Università degli Studi di Roma Tre
Facoltà di Economia

Scuola dottorale in Economia e Metodi Quantitativi (MSEI)
XXII Ciclo

Tesi di Dottorato

Modelli MS-GARCH e Break strutturali: sviluppi teorici ed evidenze empiriche

Tutor
Prof. Massimiliano Corradini

Dottorando
Dott. Guido Caporilli Razza

Anno Accademico 2009/2010

mi

Indice

1 Introduzione ai Markov Switching GARCH **3**

1.0.1 Rendimento e volatilità di una attività finanziaria. . . 3

1.0.2 La volatilità come processo continuo. 5

1.0.3 Processi lineari per la varianza condizionata: modelli ARCH e GARCH 6

1.0.4 Modelli Markov Switching 8

1.0.5 Markov Chain. 10

1.0.6 Ruolo di P negli MS-GARCH. 11

1.0.7 Confronti con altre classi di modelli. 13

2 Algoritmi di stima per gli MS-GARCH **17**

2.0.8 La natura della *path dependence*. 17

2.0.9 Algoritmi di stima per gli MS-GARCH. 19

2.0.10 Modelli MS-GARCH e break strutturali. 28

3 MS-GARCH: Applicazioni e stime. **31**

3.0.11 Dataset. 31

3.0.12 Stime modelli ARMA-GARCH. 36

3.0.13 Stime modelli MS-GARCH. 41

3.0.14 Stime modelli MS-GARCH (Haas). 48

4 Break strutturali e MS-GARCH **50**

4.0.15 Individuazione *break* strutturali. 50

4.0.16 Break strutturali e MS-GARCH. 54

5 Conclusioni **57**

Sommario

L'osservazione e l'analisi delle serie storiche finanziarie in presenza di fenomeni di instabilità dei mercati evidenzia una volatililità che i modelli $GARCH$ non riescono a cogliere. L'uso di modelli $Markov\,Switching\,GARCH$, come dimostrano i risultati dell'analisi delle serie storiche relative a diversi tassi di cambio riportati nella seconda parte di questa monografia, riesce a cogliere meglio le dinamiche della varianza nel tempo proprio per la presenza di almeno due regimi di volatilità. Assunzioni su densità condizionate differenti per i regimi di alta e bassa volatilità nei modelli $MS-GARCH$ vengono fatte per tener conto di fenomeni tipici come *fat tails* e presenza di valori anomali nelle serie osservate. Infine la presenza di *structural change* nelle serie considerate è evidenziata dallo studio dei processi empirici di fluttuazione e l'evidenza empirica dimostra come i modelli $MS-GARCH$ specificano i processi finanziari osservati meglio dei modelli $GARCH$ soprattutto in presenza di *break* strutturali.

Introduzione

La volatilità riveste un ruolo importante sia per chi opera nei mercati finanziari sia per chi ne studia le caratteristiche e gli andamenti. Il modello $GARCH$ proposto da Bollerslev, nel 1986, per descrivere la varianza condizionata di un processo finanziario ha avuto un particolare riscontro fra chi opera nei mercati e ha bisogno di attribuire un "valore" alla volatilità. Il suo approccio teorico, combinato ad una facile implementazione, è alla base del suo frequente utilizzo nelle realtà operative. Ciononostante l'attività di ricerca, non solo accademica,[1]ha evidenziato i limiti dei $GARCH$ nel modellare i *break* strutturali spesso presenti all'interno delle serie storiche finanziarie. La letteratura ha finito per suggerire diverse soluzioni al problema dell'eccessiva persistenza dei $GARCH$ sia proponendone variazioni e specificazioni, sia nuove soluzioni più complesse. I Markov Switching $GARCH$, con l'introduzione di una variabile latente per il processo che descrive la volatilità ma conservando la struttura classica dei $GARCH$ all'interno degli "stati", in questo senso sono dei modelli al confine fra queste due classi. Lo sviluppo teorico e le applicazioni proposte dalla letteratura hanno confermato le migliori *performance* degli $MS-GARCH$ sui $GARCH$ in termini di capacità di *forecast* della volatilità e di persistenza in termini parametrici. L'analisi empirica proposta nella seconda parte della tesi propone, invece, una verifica delle capacità di specificazione di shock presenti nelle serie storiche dei modelli MS-GARCH. L'ipotesi è che i break strutturali avvengano nelle fasi in cui il modello salta da un regime di volatilità "standard" ad uno con volatilità maggiore. La datazione dei break è effettuata con test per la presenza di

[1]A questo proposito si ricorda il modello EWMA (*Exponential Weighted Moving Average)* proposto da RiskMetrics [J.P. Morgan (1996)].

shock nella serie i cui risultati sono riportati nel capitolo 4 della tesi. Nel secondo capitolo, in cui si richiamano gli sviluppi teorici più recenti sugli MS-GARCH, si propone anche una ulteriore generalizzazione di questi modelli considerando l'ipotesi di specificare differenti distribuzioni di densità per ogni regime di volatilità. Le conclusioni riassumono i risultati raggiunti e propongono alcuni problemi rimasti in sospeso.

Capitolo 1

Introduzione ai Markov Switching GARCH

1.0.1 Rendimento e volatilità di una attività finanziaria.

Nelle applicazioni finanziarie l'obiettivo è lo studio dei rendimenti che possono essere definiti come:

$$r_t = log\left(\frac{p_t}{pt-1}\right) \times 100 \tag{1.1}$$

dove p_t è la quotazione di un asset finanziario al tempo t e rappresenta la variazione delle quotazioni di un prodotto finanziario nello scorrere del tempo $t = 1, ..., T$. La volatilità è, in maniera intuitiva, la misura del rischio associata alla detenzione di una attività finanziaria per un determinato intervallo di tempo. Se si considera il rendimento di una attività finanziaria al tempo t, in uno spazio discreto del tempo, una rappresentazione frequente della (1.1) è data da[1]:

$$r_t = \mu_t + \sigma_t z_t \tag{1.2}$$

$$con \quad z_t \sim N(0,1).$$

Questa scomposizione presenta vantaggi in termini di trattabilità analitica ed è alla base del successo riportato dai modelli per la varianza con-

[1] Nelle applicazioni la media dei rendimenti μ sarà posta pari a 0 così la (1.2) si semplifica in $r_t = \sigma z_t$ dove il processo r è descritto dalla varianza condizionata.

dizionata tipo $ARCH$ e $GARCH$ che tratteremo nel seguito. Convenzionalmente la misura statistica della volatilità è data dalla varianza condizionata[2] $\sigma_t = var\left(r_t \mid I_{t-1}\right)$, dove I_t rappresenta il set informativo a disposizione degli operatori finanziari al tempo t.

[2]Più avanti si accennerà anche al concetto di volatilità realizzata

1.0.2 La volatilità come processo continuo.

In letteratura il processo che descrive il rendimento finanziario può essere espresso mediante una equazione differenziale stocastica:

$$dp(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) \; t \geq 0,$$

dove $\mu(t)$ rappresenta il drift del processo, $\sigma(t)$ la volatilità "spot" o istantanea e $W(t)$ il moto browniano standard. Se si considera un intervallo di tempo infinitesimo $\triangle$, possiamo riscrivere la relazione lineare che descrive il rendimento finanziario, questa volta però nel tempo continuo, come segue:

$$r(t, \triangle) \equiv p(t) - p(t - \triangle) \backsimeq \mu(t - \triangle) \cdot \triangle + \sigma(t - \triangle) \cdot \triangle W(t) \tag{1.3}$$

dove$\triangle W(t) \equiv W(t) - W(t - \triangle) \sim N(0, \triangle)$.[3] Se poniamo $\triangle = 1$ e $\mu(t) = \mu_t$ cioè una costante e la volatilità $\sigma(t) = \sigma_t$, con $t - 1 < t < t$, la (1.3) si semplifica nella rappresentazione discreta vista precedentemente del processo che descrive il rendimento di una attività finanziaria. Se condideriamo costanti, nell'intervallo $[t - 1, t]$ sia $\mu(t)$ sia $\sigma(t)$ la (1.3) può risultare in una espressione che descrive il rendimento per uno specifico intervallo di tempo:

$$r_t = p(t) - p(t - 1) = \int_{t-1}^{t} \mu(s)ds + \int_{t-1}^{t} \sigma(s)dW(s) \tag{1.4}$$

osservando la (1.3) e la (1.4), in modo intuitivo, si nota come il processo che descrive la volatilità è condizionato dall'evoluzione nel tempo del *coefficiente di diffusione* dato da $\sigma(t)$ che rappresenta la volatilità istantanea. Questo breve excursus sui modelli per la volatilità nel tempo continuo è utile da una parte per comprendere ed interpretare meglio la variabile oggetto di studio: la volatilità. Del resto è utile a rappresentare modelli che, da un punto di vista teorico, sono in grado di descrivere meglio la volatilità di un rendimento finanziario ma che, rispetto ai modelli nel tempo discreto, sono più difficili da stimare e, conseguentemente, meno utilizzabili in ambiti operativi.

[3] Per definizione del processo di Wiener standard.

1.0.3 Processi lineari per la varianza condizionata: modelli ARCH e GARCH

Se riprendiamo la relazione (1.2), in ambito discreto, il modello *GARCH(p,q)*, proposto da Bollerlev ([4]), definisce la varianza condizionata di un processo finanziario in accordo alla seguente relazione ricorsiva:

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=j}^{q} \beta_i \sigma_{t-j}. \tag{1.5}$$

Questa classe di modelli è nata dall'esigenza di modellare la volatilità e di catturarne caratteristiche specifiche come la *persistenza* ivi incluso il pregio, rispetto ai modelli *ARCH(q),* di un risparmio in termini di spazio parametrico. Se consideriamo un modello *GARCH(1,1)* e ne ricaviamo la speranza matematica,

$$\sigma_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-i}^2 + \beta\sigma_{t-j} \Longrightarrow E\left[\sigma_t\right] = \sigma = \omega + \alpha E\left[\varepsilon_{t-1}^2\right] + \beta E\left[\sigma_{t-1}\right]$$

avremo: $\omega + \alpha\sigma + \beta\sigma$ da cui $\omega = \sigma(1 - \alpha - \beta)$, con vincolo di stazionarietà (1.0.3), $(\alpha + \beta) < 1$ che fornisce una relazione per la varianza non condizionata del processo oggetto di studio ed evidenzia la capacità del modello di catturare la *volatility clustering.* Più in generale, per i modelli della classe *GARCH(p,q),* le condizioni sufficienti per la non negatività della varianza condizionata sono le seguenti:

$$\begin{array}{l} \left\lfloor \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=j}^{q} \beta_i \right\rfloor < 1 \\ \omega < 0;\ \alpha_i \geq 0;\ \beta_i \geq 0 \end{array} \tag{1.6}$$

Come dimostra lo stesso [4] è possibile una rappresentazione *ARMA(p,q*)* del modello *GARCH(p,q)*,

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^{p^*} (\alpha_i + \beta_i)\sigma_{t-i} + v_t - \sum_{i=j}^{q} \beta_i v_{t-j},$$

e se ne consideriamo il suo valore atteso: $E\left[\sigma_t\right] = \omega + \sum_{i=1}^{p^*} (\alpha_i + \beta_i) E\left[\sigma_{t-i}\right]$,

si può concludere che il modello *GARCH(1,1)* è stazionario in covarianza se le p^* radici del polinomio autoregressivo $\left(1 - \sum_{i=1}^{p^*}(\alpha_i + \beta_i)B^i\right)$ sono in valore assoluto maggiori di uno. La condizione di stazionarietà diventa $\left(\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{i=j}^{q} \beta_i\right) < 1$ se si impone $\alpha_i \geq 0,\ \beta_i \geq 0$. Dunque le condizioni di stazionarietà di questa classe di modelli possono essere interpretate come condizioni di non "esplosività" della volatilità del processo. Le condizioni per la non negatività della varianza assieme a quelle di stazionarietà aiutano a comprendere il significato dei parametri di un modello *GARCH(1,1)*. Il parametro α in un $GARCH(1,1)$ misura la reazione della volatilità condizionata rispetto alla presenza di *shock* del mercato. Se α è molto elevato, allora la volatilità del processo è molto sensibile agli *shock* del sistema. Il parametro β va interpretato come *persistenza* della volatilità condizionata rispetto ai movimenti di mercato. Se β è elevato, allora gli effetti di uno *shock* di mercato tendono a durare nel tempo. la somma $(\alpha+\beta)$ determina il tasso di convergenza della volatilità condizionata *(spot)* verso quella di lungo periodo. Il parametro ω assieme a $(\alpha+\beta)$, determina il livello della volatilità di lungo termine (la varianza non condizionata). Quando $\omega/(1-\alpha+\beta)$ è relativamente elevato, allora lo è la volatilità di lungo periodo. Nonostante il successo anche applicativo dei modelli *GARCH,* l'evidenza empirica e la letteratura ne hanno evidenziato i limiti. Questo tipo di specificazione non consente di tenere conto del segno dei rendimenti passati e cioè della diversa risposta della volatilità al tempo t rispetto al segno del rendimento al tempo $t-1$, il cosiddetto effetto leva *(leverage effect).* La letteratura ha proposto una modifica del modello originario, come nel caso dell'$A-GARCH$ proposto da Engle (1990) e poi affinato da Engle e Ng (1993), dove viene aggiunto un parametro addizionale al modello $GARCH$ originale:

$$\sigma_t = \omega + \alpha(\varepsilon_{t-i} - \lambda)^2 + \beta\sigma_{t-j}. \tag{1.7}$$

Come si vede nella relazione (1.7) se $\lambda > 0$, $(\varepsilon_{t-i} - \lambda)^2$ sarà maggiore in presenza di uno *shock* negativo del mercato.[4]

[4] Anche per l'*A-GARCH(1,1)* è interessante ricavare la relazione per la varianza non condizionata. Ponendo $E\left[\varepsilon_t^2\right] = \sigma_t = \sigma$, otteniamo $\sigma = \frac{\omega+\lambda^2\alpha}{1-(\alpha+\beta)}$.

Una verione alternativa rispetto all'*A-GARCH* è il modello proposto da ([6]) nel 1993 e studiato per rispondere solo agli *shock* negativi del mercato, come si vede nella relazione di seguito proposta ($GJR(1,1)$):

$$\sigma_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \lambda 1_{\{\varepsilon_{t-1}<0\}}\varepsilon_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-j} \tag{1.8}$$

La cui relazione per la volatilità di lungo termine.....

$$E\left[I_{\{\varepsilon_{t-1}<0\}}\varepsilon_{t-1}^2\right] = \frac{1}{2}\sigma_t \Longrightarrow \sigma = \frac{\omega}{1-(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\lambda)}$$

.....è simile a quella di un modello $GARCH(1,1)$ standard a meno del parametro λ. Vale la pena di chiudere questa breve rassegna presentando il modello di Nelson, l'*Exponential GARCH,* introdotto nel 1991, che ha il pregio di risolvere il problema di assicurare la positività della varianza condizionata non imponendo vincoli sui parametri ma riformulando l'equazione della varianza in termini logaritmici, come si vede nella relazione seguente:

$$ln(\sigma_t) = \omega + \alpha\left(|z_{t-1}| - E\left[|z_{t-1}|\right]\right) + \gamma z_{t-1} + \beta ln(\sigma_{t-1}) \quad con\, z_{t-1} \equiv \sigma_t\varepsilon_t.$$

Il modello proposto di *EGARCH(1,1)*, come nel caso dei modelli *GJR e AGARCH*, catturano il *leverage effect* per valori di $\gamma > 0$. Un aspetto negativo dell'*EGARCH* è che, a causa della non differenziabilità di z_{t-1}, il modello non è trattabile analiticamente.

