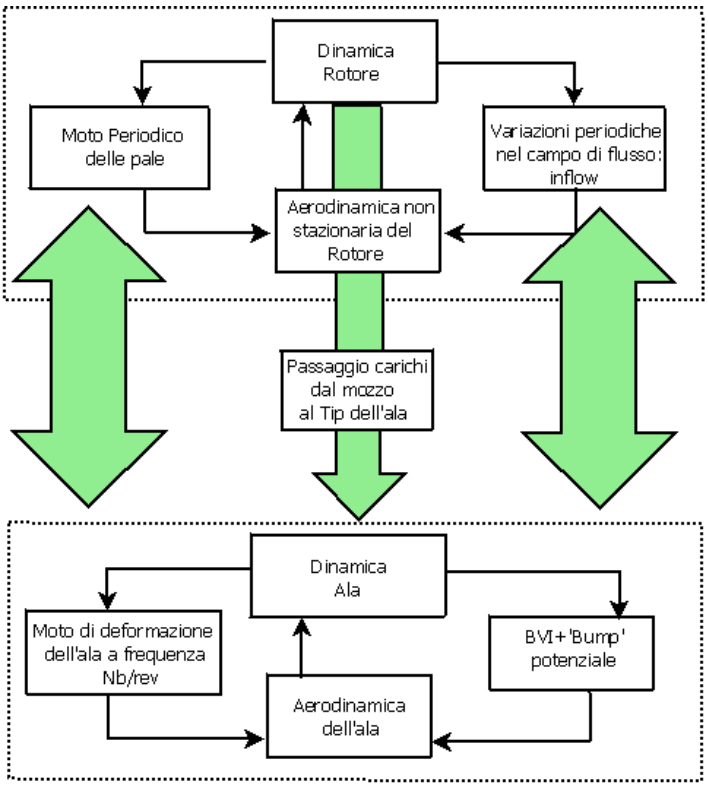


Figura 2.27: *Schema a blocchi per l'interazione ala-rotore*

camente le principali interazioni presenti tra l'ala ed il rotore, e

tenute in conto per questa modellazione. Il blocco superiore rappresenta il rotore, mentre quello inferiore l'ala; i due sistemi una volta accoppiati entrano in comunicazione attraverso più modi di mutua influenza:

- Strutturale-Dinamico (freccia centrale nello schema), legata al fatto che il rotore, ovvero l'insieme delle pale trasmette al mozzo dei carichi, che a loro volta vengono trasmessi al PVP sull'ala. Nel passaggio dall'hub al Pivot-point la gondola contribuisce con la propria inerzia, a sua volta legata al moto dell'ala (vedi i sottopragrafi successivi).

- Cinematico (freccia sinistra nello schema), legato proprio al fatto che l'ala risulta forzata non solo dalla propria aerodinamica, ma anche dai carichi trasmessi dal rotore, che, come si vedrà meglio in seguito, possono oscillare rispetto al valor medio con frequenza multipla del numero di pale N_{blade} in condizioni non stazionarie. Attraverso le relazioni cinematiche illustrate nel precedente paragrafo 2.4, il moto dell'ala influenza l'aerodinamica e quindi la dinamica delle pale, chiudendo così il cerchio col punto precedente.

- Aerodinamico (freccia di destra nello schema), attraverso gli importanti fenomeni di aerodinamica interazionale di cui si è ampliamente discusso nel paragrafo 2.3. E' importante rimarcare nuovamente che già nel rotore isolato il campo aerodinamico dovuto alla scia ha grande importanza, e che l'accoppiamento porta a dover tenere in conto fenomeni eventuali di BVI[36] e di *Bump* del potenziale[37], che a loro volta cambiano l'aerodinamica, soprattutto dell'ala.

In riferimento alle Eq.2.22, appare chiara la necessità di descrivere più accuratamente il primo dei tre punti dell'elenco precedente, in particolar modo descrivendo il passaggio dei carichi dalle pale al PVP dell'ala. Per fare ciò qui di seguito vengono descritti e definiti differenziandoli i *carichi all'hub* ed i *carichi al tip*, la cui determinazione risulta vitale per gli obiettivi dichiarati di questo lavoro di ricerca.

[36]Body Vortex Interaction.

[37]Ovvero della mutua sensibilità che ala e pala hanno nel proprio campo potenziale, ergo di pressione, al passaggio periodico della seconda vicino alla prima.

2.5.1 I carichi all'Hub

I carichi al mozzo sono dati dall' insieme di tre forze e tre momenti. Essi si ottengono naturalmente con le opportune integrazioni dei carichi inerziali ed aerodinamici distribuiti *sulle pale* nelle 2.22. In sintesi si ha:

$$\begin{cases} p_x^b \equiv p_x^{in-b} \\ p_y^b = p_y^{in-b} + p_y^{ae-b} = p_y^{in-b} + L_v^b \\ p_z^b = p_z^{in-b} + p_z^{ae-b} = p_z^{in-b} + L_w^b \\ q_x^b = q_x^{in-b} + q_x^{ae-b} = q_x^{in-b} + M_\phi^b \\ q_y^b \equiv q_y^{in-b} \\ q_z^b \equiv q_z^{in-b} \end{cases} \tag{2.85}$$

In elicotteristica, i carichi all'hub sono un output essenziale sia per l'analisi che per la progettazione dei rotori. Essi sono funzione dei parametri di volo e delle deformazioni elastiche all'equilibrio e, in un problema di *Risposta* per un rotore isolato, vengono usualmente ottenuti a valle delle stesse come post-processo. In un Tiltrotor, invece, i carichi al mozzo sono essenziali perché sollecitano, attraverso la gondola, le estremità alari, e sono dunque parte integrante, istante per istante, delle forzanti del sistema aeroelastico ala-rotore, essi vanno dunque calcolati parallelamente alla soluzione.
Facendo riferimento alle tre forze (per i tre momenti valgono considerazioni del tutto analoghe), esse sono definite come somma sulle N_{blade} pale dei carichi nel riferimento **PIS** riportate poi tramite le opportune matrici di rotazione a quello **HNR**.
Integrando i carichi distribuiti composti dalle Eqq.2.85 si ottengono forze e momenti nel riferimento **PIS**, riferiti alla i-esima pala:

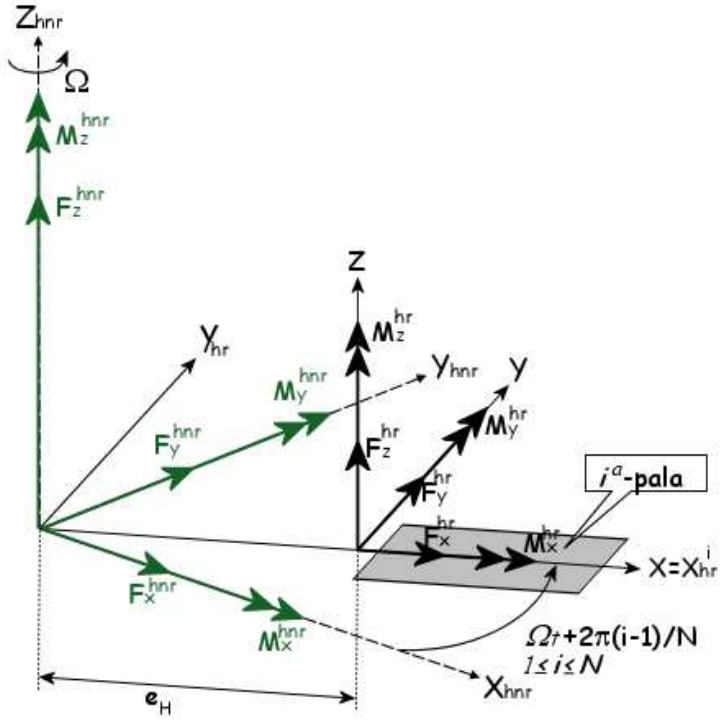


Figura 2.28: *Rappresentazione dei carichi alla radice della i-esima pala e al mozzo*

$$
\begin{cases}
F^{pis}_{x(i)} = \int_0^R p^b_{x(i)} dX_{pis} \\
F^{pis}_{y(i)} = \int_0^R p^b_{y(i)} dX_{pis} \\
F^{pis}_{z(i)} = \int_0^R p^b_{z(i)} dX_{pis} \\
M^{pis}_{x(i)} = \int_0^R \left(q^b_{x(i)} + p^b_{z(i)} v_b - p^b_{y(i)} w_b \right) dX_{pis} \\
M^{pis}_{y(i)} = \int_0^R \left(q^b_{y(i)} - p^b_{z(i)} (x_b + u_b) + p^b_{x(i)} w_b \right) dX_{pis} \\
M^{pis}_{z(i)} = \int_0^R \left(q^b_{z(i)} + p^b_{y(i)} (x_b + u_b) - p^b_{x(i)} v_b \right) dX_{pis}
\end{cases}
\tag{2.86}
$$

Si ricorda che, a rigore, la componente aerodinamica della forzante risulta essere integrata solo dalla prima stazione portante che abbiamo definito mediante l'ascissa di cut-off $x_{cut-off}$.

Dopo aver riportato i carichi di cui sopra al riferimento **PI** tramite la trasposta della 2.15, si passa al riferimento **HR** relativo alla i-esima pala, dove si ottiene (qui per le forze, ma in analogia anche per i momenti):

$$
\begin{cases}
F^{hr}_{x(i)} = F^{pi}_{x(i)} \cos\left(\beta_{pc} + \beta^{(i)}_G\right) - F^{pi}_{z(i)} \sin\left(\beta_{pc} + \beta_G(i)\right) \\
F^{hr}_{y(i)} = F^{pi}_{y(i)} \\
F^{hr}_{z(i)} = F^{pi}_{x(i)} \sin\left(\beta_{pc} + \beta_G(i)\right) + F^{pi}_{z(i)} \cos\left(\beta_{pc} + \beta_G(i)\right)
\end{cases}
\tag{2.87}
$$

La somma dei carichi delle N_{blade} pale avviene riportando tutti i carichi sugli assi della prima pala, che è di riferimento in quanto è quella che viene osservata nel tempo giro per cui:

$$
\begin{cases}
F^{hr}_{x(tot)} = \sum_{i=1}^{N_{blade}} F^{hr}_{x(i)} \cos i\Delta\psi - F^{hr}_{y(i)} \sin i\Delta\psi \\
F^{hr}_{y(tot)} = \sum_{i=1}^{N_{blade}} F^{hr}_{y(i)} \cos i\Delta\psi + F^{hr}_{x(i)} \sin i\Delta\psi \\
F^{hr}_{z(tot)} = \sum_{i=1}^{N_{blade}} F^{hr}_{z(i)} \\
M^{hr}_{x(tot)} = \sum_{i=1}^{N_{blade}} -M^{hr}_{y(i)} \sin i\Delta\psi \\
M^{hr}_{y(tot)} = \sum_{i=1}^{N_{blade}} M^{hr}_{y(i)} \cos i\Delta\psi \\
M^{hr}_{z(tot)} = \sum_{i=1}^{N_{blade}} M^{hr}_{z(i)} \\
\Delta\psi = \dfrac{2\pi}{N_{blade}} \\
F^{hr}_{i+1}(t) = F^{hr}_{i}(t + \dfrac{\Delta\psi}{\Omega})
\end{cases}
\tag{2.88}
$$

dove l'ultima relazione attesta la periodicità del sistema in esame e $\Delta\psi$ rappresenta l'angolo di separazione geometrica tra le pale.

I carichi così determinati si riportano poi nel riferimento non rotante **HNR** ottenendo:

$$
\begin{cases}
F^{hnr}_{x} = F^{hr}_{x(tot)} \cos\psi - F^{hr}_{y(tot)} \sin\psi \\
F^{hnr}_{y} = F^{hr}_{x(tot)} \sin\psi + F^{hr}_{y(tot)} \cos\psi \\
F^{hnr}_{z} = F^{hr}_{z(tot)}
\end{cases}
\tag{2.89}
$$

Sostituendo le 2.86 nelle 2.88, e poi queste nelle 2.89 otteniamo

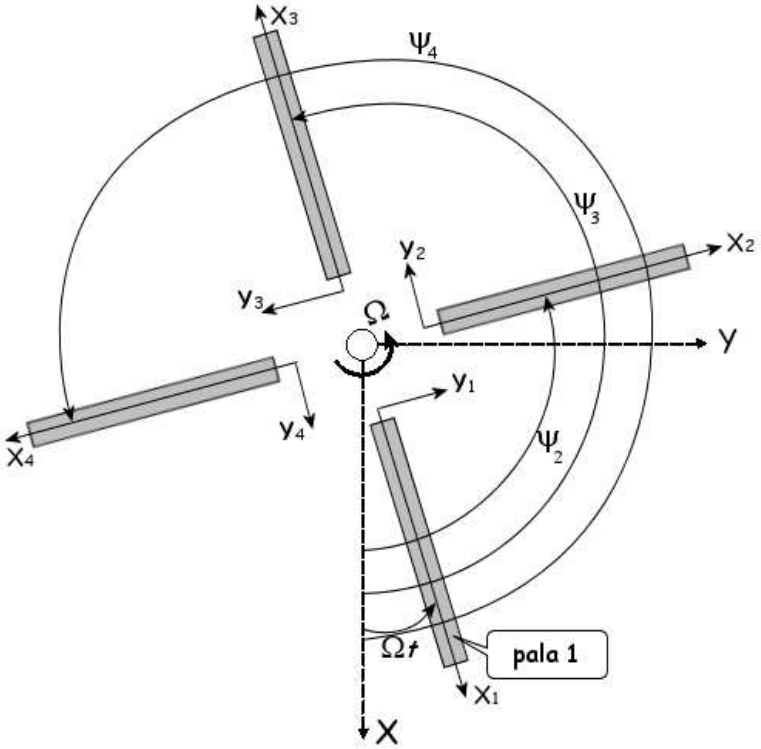


Figura 2.29: *Vista dei riferimenti di pala in un sistema quadripala*

infine:

$$\begin{cases} F_x^{hnr} = \sum_{i=1}^{N_{blade}} F_{x(i)}^{hr} \cos\psi_i - F_{y(i)}^{hr} \sin\psi_i \\ F_y^{hnr} = \sum_{i=1}^{N_{blade}} F_{x(i)}^{hr} \sin\psi_i + F_{y(i)}^{hr} \cos\psi_i \\ F_z^{hnr} = \sum_{i=1}^{N_{blade}} F_{z(i)}^{hr} \\ M_x^{hnr} = \sum_{i=1}^{N_{blade}} -M_{y(i)}^{hr} \sin\psi_i \\ M_y^{hnr} = \sum_{i=1}^{N_{blade}} M_{y(i)}^{hr} \cos\psi_i \\ M_z^{hnr} = \sum_{i=1}^{N_{blade}} M_{z(i)}^{hr} \end{cases} \tag{2.90}$$

dove ψ_i è l'angolo azimuthale della i-esima pala.
Per i tre momenti c'è bisogno di alcune considerazioni aggiuntive. Si noterà come non vengano inseriti i termini relativi a $M_{x(i)}^{hr}$, questa è una pratica comune a molte modellazioni in letteratura, e si deve al fatto che tali contributi vengono scaricati non al mozzo, ma attraverso la catena di comando secondo percorsi che possono variare di struttura in struttura; qui si definiscono due contributi di momento nel piano del disco:

$$\begin{aligned} M_{x-com}^{hnr} &= \sum_{i=1}^{N_{blade}} M_{x(i)}^{hr} \cos\psi_i \\ M_{y-com}^{hnr} &= \sum_{i=1}^{N_{blade}} M_{x(i)}^{hr} \sin\psi_i \end{aligned} \tag{2.91}$$

Inoltre in presenza di offset di cerniera, *hinge-offset* e *torque-offset*, bisogna riportare i carichi al centro di rotazione H (vedi Fig.2.11) dell'hub, considerando dei momenti di trasporto. Indicando tra parentesi i poli rispetto ai quali sono calcolati si ha:

$$\begin{cases} M_x^{hr}(H) = M_x^{hr}(H') + F_z^{hr} e_0 \\ M_y^{hr}(H) = M_y^{hr}(H') - F_z^{hr} e_H \\ M_z^{hr}(H) = M_z^{hr}(H') - F_x^{hr} e_0 + F_y^{hr} e_H \end{cases} \tag{2.92}$$

D'ora in poi si indicheranno i carichi al mozzo distinguendoli in un vettore dei tagli ed uno dei momenti,indicati rispettivamente con:

$$\mathbf{V}_{\text{Hub}}^{\text{hnr}} = \begin{Bmatrix} F_x^{\text{hnr}} \\ F_y^{\text{hnr}} \\ F_z^{\text{hnr}} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M}_{\text{Hub}}^{\text{hnr}} = \begin{Bmatrix} M_x^{\text{hnr}} \\ M_y^{\text{hnr}} \\ M_z^{\text{hnr}} \end{Bmatrix} \tag{2.93}$$

2.5.2 I carichi all'estremità alare

Sulla presenza della gondola e sulla sua importanza nella catena cinematica tra ala e rotore ci si è gia soffermati in precedenza. Prescindendo dall'effetto aerodinamico, che non appare in prima analisi il principale, sono le caratteristiche inerziali che la contraddistinguono dandole un ruolo attivo nella dinamica strutturale dell'ala e nel passaggio dei carichi che dal rotore arrivano alla fusoliera. Riprendendo gli aspetti fondamentali già descritti, nella gondola è alloggiato il motore e parte della trasmissione, ed è essa che determina col suo posizionamento rispetto alla Wing-tip le modalità di volo del convertiplano. Il pilone infatti è collegato alla sezione estremale dell'ala, al pivot-point PVP, attorno al quale può ruotare di un angolo pari ad α_{sh}.
Nel presente modello il pilone è considerato un corpo rigido, esso incide sui seguenti aspetti:

- Sotto il profilo cinematico, attraverso la distanza tra il PVP e l'hub H, $\mathbf{h}_P$.
- Dal punto di vista dinamico, in quanto scarica sull'ala non solo i carichi all'hub, calcolati nel paragrafo 2.5.1, ma anche le proprie forze e momenti d'inerzia. I parametri che caratterizzano gli effetti inerziali della gondola sono la massa m_P, ed i suoi momenti di inerzia, dati nella matrice di inerzia $\mathbf{J}_P$.

Oggetto di questo paragrafo é il calcolo, noti i carichi all' hub e l'inerzia del pilone, dei carichi agenti al PVP della sezione estremale dell'ala: tre forze e tre momenti che indicheremo con due vettori nominati rispettivamente con $\mathbf{V}_{PVP}$ e $\mathbf{M}_{PVP}$.
Per calcolarli si è utilizzato un metodo simile a quelli usati nei modelli multibody per i corpi rigidi. Si sono cioè scritte le equazioni del moto del corpo rigido che definiamo qui di seguito in forma vettoriale.

La prima equazione esprime l'equilibrio alla traslazione:

$$m_P \mathbf{a}_{cg} = \mathbf{V}_{Hub} + \mathbf{V}_{PVP} + m_p \mathbf{g} + m_{Hub} \mathbf{g} \tag{2.94}$$

L'equilibrio alla rotazione, con polo nel baricentro, da invece:

$$\frac{d\mathbf{h}_{cg}}{dt} = \mathbf{M}_{Hub} + \mathbf{M}_{PVP} + \mathbf{x}^P_{cg} \wedge \mathbf{V}_{PVP} + (\mathbf{h}_P + \mathbf{x}^P_{cg}) \wedge (\mathbf{V}_{Hub} + m_{Hub}\mathbf{g}) \tag{2.95}$$

essendo $\mathbf{h}_{cg}$ il momento della quantità di moto della gondola, calco-

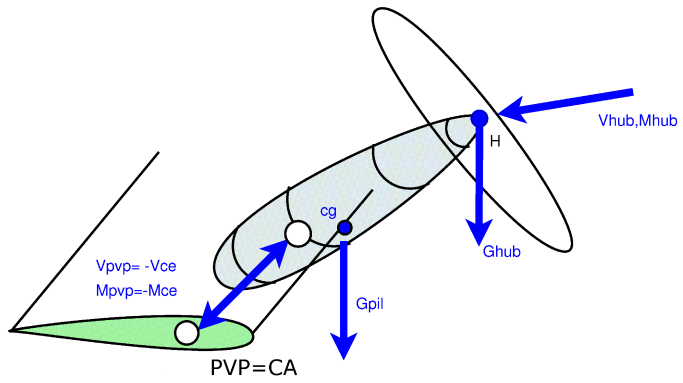


Figura 2.30: *Descrizione schematica dell' equilibrio rotore-gondola-ala*

lato con polo nel baricentro. Introducendo la terna **CG**, solidale alla gondola stessa e avente origine nel baricentro, possiamo definire:

$$\begin{cases} \mathbf{h}^{cg}_{cg} = \mathbf{J}^{cg}_P \omega_P \\ \dfrac{d\mathbf{h}_{cg}}{dt} = \left.\dfrac{d\mathbf{h}_{cg}}{dt}\right|_{cg} + \omega_P \wedge \mathbf{h}_{cg} = \dfrac{d(\mathbf{J}^{cg}_P \omega_P)}{dt} + \omega_P \wedge \mathbf{h}_{cg} \end{cases} \tag{2.96}$$

dove $\mathbf{J}^{cg}_P$ è la matrice di inerzia della gondola che ,essendo la terna **CG** principale, risulta costante. Il sistema di riferimento **baricentrale cg** non è stato definito nel Capitolo 1, esso è individuato dalla terna $\{cg, X_{cg}, Y_{cg}, Z_{cg}\}$ in figura 2.31. Si forniscono qui di seguito

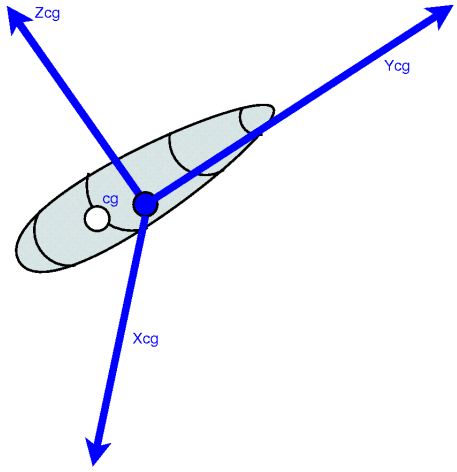


Figura 2.31: *Assi Baricentro*

le matrici di rotazione che lo collegano ai riferimenti idealmente adiacenti nella catena cinematica, ovvero **AD** e **HNR** .

$$\mathbf{R}_{ad-cg} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sin\alpha_{sh} & -\cos\alpha_{sh} \\ 0 & \cos\alpha_{sh} & \sin\alpha_{sh} \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{R}_{hnr-cg} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'equazione 2.94 eguaglia la forza di inerzia del pilone alle forze su esso agenti che sono:

- le forze trasmesse all'hub dal rotore, $\mathbf{V}_{Hub}$;
- le reazioni vincolari fornite dall'ala al PVP, $\mathbf{V}_{PVP}$;
- la forza peso della gondola, $m_p\mathbf{g}$, applicata ovviamente nel suo baricentro, la cui posizione rispetto al PVP è data dal vettore $\mathbf{x}^P_{cg}$;
- la forza peso del rotore, $m_{Hub}\mathbf{g}$, applicata all'hub.

Nella relazione 2.95 invece, che rappresenta l'equazione di bilancio dei momenti, i termini forzanti a secondo membro agenti sulla gondola sono:

- i momenti trasmessi dalle coppie all'hub, $\mathbf{M}_{Hub}$;
- i momenti dovuti alle forze all'Hub, $(\mathbf{h}_P + \mathbf{x}^P_{cg}) \wedge \mathbf{V}_{Hub}$;

- i momenti di reazione vincolare al PVP, $\mathbf{M}_{PVP}$, cui si aggiunge il trasporto, $\mathbf{x}^P_{cg} \wedge \mathbf{V}_{PVP}$, della forza di reazione vincolare essendo $\mathbf{x}^P_{cg}$ la posizione del baricentro rispetto al PVP;

- il momento dovuto al peso del rotore, $(\mathbf{h}_P + \mathbf{x}^P_{cg}) \wedge m_{Hub}\mathbf{g}$ (il contributo del peso del pilone è assente per la scelta del polo nel baricentro stesso).

La cinematica della gondola necessaria per la definizione dei contributi inerziali è nota, data quella della sezione al tip dell'ala, cui la nacelle è costruttivamente solidale:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_{cg} = \mathbf{a}_{PVP} + \omega_{\mathbf{wt}} \wedge \omega_{\mathbf{wt}} \wedge \mathbf{h}_P + \dot{\omega}_{wt} \wedge \mathbf{h}_P \\ = \left.\dfrac{d^2\mathbf{R}_{(PVP-O)}}{dt^2}\right|_{ai} + \omega_{\mathbf{wt}} \wedge \omega_{\mathbf{wt}} \wedge \mathbf{h}_P + \dot{\omega}_{wt} \wedge \mathbf{h}_P \\ \omega_P = \omega_{\mathbf{wt}} \quad ; \quad \dot{\omega}_{\mathbf{P}} = \dot{\omega}_{wt} \end{cases} \tag{2.97}$$

Dalle Eqq. 2.94 e 2.95, è dunque possibile ottenere le reazioni vincolari in funzione delle caratteristiche di moto dell'ala e dei carichi trasmessi dal rotore.

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{PVP} = m_P\mathbf{a}_{cg} - \mathbf{V}_{Hub} - m_p\mathbf{g} - m_{Hub}\mathbf{g} \\ \mathbf{M}_{PVP} = \dfrac{d\mathbf{h}_{cg}}{dt} - \mathbf{M}_{Hub} \\ \qquad - (\mathbf{h}_P + \mathbf{x}^P_{cg}) \wedge (\mathbf{V}_{Hub} + m_{Hub}\mathbf{g}) - \mathbf{x}^P_{cg} \wedge \mathbf{V}_{PVP} \end{cases} \tag{2.98}$$

In particolare risolvendo in sequenza le 2.98, si determinano le forze ed i momenti che l'ala, attraverso la sua sezione estremale, esercita sul pilone. Per determinare le forze e i momenti che il pilone riversa sull'ala al PVP, basta tenere in conto il terzo principo della dinamica per cui:

$$\begin{cases} \mathbf{V}_{CEw} = -\mathbf{V}_{PVP} \\ \mathbf{M}_{CEw} = -\mathbf{M}_{PVP} + \mathbf{e}_{AE} \wedge \mathbf{V}_{CEw} \end{cases} \tag{2.99}$$

avendo supposto il centro aerodinamico dell'ala coincidente con il *pivot point* al quarto di corda, come in Fig.2.30. Le forze ed i momenti ottenute dalle 2.99 nella terna **CG** , possono così essere trasformati nel riferimento **AI** dove vengono inserite nelle equazioni di equilibrio aeroelastico 2.22 applicate all' ala come forzanti concentrate alla Wing-tip.

Li indicheremo con:

$$\mathbf{V}^{ai}_{CEw} = \begin{Bmatrix} V_{(CEw)x} \\ V_{(CEw)y} \\ V_{(CEw)z} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{M}^{ai}_{CEw} = \begin{Bmatrix} M_{(CEw)x} \\ M_{(CEw)y} \\ M_{(CEw)z} \end{Bmatrix} \tag{2.100}$$

Si noti infine che, nel proiettare forze e momenti legati al peso tra i vari riferimenti, si deve tener conto dell'orientamento del velivolo attraverso l' angolo di rampa γ_{Climb}.

2.6 Equazioni dell'Equilibrio Aeroelastico per i modelli di ala e pala

Le Eq.2.22, che ripetiamo qui di seguito per completezza, sono le relazioni di equilibrio di un tratto infinitesimo di trave (ovvero, al limite, di una sezione) sottoposto a carichi esterni distribuiti. Data l'indeformabilità delle sezioni al taglio, le sei canoniche equazioni di equilibrio possono ridursi a quattro, qui riportate nel riferimento indeformato (**AI** per l'ala e **PIS** per la pala). Il sistema è composto da quattro equazioni differenziali nelle incognite $u(x,t)$, $v(x,t)$, $w(x,t)$ e $\phi(x,t)$:

$$\begin{cases} V_x' + p_x = 0 \\ M_x' + M_y' v' + M_z' w' + q_x + q_y v' + q_z w' = 0 \\ M_y'' + (V_x w')' + q_y' + p_z = 0 \\ M_z'' - (V_x v')' + q_z' - p_y = 0 \end{cases} \tag{2.101}$$

V_x, M_x, M_y e M_z, che qui compaiono derivate, sono le forze ed i momenti di coazione interna generate dall'elasticità del sistema e fornite dalle 2.29. Le $p_\square$ e le $q_\square$ invece sono le forze ed i momenti esterni distribuiti: in un problema di natura aeroelastica, esse rappresentano carichi inerziali ed aerodinamici di sezione. Sostituendo le 2.29 nelle 2.22 si ottengono finalmente le Eqq. 2.103. Esse sono in prima analisi formalmente valide sia per pala che per ala, escludendo le ovvie differenze presenti nelle forzanti distribuite a secondo membro, ma il modello strutturale scelto per l'ala si differenzia e semplifica rispetto a quello della pala in quanto è del tutto eliminata la dinamica assiale. Per la risoluzione esatta nel caso di una pala rotorica rimandiamo ai Rif.[4] e [7]; tuttavia è bene sintetizzarne i tratti salienti in questa sede, ricordando che da ora in poi le equazioni non verranno più trattate in modo generico, ma si distinguerà per ogni grandezza se essa appartenga ad ala o pala.

- La trave viene considerata inestensibile assialmente, la sola quota parte di allungamento assiale presente è una mera

conseguenza geometrica delle flessioni, ovvero:

$$
\begin{aligned}
u_b = &-\int_0^{x_b} \left(\frac{v_b^2}{2} + \frac{w_b^2}{2} \right) dx \\
&+ e^b_{A_{\eta_b}} \int_0^{x_b} [v_b'' \cos(\theta_{tw} + \phi_b) + w_b'' \sin(\theta_{tw} + \phi_b)] dx \\
&- e^b_{A_{\zeta_b}} \int_0^{x_b} [v_b'' \sin(\theta_{tw} + \phi_b) - w_b'' \cos(\theta_{tw} + \phi_b)] dx
\end{aligned}
\tag{2.102}
$$

- La prima delle Eq.2.103 viene utilizzata sia per ricavare lo spostamento elastico assiale u_b dalla sua definizione legata agli sforzi interni (dalla prima delle 2.29), sia per definire il *tiro* T come integrale delle forze esterne in direzione localmente tangente all'asse elastico. Sia u_b che T vengono poi sostituite nelle altre equazioni, riducendo il sistema a tre equazioni differenziali nelle incognite $v_b(x,t)$, $w_b(x,t)$, $\phi_b(x,t)$.

Nel caso dell'ala, come annunciato poc'anzi, appare evidente dalla prima delle 2.103 che il sistema non appare forzato in direzione assiale, l'intera dinamica di u_w è eliminata, e risulta $T \approx 0$[38].

[38] A priori in un Tiltrotor questa è un approssimazione, in quanto l'ala risulta forzata assialmente dalla forza laterale (*side force*) generata dal rotore, se in termini di valor medio questo contributo risulta comunque tracurabile, per una completa analisi dinamica potrebbe risultare interessante approfondire questo aspetto.

$$
\begin{cases}
V_x := T = \iint\limits_A \sigma_{xx} dA = \int_x^R p_x dx \\
\\
-(GJ\phi' + TK_A^2(\theta+\phi)')' + v''(Te_{A\zeta}\cos(\theta+\phi) + Te_{A\eta}\sin(\theta+\phi)) \\
+ w''(Te_{A\zeta}\sin(\theta+\phi) - Te_{A\eta}\cos(\theta+\phi)) \\
-(EI_{z'} - EI_{y'})[(v''^2 - w''^2)\dfrac{\sin 2(\theta+\phi)}{2} - v''w''\cos 2(\theta+\phi)] \\
+ EI_{y'z'}[(w''^2 - v''^2)\cos 2(\theta+\phi) \\
- 2v''w''\sin 2(\theta+\phi)] = q_x + q_y v' + q_z w' \\
\\
\Bigg(Te_{A\zeta}\sin(\theta+\phi) - Te_{A\eta}\cos(\theta+\phi) + [EI_{z'} - (EI_{z'} - EI_{y'})\sin^2(\theta+\phi)]v'' \\
+ (EI_{z'} - EI_{y'})\dfrac{\sin 2(\theta+\phi)}{2}w'' + EI_{y'z'}[\cos 2(\theta+\phi)w'' - \sin 2(\theta+\phi)v'']\Bigg)'' \\
-(Tv')' = p_y - q_z' \\
\\
-\Bigg(Te_{A\eta}\sin(\theta+\phi) + Te_{A\zeta}\cos(\theta+\phi) - [EI_{y'} + (EI_{z'} - EI_{y'})\sin^2(\theta+\phi)]w'' \\
+ (EI_{y'} - EI_{z'})\dfrac{\sin 2(\theta+\phi)}{2}v'' - [EI_{y'z'}(\cos 2(\theta+\phi))v'' + \sin 2(\theta+\phi)w'']\Bigg)'' \\
-(Tw')' = p_z + q_y'
\end{cases}
\tag{2.103}
$$

Qui di seguito vengono esplicitate le equazioni prima della pala, poi dell'ala nel suo **modello base**, infine si forniscono le equazioni dell'ala nella configurazione data dal **modello avanzato**, applicato specificamente alla configurazione del Tiltrotor *ERICA* di *Agusta-Westland*.
Le equazioni dell'ala e della pala vengono fornite opportunamente adimensionalizzate. L'adimensionalizzazione è una prassi comune, che facilita anche, qualora ce ne sia bisogno, l'identificazione degli ordini di grandezza tra i vari elementi che compongono un'equazione.
Prima di adimensionalizzare si noti che, sia per l'ala che per la pala:

- i termini nelle equazioni di flessione, fuori e nel piano, sono dimensionati come forze di sezione, $\left[\frac{\text{Newton}}{\text{metro}}\right]$

- i termini nelle equazioni della torsione sono dimensionati come momenti di sezione, $[\text{Newton}]$

I parametri utili per l'adimensionalizzazione della pala sono:

$$\begin{cases} R^{38} & \text{per le lunghezze} \\ \Omega^{-1} & \text{per i tempi} \\ m_{0b} & \text{per le masse} \end{cases}$$

Per l'ala invece ritroviamo:

$$\begin{cases} L_w & \text{per le lunghezze} \\ \Omega^{-1} & \text{per i tempi} \\ m_{0w} & \text{per le masse} \end{cases}$$

Si noti che, data la scelta del tempo caratteristico del sistema, Ω^{-1}, adimensionalizza i tempi anche per l'ala. In base a quanto appena detto per adimensionalizzare le equazioni strutturali si divideranno primo e secondo membro per:

- $m_{0b}\Omega^2 R$ e $m_{0b}\Omega^2 R^2$ per le equazioni rispettivamente di flessione e torsione della la pala.

- $m_{0w}\Omega^2 L_w$ e $m_{0w}\Omega^2 L_w^2$ per le equazioni rispettivamente di flessione e torsione alare.

[38] R in quest'accezione è il *raggio deformabile*, definito: $R_{def} = R - e_H$.

Definendo allora le seguenti grandezze adimensionali, per il rotore:

$$\begin{cases} \overline{x}_b = \dfrac{x_b}{R} \;;\; \overline{v}_b = \dfrac{v_b}{R} \;;\; \overline{w}_b = \dfrac{w_b}{R} \\ \overline{f}' = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{x}_b} \;;\; \dot{\overline{f}} = \dfrac{1}{\Omega}\dfrac{\partial f}{\partial t} \\ \mu_{1b} = \dfrac{k_{1b}}{R} \;;\; \mu_{2b} = \dfrac{k_{2b}}{R} \;;\; \mu_b = \dfrac{k_b}{R} \;;\; k_A = \dfrac{K_A}{R} \\ \Lambda_{1b} = \dfrac{EI_{y'}}{m_{0b}\Omega^2 R^4} \;;\; \Lambda_{2b} = \dfrac{EI_{z'}}{m_{0b}\Omega^2 R^4} \;;\; \kappa_b = \dfrac{GJ}{m_{0b}\Omega^2 R^4} \\ \Lambda_{12b} = \dfrac{EI_{y'z'}}{m_{0b}\Omega^2 R^4} \\ \overline{e}^b = \dfrac{e^b}{R} \;;\; \overline{e}^b_A = \dfrac{e^b}{R} \;;\; \overline{m}_b = \dfrac{m_b}{m_{0b}} \end{cases} \tag{2.104}$$

e per l'ala:

$$\begin{cases} \overline{x}_w = \dfrac{x_w}{L_w} \;;\; \overline{v}_w = \dfrac{v_w}{L_w} \;;\; \overline{w}_w = \dfrac{w_w}{L_w} \\ \overline{f}' = \dfrac{\partial f}{\partial \overline{x}_w} \;;\; \dot{\overline{f}} = \dfrac{1}{\Omega}\dfrac{\partial f}{\partial t} \\ \mu_{1w} = \dfrac{k_{1w}}{L_w} \;;\; \mu_{2w} = \dfrac{k_{2w}}{L_w} \;;\; \mu_w = \dfrac{k_w}{L_w} \;;\; K_w = \dfrac{k_{Aw}}{k_w} \\ \Lambda_{1w} = \dfrac{EI_{y'}}{m_{0w}\Omega^2 L_w^4} \;;\; \Lambda_{2w} = \dfrac{EI_{z'}}{m_{0w}\Omega^2 L_w^4} \;;\; \kappa_w = \dfrac{GJ}{m_{0w}\Omega^2 L_w^4} \\ \overline{e}^w = \dfrac{e^w}{L_w} \;;\; \overline{e}^w_A = \dfrac{e^w}{L_w} \;;\; \overline{e}^w_{AE} = \dfrac{e^w_{AE}}{L_w} \;;\; \overline{m}_w = \dfrac{m_w}{m_{0w}} \end{cases} \tag{2.105}$$

si è ottenuto quanto segue, a partire dalle 2.103.

2.6.1 Equazioni della pala

Alle Eqq. 2.106-2.111, che definiscono il modo elastico della pala, si ritiene corretto aggiungere in questa sede le equazioni dei moti rigidi attorno alle cerniere, introdotti dalla 2.13 e definite nel riferimento **PI**.

