CAPITOLO 2

Dispositivi superconduttori

Dispositivi superconduttori basati sull'effetto Josephson sono stati i candidati ideali per lo studio di fenomeni quantistici macroscopici, ma negli ultimi anni grazie alle loro proprietà di coerenza quantistica macroscopica *(J.R. Friedman, 2000)* hanno trovato applicazione nel campo del *quantum computing*. Poiché in questo lavoro di tesi vengono proposti un certo numero di dispositivi superconduttori, basati su effetti Josephson, adatti ad implementare il qubit e il sistema di lettura, questo capitolo tratterà la teoria necessaria a spiegare la loro dinamica *(J.W. Bremer ,1962 – C.J. Kuper, 1968)*.

Quindi, dopo una breve introduzione sulla superconduttività, verranno illustrati gli effetti Josephson e il più semplice dispositivo che sfrutta proprio questi effetti: la giunzione Josephson. Verranno poi descritti tutti quei dispositivi ottenuti interrompendo anelli superconduttori con giunzioni Josephson, gli SQUID (Superconducting Quantum Interference Devices) e le loro proprietà.

2.1 CONCETTI BASE

❖ Superconduttività

La superconduttività è una proprietà di molti metalli che si manifesta al di sotto di una certa temperatura, detta *temperatura critica* T_c, con una transizione verso uno stato a resistenza nulla (*M. Tinkham, 1996*). Contemporaneamente, si ha l'*effetto Meissner*: la densità di flusso magnetico B all'interno di un superconduttore diventa zero come la densità di corrente; si generano correnti di schermo, confinate sulla superficie, che scorrono permanentemente per compensare l'effetto del campo magnetico.
La teoria microscopica *(J.Barden, 1957)* per gli stati superconduttori stabilisce che un *superconduttore* nello stato fondamentale *è un condensato di Bose-Einstein di coppie di Cooper*, con gli elettroni accoppiati a due a due. In una coppia, un potenziale attrattivo dovuto allo scambio di un fonone virtuale prevale sulla forza repulsiva coulombiana che si esercita tra i due elettroni.

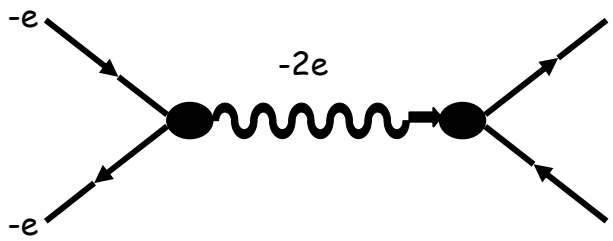


Figura 2.1 Diagramma di Feynman dell'interazione che accoppia due elettroni.

L'energia d'accoppiamento produce una gap 2Δ nello spettro d'eccitazione a cavallo del livello di Fermi. La carica totale della coppia è *2e*, il doppio della carica *e* di un singolo elettrone, e l'energia d'accoppiamento è $2\Delta(T)$, legata alla temperatura critica del materiale: $2\Delta(0) = 3.52k_BT_c$ a temperatura zero.

I due elettroni sono accoppiati in uno *stato di singoletto* e tutte le coppie hanno lo *stesso momento totale*; la distanza tra gli elettroni in una coppia è maggiore della distanza media fra le coppie. Per spezzare le coppie e ottenere due quasi particelle, è necessario fornire un'energia 2Δ.

❖ Fase superconduttiva

A $T = 0$ tutte le coppie si comportano come un condensato in uno stato di singoletto descritto da una funzione d'onda del tipo:

$$\Psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\rho(\mathbf{r})}e^{i\theta(\mathbf{r})} \qquad (2.1)$$

dove $\rho(\mathbf{r})$ e $\theta(\mathbf{r})$ sono funzioni reali della posizione:

- $\rho(\mathbf{r}) = \Psi^*(\mathbf{r}) \cdot \Psi(\mathbf{r})$ rappresenta la densità macroscopica di coppie di Cooper;
- $\theta(\mathbf{r})$ è la fase della funzione d'onda macroscopica.

La fase superconduttrice θ e il numero N di coppie di Cooper nel superconduttore sono variabili coniugate e dal principio di indeterminazione di Heisenberg risulta *(W. Anderson, 1963)*:

$$\Delta\theta\Delta N \geq h \qquad (2.2)$$

La fase della funzione d'onda superconduttrice ha una particolare importanza perché associata ad una quantità fisicamente misurabile.

Dalla meccanica quantistica, l'espressione generalizzata per la densità di corrente, in presenza di un campo magnetico ottenuto da un potenziale vettore A, è:

$$\mathbf{J} = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\hbar\nabla\Psi}{i} - 2e\mathbf{A}\Psi\right)^*\Psi + \Psi^*\left(\frac{\hbar\nabla\Psi}{i} - 2e\mathbf{A}\Psi\right)\right] \qquad (2.3)$$

Inserendo l'espressione 2.1 per la funzione d'onda si ottiene una relazione che lega il gradiente di fase, il potenziale vettore e la densità di corrente:

$$\nabla\theta = \frac{m}{2e\hbar\rho}\mathbf{J} + \frac{2e}{\hbar}\mathbf{A} \qquad (2.4)$$

Il gradiente di fase è quindi associato a quantità misurabili.

❖ Quantizzazione del flusso magnetico

Per un anello superconduttore, l'equazione 2.4 può essere integrata su un cammino chiuso:

$$\oint \vec{\nabla}\theta \cdot dl = \oint \frac{m}{2e\hbar\rho}\mathbf{J}\cdot dl + \oint \frac{2e}{\hbar}\mathbf{A}\cdot dl \qquad (2.5)$$

Poiché la funzione d'onda deve essere ad un solo valore, la fase dopo n giri completi deve essere $2\pi n$; l'integrale su J è zero perché si può trovare un cammino all'interno del superconduttore, lungo il quale la corrente è nulla (infatti scorre solo in superficie) mentre l'integrale sul potenziale vettore A è $2e/h$ volte il flusso magnetico Φ nell'anello. Si ha quindi:

$$\Phi = n\Phi_0 \qquad (2.6)$$

dove n è un numero intero e la quantità $\Phi_0 = h/2e = 2.07\cdot 10^{-15} Wb$ è il quanto di flusso; allora il campo magnetico all'interno di un anello superconduttore risulta quantizzato in unità di Φ_0.

Osserviamo che Φ è dato dal contributo di due termini: il flusso magnetico Φ_x applicato dall'esterno e un flusso di schermo $\Phi_S = -LI$ che si genera nell'anello in risposta al campo applicato. Le correnti di schermo permanenti mantengono il flusso al valore quantizzato.

E' importante notare che è il flusso totale Φ ad essere quantizzato e non le sue due componenti. Per questo è possibile che l'anello stesso sia sensibile a flussi dell'ordine di frazioni del quanto di flusso Φ_0: una variazione in Φ_x provoca una variazione opposta in Φ_s generata dall'instaurarsi di una nuova corrente di schermo che può essere misurata.

❖ Effetti Josephson

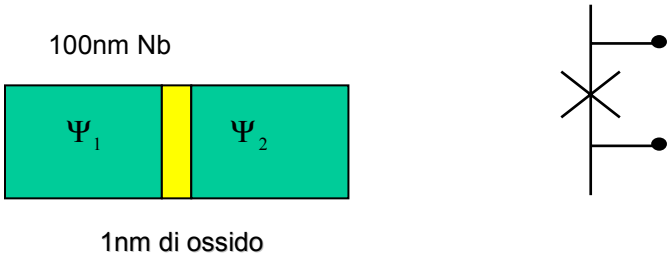


Figura 2.2 Schema di una giunzione Josephson e suo simbolo circuitale.

La giunzione Josephson, illustrata in figura 2.2, è costituita da due elettrodi metallici superconduttori separati da uno strato sottile di ossido: per effetto tunnel, la funzione d'onda Ψ_i (con i = 1,2) su ciascun lato si estende attraverso la barriera; c'è così una sovrapposizione finita tra le due.

L'equazione di Schroedinger per la giunzione diventa:

$$\begin{cases} i\hbar \dfrac{\partial \Psi_1}{\partial t} = V_1 \Psi_1 + K \Psi_1 \\ i\hbar \dfrac{\partial \Psi_2}{\partial t} = V_2 \Psi_2 + K \Psi_2 \end{cases} \qquad (2.7)$$

dove V_i (i =1,2) è il potenziale di ciascuna giunzione e K tiene conto dell'interazione tra le due funzioni d'onda *(R.P. Feynman, 1965).*

Di conseguenza, le due fasi non possono cambiare indipendentemente ma la loro la differenza φ è governata dalle due equazioni Josephson *(B.D. Josephson, 1962 e 1965)*:

$$\begin{cases} I = I_0 \sin \varphi \\ \dfrac{d\varphi}{dt} = \dfrac{2e}{\hbar} V \end{cases} \qquad (2.8)$$

La prima stabilisce che a tensione zero, una corrente di coppia può passare attraverso la giunzione fino ad un valore massimo I_0, *corrente critica*; la fase su entrambi i lati si aggiusta per soddisfare la condizione di Josephson. Quando si supera questa corrente I_0, la fase non è più costante ma una sua variazione nel tempo è legata alla tensione di polarizzazione. Si definisce, infatti, la frequenza Josephson come $\omega_J = \frac{2e}{\hbar} V \simeq 484 MHz$, che non dipende dal materiale utilizzato ma da $\hbar$ e dalla tensione applicata. Ne risulta una corrente oscillante ad altissima frequenza.