1.0.4 Modelli Markov Switching

In generale le modifiche proposte dalla letteratura al modello originario proposto da Bollerslev riescono a cogliere alcune caratteristiche della volatilità, come il *leverage effect* e l'ipotesi di non normalità dei residui del modello (attraverso il $t-GARCH$ con densità $t-Student$, per esempio). Peraltro, se si interpreta la volatilità come una variabile latente, nel senso che non può essere osservata direttamente poichè l'informazione a disposizione degli operatori al tempo $t-1$ è incompleta, i modelli della classe $GARCH$ a parametri

fissi non sembrano in grado di cogliere tutte le caratteristiche evolutive della volatilità nel tempo. Più formalmente se I_t è l'informazione a disposizione degli operatori al tempo t e $\Im_t$ è l'ipotesi di informazione completa nei mercati finanziari, al tempo $t-1$ avremmo:

$$I_{t-1} \subset \Im_{t-1} \Rightarrow E\left[(r_t - E\left[r_t \mid \Im_{t-1}\right])^2 \mid \Im_{t-1}\right] \neq \sigma_t \equiv E\left[\varepsilon_t^2 \mid \Im_{t-1}\right].$$

L'ipotesi di asimmetria informativa dei mercati può essere incorporata nei modelli per lo studio della volatilità sia migliorando, come si è visto nella breve rassegna proposta, il modello proposto da Bollerslev sia introducendo nuove classi di modelli. Come visto il modello di risposta della volatilità agli shock passati dipende dalla "grandezza" dello *shock*, caratteristica che i modelli $GARCH$ a parametri fissi non possono cogliere. Secondo diversi autori questa mancata specificazione si manifesta attraverso una sovrastima strutturale della persistenza della volatilità (Lamoraux e Lastrapes, 1990) cui segue una riduzione delle capacità previsive dei modelli $GARCH$. I primi a proporre un modello in grado di stimare meglio la presistenza della varianza condizionata nelle serie storiche finanziarie sono stati Hamilton e Susmel nel 1994, [11], articolo citato sempre nell'ambito dei modelli *Markov Switching*. Gli autori dimostrano come la persistenza della volatilità nei processi $GARCH$ sia sempre sovrastimata, soprattutto in presenza di *shock* di sistema non osservati. Per tener conto di questa evidenza empirica Hamilton e Susmel propongono un modello per la varianza condizionata tipo $ARCH(p,q)$ in cui, al fine di spiegare eventuali *shock* presenti nella serie storica di interesse, si ipotizza che il processo sia influenzato da una variabile non osservata s_t, che sarà chiamata di *stato* o di *regime,* che descrive il passaggio del processo da un regime ad un altro. Si ipotizza, dunque, l'esistenza di più regimi per la varianza condizionata, con uno spazio parametrico in espansione, il cui succedersi nel tempo è colto tramite un processo markoviano.

1.0.5 Markov Chain.

La variabile di stato $\{s_t\}$ evolve nel tempo in accordo ad un *processo markoviano* con probabilità di transizione pari a:

$$Pr(s_t = j/s_{t-1} = i) = p_{ij}$$

che indica la probabilità di passare dal regime i al regime j. Ipotizzando l'esistenza di due regimi è possibile rappresentare tali probabilità nella matrice di transizione P:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & 1-q \\ 1-p & q \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

Se si considera una catena di Markov irriducibile con due stati è possibile calcolare, come noto, il vettore di probabilità ergodiche associato all'autovalore uno. Come noto, (Hamilton, 1989) una catena di Markov ergodica segue un processo stazionario in covarianza, questo implica che il vettore π delle probabilità ergodiche possa essere interpretato come il vettore delle probabilità non condizionate. E' possile ricavare π dalla relazione $\pi = P \cdot \pi$ calcolando gli autovalori della matrice (1.9) e risolvendo il sistema di equazioni:

$$\begin{cases} p\pi_1 + (1-q)\pi_2 = \pi_1 \\ (1-p)\pi_1 + q\pi_2 = \pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases}$$

Tale sistema determina l'autovettore associato all'autovalore ed è normalizzato sulla base della terza relazione. Il vettore π dunque rappresenta la distribuzione non condizionata (limite) del processo markoviano, ed esso, nel caso di due stati, sarà dato da:

$$\pi \ = \begin{bmatrix} (1-q)/(2-p-q) \\ (1-p)/(2-p-q) \end{bmatrix}$$

Questo ultimo risultato è utilizzato nelle applicazioni come probabilità iniziale nel selezionare i parametri di *start*. Chiarito dunque il ruolo giocato

dalla variabile latente $\{s_t\}$ si può comprendere meglio il modello di Hamilton e Susmel. Se si immagina che i rendimenti finanziari $\varepsilon_t = log(r_t \mid r_{t-1})$ siano generati dal processo:

$$\varepsilon_t = \sqrt{g_{s_t}}\eta_t\sigma_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1\varepsilon_{t-1} + ... + \alpha_q\varepsilon_{t-q}$$

dove la varianza condizionata è specificata secondo un modello della classe *ARCH(q)* con $\sqrt{g_{s_t}}$ fattore di scala per ogni regime, $\eta_t \sim N(0,1)$ e s_t è una catena di Markov in uno spazio discreto degli stati dato da $S = \{1, ..., K\}$, questo tipo di specificazione consente di modellare i cambi di regime come salti nel processo oggetto di analisi. Come si diceva questo tipo di modello consente di specificare meglio la persistenza della volatilità e di migliorarne il *forecast* senza complicare eccessivamente la stima dei parametri cioè evitando i problemi di *path dependence* di cui si discuterà in dettaglio più avanti 2.2. In questo articolo, a buon diritto considerato seminale nella letteratura in materia, si interpreta la classe dei modelli di salto come in grado di specificare gli *shock* presenti in una serie storica. Come chiarito dallo stesso Bollerslev, che ha introdotto il *plain vanilla* $GARCH(p,q)$, questi ultimi presentano il vantaggio rispetto agli $ARCH(p,r)$ di sintetizzare l'informazione in uno spazio parametrico più contenuto imponendo che la varianza condizionata al tempo t sia legata a quella al tempo $t-1$ oltre che al quadrato dei residui al tempo $t-1$ (come negli $ARCH$). Questa è una delle ragioni per cui, nel presente lavoro, si sceglie di concentrarsi sui modelli $MS-GARCH(p,q)$.

1.0.6 Ruolo di P negli MS-GARCH.

La caratteristica propria dei modelli *Regime Switching* è la presenza di una probabilità che i parametri del processo selezionato cambino fra i diversi regimi, gli stati del mondo, secondo un processo markoviano identificato da una variabile latente $\{s_t\}$. Come detto tale variabile evolve secondo una

catena di Markov del primo ordine con probabilità di transizione data da:

$$P(s_t = j \mid s_{t-1} = i) = p_{ij}$$

che indica la probabilità di saltare dal regime i al tempo $t-1$ al regime j al tempo t. La formulazione più generale dei modelli *Markov Switching GARCH* ($MS-GARCH$ d'ora in poi) può essere espressa come segue:

$$r_t \mid \zeta_{t-1} \sim \begin{cases} f(\theta_t^{(1)}) & w.p. \quad p_{1,t} \\ f(\theta_t^{(2)}) & w.p. \quad (1-p_{1,t}) \end{cases}$$

dove $f(.)$ rappresenta una delle possibili distribuzioni di probabilità ipotizzabile per assunzione, $\theta_t^{(i)}$ denota il vettore dei parametri che caratterizza il regime i, mentre $p_{1,t} = P\left[s_t = 1 \mid \zeta_{t-1}\right]$ è la probabilità detta *"ex-ante"* di cui ci occuperemo in dettaglio nel processo di stima dei parametri. Più specificatamente il vettore dei parametri che variano nel tempo (*time varying*) sarà dato da:

$$\theta_t^{(i)} = \left(\sigma_t^i, \nu_t^i\right) \tag{1.10}$$

dove $\sigma_t^i = Var(r_t \mid \zeta_{t-1})$ è la varianza condizionata mentre ν_t^i è la forma parametrica assunta per i residui del modello. Dunque gli $MS-GARCH$ consistono di tre elementi: la volatilità del processo, la distribuzione condizionata assunta e un processo markoviano. Il processo che descrive il rendimento finanziario può essere espresso solo attraverso il suo errore[5]:

$$r_t = \varepsilon_t \tag{1.11}$$

$$\varepsilon_t = \eta_t \left[\sigma_t^i\right]^{1/2} \tag{1.12}$$

dove $i = 1, 2$ e $\eta_t \sim N(0,1)$. La varianza condizionata del processo r_t è data da $\sigma_t^i = Var\left[\varepsilon_t \mid s_t, \zeta_{t-1}\right]$. In termini di un modello $GARCH(1,1)$ si assume:

$$\sigma_t^i = \omega^i + \alpha_1^i \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1^i \sigma_{t-1}^i, \tag{1.13}$$

[5]Se si ipotizza di osservare fenomeni finanziari con media condizionata pari a 0, cosa che verrà fatta nelle applicazioni.

espressione che rende la varianza condizionata dipendente non solo dall'informazione al tempo $t-1$ e dai parametri del modello nel regime attuale ma anche dalla storia passata dei regimi osservati.

1.0.7 Confronti con altre classi di modelli.

Modelli MS-GARCH e modelli mistura per la varianza condizionata (MN-GARCH).

In un suo articolo del 2004 [Haas. 2004b], Haas, investiga le capacità di specificazione della varianza condizionata supponendo che la distribuzione condizionata dei residui del modello sia una mistura di normali adottando una relazione $GARCH$ per la varianza. In sostanza, un processo $\{r_t\}$ è generato da un $GARCH(p,q)$ con k-distribuzioni normali i.i.d [$MN-GARCH$, usando le abbreviazioni dell'autore] con media 0, e cioè:

$$r_t = \varepsilon_t \tag{1.14}$$

$$\varepsilon_t \mid \zeta_{t-1} \sim MN(\lambda_1, \ldots, \lambda_k; \sigma_{1t}, \ldots, \sigma_{1k}), \tag{1.15}$$

dove $\lambda_j \in (0,1)$ e $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Inoltre, il vettore delle varianze condizionate evolve secondo la relazione nota

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=j}^{q} \beta_i \sigma_{t-j} \tag{1.16}$$

In [Haas. 2004b], Haas lascia invariata la struttura classica del $GARCH(p,q)$ introducendo solo la possibilità di utilizzare una distribuzione mistura di normali con componenti indipendenti per garantire una migliore flessibilità del modello. Secondo questo approccio se la componente della mistura è singola, si degenera nel modello proposto originariamente da Bollerslev. Se si vuole modellare l'eccesso di curtosi del modello $GARCH - Normale$, si può specificare la distribuzione mistura con due componenti. Inoltre, ipotizzando la presenza di più di due componenti, è possibile cogliere l'effetto

evolutivo della *skewness* nel tempo. Il modello appena proposto dimostra di avere caratteristiche simili agli $MS - GARCH$. Lo stesso Haas sembra combattuto fra le due diverse proposte, a tal punto da scrivere due articoli ([9, Haas. 2004b]) in cui caldeggia entrambe le soluzioni proponendo diverse simulazioni. Se si pongono a confronto i due modelli $MS - GARCH$ e $MN - GARCH$ ci sono almeno due caratteristiche da sottolineare. Anzitutto si ipotizzano, per la selezione delle componenti, due processi stocastici distinti. Negli $MS - GARCH$ la scelta fra i regimi è guidata da un processo markoviano, con salti casuali fra gli stati. Nel caso invece degli $MN - GARCH$ la selezione delle componenti è gestita da un vettore di probabilità stimato nel modello che pesa le diverse componenti in relazione alle caratteristiche della serie storica. Un argomento teorico che potrebbe far propendere per gli $MN - GARCH$ è che la funzione di autocorrelazione dei modelli *Switching Regime*, come dimostrato da Timmermann ([17]), è associata ai rendimenti finanziari, così perdendo una delle caratteristiche proprie dei modelli $GARCH$. D'altro canto la misura della persistenza della varianza condizionata sembra far propendere per gli $MS - GARCH$, che sembrano in grado gestirne meglio la sovrastima strutturale. In ogni caso i risultati applicativi restano a favore di questi ultimi, come verificato dallo stesso Haas nei due articoli citati.

Modelli a memoria lunga e *break* strutturali

La letteratura econonometrica, sia teorica che empirica, sui modelli a memoria lunga e sui modelli *Markov Switching* si è evoluta in modo sostanzialmente indipendente dal momento che i due fenomeni appaiono distinti. In realtà, come sottolineato recentemente da Diebold e Inoue (2001) e da Granger (2004), in presenza di *shock* nella serie storica finanziaria oggetto di studio, le due classi di modelli possono essere confuse. Entrambi gli articoli concentrano la loro attenzione sui processi integrati a memoria lunga del tipo $I(d),\ 0 < d < 1$. Tradizionalmente una serie storica y_t possiede una memoria lunga se

$$lim_{T\to\infty} \sum_{k=-T}^{T} |\rho_k| \tag{1.17}$$

è una quantità non finita, dove ρ_k è la funzione di autocorrelazione di y_t. In modo più intuitivo la memoria lunga può essere definita in termini di tasso di di *decay* della funzione di autocorrelazione rispetto al tempo. Il focus dei due articoli citati è che una serie storica può mostrare lunga memoria non perchè si tratti realmente di un processo integrato $I(d)$ ma perchè non sono stati presi in considerazione i break strutturali presenti nella serie stessa. Mentre Diebold e Inoue (2001) dimostrano che le varianze delle somme parziali di un processo Markov Switching[6], sotto certe condizioni, sono uguali a quelle dei modelli della classe $I(d)$, $0 < d < 1$, Granger e Hyung (2004) che cambi di livello nella serie storica originale possono dar luogo a fenomeni di memoria lunga nel processo. Essi considerano un modello che presenta alcuni break nella media:

$$y_t = m_t + \varepsilon_t \tag{1.18}$$

$$con \qquad t = 1, \ldots, T$$

$$y_t = m_t + \varepsilon_t \quad con \quad t = 1, \ldots, T. \tag{1.19}$$

dove ε_tè una variabile stocastica mentre m_t è data da:

$$m_t = m_{t-1} + q_t \eta_t \tag{1.20}$$

con η_t i.i.d $(0, \sigma_\eta^2)$. Inoltre si assume che la variabile q_t, che rappresenta le date degli shock, abbia una distribuzione binomiale secondo il seguente processo:

$$q_t = \begin{cases} 0, & con\, probabilità \quad 1-p \\ 1, & con\, probabilità \quad p \end{cases} \tag{1.21}$$

[6]Peraltro, nello stesso articolo, gli autori dimostrano gli stessi risultati anche per modelli mistura e per il modello *"stochastic permanent break"* di Engle e Smith (1999) e ne ipotizzano la validità anche per i *Threshold* modelli, cioè modelli di salto.

Si dimostra che se una serie storica è generata dalle equazioni (1.18-1.19-1.21) allora un modello Markov Switching possiede una memoria lunga secondo la definizione data in (1.17). Dunque le considerazioni date sul confronto tra modelli, anche valutando le simulazioni empiriche mostrate negli articoli citati, confortano l'ipotesi di scelta di modelli lineari con parametri che variano nel tempo come capaci di spiegare fenomeni di break strutturali presenti nelle serie storiche anche se confrontati con modelli integrati frazionari, tradizionalmente più efficaci in termini di previsione e di flessibilità.

Capitolo 2

Algoritmi di stima per gli MS-GARCH

Nel capitolo precedente è stata identificata la classe di modelli $MS{-}GARCH$ come quella classe in grado di cogliere gli aspetti salienti della volatilità delle serie storiche finanziarie che i più classici modelli non sembrano in grado di spiegare compiutamente. Prima di verificare empiricamente quali di queste caratteristiche vengono colte è necessario identificare uno dei problemi principali che affligono la stima dei parametri dei modelli $MS - GARCH$: la *path dependence*.