Equazione del Tiro

$$\overline{V}_x := \overline{T} = \int_{\overline{x}}^{1} \overline{p}_x^b d\overline{X}_{pis} \tag{2.106}$$

Equazione di Lead-lag

$$\begin{aligned}
&\Bigg\{\overline{T}\overline{e}_{A\zeta}\sin(\theta_{tw}+\phi_b) - \overline{T}\overline{e}_{A\eta}\cos(\theta_{tw}+\phi_b) + [\Lambda_{2b} - (\Lambda_{2b}-\Lambda_{1b})\sin^2(\theta_{tw}+\phi_b)]\overline{v}_b'' \\
&+ (\Lambda_{2b}-\Lambda_{1b})\frac{\sin 2(\theta_{tw}+\phi_b)}{2}\overline{w}_b'' + \Lambda_{12b}[\cos 2(\theta_{tw}+\phi_b)\overline{w}_b'' - \sin 2(\theta_{tw}+\phi_b)\overline{v}_b'']\Bigg\}'' \\
&- (\overline{T}\overline{v}_b')' = \overline{p}_y^{in-b} - \overline{q}_z'^{in-b} + \overline{L}_v^b
\end{aligned} \tag{2.107}$$

Moto rigido attorno alla cerniera di Lead-Lag

$$K_\gamma \gamma = M_\gamma = M_z^{pi} \tag{2.108}$$

Equazione di Flappeggio

$$\begin{aligned}
&-\Bigg\{\overline{T}\overline{e}_{A\eta}^b\sin(\theta_{tw}+\phi_b) + \overline{T}\overline{e}_{A\zeta}^b\cos(\theta_{tw}+\phi_b) - [\Lambda_{1b} + (\Lambda_{2b}-\Lambda_{1b})\sin^2(\theta_{tw}+\phi_b)]\overline{w}_b'' \\
&- \frac{(\Lambda_{2b}-\Lambda_{1b})}{2}\sin 2(\theta_{tw}+\phi_b)\overline{v}_b'' - [\Lambda_{12b}(\cos 2(\theta_{tw}+\phi_b))\overline{v}_b'' + \sin 2(\theta_{tw}+\phi_b)\overline{w}_b'']\Bigg\}'' \\
&- (\overline{T}\overline{w}_b')' = \overline{p}_z^{in-b} + \overline{q}_y'^{in-b} + \overline{L}_w^b
\end{aligned} \tag{2.109}$$

Moto rigido attorno alla cerniera di Flap

$$-K_\beta \beta = M_\beta = M_y^{pi} \tag{2.110}$$

Equazione di Torsione

$$\begin{aligned}
&-(\kappa_b \phi_b' + \overline{TK}_A^2(\theta_{tw} + \phi_b)')' + \overline{v}_b''(\overline{Te}_{A\zeta}^b \cos(\theta_{tw} + \phi_b) + \overline{Te}_{A\eta}^b \sin(\theta_{tw} + \phi_b)) \\
&+ \overline{w}_b''(\overline{Te}_{A\zeta}^b \sin(\theta_{tw} + \phi_b) - \overline{Te}_{A\eta}^b \cos(\theta_{tw} + \phi_b)) \\
&- \frac{(\Lambda_{2b} - \Lambda_{1b})}{2}[(\overline{v}_b''^2 - \overline{w}_b''^2)\sin 2(\theta_{tw} + \phi_b) - 2\overline{v}_b''\overline{w}_b'' \cos 2(\theta_{tw} + \phi_b)] \\
&+ \Lambda_{12b}[(\overline{w}_b''^2 - \overline{v}_b''^2)\cos 2(\theta_{tw} + \phi_b) \\
&- 2\overline{v}_b''\overline{w}_b'' \sin 2(\theta_{tw} + \phi_b)] = \overline{q}_x^{in-b} + \overline{v}_b'\overline{q}_y^{in-b} + \overline{w}_b'\overline{q}_z^{in-b} + \overline{M}_\phi^b
\end{aligned} \tag{2.111}$$

Moto rigido attorno alla cerniera di Torsione

$$K_\delta \delta = M_\delta = M_x^{pi} \tag{2.112}$$

2.6.2 Equazioni dell'ala: Modello Base

Qui di seguito vengono descritte le equazioni del moto elastico dell'ala. Come detto, l'assenza di significative forzanti a comporre il *tiro* T, ne elimina totalmente la dinamica assiale. Inoltre, la maggior semplicità strutturale delle sezioni, ci permette di semplificarne le espressioni imponendo la simmetria rispetto alla corda: ciò comporta, rispetto alle Eqq. 2.29, che siano nulli i prodotti di figura, così come le componenti degli offset non giacenti sulla corda.

$$\begin{cases} EI_{y'z'} = 0 \\ e_{\square,\zeta_w} = 0 \end{cases} \tag{2.113}$$

Accanto ai carichi distribuiti di sezione compaiono dei carichi concentrati al tip, dovuti come visto alla trasmissione dei carichi dal rotore. Data, infine, la maggiore semplicità dei carichi inerziali, definiti da 2.31, ed al numero esiguo di termini generati, questi vengono resi espliciti a primo membro. Il **modello base**, come definito in precedenza, vede l'ala come un unico corpo elastico cui

fanno capo tutte le caratteristiche aerostrutturali. Le equazioni sono definite nel riferimento **AI**

Moto di flessione nel piano

$$\left\{[\Lambda_{2w} - (\Lambda_{2w} - \Lambda_{1w})\sin^2(\theta_\Delta + \phi_w)]\overline{v}''_w + \frac{(\Lambda_{2w} - \Lambda_{1w})}{2}\sin 2(\theta_\Delta + \phi_w)\overline{w}''_w\right\}''$$
$$+ \overline{m}_w\ddot{\overline{v}}_w - \overline{m}_w\overline{e}^w_{\eta_w}\ddot{\overline{\phi}}_w \sin(\theta_\Delta + \phi_w) =$$
$$\overline{L}^w_v + \overline{V}_{(CEw)y}\delta(\overline{x}_w - 1) - (\overline{M}_{(CEw)z}\delta(\overline{x}_w - 1))' \tag{2.114}$$

Moto di flessione fuori dal piano

$$-\left\{-[\Lambda_{1w} + (\Lambda_{2w} - \Lambda_{1w})\sin^2(\theta_\Delta + \phi_w)]\overline{w}''_w - \frac{(\Lambda_{2w} - \Lambda_{1w})}{2}\sin 2(\theta_\Delta + \phi_w)\overline{v}''_w\right\}''$$
$$+ \overline{m}_w\ddot{\overline{w}}_w + \overline{m}_w\overline{e}^w_{\eta_w}\ddot{\overline{\phi}}_w \cos(\theta_\Delta + \phi_w) =$$
$$\overline{L}^w_w + \overline{V}_{(CEw)z}\delta(\overline{x}_w - 1) + (\overline{M}_{(CEw)y}\delta(\overline{x}_w - 1))' \tag{2.115}$$

Moto di torsione

$$-\kappa_w\overline{\phi}''_w - \frac{(\Lambda_{2w} - \Lambda_{1w})}{2}[(\overline{v}''^2_w - \overline{w}''^2_w)\sin 2(\theta_\Delta + \phi_w) - 2\overline{v}''_w\overline{w}''_w\cos 2(\theta_\Delta + \phi_w)]$$
$$+ \overline{m}_w\mu^2_w\ddot{\overline{\phi}}_w + \overline{m}_w\overline{e}^w\ddot{\overline{w}}_w\cos(\theta_\Delta + \phi_w) - \overline{m}_w\overline{e}^w\ddot{\overline{v}}_w\sin(\theta_\Delta + \phi_w) =$$
$$\overline{M}_{(CEw)x}\delta(\overline{x}_w - 1) + \overline{v}'_w\overline{M}_{(CEw)y}\delta(\overline{x}_w - 1) + \overline{w}'_w\overline{M}_{(CEw)z}\delta(\overline{x}_w - 1) + \overline{M}^w_\phi \tag{2.116}$$

2.6.3 Equazioni dell'ala: Modello avanzato

Il **modello avanzato** di descrizione dell'ala, introdotto nel paragrafo 2.1, si è reso necessario per meglio comprendere e descrivere il meccanismo di trasmissione dei carichi vibratori trasmessi in fusoliera, che è stato un obiettivo di questo lavoro di ricerca. Esso coadiuva l'analisi, descrivendo con maggior dettaglio i percorsi di carico seguiti nella struttura, sia per quanto concerne la quota parte proveniente dal rotore, che quella prettamente di origine aerodinamica, dovuta ai fenomeni di interferenza descritti in 2.3. Come introdotto nel paragrafo 2.1, il **modello avanzato** vede l'ala

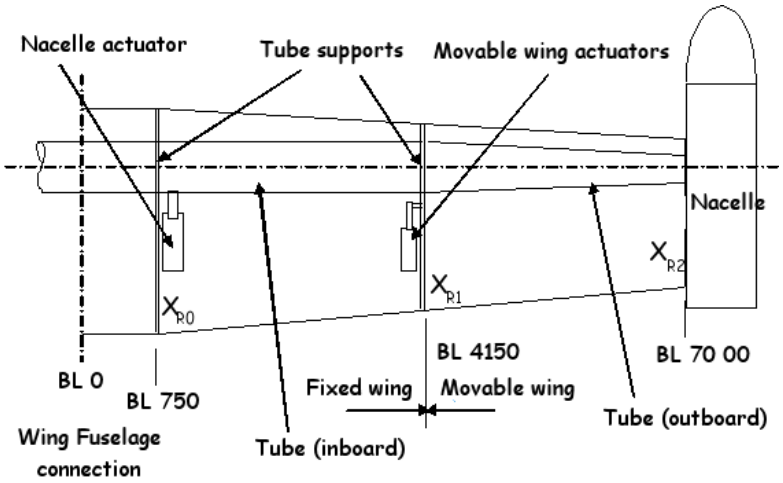


Figura 2.32: *Schema dell'ala del Tiltrotor ERICA di Agusta-Westland*

suddivisa in più corpi variamente vincolati, ed in questo lavoro è stato applicato alla configurazione del convertiplano di prossima generazione ERICA di *Agusta-Westland* (Rif. [30]).
Sulla base della Fig. 2.32, che ne rappresenta una semiala, distinguiamo:

Il *Torque Tube* [38], la struttura interna, una barra che corre attraverso le due semiali, collegando di fatto le due gondole, da cui riceve i carichi provenienti dal rotore e che assicura la sincronia del meccanismo di tiltaggio attravero due appositi attuatori.

La *Fixed-Wing* [38], l'ala interna, meno o per nulla soggetta ai fenomeni di interferenza aerodinamica col rotore.

La *Movable-Wing* [38],ovvero l'ala esterna; tiltabile indipendentemente rispetto al **TT** per mezzo di un apposito attuatore, interamente 'in ombra' rispetto al disco rotore.

Nella modellazione adottata, si è scelto di considerare **TT** e **FW** come corpi elastici, e la **MW** come corpo rigido.

Struttura e vincoli

In riferimento alla semiala in figura, la **FW** è incastrata in fusoliera attraverso la centina individuata da X_{R0}, che supponiamo come origine dell'ala[39]. Il **TT** è fissato alla nacelle e può ruotare all'interno dell'ala. E' sostenuto dalla **FW** attraverso la centina in X_{R1}, mentre, correndo per tutta l'ala, non risulta incastrato bensì appoggiato in X_{R0} (si veda Fig. 2.33); In X_{R1} è vincolato in termini degli spostamenti non assiali con la **FW**, in particolare:

$$\begin{cases} v_{FW}(X_{R1}, t) = v_{TT}(X_{R1}, t) \\ w_{FW}(X_{R1}, t) = w_{TT}(X_{R1}, t) - \Delta\eta_{CT}^{fw-tt}\phi_{FW} \end{cases} \tag{2.117}$$

dove con $\Delta\eta_{CT}^{fw-tt}$ si indica la distanza tra i centri di taglio del **TT** e della **FW**. L'attuatore della nacelle, posizionato vicino alla centina in X_{R0}, connette il Tubo alla fusoliera, consentendone la rotazione; ad esso è associato un grado di libertà torsionale $\delta\Theta_{tt}$, legato alla sua cedevolezza. L'ala mobile può ruotare attorno al Tubo ed è supportata allo stesso da due centine in X_{R1} ed X_{R2}; il suo attuatore è posizionato in X_{R1}, dove la vincola a torsione con la **FW**, su cui scarica il proprio carico torcente.
Possiamo dunque porre:

$$\Theta_{MW}(X_{R1}, t) = \phi_{FW}(X_{R1}, t) + \delta\Theta_{MW}(t) \tag{2.118}$$

Con l'espressione 2.118 si rimarca la scelta di descrivere la **MW** come corpo rigido con l'assenza di ϕ_{MW}, e si introduce $\delta\Theta_{MW}$, che, anlaogamente a quanto visto per il **TT**, rappresenta il grado di libertà associato alla cedevolezza dell'attuatore.

[38] **TT**
[38] **FW**
[38] **MW**
[39] X_{R0} è la distanza dalla linea di mezzeria dell'aeroplano, nonchè dalla metà del **TT**.

Percorsi di carico

I carichi generati da rotore e nacelle sono trasferiti all'estremità del **TT**; i tagli ed i momenti flettenti del **TT** si trasferiscono alle centine di supporto, mentre la coppia torcente è scaricata in fusoliera via attuatore. Per quanto concerne la **MW**, essa trasferisce i carichi attraverso le due centine di supporto direttamente al tubo, mentre, come anticipato, il momento torcente è scaricato direttamente alla **FW** attraverso il proprio attuatore.
In definitiva, **TT** e **FW** sono stati descritti applicando separatamente per ciascuno di essi il modello di trave descritto dalle Eqq. 2.103: ciascun corpo è dunque descritto da tre equazioni differenziali, rispettivamente di incognite v_{TT}, w_{TT}, ϕ_{TT} per il *Torque-Tube*, e v_{FW}, w_{FW}, ϕ_{FW} per l'ala fissa. Per quel che concerne il *Torque-tube*, vengono considerati anche un set di moti rigidi: $\delta\Theta_{tt}$, di cui si è già parlato, che è legato alla presenza dell'attuatore della nacelle, cui si aggiungono γ_{tt} e β_{tt} per gli spostamenti rispettivamente nel e fuori dal piano legati alla condizione di appoggio in X_{R0}, descritta precedentemente (Fig. 2.33).
Le due componenti dell'ala sono vincolate dalle 2.117 e scambiano mutue forze di taglio in X_{R1}, definite da

$$\mathbf{V}^{ai}_{FW-TT} = \begin{Bmatrix} 0 \\ V_{(FW-TT)y} \\ V_{(FW-TT)z} \end{Bmatrix} \; ; \; \mathbf{V}^{ai}_{TT-FW} = \begin{Bmatrix} 0 \\ V_{(TT-FW)y} \\ V_{(TT-FW)z} \end{Bmatrix} \tag{2.119}$$

essendo ovviamente, per il *terzo principio della dinamica*,

$$\mathbf{V}_{FW-TT} = -\mathbf{V}_{TT-FW} \tag{2.120}$$

L'ala mobile invece è stata modellata come un corpo rigido, che aggiunge al sistema il solo grado di libertà di torsione legato alla cedevolezza del proprio attuatore. Essa è soggetta a forze di taglio aerodinamiche ed inerziali (legate a loro volta al moto elastico di flessione del **TT** e di torsione della **FW**), e le scarica sul **TT** attraverso le due centine in X_{R1} ed X_{R2}, per ciascuna di esse si ha:

$$\mathbf{V}^{ai}_{MW-TT} = \begin{Bmatrix} 0 \\ V_{(MW-TT)y} \\ V_{(WW-TT)z} \end{Bmatrix} \; ; \; \mathbf{V}^{ai}_{TT-MW} = \begin{Bmatrix} 0 \\ V_{(TT-MW)y} \\ V_{(TT-MW)z} \end{Bmatrix} \tag{2.121}$$

dove ancora una volta

$$\mathbf{V}_{MW-TT} = -\mathbf{V}_{TT-MW} \tag{2.122}$$

Il momento torcente della **MW** è scaricato sulla **FW** mediante il proprio attuatore, per cui è possibile scrivere

$$\mathbf{M}_{MW-FW} = -\mathbf{M}_{FW-MW} = \begin{Bmatrix} K_{att}^{mw}\delta\Theta_{MW} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{2.123}$$

Determinazione delle reazioni vincolari

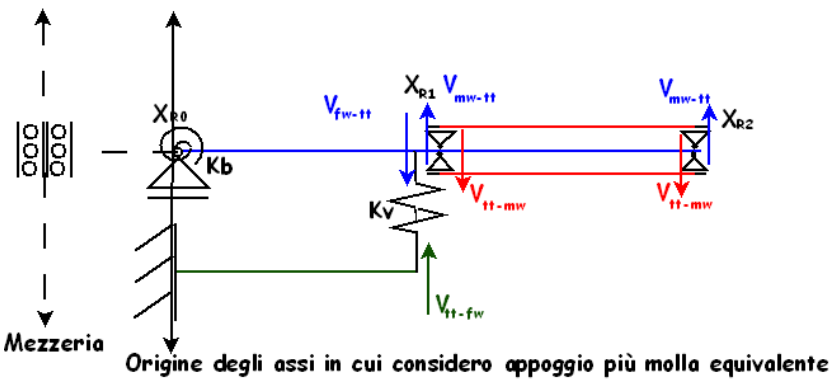


Figura 2.33: *Schema a travi del modello avanzato*

La figura 2.33 schematizza il modello costruito per rappresentare il sistema finora descritto.
Per quel che concerene le mutue azioni tra *torque-tube* e *fixed-wing*, ovvero i tagli sulla centina in X_{R1}, la modellazione scelta per facilità, nonchè efficienza numerica, è stata quella di un vincolo cedevole di costante generica K_v, tale che:

$$\mathbf{V}_{FW-TT}^{ai} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -K_v(v_{tt} - v_{fw}) \\ -K_v(w_{tt} - w_{fw} - \Delta\eta_{CT}^{fw-tt}\phi_{FW}) \end{Bmatrix} \tag{2.124}$$

ricordando sempre che

$$\mathbf{V}^{ai}_{TT-FW} = -\mathbf{V}^{ai}_{FW-TT}$$

In questo modo, per valori sufficientemente elevati della costante, si ottiene automaticamente il rispetto del vincolo di congruenza degli spostamenti definito dalle relazioni 2.117, inoltre le reazioni vincolari vengono automaticamente calcolate nota la soluzione aeroelastica.
La **MW**, come detto in precedenza, è stata descritta come un corpo rigido, la cui cinematica è parzialmente legata al modo elastico del **TT** che la supporta e della **FW** che la vincola a torsione mediante l'attuatore. I tagli scambiati tra *torque-tube* e *movable-wing* vengono quindi ottenuti dalle equazioni della *conservazione della quantità di moto* e del *momento angolare*:

$$\begin{cases} m_{mw}\mathbf{a}^{mw}_{cg} = \mathbf{F}^{mw}_{ae} + \mathbf{V}^{X_{R1}}_{TT-MW} + \mathbf{V}^{X_{R2}}_{TT-MW} \\ \dfrac{d\mathbf{h}^{cg}_{mw}}{dt} = \mathbf{M}^{mw}_{ae} + \mathbf{r}_{X_{R1}-cg} \wedge \mathbf{V}^{X_{R2}}_{TT-MW} + \mathbf{r}_{X_{R2}-cg} \wedge \mathbf{V}^{X_{R2}}_{TT-MW} \end{cases} \tag{2.125}$$

in cui $\mathbf{r}_{X_{R2}-cg}$ e $\mathbf{r}_{X_{R1}-cg}$ sono le distanze delle centine di appoggio dal centro di massa della *Movable-wing*, e in cui, considerando la prima componente della seconda equazione di fatto si ottiene l' Eq. 2.133.
Vale inoltre la pena di soffermarsi sul vincolo tra **TT** e fusoliera in X_{R0}. La figura 2.33 vuole metter in evidenza come, passando il *Torque-tube* da gondola a gondola attraverso l'ala, la modellazione richiedesse un vincolo d'appoggio all'origine dell'ala. La molla segnalata, di costante elastica K_b, tiene in conto dell'elasticità del tubo, che in realtà si deforma a partire dalla linea di mezzeria, dove sono ammessi degli spostamenti non assiali come è indicato dal carrello scorrevole[40]; la relazione tra la molla e la rigidezza del *Torque-tube* è data da:

$$K_b = \frac{\Lambda_{tt}}{\overline{X}_{R0}} \tag{2.126}$$

[40]La Fig. 2.33 indica solo spostamenti nel piano, ma è indicativa anche di quelli fuori dal piano.

Moto di flessione nel piano per il TT

$$
\begin{aligned}
&[\Lambda_{tt}\overline{v}''_{tt}]'' + \overline{m}_{tt}\ddot{\overline{v}}_{tt} = \overline{V}_{(CEw)y}\delta(\overline{x}_w - 1) - (\overline{M}_{(CEw)z}\delta(\overline{x}_w - 1))' \\
&+ (\overline{V}_{(FW-TT)y} + \overline{V}^{\overline{X}_{R1}}_{(MW-TT)y})\delta(\overline{x}_w - \overline{X}_{R1}) + \overline{V}^{\overline{X}_{R2}}_{(MW-TT)y})\delta(\overline{x}_w - 1)
\end{aligned}
\tag{2.127}
$$

Moto di flessione nel piano per la FW

$$
\begin{aligned}
&\left\{[\Lambda_{2fw} - (\Lambda_{2fw} - \Lambda_{1fw})\sin^2(\phi_{fw})]\overline{v}''_{fw} + \frac{(\Lambda_{2fw} - \Lambda_{1fw})}{2}\sin 2(\phi_{fw})\overline{w}''_{fw}\right\}'' \\
&+ \overline{m}_{fw}\ddot{\overline{v}}_{fw} - \overline{m}_{fw}\overline{e}^{w}_{\eta_{fw}}\ddot{\overline{\phi}}_{fw}\sin(\phi_{fw}) = \overline{L}^{fw}_{v} + \overline{V}_{(TT-FW)y}\delta(\overline{x}_w - 1)
\end{aligned}
\tag{2.128}
$$

Moto di flessione fuori dal piano per il TT

$$
\begin{aligned}
&[\Lambda_{tt}\overline{w}''_{tt}]'' + \overline{m}_{tt}\ddot{\overline{w}}_{tt} = \overline{V}_{(CEw)z}\delta(\overline{x}_w - 1) + (\overline{M}_{(CEw)y}\delta(\overline{x}_w - 1))' \\
&+ (\overline{V}_{(FW-TT)z} + \overline{V}^{\overline{X}_{R1}}_{(MW-TT)z})\delta(\overline{x}_w - \overline{X}_{R1}) + \overline{V}^{\overline{X}_{R2}}_{(MW-TT)z})\delta(\overline{x}_w - 1)
\end{aligned}
\tag{2.129}
$$

Moto di flessione fuori dal piano per la FW

$$
\begin{aligned}
&-\left\{-[\Lambda_{1fw} + (\Lambda_{2fw} - \Lambda_{1fw})\sin^2(\phi_{fw})]\overline{w}''_{fw} - \frac{(\Lambda_{2fw} - \Lambda_{1fw})}{2}\sin 2(\phi_{fw})\overline{v}''_{fw}\right\}'' \\
&+ \overline{m}_{fw}\ddot{\overline{w}}_{fw} + \overline{m}_{fw}\overline{e}^{w}_{\eta_{fw}}\ddot{\overline{\phi}}_{fw}\cos(\phi_{fw}) = \overline{L}^{fw}_{w} + \overline{V}_{(TT-FW)z}\delta(\overline{x}_w - 1)
\end{aligned}
\tag{2.130}
$$

Moto di torsione per il TT

$$
\begin{aligned}
&-\kappa_{tt}\overline{\phi}''_{tt} + \overline{m}_{tt}\mu^2_{tt}\ddot{\overline{\phi}}_{tt} = \\
&\overline{M}_{(CEw)x}\delta(\overline{x}_w - 1) + \overline{v}'_w\overline{M}_{(CEw)y}\delta(\overline{x}_w - 1) + \overline{w}'_w\overline{M}_{(CEw)z}\delta(\overline{x}_w - 1)
\end{aligned}
\tag{2.131}
$$

Moto di torsione per la FW

$$
\begin{aligned}
&-\kappa_{fw}\overline{\phi}''_{fw} - \frac{(\Lambda_{2fw}-\Lambda_{1fw})}{2}[(\overline{v}''^2_{fw}-\overline{w}''^2_{fw})\sin 2(\phi_{fw}) - 2\overline{v}''_{fw}\overline{w}''_{fw}\cos 2(\phi_{fw})] \\
&+\overline{m}_{fw}\mu^2_{fw}\ddot{\overline{\phi}}_{fw} + \overline{m}_{fw}\overline{e}^{fw}\ddot{\overline{w}}_{fw}\cos(\phi_{fw}) - \overline{m}_{fw}\overline{e}^{fw}\ddot{\overline{v}}_{fw}\sin(\phi_{fw}) = \\
&\overline{M}^{fw}_{\phi} + \overline{M}_{(MW-FW)}\delta(\overline{x}_w - 1) + \overline{V}_{(TT-FW)z}\overline{\Delta\eta}^{tt-fw}_{CT}\cos(\phi_{fw})\delta(\overline{x}_w - 1) \\
&-\overline{V}_{(TT-FW)y}\overline{\Delta\eta}^{tt-fw}_{CT}\sin(\phi_{fw})\delta(\overline{x}_w - 1)
\end{aligned}
\tag{2.132}
$$

Modo di torsione della MW

$$
\begin{aligned}
&\overline{M}_{(MW-FW)} = K^{mw}_{att}\delta\Theta_{MW} = \overline{M}^{mw}_{in}(\overline{v}_{fw}, \overline{w}_{fw}, \phi_{fw}, \overline{v}_{tt}, \overline{w}_{tt}, \phi_{tt}, \delta\Theta_{MW}) \\
&+\overline{M}^{mw}_{ae}(\overline{v}_{fw}, \overline{w}_{fw}, \phi_{fw}, \overline{v}_{tt}, \overline{w}_{tt}, \phi_{tt}, \delta\Theta_{MW})
\end{aligned}
\tag{2.133}
$$

Le Eqq. 2.127-2.133 sono date in forma adimensionale, le espressione con pedice $\square_{fw}$ e $\square_{tt}$ prendono il posto del pedice $\square_w$ nel **modello base**. Per esse valgono tutte le definizioni sui parametri adimensionali usati in 2.105, opportunamente adattate[41]. Ciascuna di esse è descritta nello specifico riferimento **AI** del corpo cui appartiene; l'equazione 2.133 è descritta sull'asse X_{ai} riferito al **TT**, su cui è applicata la coppia esercitata dall'attuatore. In essa $\overline{M}^{mw}_{ae}$ e $\overline{M}^{mw}_{in}$ rappresentano i momenti aerodinamici e inerziali della *movable wing* applicati al centro elastico del **TT** della sezione in X_{R1} Dalle equazioni di cui sopra, se confrontate con quelle del **modello base** (2.114-2.132), risultano evidenti alcuni tratti fondamentali del **modello avanzato**:

- In primo luogo viene evidenziato il differente percorso seguito dai carichi aerodinamici rispetto a quelli provenienti dal rotore. In questo caso infatti l'aerodinamica è applicata alle superfici portanti di **MW** e **FW**, mentre i carichi provenienti dal rotore vengono applicati sul **TT**.

- Compaiono le mutue azioni tra ala fissa, mobile e torque-tube, sotto forma di tagli e momenti.

[41] Per quel che concerne il **TT** viene assunta una sezione circolare, da cui $\Lambda_{1tt} = \Lambda_{2tt} = \Lambda_{tt}$, mentre le equazioni della *Fixed-wing* vengono adimensionalizzate dividendo per $m_{0fw}\Omega^2 L_{fw}$ per le flessioni e $m_{0fw}\Omega^2 L^2_{fw}$ per la torsione; la *Movable-wing* viene adimensionalizzata come il *Torque-tube*.

- La presenza di un offset $\Delta\eta_{CT}$ tra i centri di taglio del *Torque-tube*, dove sono applicati i tagli di reazione, e quelli della *movable* e della *fixed wing*, ingenera su queste ultime anche dei momenti torcenti.

Per completezza si riportano qui di seguito le equazioni di modo rigido del **TT** legate all'attuatore della nacelle e al vincolo di appoggio con molla in X_{R0}, sebbene, come si vedrà in seguito nel Capitolo 3, queste siano ricavate direttamente proiettando le Eqq. 2.127, 2.129 e 2.131 su opportune funzioni di forma di modo rigido.

Modo rigido di flessione nel piano per il TT

$$\begin{aligned}&\overline{I}_b\ddot{\overline{\gamma}}_{tt} + \overline{K}_v\gamma_{tt} = \overline{V}_{(CEw)y} - \overline{M}_{(CEw)z}\\&+ (\overline{V}_{(FW-TT)y} + \overline{V}^{\overline{X}_{R1}}_{(MW-TT)y})\overline{X}_{R1} + \overline{V}^{\overline{X}_{R2}}_{(MW-TT)y}\overline{X}_{R2}\end{aligned} \tag{2.134}$$

Modo rigido di flessione fuori dal piano per il TT

$$\begin{aligned}&\overline{I}_b\ddot{\overline{\beta}}_{tt} + \overline{K}_v\beta_{tt} = \overline{V}_{(CEw)z} + \overline{M}_{(CEw)y}\\&+ (\overline{V}_{(FW-TT)z} + \overline{V}^{\overline{X}_{R1}}_{(MW-TT)z})\overline{X}_{R1} + \overline{V}^{\overline{X}_{R2}}_{(MW-TT)z}\overline{X}_{R2}\end{aligned} \tag{2.135}$$

Modo rigido di Torsione per il TT

$$\overline{I}_\Theta\ddot{\overline{\delta\Theta}}_{tt} + \overline{K}^{tt}_{att}\delta\Theta = \overline{M}_{(CEw)x} + \overline{v}'_{tt}(1)\overline{M}_{(CEw)y} + \overline{w}'_{tt}(1)\overline{M}_{(CEw)z} \tag{2.136}$$

Nelle Eqq. 2.134-2.136 rimangono da definire il momento ed il momento polare di inerzia:

$$\overline{I}_b = \int_0^1 \overline{m}_{tt}X^2 dx$$

$$\overline{I}_\Theta = \int_0^1 \overline{m}_{tt}\mu^2_{tt} dx$$

oltre che far notare che nella 2.136 $\overline{v}'_{tt}$ e $\overline{w}'_{tt}$ contengono sia le deflessioni rigide che quelle elastiche.

2.6.4 Modalità di inclusione nella modellazione della catena di comando: accoppiamenti cinematici

Questa sezione si sofferma sul ruolo della catena di comando. Come è stato precedentemente accennato, i Tiltrotor usufruiscono dei convenzionali comandi elicotteristici per governare il rotore, cioé *collettivo* e *ciclico*, che definiscono l'angolo θ_{com} attraverso la relazione 2.12, che qui ripetiamo per completezza:

$$\theta_{com}(t) = \theta_{coll} + \theta_{1c} \cos\psi + \theta_{1s} \sin\psi$$

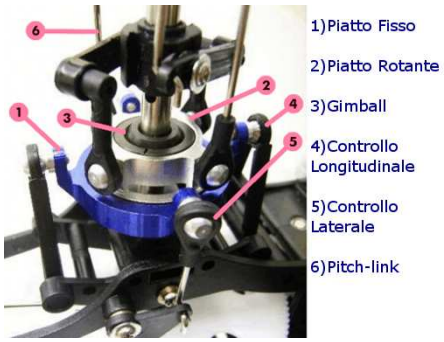


Figura 2.34: *Esempio di Swashplate in rotore da modellismo*

La figura 2.34 mostra in modo semplice i principali componenti che permettono l'attuazione del comando componendo la struttura dello *swashplate*. In modo del tutto generico esso è composto da due piatti. Il piatto inferiore è *fisso*, ovvero solidale al *mast*, il secondo ruota assieme all'albero. I controlli agiscono direttamente sul piatto fisso, costringendo quello mobile ad adattarsi; mentre i due *ciclici* lo inclinano, il *collettivo* agisce traslandolo. Una serie di leveraggi si accompagna allo *swashplate*, in particolare i *pitch-link*, ognuno dei quali collega il piatto mobile ad una delle pale. L'altezza del *pitch-link* è direttamente collegata all'assetto in termini di incidenza della pala, per cui l'altezza del piatto fisso fornirà a tutte le pale lo stesso angolo, il *collettivo*, mentre il moto alternativo dei *pitch-link* derivante dall'inclinazione del piatto darà l'incidenza variabile lungo il giro, ovvero i comandi *ciclici*, con l'effetto che ne consegue. La presenza della dinamica della catena di comando non è di sovente inclusa nei modelli di simulazione, nonostante essa possa risultare

parte integrante dei fenomeni riscontrati in alcune fenomenologie allo studio in campo elicotteristico (si pensi ad esempio a fenomeni di RPC[42]). Nel modello presentato la catena di comando non compare in termini di dinamica, ciò vuol dire che non aggiunge in modo diretto alcuna variabile al problema aeroelastico considerato. L'espressione *'in modo diretto'* non è casuale, essa compare cioè attraverso gli effetti secondari che la sua morfologia comporta sul resto del sistema. In particolare è utile in questa sede ricordare l'inclusione nella modellazione sia dei modi rigidi della pala definiti dalle 2.13, che dei modi rigidi dell'hub descritti dalle 2.141, in particolare del basculamento longitudinale e laterale legato al gimbal. Tutti questi elementi possono essere direttamente collegati alla catena di comando.

- Il moto rigido di torsione della pala infatti, può essere utilizzato nel modello per inserire la rigidezza torsionale della catena di controllo (a sua volta connessa direttamente, attraverso la geometria, alle rigidezze assiali dei leveraggi), che a quel punto ne governerà il moto essendo l'equazione corrispondente data da:

$$K_{\theta_{com}}\delta = M_\delta \tag{2.137}$$

  dove con $K_{\theta_{com}}$ si intende appunto la rigidezza della catena di comando, e com M_δ il momento delle forze esterne, aerodinamiche ed inerziali, agenti alla cerniera della pala.

- I moti rigidi di Lead-lag e Flappeggio, così come il basculamento dovuto al gimbal agiscono invece per effetto degli *Accoppiamenti Cinematici*, già noti in elicotteristica: essi sono un effetto di *feedback* che modifica l'angolo di incidenza effettivamente visto dalla pala per un dato comando. Dato un *collettivo* infatti, ovvero un assetto della catena di comando, una disposizione delle cerniere di Lead-lag e flappeggio all'interno della pala rispetto al *pitch-link* (Il gimbal è sempre all'interno stando al centro di rotazione dell'hub), genera un effetto simile a quello di una cerniera sghemba (come illustrato dalla fig.2.35 per quanto concerne il flappeggio). Ad un comando dato dal pilota, θ_{com}, corrisponde per effetto degli accoppiamenti cinematici un angolo effettivo

$$\theta_{com}^{eff} = \theta_{com} - K_{PG}(\beta_C \cos\psi + \beta_S \sin\psi) - K_{PF}\beta - K_{PL}\gamma \tag{2.138}$$

[42]Rotor Pilot Coupling

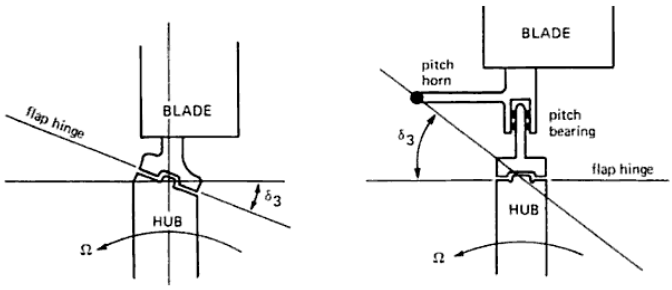


Figura 2.35: *Effetto di Pitch-Flap Coupling, [8]*

nella cui espressione gli accoppiamenti cinematici compaiono per mezzo delle $K_{\square}$, che definiamo nell'ordine:

$$\begin{array}{ll} K_{PG} & \text{Pitch-gimbal Coupling} \\ K_{PF} & \text{Pitch-Flap Coupling} \\ K_{PL} & \text{Pitch-Lag Coupling} \end{array} \tag{2.139}$$

Essi dipendono direttamente dalla morfologia della catena di controllo, ergo dal valore del collettivo che cambia posizioni e distanze tra i vari componenti, oltre che dal posizionamento del *pitch-link* rispetto delle cerniere ed al gimbal stesso. In riferimento alla figura 2.35 la geometria definisce un angolo notevole, che fornisce il legame tra geometria e costante di accoppiamento cinematico. Nel caso specifico si ha :

$$K_{PF} = \tan \delta_3$$

Il segno dato alle $K_{\square}$ nella relazione 2.138 indica una geometria per cui l'effetto è di una diminuzione di incidenza per spostamento positivo, diverse geometrie chiaramente comportano un cambio di segno dato alle costanti di accoppiamento.

2.7 Modellazione dell'Hub *Flappante* e del gimbal

Come già descritto in precedenza, nella definizione anglofona di *Hub Flappante* vengono considerate tutte quelle componenti del rotore che partecipano alla dinamica strutturale, influenzando cinematicamente le pale, e descrivendo la propria dinamica in base alle forze che esse vi scaricano, alla propria rigidezza e alle proprie caratteristiche inerziali.
Il gimbal, che rientra nella precedente definizione, è l'elemento più importante tra quelli sopra citati, ed è l'unico, se presente, imprescindibile ai fini della modellazione aeroelastica caratterizzando una famiglia di rotori molto usati sulle configurazioni Tiltrotor. Esso è essenzialmente un giunto universale posizionato al centro di rotazione del mozzo. Come si osserva dalla fig. 2.3, i rotori non sono definiti solo dalle pale, ma sono composti da una serie di numerosi elementi: dai più complessi, con funzioni specifiche come i cuscinetti, gli elementi elastomerici, le molle che costituiscono le cerniere, il gimbal o la trasmissione, ai più banali, come le filettature che uniscono i vari componenti. Se molti di essi possono ritenersi in prima analisi del tutto trascurabili, (gimbal a parte) essi risultano comunque avere un ruolo sensibile nella modellazione aeroelastica del rotore, in quanto introducono cedevolezze ed inerzia, e quindi generano ulteriori *modi* che si aggiungono a quelli delle pale e che con essi si accoppiano. Per un modello FEM, a seconda di quanto sia elaborato, è agevolmente possibile inserire una ad una tutte queste componenti.

Il modello qui sviluppato, che, si ribadisce, si basa su un approccio modale, è stato dunque arricchito dalla possibilità di inserire questi modi aggiuntivi dotando il rotore, ovvero lo shaft ed il disco rotorico, dei sei possibili gradi di libertà di moto rigido, forzati dai carichi al mozzo che la somma delle pale esercita su di esso.

La fig. 2.36 è indicativa dei diversi gradi di libertà forniti allo shaft, essi sono definiti nel sistema di riferimento **NRH** ed hanno origini assai diverse.

- Il moto di basculamento del disco rotorico è legato essenzialmente alla presenza del gimbal, ed è definito dagli angoli β_C longitudinalmente e β_S lateralmente.