Si può definire inoltre l'energia Josephson:

$$E_J = \hbar \omega_J = \frac{\hbar}{2e} I_0 \qquad (2.9)$$

legata al tunnel di coppie di Cooper.

Ricavando I_0 dalla formula di Ambegaokar-Baratoff

$$I_0 R_n = \frac{\pi \Delta}{2e} \tanh\left(\frac{\Delta}{2kT}\right) \qquad (2.10)$$

è possibile scrivere E_J in funzione della gap del superconduttore Δ e della resistenza normale R_n. Si ottiene:

$$E_J = \frac{h}{8e^2} \frac{\Delta}{R_n} \qquad (2.11)$$

che dipende dalla dimensione delle giunzioni attraverso R_n.

2.2 Dispositivi reali e loro caratterizzazione

Combinando insieme anelli superconduttori e una o più giunzioni Josephson è possibile ottenere tutta una serie di dispositivi in cui, a bassa temperatura, si osservano un certo numero fenomeni quantistici *(J.M.Martinis, 1987 - R. Rouse, 1995 - C.Cosmelli, 1999)*.

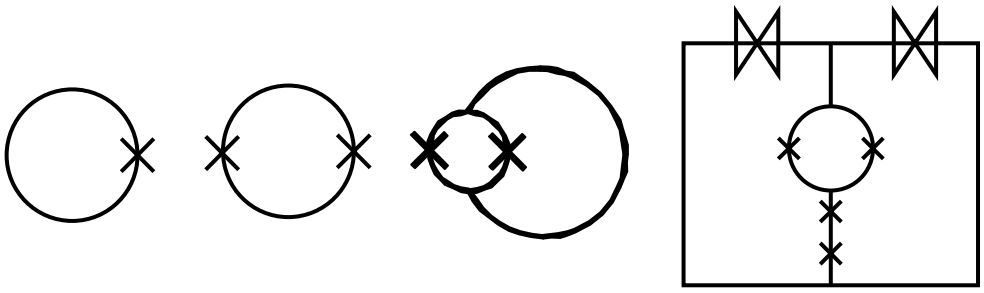


Figura 2.3 Dispositivi Josephson, ossia anelli superconduttori interrotti da una o più giunzioni Josephson.

In figura 2.3 sono illustrati vari esempi di dispositivi Josephson.

La dinamica di tali dispositivi può, generalmente, essere ridotta a quella di una particella descritta da una variabile macroscopica (la fase ai capi della giunzione o il flusso magnetico applicato dall'esterno), soggetta ad un potenziale con vari massimi e minimi che corrispondono a stati metastabili del sistema. Nei paragrafi seguenti si parlerà dei principali dispositivi e della loro comportamento basato essenzialmente su due effetti:

- quantizzazione del flusso in anelli superconduttori;
- effetto Josephson.

❖ Giunzione Josephson

Una giunzione Josephson (JJ) reale può essere schematizzata da un elemento Josephson non lineare (rappresentato graficamente da una croce) con una capacità in parallelo, dovuta fisicamente allo strato isolante che ha una certa capacità, e una resistenza che tiene conto della dissipazione ohmica della JJ a causa della presenza di uno strato sottile di ossido che interrompe gli strati di metallo superconduttore non resistivi e non dissipativi (fig. 2.4).

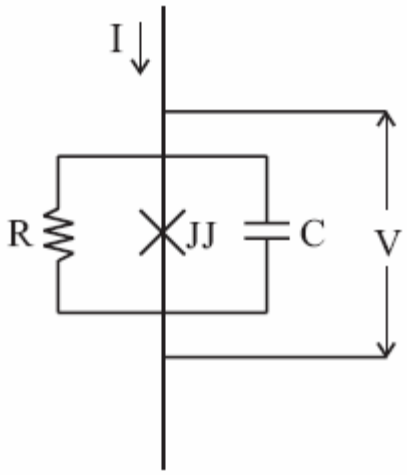


Figura 2.4 Schema elettrico di una giunzione Josephson nel modello RCSJ.

Nel modello RCSJ (Resistively Capacitively Shunthed Junction) *(W.C.Steward, 1968)*, la corrente che attraversa la JJ può essere scritta come somma di tre termini ciascuno corrispondente ad ogni ramo:

$$I = I_0 \sin\varphi + C\dot{V} + \frac{V}{R} \qquad (2.12)$$

Esprimendo la tensione come derivata temporale della differenza di fase φ utilizzando le eq. Josephson 2.7 si ha:

$$I = C\frac{\Phi_0}{2\pi}\ddot{\varphi} + \frac{1}{R}\frac{\Phi_0}{2\pi}\dot{\varphi} + I_0 \sin\varphi \qquad (2.13)$$

Questa è l'equazione di un oscillatore anarmonico smorzato la cui velocità $\dot{\varphi}$ è la derivata della fase, proporzionale alla tensione ai capi della JJ. La dinamica del dispositivo può essere capita usando un modello meccanico-elettrico dove una particella di massa $M = C\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2$, con dissipazione $\gamma = \frac{1}{RC}$ sottoposta ad un potenziale

$$U(\varphi) = -\frac{\Phi_0}{2\pi}\left(\frac{I}{I_0}\varphi + \cos\varphi\right) \qquad (2.14)$$

detto potenziale washboard, rappresenta la giunzione.

Il grado di libertà è la differenza di fase φ ai capi della giunzione.

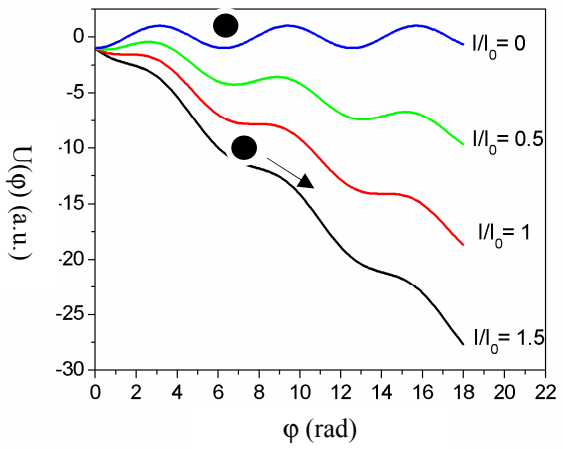


Figura 2.5 Potenziale U(φ) per diversi valori di I/I_0.

La corrente di polarizzazione I inclina il potenziale che presenta una serie di massimi e minimi (fig.2.5) le cui posizioni si ottengono ponendo $\frac{\partial U(\varphi)}{\partial \varphi} = 0$:

$$\begin{cases} \varphi_{\min} = \frac{\pi}{2} - \arccos\alpha + 2k\pi \\ \varphi_{MAX} = \frac{\pi}{2} + \arccos\alpha + 2k\pi \end{cases} \qquad (2.15)$$

dove $\alpha = \frac{I}{I_0}$.

L'altezza della barriera di potenziale tra un minimo e il massimo successivo risulta essere $\Delta U = \frac{\Phi_0}{2\pi} I_0 \left[2\sqrt{\left(1-\alpha^2\right)} - 2\alpha \arccos\alpha \right]$.

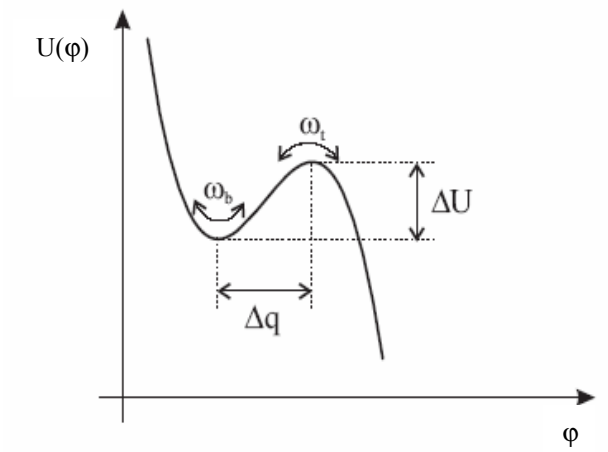


Figura 2.6 Esempio di potenziale caratterizzato da una barriera ΔU e da una distanza tra minimo e massimo Δφ. Sono indicate anche le due frequenza di plasma ω_b e ω_t.