2.0.8 La natura della *path dependence*.

Ancora una volta il ragionamento può partire dall'articolo più volte citato di Hamilton e Susmel (1994) nel quale gli autori stimano un modello della classe per la varianza condizionata della classe $ARCH$ nel quale si ipotizza la presenza di una variabile latente generata da un processo markoviano che descrive la presenza di eventuali passaggi di regime per la volatilità (vedi relazioni 1.0.5). Quello che non è stato sottolineato è che il processo di stima del modello $RS - ARCH$ è condotto attraverso la massimizzazione della

funzione di massima verosimiglianza classica

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{T} ln\, f\left(\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t-3}, \ldots, \varepsilon_{-3}\right)$$

rispetto al vettore dei parametri del modello 1.0.5. La loro descrizione della volatilità è dovuta anche alla presenza della *path dependence* nei modelli *MS-GARCH* che si manifesta quando si specifica la varianza utilizzando il modello $GARCH$ proposto da Bollerslev in un contesto di modelli con salto di regime. Per illustrare formalmente questo problema si ripropone la versione già vista di $MS - GARCH(p, q)$:

$$\varepsilon_t = \eta_t \sigma_t$$

$$\varepsilon_t = \eta_t \left[\sigma_t^i\right]^{1/2}$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_{0s_t} + \alpha_{1s_t}\varepsilon_{t-1}^2 + \beta_{1s_t}\sigma_{t-1}^2 \tag{2.1}$$

dove l'ultima espressione restituisce la varianza condizionata di un GARCH(1,1) con $\eta_t \sim N(0, 1)$ e $\{s_t\}$ una catena di Markov del primo ordine. Se si pone noto σ_o^2, sostituendo ricorsivamente nella (2.1), si ottiene la relazione:

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=0}^{t-1} \left[\alpha_{0s_t} + \alpha_{1s_t}\varepsilon_{t-1-i}^2\right] \prod_{j=0}^{i-1} \beta_{1s_t} + \sigma_o^2 \prod_{i=0}^{t-1} \beta_{1s_t} \tag{2.2}$$

la quale mostra come σ_t^2 dipenda dalla storia dei regimi osservati, il che è dovuto alla ricorsività della relazione che specifica la varianza se si sceglie di utilizzare un modello $GARCH$ (Bollerslev, 1986). Dal momento che l'econometrico non può osservare i regimi passati, la presenza della *path dependence* rende il calcolo della funzione di verosimiglianza, per un campione di ampiezza T, sostanzialmente impraticabile. Questo punto ha aperto un dibattito in letteratura teso a risolvere i problemi di stima di questi modelli.

2.0.9 Algoritmi di stima per gli MS-GARCH.

L'algoritmo proposto da Klaassen.

E' stato Gray (1996, vedi [8]) a proporre un algoritmo che potesse evitare il problema della path dependence senza rimuovere il termine $GARCH$ dalla (1.5), adottando il modello $RS-ARCH$ come in Hamilton[1]. L'idea di base di Gray è quella di rimuovere la fonte della *path dependence* direttamente nella (2.1) ponendo

$$\sigma_{t-1}^{2i} = E_{t-2}\left\{\sigma_{t-1}^{2i} \mid s_{t-1} = i\right\}$$

in modo tale che la (2.1) divenga

$$\sigma_t^{2i} = \omega^i + \alpha_1^i \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1^i E_{t-2}\left\{\sigma_{t-1}^{2i} \mid s_t = i\right\} \tag{2.3}$$

con ciò imponendo che la varianza condizionata al tempo $t-1$ sia pari alla media ponderata delle varianze condizionate al tempo $t-2$ e via discorrendo, eliminando così il condizionamento rispetto alla storia dei passati regimi. Quello che suggerisce Klaassen, nel suo articolo del 2002, è che l'informazione a disposizione dell'econometrico per aggiornare i pesi nella (2.3) sia al tempo $t-1$ piuttosto che al tempo $t-2$, come proponeva Gray, cioè:

$$\sigma_t^{2i} = \omega^i + \alpha_1^i \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1^i E_{t-1}\left\{\sigma_{t-?}^{2i} \mid s_t = i\right\} \tag{2.4}$$

dove l'attesa condizionata, questa volta, è data da:

$$E_{t-1}\left\{\sigma_{t-1}^{2i} \mid s_t\right\} = \sum_{j=1}^{2} \tilde{p}_{ij,t-1}\left[(\mu_{t-1}^j)^2 + \sigma_{t-1}^{2j}\right] - \left[\sum_{j=1}^{2} \tilde{p}_{ij,t-1}\mu_{t-1}^j\right]^2$$

dove ci sono due regimi, dunque $i, j = 1, 2$, e che, se immaginiamo che la media dei rendimenti sia pari a zero, cioè $\mu_{t-1}^j = 0$, rende più chiaro il

[1] il che implicherebbe di eliminare un parametro in grado di cogliere la persistenza della volatilità Klaassen (2002)

calcolo della varianza condizionata al tempo $t-1$ secondo Klaassen:

$$E_{t-1}\left\{\sigma_{t-1}^{2i} \mid s_t\right\} = \sum_{j=1}^{2} \tilde{p}_{ij,t-1}\sigma_{t-1}^{2j}$$

Mancano ora solo i pesi al tempo t, destinati ad aggiornare σ_t^{2i}:

$$\tilde{p}_{ij,t} = Pr(s_t = j \mid s_{t+1} = i, I_{t-1}) = \frac{p_{ij}Pr(s_t = j \mid I_{t-1})}{Pr(s_{t+1} = i \mid I_{t-1})} = \frac{p_{ij}p_{j,t}}{p_{i,t+1}}.$$

A questo punto, come evidenziato nella letteratura citata, è possibile effettuare la stima dei modelli $MS-GARCH$ in maniera spedita (sono parole di Klaassen) attreverso la funzione di verosimiglianza. Prima di procedere alla massimizzazione è necessario ricavare la probabilità *ex-ante* $p_{1,t} = Pr\left[S_t = 1 \mid I_{t-1}\right]$, ovvero la probabilità di essere nel primo regime al tempo t dato il set informativo al tempo $t-1$, che può essere calcolata a partire dalla funzione di densità $f(r_{t-1} \mid s_{t-1} = i, j)$ aggiornata progressivamente nel tempo e ponendo che all'origine del processo,$t = 0$, la probabilità *ex ante* di essere in uno dei due regimi sia data dalle probabilità ergodiche del processo markoviano (vedi 1.0.5). In definitiva possiamo definire il vettore delle probabilità *ex ante*

$$p_{j,t} = Pr\left[s_t = 1 \mid I_{t-1}\right] = \sum_{i=1}^{2} p_{ij}\left[\frac{f(r_{t-1} \mid s_{t-1} = i)p_{i,t-1}}{\sum_{k=1}^{2} f(r_{t-1} \mid s_{t-1} = k)p_{k,t-1}}\right] \tag{2.5}$$

e dove p_{ij} sono le probabilità di transizione della catena di Markov. Ora ci sono tutti gli elementi necessari al calcolo della funzione di log verosimiglianza che può essere espressa come segue:

$$l = \sum_{t=-R+w+1}^{T+w} log[p_{1,t}f(r_s \mid s_t = 1) + (1 - p_{1,t})f(r_s \mid s_t = 2)] \tag{2.6}$$

dove $w = 0, 1, ..., n$, e $f(\cdot \mid s_t = i)$ è la distribuzione condizionata al tempo t dato che siamo nel regime i. Tornando all'inferenza, come stabilisce la (?), sebbene i regimi non siano osservati è possibile stimare la probabilità di essere

in un regime piuttosto che nell'altro. Questo risulta particolarmentte utile se si vuole classificare la volatilità di una serie storica in due regimi: uno di *high volatility* (HV) e uno di *low volatility* (LV). Seguendo l'approccio di Klaassen è possibile identificare due tipi distinti di volatilità. La prima, detta *ex ante*, già identificata nella relazione (2.5), rappresenta la probabilità che il processo sia in un dato regime al tempo t condizionatamente all'informazione disponibile al tempo $t-1$. Tale vettore di probabilità può essere stimato ricorsivamente durante il processo di massimizzazione della funzione di log-verosimiglianza. Il secondo tipo di probabilità, detto *ex post o smooth,* può essere calcolato successivamente in modo ricorsivo, come dimostra lo stesso Gray, partendo dalla probabilità *ex-ante:*

$$p_{j,t} = Pr\left[s_t = j \mid r_t, I_{t-1}\right] = \frac{f(r_{t-1} \mid s_{t-1} = j)p_{i,t-1}}{\sum_{k=1}^{2} f(r_{t-1} \mid s_{t-1} = k)p_{k,t-1}} \tag{2.7}$$

la probabilità *smooth*, utilizzando a posteriori tutto il set informativo, evidenzia in maniera più chiara quale regime è preferibile al tempo t per il processo che si sta studiando. Questo risultato appare in maniera evidente nelle applicazioni. Dunque l'algoritmo proposto da Klaassen aiuta a chiudere la funzione di verosimiglianza consentendone la massimizzazione in maniera classica ed evitando la *path dependence.* Tra l'altro la proposta consentirà anche di introdurre ipotesi sulla distribuzione dei residui interessanti considerando la natura finanziaria dei fenomeni in esame. Tutte soluzioni consentite all'interno della proposta di Klaassen come si vedrà. Quello che forse resta da chiarire è la natura ed il significato dei parametri nel modello (2.4). A prima vista, come sottolinea Haas (2004a), la proposta di Gray sembra d'accordo nello specificare la varianza al tempo t, nel regime j, dipendente dalla varianza al tempo $t-1$ e dagli shock passati. Ricordando quanto detto precedentemente, se nell'equazione (2.1) si impone che $\beta < 1$ è possibile esprimere σ_t in termini dei suoi residui passati ε_t^2 come un $ARCH(\infty)$, dato da:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0(1-\beta_1)^{-1} + \alpha_1 \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{i-1}\varepsilon_{t-i}^2$$

Con questa formalizzazione il significato dei parametri di un modello $GARCH(1,1)$ appare ancora più evidente: α_1 riflette l'impatto di uno shock sulla volatilità al tempo $t+1$ mentre β_1 identifica la memoria del processo. Il fattore $\alpha_0(1-\beta_1)^{-1}$ esprime l'impatto totale di uno shock sulla varianza futura. Uno dei motivi per cui si sceglie di specificare modelli che incorporano differenti modelli $GARCH$ è la volontà di catturare le dinamiche della varianza in periodi di alta e di bassa volatilità. Per esempio, valori relativamente elevati di α_1, associati a valori contenuti di β_1, possono indicare una tendenza dei mercati a reagire in maniera più marcata agli *shock* finanziari rispetto a periodi più "regolari" (bassa volatilità). In questo senso è necessaria una chiara associazione fra i parametri del $GARCH$, all'interno di ogni regime j, e il processo corrispondente σ_t^j. Se si osserva la (2.4) la relazione fra il modo in cui il processo σ_t^j risponde agli *shock* e i parametri α_1, α_0 e β_1 non è chiara. Questo può dipendere dal fatto che nella (2.4) la varianza al tempo t è influenzata non dalla varianza coindizionata al tempo $t-1$ ma dalla media ponderata delle varianze dei due regimi al tempo $t-1$, i cui pesi sono dati dalle probabilità $\tilde{p}_{ij,t-1}$. Ciò implica, nei fatti, che il valore del parametro β_1^j sarà condizionato anche dalla storia del processo del secondo regime, rendendo più difficile l'interpretazione generale del processo che guida la volatilità. In definitiva il modello proposto da Klaassen, pur rendendo possibile la stima dei parametri per la classe dei modelli $MS-GARCH$, lascia aperti dei dubbi sul significato economico da attribuire alle dinamiche della varianza condizionata del processo.

Il nuovo approccio di Haas.

Sulla base di queste ultime considerazioni e tenendo sempre in considerazione la necessità di superare il problema della *path dependence* recentemente, Haas (2004a), è stata proposta una diversa parametrizzazione dei modelli $MS-GARCH$. Se si pone che il processo $\{\varepsilon_t\}$ soddisfa il seguente:

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{\sigma_t^{s_t}} \tag{2.8}$$

dove $\eta_t \sim N(0,1)$ e $\{s_t\}$, al solito, è una catena di Markov con spazio degli stati finito e dato da $S = \{1, \ldots, K\}$ e da una matrice di transizione P irriducibile di dimensione $k \times k$ il cui elemento generico è dato da $p_{ij} = Pr(s_t = j \mid s_t = i)$. Il vettore $\sigma_t = \left[\sigma_t^1, \sigma_t^2, \ldots, \sigma_t^k\right]$ di dimensioni $k \times 1$ che identifica il numero dei regimi in cui si muove la varianza è specificato da un $GARCH(1,1)$,

$$\sigma = \alpha + \alpha_0 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1} \tag{2.9}$$

dove $\alpha_0 = \left[\alpha_0^1, \alpha_0^2, \ldots, \alpha_0^k\right]$ e $\alpha_1 = \left[\alpha_1^1, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^k\right]$, mentre $\beta = diag\left[\beta_1^1, \beta_1^2, \ldots, \beta_1^k\right]$. Inoltre si devono assumere i vincoli sui parametri per assicurare la positività della varianza condizionata e cioè che $\alpha_0 \geq 0, \alpha_1 \geq 0\, e\, 1 \geq \beta \geq 0$ e la condizione di non esplosività del processo. Fatte queste premesse la diagonalizzazione del vettore β e la condizione di non esplosività della varianza condizionata implicano che la (2.9) possa essere invertita in modo da ottenere una rappresentazione $ARCH(\infty)$

$$\sigma_t^j = \alpha_0^j (1 - \beta_1^j)^{-1} + \alpha_1^j \sum_{i=1}^{\infty} \beta_1^{j,i-1} \varepsilon_{t-i}^2$$

per $j = 1, \ldots, k$. In questo modo l'evoluzione nel tempo del del processo σ_t^j dipende soltanto dai parametri del $GARCH$ all'interno del regime j. Infatti la rappresentazione $ARCH(\infty)$ di σ_t^j restituisce ai parametri del $GARCH$ la loro classia interpretazione: $\alpha_0^j(1 - \beta_1^j)^{-1}$ è l'impatto dello shock sulla varianza al tempo immediatamente successivo, α_1^j misura la magnitudine dello shock mentre β_1^j riflette la memoria della varianza all'interno del regime j. L'approccio proposto da Haas può essere meglio apprezzato se si propone una notazione vettoriale della (2.9) come di seguito ([3]):

$$\begin{bmatrix} \sigma_t^1 \\ \sigma_t^2 \\ \vdots \\ \sigma_t^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0^1 \\ \alpha_0^2 \\ \vdots \\ \alpha_0^K \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^K \end{bmatrix} \varepsilon_{t-1}^2 + \begin{bmatrix} \beta_0^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_0^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \beta_0^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{t-1}^1 \\ \sigma_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{t-1}^K \end{bmatrix} \tag{2.10}$$

Se si confronta il modello proposto da Haas con il classico $GARCH$ si nota come le dinamiche della varianza sono identiche nei due modelli se si pone che $s_t = s_{t-1}$ e cioè il regime del processo resta identico nei due periodi adiacenti. La specificazione della varianza differirà solo in presenza di un cambio di regime. Immaginando la presenza di due regimi, uno di "bassa" e uno di "alta" volatilità, il processo che determina la volatilità, in un $GARCH$ standard, resterà indipendente dalla presenza dei regimi, proponendo eventualmente un "salto occasionale" nella varianza. Nel caso dei modelli $MS - GARCH$, invece, la presenza di regimi consente l'individuazione di diversi momenti lungo la serie storica della volatilità che descriveranno fasi in cui il processo è soggetto ad ampi movimenti della varianza rispetto a fasi più regolari.

Haas, peraltro, si preoccupa di derivare le condizioni di stazionarietà per il processo definito dal modello (2.10) oltre che una espressione per la varianza non condizionata. Già Timmermann, nel 2000.....qui manca questa faccenda devo capire se e come metterla aveva ricavato i momenti primi e secondi di un processo Switching Markoviano del primo ordine con termine autoregressivo. Timmermann considera un processo $\{y_t\}$ dato da.....

Sviluppi più recenti: la proposta di Ardia (2008).