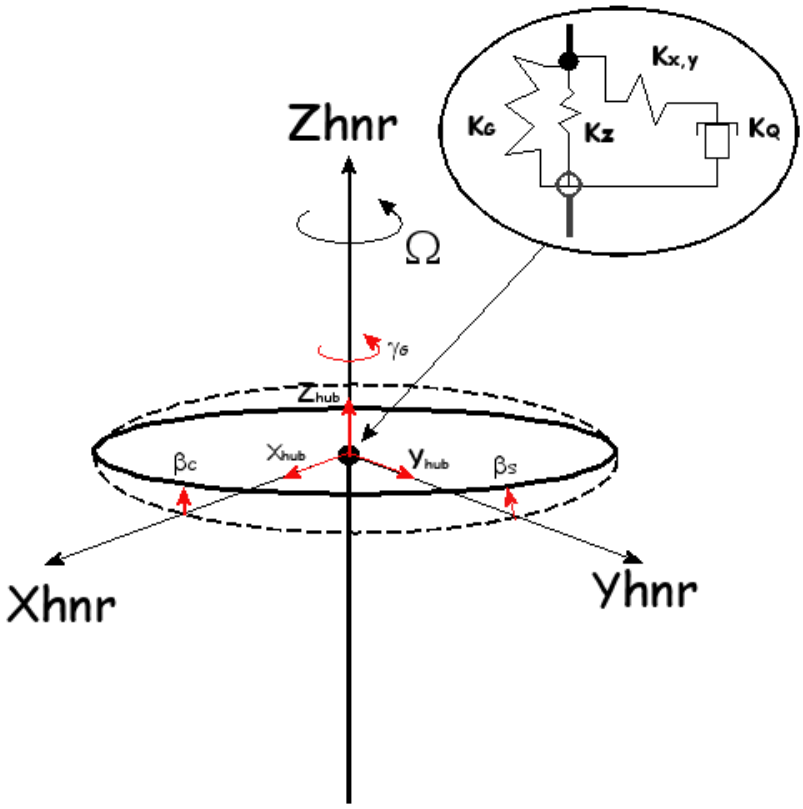


Figura 2.36: *Schema della modellazione dell'hub*

- La rotazione fuori dal piano è dovuta principalmente alla cedevolezza della trasmissione[43], che viene forzata dalla coppia. Per completezza di trattazione si noti come il grado di libertà γ_G che la identifica comporti la necessità di modificare la matrice di rotazione descritta dalla 2.10 che diventa:

$$\mathbf{R_{hnr-hr}} = \begin{bmatrix} \cos(\psi+\gamma_G) & \sin(\psi+\gamma_G) & 0 \\ -\sin(\psi+\gamma_G) & \cos(\psi+\gamma_G) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.140}$$

- Le tre traslazioni, due radiali, X^{hnr}_{hub} e Y^{hnr}_{hub} ed una assiale, Z^{hnr}_{hub} sono legate in genere sia alla rigidezza degli elastomerici, che alla cedevolezza delle filettature.

2.7.1 Le Equazioni del moto dell'Hub

Per quanto detto fin'ora le equazioni del moto rigido dell'hub, descritte nel riferimento **HNR**, risultano essere:

$$\begin{cases} K_x X^{hnr}_{hub} + C_x \dot{X}^{hnr}_{hub} = F^{hnr}_x - m_H a^{hnr}_{xHub} \\ K_y Y^{hnr}_{hub} + C_y \dot{Y}^{hnr}_{hub} = F^{hnr}_y - m_H a^{hnr}_{yHub} \\ K_z Z^{hnr}_{hub} + C_z \dot{Z}^{hnr}_{hub} = F^{hnr}_z - m_H a^{hnr}_{zHub} \\ K_G \beta_S + C_G \dot{\beta}_S = M^{hnr}_x \\ -K_G \beta_C + C_G \dot{\beta}_C = M^{hnr}_y \\ K_Q \gamma_G = M^{hnr}_z \end{cases} \tag{2.141}$$

In esse distinguiamo:

- A primo membro i termini di rigidezza $K_\square$ e smorzamento $C_\square$(qui aggiunti per completezza ma non spesso disponibili e comunque poco influenti), che sono determinati da componenti elastomeriche, filettature e dalla catena di comando.

- A secondo membro le forzanti, che comprendono in primo luogo i carichi all'hub; a questi è però necessario aggiungere un termine inerziale pari al prodotto dell'accelerazione dell'hub

[43] *Drive-train*

$a_{\square Hub}$ per la quota parte di massa del blocco rotore m_H che non è compresa nella massa delle pale, a sua volta tenuta in conto nei carichi all'hub mediante l'integrazione dei termini inerziali compresi nelle 2.86.

Una nota a margine, infine, merita la sesta equazione delle 2.141, che può essere utilizzata per descrivere la condizione notevole di *autorotazione*, in cui nessuna potenza è fornita dal motore al rotore; la traduzione in termini matematici di questa modalità è data da:

$$K_Q \gamma_G = 0 \tag{2.142}$$

con cui si evidenzia che non viene trasmessa coppia dal rotore, che viene mantenuto in rotazione con un funzionamento *a mulino* (*windmilling condition*).

CAPITOLO 3

Metodi per lo studio di Stabilità e Risposta

3.1 Discretizzazione delle equazioni

Il sistema accoppiato ala-rotore oggetto di questo studio è descritto, nella sua versione più completa, dalle Eqq. 2.107-2.136 e dalle 2.141, che costituiscono un set integro-differenziale non lineare.
Per entrambe le classi di problemi affrontate, ovvero *Risposta e Stabilità*, esse vengono risolte con un approccio modale ed integrate attraverso il *Metodo di Galërkin*, fatta eccezione per le equazioni dell'hub che sono già agevolmente descrivibili in forma matriciale adatta alla risoluzione. Tale metodo consiste nel descrivere le deformazioni elastiche, sia per le pale che per l'ala, come combinazione lineare di *funzioni di forma*:

$$
\begin{aligned}
v(\overline{x}, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} q_i^v(t)\Psi_i(\overline{x}) \\
w(\overline{x}, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} q_i^w(t)\Psi_i(\overline{x}) \\
\phi(\overline{x}, t) &= \sum_{i=1}^{\infty} q_i^\phi(t)\Theta_i(\overline{x})
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

essendo Ψ_i, Θ_i i modi naturali di vibrazione, rispettivamente a flessione e torsione della trave non-rotante, per i quali valgono le seguen-

ti espressioni:

$$\begin{cases} \Psi_i(\overline{x}) = \cosh(\beta_i\overline{x}) - \cos(\beta_i\overline{x}) - \alpha_i[\sinh(\beta_i\overline{x}) - \sin(\beta_i\overline{x})] \\ \Theta_i(\overline{x}) = \sqrt{2}\sin(\gamma_i\overline{x}) \end{cases} \tag{3.2}$$

in cui $\gamma_i = \pi(i - 1/2)$ ed α_i e β_i sono ricavabili dalle condizioni di contorno per la trave incastrata.
Come già illustrato nel paragrafo 2.6.3, è possibile aggiungere al set di modi, le funzioni di forma della trave incernierata, adatte alla descrizione dei modi rigidi[1]:

$$\begin{cases} \Psi_{rig} = \overline{X} \\ \Theta_{rig} = 1 \end{cases} \tag{3.3}$$

L'integrazione avviene poi con una proiezione su ciascun modo j-esimo, ovvero integrando i membri di destra e di sinistra, che definiremo rispettivamente RHS[2] e LHS[3], sulla coordinata adimensionale che definisce la lunghezza di ala e/o pala, moltiplicandoli per il modo j-esimo. A titolo di esempio scriviamo:

$$\int_0^1 [..LHS..]_i \Psi_j(\overline{x})d\overline{x} = \int_0^1 (p^{str} + p^{in} + p^{ae})_i \Psi_j(\overline{x})d\overline{x} \tag{3.4}$$

con $j = 1, N_{mode}$. I termini del RHS sono divisibili in modo generico in una componente aerodinamica, una inerziale, ed una composta da termini strutturali non lineari[4]. La scomposizione modale delle deformazioni elastiche e la seguente proiezione secondo il *metodo di Galërkin* riportano le equazioni del sistema in una forma discretizzata, ovvero genericamente esprimibile in forma matriciale di dimensioni $N_{mode} \times N_{mode}$ come:

$$\mathbf{C}_L^{str}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_L^{str}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \tag{3.5}$$

In esse il vettore $\mathbf{x}$ contiene le ampiezze modali del sistema, e le altre variabili Lagrangiane del problema in esame, comprensive, a seconda delle esigenze, delle variabili di moto dell'hub e dell'ala, esso è così composto:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_{blade} \\ \mathbf{q}_{hub} \\ \mathbf{q}_{wing} \end{Bmatrix} \tag{3.6}$$

[1]Usate, ad esempio, per le variabili del **TT**, β_{tt} e γ_{tt}.
[2]Right Hand Side.
[3]Left Hand Side.
[4]Per i dettagli si veda l'Appendice.

essendo

$$\mathbf{q}_{blade} = \begin{Bmatrix} \gamma \\ q^{v}_{1-blade} \\ \cdot\cdot \\ q^{v}_{N_{mode}-blade} \\ \beta \\ q^{w}_{1-blade} \\ \cdot\cdot \\ q^{w}_{N_{mode}-blade} \\ \delta \\ q^{\phi}_{1-blade} \\ \cdot\cdot \\ q^{\phi}_{N_{mode}-blade} \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{q}_{hub} = \begin{Bmatrix} \beta_C \\ \beta_S \\ X_{hub} \\ Y_{hub} \\ Z_{hub} \\ \gamma_G \end{Bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{q}_{wing} = \begin{Bmatrix} q^{v}_{1-wing} \\ \cdot\cdot \\ q^{v}_{N_{mode}-wing} \\ q^{w}_{1-wing} \\ \cdot\cdot \\ q^{w}_{N_{mode}-wing} \\ q^{\phi}_{1-wing} \\ \cdot\cdot \\ q^{\phi}_{N_{mode}-wing} \end{Bmatrix} \tag{3.7}$$

3.1.1 Determinazione numerica delle matrici

A primo membro nell'equazione 3.5 compaiono:

- una *matrice di rigidezza* K^{str}_L, riconducibile per ala e pala ai termini lineari e costanti di natura elastica, legati alle forze interne ed alle rigidezze delle molle delle cerniere nelle Eqq. 2.107-2.136, nonché a quelle legate ai modi rigidi dell'hub.
- una *matrice di smorzamento* C^{str}_L, anch'essa costante e linere, legata agli smorzamenti strutturali del sistema.

La forzante $\mathbf{f}(\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$, definita dalla 3.4 contiene invece:

- Le forze generalizzate per i modi elastici di pala e ala.
- le forze ed i momenti relative alle equazioni di moto rigido dell'hub, nonchè ai moti rigidi di pala[4].

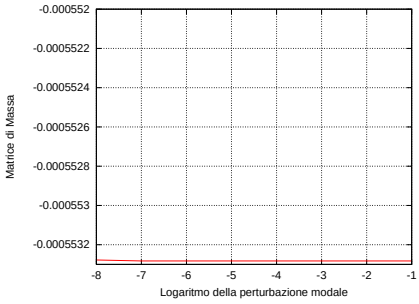
Entrambe le componenti di $\mathbf{f}$, com'è indicato, risultano tempo varianti e non lineari, ovvero dipendenti dalle variabili del sistema.

[4] I moti rigidi dell'ala sono invece compresi nelle forze generalizzate perchè ottenuti direttamente dalla proiezione modale sulle 3.3. Si ritiene utile ribadire

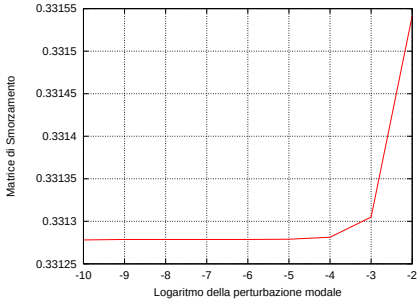
Fin dal principio di questo lavoro di ricerca è stato messo a punto un metodo numerico per la determinazione degli *Jacobiani* di *massa*, *smorzamento* e *rigidezza*, definiti rispettivamente come:

$$\hat{M}_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial \ddot{q}_j} \quad ; \quad \hat{C}_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial \dot{q}_j} \quad ; \quad \hat{K}_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \quad i = 1, N_{mode}; j = 1, N_{mode} \tag{3.8}$$

La costruzione delle matrici, per quanto complessa, si riduce quindi ad una variazione ricorsiva delle forzanti a secondo membro del sistema 3.5 rispetto alle variabili 3.6 ed alle loro derivate. L'operazione di definizione numerica delle matrici Jacobiane, sebbene uguale nel metodo, ha significati diversi a seconda che si tratti la *Risposta o Stabilità Aeroelastica*, che saranno esplorate nei paragrafi successivi; essa introduce ovviamente un' approssimazione rispetto alla soluzione analitica, che tuttavia risulta completamente trascurabile e stabile per una vasta gamma di valori dell'incremento, se sufficientemente piccoli, come mostrato nella figure qui di seguito.



Convergenza elemento di $\hat{\mathbf{M}}$



Convergenza elemento di $\hat{\mathbf{C}}$

in questa sede che la separazione dei moti rigidi da quelli elastici, per quanto riguarda le pale, dipende dalla possibile presenza dell'asse elastico non rettilineo, che non rende definibili assieme sulla stessa terna coordinata le deformazioni dell'asse elastico e gli spostamenti rigidi rispetto alle cerniere.

3.2 Risposta all'equilibrio

Come definito nel paragrafo 1.5, quando si parla di *Risposta Aeroelastica all'equilibrio* si definisce un problema a più strati di risoluzione: in primo luogo e in questa sede essa si può ricondurre al calcolo dello stato del sistema in condizioni di volo *trimmato* stazionario[5]. Lo stato del sistema è identificato dal valore delle deformazioni elastiche, ma anche degli assetti assunti dalle componenti rigide, come l'inclinazione del disco rotorico legata al Gimbal. La conoscenza dello stato del sistema è propedeutica, inoltre, a quella dei carichi stazionari e vibratori scaricati sul corpo macchina.
Nel nostro caso quindi sono state ottenute le deformazioni di ala e pala, assieme agli angoli che definiscono il moto rigido introdotto dal gimbal, e le ulteriori deformazioni dell'hub, nonchè gli spostamenti rigidi dovuti alle cedevolezze dei vari attuatori, ed attraverso la loro dinamica si è risaliti ai carichi passati dal rotore alla fusoliera.

3.2.1 Natura periodica del sistema Tiltrotor

Fino ad'ora si è spesso parlato di vibrazioni, il cui calcolo è stato uno degli obiettivi dichiarati di questo lavoro di ricerca, e si è già accennato più volte alla dipendenza delle stesse dell'aerodinamica e dall'elasticità. In questo paragrafo si vuole far ordine sui meccanismi che determinano le vibrazioni e che le legano nei casi trattati in questa sede alla natura periodica del sistema, che è un'ipotesi fondamentale per l'utilizzo dei modelli matematici qui adottati. Nel modello sviluppato il sistema Tiltrotor, in particolare il sottosistema ala-rotore che è incluso in questa modellazione, è considerato periodico, in modo più specifico il rotore è considerato composto da pale perfettamente identiche e sfasate tra di loro di un angolo $\frac{2\pi}{N_{blade}}$. Sebbene questo non sia mai del tutto possibile, è un ipotesi molto vicina alla realtà, che si mantiene vera a meno che non intervengano fenomeni, per lo più aerodinamici[6], a cambiare la situazione. Detti fenomeni non fanno parte di questo lavoro di ricerca, in cui è considerato un funzionamento a regime. In questo caso è possibile sviluppare i carichi al mozzo direttamente

[5] Qui rettilineo uniforme.
[6] Come ad esempio fenomeni di raffica.

attraverso il loro contributo armonico. In riferimento alle Eqq. 2.90 si considerino i seguenti passi:

- si sviluppino in serie di Fourier i carichi nel riferimento rotante, ovvero

$$\begin{cases} \mathbf{F}_i^{hr} = \mathbf{F}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{F}_{i-jc}^{hr} \cos(j\psi) + \mathbf{F}_{i-js}^{hr} \sin(j\psi) \\ \mathbf{M}_i^{hr} = \mathbf{M}_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{M}_{i-jc}^{hr} \cos(j\psi) + \mathbf{M}_{i-js}^{hr} \sin(j\psi) \end{cases} \tag{3.9}$$

- si inseriscano i termini armonici nelle 2.90

Sviluppando poi i termini ottenuti con formule trigonometriche opportune (vedi Rif. [14]) si ottengono le seguenti espressioni, qui riportate solo per le forze:

$$\begin{cases} F_x^{hnr} = \frac{N_{blade}}{2}(F_{x1c}^{hr} - F_{y1s}^{hr}) + \\ \quad \frac{N_{blade}}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{(jKN_{blade})} \left\{ [(F_{y(j-1)s}^{hr} - F_{y(j+1)s}^{hr}) + (F_{x(j-1)c}^{hr} + F_{x(j+1)c}^{hr})] \cos(j\psi) + \right. \\ \quad \left. [(-F_{y(j-1)c}^{hr} + F_{y(j+1)c}^{hr}) + (F_{x(j-1)s}^{hr} + F_{x(j+1)s}^{hr})] \sin(j\psi) \right\} \\ \\ F_y^{hnr} = \frac{N_{blade}}{2}(F_{y1c}^{hr} + F_{x1s}^{hr}) + \\ \quad \frac{N_{blade}}{2} \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{(jKN_{blade})} \left\{ [(F_{y(j-1)c}^{hr} + F_{y(j+1)c}^{hr}) + (-F_{x(j-1)s}^{hr} + F_{x(j+1)s}^{hr})] \cos(j\psi) + \right. \\ \quad \left. [(F_{y(j-1)s}^{hr} + F_{y(j+1)s}^{hr}) + (F_{x(j-1)c}^{hr} - F_{x(j+1)c}^{hr})] \sin(j\psi) \right\} \\ \\ F_z^{hnr} = N_{blade} \left\{ F_{z0}^{hr} + \sum_{j=1}^{\infty} \delta_{(jKN_{blade})} [F_{zjc}^{hr} \cos(j\psi) + F_{zjs}^{hr} \sin(j\psi)] \right\} \end{cases} \tag{3.10}$$

Nelle espressioni di cui sopra, si sono descritte le armoniche dei carichi al mozzo in funzione di quelle di una pala qualsiasi, sotto l'ipotesi che esse siano uguali tra loro e periodiche. Ne derivano alcune note ed importanti proprietà:

- Dato un contenuto armonico generico trasmesso alla radice di ciascuna pala dai carichi su di essa distrubuiti, il mozzo fa da filtro, ergo all'hub vengono scaricati solo i carichi stazionari, e le componenti armoniche di frequenza multipla della frequenza giro e del numero di pale, $jN_{blade}\Omega$.

- La composizione è diversa tra i carichi nel piano e quelli fuori dal piano. Per i primi ogni armonica j trasmessa all'hub deriva dalle armoniche $j+1$ e $j-1$ dei carichi su pala che li compongono; per i secondi invece la trasmissione e diretta, ovvero la j-esima armonica nel sistema non rotante è generata dalla j-esima armonica nel riferimento rotante.

In queste condizioni, se pure ideali, le pale sono soggette in modo identico per ogni giro (a parità di condizioni di volo) a carichi aerodinamici periodici, che ne determinano una dinamica armonica dal contenuto in frequenza generico, ma comunque esprimibile attraverso una serie di fourier dove l'armonica fondamentale è quella legata alla frequenza giro Ω (si veda il paragrafo seguente). L'ala invece, che se isolata sarebbe soggetta ad un'aerodinamica stazionaria e ad una soluzione elastica statica, è forzata anche dai carichi provenienti dall'hub del rotore e trasmessi alla sua estremità attraverso la gondola. La natura armonica dei carichi al mozzo è stata descritta poc'anzi, essa si mantiene intatta al tip alare attraverso le Eqq. 2.94-2.95 e dipende come visto dalle armoniche multiple del numero di pale $jN_{blade}\Omega$. A sua volta quindi, in funzione della sua struttura che ne costituisce la *funzione di trasferimento*, l'ala si deforma in modo periodico con frequenze multiple di quella giro e del numero di pale, ed è proprio questo che assicura che l'effetto cinematico del moto dell'ala sulle pale non ne alteri lo sfasamento e la periodicità. L'aerodinamica dell'ala al contempo acquisisce natura periodica legata alle frequenze $jN_{blade}\Omega$, sia a causa della deformazione elastica che rende pulsante e periodica la velocità, sia per tutti i fenomeni di aerodinamica interazionale descritti nel paragrafo 2.3.3, che sono legati agli impatti di scia ed al passaggio delle pale in prossimità dell'ala stessa, risultando così intrinsecamente dominati dalle frequenze $jN_{blade}\Omega$. I carichi scaricati alla radice dell'ala, ergo alla fusoliera, che sono una delle principali grandezze analizzate nel *Capitolo* 5, sono composti sia dai carichi al tip provenienti dal rotore, che dagli integrali lungo l'ala delle sue forze esterne aerodinamiche ed inerziali legate alla

conseguente deformazione elastica. Per le loro espressioni si rimanda all'*Appendice*, mentre per completezza li definiamo qui di seguito come:

$$\mathbf{V}^{ai}_{root} = \begin{Bmatrix} F^{ai}_x \\ F^{ai}_y \\ F^{ai}_z \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M}^{ai}_{root} = \begin{Bmatrix} M^{ai}_x \\ M^{ai}_y \\ M^{ai}_z \end{Bmatrix} \tag{3.11}$$

3.2.2 L'Harmonic-Balance

La metodologia usata per ottenere la soluzione all' equilibrio è stata l'Harmonic-Balance, un procedimento utilizzato in particolare per la risoluzione di problemi differenziali periodici, il cui più grande vantaggio rispetto ad un integrazione al passo nel tempo è di fornire direttamente la soluzione particolare all'equilibrio, saltando completamente la fase di transitorio governata dalla soluzione omogenea, che può risultare estremamente lunga dal punto di vista del calcolo numerico. Come visto poc'anzi, in condizioni di volo rettilineo uniforme, così come di volo a punto fisso ed in assenza di fattori di disturbo, quali ad esempio la presenza di raffiche, il sistema ala rotore è periodico, come un rotore isolato, e la frequenza dominante è fornita egualmente dalla velocità angolare del rotore Ω.
Il metodo Harmonic-Balance consiste nei seguenti passi:

- Si considera un sistema di equazioni aeroelastiche genericamente non lineare ed esprimibile come:

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}, t)\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(\mathbf{x}, t)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(\mathbf{x}, t)\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \tag{3.12}$$

- Si esprimono LHS ed RHS della 3.12 sviluppandoli in serie di Fourier.

- Tra LHS ed RHS si eguagliano i valori medi costituenti l'armonica zero, e, per ogni armonica superiore, i termini sinusoidali e cosinosuidali, riducendo così il problema differenziale ad un sistema di equazioni algebriche. Tale sistema, risolto, fornisce i coefficienti di Fourier che, nel caso in esame, ricostruiscono le ampiezze modali $\mathbf{x}$ delle deformazioni elastiche e gli spostamenti rigidi qualora presenti.

Gli sviluppi in serie di Fourier dei due membri riguardano, per quanto concerne l' LHS, le ampiezze modali:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{n=1}^{N_{arm}} [\mathbf{x}_n^c \cos \Omega_n t + \mathbf{x}_n^s \sin \Omega_n t] \tag{3.13}$$

e le matrici M, C, K:

$$\begin{aligned}
\mathbf{M}(t) &= \mathbf{M}_0 + \sum_{n=1}^{N_{arm}} [\mathbf{M}_n^c \cos \Omega_n t + \mathbf{M}_n^s \sin \Omega_n t] \\
\mathbf{C}(t) &= \mathbf{C}_0 + \sum_{n=1}^{N_{arm}} [\mathbf{C}_n^c \cos \Omega_n t + \mathbf{C}_n^s \sin \Omega_n t] \\
\mathbf{K}(t) &= \mathbf{K}_0 + \sum_{n=1}^{N_{arm}} [\mathbf{K}_n^c \cos \Omega_n t + \mathbf{K}_n^s \sin \Omega_n t]
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Per l' RHS invece si sviluppa la *forzante*

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 + \sum_{n=1}^{N_{arm}} [\mathbf{f}_n^c \cos \Omega_n t + \mathbf{f}_n^s \sin \Omega_n t] \tag{3.15}$$

In queste espressioni $\mathbf{x}_0, \mathbf{M}_0, \mathbf{C}_0, \mathbf{K}_0, \mathbf{f}_0$ sono vettori contenenti i valori medi delle N_{mode} ampiezze modali, analogamente $\mathbf{x}_n^s, \mathbf{M}_n^c, \mathbf{C}_n^c, \mathbf{K}_n^s, \mathbf{f}_n^c$ ne contengono N_{mode} coefficienti dei seni e coseni della n-esima armonica; $\Omega_n = n\Omega$, per finire, rappresenta un multiplo della frequenza fondamentale, pari alla velocitá angolare del motore.
Combinando le 3.15, 3.14, 3.13 con la 3.12 si ottiene il sistema algebrico di cui sopra, esprimibile in forma matriciale come:

$$[\widetilde{\mathbf{M}} + \widetilde{\mathbf{C}} + \widetilde{\mathbf{K}}]\widetilde{\mathbf{x}} = \widetilde{\mathbf{f}}(\widetilde{\mathbf{x}}) \tag{3.16}$$

dove

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{x}} = \left\{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1^c, \mathbf{x}_1^s, \mathbf{x}_2^c, \mathbf{x}_2^s, \ldots, \mathbf{x}_{N_{arm}}^s\right\} \\ \widetilde{\mathbf{f}} = \left\{\mathbf{f}_0, \mathbf{f}_1^c, \mathbf{f}_1^s, \mathbf{f}_2^c, \mathbf{f}_2^s, \ldots, \mathbf{f}_{N_{arm}}^s\right\} \end{cases} \tag{3.17}$$

mentre le tre matrici $\widetilde{\mathbf{M}}, \widetilde{\mathbf{C}}, \widetilde{\mathbf{K}}$ sono così composte:

$$\widetilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\Omega_1^2 M_1^c & -\frac{1}{2}\Omega_1^2 M_1^s & -\frac{1}{2}\Omega_1^2 M_2^c & -\frac{1}{2}\Omega_1^2 M_2^s & \cdots \\ 0 & -\Omega_1^2(M_0 + \frac{1}{2}M_2^c) & -\frac{1}{2}\Omega_1^2 M_2^s & -\frac{1}{2}\Omega_2^2(M_1^c + M_3^c) & -\frac{1}{2}\Omega_2^2(M_1^s + M_3^s) & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{2}\Omega_1^2 M_2^s & -\Omega_1^2(M_0 - \frac{1}{2}M_2^c) & -\frac{1}{2}\Omega_2^2(M_1^s - M_3^s) & -\frac{1}{2}\Omega_2^2(M_1^c - M_3^c) & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{2}\Omega_1^2(M_1^c + M_3^c) & \frac{1}{2}\Omega_1^2(M_1^s - M_3^s) & -\Omega_2^2(M_0 + \frac{1}{2}M_4^c) & -\frac{1}{2}\Omega_2^2 M_4^s & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{2}\Omega_1^2(M_1^s + M_3^s) & -\frac{1}{2}\Omega_1^2(M_1^c - M_3^c) & -\frac{1}{2}\Omega_2^2 M_4^s & -\Omega_2^2(M_0 - \frac{1}{2}M_4^c) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\Omega_1 \mathbf{C}_1^s & \frac{1}{2}\Omega_1 \mathbf{C}_1^c & -\frac{1}{2}\Omega_2 \mathbf{C}_2^s & \frac{1}{2}\Omega_2 \mathbf{C}_2^c & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{2}\Omega_1 \mathbf{C}_2^s & \Omega_1(\mathbf{C}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{C}_2^c) & -\frac{1}{2}\Omega_2(\mathbf{C}_1^s + \mathbf{C}_3^s) & \frac{1}{2}\Omega_2(\mathbf{C}_1^c + \mathbf{C}_3^c) & \cdots \\ 0 & \Omega_1(-\mathbf{C}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{C}_2^c) & \frac{1}{2}\Omega_1 \mathbf{C}_2^s & -\frac{1}{2}\Omega_2(\mathbf{C}_1^c - \mathbf{C}_3^c) & -\frac{1}{2}\Omega_2(\mathbf{C}_1^s - \mathbf{C}_3^s) & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2}\Omega_1(\mathbf{C}_1^s - \mathbf{C}_3^s) & \frac{1}{2}\Omega_1(\mathbf{C}_1^c + \mathbf{C}_3^c) & -\frac{1}{2}\Omega_2 \mathbf{C}_4^s & \Omega_2(\mathbf{C}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{C}_4^c) & \cdots \\ 0 & -\frac{1}{2}\Omega_1(\mathbf{C}_1^c - \mathbf{C}_3^c) & \frac{1}{2}\Omega_1(\mathbf{C}_1^s + \mathbf{C}_3^s) & \Omega_2(-\mathbf{C}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{C}_4^c) & \frac{1}{2}\Omega_2 \mathbf{C}_4^s & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{\mathbf{K}} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_0 & \frac{1}{2}\mathbf{K}_1^c & \frac{1}{2}\mathbf{K}_1^s & \frac{1}{2}\mathbf{K}_2^c & \frac{1}{2}\mathbf{K}_2^s & \cdots \\ \mathbf{K}_1^c & \mathbf{K}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{K}_2^c & \frac{1}{2}\mathbf{K}_2^s & \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1^c + \mathbf{K}_3^c) & \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1^s + \mathbf{K}_3^s) & \cdots \\ \mathbf{K}_1^s & \frac{1}{2}\mathbf{K}_2^s & \mathbf{K}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{K}_2^c & -\frac{1}{2}(\mathbf{K}_1^s - \mathbf{K}_3^s) & \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1^c - \mathbf{K}_3^c) & \cdots \\ \mathbf{K}_2^c & \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1^c + \mathbf{K}_3^c) & -\frac{1}{2}(\mathbf{K}_1^s - \mathbf{K}_3^s) & \mathbf{K}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{K}_4^c & \frac{1}{2}\mathbf{K}_4^s & \cdots \\ \mathbf{K}_2^s & \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1^s + \mathbf{K}_3^s) & \frac{1}{2}(\mathbf{K}_1^c - \mathbf{K}_3^c) & \frac{1}{2}\mathbf{K}_4^s & \mathbf{K}_0 - \frac{1}{2}\mathbf{K}_4^c & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

ed hanno dimensioni pari a $N_{mode} \cdot N_{fou}$ essendo N_{fou} il numero dei coefficienti di Fourier con cui sono sviluppate $\mathbf{x}$ e $\mathbf{f}$. Il set di equazioni algebriche, che definisce il sistema aeroelastico nella 3.16, è accoppiato tra le varie armoniche. Nel caso che le tre matrici $\mathbf{M}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{K}$ siano costanti, invece, la composizione delle $\widetilde{\mathbf{M}}$, $\widetilde{\mathbf{C}}$ e $\widetilde{\mathbf{K}}$ si semplifica ed il sistema algebrico risulta disaccoppiato.

3.2.3 Applicazione degli Jacobiani al problema della risposta

Dato il sistema definito dalla 3.5, la determinazione degli *Jacobiani di massa, smorzamento e rigidezza* descritta nel paragrafo 3.1.1 fa sì di poterlo riscrivere come:

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}(t)\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(t)\mathbf{x} = \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) \tag{3.18}$$

dove chiaramente valgono le definizioni di:

$$\begin{cases} \mathbf{M}(t) = -\widehat{\mathbf{M}}(t) \\ \mathbf{C}(t) = \mathbf{C}_L^{str}(t) - \widehat{\mathbf{C}}(t) \\ \mathbf{K}(t) = \mathbf{K}_L^{str}(t) - \widehat{\mathbf{K}}(t) \end{cases} \tag{3.19}$$

Applicando il metodo dell'Harmonic-Balance alla 3.18 si ottiene

$$[\widetilde{\mathbf{M}} + \widetilde{\mathbf{C}} + \widetilde{\mathbf{K}}]\widetilde{\mathbf{x}}_n = \widetilde{\mathbf{f}}(\widetilde{\mathbf{x}}_{n-1}) \tag{3.20}$$

dove con il pedice n si indica che, a fronte di un sistema non lineare, la soluzione dell'Harmonic-Balance prevede un processo iterativo. Il processo di derivazione numerica degli *Jacobiani* ha quindi un doppio possibile utilizzo:

- Se usato solo alla prima iterata[7], fornisce le matrici lineari del sistema.
- Se usato in iterate successive, definisce uno *Jacobiano* non lineare del sistema, che risulta senz'altro congeniale ad una migliore convergenza dell'algoritmo numerico (si consulti a proposito [23].).

In quest'ultimo caso, è possibile riscrivere l'Eq. 3.18 e la corrispondente 3.20 come segue:

$$\begin{cases} (\mathbf{M}(t) - \widehat{\mathbf{M}}_{n-1}(t))\ddot{\mathbf{x}}_n + (\mathbf{C}(t) - \widehat{\mathbf{C}}_{n-1}(t))\dot{\mathbf{x}}_n + (\mathbf{K} - \widehat{\mathbf{K}}_{n-1}(t))\mathbf{x}_n = \\ \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{x}}_{n-1}, \dot{\mathbf{x}}_{n-1}, \mathbf{x}_{n-1}, t) - \widehat{\mathbf{M}}_{n-1}(t)\ddot{\mathbf{x}}_{n-1} - \widehat{\mathbf{C}}_{n-1}(t)\dot{\mathbf{x}}_{n-1} - \widehat{\mathbf{K}}_{n-1}(t)\mathbf{x}_{n-1} \\ \\ [\widetilde{\mathbf{M}} + \widetilde{\mathbf{C}} + \widetilde{\mathbf{K}} - \mathbf{J}_{n-1}^{NL}]\widetilde{\mathbf{x}}_n = \widetilde{\mathbf{f}}(\widetilde{\mathbf{x}}_{n-1}) - \mathbf{J}_{n-1}^{NL}\widetilde{\mathbf{x}}_{n-1} \end{cases} \tag{3.21}$$

[7] Su una *initial guess* nulla.

in cui appaiono sottointese la seguente definizione:

$$J^{NL}_{i,j} = \frac{\partial \widetilde{f}_i}{\partial \widetilde{x}_j} \tag{3.22}$$

nonché l'uguaglianza (dimostrata in [23]):

$$\mathbf{J}^{NL}\widetilde{\mathbf{x}} = \mathcal{F}_{fourier}\left\{\widehat{\mathbf{M}}(t)\ddot{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{C}}(t)\dot{\mathbf{x}} + \widehat{\mathbf{K}}(t)\mathbf{x}\right\} \tag{3.23}$$

3.2.4 Procedura di calcolo dei carichi al mozzo ed alla radice alare: integrazione dei modelli aerostrutturali

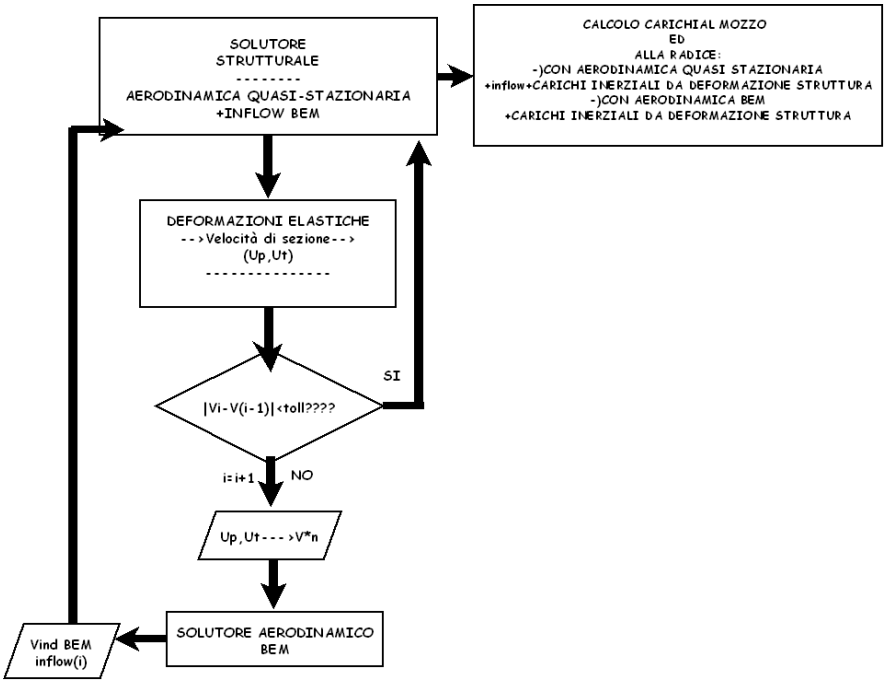


Figura 3.1: *Diagramma di flusso per il procedimento di calcolo dei carichi al mozzo ed alla radice mediante i modelli aerodinamici e strutturali presentati*

In questo paragrafo si conclude il tema della soluzione della *Risposta Aeroelastica*, che in questo lavoro di ricerca è stato finalizzato al calcolo dei carichi vibratori, al mozzo ed alla radice alare. La metodologia sviluppata interlaccia come si è già spiegato un solutore strutturale, basato sui modelli descritti nel Capitolo

2, e su quello aerodinamico 3D, BEM, descritto in particolare nel paragrafo 2.3.3. In breve si procede come segue:

- Si risolve un loop iterativo in cui il solutore aeroelastico strutturale, risolto con aerodinamica quasi stazionaria 2D, fornisce al solutore BEM le condizioni al contorno inclusive di moto rigido ed elastico. Il solutore BEM di rimando, determina la velocità indotta da incorporare nell'aerodinamica quasi-stazionaria.

- Una volta che il sistema arriva a convergenza, controllata sulle condizioni al contorno, si passa al calcolo dei carichi al mozzo ed alla radice alare.

- Il calcolo dei carichi può avvenire secondo due modalità:

  - Tramite integrazione dei carichi aerodinamici 2D, arricchiti da *inflow* BEM, ed inerziali prodotti dalla deformazione elastica della struttura.
  - Tramite carichi forniti direttamente dal BEM, sommati al contributo inerziale di deformazione della struttura.

3.3 Stabilitá dell' equilibrio

La stabilità è un problema notevole nella classe dei problemi aeroelastici. Uno dei metodi classici per l'osservazione della stabilità di un sistema è l'osservazione dei suoi *autovalori*.
Il problema della stabilitá é susseguente quello della risposta, proprio perché determina se una condizione di equilibrio sia stabile o meno, cioé se, a fronte di una perturbazione rispetto allo stato di equilibrio, si generino delle forze che tendano a riportare il sistema verso tale stato.
Una distinzione generale va fatta anche sulla definizione di stato di equillibrio che non puó rimanere la stessa per tutti i tipi di sistema.

Per un sistema a coefficienti costanti, quale puo' essere ad esempio un'ala isolata in riferimento a sistemi aeroelastici, la condizione di stato di equilibrio é data dalla risultante nulla delle forze esterne, e quindi da velocitá e accelerazioni nulle:

$$\begin{cases} \sum \mathbf{F}^{est}(\mathbf{x}_{eq}, t) = 0 \qquad \forall t \\ \sum \mathbf{M}^{est}(\mathbf{x}_{eq}, t) = 0 \qquad \forall t \\ \dot{\mathbf{x}}_{eq} = 0; \ddot{\mathbf{x}}_{eq} = 0 \end{cases}$$

Un sistema periodico, invece, come puó essere un rotore in volo d'avanzamento, vede forzanti periodiche, di conseguenza la sua soluzione all'equilibrio tende ad avere natura oscillante con frequenza dominante pari a quella della forzante, lo stato di equilibrio é definito da una soluzione periodica con velocitá ed accelerazione non nulle:

$$\begin{cases} \sum \mathbf{F}^{est}(\mathbf{x}_{eq}, t) = 0 \qquad \forall t \\ \sum \mathbf{M}^{est}(\mathbf{x}_{eq}, t) = 0 \qquad \forall t \\ \mathbf{x}_{eq}(t) = \mathbf{x}_{eq}(t + \Delta T) \qquad \Delta T = 2\pi/\Omega \\ \dot{\mathbf{x}}_{eq} \neq 0 \ ; \ \ddot{\mathbf{x}}_{eq} \neq 0 \end{cases}$$

Un Tiltrotor, di cui noi consideriamo configurazioni ala-rotore, é prevalentemante periodico. Difatti anche in configurazioni quali *hover* o *cruise-flight*, in cui un rotore sarebbe un sistema a coefficienti costanti, effetti di interferenza aerodinamica (vedi paragrafo

2.3) e l'effetto stesso di deformazione elastica dell'ala, che tende a variare l'assetto del rotore, incrementano le fonti di periodicità del sistema.