Per $I < I_0$ ($\alpha < 1$) la particella rimane intrappolata in una buca di potenziale (stato metastabile) oscillando intorno al minimo (stato stazionario) alla frequenza di plasma

$$\omega_b = \sqrt{\frac{1}{M}\frac{d^2U(\varphi)}{d^2\varphi}} = \sqrt{\frac{1}{M}\frac{\Phi_0}{2\pi} I_0 \cos\varphi\big|_{\min}} = \omega_J \cos\varphi_{\min} \qquad (2.16)$$

Poiché la fase in media non varia nel tempo, non si osserva alcuna tensione ai capi della JJ. Incrementando I la particella rimane nella buca finchè $I = I_0$ ($\alpha = 1$) poi, quando $I > I_0$, i minimi diventano punti di flesso e la particella inizia a muoversi con velocità $v = \dot{\varphi}$ lungo il potenziale. Poiché la velocità è legata alla tensione attraverso $V = \frac{\Phi_0}{2\pi}\dot{\varphi}$, si osserva una tensione diversa da zero ai capi della giunzione e la conseguente transizione verso lo stato normale (running state). Appena $I >> I_0$ il sistema tende a

muoversi con velocità costante, pari a $\dot{\varphi} = \frac{2\pi}{\Phi_0} RI$, e ad avere un comportamento ohmico con V=RI. A questo punto, diminuendo la corrente I, il sistema può avere un comportamento isteretico o non isteretico a seconda se il parametro di McCumber's $\beta_c = \frac{2\pi I_0 R^2 C}{\Phi_0}$ è maggiore o minore di 1 *(D.E.McCumber, 1968)*.

- Se β_c>1 si ha isteresi:
  il sistema rimane nel running state finchè l'energia cinetica guadagnata durata la caduta è maggiore dell'energia dissipata per superare le barriere che riappaiono nel potenziale. Esiste un valore di I detto *corrente di ritorno* I_r in cui l'energia cinetica guadagnata è uguale a quella persa. Per $I<I_r$ la particella viene reintrappolata nella buca e ritorna lo stato superconduttore.
- Se β_c<1 non si ha isteresi:
  la forza d'attrito è così intensa da fermare al primo minimo la particella.

❖ Risultati sperimentali: caratteristica I-V

Diamo ora un esempio sperimentale di caratteritica corrente-tensione (I-V) di una JJ. Generalmente vengono usati due differenti processi tecnologici per fabbricare giunzioni Josephson basati su elettrodi di Alluminio (Al) o Niobio (Nb). In questo lavoro di tesi vengono proposte solo giunzioni in Nb fabbricate tramite litografia ottica e deposizione per sputtering di un film sottile di Nb/AlOx/Nb (ved. Capitolo 4). Le dimensioni di tali JJ variano da 3μm a 10μm di lato.

Per la misura della caratteristica corrente-tensione qui presentata, è stata utilizzate una giunzione quadrata 10 μm X 10μm avente una densità di corrente pari a 100A/cm^2. La giunzione è stata raffreddata al di sotto della temperatura critica T_c del Nb (9.26K) per immersione in un dewar a elio liquido. La temperatura del bagno termico è 4.2K, minore di 9.26K; la JJ è nello stato superconduttore. Il dewar è alloggiato in un cilindro

di μ-metal e ricoperto da una rete metallica per ridurre il rumore elettromagnetico esterno mentre i fili di connessione elettrica passano attraverso filtri passa basso.

La JJ viene polarizzata in corrente: la I fornita viene letta ai capi di una resistenza e, in corrispondenza, si legge V ai capi della giunzione. In figura 2.7 è riportata la caratteristica I-V sperimentale.

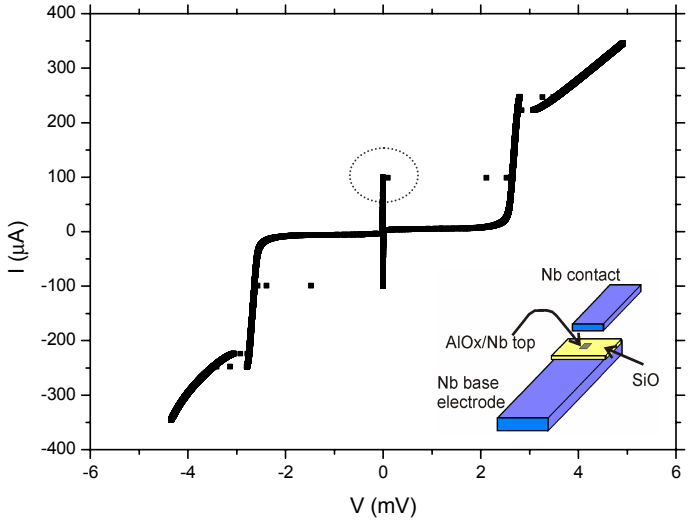


Figura 2.7 Caratteristica corrente–tensione di una giunzione 10μmX10μm. Il cerchio tratteggiato evidenzia la regione in cui avviene la transizione da V=0 a V≠ 0.

Una corrente di coppie di Cooper I_0 passa attraverso la giunzione a V = 0 finchè non raggiunge il suo valore massimo pari a 100μA; a questo punto la giunzione transisce alla tensione di gap pari a 2.7mV per le JJ di Niobio. Oltre tale soglia, la JJ diventa resistiva a causa della rottura delle coppie e la resistenza di tunnel R_n è di 13Ω. Come già detto precedentemente, il valore di tensione è il valore medio della tensione oscillante alla frequenza Josephson $\omega_J = \frac{\bar{V}}{\Phi_0}$.

Diminuendo la corrente di polarizzazione, la particella segue la branca più bassa della curva I-V per reintrappolare nello stato a tensione zero con una $I_r \ll I_0$ di circa 3.5μA, manifestando così il suo carattere **isteretico**.

In figura 2.8, invece, viene graficata la caratteristica I-V di una serie di ventidue giunzioni di 5μm di lato. Il comportamento della serie è uguale a quello della giunzione di 10μm di lato, ma avendo una minore superficie, la corrente critica è più bassa (20μA). Appena la corrente di polarizzazione è prossima alla corrente critica della singola giunzione si osserva la transizione al gap di una giunzione dopo l'altra. In questo caso, però, la tensione di gap è di circa 60mV mentre $R_n = 1.4K\Omega$.

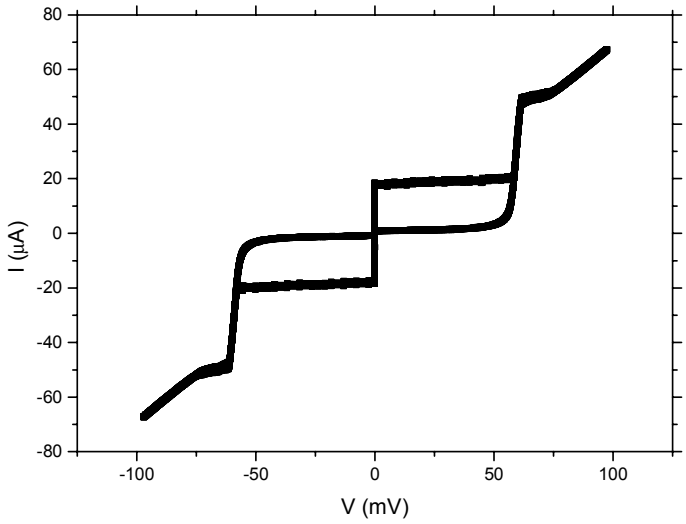


Figura 2.8 Caratteristica corrente – tensione di una serie di ventidue giunzioni di lato 5μm. La transizione da V=0 a V≠ 0 avviene a circa 20 μA per tutte le JJ.

❖ Processo di escape

❖ Escape termico: teoria

A temperatura $T \neq 0$, la transizione dallo stato a tensione nulla alla tensione di gap ha luogo per fluttuazioni termiche anche se $I < I_0$ e la barriera di potenziale tra un minimo e il massimo successivo non è ancora sparita. Questa transizione al gap non avviene per un valore fissato della corrente, ma è casualmente distribuita in una zona al di sotto del suo valore critico con probabilità tanto più alta quanto più la corrente è vicina al valore critico I_0.