Per tenere in considerazione i fatti ormai stilizzati dalla letteratura specie in materia di serie storiche finanziarie, Ardia considera una estensione del modello (2.10) proposto da Haas in cui, per modellizzare la varianza condizionata, il $GARCH(1,1)$ è sostituito dal $GJR(1,1)$, che abbiamo visto nella prima parte in (1.8) citando l'articolo di [6]. Come visto la questa specificazione consente di tenere conto dell'*effetto leverage.* Se adottiamo la notazione vettoriale come in (2.10) nell Markov Switching GJR Model ($MS - GJR$ d'ora

in poi) la varianza condizionata al tempo t può essere scritto:

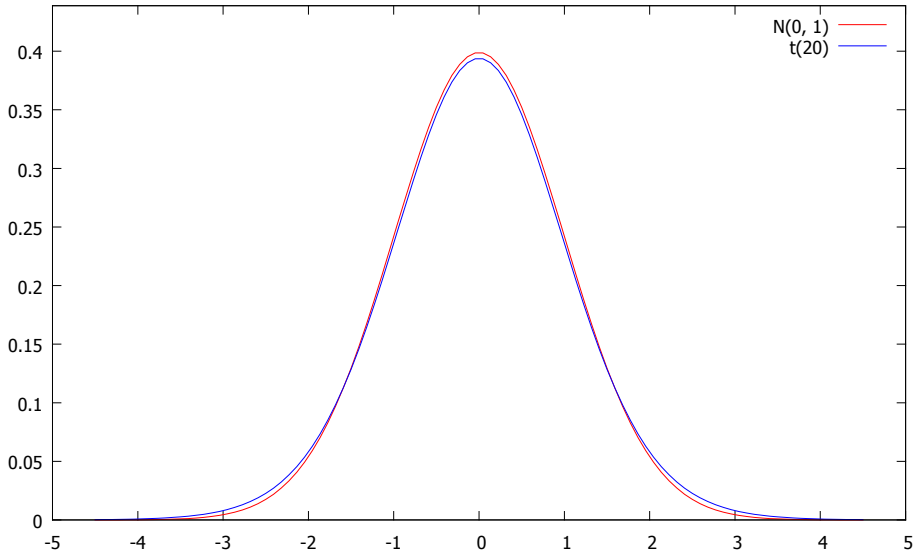
$$\begin{bmatrix} \sigma_t^1 \\ \sigma_t^2 \\ \vdots \\ \sigma_t^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0^1 \\ \alpha_0^2 \\ \vdots \\ \alpha_0^K \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^K \end{bmatrix} I_{\{y_{t-1} \geq 0\}} + \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^K \end{bmatrix} I_{\{y_{t-1} \leq 0\}} \right\} \varepsilon_{t-1}^2 + \\ + \begin{bmatrix} \beta_0^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_0^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \beta_0^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{t-1}^1 \\ \sigma_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{t-1}^K \end{bmatrix} \tag{2.11}$$

dove $I_{\{\bullet\}}$ è una funzione indicatrice. In questa formalizzazaione, la varianza condizionata in ogni regime j può reagire in maniera asimmetrica in relazione al segno degli shock passati grazie all'introduzione della funzione indicatrice. Il *leverage effect* è presente all'interno del modello dal momento che $\alpha_2^k > \alpha_1^k$ il che consente di stimare se la risposta agli shock è differente fra i due regimi. Data l'ampia evidenza della presenza di eccesso di curtosi nelle serie storiche finanziarie, Ardia propone di modellizzare i residui secondo la distribuzione $t - Student$. In questa specificazione la densità dei residui $\{\eta_t\}$ dipende dai gradi di libertà ν, ed è data da:

$$\eta_t \sim t(0, 1; \nu) = \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}} \left(1 + \frac{\eta_t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} \tag{2.12}$$

peraltro tale specificazione è possibile anche nel modello di Klaassen (2.4) come per gli $RS - GARCH$. Val la pena di ricordare che Ardia si muove in un contesto bayesiano mentre Haas è legato alla classica stima di massima verosimiglianza. Haas, peraltro, mantiene le ipotesi di normalità per le distribuzioni dei residui sostenendo che, in ambito di modelli mistura, la $t - Student$ è superflua.

Figura 2.1: Tracciato densità di una distribuzione N(0,1) a confronto di una t-Student



Sviluppi e ulteriori generalizzazioni del modello.

L'analisi delle serie storiche finanziarie evidenzia come la variabilità della volatilità del processo, che implica la scelta di una specificazione che garantisca delle code pesanti (*fat-tail*), dipenda dal regime di volatilità in cui evolve il processo. Se immaginiamo che esistano due regimi, *high and low volatility*, per $i = 1, 2$, è possibile pensare di attribuire al regime di alta volatilità una distribuzione $t - Student$ con un numero di gradi di libertà contenuto, mentre per il regime di volatilità "standard" si può imporre una distribuzione normale o nuovamente una $t - Student$ con un elevato numero di gradi di libertà che approssimi una densità normale. E' nota la relazione che lega la distribuzione $t - Student$ con la $Normale$: al crescere dei gradi di libertà la t tende alla distribuzione normale standardizzata (vedi 2.1):

$$lim_{\nu\to\infty}\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})\sqrt{\pi\nu}}\left(1+\frac{\eta_t^2}{\nu}\right)^{-(\nu+1)/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,e^{-\eta_t^2/2}$$

dunque generalizzando ulteriormente la 2.11 è possibile riscrivere l'equazione per i rendimenti finaziari (2.8) assieme a quella per la varianza condizionata (2.11) in modo da attribuire una specifica distribuzione per i residui all'in-

terno di ogni regime. Se si assume che esistano K regimi il processo $\{\varepsilon_t\}$ diviene:

$$\varepsilon_t = \eta_t \sqrt{\sigma_t^i}$$

$$con \qquad \eta_t \sim \begin{cases} t(0,1,r_1) & se \quad i=1 \\ t(0,1,r_2) & se \quad i=2 \\ & \vdots \\ t(0,1,r_K) & se \quad i=K \end{cases}$$

con $i = \{1, ..., K\}$ a rappresentare i diversi regimi di volatilità e r_i sono i diversi gradi di libertà della $t - Student$. A questa punto si può generalizzare la (2.11), sempre in termini vettoriali, come segue:

$$\begin{bmatrix} \sigma_t^1 \\ \sigma_t^2 \\ \vdots \\ \sigma_t^K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_0^1 \\ \alpha_0^2 \\ \vdots \\ \alpha_0^K \end{bmatrix} + \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^K \end{bmatrix} I_{\{\varepsilon_{t-1} \sim t(0,1,r_1\}} + \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^K \end{bmatrix} I_{\{\varepsilon_{t-1} \sim t(0,1,r_2\}} + \cdots \right.$$
$$\left. \cdots + \begin{bmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_1^2 \\ \vdots \\ \alpha_1^K \end{bmatrix} I_{\{\varepsilon_{t-1} \sim t(0,1,r_K\}} \right\} \varepsilon_{t-1}^2 + \begin{bmatrix} \beta_0^1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \beta_0^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \beta_0^K \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{t-1}^1 \\ \sigma_{t-1}^2 \\ \vdots \\ \sigma_{t-1}^K \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

con $I_{\{\bullet\}}$ funzione indicatrice che identifica la distribuzione dei residui al tempo corrente. Nel modello presentato, anche per semplificare la notazione, è stata imposta la distribuzione $t - Student$ con differenti gradi di libertà. Nulla osta al fatto che possano essere fatte scelte diverse. Come si vedrà nelle analisi empiriche è conveniente adottare, nel caso di due soli regimi, una distribuzione di tipo *Normale Standardizzata* per il regime di bassa volatilità. La specificazione appena presentata è, peraltro, valida anche all'interno del modello di Klaassen (2.4). Il modello (2.13), dunque, propone per l'equazione della varianza condizionata una risposta differente agli shock passati in relazione alle ipotesi sulle distribuzioni dei residui. Nuova ipotesi sulle funzioni di densità all'interno del modello originario di Haas che consente la stima degli $MS - GARCH$ evitando la *path dependence.*

2.0.10 Modelli MS-GARCH e break strutturali.

La letteratura fin quì riportata, come si è visto, si preoccupa di risolvere i delicati problemi di stima di questa classe di modelli. Haas, in particolare, concentra la propria attenzione sull'analisi dei parametri di persistenza del modello (2.10) confrontandoli con le stime dei parametri dei classici modelli $GARCH$, in un'ottica simile a quella di Hamilton e Susmel. Ardia riprende il modello di Haas e lo ripropone in ambito bayesiano, aprendo un'area di ricerca interessante in un'ottica di stima degli $MS - GARCH$. Marcucci (2005), verifica le capacità previsive del modello di Klaassen in un ambito *out of sample* e procede al calcolo del *Value at Risk* degli $MS - GARCH$ stimati grazie alla MLE per verificare le *performance* di questi modelli nella previsione della volatilità. Meno sembra esser stato fatto per comprendere le capacità di questi modelli di spiegare il fenomeno osservato. Se la scelta è se utilizzare i modelli $MS - GARCH$ questa andrebbe fatta sulla base della presenza di shock di sistema nel processo finanziario osservato che sono la causa della presenza di diversi regimi di volatilità nella serie storica. In altri termini è necessario verificare la presenza di break strutturali nella serie storica osservata attraverso test opportuni e cone esse le date temporali degli shock; confrontare questi risultati con quelli che provengono dalle stime dei modello $MS - GARCH$ per la serie stessa e, infine verificare se le date corrispondenti ai punti di shock corrispondono a quelle si "salto di regime" nel processo che descrive la volatilità. Il test che ho deciso di adottare per verificare la presenza di break strutturali nella serie storica finanziaria che poi verrà descritta si basa essenzialmente sull'abilità del modello di descrivere correttamente la presenza di *outlier* nella serie osservata. Una logica simile è presentata da Brown, Durbin e Evans (1975), i quali propongono di utilizzare i ***residui ricorsivi*** per effettuare dei test sulla stabilità del modello. più in generale questa particolare classe di test rientra nei test di fluttuazione i cui sviluppi si possono trovare anche in Zeileis (2005) che, tra l'altro, è anche l'autore della library strucchange che adotterò nelle applicazioni. La tecnica appare particolarmente appropriata per le serie storiche finanziarie. L'ipotesi nulla è che il vettore di parametri β sia invariante rispetto al tempo,

l'ipotesi alternativa è, semplicemente, che lo sia almeno una volta. Il test è abbastanza generale nel senso che non richiede una particolare specificazione a priori di quando vi sia lo shock lungo la serie. D'altro canto il potere del test è piuttosto limitato se confrontato con quello del più noto test di Chow. Supponiamo di considerare un campione di T osservazioni, il residuo ricorsivo r^{th}è dato dall'errore di previsione *ex-post* commesso nello spiegare y_t con le osservazioni fino al tempo $t-1$. La letteratura parla di *once step ahead prediction error*, formalmente si può porre la seguente relazione lineare:

$$\epsilon_t = y_t - x_t' b_{t-1}$$

dove x_t è un vettore di variabili indipendenti associato all'osservazione y_t mentre b_{t-1} è il coefficiente dei minimi quadrati ordinari calcolato sulla base delle osservazioni fino al tempo $t-1$. I test per la presenza di *structural change* verificano l'ipotesi di assenza di *break* nella serie, cioè:

$$H_0: \qquad b_{t-1} = b_{t-T} \qquad per\, t = 1, ..., T$$

Il *forecast* per la varianza è dato da:

$$\sigma_{ft} = \sigma \left[1 + x_t'(X_{t-1}' X_{t-1})^{-1} x_t\right]$$

mentre l'r^{th} residuo normalizzato sarà espresso dalla seguente

$$w_r = \frac{\epsilon_r}{\sqrt{1 + x_t'(X_{t-1}' X_{t-1})^{-1} x_t}} \tag{2.14}$$

sotto l'ipotesi che i coefficienti restino sempre costanti durante il periodo considerato[2] $w_r \sim N(0, \sigma)$ ed è indipendente da $w_s \forall s \neq r$. Un modo per esaminare qualitativamente la presenza di *break* nella serie è di verificare l'andamento della curva generata dall'equazione w_r/σ contro il tempo. Sotto le ipotesi del modello, i residui sono incorrelati a sono distribuiti normalmente con media zero e deviazione standard 1. Più in generale i test di fluttuazione

[2] che nel nostro caso vorrà dire testare l'ipotesi che $b_{t-1} = b_{t-T} = 0$ e cioè che la media dei rendimenti sia sempre pari a zero.

(*fluctuation test*) derivano un processo empirico che cattura eventuali fluttuazioni nella serie storica dei residui ricorsivi. Dal momento che di questi processi è nota la forma funzionale e la densità associata, è possibile costruire degli intervalli di confidenza sulla base dei quali verificare l'ipotesi di stabilità del modello. Il test CUSUM si basa sulla somma cumulata dei residui ricorsivi (vedi sopra la 2.14):

$$W_t = \sum_{r=K+1}^{r=t} \frac{w_r}{\hat{\sigma}} \tag{2.15}$$

dove

$$\hat{\sigma} = (T - K - 1)^{-1} \sum_{r=K+1}^{r=t} (w_r - \bar{w})^2$$

e

$$\bar{w} = (T - K)^{-1} \sum_{r=K+1}^{r=t} w_r.$$

Sotto l'ipotesi nulla il limite del processo empirico di fluttuazione W_t è il moto browniano standard. Più precisamente vale il Teorema del Limite Centrale:

$$W_t \Longrightarrow W$$

con $t \to \infty$ e dove $\Longrightarrow$ denota l'ipotesi di convergenza debole della misura di probabilità associata al processo. Come si diceva, l'ipotesi alternativa H_1 è che vi sia almeno un *break* strutturale nella serie dei residui osservati.

i flessibilità.

Capitolo 3

MS-GARCH: Applicazioni e stime.

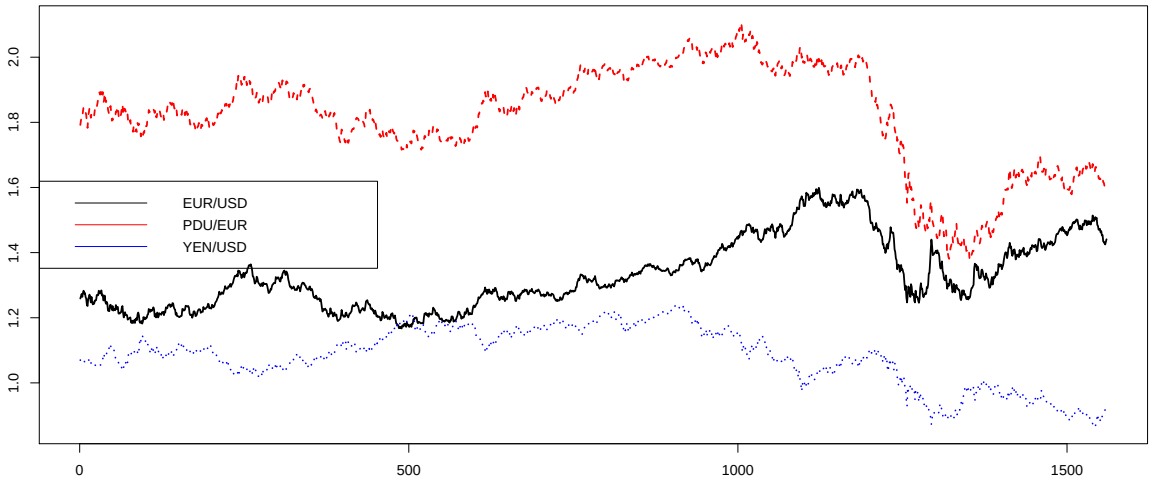
Nella seconda parte della tesi dopo la descrizione dei *dataset* scelti per l'analisi delle serie storiche si propone di modellizzare i dati secondo i modelli della classe $ARMA(1,1) - MS - GARCH(1,1)$ e vengono presentati e discussi i risultati sulla base degli algoritmi di stima proposti da [13] e da [9] sulla base di quanto detto nella Parte II. L'ipotesi di corretta specificazione e individuazione di *break* strutturali viene verificata nella parte conclusiva della tesi confrontando i risultati delle stime ottenute con quelli sui test per la presenza di *break* strutturali.