Nel corso di questo lavoro di ricerca, l'analisi di stabilità é stata eseguita mediante i seguenti passi:

- Si sono ottenute le equazioni del sistema linearizzato rispetto alle ampiezze modali.
- Si è attuata un'analisi agli autovalori, previa trasformazione delle variabili del rotore nelle note *coordinate multipala*.

Infine vale la pena rimarcare che in questo lavoro si considerano nulle le interazioni che naturalmente si instaurano tra mezzo e pilota, ovvero si considera un'analisi di stabilità definita a *comandi bloccati*.

3.3.1 Linearizzazione del sistema mediante gli Jacobiani

Come è illustrato qui di seguito, gli Jacobiani del sistema aeroelastico definiti dalle relazioni 3.8, ed usati per la risoluzione del problema della *Risposta Aeroelastica* (come visto in 3.2.3), possono essere egualmente utilizzati per determinare la matrice di stato del sistema aeroelastico, atta alla descrizione della dinamica delle piccole perturbazioni attorno all'equilibrio. Per il sistema aeroelastico oggetto di questo lavoro, descritto dall' Eq. 3.5

$$\mathbf{C}_L^{str}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_L^{str}\mathbf{x} = \mathbf{f}(\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t)$$

lo studio della stabilità si effettua in primo luogo riconducendosi all'*equazione perturbativa*, ovvero l'equazione della dinamica delle piccole perturbazioni, si pone:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_e q(t) + \Delta\mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}_e q(t) + \Delta\dot{\mathbf{x}}(t) \\ \ddot{\mathbf{x}}(t) &= \ddot{\mathbf{x}}_e q(t) + \Delta\ddot{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \tag{3.24}$$

essendo $\Delta\mathbf{x}(t)$ la variabile perturbativa. Sostituendo le 3.24 nella 3.5 si ottiene al LHS:

$$\mathbf{C}_L^{str}(\dot{\mathbf{x}}_{eq} + \Delta\dot{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}_L^{str}(\mathbf{x}_{eq} + \Delta\mathbf{x}) \tag{3.25}$$

mentre per il RHS è possibile ricorrere ad un'espansione al prim'ordine in serie di Taylor della forzante, per cui:

$$f_i(\ddot{\mathbf{x}}, \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{x}, t) = f_i^{eq}(t) + \left.\frac{\partial f_i}{\partial \ddot{x}_j}\right|_{eq} \Delta\ddot{x}_j + \left.\frac{\partial f_i}{\partial \dot{x}_j}\right|_{eq} \Delta\dot{x}_j + \left.\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|_{eq} \Delta x_j \tag{3.26}$$

Ricordando le definizioni degli *Jacobiani* del sistema date dalle 3.8, ed eguagliando LHS ed RHS si ottiene il seguente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{C}_L^{str}\dot{\mathbf{x}}_{eq} + \mathbf{K}_L^{str}\mathbf{x}_{eq} = f_i^{eq}(t) \\ -\widehat{\mathbf{M}}(t))\Delta\ddot{\mathbf{x}} + (\mathbf{C}_L^{str} - \widehat{\mathbf{C}}(t))\Delta\dot{\mathbf{x}} + (\mathbf{K}_L^{str} - \widehat{\mathbf{K}}(t))\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \end{cases} \tag{3.27}$$

La prima delle Eq. 3.27 è evidentemente rappresentativa del sistema all'equilibrio, mentre la seconda equazione differenziale omogenea lineare definisce la dinamica perturbativa su cui impostare lo studio degli autovalori, che può essere riscritta come segue:

$$\mathbf{M}^{\mathbf{stab}}(t)\Delta\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}^{\mathbf{stab}}(t)\Delta\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}^{\mathbf{stab}}(t)\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{3.28}$$

3.4 Struttura delle matrici per Risposta e Stabilità

Definite le equazioni da risolvere per i differenti problemi di *Risposta* (3.18) e *Stabilità* (3.27), si ritiene utile e consono esaminare con un maggior livello di dettaglio la struttura delle matrici componenti le due diverse equazioni. Sebbene infatti la notazione usata per ciascuna marice sia identica, esiste una differenza sostanziale tra esse.
Nel caso di *Risposta*, la struttura di ciascuna delle matrici di massa, smorzamento e rigidezza è evidenziata dalla seguente tabella:

BB	BH	PW
HB	HH	HW
WB	WH	WW

Ciascuna matrice risulta dunque suddivisa in nove quadranti, rappresentanti le influenze dei gradi di libertà di pala (B per *blade*), hub ed ala (W per *wing*) sia su se stesse che su tutte le altre, ottenute con il metodo numerico descritto nel paragrafo 3.1.1. In questo caso compaiono le equazioni di una sola pala delle N_{blade} presenti, questo perchè il sistema è supposto periodico, dunque ogni pala si comporta identicamente, a meno di uno sfasamento legato alla geometria.
Nel caso dell'analisi di *Stabilità*, invece, la presenza dell'hub e dell'ala comporta il non poter più considerare una sola pala, ma ciascuna di esse, dato il meccanismo non periodico della perturbazione, la dimensione di ciascuna matrice del sistema dunque cresce secondo lo schema qui di seguito:

$\ddots$	0	0	$\vdots$	$\vdots$
0	BB_k	0	BH_k	BW_k
0	0	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$\cdots$	HB_k	$\cdots$	HH	HW
$\cdots$	WB_k	$\cdots$	WH	WW

- Si nota subito che considerando separatamente le N_{blade} pale i blocchi si moltiplicano come attesta la comparsa del pedice k. Inoltre il vettore delle ampiezze modali $\mathbf{x}$ si espande divenendo:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^{1}_{blade} \\ .. \\ \mathbf{q}^{N_{blade}}_{blade} \\ \mathbf{q}_{hub} \\ \mathbf{q}_{wing} \end{Bmatrix} \tag{3.29}$$

- Considerando ancora una volta l'ipotesi che ogni pala sia identica all'altra, la relazione tra blocchi uguali è del tipo

$$BB_{k+1}(t) = BB_k(t + \Delta t) \quad \Delta t = 2\pi/N_{blade} \tag{3.30}$$

  essendo BB un blocco generico in figura.

- Infine è bene notare come si sia assegnato uno zero a tutti i termini fuori diagonale sul blocco rotore. Fisicamente questo vuol dire non considerare l' effetto che ciascuna pala ha sulle adiacenti. Tale effetto è prettamente aerodinamico ed è considerato solo utilizzando un modello di aerodinamica interazionale come quello descritto nel paragrafo 2.3.3.

CAPITOLO 4

Controllo delle Vibrazioni

In questo capitolo viene aggiunto l'ultimo tassello della descrizione del modello sviluppato durante questo lavoro di ricerca, ovvero il controllo delle vibrazioni. Le vibrazioni sono un fenomeno estremamente rilevante per un Tiltrotor, che eredita molte problematiche relative ai velivoli ad ala rotante:

- abbiamo già visto nel paragrafo 3.2.1 come meccanicamente il rotore filtri alcune armoniche e lasci passare al mozzo, oltre al carico stazionario che mantiene in equilibrio il veicolo, solo le armoniche multiple del numero di pale e della frequenza giro $jN_{blade}\Omega$.
- Nella descrizione dei modelli aerodinamici del paragrafo 2.3 abbiamo poi visto come l'aerodinamica interazionale sia un fenomeno determinante, che per sua natura comporta variazioni nel campo di pressione, ergo carichi vibratori che vengono trasmessi da rotore ed ala in fusoliera. Gli impatti tra la scia del rotore l'ala ed i piani di coda aggravano ulteriormente la complessità del fenomeno.

La trasmissione meccanica dei carichi dal mozzo all'ala e l'aerodinamica interazionale, determinano dunque forti vibrazioni trasmesse fino alla cabina, pregiudicando il comfort e la vita stessa delle componenti sottoposte a continui cicli di fatica. Questo spiega perchè la soppressione e la diminuzione dei carichi vibratori sia un obiettivo

importante nel design dei velivoli ad ala rotante, in particolar modo dei Tiltrotor, dove l'ambiente aerodinamico può variare in modo sensibile a seconda della configurazione di volo (Si rimanda a titolo di esempio ai Rif. [33] e [34] rispettivamente per l'*airplane-mode* e per l'*helicopter mode*). La letteratura scientifica riporta da anni lo studio di tecniche sia attive che passive per il controllo delle vibrazioni, tali tecniche agiscono a più livelli sul rotore, ma non solo, anche su dispositivi montati in fusoliera, alettoni, flap ed elevatori. In modo del tutto generico essi possono essere descritti con la sigla **HHC**, ovvero *Higher Harmonic Control*, cioè controllo basato sull'introduzione di armoniche superiori nella dinamica delle componenti in esame. Spesso però, con la definizione di **HHC**, si indica solo il controllo attivo dello *swashplate*, il cui funzionamento base è stato ricordato nel paragrafo 2.6.4. A questo tipo di meccanismo, che non descriveremo qui nel dettaglio, ci riferiremo d'ora in poi. Con la sigla **IBC**, *Individual Blade Control*, sono definiti invece tutti i meccanismi di controllo attivo o passivo che vengono attuati su ciascuna singola pala.

4.1 Elementi di controllo

Durante l'attività di ricerca sono stati quindi introdotti nel modello aeroelastico in esame alcuni elementi per la soppressione delle vibrazioni. Ci si è limitati ad elementi agenti in vario modo sul rotore, in particolar modo qui sono presentati:

- una tecnica di controllo basata sull'**HHC**, ovvero sull'attuazione periodica dello *swashplate*. Il controllo agisce dunque nel sistema di riferimento **HNR** variando ciclicamente sia il comando collettivo che quello ciclico con armonica $N_{blade}\Omega$. Nel sistema di riferimento rotante ciascuna pala vede un moto periodico, con armoniche superiori rispetto alla prima, introdotta dal comando ciclico. Di norma, ma non è una regola fissa, le armoniche introdotte attraverso i comandi ciclici attraversano l'intervallo di frequenze tra la $N_{blade}\Omega - 1$ e la $N_{blade}\Omega + 1$[1], mentre il collettivo viene variato con frequenza $N_{blade}\Omega$, e non potrebbe essere altrimenti se si vuole mantenere l'eguaglianza tra le pale.

[1] Che rappresentano tutte le armoniche che concorrono alla determinazione della $N_{blade}\Omega$, per quanto visto nel paragrafo 2.5.1.

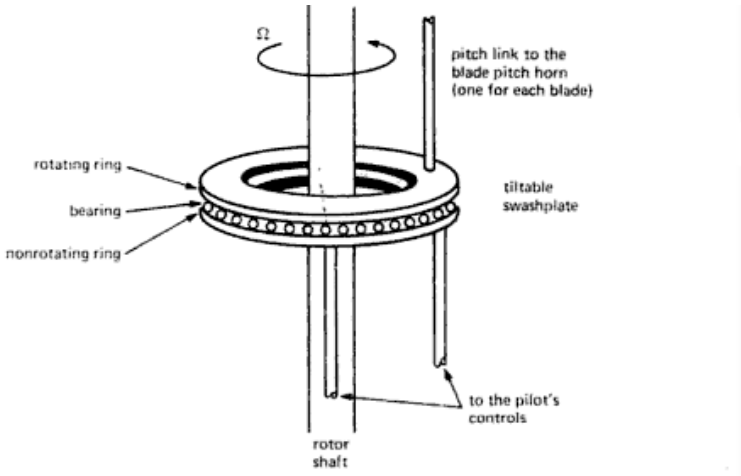


Figura 4.1: *Swashplate*, [3]

L'espressione dell'angolo visto da ciascuna pala è dato dunque da:

$$\theta = \theta_{com} + \sum_{j=(N_{blade}-1)}^{(N_{blade}+1)} \theta_{jc} \cos(j\psi) + \theta_{js} \sin(j\psi) \tag{4.1}$$

- Una tecnica **IBC** basata sull'utilizzo di *smart-spring* alla radice della pala. Le *smart-spring* (Rif. [35]) si basano sull'uso di piezoelettrici, normalmente alla radice della pala, in un tratto delimitato dalle ascisse X_{1ss} e X_{2ss}. L'effetto della presenza delle *smart-spring*, di cui viene trascurato ogni contributo inerziale e di smorzamento, si traduce in una variazione ciclica della rigidezza a flessione la dove sono presenti, per cui si ha:

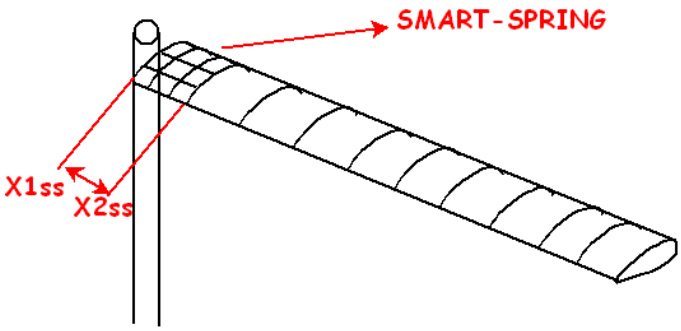


Figura 4.2: *Smart-spring*

$$\Lambda_b = \Lambda_{b0} + \sum_{j=(N_{blade}-1)}^{(N_{blade}+1)} \lambda_{jc} \cos(j\psi) + \lambda_{js} \sin(j\psi) \tag{4.2}$$

L'obiettivo dell'introduzione degli elementi di controllo nel sistema aeroelastico assemblato è stato indagarne l'efficacia; non è stata effettuata alcuna ottimizzazione dei parametri geometrici o di dimensionamento degli attuatori. Inoltre, nella determinazione delle leggi di controllo secondo il metodo descritto qui di seguito, non è stato incluso il vincolo di mantenimento delle condizioni di *trim* per l'equilibrio del velivolo[2].

4.2 Il Controllo Ottimo

Con l'obiettivo di ridurre i carichi vibratori trasmessi dal gruppo ala-rotore alla fusoliera, è stata utilizzata una tecnica di controllo ottimo, al fine di ottenere le componenti armoniche superiori per il moto di *pitch* della pala descritte dalla 4.1, e quelle della variazione di rigidezza associata alle *smart-spring* e definta dalla 4.2. Seguendo questo approccio, comunque noto in letteratura, la procedura consiste nella minimizzazione di un indice di prestazione, dato da:

$$J = \mathbf{z}^T \mathbf{W}_z \mathbf{z} + \mathbf{u}^T \mathbf{W}_u \mathbf{u} \tag{4.3}$$

dove con $\mathbf{u}$ si indica il vettore contenente le ampiezze dei controlli da determinare (del controllo HHC e delle *smart-spring*), con $\mathbf{z}$ il vettore delle quantità da minimizzare, mentre $\mathbf{W}_z$ e $\mathbf{W}_u$ sono matrici peso, definite per mediare il miglior compromesso tra efficacia dei controlli e sforzo nell'ottenerli. A causa della natura periodica del problema in esame, il controllo ottimo coinvolge direttamente le armoniche degli ingressi e delle uscite, tralasciando i transitori. Come anticipato, per un rotore di N_{blade} pale la principale componente vibratoria è legata alla frequenza $N_{blade}\Omega$, ergo il vettore delle uscite è composto dalle componenti seno e coseno, a tale frequenza, dei sei carichi, alla radice o al mozzo, a seconda di quale sia l'obiettivo da minimizzare.

[2]Sebbene sia stato controllato che esso non venisse stravolto.

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} F_{xN_{blade}c} \\ F_{xN_{blade}s} \\ F_{yN_{blade}c} \\ F_{yN_{blade}s} \\ F_{zN_{blade}c} \\ F_{zN_{blade}s} \\ M_{xN_{blade}c} \\ M_{xN_{blade}s} \\ M_{yN_{blade}c} \\ M_{yN_{blade}s} \\ M_{zN_{blade}c} \\ M_{zN_{blade}s} \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

Il vettore degli ingressi, ovvero dei controlli, contiene invece le armoniche da determinarsi del controllo HHC e delle *smart-spring*:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} \theta_{(N_{blade}-1)c} \\ \theta_{(N_{blade}-1)s} \\ \theta_{(N_{blade})c} \\ \theta_{(N_{blade})s} \\ \theta_{(N_{blade}+1)c} \\ \theta_{(N_{blade}+1)s} \\ \lambda_{(N_{blade}-1)c} \\ \lambda_{(N_{blade}-1)s} \\ \lambda_{(N_{blade})c} \\ \lambda_{(N_{blade})s} \\ \theta_{(N_{blade}+1)c} \\ \lambda_{(N_{blade}+1)s} \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

La minimizzazione di J è ottenuta sotto il vincolo di soddisfacimento delle equazioni di governo del sistema controllato. Il vincolo non è direttamente rappresentato dalle equazioni 2.107-2.136 e dalle 2.141, piuttosto è approssimato da una relazione lineare tra gli ingressi e le uscite attorno ad uno stato degli ingressi $\mathbf{u}_{n-1}$:

$$\mathbf{z}_n = \mathbf{z}_{n-1} + \mathbf{T}_{n-1}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_{n-1}) \tag{4.6}$$

Nell'Eq. 4.6 la matrice $\mathbf{T}_{n-1}$ è lo *Jacobiano*, ovvero la matrice di trasferimento,che con notazione indiciale appare scritta come:

$$T_{i,j} = \frac{\partial z_i}{\partial u_j} \tag{4.7}$$

Essa fornisce la dipendenza dei carichi vibratori da ciascun input di controllo. Si noti che lo *Jacobiano* è dipendente dallo stato del sistema, il che implica che a rigore dovrebbe essere ricalcolato ad ogni cambiamento dei controlli; il suo calcolo numerico potrebbe ottenersi risolvendo le equazioni del sistema aeroelastico.

La minimizzazione dell'indice di prestazione, dopo aver sostituito la 4.6 nella 4.3, conduce alla legge di controllo ottimo, che qui riportiamo:

$$\mathbf{u}_n = \mathbf{G}_u \mathbf{u}_{n-1} - \mathbf{G}_z \mathbf{z}_{n-1} \tag{4.8}$$

dove le matrici guadagno sono date da

$$\begin{cases} \mathbf{G}_u = \mathbf{D}\mathbf{T}_{n-1}^T \mathbf{W}_z \mathbf{T}_{n-1} \\ \mathbf{G}_z = \mathbf{D}\mathbf{T}_{n-1}^T \mathbf{W}_z \\ \mathbf{D} = (\mathbf{T}_{n-1}^T \mathbf{W}_z \mathbf{T}_{n-1} + \mathbf{W}_u)^{-1} \end{cases} \tag{4.9}$$

L'equazione 4.8 deve essere utilizzata in maniera ricorsiva, a partire da un dato controllo in ingresso e dai corrispondenti carichi, per essere poi aggiornata fino a convergenza. Il sistema appare dunque un controllo a ciclo chiuso (*closed-loop*) in cui i controlli in ingresso ed i carichi in uscita sono usati come *feedback* per aggiornare la legge di controllo. In riferimento ad un'applicazione reale, in cui cioè le uscite venissero misurate, tra un passo e l'altro del processo iterativo dovrebbe intercorrere il tempo necessario affinchè il sitema perturbato ritorni in uno stato stazionario-periodico, corrispondente al nuovo stato dei controlli.

4.3 Calcolo della matrice di trasferimento

Si è già fatto accenno alla necessità di calcolare numericamente lo *Jacobiano* del sistema $\mathbf{T}$. Questo processo, soprattutto se ripetuto nel processo di determinazione del controllo, può risultare costoso dal punto di vista del tempo computazionale, in quanto, in base alla definizione 4.7, la matrice di trasferimento è composta dalla sensibilità di ciascuna delle 12 componenti armoniche rispetto a ciascuna armonica di tutti gli attuatori incorporati nel sistema. Per le applicazioni sviluppate per questo lavoro di ricerca, la matrice di trasferimento è stata ottenuta numericamente attraverso un metodo di regressione, come segue:

- Per ciascuna variabile di ingresso si è opportunamente scelto un intervallo di variazione attorno alla condizione nulla, tale da rispettare i massimi valori ammessi.
- Per ciascun valore nell'intervallo, per ciascuna variabile sono stati ottenuti i valori delle armoniche dei carichi in uscita attraverso il sistema aeroelastico descritto dalle 2.107-2.136 e dalle 2.141.
- Tramite un approssimazione ai minimi quadrati si è ottenuta la funzione per ciascun carico in funzione di ciascun ingresso.
- La matrice $T_{i,j} = \frac{\partial z_i(u_j)}{\partial u_j}$ è stata ricavata derivando analiticamente ciascuna delle funzioni ottenute.

Questa procedura è risultata particolarmente efficiente, perchè unisce la rapidità di calcolo di un controllore *globale* (quello che si avrebbe calcolando **T** come fosse costante), con un'efficienza del tutto paragonabile ad un controllore *locale*, che richiede il calcolo della **T** ad ogni passo nel processo di convergenza.

CAPITOLO 5

Risultati numerici

In questo Capitolo vengono esposti i principali risultati ottenuti nell'ambito di questo lavoro di ricerca. Le configurazioni analizzate sono due:

- una configurazione di Tiltrotor di nuova generazione, basata su *ERICA* di *Agusta-Westland*
- una configurazione classica, basata sul Tiltrotor XV-15 di *Bell Helicopters*

Nel primo caso vengono riportate analisi dinamico strutturale e di *Stabilità aeroelastica*, che confrontate con quelle dei partner nell'ambito del progetto *NICETRIP* hanno costituito anche una validazione del **modello avanzato** sviluppato (sia in termini di pala ad asse non rettilineo ed in presenza di Hub flappante, che di ala composta da più corpi). L'analisi è completata dal calcolo della *Risposta*, in particolare in termini di carichi vibratori scaricati alla radice alare ed al mozzo.
Nel secondo caso, sebbene vengano forniti i risultati della dinamica strutturale dell'ala, non viene eseguita un'analisi aeroelastica ed il solutore si considera già validato in [23]. L'attenzione si sofferma quindi sul calcolo delle vibrazioni alla radice alare. Successivamente, un set di risultati analoghi è fornito allo scopo di verificare le potenzialità dei controlli in termini di **HHC** e **IBC** (*smart-spring*) In entrambi i casi più configurazioni di volo vengono esaminate.

5.1 Configurazione *ERICA*, prima validazione: analisi aeroelastica del rotore e dell'ala

L'analisi spettrale in vacuo e la stabilità aeroelastica del rotore e dell'ala di *ERICA* qui di seguito presentate sono state ottenute sulla base delle prime configurazioni fornite da *Agusta-Westland* in [30] ed [31] a cui si rimanda per i dati specifici, che rimangono in varia misura riservati.

5.1.1 Frequenze proprie del rotore in vacuo

Per prime vengono riportate le frequenze proprie in vacuo in *helicopter mode*, tale da avere collettivo al 75% della pala pari a 13°. Le figure 5.2 e 5.1 mostrano le frequenze proprie dei modi collettivi del rotore al variare del numero dei giri rispetto a quello nominale,esse risultano catturate fino ad un massimo di 100 Hz. Le figure 5.3-5.8 mettono invece a confronto le frequenze dei modi ciclici. Queste frequenze sono risultate del tutto paragonabili con quelle predette dagli altri partner *NICETRIP*. Successivamente vengono presentate con ordine analogo le frequenze predette per l'*airplane mode*, tale da avere collettivo al 75% della pala pari a 50° e con frequenza giro. Anche in questo caso l'accordo con i partner è risultato più che soddisfacente. E' da notare che in questa prima campagna test la struttura dell'hub si considera rigida, il che vuol dire che solo il gimbal con le sue equazioni di basculamento del disco rotorico concorre alla caratterizzazione della dinamica (quarta e quinta delle Eqq.2.141), e che inoltre non c'è differenza tra i modi multipala collettivi e differenziali.

5.1.2 Analisi aeroelastica del rotore

Viene poi presentata l'analisi della risposta alla perturbazione delle condizioni iniziali con inclusione degli effetti aerodinamici, ovvero l'analisi di *Stabilità aeroelastica*, qui intesa attorno a condizioni di equilibrio nulle. Il modello aerodinamico utilizzato è stato il 2D quasi-stazionario, definito nel paragrafo 2.3.2, con la correzione di *inflow* basata sulla velocità indotta fornita nel Rif.[7]. Questa scelta, oltre che essere funzionale al confronto con i partner, permette un procedura computazionale più semplice, in quanto non necessità l'uso ne di modelli *ROM* per il calcolo dell'aerodinamica

non stazionaria, ne di solutori 3D come il modello BEM presentato in 2.3.3. Le condizioni esaminate sono le stesse del paragrafo precedente; più nello specifico i primi risultati nelle figure 5.9-5.20 fanno riferimento ad una condizione di *hover* con collettivo al 75% della pala pari a 13°, e mostrano i valori degli smorzamenti al variare del numero di giri rispetto a quello nominale[1], essi sono definiti in modo canonico come:

$$\zeta_{damp-i} = -\frac{\Re(\lambda_i)}{|\lambda_i|} \tag{5.1}$$

dove con λ_i si intende qui l'i-esimo autovalore del sistema descritto dalla 3.28 opportunamente trasformato in variabili multipala (si consulti l'appendice). I risultati ottenuti sono in buon accordo con quelli dei partner, tuttavia, in particolar modo per ciò che riguarda i ciclici di lag e torsione, le distanze tra i vari partner sono maggiori, ed i modi risultano critici e vicini in alcuni casi al limite di instabilità, in alcuni casi superandolo. Il confronto è da ritenersi comunque più che soddisfacente rientrando largamente nella media dei partner, in particolar modo in prossimità dei valori di funzionamento nominale.

[1]Si è ritenuto di poco interesse proporre le frequenze le cui variazioni dovute all'aerodinamica risultano poco rilevanti.

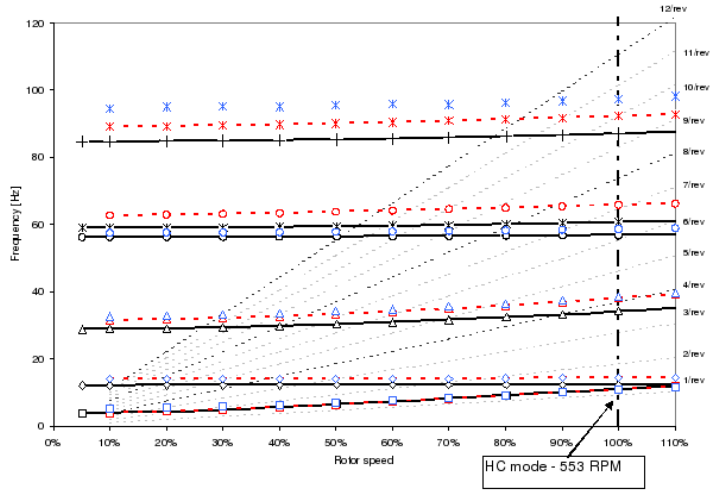


Figura 5.1: *Frequenze dei modi collettivi del rotore di Erica in vacuo, partner*

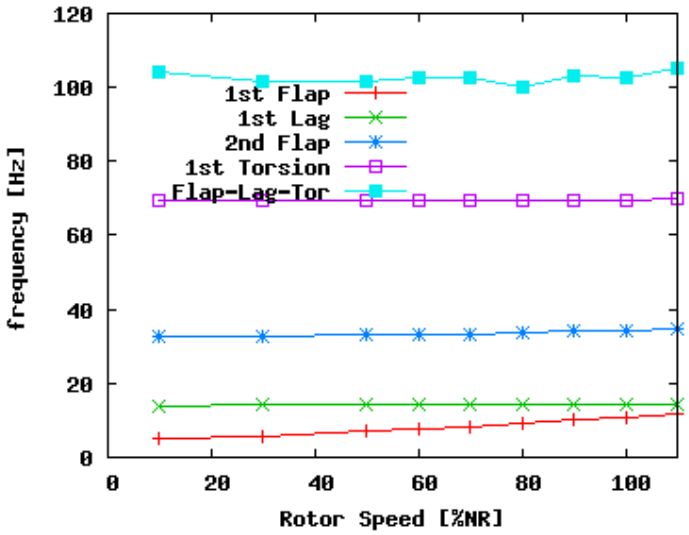


Figura 5.2: *Frequenze dei modi collettivi del rotore di Erica in vacuo*

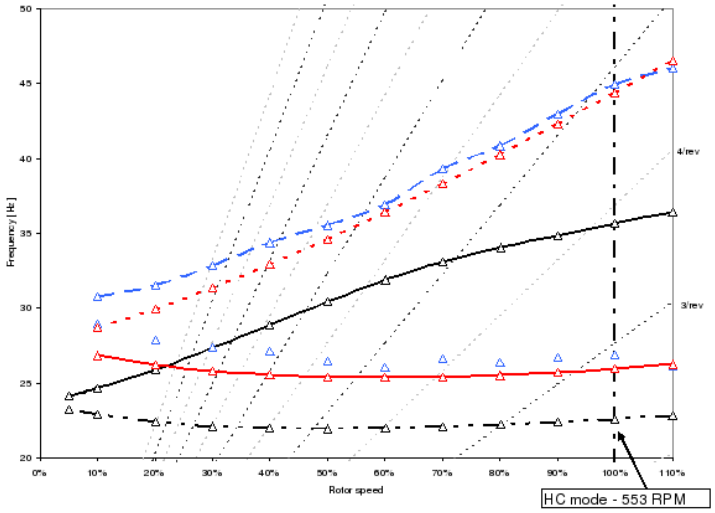


Figura 5.3: *Frequenze dei modi ciclici di flap del rotore di Erica in vacuo, partner*

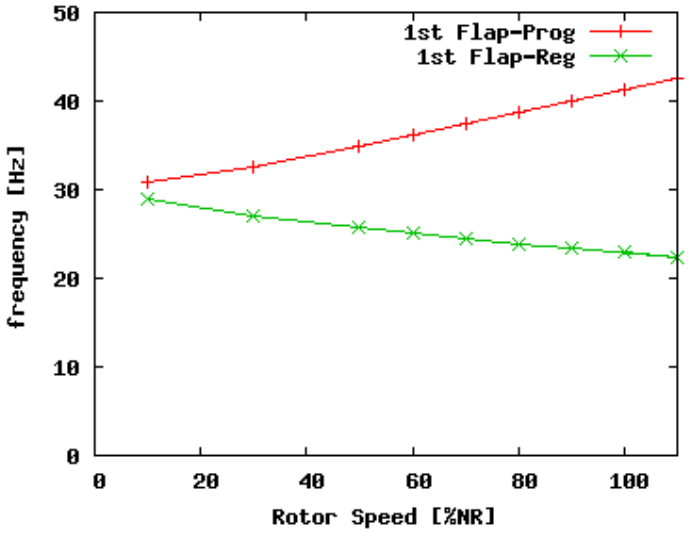


Figura 5.4: *Frequenze dei modi ciclici di flap del rotore di Erica in vacuo*

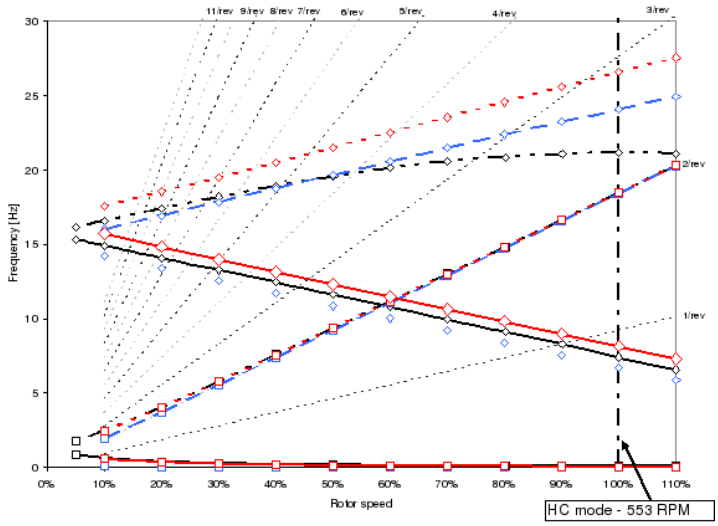


Figura 5.5: *Frequenze dei modi ciclici di gimbal e di lag del rotore di Erica in vacuo, partner*

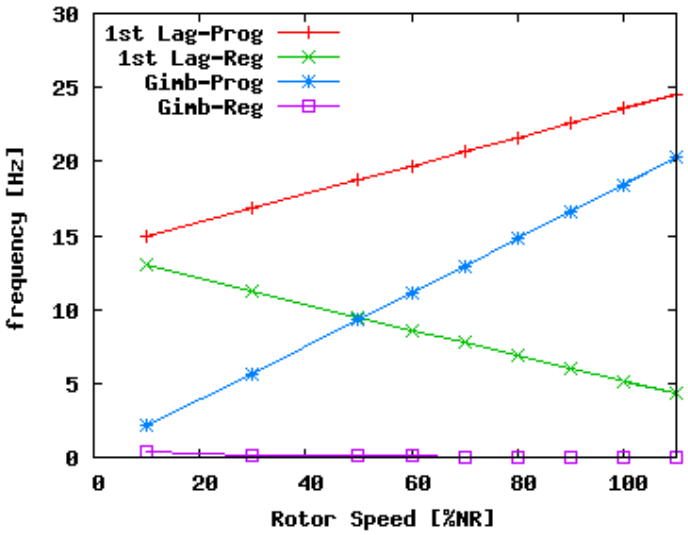


Figura 5.6: *Frequenze dei modi ciclici di gimbal e di lag del rotore di Erica in vacuo*

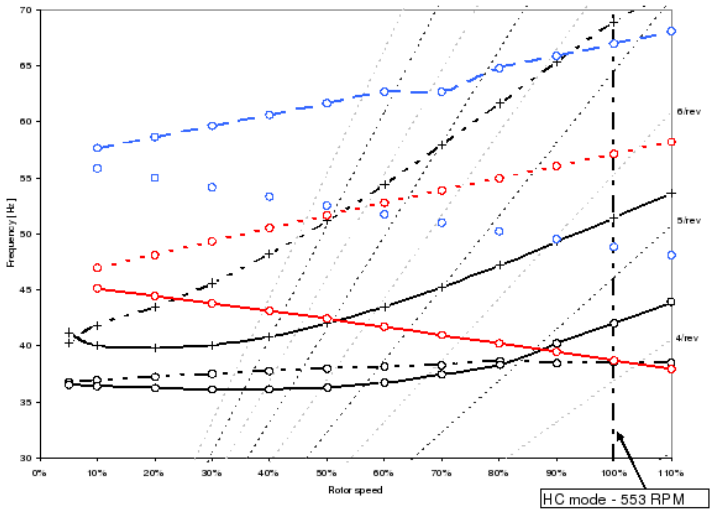


Figura 5.7: *Frequenze dei modi ciclici di torsione del rotore di Erica in vacuo, partner*

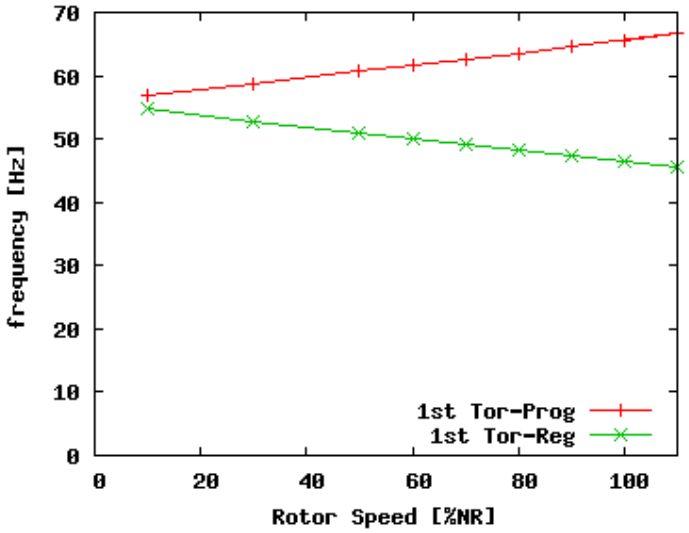


Figura 5.8: *Frequenze dei modi ciclici di torsione del rotore di Erica in vacuo*

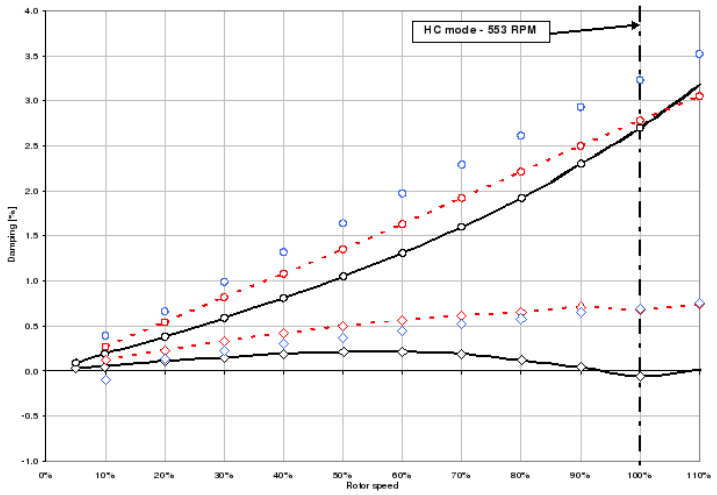


Figura 5.9: *Smorzamento dei modi collettivi di lag e torsione del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri: partner*

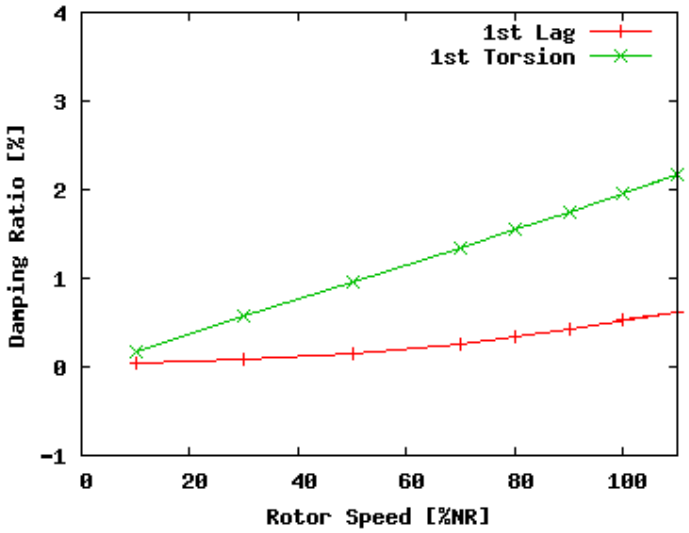


Figura 5.10: *Smorzamento dei modi collettivi di lag e torsione del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri*