Questo processo, di tipo stocastico, prende il nome di *escape (T.A.Fulton, 1974 – L.D.Jackel, 1974)*. L'attivazione termica al di sopra della barriera di potenziale produce una distribuzione di valori della *corrente di attivazione* ed è governata dalla legge di Kramers *(H.A.Kramers, 1949)*:

$$\Gamma = a(\gamma)\frac{\omega_b}{2\pi}e^{-\frac{\Delta U}{KT}} \qquad (2.17)$$

dove Γ è la probabilità della particella di superare la barriera ΔU nell'unità di tempo, e $a(\gamma)$ è un parametro adimensionale di dissipazione che tiene conto del tipo di attrito a cui è soggetta la particella; nel nostro caso dipende da $\gamma = \frac{1}{RC}$ ossia dalla resistenza che sia le coppie di Cooper che gli elettroni non accoppiati incontrano nell'attraversare la giunzione di capacità C.

E' possibile distinguere tre casi limite in cui ci può essere attivazione termica:

1. **alta dissipazione**:

   $\gamma \gg \omega_b$ il coefficiente d'attrito tende ad inibire il processo di escape e $a(\gamma)$ è proporzionale $\frac{\omega_t}{\gamma}$ in cui ω_t è la frequenza delle piccole oscillazioni nel punto di massimo della barriera per il potenziale invertito (ved. fig. 2.6);

2. **dissipazione intermedia:**

   $\gamma \ll \omega_b$ ma $\gamma \gg \omega_b \frac{KT}{\Delta U}$, il termine $a(\gamma)$ è circa 1. Generalmente le nostre misure di escape vengono fatte in questo regime;

3. **bassa dissipazione:**

   $\gamma \ll \omega_b \frac{KT}{\Delta U}$, l'escape termico è inefficiente perché il sistema è fortemente disaccoppiato dall'ambiente e $a(\gamma) \approx 7.2 \frac{\gamma \Delta U}{\omega_b KT}$.

Analizzando l'eq. 2.17 si può notare che il rate di escape è dato dal contributo di due termini:

- il primo, $\nu_{att} = a(\gamma)\frac{\omega}{2\pi}$ è la frequenza con cui la particella urta contro la barriera di potenziale per provare a superarla;
- il secondo è legato alla probabilità P(t) che ciò accada (probabilità di escape) ed è dato da un fattore esponenziale classico del tipo di Boltzmann in cui si confronta l'energia della barriera di potenziale ΔU e l'energia termica $k_B T$ che può causarne il superamento. T è la temperatura efficace del sistema.

Ogni volta che c'è un superamento della barriera, la popolazione ρ(t) della buca, ossia la probabilità di trovare il sistema all'interno della buca ad un certo tempo t, decresce esponenzialmente secondo la legge:

$$\rho(t) = e^{-\int_{-\infty}^{t} \Gamma(t)dt} \qquad (2.18)$$

In generale la popolazione può anche essere espressa in termini di un parametro *x*, che può essere I per una JJ:

$$\rho(x) = e^{-\int_{x_o}^{x} \Gamma(x)\frac{dx}{\dot{x}}} \qquad (2.19)$$

in cui la derivata temporale $\dot{x}$ (la velocità di variazione di x per un dato valore di x) è funzione sia di x che del suo valore iniziale x_0.

La probabilità di avere un'attivazione in un intervallo t e t + dt e non prima, cioè la funzione di distribuzione della probabilità di escape, è data da:

$$P(t)\,dt = \Gamma(t)\,\rho(t)\,dt\,. \qquad (2.20)$$

L'analoga, in termine del parametro x, è:

$$P(x)\,dx = \rho(x)\,\Gamma(x)\frac{dx}{\dot{x}} \qquad (2.21)$$

di conseguenza $P(t) = P(x)\,\dot{x}$.

La funzione di distribuzione della probabilità di escape *P(x)*, cioè la probabilità di avere un'attivazione per un dato valore di x e non prima ha un massimo per $x = x_{Max}$.

Il tasso di escape per una JJ è:

$$\Gamma = a(\gamma)\frac{\omega_b}{2\pi}2^{1/4}(I_0 - I)^{1/4}\,e^{\left\{-\frac{4\sqrt{2}E_J}{3KT}(I_0 - I)^{3/2}\right\}} \qquad (2.22)$$

❖ Escape termico: risultati sperimentali

In questo paragrafo vengono mostrate misure di escape in corrente prese sulle stesse giunzioni Nb/AlOx/Nb e nelle stesse condizioni sperimentali (paragrafo sopra). Le giunzioni hanno lato di 10μm, capacità di 5pF e densità di corrente pari 100A/cm^2 (ved. fig. 2.7) determinate dal processo di fabbricazione (valori nominali).

Per questo tipo di misure si polarizza la giunzione con un segnale periodico, a dente di sega, con un'ampiezza in grado di far compiere al dispositivo la transizione tra lo stato a $V = 0 \rightarrow V \neq 0$. La tensione di uscita, letta ai capi delle JJ, viene amplificata e mandata ad un comparatore per generare un segnale di trigger TTL quando avviene la transizione. Questo segnale di trigger viene poi inviato ad una scheda di acquisizione della National Instrument PC-MIO-16XE a 16 bit, per registrare i valori I a cui si ha un evento di

escape. Il processo viene ripetuto N volte (10000÷20000) per avere un set di valori di I sufficiente a stimare P(I) e costruire un istogramma.

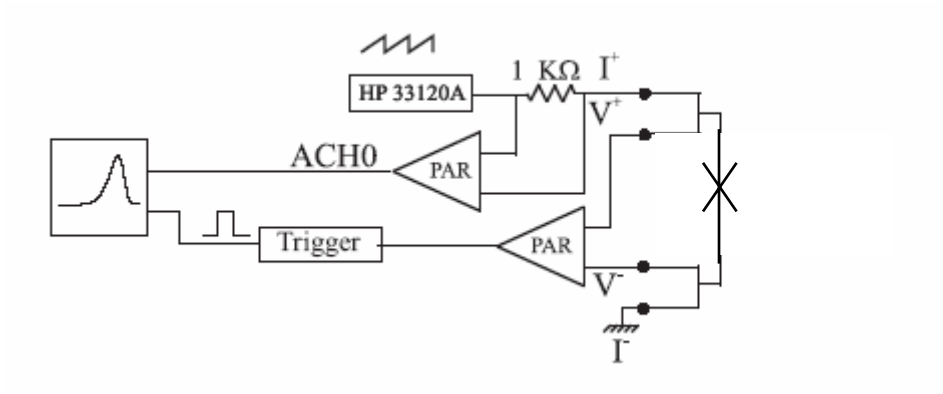


Figura 2.9 Schema di acquisizione di una misura di escape.

L'acquisizione è effettuata utilizzando un programma dedicato scritto in ambiente LabView.

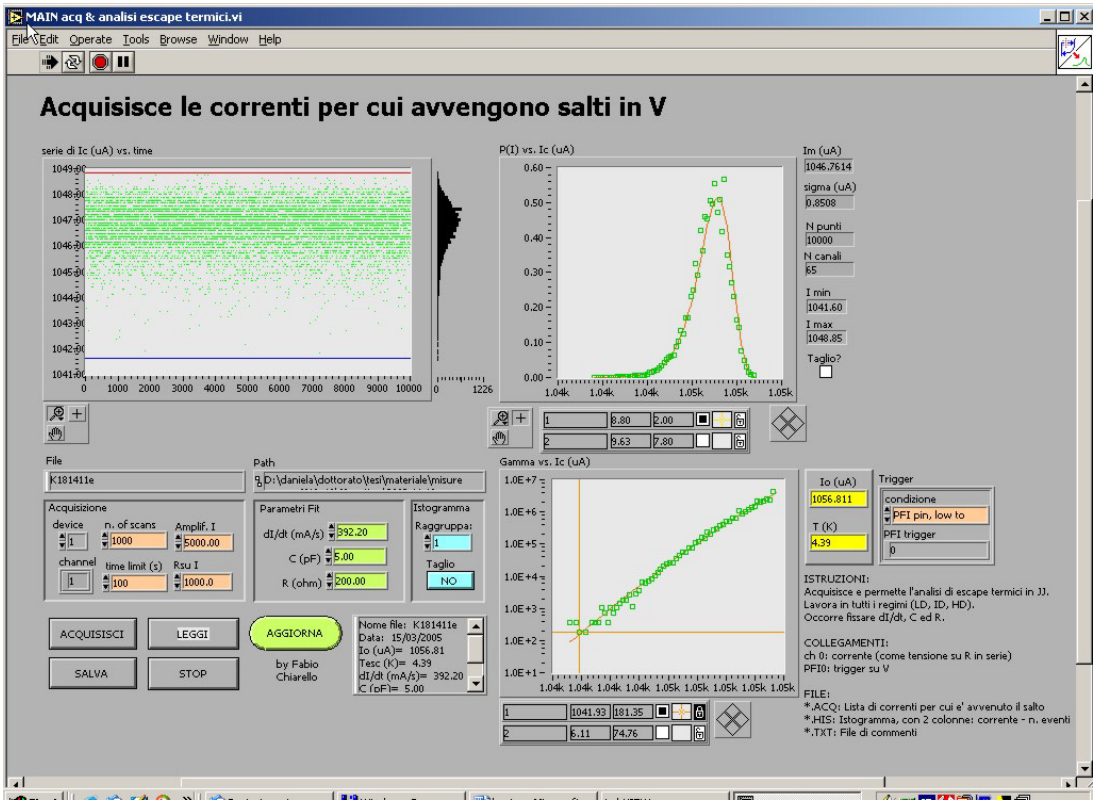


Figura 1.10 Schemata del programma di acquisizione usato per analizzare la funzione di distribuzione di escape di una giunzione. I dati sperimentali vengono comparati ai valori teorici di Γ(I).