3.0.11 Dataset.

Per quanto riguarda i dati si è scelto di considerare, per le applicazioni, i tassi di cambio di diverse valute rispetto al dollaro. Le serie reali, come noto, soprattutto quando si parla di variabili economiche, si presentano normalmente come processi non stazionari in quanto sono afflitte da fenomeni si stagionalità e/o periodicità e dal fatto che la loro media o la loro varianza non sono costanti [nel primo caso si parla di *stazionarietà in media* e nel secondo di *stazionarietà in covarianza*]. Queste considerazioni di base sulla natura dei processi oltre all'esperienza nel trattamento dei dati reali suggerisce la scelta di serie storiche il cui processo generatore è non stazionario ma solo nel suo

momento secondo, proprio per evitare di complicare le procedure di stima e pulizia dei dati eccessivamente, senza aggiungere un contributo decisivo all'oggetto della tesi. Sicuramente la mia esperienza personale ha inciso sulla scelta dei dati e del campione. L'assenza di stagionalità e/o periodicità è garantita dalla mancanza di un qualsivoglia sottostante fisico, dimodochè si tratta di *commodity* specificatamente finanziaria, oltrechè dal fatto che i movimenti delle curve dei tassi sono generate da fattori esogeni [gli interventi di politica monetaria delle banche centrali, per esempio]. I tassi di cambio scelti, inoltre, sono legati all'andamento di mercati "teoricamente" efficienti che dovrebbero risentire, e come l'analisi empirica mostrerà hanno effettivamente risentito, dei generali *shock* che hanno colpito le economie capitaliste. Proprio per questo si è badato bene ad inserire, all'interno del periodo oggetto di rilevazione campionaria, le osservazioni comprese tra l'ultimo trimestre del 2008 e i primi mesi del 2009 dove si è verificata recentemente un'importante crisi dei mercati finanziari legata allo *shock* che ha colpito il settore dei *"sub prime"* americani. Tornando ai dati i rendimenti dei tassi di cambio scelti, dati dalla eq.1.1 (Parte I), possono essere ipotizzati con media pari a zero, il che ci consente di semplificare la notazione e di concentrare l'attenzione sulla volatilità delle serie storiche, dunque sulla varianza condizionata dei processi, ed in particolare sulla presenza di *break* strutturali nei processi stessi. In Fig.3.1 sono riportati gli andamenti dei tassi di cambio rispettivamente fra EUR/USD, GBP/USD e YEN/USD. Le osservazioni sono giornaliere e il periodo campionario è compreso fra il 1 gennaio del 2004 e il 23 dicembre del 2009, dunque 1559 rilevazioni per ciascuna serie storica. L'analisi qualitativa e congiunta dei primi due grafici (si veda Fig.3.1 e Fig.3.2) consente di apprezzare un deciso aumento della volatilità a partire da settembre 2008 e che dura per tutto il quarto quadrimestre dello stesso anno. I mercati dei cambi sembrano "calmarsi" nel corso del 2009 con tassi differenti. Questo primo sguardo alle serie suggerisce la presenza di almeno uno *shock* nella volatilità dei processi che potrebbe essere adeguatamente spiegato da un modello lineare per la varianza condizionata. In Fig.3.2 sono riportati i rendimenti giornalieri in percentuale sulla base dell'eq.1.1 (Parte I). Nel primo grafico, che riporta la serie storica della volatilità EUR/USD,

Figura 3.1: Serie storica giornaliera degli andamenti dei tassi di cambio rilevati giornalmente nel periodo compreso fra il 01/01/2004 e il 23/12/2009. Dunque 1559 osservazioni per ciascuna serie storica.



si nota una forte variazione della volatilità durante l'ultimo periodo del 2008 come per gli altri due tassi. Il confronto fra i grafici in Fig.3.2 consente di apprezzare anche visivamente la maggiore volatilità media della serie storica YEN/USD rispetto alle altre due serie storiche.

	min	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max
EUR/USD	-1.22	-0.16	0.01	0.00	0.15	1.61
PDS/USD	-1.71	-0.16	0.00	-0.00	0.16	1.32
YEN/USD	-1.61	-0.17	0.01	-0.00	0.17	2.70

Figure 3.2: Serie storica giornaliera della volatilità dei rendimenti dei tassi di cambio in percentuale. I grafici non sono rappresentati nella stessa scala volutamente. I dati sono giornalieri e la prima osservazione è relativa al 2/01/2004 mentre l'ultima è del 24/12/2009. Tutti e tre i processi sono descritti sulla base dell'eq.1.1 vista in Parte I.

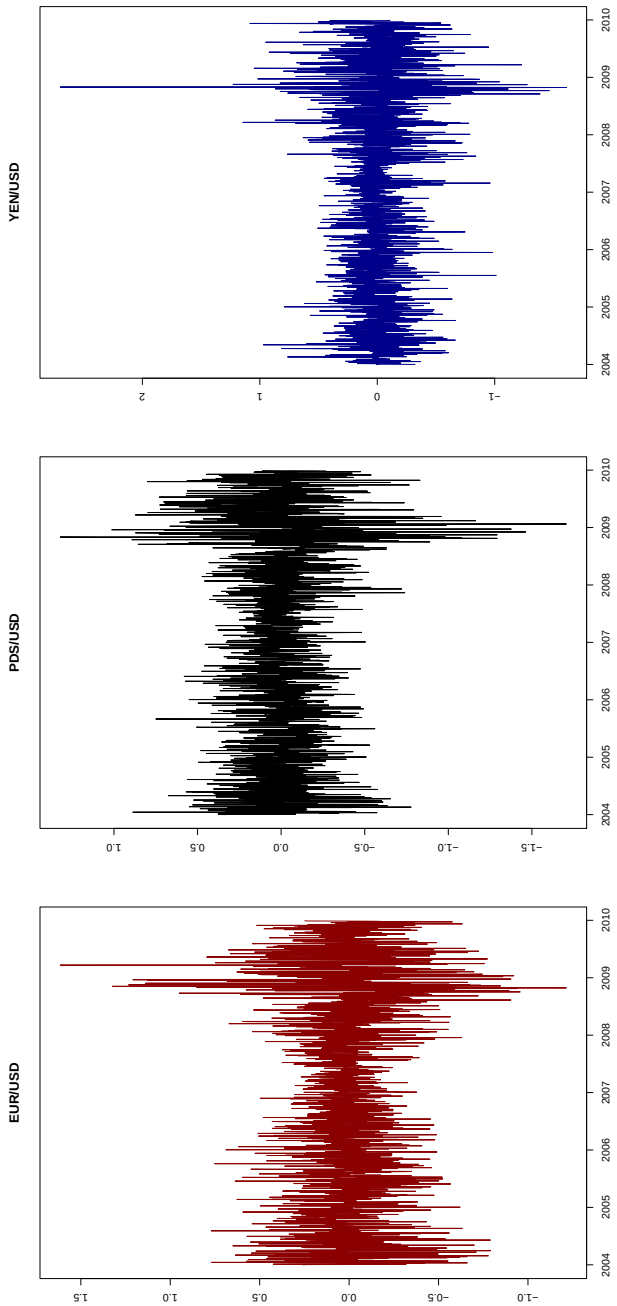
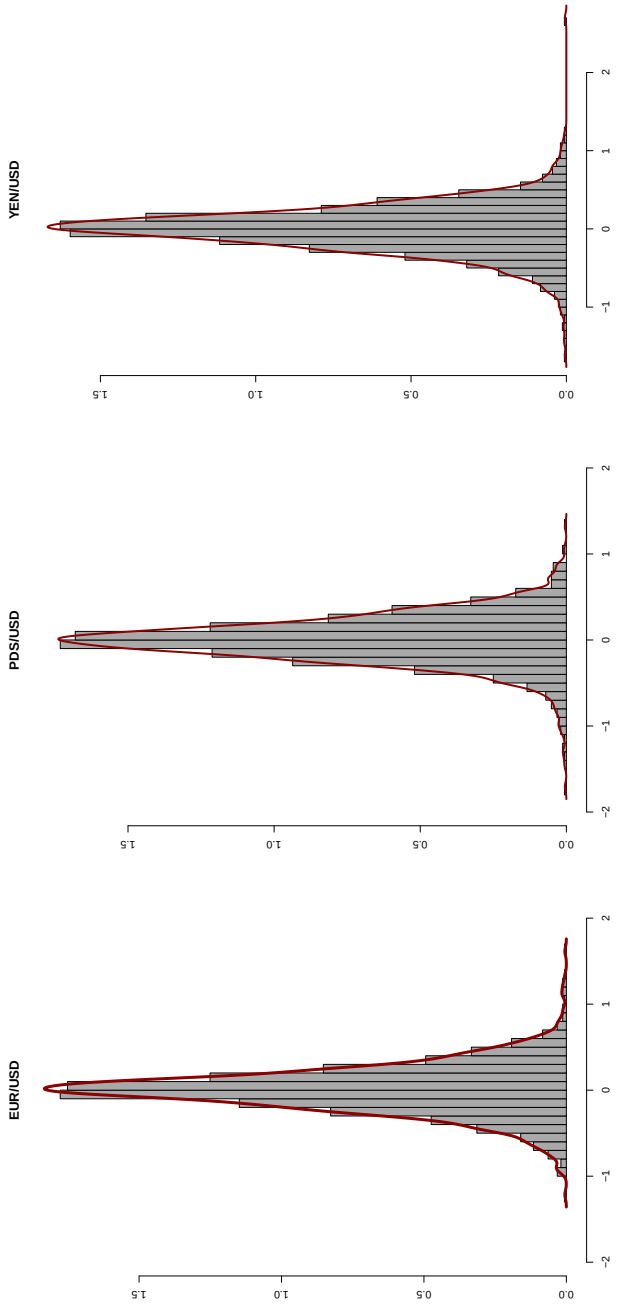


Figure 3.3: Serie storica giornaliera della volatilità dei rendimenti dei tassi di cambio in percentuale

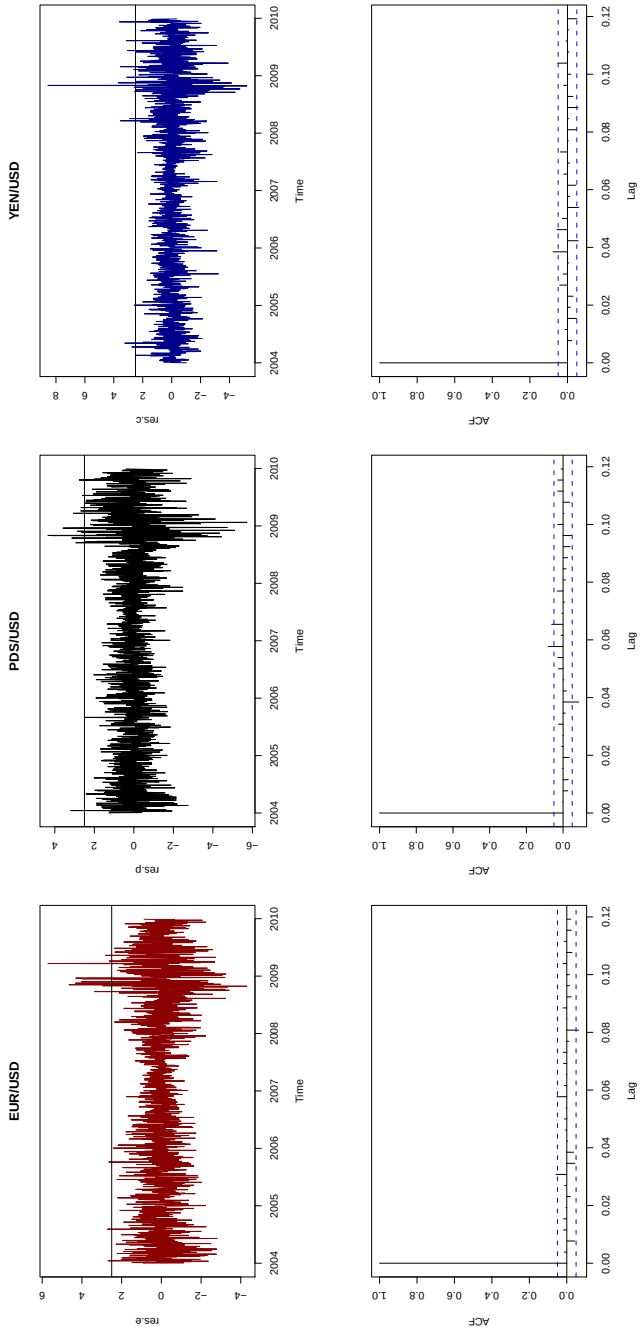


3.0.12 Stime modelli ARMA-GARCH.

Una volta specificato correttamente, l'ordine del modello è stato adottato per le successive stime dei parametri per i modelli $MS - GARCH(r, s)$. L'analisi della serie storica originaria suggerisce l'adozione, per la stima delle medie dei rendimenti delle serie storiche, di un modello della classe $ARMA(p, q)$. I residui del modello così stimato, infatti, evidenziano un'alta significatività dei parametri come mostra la tabella di seguito. Il criterio adottato per la scelta della migliore specificazione del modello è stato, dopo l'usuale verifica qualitativa della funzione di autocorrelazione per le serie storiche dei dati e verifiche sulle ipotesi di significatività dei parametri, è stato il noto[1] $AIC\,(Asymptotic\,Information\,Criterion)$ che ha individuato un $ARMA(1, 1)$ per la media dei rendimenti della serie storica EUR/USD, mentre sia per la serie GBP/USD che per quella del tasso YEN/USD l'AIC ha selezionato il modello $MA(1)$. La Tab.3.0.11 riporta i risultati della stima dei modelli $ARMA$ assieme ad alcune statistiche di riferimento. Per altro i test di *Jacque - Brera* e quello di *Ljung-Box* rifiutano sia l'ipotesi di normalità, il che potrebbe essere dovuto alla presenza di valori anomali nella serie storica, sia di non autocorrelazione dei residui, il che potrebbe indurre a pensare che l'autocorrelazione si concentri nella varianza condizionata (tipico delle serie finanziarie). Si ricordi, infatti, che le ipotesi di partenza sulla distribuzione condizionata delle innovazioni, ndr$\epsilon_t = \eta_t\sqrt{h_t}$, implica che le innovazioni non siano autocorrelate nei livelli. Dunque, la bontà di adattamento di un modello lineare tipo $ARMA - GARCH$ può essere valutata in rapporto alla capacità della varianza condizionata di rendere i residui standardizzati il più vicino ad essere normalmente distribuiti. Se i risultati dei test sono negativi ciò implica che non si è stato in grado di ripulire gli ϵ_t degli effetti attribuibili alla varianza condizionata. Ciò detto val la pena di verificare se i test di cui sopra sono accettati se i residui vengono specificati con un modello $ARMA(p, q) - GARCH(r, s)$.

[1] La cui espressione più classica è data da $AIC(k) = -\frac{2}{n}(logL(\delta) - \kappa)$ [vedi Hamilton, 1994], dove κè il numero dei parametri del modello, δ è il vettore $(\kappa \times 1)$ contenente i parametri stimati e $L(\delta)$ è la funzione di verosimiglianza calcolata in δcon l'ipotesi di gaussianeità del *white noise*.