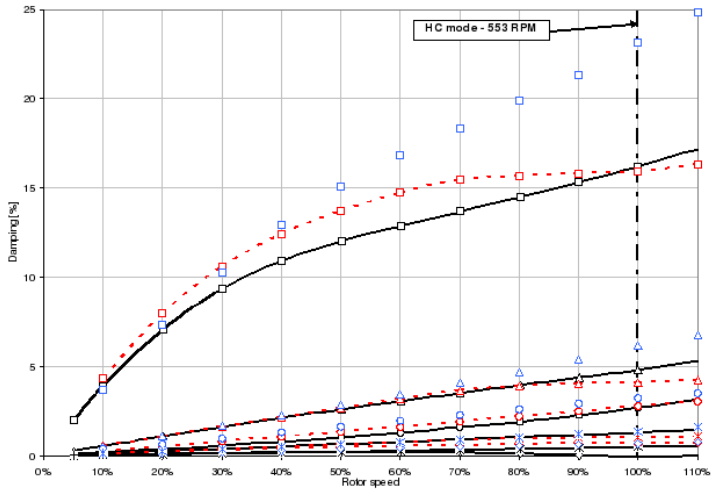


Figura 5.11: *Smorzamento dei modi collettivi del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri: partner*

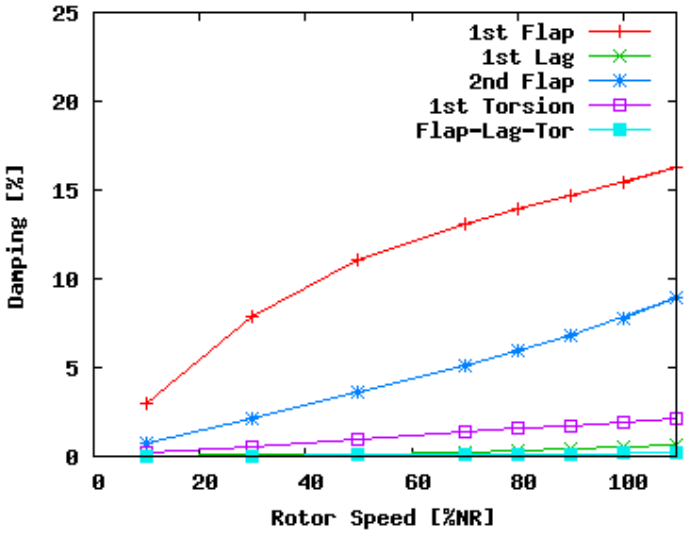


Figura 5.12: *Smorzamento dei modi collettivi del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri*

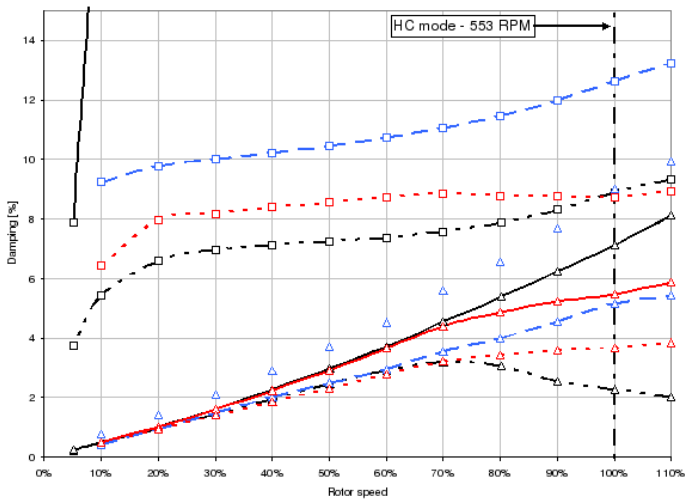


Figura 5.13: *Smorzamento dei modi ciclici di gimbal e del primo di flappeggio del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri: partner*

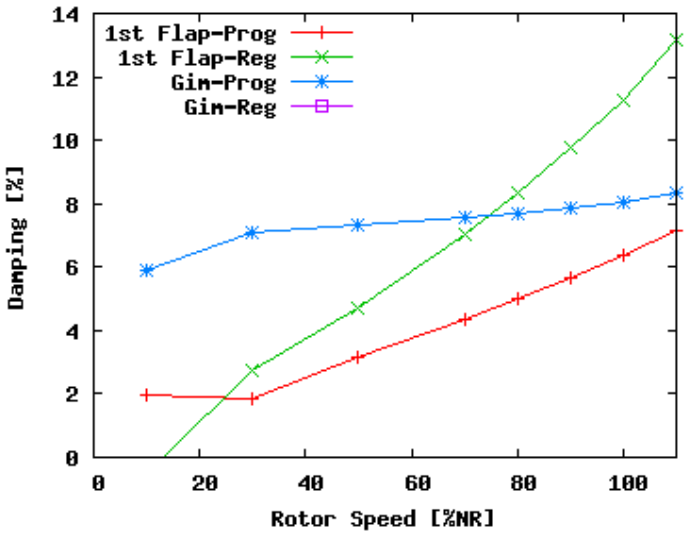


Figura 5.14: *Smorzamento dei modi ciclici di gimbal e del primo di flappeggio del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri*

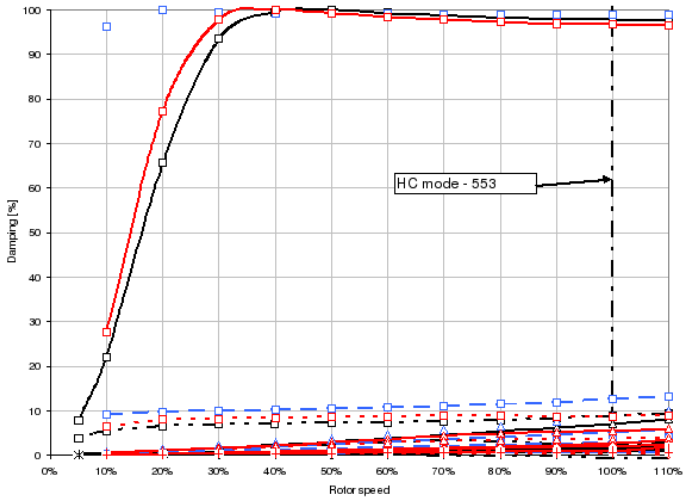


Figura 5.15: *Smorzamento dei modi ciclici del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri: partner*

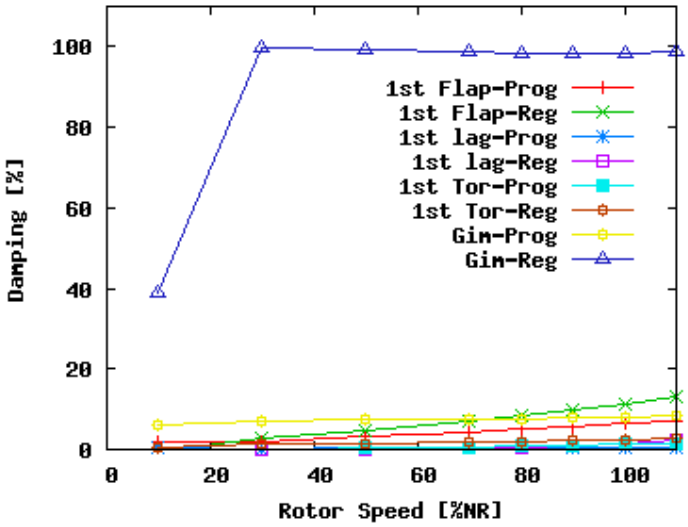


Figura 5.16: *Smorzamento dei modi ciclici del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri*

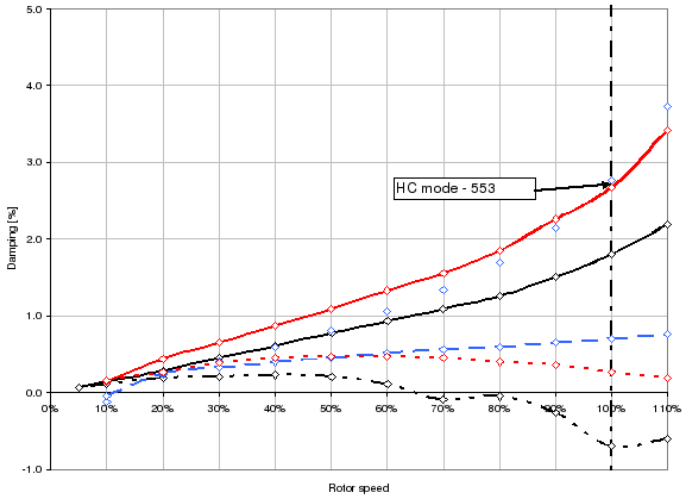


Figura 5.17: *Smorzamento dei modi ciclici di lag del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri: partner*

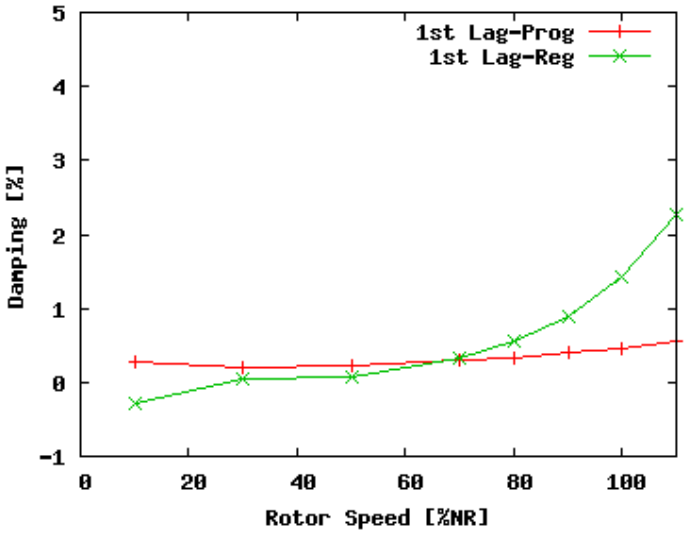


Figura 5.18: *Smorzamento dei modi ciclici di lag del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri*

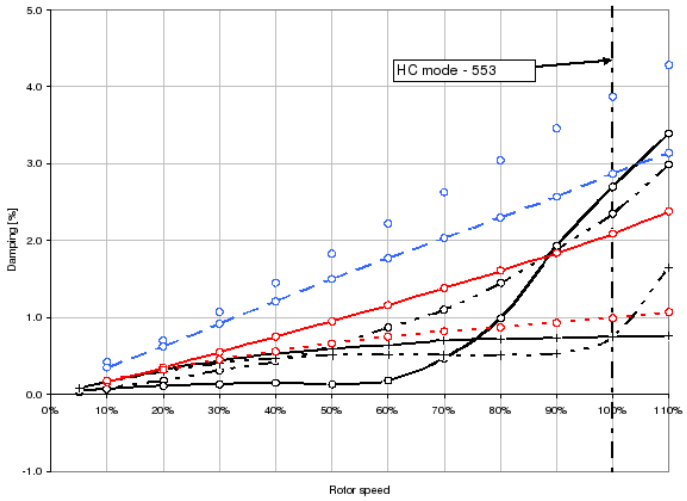


Figura 5.19: *Smorzamento dei modi ciclici di torsione del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri: partner*

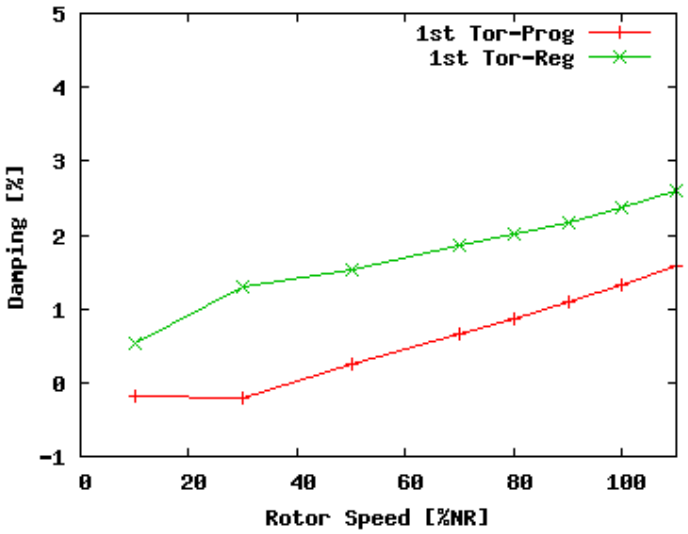


Figura 5.20: *Smorzamento dei modi ciclici di torsione del rotore di ERICA in hover al variare del numero di giri*

5.1.3 Analisi della dinamica strutturale dell'ala

La validazione della modellazione strutturale ed aerodinamica dell'ala, descritta con il **modello avanzato** di cui al Capitolo 2, è stata ottenuta dal confronto con i dati contenuti nel documento [31], che include sia l'analisi di dinamica strutturale che quella aeroelastica. L'analisi di dinamica strutturale è stata portata a termine non trasferendo i carichi del rotore al tip alare, bensì considerandone la massa ed i corrispettivi momenti di inerzia assieme a quelli della gondola. La figura 5.21 mostra le prime sei frequenze dell'ala in assenza del carburante, a causa di alcune discrepanze iniziali, il confronto e la validazione sono stati ottenuti anche con un codice FEM commerciale, oltre che con il confronto con i partner, e risulta pienamente soddisfacente. Considerando un intervallo di frequenze di interesse per l'aeroelasticità del gruppo ala-rotore, i risultatati sono riportati nelle figure 5.21 e 5.22. Le frequenze come è visibile risultano in buon accordo, fatta eccezione per la presenza di un modo spurio indicato in Fig.5.22 come '2 beamchord'[2]. Ulteriori indagini portate avanti con l'autore del Rif. [31], hanno permesso di rivelare una sottostima della rigidezza assiale del *Torque-tube*[3], che una volta corretta ha eliminato il modo spurio, e lasciato i modi rimanenti molto simili. Da un lato quindi la modellazione è risultata corretta e validata, dall'altro si è avuto esempio della sensibilità della stessa.

[2]Si noti come i moti di *beam* indichino moti fuori dal piano, quelli di *chord* moti nel piano, sia del *Torque-tube* che della *Fixed-wing*, mentre con *mw pitch* si indica la torsione rigida della *Movable-wing*.

[3]Che nel modello di trave qui utilizzato risulta infinita, eliminando a priori il problema.

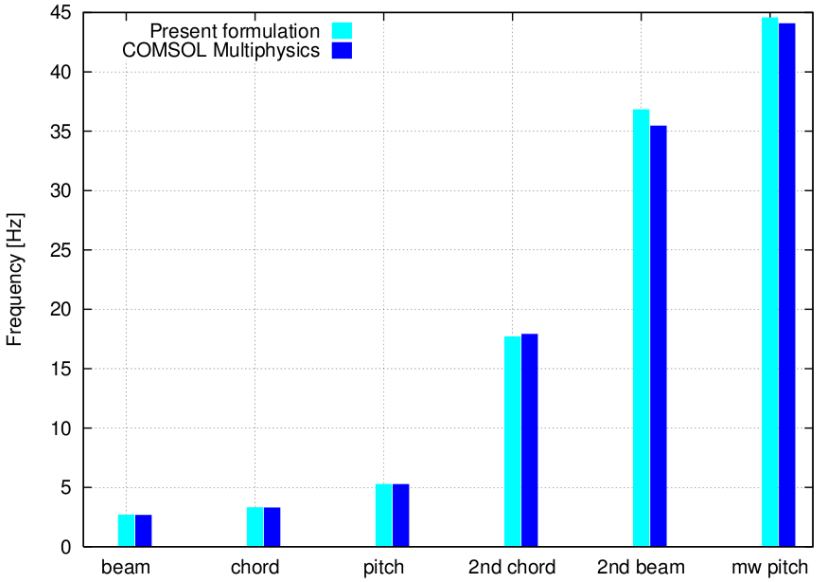


Figura 5.21: *Frequenze proprie dell'ala di ERICA*

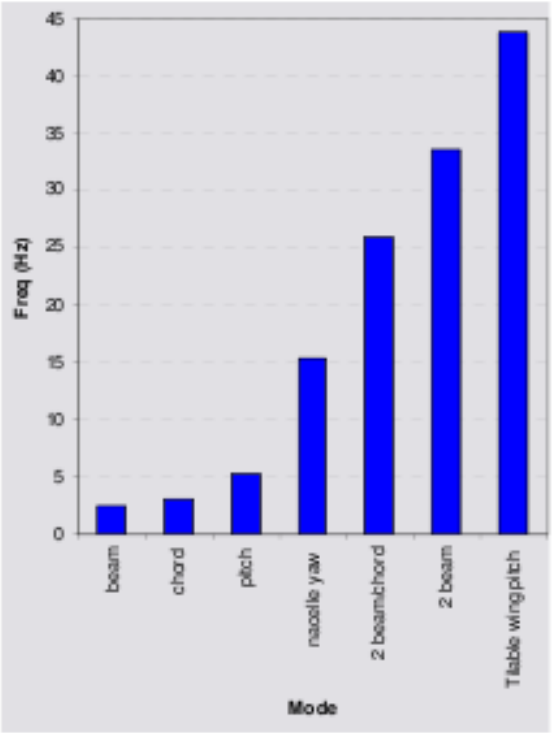


Figura 5.22: Frequenze proprie dell'ala di ERICA, partner

5.1.4 Whirl-Flutter

Successivamente è stata effetuata un'analisi aeroelastica dell'ala, trasferendo i carichi dal rotore, ma azzerando l'aerodinamica sull'ala onde considerare condizioni più conservative; è stato inoltre considerato uno smorzamento strutturale pari al 2% di quello critico. Sono state esaminate due condizioni di volo: la prima in *airplane-mode* al 77% del numero di giri nominale, con velocità nell'intervallo 120-400kts e rotore in condizioni *windmilling* (*zero-power*), ovvero di spinta generata nulla; la seconda denominata *end of conversion*, ovvero a fine conversione, in cui tutto è uguale fatta eccezione per il numero di giri che rimane quello dell'*helicopter-mode*, pari cioè al 100% di quello nominale.

Le figure 5.23-5.26 mostrano un buon accordo sia in termini di frequenze proprie che degli smorzamenti relativi ai primi tre modi dell'ala. In particolar modo il limite di stabilità del *Whirl-flutter* oltrepassato dal modo di *beam* è perfettamente calcolato e pari a 352kts. Anche gli andamenti sono simili, sebbene in generale i valori risultino più bassi.

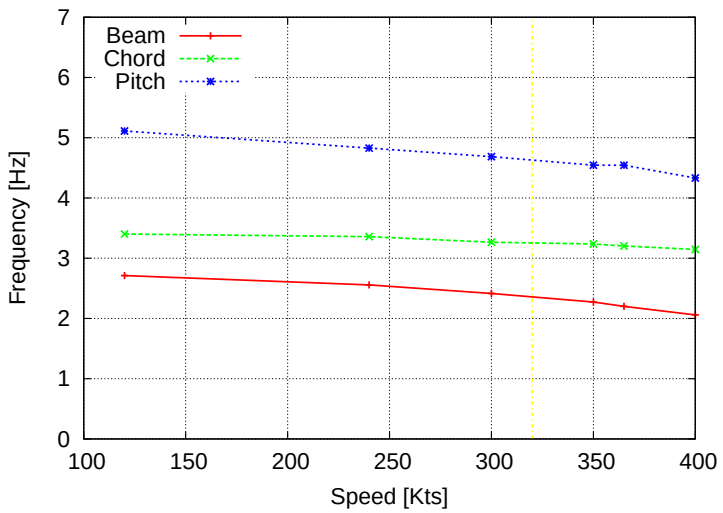


Figura 5.23: *Frequenze dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in AC*

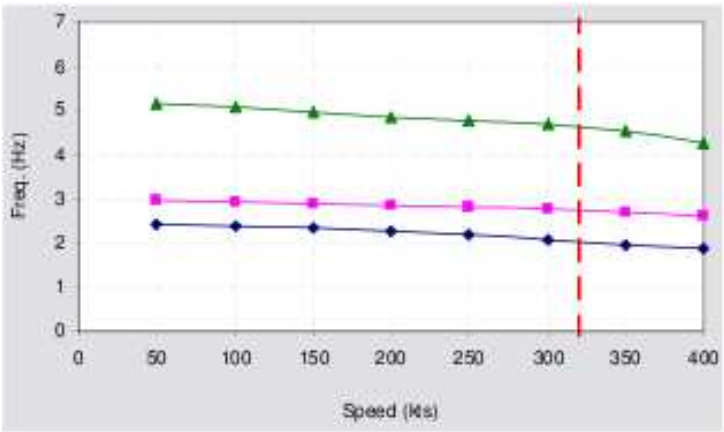


Figura 5.24: *Frequenze dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in AC, partner*

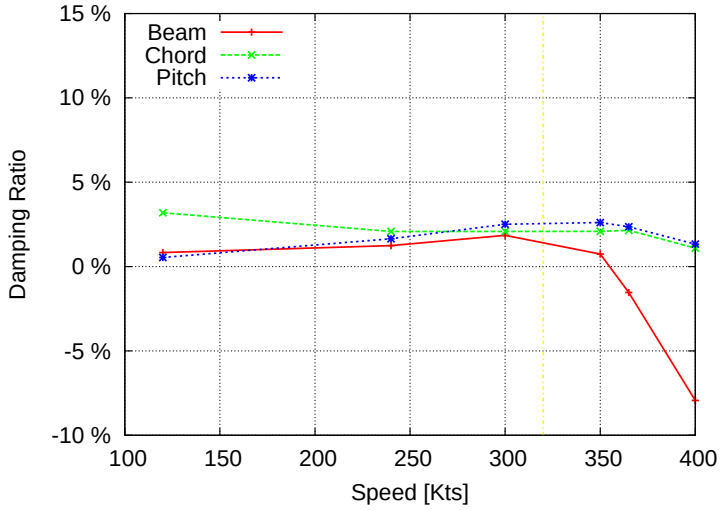


Figura 5.25: *Smorzamenti dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in AC*

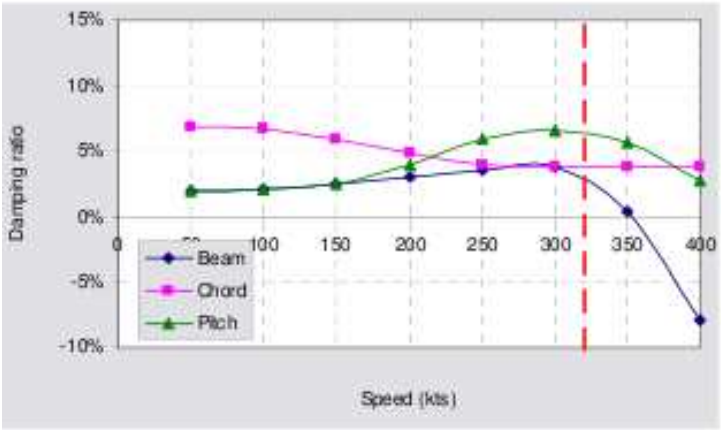


Figura 5.26: *Smorzamenti dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in AC, partner*

Per quel che concerne la condizione di *end of conversion*, descritta dalle figure 5.27-5.30, l'accordo è mantenuto sulle frequenze, mentre per gli smorzamenti, che pure rimangono simili, permangono diversità in particolar modo nel posizionamento dei picchi a torsione ed in una sottostima dello smorzamento di lag. Si conferma il non raggiungimento delle condizioni di *Whirl-flutter*.

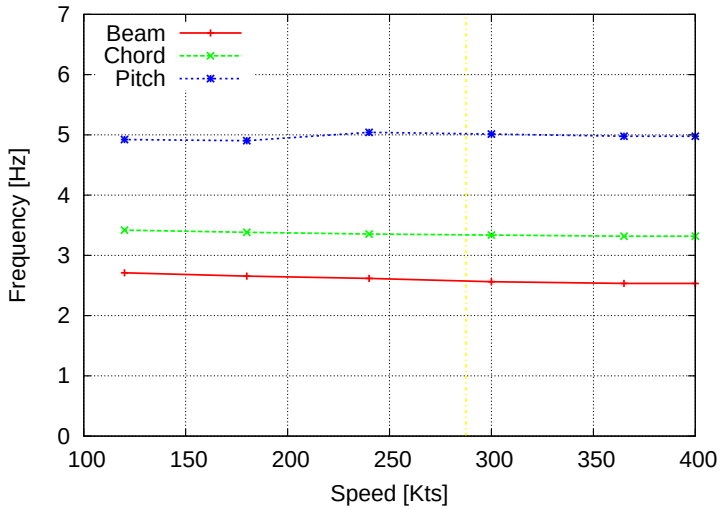


Figura 5.27: *Frequenze dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in EOC*

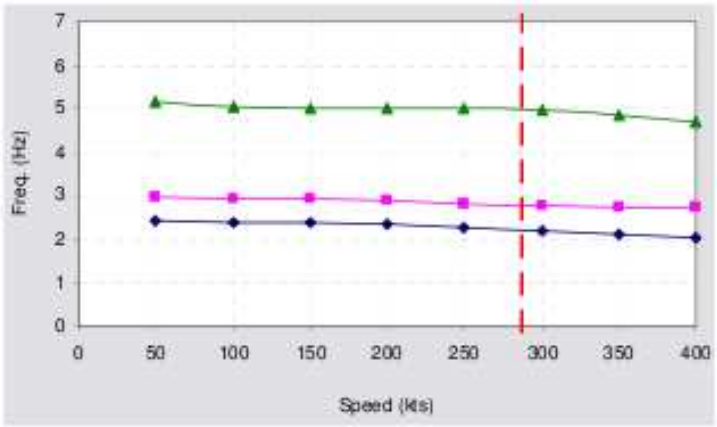


Figura 5.28: *Frequenze dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in EOC, partner*

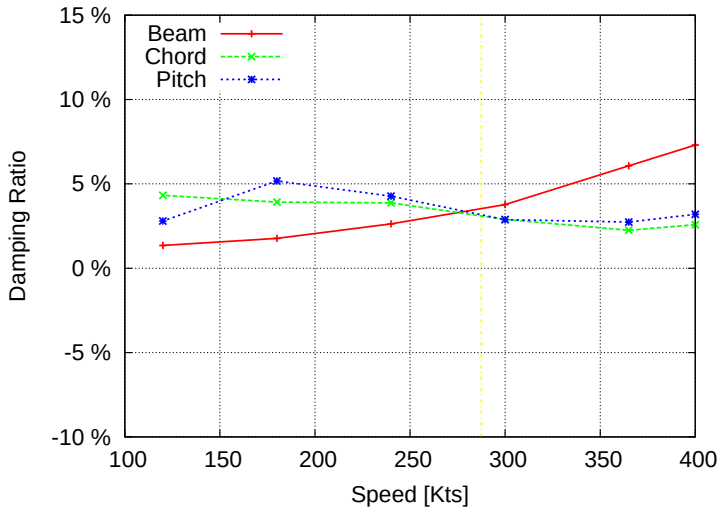


Figura 5.29: *Smorzamenti dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in EOC*

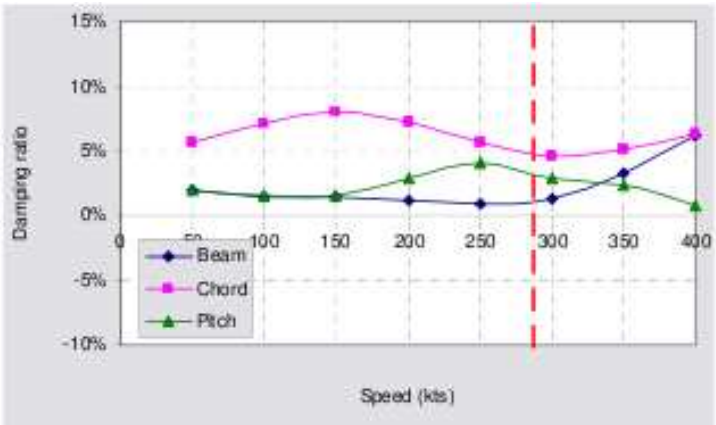


Figura 5.30: *Smorzamenti dei primi tre modi dell'ala al variare della velocità in EOC, partner*

5.1.5 Calcolo dei carichi vibratori alla radice dell'ala

Definita la validazione aeroelastica di ala e rotore, si è passati alla valutazione dei carichi alla radice dell'ala secondo la metodologia descritta nel paragrafo 3.2.4, in cui la valutazione finale dei carichi aerodinamici al mozzo ed alla radice è stata effettuata tramite un'analisi *free-wake* da parte del modello BEM. Possedendo *ERICA* due rotori quadripala, le armoniche di interesse per le vibrazioni risultano multiple della 4Ω, ovvero la $4/rev$: ci si è dunque soffermati sulla valutazione delle armoniche $4/rev$ e $8/rev$ per due condizioni di volo, una di *airplane-mode* ed una di *hover*, i cui dati principali sono elencati nella seguente tabella.

Dati di volo ERICA in *Airplane-mode*	
V	300kts
Ω	426RPM
i_r	2.92°
α_{sh}	93°
$MovableWingAngle$	0°
θ_{coll}	53.922°
θ_{1s}	0°
θ_{1c}	0°
β_C	0.07638°
β_S	−0.13004°
Dati di volo ERICA in *hover*	
V	0kts
Ω	553RPM
i_r	0.08°
α_{sh}	3°
$MovableWingAngle$	87°
θ_{coll}	15.5401°
θ_{1s}	0.70305°
θ_{1c}	0°
β_C	0.03236°
β_S	−0.65808°

Tabella 5.1: *Dati di volo per configurazioni ERICA*

Carichi in Airplane-mode

Qui di seguito si presentano i carichi vibratori trasmessi dalla *Fixed-wing* e dal *Torque-tube* alla sezione di innesto in fusoliera in X_{R0} (si veda la descrizione nel paragrafo 2.6.3). Nella descrizione fornita da *Agusta-Westland* è stato inserito il conto del peso del carburante, distribuito in un numero finito di vani alloggiati nell'ala fissa.
Per primi vengono presentati i carichi all'hub totali, somma dell'aerodinamica bem e della componente inerziale legata alla deformazione delle pale, essi sono dati nel riferimento **NRH** (si veda il paragrafo 2.2.1) e sono adimensionalizzati attraverso delle grandezze di riferimento, $m_{0b}\Omega^2R^2$ per le forze e $m_{0b}\Omega^2R^3$ per i momenti. La figura 5.42 mostra come accanto alla predominante com-

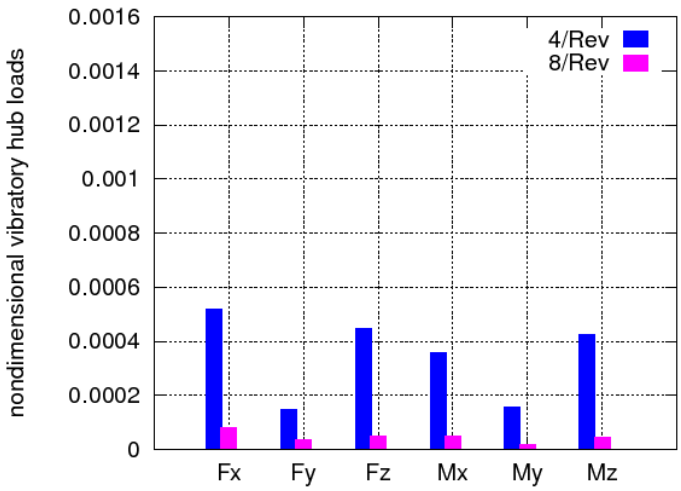


Figura 5.31: *Carichi all'hub in AM*

ponente $4/rev$ si accompagni anche il contributo non trascurabile della $8/rev$.
Qui di seguito vengono invece riportati i carichi calcolati trasmessi dalla *Fixed-wing* e dal *Torque-tube* in X_{R0}, calcolati tenendo in conto non solo la distribuzione di massa del carburante, ma anche dei corrispondenti momenti di inerzia calcolati in base alla conoscenza precisa della geometria dei vani di alloggio. Essi sono definiti con lo stesso adimensionalizzante dei carichi all'hub, ma vengono calcolati in un riferimento che vede l'asse X orientato come il vento alla radice dell'ala, l'asse Y come l'apertura e l'asse Z di conseguenza.

Dalle figure 5.32-5.33, che rappresentano i carichi alla radice di *Fixed-wing* e *Torque-tube* in assenza di aerodinamica sull'ala,

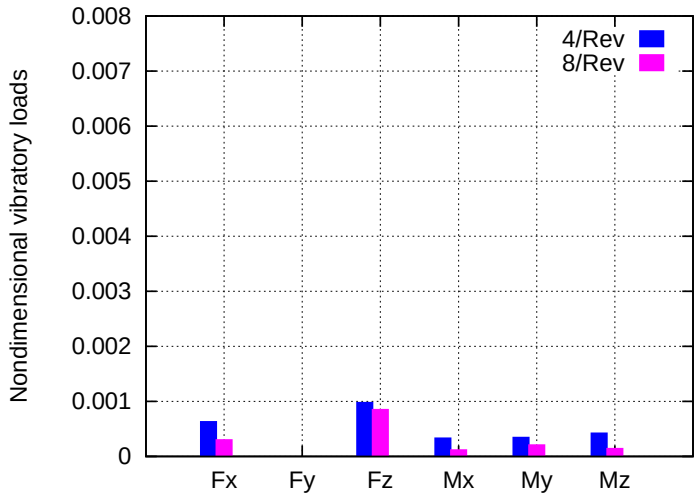


Figura 5.32: *Carichi alla radice della Fixed-wing in AM in assenza di aerodinamica sull'ala*

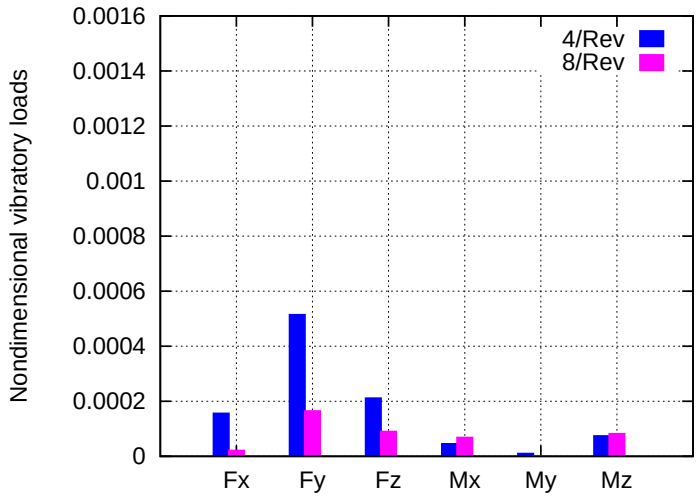


Figura 5.33: *Carichi alla radice del Torque-tube in AM in assenza di aerodinamica sull'ala*

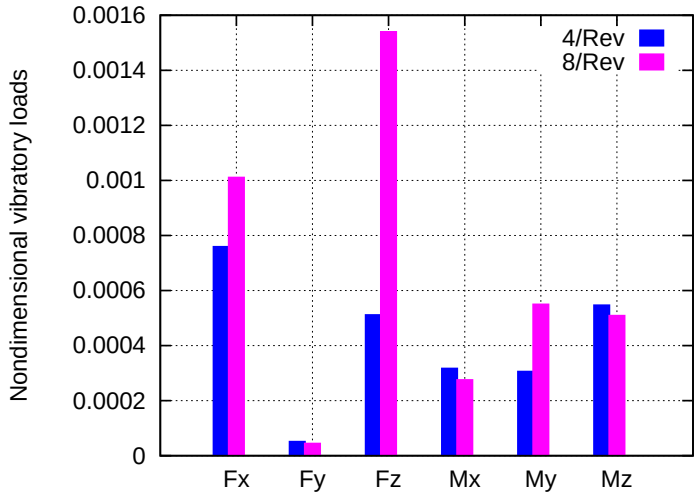


Figura 5.34: *Carichi alla radice della Fixed-wing in AM*

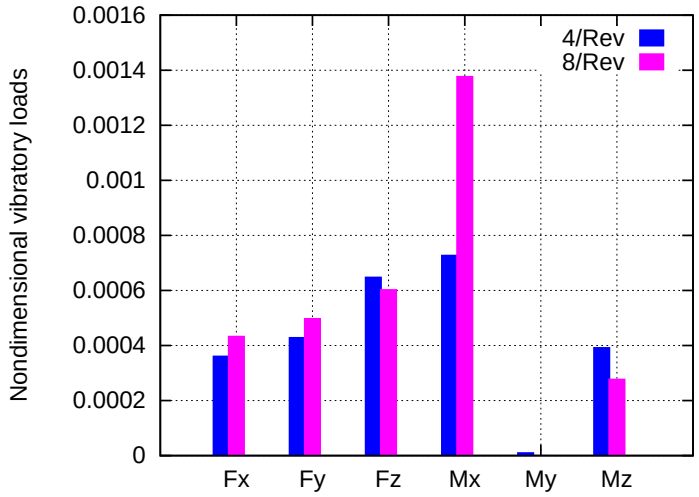


Figura 5.35: *Carichi alla radice del Torque-tube in AM*

è possibile osservare che la $4/rev$ rimane la frequenza dominante e che l'ala, attraverso la sua funzione di trasferimento, ovvero tramite la sua elasticità, tende ad amplificare l'ampiezza dei carichi vibratori, specialmente per ciò che concerne l'ala fissa (che supporta la barra nella centina in X_{R1}). Come è facile notare si riscontra un importante effetto dell'aerodinamica in termini di $8/rev$ che si distribuisce su tutta la struttura dell'ala attraverso tutte le sue componenti e, come è possibile osservare dalla Fig. 5.36, la maggior parte dell'effetto aerodinamico sulla $8/rev$ e sulla $4/rev$ è portato dalla *Movable-wing*, sulla quale la scia del rotore impatta in modo cospicuo. Approfondendo le analisi si è inoltre riscontrato come i

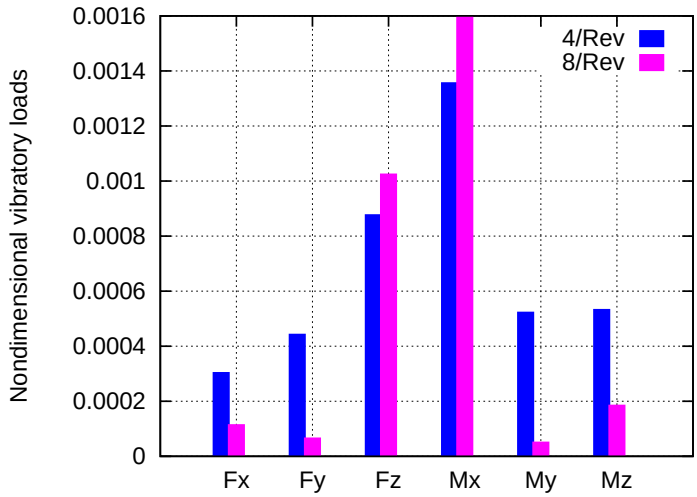


Figura 5.36: *Carichi vibratori aerodinamici alla radice del tubo dovuti alla Movable Wing*

carichi vibratori dipendessero fortemente dalla modellazione della distribuzione del carburante. Quest'effetto è mostrato dalle figure 5.37-5.40, che illustrano i carichi alla radice sia senza l'inclusione del momento di inerzia del carburante, che con l'esclusione totale dello stesso. Il risultato più sorprendente si è avuto nel primo caso, nel quale se la $4/rev$ è rimasta intatta, la $8/rev$ è stata drammaticamente incrementata; nel secondo caso invece la $4/rev$ è risultata lievemente aumentata, mentre la $8/rev$ drasticamente diminuita. Una manifestazione così forte ha richiesto un'ulteriore indagine: con l'ausilio di un codice FEM commerciale si è così approfondita l'analisi della dinamica strutturale dell'ala al variare

della descrizione del carburante, i cui risultati sono riassunti nella Fig.5.41.