Il programma confronta il tasso di escape sperimentale Γ_{sp}, ovvero la temperatura efficace T_{eff} per il processo determinata da bagno termico e rumore, con l'eq. 2.17 e utilizzando un fit sui dati, restituisce sia la T di escape (bagno termico e rumore) che I_0. (*T.A.Fulton, 1974*)

La figura 2.11 mostra la funzione di distribuzione di probabilità al variare della corrente di polarizzazione inviata alla giunzione.

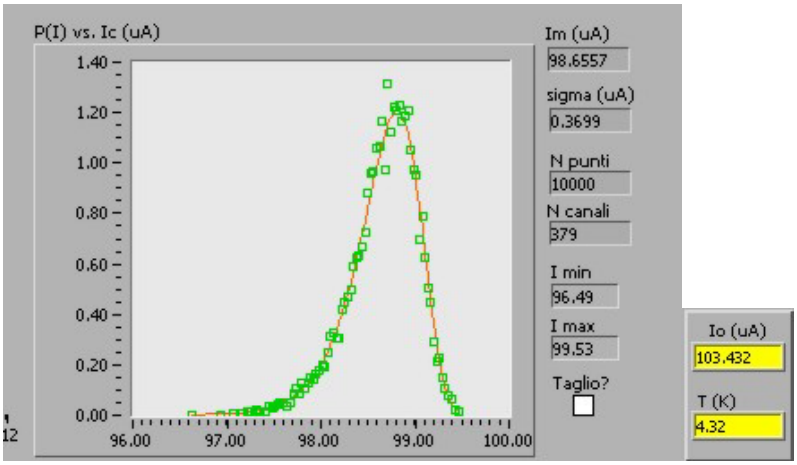


Figura 2.11 Funzione di distribuzione di probabilità al variare della corrente di polarizzazione.

A 4.2K, la probabilità di transizione dipende dal valore della corrente critica della giunzione: quanto più I è prossima a I_0, tanto più crescerà Γ, vale a dire tanto più aumenterà la probabilità che il nostro sistema, intrappolato in uno dei minimi del potenziale washboard passi allo stato di moto perché la barriera di potenziale si è progressivamente abbassata.

Infatti, la funzione di distribuzione di probabilità P(I) esibisce un picco in corrente I_m a 98.65μA, minore di I_0 di circa 103.43μA, indicando questo come valore medio; inoltre è asimmetrica perché la probabilità che un escape accada in un intervallo ΔI intorno ad una certa I è condizionata dal fatto che nessun altro evento di escape sia accaduto fino a tale valore di I.

La temperatura effettiva del bagno termico risulta di 4.32K, più alta di 4.2K, a causa del rumore esterno.

❖ Escape per tunnel quantistico

Abbassando ulteriormente la temperatura del bagno termico, conseguentemente si abbassa la temperatura efficace della JJ. Quando la temperatura del bagno diventa circa zero, il processo di escape per attivazione termica viene inibito a favore del tunnel quantistico attraverso la barriera di potenziale; la temperatura efficace resta costante.
La temperatura di passaggio dal regime termico a quello quantistico viene detta temperatura di crossover T_{cross} ed è pari a :

$$KT_{cross} = 7.2\hbar\omega \qquad (2.23)$$

Per entrambi i processi di attivazione (termico e quantistico) il tasso di escape può essere scritto in modo simile all'equazione di Kramers se si considera T come la *temperatura efficace Teff* del sistema *(A.O.Caldeira, 1981)*:

$$\Gamma = a(\gamma)\frac{\omega_b}{2\pi}e^{-\frac{\Delta U}{KT_{eff}}} . \qquad (2.24)$$

Nel limite classico $T >> T_{cross}$ la temperatura efficace può essere identificata con l'effettiva temperatura del sistema mentre, nel limite quantistico, $T << T_{cross}$ la temperatura efficace può essere posta uguale, e costante, alla temperatura di crossover $T_{eff} \approx T_{cross}$.

❖ dc-SQUID

Un anello superconduttore interrotto da due giunzioni identiche, descritte nel modello RCSJ con valori I_0, C, R e due induttanze $l/2$ sui due rami simmetrici realizza un dc-SQUID.

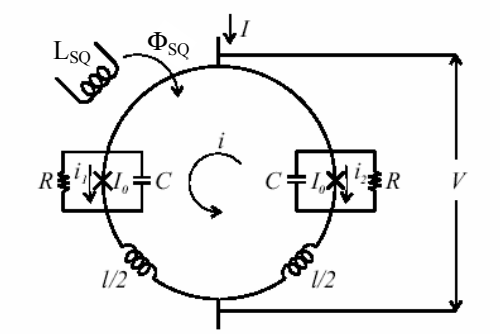


Figura 2.12 Rappresentazione RCSJ di un dc-SQUID

La fase di ciascuna JJ è coerentemente legata alla fase dell'altra JJ dall'eq. 2.4 ci sono quindi effetti di interferenza tra le correnti trasportate da ciascuna giunzione da cui il nome interferometro *(R.C. Jaklevic,1964 e 1965)*. Quando il dispositivo viene polarizzato con una certa corrente I, nell'anello scorre una corrente di schermo i, mentre le giunzione sono attraversate rispettivamente da I/2+i e I/2-i. Per i due rami si avrà:

$$\begin{cases} \dfrac{I}{2} + i = I_0 \sin\varphi_1 + C\dot{V}_1 + \dfrac{V_1}{R} \\ \dfrac{I}{2} - i = I_0 \sin\varphi_2 + C\dot{V}_2 + \dfrac{V_2}{R} \end{cases} \qquad (2.25)$$

in cui i è la corrente che induce all'interno dell'anello un flusso concatenato $\Phi = \Phi_{ext} - li$ e φ_1, φ_2 sono la differenza di fase ai capi delle JJ (fig.2.12).

Dalla circuitazione della fase del parametro d'ordine si ottiene:

$$\Phi = \Phi_{ext} - li = \frac{\Phi_0}{2\pi}\left[\left(\varphi_1 - \varphi_2\right) + 2\pi n\right] \qquad (2.26)$$

Le differenze di fase ai capi delle giunzioni sono legate a V_1 e V_2 da:

$$V_1 = \frac{\Phi_0}{2\pi}\dot{\varphi}_1 \qquad\qquad V_2 = \frac{\Phi_0}{2\pi}\dot{\varphi}_2 . \tag{2.27}$$

per cui la tensione V ai capi del dispositivo sarà:

$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi}\dot{\varphi}_1 - \frac{\dot{\Phi}}{2} = \frac{\Phi_0}{2\pi}\dot{\varphi}_2 + \frac{\dot{\Phi}}{2} \tag{2.28}$$

Manipolando le equazioni 2.27, 2.28 e facendo il cambio di coordinate

$$\begin{cases} \varphi = \dfrac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \\ \psi = \dfrac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \end{cases} \tag{2.29}$$

si ottiene:

$$\begin{aligned} M\ddot{\varphi} + M\gamma\dot{\varphi} &= -\frac{dU}{d\varphi} \\ M\ddot{\psi} + M\gamma\dot{\psi} &= -\frac{dU}{d\psi} \end{aligned} \tag{2.30}$$

con $M = 2C\left(\frac{\Phi_0}{2\pi}\right)^2$ e $\gamma = \frac{1}{RC}$.

La dinamica del sistema è simile al moto di una particella di massa M con coefficiente di dissipazione γ in un potenziale bidimensionale pari a:

$$U(\varphi,\psi) = -E_J\left(\frac{I}{2I_0}\varphi + \cos\varphi\cos\psi + \frac{1}{2\beta_l}\left(\psi - \frac{\pi\Phi_{SQ}}{\Phi_0}\right)^2\right) \tag{2.31}$$

in cui

$E_J = 2I_0\frac{\Phi_0}{2\pi}$ è l'energia Josephson caratteristica delle due JJ in parallelo;

$\beta_l = \frac{2\pi l I_0}{2\Phi_0}$ è un parametro, chiamato induttanza ridotta, che dipende sia dalla JJ che dall'anello;

Il flusso concatenato con l'anello e la tensione ai capi dello SQUID si riscrivono come:

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2\pi}(2\psi + 2\varphi)$$
$$V = \frac{\Phi_0}{2\pi}\dot{\varphi} \qquad (2.32)$$

Come si può notare dalla simulazione, mostrata in figura 2.13, il potenziale è una superficie costituita da varie buche in cui la particella può restare intrappolata e cambia il suo profilo se viene variato β_l. Nello stato superconduttore il sistema tenderà ad occupare una posizione stabile mentre, quando la transizione avviene, il sistema finirà nello stato di moto.