Figure 3.4: Serie storica giornaliera della volatilità dei rendimenti dei tassi di cambio in percentuale



	EUR/USD	PDS/USD	YEN/USD
	$ARMA(1,1)$	$MA(1)$	$MA(1)$
ρ	0.4691 (0.6804)	#	#
ϕ	-0.4798 (0.6828)	0.0752 (0.0256)	-0.0718 (0.0258)
$log-likelihood$	-242.6	-263.98	-382.93
AIC	491.2	531.96	769.86
$\hat{\sigma}^2$	0.0234	0.08215	0.0957

Table 3.1: Stima modelli classe $ARMA(p,q)$

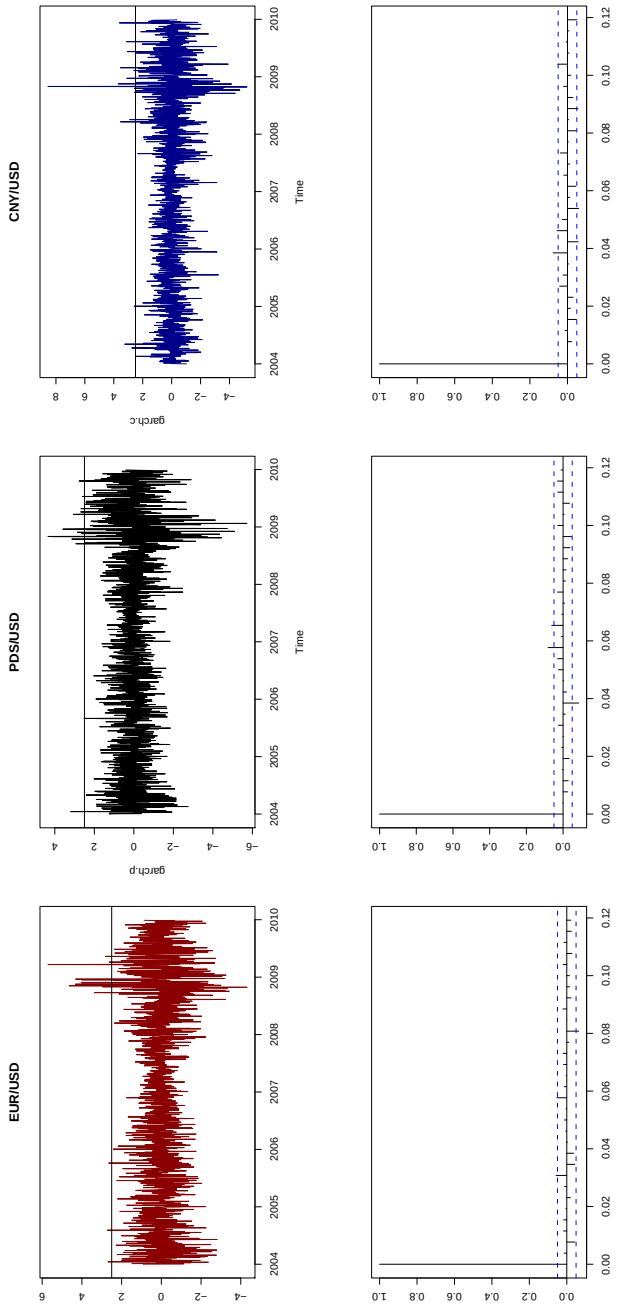
I parametri stimati per i modelli del tipo $ARMA(p,q) - GARCH(r,s)$ per le tre differenti serie storiche sono riportati in Tab.3.0.11. Le stime sono ottenute secondo l'impostazione "classica" e cioè utilizzando procedure inferenziali del tipo *Maximum Likelihood Estimation (MLE).* Sia la media condizionata dei rendimenti che la varianza condizionata sono stati stimati congiuntamente massimizzando la *log-likelihood function* ottenuta come il logaritmo del prodotto delle densità congiunte. Le stime di massima verosimiglianza sono state calcolate utilizzando l'algoritmo proposto da Broyden, Fletcher, Goldford e Shanno ($''BGFS''$) e presente fra gli algoritmi di ottimizzazione numerica di R. Tali procedure sono state adottate sia per i modelli con un singolo regime che per i modelli *state dependent.* Come si evince in Fig.3.5 l'ACF migliora decisamente, il che è confermato sia dal test di *Lijung-Box* (che per Q(20) ha un p-value pari a 0.8780745, 0.920022 e 0.940054 rispettivamente per la serie EUR/USD, GBP/USD e YEN/USD,si veda Tab.3.5) il quale rifiuta decisamente l'ipotesi di autocorrelazione dei residui per le serie osservate sia dall'AIC criterion che migliora sensibilmente confermando una migliore specificazione del modello sulla varianza residua. Ciononostante il test di normalità di Jarque-Bera continua a rifiutare l'ipotesi di normalità (t-statistic=7,1167 con p-value pari a 0,02848576 per la serie EUR/USD). Inoltre le stime dei parametri in Tab.3.0.11 sono significative sulla base degli *standard error.* Resta da aggiungere qualche nota sui valori stimati per i parametri dei tre modelli $GARCH(1,1)$. Per tutte e tre le serie storiche

	USD/EUR	GBP/USD	YEN/USD
ω	0.0002189 (0.0001133)	0.0003638 (0.0001815)	0.0016252 (0.0005222)
α	0.0366995 (0.0058910)	0.0428499 (0.0075088)	0.0691267 (0.0117766)
β	0.9604379 (0.0055614)	0.9520285 (0.0079847)	0.9141170 (0.0141823)
$\rho = \alpha + \beta$	0.9971374	0.9948784	0.9832437
ℓ	-94.4932	-74.18198	-236.6883
AIC	0.1264354	0.1002976	0.3087727
BIC	0.1401740	0.1140290	0.3225041
$Jarque - Brera\,Test$	10.74803 (0.0046354)	3.405940 (0.1821418)	1.8346 (0.2587666)
$Lijung - Box\,Q(20)$	12.98388 (0.8780745)	11.88366 (0.920022)	21.55927 (0.3648965)

Table 3.2: Stime Modelli $ARMA - GARCH$

la persistenza della volatilità, in qualche modo quantificata dal parametroρ, resta importante e molto vicina alla condizione di non stazionarietà della varianza condizionata. Questi risultati sulle stime parametriche dei modelli $GARCH(1,1)$ standard confortano le ipotesi di adozione di modelli con salti di regime.

Figure 3.5: Serie storica giornaliera dei residui dei modelli $ARMA(1,1) - GARCH(1,1)$, $MA(1) - GARCH(1,1)$ e $MA(1) - GARCH(1,1)$ rispettivamente per le serie EUR/USD, GBP/USD e YEN/USD con relative stime per le ACF sui residui.



3.0.13 Stime modelli MS-GARCH.

In Tab.3.0.13 sono riassunti i risultati della stima dei parametri relativi ai modelli della classe $MS-GARCH(p,q)$ secondo l'approccio proposto da Klaassen e visto in eq2.4 in Parte II. La specificazione adottata per i modelli è invariata rispetto al caso di un regime di volatilità e non viene riportata la stima della media dei rendimenti delle serie storiche osservate dal momento che poco aggiunge allo studio della volatilità. L'algoritmo per la stima dei parametri è stato ottimizzato utilizzando le routines di R. I parametri, vedi sempre Tab.3.0.13, per tutte e tre le serie storiche proposte, sono stati stimati in un primo momento attribuendo una densità di tipo gaussiano per entrambi i regimi di volatilità. In un seconda stima, in accordo con le considerazioni fatte e sulle ipotesi note in letteratura circa la distribuzione dei residui in presenza di fenomeni finanziari, si propone una densità di tipo *Normale* per il regime di *low volatility* e una densità tipo *t-Student* per il regime di *high volatility*. In tabella sono riportate le deviazioni standard dei residui condizionate rispetto ai regimi di volatilità, e cioè $\Longrightarrow \sigma = (\omega_i/(1-\alpha_i-\beta_i)^{1/2}\, con\, i = LV, HV$. I risultati mostrano come, per tutte e tre le serie osservate, valga la relazione $\sigma_{HV} > \sigma_{LV}$. Come era logico aspettarsi il regime di *high volatility* evidenzia una variabilità decisamente più elevata rispetto al regime di *low volatility*. La deviazione standard della serie GBP/USD, $\sigma_{HV} = 2.375$, è la più elevata fra quelle osservate. Questo risultato, però, combinato con la stima della probabilità non condizionata di rimanere nel regime di alta volatilità ($\pi_{HV} = 0.29$), evidenzia come questa serie rimanga nel regime di altà probabilità con una valore inferiore rispetto alla serie YEN/USD ($\sigma_{HV} = 0.113$ ma con$\pi_{HV} = 0.48$)[2]. Questa evidenza empirica sulla serie YEN/USD può essere apprezzata anche qualitativamente osservando l'ultimo grafico riportato in Fig.3.6 e in Fig.3.7, i quali evidenziano come la volatilità "salti" e persista a rimanere nel regime di altà volatilità più delle altre due serie osservate.

[2]Su queste considerazioni si possono confrontare anche i risultati delle stime sugli $MS-GARCH(1,1)$ presenti in [15].

Persitenza nei modelli MS-GARCH Il ruolo cruciale della persistenza nei modelli che catturano la volatilità nelle serie storiche finanziarie è stato sottolineato in Parte II descrivendo i modelli $MS-GARCH(1,1)$. Confrontando le stime dei parametri α, β e $\rho = \alpha+\beta$ nelle Tabelle3.0.11-3.0.13 si nota come la stima di ρ nei modelli $GARCH(1,1)$ per tutte le serie osservate sia inferiore alla persistenza stimata nei corrispondenti $MS-GARCH(1,1)$ condizionati al regime *LV*. Il contrario, osservando la colonna ρ con la riga HV in Tab.3.0.13, avviene nel caso del confronto con l'ipotesi di regime di *High Volatility.* Le stime ottenute possono far concludere che nei regimi con elevata volatilità la varianza risente in maniera più significativa dei *shock* che avvengono nei mercati finanziari. Ed infatti i parametri α nei modelli HV stimati sono decisamente più elevati sia rispetto ai parametri corrispondenti allo standard $GARCH(1,1)$ sia a quelli dei modelli $MS-GARCH(1,1)$ condizionati al regime di LV sempre in Tab.3.0.13. La presenza di valori anomali nelle serie osservate, in particolare nei periodi di maggiore instabilità dei mercati dei cambi e dove la curva di probabilità dei residui è la *t-Student* con v gradi di libertà, apporta un ruolo decisivo nella stima dei parametri. Ancora una volta la serie storica YEN/USD mostra di avere i valori più elevati. Alcune considerazioni vanno fatte anche a proposito dei parametri stimati β. Come si nota nel confronto fra tabelle i valori sono sempre molto elevati ed in particolare, nei regimi di alta volatilità, contribuiscono a far sfiorare la frontiera di non stazionarietà della varianza condizionata: $\rho > 1$.[3]Su questo si possono verificare anche i risultati delle stime sui parametri $MS-GARCH(1,1)$ ottenute da [15]. D'altronde è possibile attribuire la sovrastima dei parametri β, che descrivono la persistenza della volatilità rispetto al regime, anche ai limiti dell'algoritmo di stima proposto da Klaassen (vedi le relazioni in Parte II, eq.2.5-2.7), osservazioni che sono riportate anche nella seconda parte del presente lavoro. Nell'algoritmo di stima proposto in [13] il valore del parametro β è condizionato anche dalla storia del processo del secondo regime, rendendo più difficile l'interpretazione

[3]Tra l'altro su questo punto si veda il confronto fatto da [9] tra modelli $MS-GARCH(1,1)$ e $MN-GARCH(1,1)$ in cui gli autori, sulla base delle stime ottenute, notano come nei modelli Mistura con due regimi di volatilità, la frontiera della stazionarietà venga superata in molte applicazioni.

della volatilità. In definitiva tale algoritmo, pur rendendo possibile la stima dei parametri per la classe dei modelli $MS-GARCH$, tende a sovrastimare il parametro β per costruzione.

***Smooth probability* e cambi di regime** In Fig. 3.7 e in Fig. 3.6sono riportate, sulla base della relazione descritta in Parte II, par. 8, eq.2.7, per ciascuna serie storica, le *smoothing probability*, che descrivono le probabilità stimate per i tre processi di essere nel regime di *low volatility.* In Fig. 3.6, per entrambi i regimi di volatilità, è stata imposta la densità di tipo Gaussiano, mentre in Fig. 3.7 si propone la *t-Student* per il regime con *high volatility* e una distribuzione *Gaussiana* per quella di *low volatility.* Per evidenziare in maniera più marcata l'effetto legato al salto di regime è stata introdotta una variabile *dummy.* Nel caso in cui la probabilità condizionata al primo regime (cioè p_{LV}) sia inferiore a 0.5 il processo "salta" nel regime con alta volatilità. Qualitativamente, le stime della probabilità *smooth* ricavate ricorsivamente e ricalcolate come detto, descrivono una minore frequenza di "salto" dal regime di bassa volatilità a quello di alta volatilità per la serie EUR/USD e per la serie GBP/USD rispetto alla serie YEN/USD. Per altro, come ampiamente verificato, quest'ultima serie presenta una maggiore varianza condizionata rispetto alle prime due. Nel confronto fra le due figure, è chiaro come l'effetto dell'attribuzione della densità *t-Student* nel regime HV aumenti la frequenza di cambio di regime nel corso del tempo. Inoltre è possibile evidenziare i momenti di maggiore instabilità finanziaria descritti attraverso fasi di alta volatilità nei processi [4]$MS - GARCH(1,1)$. Sia in Fig. 3.6 che in Fig. 3.7 tutti e tre i grafici evidenziano una probabilità elevata di saltare nel regime di *high volatility,* e di rimanervi per un intervallo significativo di tempo, nel periodo compreso tra il 4 e il 23 settembre 2008, ancora una volta in occasione della crisi finanziaria che ha colpito recentemente i mercati finanziari.

[4] *Volatility clustering.*

	i	$density$	ω	α	β	v	$\rho = \alpha + \beta$	π	σ	l	AIC
EUR/USD	LV	$N(0,\sigma)$	0.00019	$0,02580$	$0,95178$	/	0.97758	0.62	0.007	-94.4956	0.126387
	HV	$N(0,\sigma)$	$0,00019$	$0,04198$	$0,95659$	/	0.99858	0.38	0.140		
	LV	$N(0,\sigma)$	0.00019	0.03580	0.95187	/	0.95553	0.62	0.007	-95.7934	0.121281
	HV	$t(0,v,\sigma)$	0.00027	0.04928	0.95975	10	0.99904	0.38	0.140		
GBP/USD	LV	$N(0,\sigma)$	$0,00034$	$0,03281$	$0,95248$	/	0.98536	0.62	0.007	-74.18194	0.104952
	HV	$N(0,\sigma)$	0.00036	0.05242	0.94358	/	0.99601	0.38	0.140		
	LV	$N(0,\sigma)$	0.00034	0.02487	0.95249	/	0.96356	0.71	0.004	-77.81155	0.100163
	HV	$t(0,v,\sigma)$	0.00038	0.05452	0.95546	10	0.99992	0.29	2.375		
YEN/USD	LV	$N(0,\sigma)$	0.00165	0.06787	0.91481	/	0.98262	0.62	0.007	-234.7657	0.304727
	HV	$N(0,\sigma)$	0.00174	0.08225	0.90254	/	0.98479	0.38	0.140		
	LV	$N(0,\sigma)$	0.00164	0.06788	0.91474	/	0.98622	0.52	0.056	-267.8867	0.301634
	HV	$t(0,v,\sigma)$	0.00128	0.08201	0.92389	10	$0,99432$	0.48	0.113		

Table 3.3: Stime parametri $MS-GARCH$ - algoritmo di Klaassen. Sulle colonne, rispettivamente, ω, α e βcorrispondono ai parametri dei modelli $GARCH(1,1)$. Per ogni serie storica sono riportate le stime per regime $\Longrightarrow$*Low Volatility* (LV) e *High Volatility* (HV) a cui sono associate le distribuzioni di probabilità di tipo Normale ($\Rightarrow N(0,\sigma)$ ovvero t-Student ($\Rightarrow t(0,v,\sigma)$. La colonna $\rho = \alpha + \beta$ riporta i valori stimati per la persistenza dei modelli $GARCH(1,1)$. Inoltre sono indicati i valori per i vettori delle probabilità non condizionate, che sono rispettivamente: $\pi_{LV} = (1-\pi_2)/(2-\pi_1-\pi_2)$ e $\pi_{HV} = (1-\pi_1)/(2-\pi_2-\pi_1)$. Oltre al valore della funzione di massima verosimiglianza ($\Rightarrow l$) è riportato il criterio di selezione AIC.

Figure 3.6: Nei grafici in figura sull'asse delle ordinate è rappresentata la probabilità di essere nel regime di *LV*. Sull'asse delle ascisse è rappresenato il tempo t. La probabilità *smooth* è stata calcolata secondo l'approccio di Klaassen (vedi 2.7). Le distribuzioni proposte sono di tipo Normale per entrambi i regimi ipotizzati per la varianza condizionata.