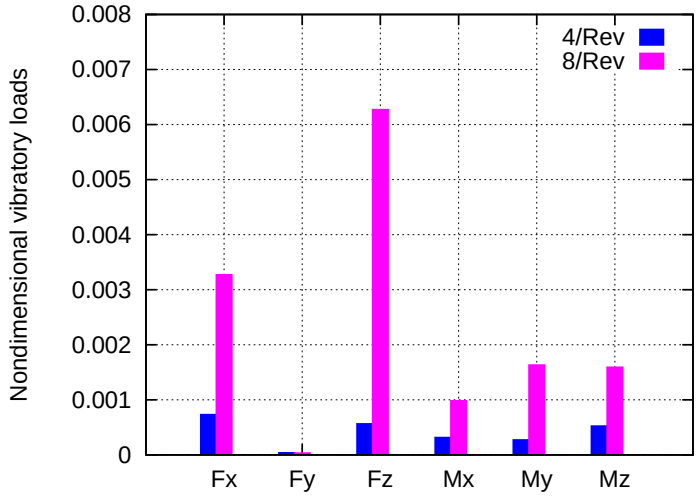


Figura 5.37: *Carichi alla radice della Fixed-wing in AM in assenza di momento di inerzia del carburante*

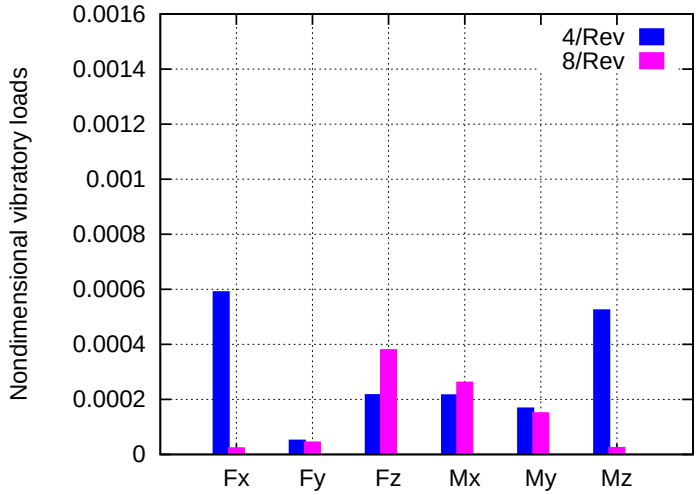


Figura 5.38: *Carichi alla radice della Fixed-wing in AM in assenza del carburante*

E' interessante notare come la distribuzione di massa non vada ad influire sulla $4/rev$, ma impatti sulla possibilità di una risonanaza alla $8/rev$: in accordo con quanto mostrato in Fig.5.37,

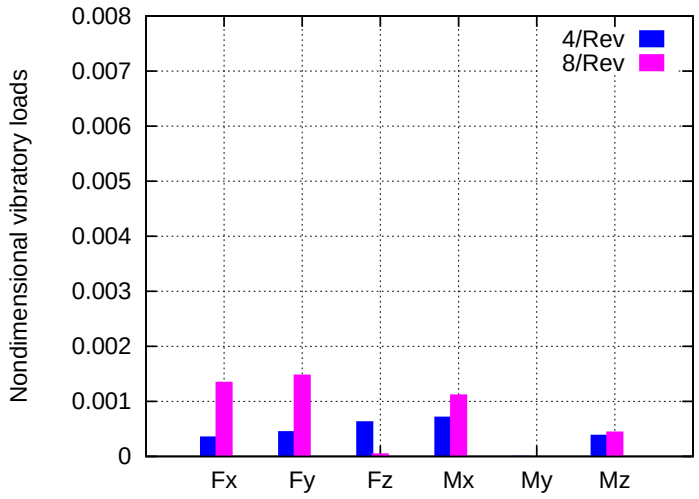


Figura 5.39: *Carichi alla radice del Torque Tube in AM in assenza di momento di inerzia del carburante*

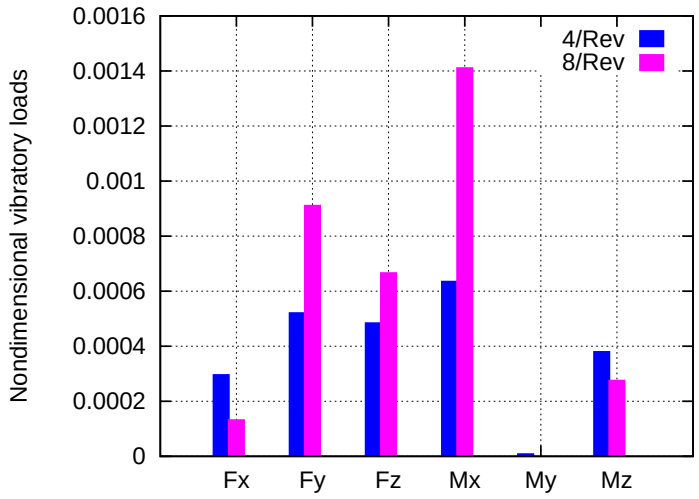


Figura 5.40: *Carichi alla radice della Torque-tube in AM in assenza del carburante*

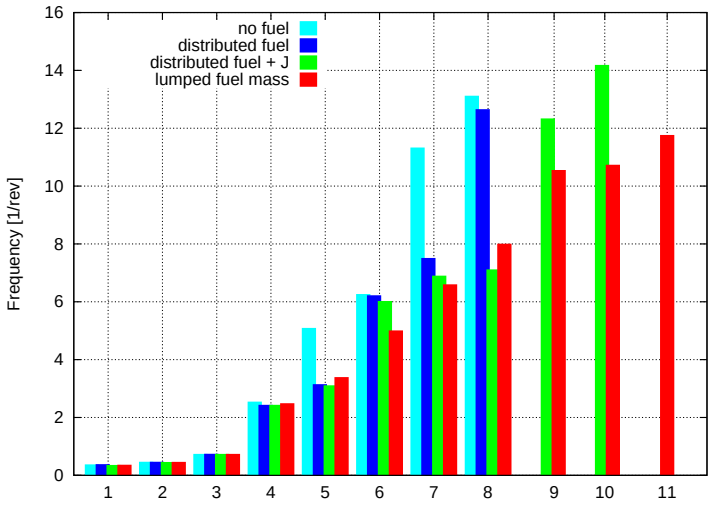


Figura 5.41: *Frequenze in AM dell'ala al variare della modellazione del carburante*

5.38 e 5.41 infatti l'assenza nel modello del momento di inerzia del carburante porta l'insorgenza di un autovalore in prossimità della $8/rev$, mentre l'assenza di carburante lo allontana vistosamente. In modo preoccupante infine, un modello a masse concentrate del carburante peggiorerebbe le cose.

Carichi in Hover

Il calcolo dei carichi in *hover* ha evidenziato problematiche del tutto analoghe, che vengono qui riassunte per brevità.

- I carichi vibratori risultano maggiori rispetto all'*airplane-mode*. Questo perchè, nonostante la *movable-wing* sia allineata al rotore per diminuire la deportanza come emerge dalla tabella 5.1, l'ambiente aerodinamico dovuto alla scia è comunque tale da generare impatti e vibrazioni, a partire dal rotore.

- I carichi all'hub (riferimento **NRH**) osservabili in Fig.5.42 mostrano una marcata componente verticale a frequenza $4/rev$.

- Alla radice di tubo ed ala (asse X allineato con l'orizzonte, Z verticale, Y lungo l'apertura.) si manifesta una visibile amplificazione sia della $4/rev$ che della $8/rev$ (Fig. 5.43-5.46).

- Nel caso della $4/rev$ l'amplificazione è dovuta alla funzione di trasferimento dell'ala, in particolar modo alla posizione del baricentro del pilone, che amplifica il contributo inerziale legato alla deformazione dell'ala.
- Nel caso della $8/rev$ il contributo è principalmente aerodinamico, dovuto a fenomeni di interferenza aerodinamica e di impatto.
- Anche in queste condizioni la modellazione del carburante può portare vicino a fenomeni di risonanza con la $8/rev$

Qui di seguito compaiono oltre ai carichi al mozzo, i carichi alla radice di ala fissa e tubo calcolati con un modello distribuito di carburante, non inclusivo dei momenti di inerzia, e le frequenze in vacuo determinate per varie modellazione dello stoccaggio di carburante.

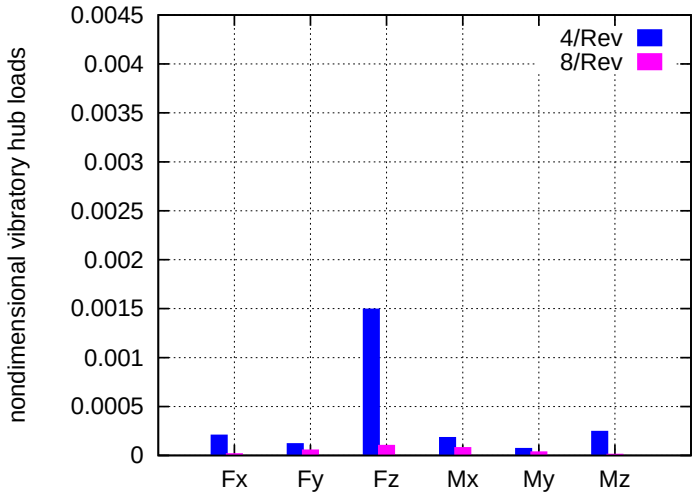


Figura 5.42: *Carichi all'hub in HM*

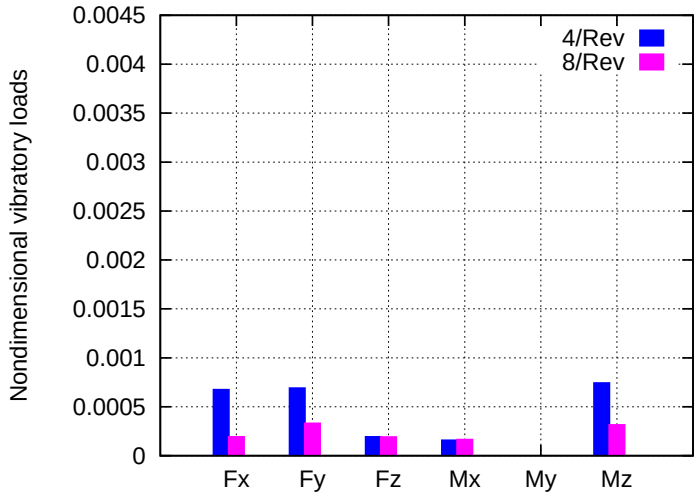


Figura 5.43: *Carichi alla radice del Torque-tube in HM*

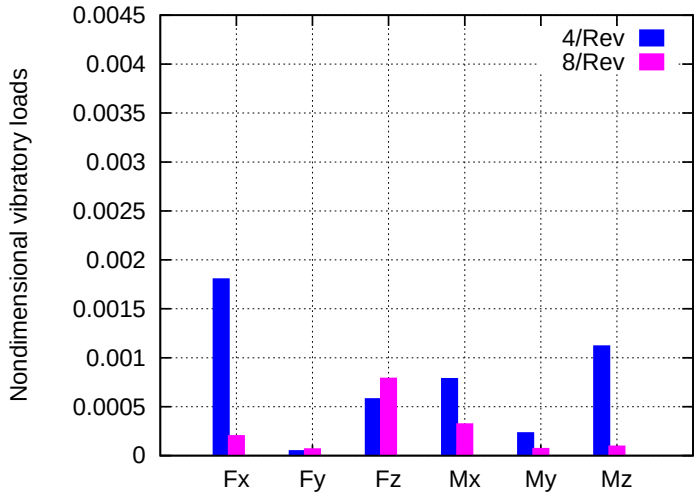


Figura 5.44: *Carichi alla radice della Fixed-wing in HM*

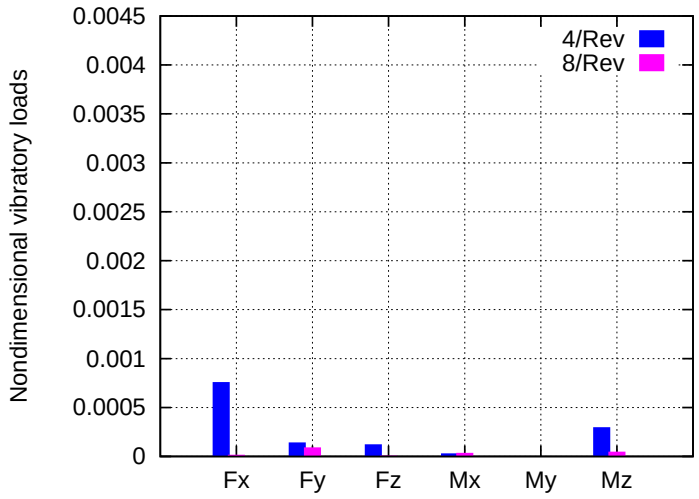


Figura 5.45: *Carichi alla radice del Torque-tube in HM in assenza di aerodinamica sull'ala*

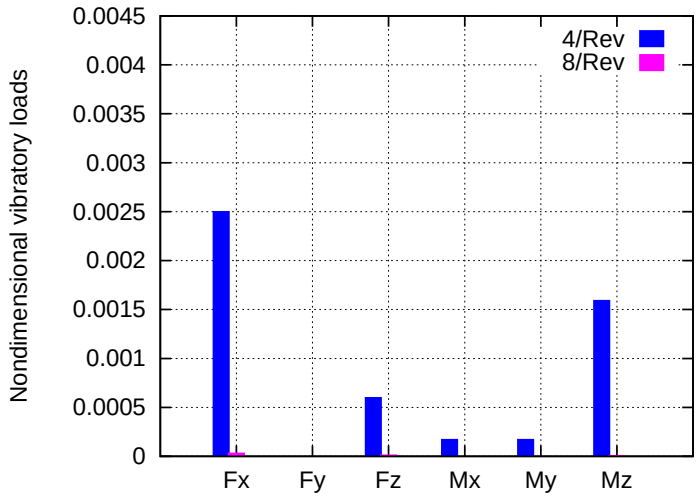


Figura 5.46: *Carichi alla radice della Fixed-wing in HM in assenza di aerodinamica sull'ala*

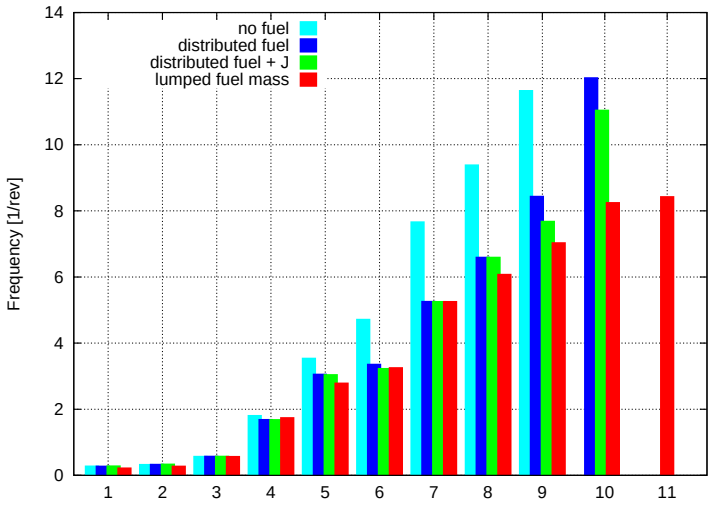


Figura 5.47: Frequenze in HM al variare della modellazione della stiva di carburante

5.2 Configurazione ERICA, seconda validazione

Qui di seguito vengono proposti i risultati ottenuti dopo una riconfigurazione del rotore originale basata su:

- Introduzione dei gradi di libertà dell'hub nell'analisi, ovvero della cedevolezza di elastomeri, della trasmissione e perfino delle rivettature, considerate attraverso opportune rigidezze.
- Inclusione di nuove masse *flappanti*, come i cuscinetti centrifughi sulle pale, per un totale di circa 100Kg aggiuntivi considerati nella massa del rotore inclusa nella sua dinamica strutturale.
- Variazioni strutturali di rigidezze ed offset di sezione per la pala.
- Variazioni del Twist aerodinamico e della distribuzione delle corde per la pala.

Per ciò che riguarda l'ala, al fine di agevolare un nuovo confronto sui carichi vibratori tra partner diversi, ne è stata considerata una versione incastrata in X_{R0} sia per ciò che concerne il *Torque-tube* che la *Fixed-wing*. In questo paragrafo vengono prima forniti i nuovi risultati in termini di dinamica strutturale della pala, poi

dell'ala. Infine vengono illustrati i carichi alla radice e al mozzo in particolare confrontando diversi modelli aerodinamici.

5.2.1 Dinamica strutturale del rotore e dell'ala

Il confronto viene fatto rispetto ai partner NICETRIP, in termini di frequenze collettive, differenziali[4] e cicliche, in un range di frequenze che include i primi cinque modi non rotanti, assicurandosi così di poter ben descrivere la $4/rev$, sulla quale si sofferma il calcolo dei carichi. Vengono esaminati sia un *airplane-mode* con colletivo al 75% del raggio pari a 55°, che un *helicopter-mode* con collettivo pari a 13°

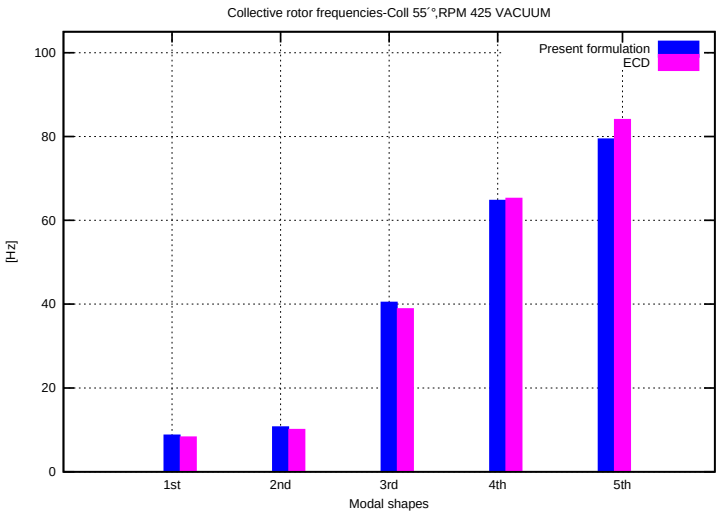


Figura 5.48: *Frequenze in vacuo dei primi cinque modi collettivi in AM*

Come è visibile dalle figure 5.48-5.53 il confronto con i partner (solutori FEM) risulta più che soddisfacente, e discrepanze si evidenziano a frequenze molto elevate rispetto alla $4/rev$, che coincide con 28Hz per l'*airplane-mode* e 36Hz per l'*helicopter-mode*. Le maggiori differenze, soprattutto nelle frequenze cicliche dell' *helicopter-mode*, sono giustificate da un *tuning* eseguito sulla rigidezza della trasmissione in *airplane-mode*, come dichiarato da tutti i partner. L'analisi del nuovo rotore viene completata con la curva di *zero-*

[4]Che risultano diverse dalle collettive per mezzo dei gradi di libertà dell'hub

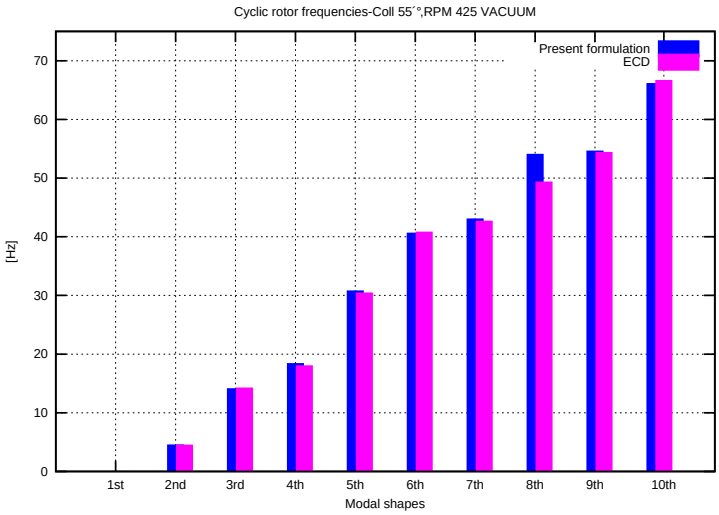


Figura 5.49: *Frequenze in vacuo dei primi dieci modi ciclici in AM*

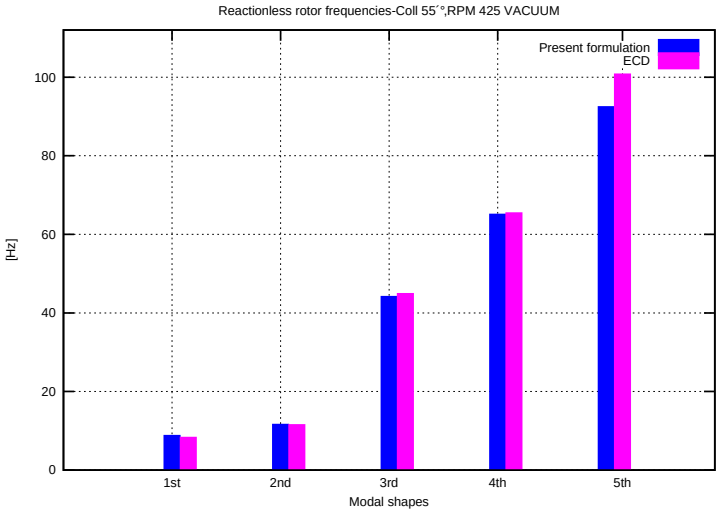


Figura 5.50: *Frequenze in vacuo dei primi cinque modi differenziali in AM*

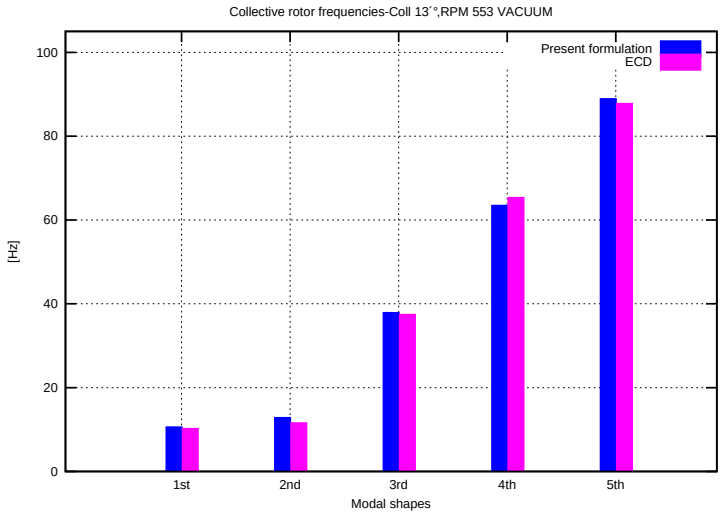


Figura 5.51: *Frequenze in vacuo dei primi cinque modi collettivi in HM*

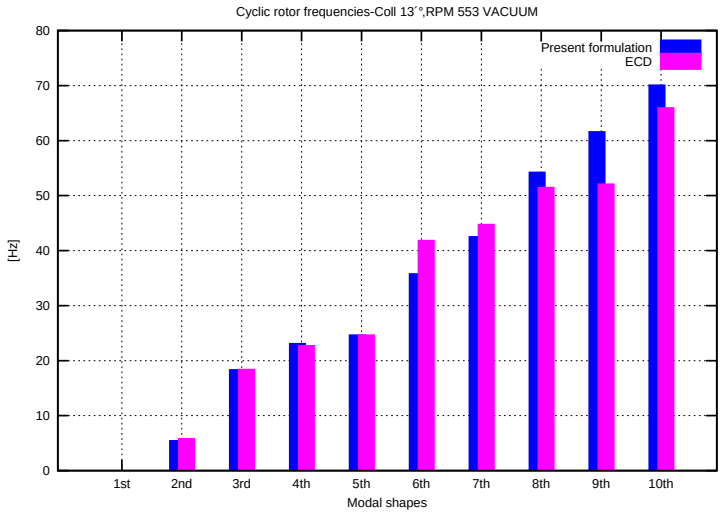


Figura 5.52: *Frequenze in vacuo dei primi cinque modi ciclici in HM*

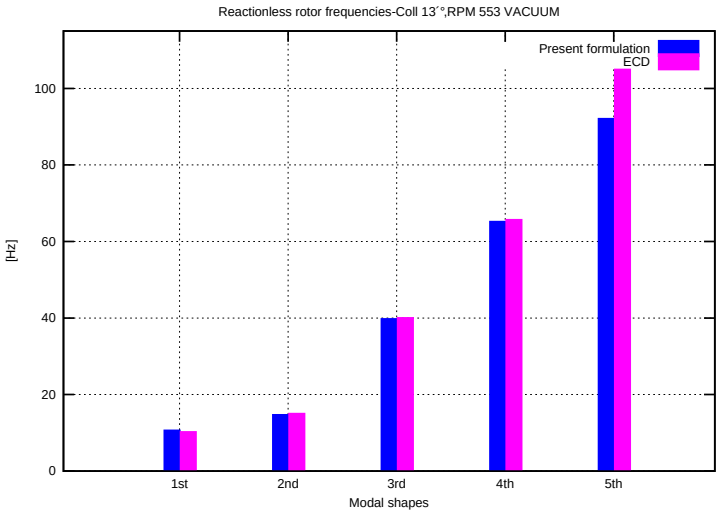


Figura 5.53: *Frequenze in vacuo dei primi cinque modi differenziali in HM*

power, che definisce i collettivi per i quali è nulla la spinta generata dal rotore e che si mostra più che soddisfacente.

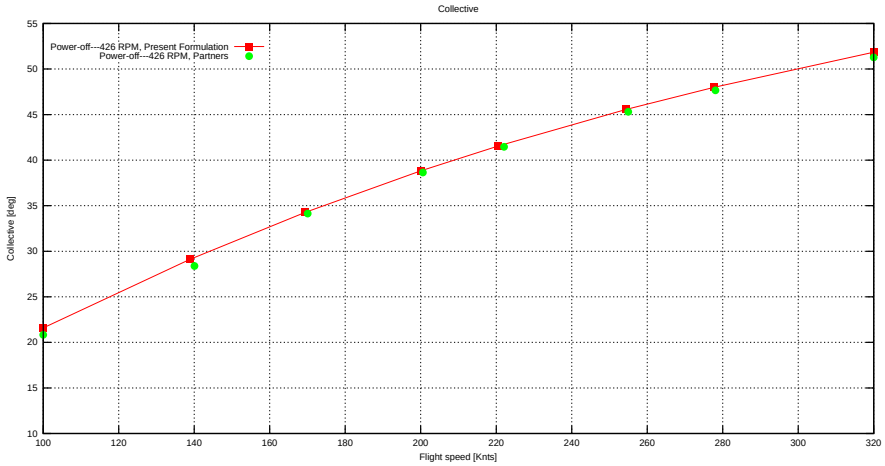


Figura 5.54: Curva di zero-power per il collettivo del rotore

Per ciò che concerne l'ala si presenta la dinamica strutturale della nuova versione incastrata nell'intervallo di frequenze di interesse.

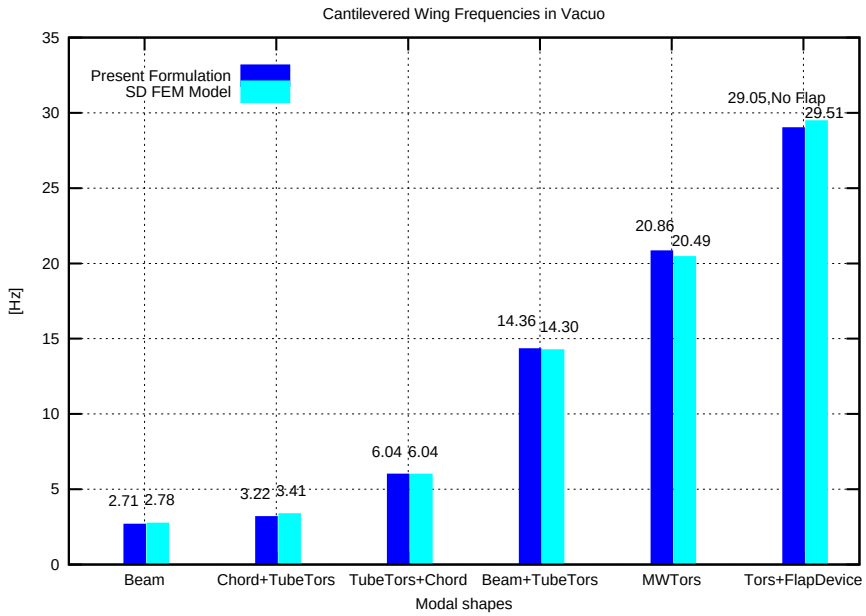


Figura 5.55: Frequenze proprie dell'ala incastrata

5.2.2 Calcolo dei carichi vibratori

I carichi vibratori qui presentati sono stati calcolati nell'ambito di un confronto tra partner nell'ambito del progetto NICETRIP per definire differenze tra i modelli aerodinamici disponibili, e determinare le necessità basilari per una stima attendibile delle vibrazioni trasmesse in fusoliera. Sono state affrontate tre condizioni di volo:

- *Airplane-mode*, AC
- *Low-speed*, LS
- *Hover*, HC

i cui dati di trim sono qui riassunti

Nelle figure che seguono sono state esaminati quattro modelli per ciascuna configurazione, e per ciascuno sono stati determinati i carichi al mozzo, alla radice dell'ala fissa e del tubo:

1. Rotore Isolato (Fixed Rotor): il rotore non avverte ne strutturalmente ne aerodinamicamente la presenza dell'ala. L'aerodinamica è quasi stazionaria.
2. Con ala ma senza interferenza aerodinamica (W/O Aero interaction): il rotore è sostenuto da un ala deformabile, che sotto

Dati di volo ERICA in *Airplane-mode*	
V	330kts
Ω	426RPM
α_{sh}	93°
$MovableWingAngle$	0°
β_C	0.13°
β_S	0.076°
Dati di volo ERICA in *hover*	
V	0kts
Ω	553RPM
α_{sh}	3°
$MovableWingAngle$	87°
β_C	0.658°
β_S	0.032°
Dati di volo ERICA in *Low-speed*	
V	30kts
Ω	553RPM
α_{sh}	3°
$MovableWingAngle$	87°
β_C	1.70°
β_S	1.84°

Tabella 5.2: *Dati di volo per configurazioni ERICA*

l'effetto dei carichi al mozzo si deforma fornendo un *feedback* cinematico al rotore stesso in termini inerziali ed aerodinamici. L'aerodinamica è quasi stazionaria, con velocità indotta solo sul rotore.

3. Con ala e con interferenza aerodinamica (W Aero interaction): ala e rotore si sentono ed influenzano sia dal punto di vista cinematico e dinamico, che delle numerose interferenze del campo aerodinamico. L'aerodinamica è quasi stazionaria, ma una velocità indotta è fornita dal solutore BEM sia su pala che su ala, per tenere in conto i fenomeni di mutua interferenza, ed è calcolata secondo lo schema iterativo dato al paragrafo 3.2.4.

4. BEM, dove i carichi sono applicati direttamente dall'aerodinamica 3D, secondo lo schema del paragrafo 3.2.4.

Discussione dei risultati

I risultati osservabili dalle figure 5.56-5.64, che rappresentano grandezze ovviamente adimensionali, mostrano i risultati in termini di carichi al mozzo, espressi nel riferimento **NRH** e di carichi alla radice (asse X orizzontale, Y lungo l'apertura e Z verticale). Qui di seguito le principali annotazioni:

- In **airplane-mode**, per quanto concerne i carichi all'hub, una sensibile quantità di vibrazione non è visibile se non attraverso modelli interazionali, la differenza tra l'uso di un modello 2D con *inflow* interazionale ed un modello 3D per il calcolo dei carichi è osservabile in modo particolare sui momenti nel piano. Questo è probabilmente legato ad un effetto di distribuzione locale delle pressioni sul profilo della pala, che non può essere catturata da modelli 2D in cui la forma del profilo non rientra in questi termini.

- Nei carichi alla radice, sia di *Torque-tube* che di *Fixed-wing*, la discrepanza tra i modelli aumenta, anche quella tra l'interazione basata sull'uso della velocità indotta e quella basata sull'uso diretto dei carichi BEM. Questo è probabilmente dovuto di nuovo ad un effetto geometrico, ma legato stavolta alla difficoltà di scelta di un punto realmente significativo di applicazione della velocità indotta sull'ala, che in genere si

somma alla componente di velocità perpendicolare alla corda al quarto di corda del profilo.

- Per quanto concerne il caso **Low-speed**, sorprendentemente, ma solo in prima analisi, la discrepanza tra i vari modelli risulta molto minore per quanto concerne soprattutto i carichi all'hub. Questo è dovuto al fatto che sul rotore in avanzamento il fenomeno non stazionario è legato all'avanzamento stesso che rende il flusso asimmetrico ed alla presenza dei ciclici: tutti aspetti catturati anche dai modelli non interazionali.

- Nei carichi alla radice invece il confronto regge solo tra i modelli interazionali, ma ancora l'accoppiamento diretto con i carichi BEM stima carichi vibratori maggiori, in particolar modo in termini di forza verticale e momento flettente sulla *Fixed-wing*, e di forza assiale sul *torque-tube*. Per i primi si tratta probabilmente dei limiti già evidenziati nell'uso localizzato della velocità indotta, per la seconda invece della presenza aerodinamica della nacelle.

- E' infine in **hover** dove l'aerodinamica interazionale si dimostra essenziale al fine di computare i carichi vibratori. Nei carichi all'hub infatti, dove domina la componente verticale della forza, tutta la vibrazione è data dall'interferenza aerodinamica e ben poca sarebbe visibile con i modelli inferiori, in cui il flusso si manterrebbe quasi totalmente assiale e stazionario in assenza di avanzamento.

- Alla radice poi il tutto peggiora, i carichi aumentano di molto a causa dell'impatto tra la scia del rotore e l'ala (nonostante la *movable wing* sia allineata col rotore) generando le ampiezze vibratorie maggiori tra tutti i casi esaminati. L'aerodinamica interazionale basata sull'uso della velocità indotta al quarto di corda non basta e si mostra del tutto inadeguata, mentre l'uso di un modello 3D si è dimostrato l'unico in grado di catturare il fenomeno in questa condizione limite, in cui tutti gli altri modelli non prevedono vibrazioni.