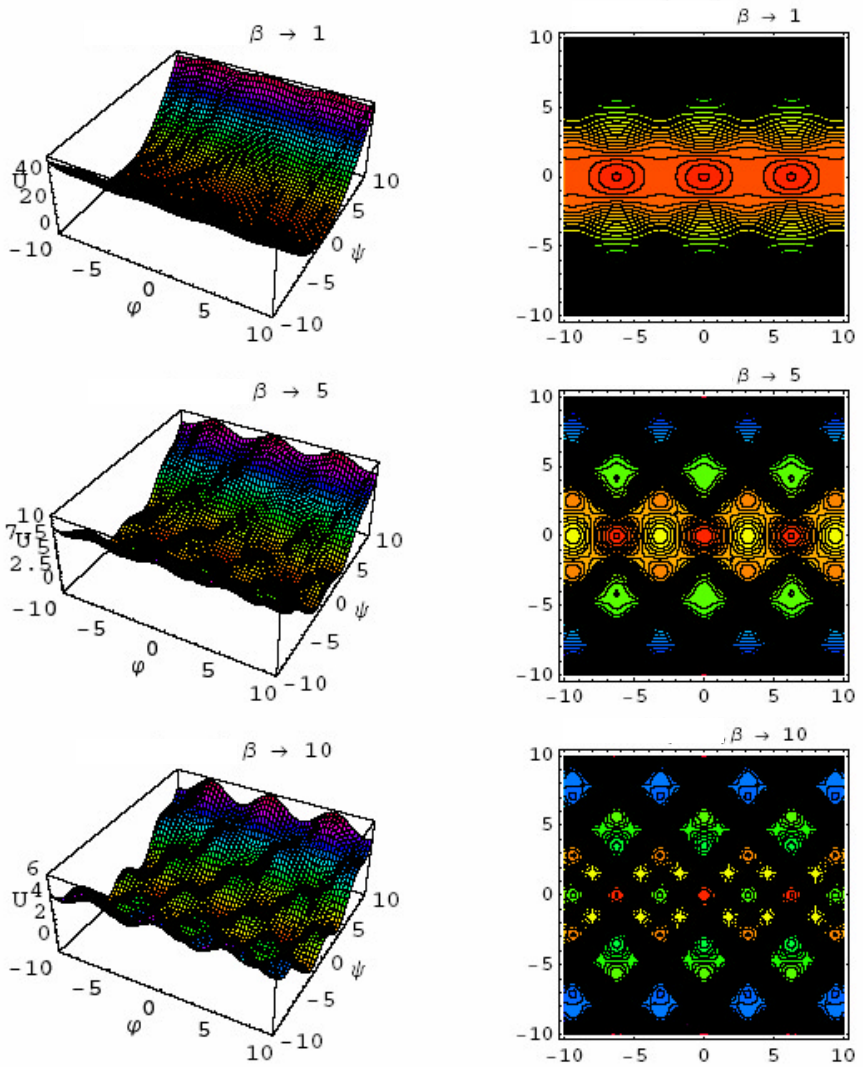


Figura 2.13 Simulazione del potenziale di uno SQUID al variare di β_l.

Per qualunque valore di β_l, la I_c è modulata tra un valore massimo e un valore minimo *(M.G.Castellano, 2001)*; più piccolo è β_l, maggiore è questa modulazione.

Se $\beta_l \ll 1$, la modulazione della I_c tende alla massima variazione; la variabile ψ è congelata e uno SQUID si comporta come una JJ con corrente critica I_0 modulata periodicamente (con un periodo di un quanto di flusso) da un flusso magnetico in accordo con l'espressione:

$$I_c\left(\Phi_{SQ}\right) = 2I_0\left|\cos\left(\pi\frac{\Phi_{SQ}}{\Phi_0}\right)\right|. \qquad (2.33)$$

Il potenziale diventa unidimensionale ed è equivalente al potenziale washboard per la JJ:

$$U(\varphi) = -\tilde{E}_J\left(\Phi_{SQ}\right)\left(\frac{I}{2I_0}\varphi + \cos\varphi\right) \qquad (2.34)$$

con $\tilde{E}_J = E_J\left|\cos\left(\pi\frac{\Phi_{SQ}}{\Phi_0}\right)\right|$.

Con un calcolo più approfondito è possibile quantificare in modo semplice la deviazione del potenziale da quella della JJ *(G. J. Niels ,2003)*.

❖ Risultati sperimentali: caratteristica I-V e I-Φ

Nell'esempio che seguirà, ci si riferisce ad uno SQUID senza resistenze di shunt in parallelo alle giunzioni, con corrente critica $I_0 \cong 10\mu A$, induttanza $l \cong 10pH$ e capacità di ciascuna JJ di 0.5pF. Questi parametri fabbricativi sono stati scelti per avere $\beta_l \ll 1$.

Il fattore di mutua induzione tra la bobina L_{SQ} e lo SQUID è di 5pH.

Tutte le misure di caratterizzazione sono effettuate a 4.2K usando programmi di acquisizione scritti in ambiente LabView e il dispositivo è nelle stesse condizioni sperimentali della giunzione.

Il set-up per l'acquisizione della caratteristica I-V è riportato in figura 2.14.

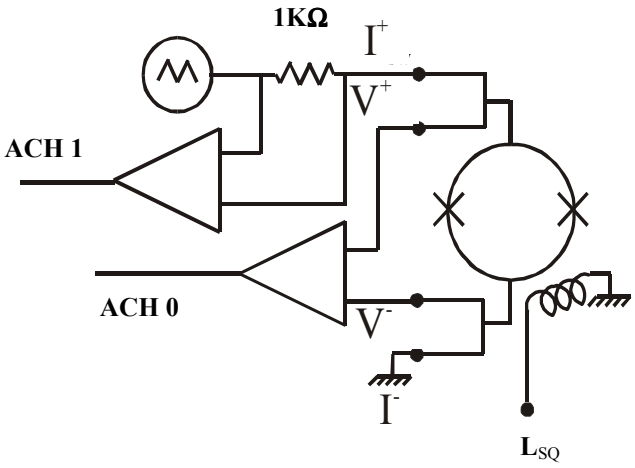


Figura 2.14 Schema per l'acquisizione di una caratteristica I-V.

Inviando allo SQUID-dc una rampa in corrente ad una frequenza di qualche Hz e mandando la corrente stessa e la tensione, letta ai capi dell'anello, ai canali 0,1 (ACH0 e ACH1) della scheda d'acquisizione, è possibile ottenere la caratteristica I-V di questo dispositivo, in cui si può osservare un comportamento non lineare ed isteretico (fig. 2.15).

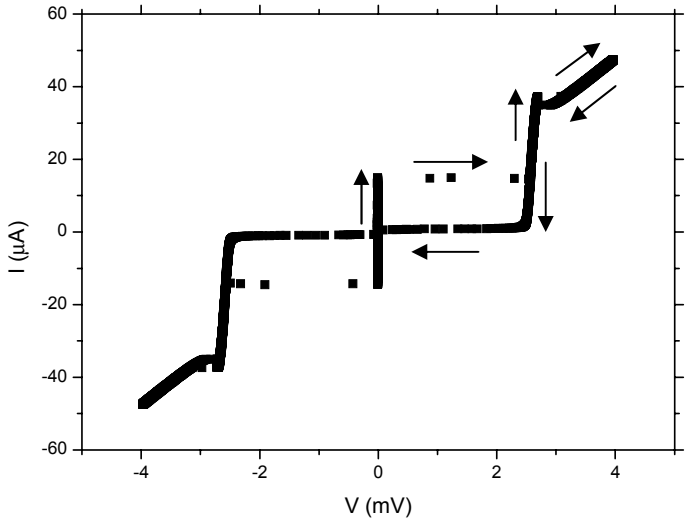


Figura 2.15 Caratteristica sperimentale corrente-tensione di uno SQUID isteretico acquisita con $Ic=Io_{MAX}$. Le frecce mostrano il verso di percorrenza della caratteristica, che è isteretica.