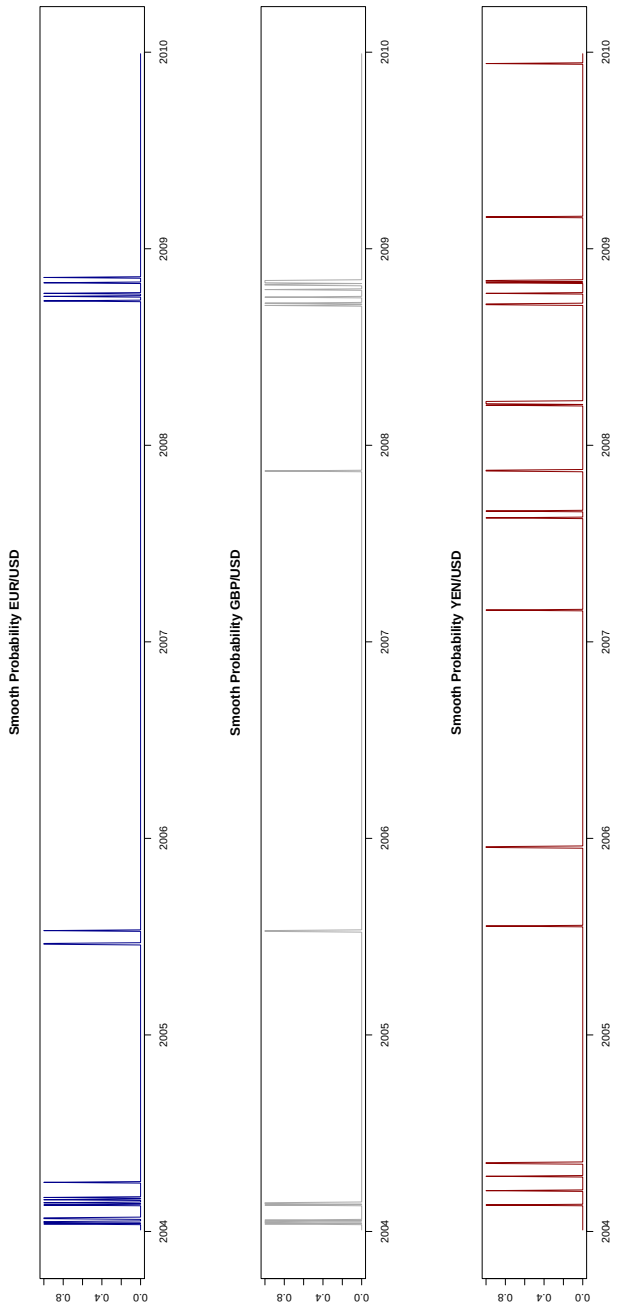
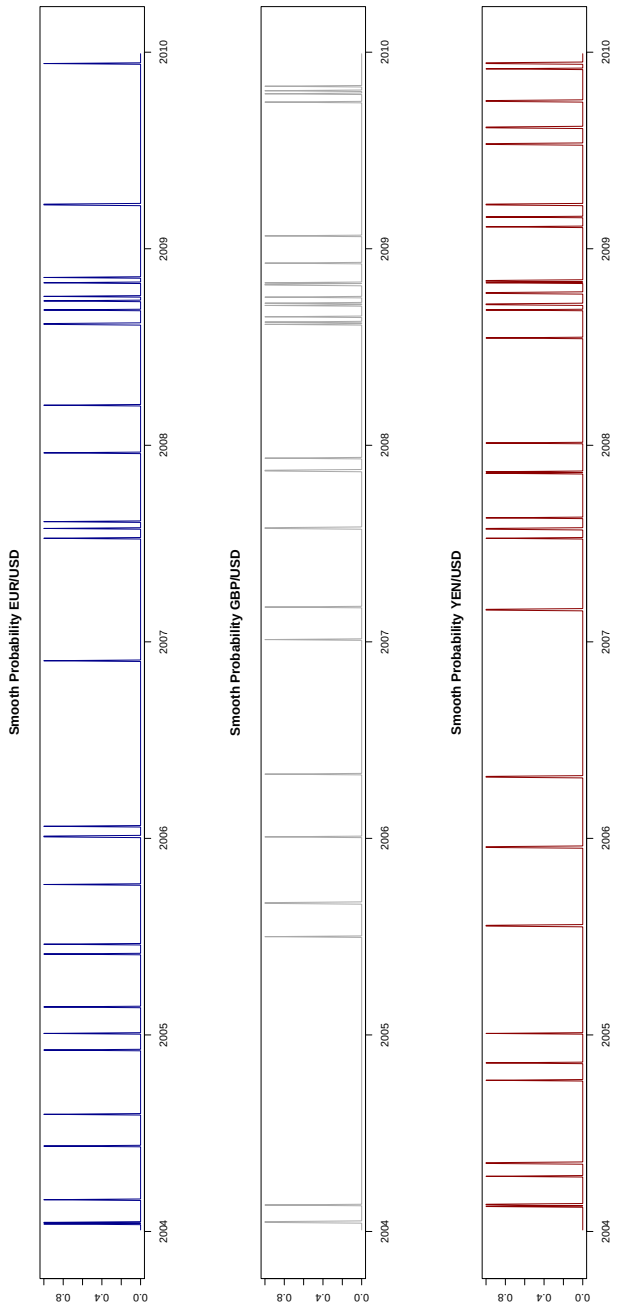


Figure 3.7: Nei grafici in figura sull'asse delle ordinate è rappresentata la probabilità di essere nel regime di *LV*. Sull'asse delle ascisse è rappresenato il tempo t. La probabilità *smooth* è stata calcolata secondo l'approccio di Klaassen (vedi eq.2.7). Le distribuzioni proposte sono di tipo Normale per il regime di *LV* e tipo t-Student per il regime di *HV*.



3.0.14 Stime modelli MS-GARCH (Haas).

In Tab.3.0.14 ho riportato i risultati delle stime degli $MS-GARCH(1,1)$ sulla base della proposta fatta da [9] nel 2004 e di cui si è discusso ampiamente in Parte II nel corso del par. 8.2. Osservando le stime e considerando la significatività dei parametri sempre elevata la serie storica GBP/USD appare quella meglio spiegata dal modello $MS-GARCH(1,1)$ con ipotesi di distribuzione Normale per i residui associati ad entrambi i regimi di volatilità. In questo caso criterio di selezione AIC esprime il risultato migliore se confrontato con i risultati sia del modello $GARCH(1,1)$ (vedi tab.3.0.11) sia dell'$MS-GARCH(1,1)$, ma stimato con l'approccio di Klaassen (vedi tab.3.0.13). Per quanto riguarda le stime dei parametri il modello proposto da Haas aiuta a comprenderne meglio il significato. Se si confrontano i risultati delle stime di α in tab. 3.0.14 e in tab. 3.0.13 presentano valori più elevati nella prima tabella in particolare nel caso di HV regime. Corrispondentemente i valori dei β sono inferiori confermando che, nel caso HV, la volatilità dei rendimenti reagisce agli *shock* di mercato di più che nel caso di regime di LV ($\alpha_{HV} > \alpha_{LV}$) ma risente di meno delle informazioni relative al tempo precedente ($\beta_{HV} < \beta_{LV}$). Dunque la persistenza resta abbastanza elevata, ma si distribuisce in maniera diversa fra i parametri che la compongono dandole un'interpretazione differente. Per quanto riguarda la serie storica YEN/USD il vincolo di stazionarietà è superato ($\alpha + \beta > 1$) e questo può dipendere dalla natura dei dati e dall'inadeguatezza del modello $MS-GARCH(1,1)$ nello spiegare il processo. Questo può dipendere anche dalla lunghezza del periodo di osservazione considerato (forse troppo lungo) rispetto al numero di regimi di volatilità imposti (due potrebbero essere pochi, ma su questo si vedano ancora le considerazioni di Haas, 2004a).

	i	$density$	ω	α	β	$\rho = \alpha + \beta$	π	σ	l	AIC
EUR/USD	LV	$N(0,\sigma)$	0.00002	0.04615	0.94679	0.99294	0.98		-0.00186	0.12617
	HV	$N(0,\sigma)$	0.00096	0.05482	0.91102	0.96584	0.01			
GBP/USD	LV	$N(0,\sigma)$	$0,00034$	0.03640	0.92621	0.96261	0.68		-74.18194	0.09952
	HV	$N(0,\sigma)$	0.00001	0.09754	0.84643	0.94397	0.51			
YEN/USD	LV	$N(0,\sigma)$	0.00010	0.02765	0.99635	1.02456	0.42		-234.7657	0.35445
	HV	$N(0,\sigma)$	0.00010	0.02898	0.99245	1.02143	0.38			

Table 3.4: Stime parametri $MS-GARCH$. Sulle colonne, rispettivamente, ω, α e βcorrispondono ai parametri dei modelli $GARCH(1,1)$. Per ogni serie storica sono riportate le stime per regime $\Longrightarrow$*Low Volatility* (LV) e *High Volatility* (HV) a cui sono associate le distribuzioni di probabilità di tipo Normale ($\Rightarrow N(0,\sigma)$ .La colonna $\rho = \alpha + \beta$ riporta i valori stimati per la persistenza dei modelli $GARCH(1,1)$. Inoltre sono indicati i valori per i vettori delle probabilità non condizionate, che sono rispettivamente: $\pi_{LV} = (1-\pi_2)/(2-\pi_1-\pi_2)$ e $\pi_{HV} = (1-\pi_1)/(2-\pi_2-\pi_1)$. Oltre al valore della funzione di massima verosimiglianza ($\Rightarrow l$) è riportato il criterio di selezione AIC.

Capitolo 4

Break strutturali e MS-GARCH

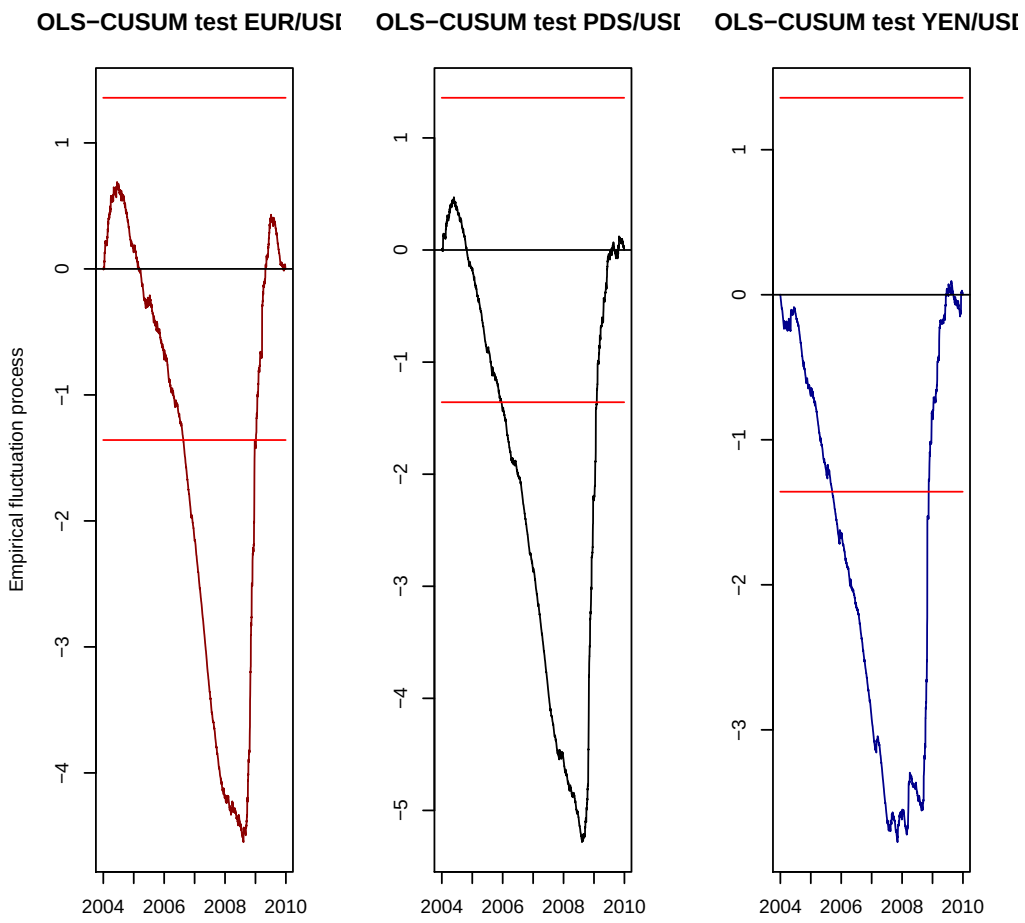
4.0.15 Individuazione *break* strutturali.

Per procedere all'individuazione di *break* strutturali nelle serie storiche osservate conviene lavorare sui residui ricorsivi e generare i processi empirici di fluttuazione di cui si è parlato in Parte II (vedi eq.2.14-2.15). In Fig.4.1 sono riportati i processi di fluttuazione stimati per le serie storiche osservate assieme ad appropriati *boundaries*. L'idea generale per tutti i test su tali processi è che l'ipotesi nulla di assenza di *structural change* dovrebbe essere rigettata quando la "fluttuazione" del processo empirico è improbabilmente troppo evidente. Per processi unidimensionali, come quelli di cui si tratta, questo confronto può essere effettuato imponendo un appropriato *boundary* che può essere attraversato dal processo con una probabilità pari ad α.[1] Per processi di fluttuazione basati sui residui ricursivi del tipo $CUSUM$ i *boundaries* comunemente usati sono lineari[2]e sono dati da $b(t) = \lambda$. Il risultato del test è evidenziato in Fig.4.1, dove l'analisi qualitativa mostra come il processo descritto dall'eq.2.15 ecceda i limiti in tutte e tre le serie storiche evidenziando la presenza di almeno un *break* strutturale. Tutti e tre i processi, peraltro, sembrano afflitti da due *shock* nella varianza dei residui, il primo a

[1] Di solito pari a $0,05$.

[2] per i riferimenti si veda A. Zeileis, F. Leisch, K. Hornik, C. Kleiber, STRUCCHANGE: An R Package for Testing for Structural Change in Linear Regression Models (2005), che contiene, in appendice, anche un ottimo manuale per l'utilizzo del pacchetto statistico. La library strucchange può essere scaricata dal sito http://cran.R-project.org/.

Figure 4.1: Processi empirici di fluttuazione e M test



cavallo del 2006 e del 2007 e il secondo all'inizio dell'ultimo trimestre del 2008 (come ci volevamo attendere). Identificati i processi di fluttazione restano da stabilire le date in cui sono stimati i *breakpoint*. In molte applicazioni, ivi inclusa l'analisi delle serie storiche, è ragionevole che vi siano m *breakpoint* dove i parametri "saltino" da una relazione funzionale stabile ad un'altra. In questo modo ci sono $m + 1$ segmenti nei quali i parametri sono costanti, di conseguenza un modello di regressione lineare può essere riscritto come

Forex	*m*	0	1	2	3	4
EUR/USD	*BIC*	−1176.09339	−1284.43197	−1281.00815	−1272.08878	−1262.317
	RSS	42.52541	39.29817	39.01486	38.87038	38.74759
	Dating		2008(178)			
GBP/USD	*BIC*	−921.42569	−1078.33604	−1071.42149	−1059.12611	−1047.420
	RSS	50.07165	44.85233	44.62880	44.55991	44.47430
	Dating		2008(184)			
YEN/USD	*BIC*	202.13170	141.14446	145.33316	159.07092	172.2611
	RSS	102.93998	98.06154	97.40237	97.34205	97.24760
	Dating		2008(178)			