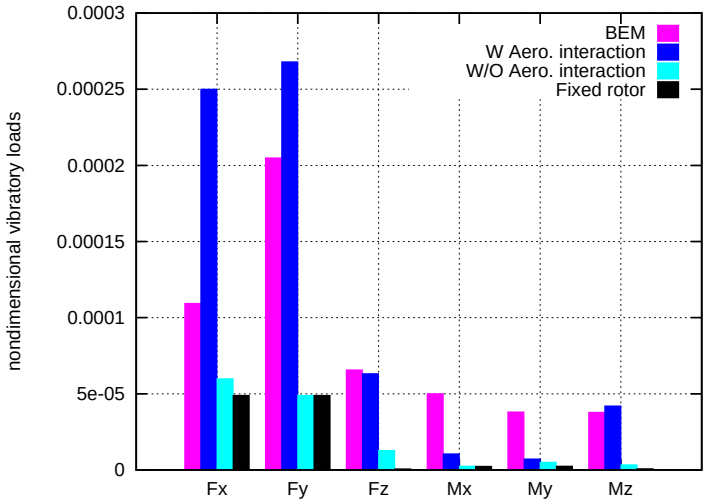


Figura 5.56: *Carichi all'hub in AC*

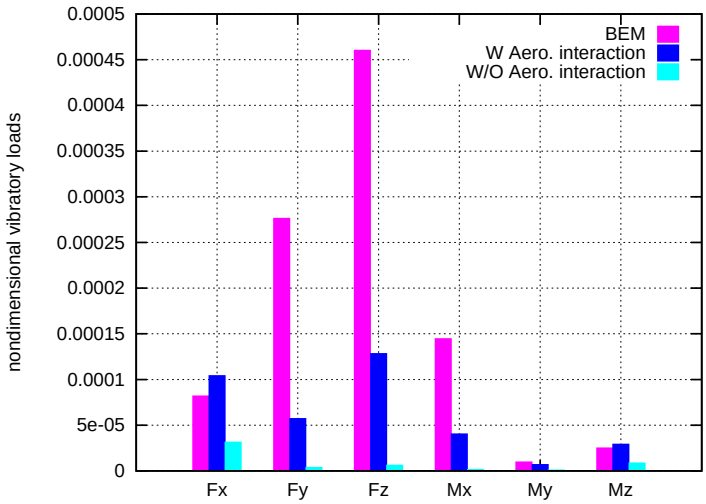


Figura 5.57: *Carichi alla radice del Torque-tube in AC*

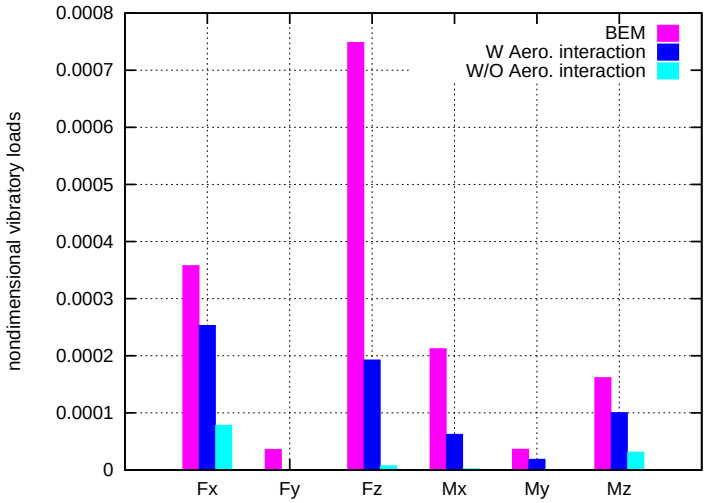


Figura 5.58: *Carichi alla radice della Fixed-wing in AC*

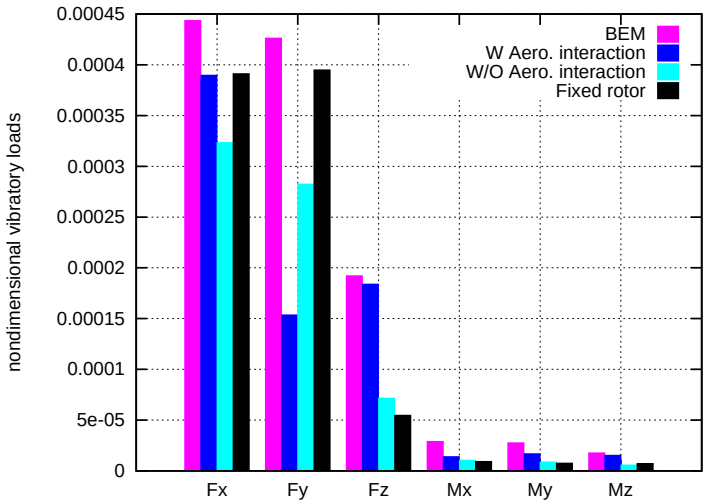


Figura 5.59: *Carichi all'hub in LS*

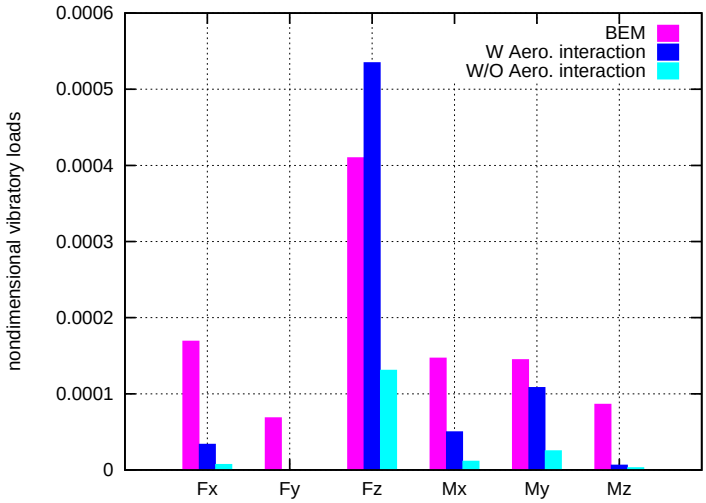


Figura 5.60: *Carichi alla radice della Fixed-wing in LS*

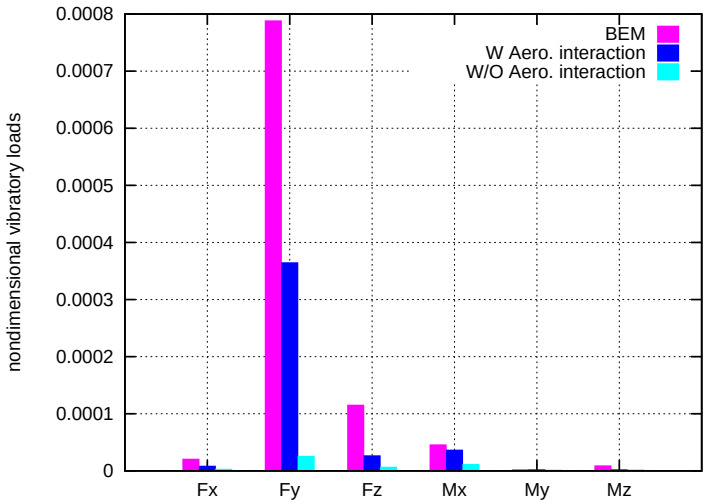


Figura 5.61: *Carichi alla radice del Torque-tube in LS*

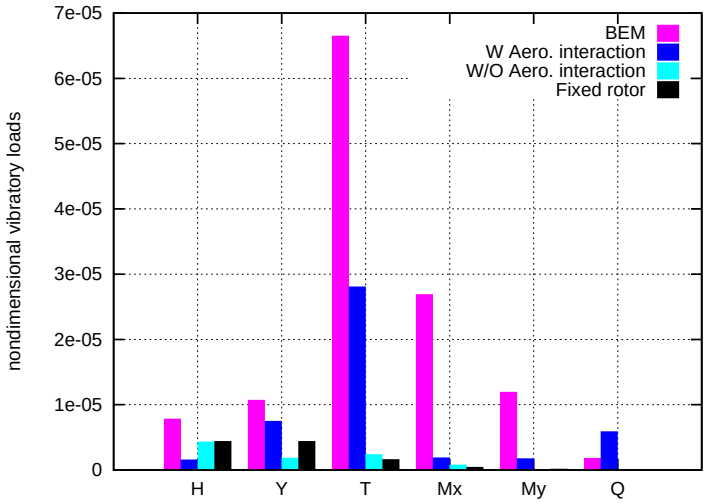


Figura 5.62: *Carichi all'hub in HC*

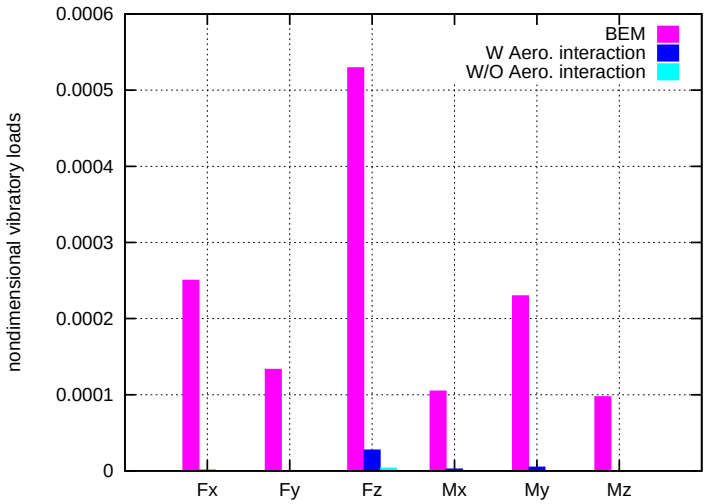


Figura 5.63: *Carichi alla radice della Fixed-wing in HC*

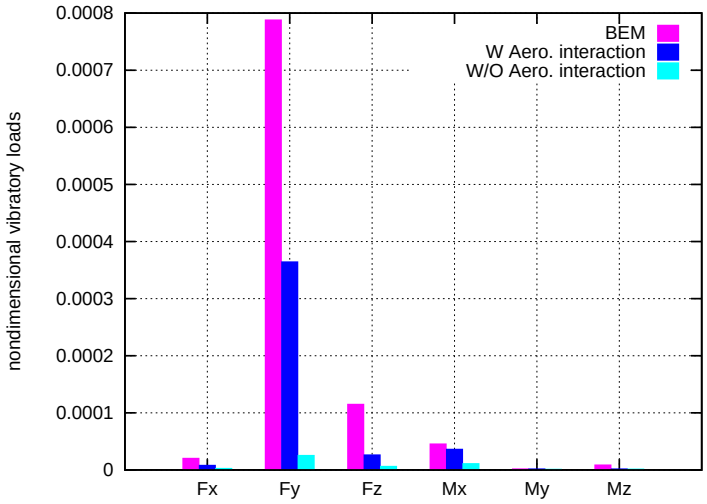


Figura 5.64: *Carichi alla radice del Torque-tube in HC*

5.3 XV-15: analisi aeroelastica vibrazionale

In questo paragrafo si analizza una configurazione più convenzionale e storica di Tiltrotor: il *Bell Helicopters XV-15*. I dati strutturali sono ricavati dai Rif.[1] e [2], mentre per i dati di trim si sono utilizzati quelli disponibili in [9]. Come unico riscontro di validazione (il modello è già stato validato in [23]), si fornisce l'analisi della dinamica strutturale in *airplane-mode* confrontata con [1]. Il calcolo è eseguito considerando solo l'inerzia del rotore applicata assieme a quella della gondola. Viene inoltre fornita l'analisi della dinamica strutturale in *helicopter-mode*

Anche per questa configurazione, come per ERICA, la metodologia sintetizzabile attraverso lo schema del paragrafo 3.2.4 ha portato ad un analisi completa dei carichi vibratori trasmessi in fusoliera. Essendo l'XV-15 fornito di rotori tripala, le frequenze di interesse sono le multiple della $3/rev$, alla quale abbiamo limitato i l' interesse. I casi test sono stati due, sintetizzati nella seguente tabella. In *airplane-mode* il flusso risulta perfettamente assiale, il che vuol dire che le uniche fonti di vibrazione risultano essere fenomeni di interferenza aerodinamica, in particolare l'impatto della scia del rotore con l'ala retrostante. In *helicopter-mode* diversamente dal caso esaminato per ERICA in configurazione *low-speed*, la velocità è più sostenuta e lo *shaft* più inclinato, presagendo un livello di vibrazioni maggiori. I risultati forniti sono di nuovo adi-

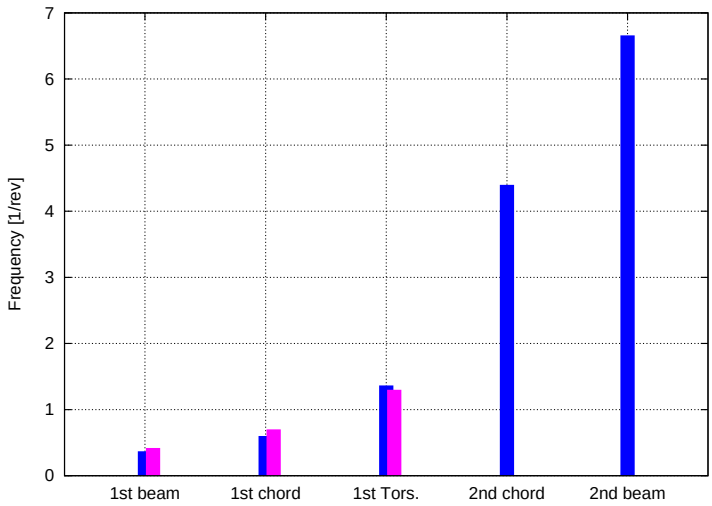


Figura 5.65: *Frequenze proprie dell'ala in airplane-mode, confronto dei primi tre modi con [1]*

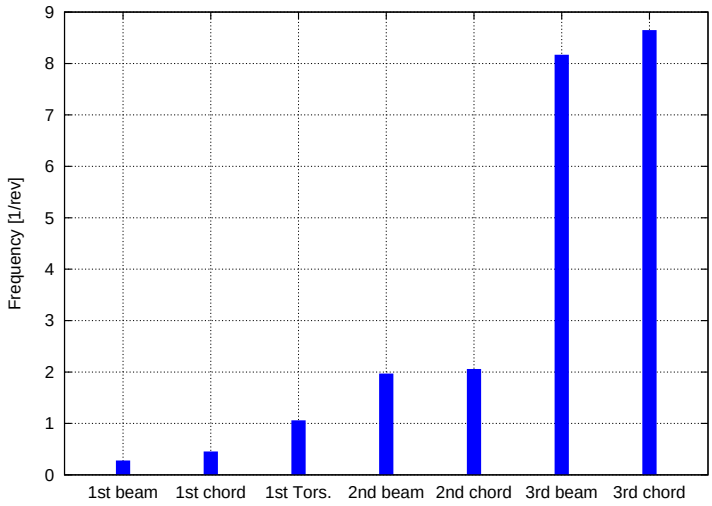


Figura 5.66: *Frequenze proprie dell'ala in helicopter-mode*

Dati di volo XV-15 in *Airplane-mode*	
V	250kts
Ω	458RPM
α_{sh}	93°
Dati di volo XV-15 in *helicopter-mode*	
V	60kts
Ω	600RPM
α_{sh}	8.76°

Tabella 5.3: *Dati di volo per configurazioni XV-15*

mensionali: le forze alla radice risultano divise per $m_{0w}\Omega^2 L_w^2$, i momenti per $m_{0w}\Omega^2 L_w^3$, mentre all'hub in modo corrispondente si ha rispettivamente $m_{0b}\Omega^2 R^2$ e $m_{0b}\Omega^2 R^3$ [5]. Ancora una volta i carichi al mozzo sono indicati nel riferimento **NRH**, mentre per quelli alla radice X si allinea al vento, Y corre lungo l'apertura alare e Z individua la verticale di conseguenza. Per entrambe le configurazioni sono state investigate:

- L'importanza degli impatti di scia, ergo dell'aerodinamica interazionale sull'ala.
- Il legame tra deformazione elastica ed aerodinamica interazionale.
- L'importanza del modello aerodinamico di interazione usato.

5.3.1 Carichi in airplane-mode

Le fig 5.67-5.70 mostrano quanto segue

- In questa configurazione, perfettamente assiale, la presenza o meno dell'aerodinamica 3D sull'ala ai fini del computo dei carichi alla radice risulta rilevante per le forze in direzione X e Z, che risentono evidentemente delle perturbazioni dei coefficienti di resistenza e portanza dei profili investiti. Ma il contributo maggiore è dato ai momenti flettente M_x e torcente M_y: similmente a quanto già visto per ERICA infatti, questi carichi sembrano essere molto sensibili alla geometria legata all' impatto della scia sul profilo.

[5] $m_{0w} = 32.5 Kg/m$, $L_w = 5.092m$, $m_{0b} = 7.64 Kg/m$, $R = 3.82m$

- Essendo l'aerodinamica molto legata alla geometria, ci si è chiesti quanto la deformazione elastica possa contribuire. Le figure 5.68 e 5.69 mostrano che il contributo dell'elasticità sull'aerodinamica risulta del tutto trascurabile sul rotore, ergo le forze aerodinamiche BEM potrebbero essere integrate sulla struttura senza nessun preliminare descritto nel paragrafo 3.2.4; diversamente per l'ala, che è maggiormente influenzata dal cambiamento della regione di impatto. In definitiva però la configurazione *airplane-mode* potrebbe con buon approssimazione usare un'aerodinamica di moto rigido[6].

- L'uso di diversi modelli aerodinamici di interazione (2D più inflow BEM o direttamente carichi BEM) si rivela però una discriminante estremamente importante, come mostra la Fig.5.70 in cui tutti i carichi, ad eccezione di F_y risultano incrementati dall'interazione stretta col BEM attraverso le forze aerodinamiche.

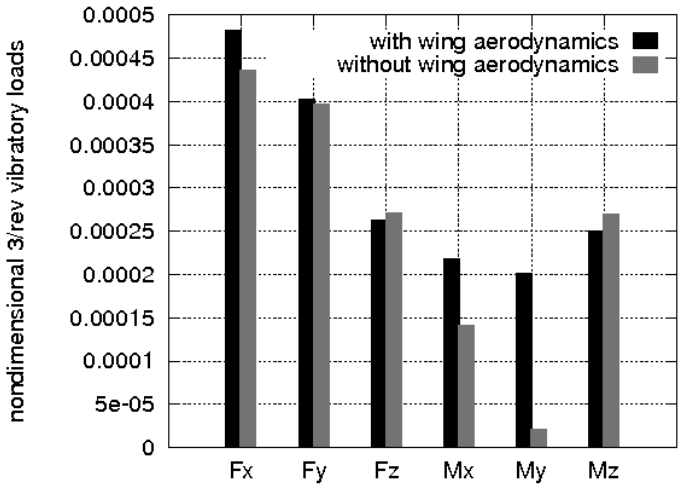


Figura 5.67: *Carichi alla radice in AM, con e senza aerodinamica sull'ala*

5.3.2 Carichi in Helicopter-mode

In questa configurazione le Fig. 5.71-5.74 mostrano quanto segue

[6]Il che non vuol dire trascurare le componenti inerziali nel computo dei carichi alla radice.

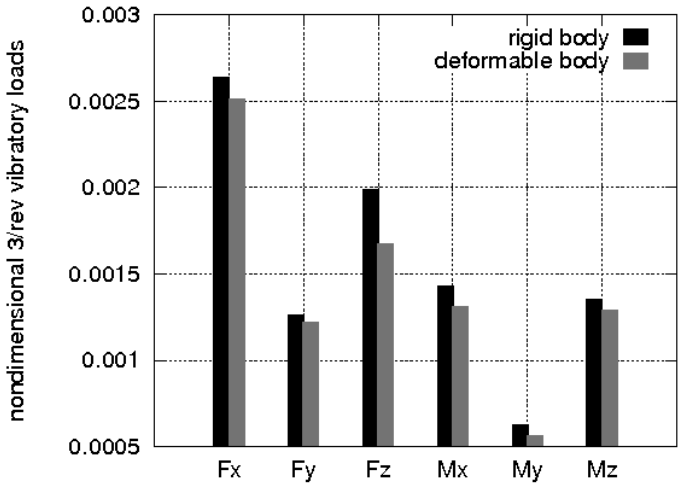


Figura 5.68: *Influenza della deformazione elastica sui carichi aerodinamici di rotore alla radice in AM*

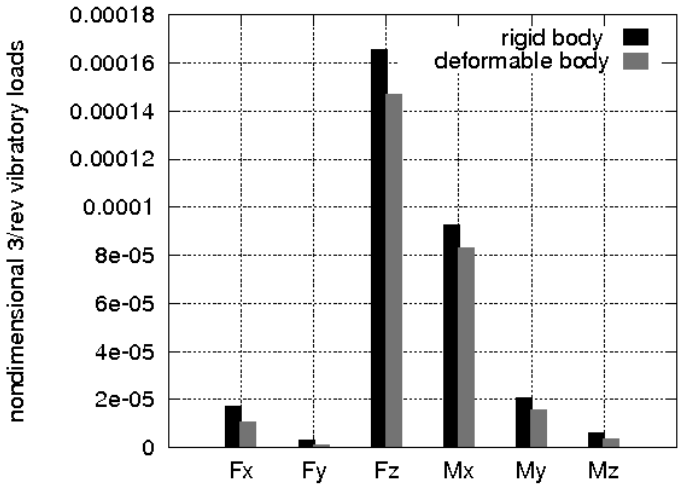


Figura 5.69: *Influenza della deformazione elastica sui carichi aerodinamici di ala alla radice in AM*

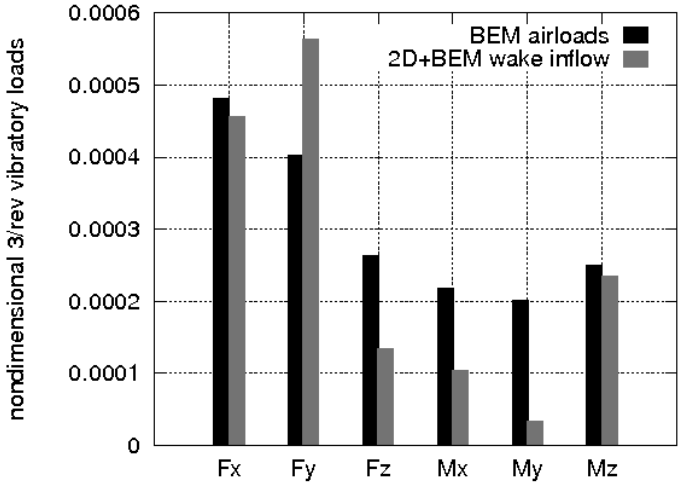


Figura 5.70: *Carichi alla radice in AM, confronto tra modelli aerodinamici interazionali*

- i carichi vibratori risultano più alti, come è logico, a causa del comando ciclico presente e delle ampie velocità nel piano del disco rotorico. Minore importanza investe invece l'impatto tra scia ed ala, a causa delle moderate velocità che le allontanano. La Fig. 5.71 mostra dunque che l'errore commesso trascurando l'aerodinamica interazionale non stravolge la predizione fatta su alcuno dei carichi.

- Le Fig. 5.72-5.73 mostrano poi che, differentemente dal caso precedente, l'aerodinamica è governata dall'aeroelasticità, soprattutto sul rotore, che genera la maggior parte delle vibrazioni. Il procedimento iterativo di cui al paragrafo 3.2.4 è dunque necessario per la determinazione dell'aerodinamica interazionale corretta.

- Infine la Fig. 5.74 mostra coerentemente con quanto detto che, valendo poco il contributo interazionale in confronto a quello prettamente aeroelastico, la differenza globale tra l'uso dei due modelli interazionali basati sull'uso dell'aerodinamica 2D con inflow da BEM, e sull'uso diretto dei carichi BEM è inferiore alla configurazione *airplane-mode*.

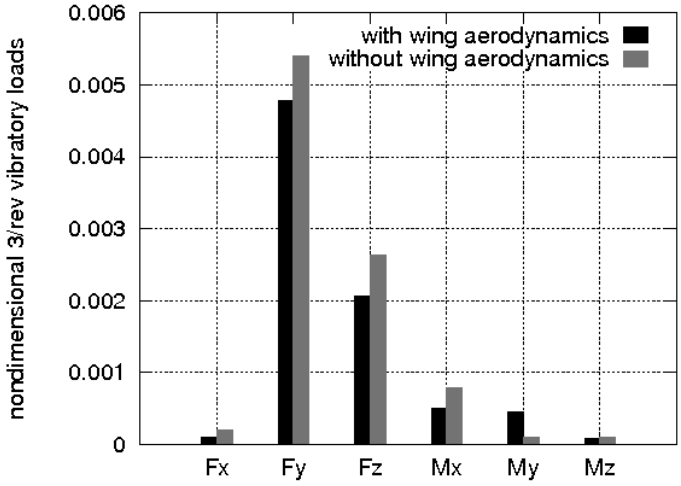


Figura 5.71: *Carichi alla radice in HM, con e senza aerodinamica sull'ala*

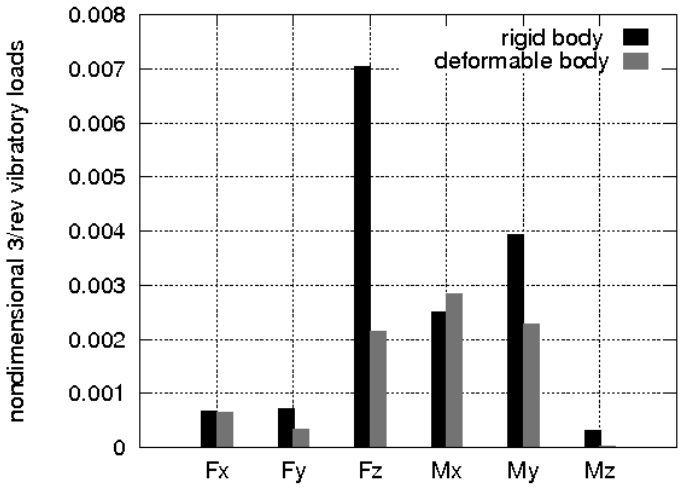


Figura 5.72: *Influenza della deformazione elastica sui carichi aerodinamici di rotore alla radice in HM*

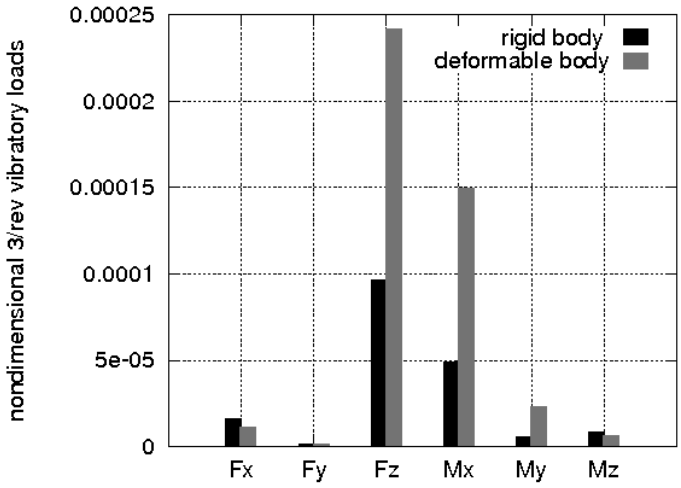


Figura 5.73: *Influenza della deformazione elastica sui carichi aerodinamici di ala alla radice in HM*

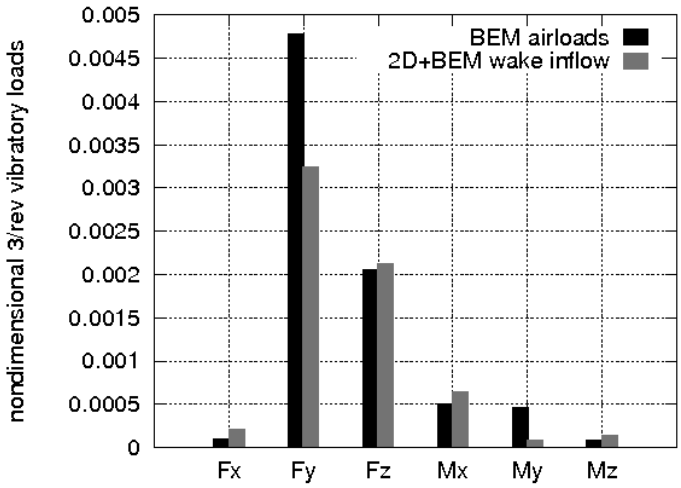


Figura 5.74: *Carichi alla radice in HM, confronto tra modelli aerodinamici interazionali*

5.4 XV-15: controllo delle vibrazioni

In quest'ultima sezione compaiono infine i risultati inerenti al controllo delle vibrazioni mediante i dispositvi **HHC** ed **IBC** introdotti nel Capitolo 4, ovvero il controllo ad armoniche superiori dello *swashplate* e la variazione della rigidezza a flessione alla radice delle pale mediante le *smart-spring*, qui dimensionate per occupare il tratto tra le ascisse pari al 5% ed al 15% della pala. Inerentemente all' XV-15, queste soluzioni sono state testate per via numerica con risultati molto confortanti riguardo ad una possibile futura applicazione.
I meccanismi di controllo sono stati applicati sia in *airplane-mode* che in *helicopter-mode* e le leggi di controllo sono state sintetizzate per far lavorare gli attuatori al massimo consentito in termini di variazioni ammesse della grandezza di controllo. Il modello aerodinamico BEM è stato utilizzato con scia prescritta. Vediamo ora alcune definizioni usate nei seguenti risultati.

- Il carichi di base, ovvero non controllati (Uncontrolled), sono calcolati sulla base dell'aerodinmica 2D, con velocità indotta da BEM secondo il processo iterativo descritto in 3.2.4.

- I carichi calcolati con controllo a ciclo aperto (Open Loop), sono quelli calcolati dal simulatore aeroelastico tenendo in conto nel moto di pala il controllo sintetizzato e dopo aver calcolato una nuova velocità indotta BEM tenendo in conto anche il moto legato ai controlli.

- I carichi calcolati col controllo a ciclo chiuso (Closed Loop) si differenziano dai precedenti perchè sono ricalcolati a valle di una nuova ridefinizione iterativa della legge di controllo armonico secondo l'Eq. 4.8.

In questa sede si sono volute esaminare prettamente le potenzialità di questo tipo di controllo, nonchè la robustezza della sintesi realizzata al variare via via maggiore dei modelli aerodinamici.

5.4.1 Controllo armonico in AM

Le figure 5.75-5.77 mostrano gli effetti sui carichi alla radice dell'attuazione del controllo *HHC* e delle *smart-spring*, sia separatamente che congiunti. In configurazioni come questa, dove comunque i carichi vibratori risultano piccoli, entrambi lavorano ottimamente. L'*HHC* si mostra già più efficace, ma l'uso congiunto lo è ancora di più. Il sistema risulta inoltre robusto, lavorando bene anche al cambiare del modello aerodinamico in *Open-Loop*, questo per la bontà della sintesi, effettuata già con una velocità indotta BEM da scia prescritta, oltre che per l'evidente limitatezza dei cambiamenti apportati all'*inflow* dal moto legato agli attuatori.

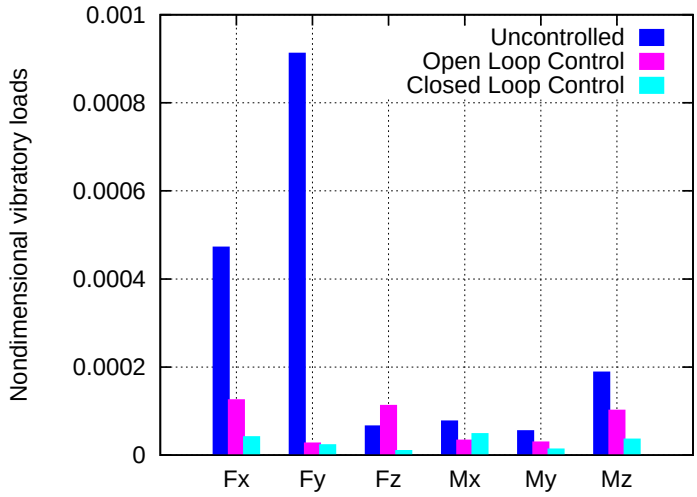


Figura 5.75: *Controllo con HHC in AM*

5.4.2 Controllo armonico in HM

In *helicopter-mode* i carichi di base alla radice dell'ala risultano maggiori per via dell'avanzamento e della presenza del comando ciclico, che peggiorano di molto la situazione vibratoria del rotore. In questa situazione più estrema, come da Fig.5.79 le *smart-spring* rivelano il loro limite, per lo meno per il dimensionamento scelto (che come dichiarato nel Capitolo 4 non è oggetto di questo studio). Il controllo *HHC* dello *swashplate* continua invece a lavorare piuttosto bene (Fig. 5.78). L'uso congiunto infine migliora ancora

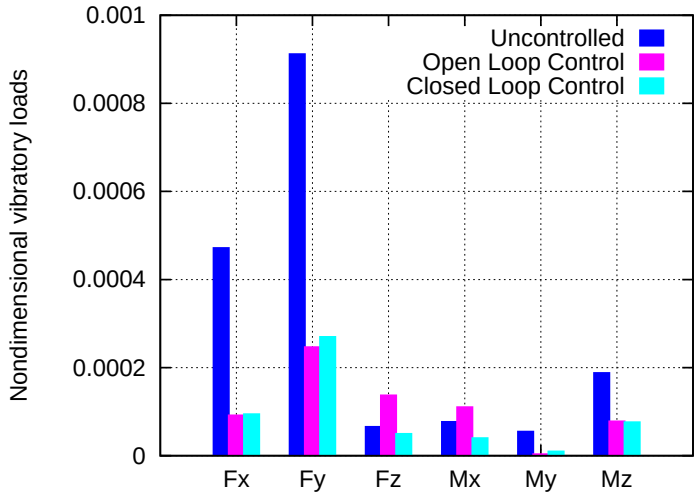


Figura 5.76: *Controllo con SS in AM*

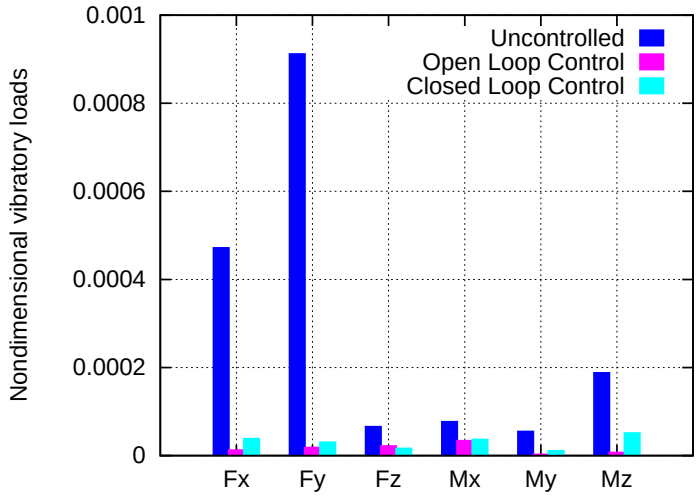


Figura 5.77: *Controllo con HHC e SS in AM*

la situazione (Fig. 5.80). Considerazioni sulla robustezza possono essere fatte, del tutto analogamente a quelle in *airplane-mode*.

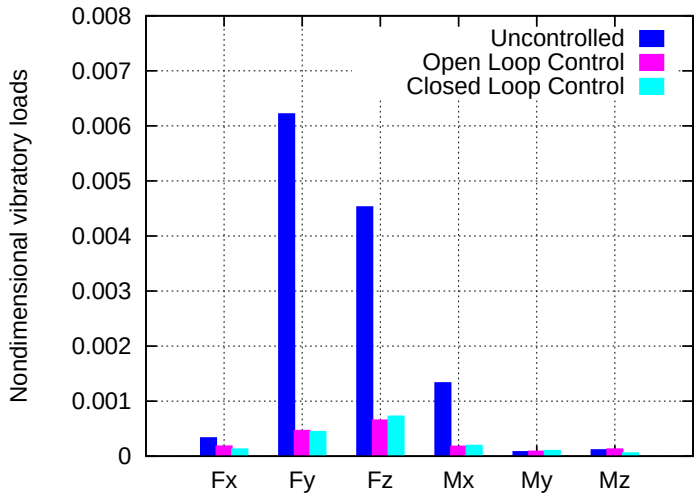


Figura 5.78: *Controllo con HHC in HM*

5.4.3 Possibili alternative: controllare i carichi all'hub o alla radice

Osservata la bontà dei controlli sintetizzati, ci si è chiesto quale fosse la differenza eventuale tra una sintesi che avesse come obiettivo la riduzione dei carichi alla radice, ed una che mirasse a minimizzare i carichi all'hub. Tenendo presente che non sempre può risultare agevole posizionare sensori dall'una piuttosto che dall'altra parte. Il processo di sintesi per la determinazione del controllo tramite *HHC* è stato così ripetuto per minimizzare i carichi all'hub, ma l'osservazione finale è stata comunque mantenuta sul contenuto vibratorio alla radice dell'ala. I risultati evidenziati dalle Fig.5.81-5.84 evidenziano che

- La riduzione dei carichi all'hub comporta una diminuzione dei carichi alla radice dell'ala.
- Specialmente in *airplane-mode* però la riduzione è peggiore, in quanto l'attuatore non può lavorare sui fenomeni di impatto ed interferenza aerodinamica precedentemente descritti.

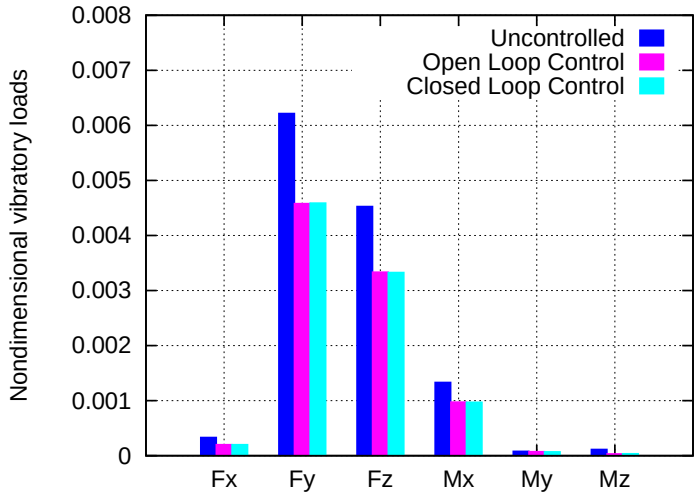


Figura 5.79: *Controllo con SS in HM*

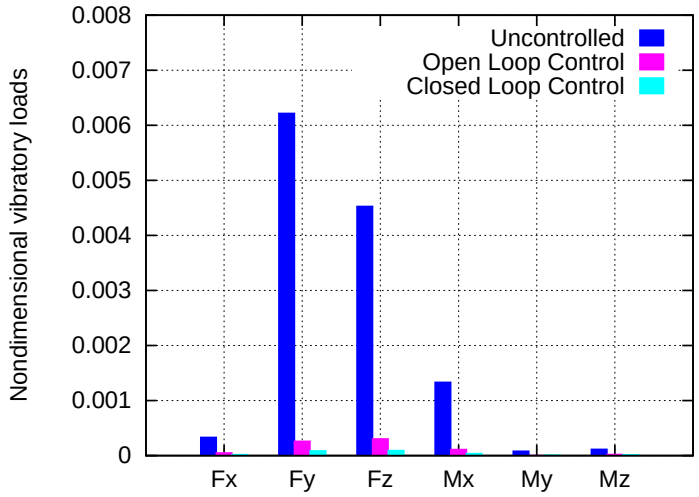


Figura 5.80: *Controllo con HHC e SS in HM*

- In *helicopter-mode* invece, dove abbiamo visto predominare il fenomeno aeroelastico a generare le vibrazioni, la scelta è forse la migliore.

- Le conclusioni di cui sopra sono ulteriormente avvalorate se si osserva il contributo armonico del moto dell'attuatore: in *helicopter-mode* infatti, il contenuto in frequenza si sposta verso la $2/rev$, che se pur aumentando di ampiezza è più realizzabile; in *airplane-mode* invece è difficile giudicare, ma il controllo alla radice, se pur migliore, sembra portarsi verso un contributo in frequenza maggiore, e, come è logico, verso consumi di potenza maggiori.

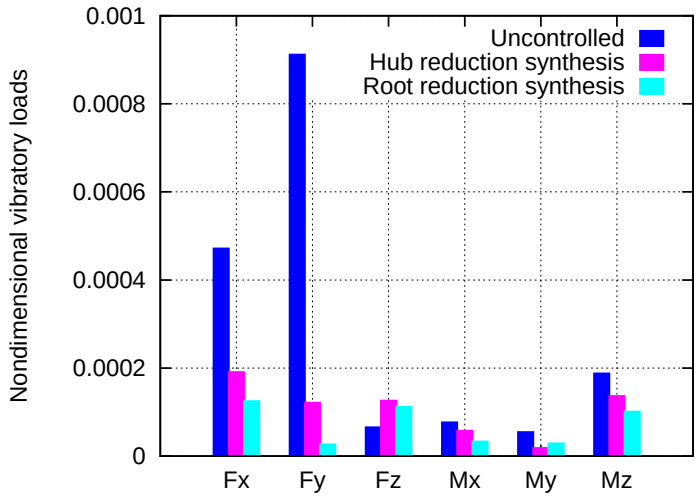


Figura 5.81: *Effetti sui carichi alla radice di una sintesi effettuata minimizzando i carichi all'hub in AM*

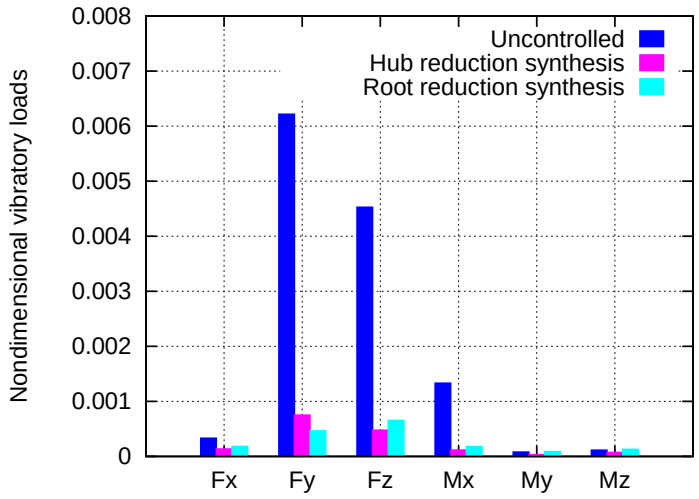


Figura 5.82: *Effetti sui carichi alla radice di una sintesi effettuata minimizzando i carichi all'hub in HM*

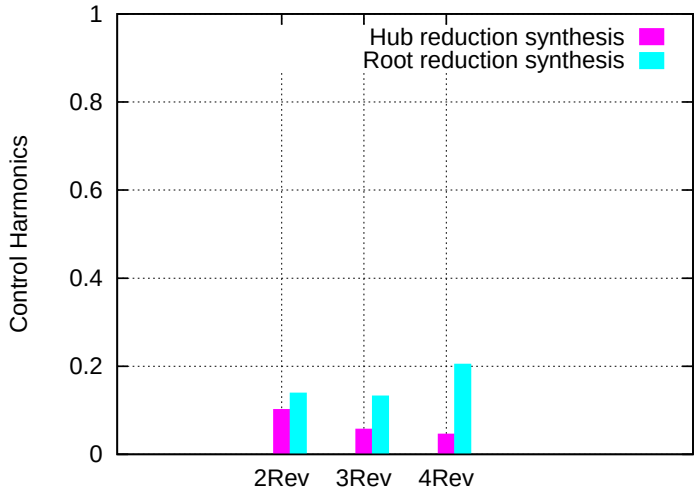


Figura 5.83: *Effetti sulle armoniche del controllo di una sintesi effettuata minimizzando i carichi all'hub in AM*

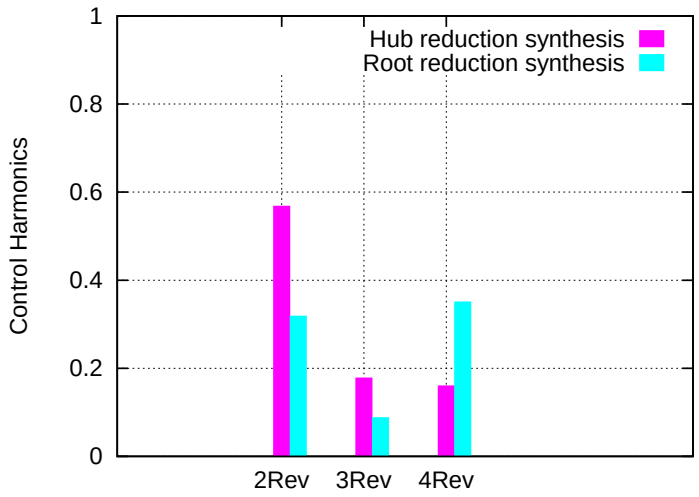


Figura 5.84: *Effetti sulle armoniche del controllo di una sintesi effettuata minimizzando i carichi all'hub in HM*

Conclusioni

Il presente lavoro di tesi si è incentrato sulla costruzione di un modello di soluzione aeroservoelastica adatto alla *Risposta* ed alla *Stabilità* di velivoli Tiltrotor. I punti focali della ricerca triennale di dottorato sono stati:

- La costruzione, a partire dai modelli classici di travi rotanti sviluppati da [4] e [7], di un modello strutturale complesso per il rotore, adatto a descrivere configurazioni con pale ad asse non rettilineo e con caratteristiche aero-strutturali di sezione genericamente variabili.
- La definizione di un **modello avanzato** per l'ala, in cui essa è scomposta in parte interna ed esterna, per rappresentare al meglio la struttura ed il conseguente percorso seguito dalle sollecitazioni che dal rotore raggiungono la fusoliera unendosi agli effetti aerodinamici sull'ala.
- La definizione di una metodologia per interfacciare la struttura complessa del punto precedente con un solutore BEM per l'aerodinamica 3D, onde catturare i fenomeni di interferenza aerodinamica e di impatto scia-corpi e calcolare al meglio i carichi vibratori scaricati in fusoliera, che da detti fenomeni si sono dimostrati fortemente influenzati.
- approcciare il problema della riduzione delle vibrazioni precedentemente identificate con metodi innovativi.