Inizialmente non si osserva alcuna tensione nel ramo superconduttore (↑) fino al raggiungimanto della corrente critica $2I_0$ di 15μA il cui valore è fissato esclusivamente dai parametri costruttivi delle due giunzioni solo se il flusso esterno è nullo: in tal caso la corrente critica del dc-SQUID è $I_c\left(\Phi_{SQ}\right)=2I_{0MAX}$. I_0 non è direttamente misurabile ma il suo valore Ic, estrapolato dalla caratteristica I-V, è sempre minore a causa delle fluttuazioni termiche o quantistiche. Oltre tale soglia avviene la transizione allo stato a tensione diversa da zero (→), pari a 2.7mV, gap del dispositivo.

Ora, applicando contemporaneamente un flusso magnetico Φ_{SQ} alla bobina L_{SQ} dello SQUID è possibile variare l'ampiezza della I_c da un valore massimo (fig. 2.15) ad un valore minimo (fig. 2.16).

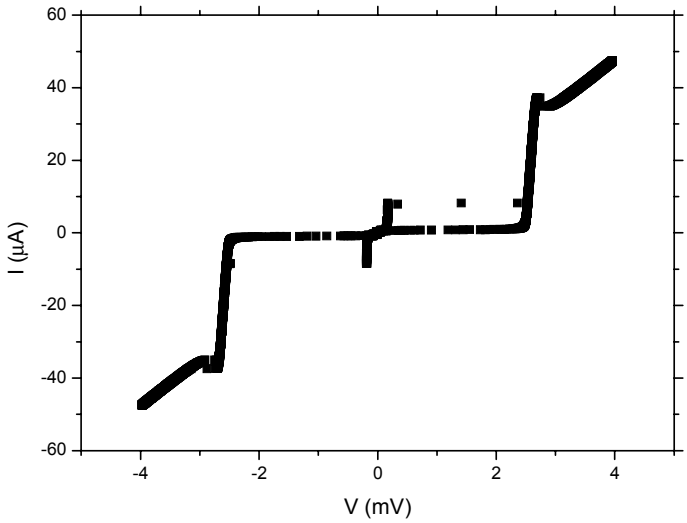


Figura: Caratteristica corrente-tensione di uno SQUID isteretico acquisita con Ic=Ic minimo.

La caratteristica I-V è identica a quella di una giunzione (ved. fig.2.7) eccetto che ora la corrente critica I_c è modulata secondo la relazione 2.33.

Quando la rampa di corrente ritorna a scendere, per $V=V_{GAP}$ la caratteristica è nuovamente verticale ma il dispositivo ritorna nello stato superconduttivo solo più tardi con una corrente di ritorno I_r. Nei dispositivi sono anche visibili delle sottostrutture dovute a risonanze interne per valori di flusso $\Phi_{SQ}=n\frac{\Phi_0}{2}$ *(H.H.Zappe, 1978)*.

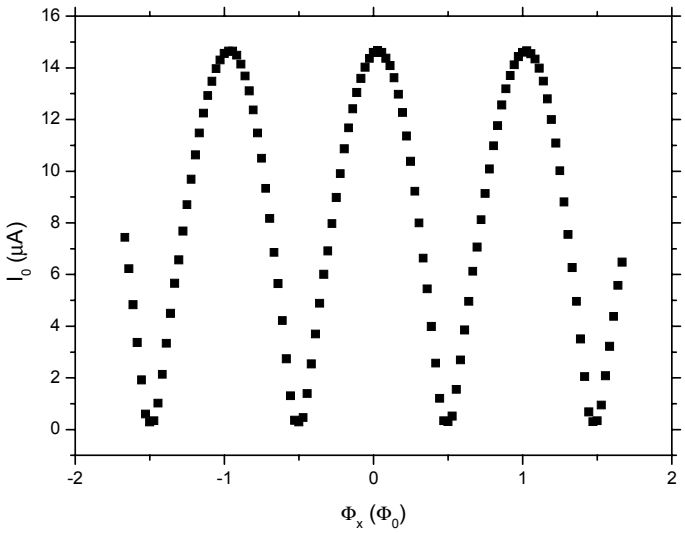


Figura 2.17 Caratteristica sperimentale corrente-flusso magnetico esterno di uno SQUID isteretico. L'andamento è periodico con periodo pari a Φ_0.

In figura 2.17 invece, è mostrata la corrente di polarizzazione in funzione del flusso magnetico applicato alla bobina L_{SQ}. Aumentando Φ_{SQ} a partire dal valore zero, I_c scende fino ad un valore minimo in corrispondenza di $\Phi_{SQ} = \frac{\Phi_0}{2}$, per poi risalire di nuovo con un andamento periodico, con i valori massimi per $\Phi_{SQ} = n\frac{\Phi_0}{2}$ e minimi per $\Phi_{SQ} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\Phi_0}{2}$.

Un'altra proprietà che si evince dalla caratteristica I-Φ_{SQ}, è la seguente: a variazioni di qualche mΦ_0 nel flusso magnetico applicato dall'esterno corrispondono variazioni in corrente apprezzabili; quindi un dc-SQUID funziona come un magnetometro ultrasensibile. E' proprio questa peculiarità unita alla possibilità di variare dall'esterno la I_c a rendere il dispositivo un potente strumento di misura. In questo lavoro di tesi lo SQUID verrà utilizzato come sistema di misura per leggere gli stati computazionali di

un doppio-SQUID, che funzionerà come qubit a stati di flusso, senza andare a distruggere l'informazione.

❖ rf –SQUID

Uno SQUID-rf consiste di un anello superconduttore di induttanza L interrotto da una giunzione Josephson con corrente critica I_0 e capacità C *(A.Barone, 1982)*.

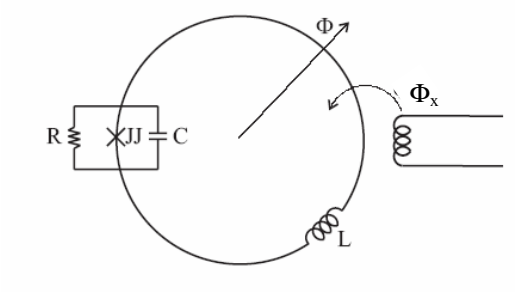


Figura 2.18 Rappresentazione RCSJ di un rf-SQUID

In questo caso la variabile opportuna a descrivere la dinamica del sistema è il flusso Φ intrappolato nell'anello che è legato alla differenza di fase ai capi della JJ dalla relazione:

$$\Phi = \frac{\Phi_0}{2\pi}\left(2\pi n + \varphi\right) \qquad (2.35)$$

dove n è in numero di quanti di flusso intrappolati nell'anello.

Quando viene applicato un flusso magnetico esterno Φ_x, il dispositivo risponde con una corrente di schermo I circolante nell'anello e un flusso magnetico è pari a:

$$\Phi = \Phi_x - LI = \frac{\Phi_0}{2\pi}\left(2\pi n + \varphi\right) \qquad (2.36).$$

Se studiamo il dispositivo nel modello RCSJ, l'eq. 2.36 diventa:

$$\Phi = \Phi_x - LI_0 \sin\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right) - LC\frac{dV}{dt} - L\frac{V}{R} \qquad (2.37)$$

Variando Φ_x si ottiene la caratteristica dello SQUID-rf. Poiché la tensione V ai capi della giunzione è data dall'eq. Josephson $V = \frac{\hbar}{2e}\left(\dot{\Phi}\frac{2\pi}{\Phi_0}\right) = \dot{\Phi}$, l'eq. 2.37 può essere letta come l'equazione del moto di una particella sottosposta all'azione di un potenziale unidimensionale (ved. 2.2) nella coordinata Φ (equivalente alla posizione):

$$U(\Phi) = \frac{(\Phi - \Phi_x)^2}{2L} - I_0 \frac{\Phi_0}{2\pi}\cos\left(\frac{2\pi\Phi}{\Phi_0}\right) \qquad (2.37)$$

Se si introduce, come per il dc-SQUID, il parametro $\beta_L = \frac{2\pi}{\Phi_0} L I_0$, che dipende sia dall'induttanza L dell'anello che dalla corrente critica dell'unica JJ (definite entrambe dal processo di fabbricazione), la forma della caratteristica e del potenziale dipendono proprio da β_L. Fisicamente β_L rappresenta il rapporto tra il flusso che lo SQUID può schermare e il quanto di flusso magnetico Φ_0.

Se $\beta_L > 1$:

- lo SQUID può schermare oltre un quanto di flusso prima che la giunzione passi allo stato resistivo;
- la caratteristica Φ–Φ_x, mostrata in figura 2.19, ottenuta variando Φ_x dall'esterno e misurando il flusso totale Φ, presenta un'isteresi;
- il potenziale mostra più stati stabili (uno è il più basso in energia, gli altri sono metastabili) la cui altezza relativa varia a seconda di Φ_x (fig. 2.19).

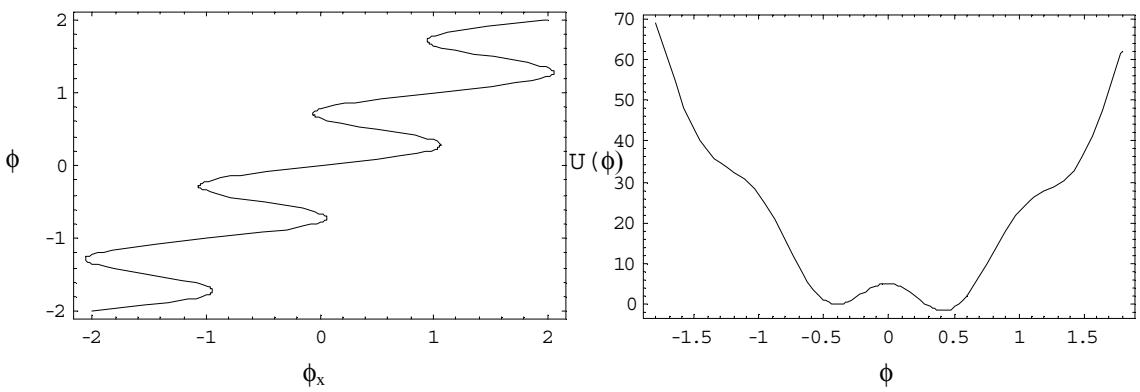
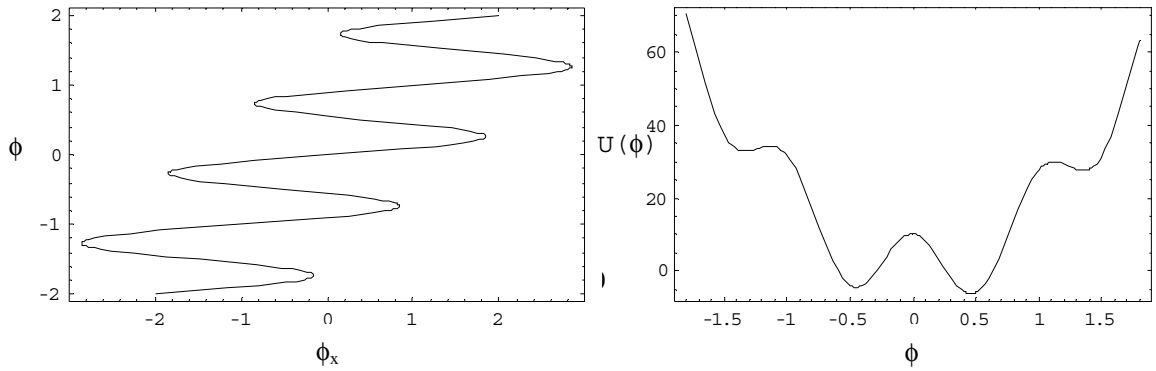


Figura2.19 Caratteristica e potenziale di uno SQUID-rf per $\beta = 3$

Quando Φ_x raggiunge il valore Φ_s, detto flusso critico perché associato ad un punto di stazionarietà, la particella salta allo stato di flusso successivo. Infatti per il sistema è energeticamente più conveniente aumentare il flusso concatenato di un quanto e ritornare ad una corrente di schermo più bassa e di segno opposto; in corrispondenza di Φ_s è il potenziale dello SQUID presenta un flesso.

Se $\beta_L \gg 1$ si possono formare molti stati metastabili che corrispondono a salti multipli nella cartteristica.



Invece per $\beta_L < 1$ il potenziale presenta un solo minimo che si sposta a seconda del dell'entità del flusso applicato e la caratteristica non è più isteretica.

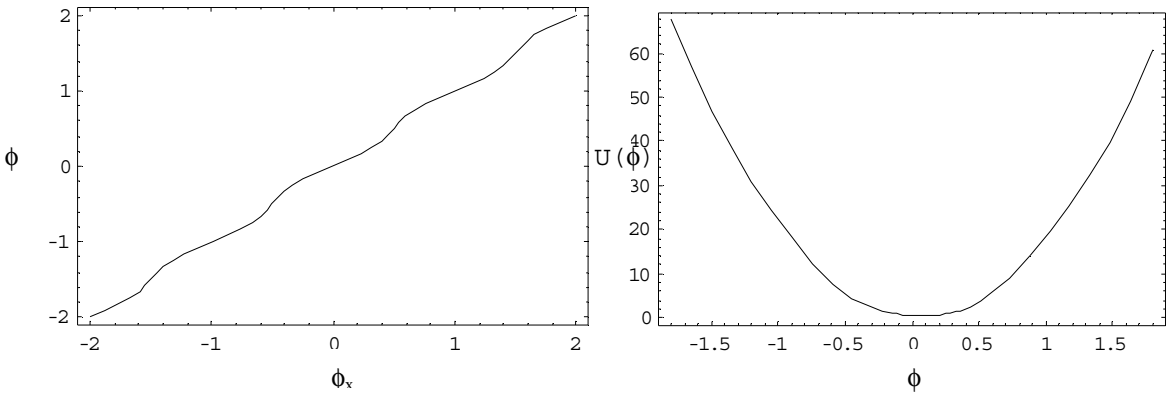


Figura 2.21 Caratteristica e potenziale di uno SQUID-rf per $\beta = 0.5$

Riassumendo, il potenziale è una parabola corrugata *(J.Kurkijärvi, 1972)*; al variare del flusso esterno, la posizione dei minimi cambia come mostrato nelle figura 2.23: il minimo Φ_1 e il massimo Φ_2 tendono ad annullarsi mentre il secondo minimo Φ_3 tende ad essere più pronunciato. In questo modo, la barriera di potenziare tra $U(\Phi_1)$ e $U(\Phi_2)$

tende a scomparire fino a quando il flusso non è abbastanza intenso da mettere in moto la particella e portarla nel minimo di destra $U(\Phi_3)$ dove poi rimane a causa dell'attrito.

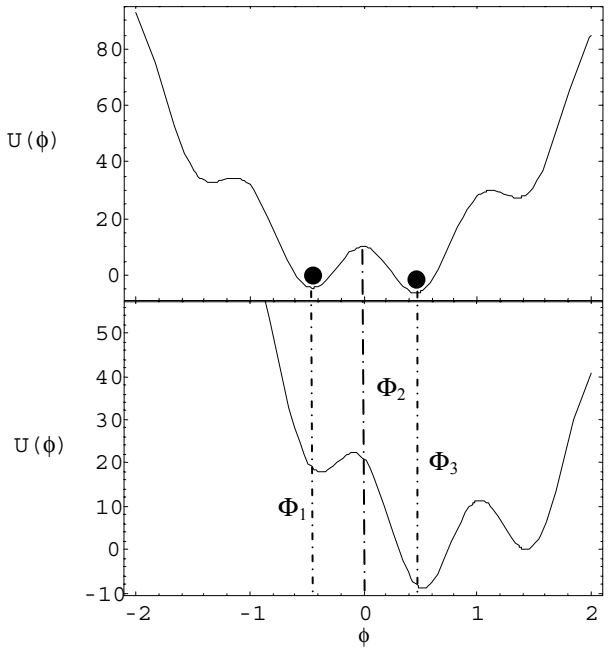


Figura 2.22 Potenziale di un rf-SQUID al variare del flusso esterno.

Noi siamo interessati al caso in cui β_L è compreso tra 1 e $\frac{5}{2}\pi$ ed il flusso esterno è pari a $\frac{\Phi_0}{2}$. Per questo valore di Φ_x il potenziale può avere due stati ugualmenti stabili, posizionati simmetricamente in Φ_L e Φ_R rispetto al massimo nell'origine, che corrispondono ad una stessa corrente di schermo circolante in verso opposto.

In questa regione un rf-SQUID può lavorare come qubit a stati di flusso.

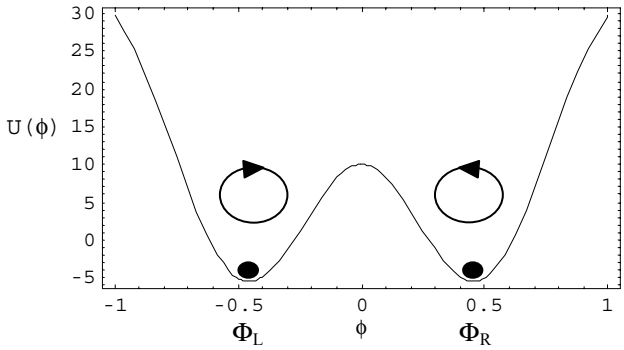


Figura 2.23 Potenziale dell'RF-SQUID due stati ugualmenti stabili, posizionati simmetricamente in Φ_L e Φ_R rispetto al massimo nell'origine.