I principali risultati delle indagini numeriche sono stati in primo luogo

- L'estensione dei modelli di travi ad asse rettilineo e caratteristiche costanti sviluppati in [7] e [4] a pale con asse moderatamente curvo, in cui sono inclusi tutti gli effetti cinematici che questo comporta e che influenzano aerodinamica ed inerzia.

- La scomposizione dell'ala in più corpi elastici e rigidi: un *Torque-tube* interno, una *Fixed-wing* ed una *Movable-wing* esterne, vincolate cinematicamente e dinamicamente dalla loro struttura specifica.

Entrambi i modelli sono stati validati nell'ambito del progetto europeo *NICETRIP*, ed applicati all'analisi aeroelastica del Tiltrotor di prossima generazione *ERICA*, di *Agusta-Westland*.
Un' opportuna metodologia di soluzione delle interazioni aerostrutturali con forti impatti scia-corpo è stata messa a punto, permettendo di valutare con successo i carichi vibratori trasmessi alla fusoliera dal sistema ala rotore. I principali risultati sono stati ottenuti applicando il metodo sia ad *ERICA* che a soluzioni convenzionali, quali il *Bell XV-15*.
Da essi può in linea molto generale evincersi che:

- Le vibrazioni in un Tiltrotor hanno differenti agenti principali a seconda della condizione di volo in cui si valutano. Ai due estremi, ovvero in *hover*, così come in volo di crociera il rotore risulta assialsimmetrico, e la maggiore fonte di vibrazioni è l'impatto tra la scia e l'ala. In Hover in particolar modo quest'impatto può generare carichi molto forti, invisibili a modelli aerodinamici non interazionali. Nelle fasi di conversione invece, ovvero in avanzamento di tipo elicotteristico, le vibrazioni sono governate dalle asimmetrie di flusso e dai comandi ciclici, ovvero dall'aeroelsticità dei corpi deformabili che a loro volta influenzano l'aerodinamica.

- Se in *airplane-mode* è dunque lecito calcolare l'aerodinamica di un rotore rigido per poi applicarla sulla struttura elastica per ottenere la quota parte inerziale dei carichi legati alla deformazione, in *helicopter-mode* questo risulta sottostimare la valutazione dei carichi, e l'aerodinamica deve essere calcolata con un processo iterativo che le faccia tener conto della deformazione della struttura.

- L'aerodinamica interazionale a sua volta può essere applicata a più livelli: con un accoppiamento debole, basato sull'aerodinamica 2D arricchita da velocità indotte interazionali sia sul rotore che sull'ala, o con un accoppiamento forte connesso all'applicazione diretta sulla struttura dei carichi aerodinamici del solutore BEM tridimensionale. In alcuni casi, il primo metodo appare limitante in quanto non coglie la forte dipendenza dalla geometria del problema, ed è vincolato all'applicazione della velocità indotta interazionale in un solo punto del profilo.

- La modellazione strutturale appare altresì importante, in quanto masse e geometrie influenzano fortemente i modi e quindi la funzione di trasferimento del sistema che può amplificare notevolmente i carichi in ingresso, fino, nei casi più sfortunati, a risonanze delle frequenze forzanti.

Infine ci si è occupati di testare in prima analisi la potenzialità di metodi di controllo delle vibrazioni: sono stati utilizzati sia un controllo ad armoniche superiori sull'attuazione dello *swashplate*, ergo l'**HHC**, sia meccanismi di controllo individuale delle pale, **IBC**, come le *smart-spring*, capaci con l'innesto di piezoelettrici alla radice della pala di variare con la giusta frequenza la rigidezza a flessione della stessa. Le leggi di attuazione sono state determinate mediante controllo ottimo, ergo la minimizzazione di un indice di prestazione.

- I controlli *HHC* e *smart-spring* si sono dimostrati molto efficienti nel diminuire le vibrazioni. in particolar modo l'*HHC* si è dimostrato efficace sia in *helicopter-mode* che in *airplane-mode*

- Il controllo numerico si è dimostrato robusto al variare del modello aerodinamico rispetto a quello di sintesi.

- Si è infine indagata la convenienza di concentrarsi sulla riduzione dei carichi alla radice o all'hub, osservando come in particolare in *helicopter-mode*, dove l'aerodinamica interazionale è minore, convenga effettivamente concentrarsi sui carichi al mozzo, sia per avere un risultato migliore, sia per modificare il contenuto armonico della legge del moto dell'attuatore verso frequenze e potenze minori.

Appendice

Appendice A: Coefficienti strutturali per la pala

Nel seguente paragrafo si è compilata una lista dei coefficienti integrali strutturali che compongono le matrici dell'equazione 3.5. Per semplicità sono stati suddivisi quelli delle equazioni di pala, da quelli che si riferiscono all'ala, le equazioni vengono intese su assi centrali di figura, ergo non sono presenti i termini legati ai prodotti di figura.

$$K1_{i,j,k} = \int_0^1 (\Lambda_{2b} - \Lambda_{1b})\Theta_i \Psi_i'' \Psi_k'' \sin(2\mathcal{R}\theta)\, d\overline{x} \qquad Q_{i,j} = \int_0^1 \kappa_b \Theta_i' \Theta_j' \, d\overline{x}$$

$$P4L_{i,j} = \int_0^1 \Lambda_{2b} \Psi_i'' \Psi_j'' \, d\overline{x} \qquad P5_{i,j} = \int_0^1 (\Lambda_{2b} - \Lambda_{1b}) \Psi_i'' \Psi_j'' \sin^2(\mathcal{R}\theta)\, d\overline{x}$$

$$P6_{i,j} = \int_0^1 (\Lambda_{2b} - \Lambda_{1b}) \Psi_i'' \Psi_j'' \sin(2\mathcal{R}\theta)\, d\overline{x} \qquad P4F_{ij} = \int_0^1 \Lambda_{1b} \Psi_i'' \Psi_j'' \, d\overline{x}$$

$$K2_{i,j,k} = \int_0^1 (\Lambda_{2b} - \Lambda_{1b})\Theta_i \Psi_j'' \Psi_k'' \cos(2\mathcal{R}\theta)\, d\overline{x}$$

Appendice B: Coefficienti strutturali per l'ala

$$P4L_{ij}^{w} = \int_0^1 \Lambda_{2w} \Psi_i'' \Psi_j'' d\overline{x}$$

$$P4F_{ij}^{w} = \int_0^1 \Lambda_{1w} \Psi_i'' \Psi_j'' d\overline{x}$$

$$P5_{ij}^{w} = \int_0^1 (\Lambda_{2w} - \Lambda_{1w}) \sin^2 \Theta \Psi_i'' \Psi_j'' d\overline{x}$$

$$P6_{ij}^{w} = \int_0^1 (\Lambda_{2w} - \Lambda_{1w}) \sin(2\Theta) \Psi_i'' \Psi_j'' d\overline{x}$$

$$DKGENF_{ij}^{w} = \int_0^1 \overline{m}_w \Psi_i \Psi_j d\overline{x}$$

$$DKGENT_{ij}^{w} = \int_0^1 \mu_w^2 \overline{m}_w \Theta_i \Theta_j d\overline{x}$$

$$Q_{ij}^{w} = \int_0^1 \kappa_w \Theta_i' \Theta_j' d\overline{x}$$

$$T1_{ij}^{w} = \int_0^1 \overline{m}_w \overline{e}^w \Theta_i \Psi_j \sin \Theta d\overline{x}$$

$$T2_{ij}^{w} = \int_0^1 \overline{m}_w \overline{e}^w \Theta_i \Psi_j \cos \Theta d\overline{x}$$

Appendice C: Equazioni Discretizzate

A chiusura di quest'appendice, si é ritenuto utile mostrare il risultato della discretizzazione mediante *Galërkin*, descritta nel Capitolo 3 ed applicata alle equazioni adimensionali 2.107-2.132.

Equazione discretizzata di lead-lag per la pala:

$$\text{Per } \; i = 1...N_{mode}$$

$$\sum_{j=1}^{N_{mode}} q_{j-b}^{v}\left[P4L_{ij} - P5_{ij}\right] + \sum_{j=1}^{N_{mode}} q_{j-b}^{w}\left[\frac{1}{2}P6_{ij}\right]$$
$$+ \sum_{j=1}^{N_{mode}} q_{j-b}^{\phi}\left[\sum_{k=1}^{N_{mode}} K2_{jki}q_{k-b}^{w} - \sum_{k=1}^{N_{mode}} K1_{jki}q_{k-b}^{v}\right]$$
$$= \int_0^1 (\overline{p}_y^{in-b} + \overline{L}_v^{b} + \overline{p}_y^{str-b} - \overline{q}_z^{'in})\Psi_i d\overline{x} = f_i^{gen}$$

dove la componente strutturale del carico è data da:

$$\overline{p}_y^{str} = -\left\{\overline{T}\overline{e}_{A\zeta}\sin(\theta_{tw} + \phi_b) - \overline{T}\overline{e}_{A\eta}\cos(\theta_{tw} + \phi_b)\right\}'' + (\overline{T}\overline{v}_b')'$$

Equazione discretizzata di flap per la pala:

$$\text{Per } \; i = 1...N_{mode}$$

$$\sum_{j=1}^{N_{mode}} q_{j-b}^{w}\left[P4F_{ij} + P5_{ij}\right] + \sum_{j=1}^{N_{mode}} q_{j-b}^{v}\left[\frac{1}{2}P6_{ij}\right] +$$
$$\sum_{j=1}^{N_{mode}} q_{j-b}^{\phi}\left[\sum_{k=1}^{N_{mode}} K2_{jki}q_{k-b}^{v} + \sum_{k=1}^{N_{mode}} K1_{jki}q_{k-b}^{w}\right]$$
$$= \int_0^1 (\overline{p}_z^{in-b} + \overline{L}_w^{b} + \overline{p}_z^{str-b} + \overline{q}_y^{'in-b})\Psi_i d\overline{x} = f_i^{gen}$$

dove la componente strutturale del carico è data da:

$$\overline{p}_z^{str} = \left\{\overline{T}\overline{e}_{A\eta}\sin(\theta_{tw} + \phi_b) + \overline{T}\overline{e}_{A\zeta}\cos(\theta_{tw} + \phi_b)\right\}'' + (\overline{T}\overline{w}_b')'$$

Equazione discretizzata di torsione per la pala:

$$\text{Per } \; i = 1...N_{mode}$$

$$\sum_{j=1}^{N_{mode}} q^{v}_{j-b}\left\{\sum_{k=1}^{N_{mode}} K2_{ijk}q^{w}_{k-b} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_{mode}} K1_{ijk}q^{v}_{k-b}\right\}+$$
$$\sum_{j=1}^{N_{mode}} q^{w}_{j-b}\left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N_{mode}} K1_{ijk}q^{w}_{k-b}\right]+$$
$$\sum_{j=1}^{N_{mode}} q^{\phi}_{j-b}[Q_{ij}]$$
$$= \int_0^1 (\overline{q}^{in-b}_x + \overline{v}'_b\overline{q}^{in-b}_y + \overline{w}'_b\overline{q}^{in-b}_z + \overline{q}^{str-b}_x + M^b_\phi)\Theta_i d\overline{x} = f^{gen}_i$$

dove la componente strutturale del carico è data da:

$$\overline{q}^{str-b}_x = (\overline{TK}^2_A(\theta_{tw} + \phi_b)')' - \overline{v}''_b(\overline{Te}^b_{A\zeta}\cos(\theta_{tw} + \phi_b) + \overline{Te}^b_{A\eta}\sin(\theta_{tw} + \phi_b))$$
$$- \overline{w}''_b(\overline{Te}^b_{A\zeta}\sin(\theta_{tw} + \phi_b) - \overline{Te}^b_{A\eta}\cos(\theta_{tw} + \phi_b))$$

Equazione discretizzata di lag per l'ala:

$$\text{Per } \; i = 1...N_{mode}$$

$$\sum_{j=1}^{N_{mode}} [DKGENF^{w}_{ij}]\ddot{q}^{v}_{j-w} - \sum_{j=1}^{N_{mode}} [T1^{w}_{ij}]\ddot{q}^{\phi}_{j-w}$$
$$+ \sum_{j=1}^{N_{mode}} [P4L_{ij} - P5_{ij}]q^{v}_{j-w} + \sum_{j=1}^{N_{mode}} \frac{1}{2}P6_{ij}q^{w}_{j-w}$$
$$+ \sum_{j=1}^{N_{mode}} q^{\phi}_{j-w}\left[\sum_{k=1}^{N_{mode}} [K2_{ijk}q^{w}_{k-w} - K1_{ijk}q^{v}_{k-w}]\right] =$$
$$= \int_0^1 \overline{L}^{w}_{v}\Psi_i d\overline{x} + \overline{V}^{ai}_{(CEw)y}\Psi_i(1) + \overline{M}^{ai}_{(CEw)z}\Psi'_i(1) =$$
$$= f^{gen}_i$$

Equazione discretizzata di flap per l'ala:

$$\text{Per } \; i = 1...N_{mode}$$

$$\sum_{j=1}^{N_{mode}} [DKGENF_{ij}^{w}]\ddot{q}_{j-w}^{w} + \sum_{j=1}^{N_{mode}} [T2_{ij}^{w}]\ddot{q}_{j-w}^{\phi}$$
$$+ \sum_{j=1}^{N_{mode}} [P4F_{ij} + P5_{ij}]q_{j-w}^{w} + \sum_{j=1}^{N_{mode}} \frac{1}{2}P6_{ij}q_{j-w}^{v}$$
$$+ \sum_{j=1}^{N_{mode}} q_{j-w}^{\phi}\left[\sum_{k=1}^{N_{mode}} [K2_{ijk}q_{k-w}^{v} + K1_{ijk}q_{k-w}^{w}]\right] =$$
$$= \int_0^1 \overline{L}_w^w \Psi_i d\overline{x} + \overline{V}_{(CEw)z}^{ai}\Psi_i(1) - \overline{M}_{(CEw)y}^{ai}\Psi_i'(1) =$$
$$= f_i^{gen}$$

Equazione discretizzata di torsione per l'ala:

$$\text{Per } \; i = 1...N_{mode}$$

$$\sum_{j=1}^{N_{mode}} [DKGENT_{ij}^{w}]\ddot{q}_{j-w}^{\phi} + \sum_{j=1}^{N_{mode}} [T2_{ij}^{w}]\ddot{q}_{j-w}^{w} - \sum_{j=1}^{N_{mode}} [T1_{ij}^{w}]\ddot{q}_{j-w}^{v}$$
$$+ \sum_{j=1}^{N_{mode}} q_{j-w}^{v}\left[\sum_{k=1}^{N_{mode}} [K2_{ijk}q_{k-w}^{w} - \frac{1}{2}K1_{ijk}q_{k-w}^{v}]\right]$$
$$+ \sum_{j=1}^{N_{mode}} q_{j-w}^{w} \sum_{k=1}^{N_{mode}} [\frac{1}{2}K1_{ijk}]q_{k-w}^{w} +$$
$$+ \sum_{j=1}^{N_{mode}} Q_{ij}q_{j-w}^{\phi} =$$
$$= \int_0^1 \overline{M}_{\phi}^{w}\Theta_i d\overline{x} + \overline{M}_{(CEw)x}^{ai}\Theta_i(1) + \overline{M}_{(CEw)y}^{ai}\Theta_i(1)\overline{v}_w'(1) + \overline{M}_{(CEw)z}^{ai}\Theta_i(1)\overline{w}_w'(1) =$$
$$= f_i^{gen}$$

Appendice D: Complementi sulla modellazione dell'ala.

In quest'appendice vengono riportati per completezza alcuni elementi omessi, per semplicità, nella descrizione del modello aeroelastico dell'ala.

Ala,Modello avanzato: determinazione della molla in X_{R0}

Come illustrato nel paragrafo 2.6.3, il vincolo d'appoggio del *Torque-tube* con la fusoliera in X_{R0}, unito alla condizione di simmetria in mezzeria, schematizzabile come un carrello, può essere condensato in un appoggio con molla, in X_{R0}, di costante K_b, il cui valore è stato determinato dalle caratteristiche elastiche come segue:

Supposta per la deformata una forma parabolica, ovvero

$$\begin{cases} w(x) = ax^2 + bx + c \\ w'(x) = 2ax + b \\ w''(x) = 2a \end{cases}$$

ed imponendo le condizioni di simmetria

$$w'(0) = 0 \Rightarrow b = 0$$

si può determinare una molla equivalente tale che:

$$K_b w'(X_{R0}) = M(X_{R0}) = w''(X_{R0})EI$$

che fornisce dunque il valore richiesto:

$$K_b = \frac{EI}{X_{R0}}$$

Determinazione dei carichi alla radice nel Modello avanzato

I carichi alla radice[7], essendo definiti in un postprocesso come prodotto della *Risposta Aeroelastica*, non sono stati inseriti nella modellazione perché di fatto non partecipano alla dinamica del sistema ala-rotore, ma ne derivano come conseguenza. In forma vettoriale e dimensionale, nel riferimento **AI** si ottiene:

$$\begin{cases} \mathbf{V}^{tt}_{root} = \int_0^{L_w} \mathbf{p}^{tt}_{in} dX_{ai} + \mathbf{V}_{CEw} + \mathbf{V}_{FW-TT} + \mathbf{V}_{MW-TT}(X_{R1}) + \mathbf{V}_{MW-TT}(X_{R2}) \\ \mathbf{V}^{fw}_{root} = \int_0^{L_{fw}} (\mathbf{p}^{fw}_{in} + \mathbf{p}^{fw}_{ae}) dX_{ai} + \mathbf{V}_{TT-FW} \\ \\ \mathbf{M}^{tt}_{root} = \int_0^{L_w} (\mathbf{q}^{tt}_{in} + \mathbf{x} \wedge \mathbf{p}^{tt}_{in}) dX_{ai} + \mathbf{d}^{tt}_{tip} \wedge \mathbf{V}_{CEw} + \mathbf{d}^{tt}_{R1} \wedge (\mathbf{V}_{FW-TT} + \mathbf{V}_{MW-TT}(X_{R1})) \\ + \mathbf{d}^{tt}_{R2} \wedge \mathbf{V}_{MW-TT}(X_{R2}) \\ \mathbf{M}^{fw}_{root} = \int_0^{L_{fw}} (\mathbf{q}^{fw}_{in} + \mathbf{q}^{fw}_{ae} + \mathbf{x} \wedge (\mathbf{p}^{fw}_{in} + \mathbf{p}^{fw}_{ae})) dX_{ai} + \mathbf{d}^{fw}_{R1} \wedge \mathbf{V}_{TT-FW} + \mathbf{M}_{MW-FW}(X_{R1}) \end{cases}$$

dove $\mathbf{x}, \mathbf{d}^{tt}_{R1}, \mathbf{d}^{tt}_{R2}, \mathbf{d}^{fw}_{R1},$ *e* $\mathbf{d}^{fw}_{R2}$ sono le distanze dei punti di applicazione delle forze dai rispettivi centri di taglio alla radice in cui vengono valutati i carichi.

[7] La radice è supposta in X_{R0}.

Appendice E: Trasformazione in variabili multipala.

La trasformazione di coordinate di Fourier

Le equazioni del moto del rotore sono state espresse in un sistema di riferimento rotante, ed i gradi di libertà considerati descrivono il moto di ogni singola pala separatamente. E' possibile e pratico in alcune applicazioni osservare il comportamento del rotore nel suo complesso, attraverso delle variabili definite nel sistema di riferimento non rotante: le *variabili multipala.* La trasformazione che permette il passaggio dal primo al secondo set di variabili lagrangiane è nota anche come trasformazione di coordinate di Fourier.
Si consideri un rotore costituito da N_{blade} pale, considerando β_k il generico grado di libertà per la K-esima pala nel sistema di riferimento rotante, si introducono i seguenti gradi di libertà che descrivono il moto del rotore nel riferimento non rotante:

- **Collettivo**: rappresenta un modo delle pale tutte in fase fra loro.

$$\beta_0 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N_blade} \beta_K \tag{5.2}$$

- **Differenziale**: modo esistente solo in rotori che hanno un **numero pari di pale**, rappresenta il caso in cui una pala e la precedente siano in opposizione di fase.

$$\beta_{\frac{N}{2}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N_{blade}} (-1)^k \beta_K \tag{5.3}$$

- **Progressivi**: sono in numero pari alle n armoniche prese in considerazione[8]

$$\beta_{nc} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N_{blade}} \beta_K \cos(n\Psi_k) \tag{5.4}$$

[8]Il numero delle armoniche da considerare è ottenibile come:

- se il numero delle pale è **dispari** $\Longrightarrow n = 1, \frac{N_{blade} - 1}{2}$
- se il numero delle pale è¨ **pari:** $\Longrightarrow n = 1, \frac{N_{blade} - 2}{2}$

- **Regressivi**:

$$\beta_{ns} = \frac{2}{N} \sum_{k=1}^{N_{blade}} \beta_K \sin(n\Psi_k) \tag{5.5}$$

La trasformazione inversa dalle variabili multipala a quelle fisiche è invece data dalla seguente:

$$\beta_K = \beta_0 + \sum_n [\beta_{nc} \cos(n\Psi_k) + \beta_{ns} \sin(n\Psi_k)] + \beta_{\frac{N}{2}} (-1)^k \tag{5.6}$$

Utilizzando la 5.6, è dunque possibile definire una matrice di trasformazione atta al passaggio di coordinate. Per completare le informazioni necessarie alla trasformazione è necessario definire anche la relazione esistente fra le derivate dei g.d.l.[9]:

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_K = \dot{\beta}_0 + \sum_n \big[&\left(\dot{\beta}_{nc} + n\Omega\beta_{ns}\right) \cos(n\Psi_k) \\ &+ \left(\dot{\beta}_{ns} - n\Omega\beta_{nc}\right) \sin(n\Psi_k)\big] + \dot{\beta}_{\frac{N}{2}} (-1)^k \end{aligned} \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\beta}_K = \ddot{\beta}_0 + \sum_n \big[&\left(\ddot{\beta}_{nc} + 2n\omega\dot{\beta}_{ns} - n^2\Omega^2\beta_{nc}\right) \cos(n\Psi_k) \\ &+ \left(\ddot{\beta}_{ns} - 2n\omega\dot{\beta}_{nc} - n^2\Omega^2\beta_{ns}\right) \sin(n\Psi_k)\big] + \ddot{\beta}_{\frac{N}{2}} (-1)^k \end{aligned} \tag{5.8}$$

Quanto detto fin'ora è estendibile a ciascuna variabile del sistema esaminato, così come è stato assemblato nel Capitolo 3; in particolar modo, riferendosi al vettore delle variabili descritto nel paragrafo 3.4 dalla relazione 3.29, si cerca una trasformazione tale che porti da:

$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^1_{blade} \\ .. \\ \mathbf{q}^{N_{blade}}_{blade} \\ .. \\ \mathbf{q}_{hub} \\ \mathbf{q}_{wing} \end{Bmatrix} \longrightarrow \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_0 \\ .. \\ \mathbf{q}_{nc} \\ \mathbf{q}_{ns} \\ \mathbf{q}_{\frac{N}{2}} \\ \mathbf{q}_{hub} \\ \mathbf{q}_{wing} \end{Bmatrix}$$

dove ciascun modo nel sistema rotante da origine a N_{blade} variabili multipala, raggruppate nei vettori $\mathbf{q}_0$ per i collettivi, $\mathbf{q}_{nc}$ e $\mathbf{q}_{ns}$ per i progressivi e regressivi relativi alla n-esima armonica, e $\mathbf{q}_{\frac{N}{2}}$ per i differenziali, se presenti.

[9]Nelle equazioni adimensionalizzate si omette la Ω.

Questa scelta porta a definire le seguenti trasformazioni:

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{T}\mathbf{x_{MB}} \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{MB}} + \dot{\mathbf{T}}\mathbf{q_{MB}} \\ \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{T}\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{MB}} + 2\dot{\mathbf{T}}\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{MB}} + \ddot{\mathbf{T}}\mathbf{q} \end{cases} \tag{5.9}$$

dove $\mathbf{T}$, $\dot{\mathbf{T}}$ e $\ddot{\mathbf{T}}$ sono delle matrici diagonali a blocchi definite come segue:

- Matrice $\mathbf{T}$:

$\mathbf{I}$	$\cos\Psi_K\mathbf{I}$	$\sin\Psi_k\mathbf{I}$	$(-1)^k\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{I}$	$\cos\Psi_{N_{blade}}\mathbf{I}$	$\sin\Psi_{N_{blade}}\mathbf{I}$	$(-1)^{N_{blade}}\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{I}$

- Matrice $\dot{\mathsf{T}}$:

$\mathbf{0}$	$-\Omega\sin\Psi_K\mathbf{I}$	$\Omega\cos\Psi_k\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$-\Omega\sin\Psi_{N_{blade}}\mathbf{I}$	$\Omega\cos\Psi_{N_{blade}}\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

- Matrice $\ddot{\mathsf{T}}$:

$\mathbf{0}$	$-\Omega^2\cos\Psi_K\mathbf{I}$	$-\Omega^2\sin\Psi_k\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$-\Omega^2\cos\Psi_{N_{blade}}\mathbf{I}$	$-\Omega^2\sin\Psi_{N_{blade}}\mathbf{I}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

E' interessante sottolineare alcune proprietà della trasformazione multipala evidenziate nelle varie analisi effettuate:

1. Considerando un rotore isolato, l'analisi spettrale in vacuo[10] mostra che:

[10] L'aerodinamica accoppia fortemente i gradi di libertà in gioco

- Esiste un disaccoppiamento fra i collettivi, i ciclici, e i differenziali;
- si evidenzia un accoppiamento fra i ciclici progressivi e quelli regressivi;
- La frequenza di un autovalore, corrispondente prevalentemente ad un modo[11] ciclico, sarà pari a quella dell' autovalore collettivo corrispondente ± 1, ovvero $\pm\Omega$ in termini dimensionali.

2. Il comportamento suddetto si riscontra ancora, ma in misura minore, nel caso in cui si analizzi il rotore supportato dal gimbal; di fatto esso aggiunge al sistema i propri ciclici β_C e β_S, con frequenze proprie vicine alla 2Ω e 0Ω, che si accoppiano fortemente con quelli dei moti elastici. In particolar modo questo modifica fortemente le frequenze cicliche del primo modo di flappeggio, che tendono a salire, non rispettando più il rapporto ± 1 che hanno con il collettivo nel caso di rotore isolato.

3. L'innesto dei moti di traslazione dell'hub (2.7) distanzia in particolare modo i differenziali dai collettivi; l'effetto più evidente è quello della traslazione verticale sul collettivo/differenziale di flappeggio.

4. L'ala incrementa tutti questi fenomeni, accoppiando definitivamente tutto il sistema.

5. La presenza della rotazione dell'hub γ_G, si accoppia col collettivo di lead-lag, con cui coincide perfettamente, in assenza di un offset di cerniera e_H

La trasformazione multipala ha un effetto analogo a quanto avviene sommando i carichi al mozzo[12]: alcune componenti armoniche vengono filtrate e rimangono una parte costante e una parte armonica con frequenze $N_{blade}\Omega$. In pratica la parte tempovariante si distanzia sempre più da quella costante: l'utilizzo delle variabili multipala per lo studio di sistemi periodici è principalmente

[11] flappeggio,torsione o lag.

[12] In effetti osservando le forzanti delle equazioni multipala si può osservare come, ad esempio, i ciclici di flappeggio/gimbal siano forzati dai momenti all'hub nel piano, mentre il collettivo di lead-lag sia forzato dalla coppia (si rimanda a [1] per ogni dettaglio).

legato a ciò, in quanto consente di limitare l'analisi spettrale ad un'approssimazione tempo-costante del sistema periodico (ottenuta considerando solo la parte costante della matrice di stato) e al contempo elimina l'incertezza sulla determinazione della frequenza di metodi come quello noto di Floquet, molto usato per sistemi periodici. E' chiaro che la trasformazione multipala è però tanto più limitante, quanto più il sistema risulta effettivamente periodico. La procedura appena descritta viene utilizzata sulla seconda equazione nella 3.27, che descrive la dinamica perturbativa e che qui riscriviamo per completezza come segue:

$$\mathbf{M^{stab}}(t))\Delta\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C^{stab}}(t)\Delta\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K^{stab}}(t))\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{5.10}$$

Sistema completo in variabili Multipala

Il passaggio al riferimento non rotante si ottiene partendo dall' Eq. 5.10, introducendo le trasformazioni 5.9 e premoltiplicando per $\mathbf{T^{-1}}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{T^{-1}}(\mathbf{M^{stab}T})\Delta\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{MB}} + \mathbf{T^{-1}}\left(\mathbf{C^{stab}T} + \mathbf{2M^{stab}}\dot{\mathbf{T}}\right)\Delta\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{MB}} \\ &+ \mathbf{T^{-1}}(\mathbf{K^{stab}T} + \mathbf{C^{stab}}\dot{\mathbf{T}} + \mathbf{M^{stab}}\ddot{\mathbf{T}})\Delta\mathbf{x}_{\mathbf{MB}} = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{5.11}$$

che fornisce l'equazione in variabili multipala nel sistema di riferimento non rotante, su cui eseguire l'analisi agli autovalori con tecniche note, su cui non ci si dilungherà in questa sede.

$$\mathbf{M^{stab}_{MB}}\Delta\ddot{\mathbf{x}}_{\mathbf{MB}} + \mathbf{C^{stab}_{MB}}\Delta\dot{\mathbf{x}}_{\mathbf{MB}} + \mathbf{K^{stab}_{MB}}\Delta\mathbf{x}_{\mathbf{MB}} = \mathbf{0} \tag{5.12}$$

Bibliografia

[1] *Wayne Johnson , 'Dynamics of Tilting Proptor Aircraft in cruise flight' , Ames Research Center and U.S. Army Air Mobility R.D Laboratory Moffett Field , California 94035 , NASA , May 1974.*

[2] *Wayne Johnson, 'Analytical Model for Tilting Proprotor Aircraft Dynamics, Including Blade Torsion and Coupled Bending Modes and Conversion Mode Operation', NASA TM X-62 369, 1974.*

[3] *Wayne Johnson, 'Analytical Modeling Requirements for Tilting Proprotor Aircraft Dynamics',NASA TN D-8013,1975*

[4] *D.H. Hodges , E. Dowell ,' Nonlinear equation of motion for the elastic bending and torsion of twisted non uniform rotor blades',December 1974 , NASA , Technical Report D7818*

[5] *T. Theodorsen, 'General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter', NASA Report 496 (1935).*

[6] *J.M. Greenberg, 'Airfoil in sinusoidal motion in a pulsating stream', NASA TN-1326 (1947).*

[7] *D.H. Hodges, R.H. Ormiston, 'Stability of elastic bending and torsion of uniform form cantilevered rotor blades in hover with variable structural coupling', April 1976 , NASA , Technical Report D8129.*

[8] *W., Johnson,' Helicopter Theory' , 1980, Dover Publications Inc.*

[9] *Mark W. Nixon,'Aeroelastic response and stability of tiltrotors with elastically-coupled rotor blades', 1993*

[10] *M. Gennaretti, G. Bernardini, A., Carvai, 'Aeroelastic Modeling and Vibratory Load Analysis of Helicopter using a 3-D Unsteady aerodynamic solver.*

[11] *Cernicchiaro, 'Studio delle configurazioni di trim con un modello aeroelastico di rotore in volo di avanzamento', 2001,tesi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale , Universitá degli studi di Roma La Sapienza.*

[12] *Claudio Testa, 'Approccio modale per l'analisi aeroelastica di sistemi Tiltrotor', 2001, tesi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale , Universitá degli studi di Roma La Sapienza.*

[13] *Franco Franconi, 'Analisi della stabilitá aeroelastica di velivoli tiltrotor basata su n modello aerodinamico agli stati finiti', 2001, tesi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale , Universitá degli studi di Roma La Sapienza.*

[14] *Richard L. Bielawa, 'Rotary Wing Structural Dynamics and Aeroelasticity ', publicato da American Institute of Aeronautics and Astronautics,Inc.*

[15] *John P. Magee and H.R. Alexander : Wind Tunnel Tests of a full scale hingeless Prop/rotor Designed for the Boeing-Model 222 tiltrotor Aircraft. NASA CR 114664, Boeing Vertol Co., Ott. 1973.*

[16] *M. Gennaretti, G. Bernardini, 'Novel Boundary Integral Formulation for Blade-Vortex Interaction Aerodynamics of Helicopter Rotors', AIAA Journal, Vol. 45, No.6, 2007, pp. 1169-1176.*

[17] *L. Morino, 'A General Theory of Unsteady Compressible Potential Aerodynamics', NASA CR-2464, 1974.*

[18] *L. Morino and M. Gennaretti, 'Boundary Integral Equation Methods for Aerodynamics', Computational Nonlinear Mechanics in Aerospace Engineering', edited by S.N. Atluri,*

Vol.146, Progress in Astronautics and Aeronautics, AIAA, New York, 1992, pp. 279-320

[19] *L. Morino and B.K. Bharadvaj, 'A unified Approach for the Potential and Viscous Free-Wake Analysis of Helicopter Rotors', Vertica, Vol. 12, 1998, pp. 147-154.*

[20] *J. G. Leishman, 'Principles of Helicopter Aerodynamics', Cambridge Univ. Press, Cambridge, England, U.K., 2000*

[21] *M. H. Hansen, M. Gaunaa, h.A. Madsen, 'A Baddoes-Leishman type dynamic stall model in state-space and indicial formulations', Risoe National Laboratory Note R-1354, Giugno 2004*

[22] *F. Frunzulica, H. Dumitrescu, 'Aeroelastic Computation Using the Baddoes-Leishman Dynamic Stall Model', atti del SISOM 2008, Bucharest, Maggio 2008*

[23] *M. Molica Colella, 'Sviluppo di una metodologia per l'Analisi Aeroelastica di configurazioni ala rotore', Tesi di Laurea in Ingegneria Meccanica, Università degli Studi Roma Tre, 2006*

[24] *J. M. Drees, 'A Theory of Airflow Through Rotors and Its Application to Some Helicopter Problems', Journal of Helicopter Association of Great Britain, vol 3, n. 2, Luglio 1949*

[25] *A. J. Landgrebe, 'An Analytical and Experimental Investigation of Helicopter Rotor Hover Performance and Wake Geometry Characteristics', USAAMRDL TR-71-24, U.S. Army, 1971*

[26] *K. W. Mangler, H.B. Squire, 'The Induced Velocity Field of a Rotor', Rep. Memo. Aeronautical Resarch Council 2642, 1950*

[27] *W. Castles, J. H. De Leeuw, 'The Normal Component of the Induced Velocity in the Vicinity of a Lifting Rotor and Some Examples of its Applications', NACA Report 1184, 1954*

[28] *R. P. Coleman, A.M. Feingold, C. W. Stempin, 'Evaluation of the Induced Velocity Fields of an Idealized Helicopter Rotor', NACA ARR L5E10, 1945*

[29] *M.E. Dreier, 'Introduction to Helicopter and Tiltrotor Flight Simulation', AIAA Education Series, 2007*

[30] *'ERICA: General Specifications and Design Data',AG/WP1/TR007, Oct.2007*

[31] *M. Frosoni, 'Preliminary Wing dynamic requirements', NICETRIP/SD/WP2.WD3/1.0, 2008*

[32] *'Rotor Aeroelastic Behaviour', NICETRIP/AG/WP1.TR039/1.0, Nov.2009*

[33] *M.W. Nixon, R.G. Kvaternik, and T.B., Settle, 'Tiltrotor Vibration Reduction Through Higher Harmonic Control' ,American Helicopter Society 53rd Annual Forum, Virginia Beach, Virginia, 1997.*

[34] *K. Nguyen, M. Betzina, and C., Kitaplioglu, 'Full-Scale Demonstration of Higher Harmonic Control for Noise and Vibration Reduction on the XV-15 Rotor', Journal of the American Helicopter Society, Vol. 46*

[35] *F. Nitzsche, A., Grewal, and D., Zimcik, 'Structural Component having Means for Actively Varying its Stiffness to Control Vibrations', U.S. Patent No. 5,973,440, 999. European Patent EP-996570-B1, 2001.*

[36] *Anna Kathleen Tyler Howard, 'The Aeromechanical Stability of Soft-inplane Tiltrotors', a Thesis in Aerospace Engineering, Pennsylvania State University, The Graduate School College of Engineering, August 2001*

[37] *Eric L. Hathaway, 'Active and Passive Techniques for Tiltrotor Aeroelastic Stability Augmentation', a Thesis in Aerospace Engineering, Pennsylvania State University, The Graduate School College of Engineering, 2005*

[38] *Fabio Maffei, 'Analisi di Whirl-flutter per un convertiplano di nuova generazione', Tesi di Dottorato di Ricerca in Ingegneria Aerospaziale, Università degli Studi di Napoli Federico II, Facoltà di Ingegneria, Dipartimento di Progettazione Aeronautica, ciclo XIX°*