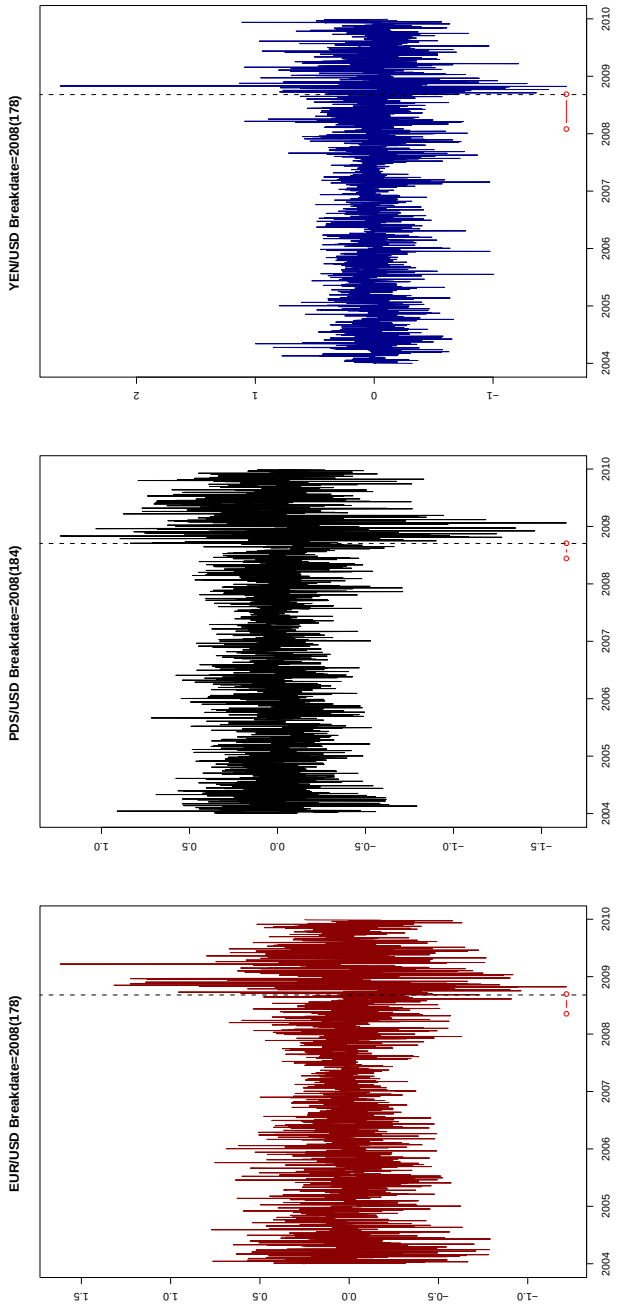
Table 4.1: RSS BIC Breakdating

segue:

$$y = x_i^T \beta_j + u_i \qquad (i = i_{j-1} + 1, \ldots, i_j, \quad j = 1, \ldots, m+1)$$

dove j denota il $j - esimo$ segmento. In pratica i *breakpoint* non sono mai dati esogenamente ma devono essere stimati. La stima dei punti di *break* nelle serie storiche è stata studiata da [2]nel 1998 e estesa successivamente all'analisi di *break* multipli da[3]. L'algoritmo proposto da [? ? ?] per il calcolo dei *breakpoint* ottimali dato il numero di *break* è basato su un approccio di programmazione dinamica. Lo sforzo computazionale più importante è di ricavare una matrice triangolare $RSS(Residual\ sum\ of\ squares)$ che restituisce il quadrato della somma dei residui per un segmento che parte dall'osservazione i e finisce in i' con $i < i^{'}$. I risultati della stima dei *breakpoint* sono riportati in Tab.4.0.15 in cui vengono riportati i risultati del calcolo ottimale dei *breakpoint* e individuate le date corrispondenti. Assieme al risultato della minimizzazione dell'RSS si riporta, per confronto, il calcolo del BIC. Per la serie EUR/USD entrambi i criteri convergono verso la scelta di un *breakpoint* che corrisponde al 22 settembre 2008. Lo stesso risultato si ottiene per i residui della serie YEN/USD. Per la variabile GBP/USD la data del *breakpoint* ottimale selezionato corrisponde al 14 settembre 2008. In Fig.4.2 è possibile apprezzare qualitativamente sull'implementazione di un algoritmo.

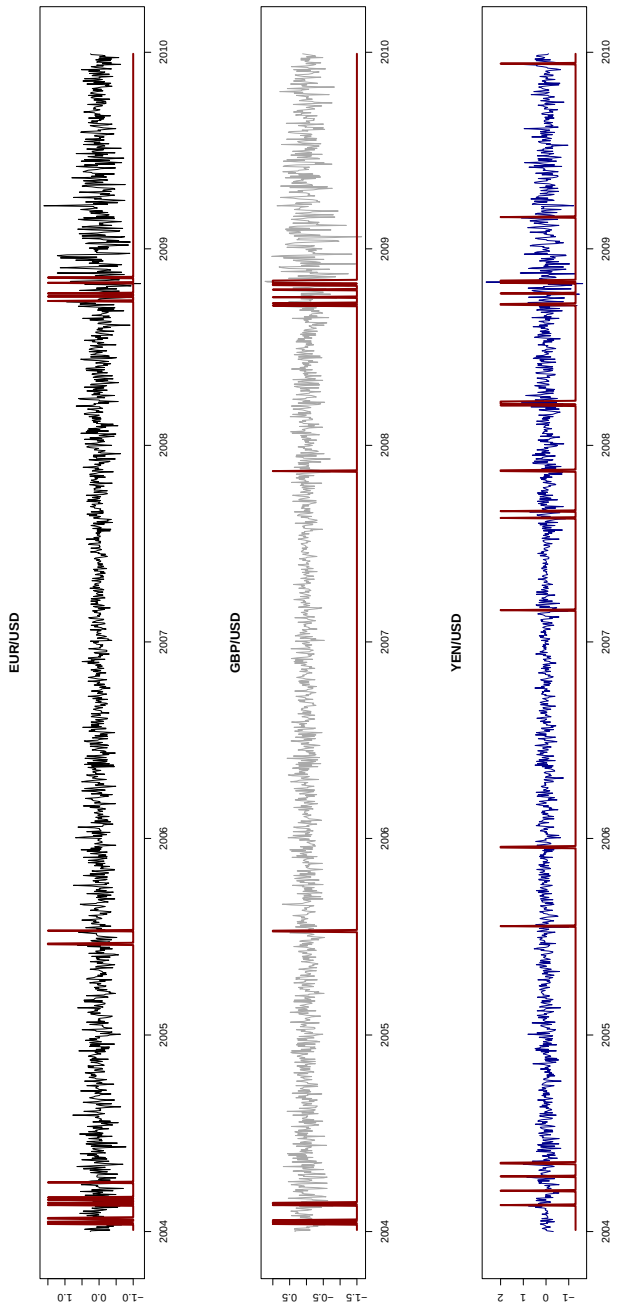
Figure 4.2: Serie storica giornaliera della volatilità dei rendimenti dei tassi di cambio in percentuale con evidenza dei breakpoints, vedi linee tratteggiate su tutti e tre i grafici, come da stima effettuata.



4.0.16 Break strutturali e MS-GARCH.

La combinazione fra la stima dei *break* strutturali, il cui numero e la data sono riportate in Tab.4.0.15, e la stima dei modelli $MS-GARCH(1,1)$, può essere sintetizzata in Fig.4.3 dove sono stati sovrapposti l'andamento rispetto al tempo della serie storica dei rendimenti delle serie storiche osservate e l'evoluzione della probabilità *smooth* secondo l'approccio di Klaassen di cambiare regime di volatilità all'interno dei modelli $MS-GARCH(1,1)$. Osservando i tre diversi grafici e confrontandoli anche con la Fig.4.2, i punti di *break* stimati, pur considerando un intervallo di confidenza adeguato (vedi le considerazioni fatte sopra), cadono temporalmente nei periodi di maggiore volatilità dei rendimenti dei tassi di cambio considerati. Infatti, riprendendo i risultati in Tab.4.0.15, le *breakdates* stimate per l'EUR/USD, GBP/USD e YEN/USD, che sono rispettivamente 178(2008), 184(2008) e 178(2008), rientrano nelle fasi in cui il modello $MS-GARCH(1,1)$ ha stimato una probabilità di essere nel regime di HV. Gli $MS-GARCH$, dunque, "spiegano" gli shock nella volatilità come era logico aspettarsi. D'altronde, come appare graficamente anche in Fig.4.3, la probabilità *smooth* propone diversi salti di regime nel corso del tempo. Questo è particolarmente evidente nel caso in cui la densità dei residui nel regime di altà volatilità proposta sia la $t-Student$ (basta vedere in Parte III la Fig.3.7). Questa caratteristica può essere spiegata facendo diverse considerazioni. La più immediata pare quella legata alla presenza di una densità in grado di raccogliere anche valori anomali nella distribuzione della varianza condizionata dei processi. Il che potrebbe anche spiegare il fatto per cui i modelli $MS-GARCH(1,1)$ con $t-Student$ in HV presentino un criterio AIC migliore degli altri (vedi Tab.3.0.13-3.0.14). Interessante è anche il commento in proposito di Haas [[9], p. 515] che, sulla base dell'osservazione dei propri risultati, sostiene che l'instabilità parametrica possa essere dovuta all'inappropriatezza dei processi markoviani nel descriverla o dal fatto che la lunghezza della serie temporale oggetto di studio sia troppo lunga per modelli con due soli regimi per spiegare la variabilità temporale dei parametri.

Figure 4.3: Nei grafici in figura sull'asse delle ordinate è rappresentata la probabilità di essere nel regime di LV. Sull'asse delle ascisse è rappresenato il tempo t. La probabilità *smooth* è stata calcolata secondo l'approccio di Klaassen (vedi eq.2.7). Le distribuzioni proposte sono di tipo Normale per il regime di LV e per il regime di HV. Sull'asse secondario sono evidenziate le frequenze dei salti di regime (linea rossa) rispetto al tempo t. Gli iniziali frequenti salti di regime possono essere non considerati.



Poi la numerosità di *break* strutturali evidenziati dagli $MS-GARCH$ può essere spiegata dalla presenza di *break* "spuri" stimati lungo la serie storica, come argomentato nel già citato articolo di [7]. Come si è visto Granger discute sulla mispecificazione fra modelli integrati $I(1)$ modelli con *break* strutturali, sostenendo che i primi possono essere causati dalla presenza dei secondi lungo le serie storiche. Gli stimatori dei processi *Markov Switching* possono identificare dei cambi strutturali lungo la serie anche dove non ci sono. L'errata valutazione del numero di *break* lungo la serie è complicata dal fatto che i test sui *break* strutturali visti nel paragrafo precedente non sono in grado di trovare il numero ottimo di *shock* nel processo per la volatilità.

Capitolo 5

Conclusioni

I risultati riportati in Fig.4.3 chiariscono come i modelli $MS - GARCH$ spieghino i fenomeni finanziari meglio dei modelli $GARCH$. Questa osservazione è giustificata dalla presenza di *structural change* nei processi considerati che, *ex post,* sono colti dai modelli *Regime Switching* grazie alla presenza di una variabile latente che descrive il passaggio di stato da un regime di volatilità all'altro in accordo ad un processo markoviano. D'altronde l'osservazione dei risultati relativi all'analisi delle serie storiche compiuta evidenzia come i modelli MS-GARCH descrivano un numero di passaggi di stato elevati e non legati solo alla presenza di *break* strutturali in senso proprio. Questo può dipendere dalla presenza di valori anomali nelle serie, il che è giustificato dalla loro natura finanziaria, e dalla minore o maggiore sensibilità di risposta a detti valori dei modelli $MS - GARCH$, il che, a sua volta, dipende dal tipo di distribuzione associata agli ϵ_t. Queste considerazioni possono essere associate ai fenomeni reali. Riassumendo i risultati raccolti, è possibile concludere che la volatilità delle serie storiche EUR/USD e GBP/USD è inferiore a quella della serie YEN/USD non tanto per la presenza di uno o più *break* strutturali che sembrano comuni sia in numero che per durata agli altri due processi osservati (vedi Figg. 4.2-3.6-3.7 ma anche Tab. 4.0.15); ma quanto per la tendenza più elevata a cambiare regime di volatilità, il che lega la maggiore instabilità del tasso di cambio YEN/USD alla numerosità di *oulier* nella serie. La distinzione fra *shock* di sistema e valori anomali non

è solo un problema di "semantica" ma può essere attribuito alla presenza di *spurius break* (su questo tema conviene citare ancora l'articolo di Granger [7]) di cui si è discusso in 4.0.16.

Questioni aperte. L'idea di adottare modelli *Regime Switching* per spiegare la presenza di *break* strutturali è nata dallo studio della curva della varianza del tasso di cambio fra EUR/USD. Le prime stime e verifiche sono nate proprio dall'analisi di un periodo campionario di questa serie storica durante il quale fosse legittimo ipotizzare la presenza di uno *shock*. Su questo si possono vedere i risultati riportati sia dall'analisi dei processi empirici di fluttuazione in fig. 4.1 e dai risultati dei test per la presenza e la datazione dei *break* strutturali presenti in tab. 4.0.15. Naturalmente è difficile fare inferenza analizzando solo una serie storica, per questo si è pensato di allargare l'analisi ad altre due serie storiche relative alla stessa *commodity*. Ciononostante il passo successivo potrebbe essere quello di simulare un processo per la varianza condizionata della classe *Switching Regime* attraverso simulazioni del tipo Monte Carlo care alla statistica bayesiana. D'altronde l'utilizzo degli algoritmi di stima MCMC, sempre in ambito bayesiano, potrebbero essere adottati per la stima dei parametri e dare qualche informazione aggiuntiva sulle traiettorie parametriche. Su questo punto si può consultare Ardia[1] e il suo approccio bayesiano alla stima dei modelli $MS-GARCH$ tramite MCMC. Personalmente aggiungo che i metodi di stima di tipo classico sono particolarmente costosi in termini computazionali e prevedono un accurato *tuning* dei parametri di partenza[1]. Per quanto riguarda il periodo di osservazione l'analisi condotta nella tesi insieme ai commenti ai risultati di altre applicazioni, su questo si veda ancora Haas [9] e Marcucci [9, 15] e quanto riportato in 3.0.14, occorre fare attenzione alla volatilità della serie prescelta attraverso analisi storiche preliminari adeguate. Su questo occorrerebbe simulare questi processi anche imponendo la presenza di più di due regimi di volatilità per verificare se la non corretta specificazione del fenomeno, vedi risultati sulla serie storica YEN/USD, dipenda dal modello scelto.

[1] Su questo la letteratura empirica propone soluzioni differenziate.

Bibliografia

[1] Ardia D (2008). "Financial Risk Management with Bayesian Estimation of GARCH Models." *Lectures Notes in Economics and Mathematical System,* Springer-Verlag Berlin Heidelberg.

[2] Bai J., Perron P. (1998). "Estimating and Testing Linear Models With Multiple Structural Changes." *Econometrica,* 66, 47-78.

[3] Bai J., Perron P. (2003). "Computational and Analysis of Multiple Structural Change Models." *Journal of Apllied Econometrics,* 18, 1-22.

[4] Bollerslev T (1986). "Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity." *Journal of Econometrics*, 31(3), 307-327.

[Haas. 2004b] Diebould X. F, Inoue A (2001). "Long Memory and regime Switching." *Journal of Econometrics,* 105, 131-159.

[6] Glosten LR, Jaganathan R, Runkle DE (1993). "On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks." *Journal of Finance,* 48(5), 1779-1801.

[7] Granger W.J, Hyung N (2004). "Occasional structural breaks and long memory with an application to the S&P 500 absolute stock returns." *Journal of Empirical Finance,* 11, 399-421.

[8] Gray SF (1996). "Modeling the Conditional Distribution of Interest Rate as a Regime-Switching Process." *Journal of Financial Economics, 42(1)*, 27-62.

[9] Haas M., Mittnik S., Paolella MS (2004). "A New Approach to Markov-Switching GARCH Models." *Journal of Financial Econometrics,* 2(4), 493-530.

[Haas. 2004b] Haas M., Mittnik S., Paolella MS (2004). "Mixed Normal Conditional Heteroskedasticity." *Journal of Financial Econometrics,* 2(2), 211-250.

[11] Hamilton JD, Susmel R (1994). "Autoregressive Conditional Heteroskedasticity and Changes in Regime." *Journal of Econometrics,* 64(1-2), 307-333.

[12] Jacquier E, Polson NG, Rossi PE (1994). "Bayesian Analysis of Stochastic Volatility Models." *Journal of Business and Economic Statistics,* 12(4), 371-389.

[13] Klaassen F (2002). "Improving GARCH Volatility Forecast with Regime-Switching GARCH." *Empirical Economics,* 27(2), 363-394.

[14] Lamoureux CG, Lastrapes WD (1990). "Persistence in Variance, Structural Change, and the GARCH Model." *Journal of Business and Economics Statistics,* 8(2), 225-243.

[15] Marcucci (2005). "Forecasting Stock Market Volatility with Regime-Switching GARCH Models." *Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics,* 9(4), 1-53.

[16] Nelson DB (1990). "Stationarity and Persistence in the GARCH Model." *Econometric Theory,* 6(3), 318-334.

[17] Timmermann A (2000). "Moments of Markov Switching Models." *Journal of Econometrics 96,* 75-111.

Appendice

```
########### UPLOAD DATI ####################
setwd("C:\\Dataset")
library(tseries)
library(fGarch)
library(MASS)
library(xtable)
y=read.ts("FOREX 20040102 20091224_20091224.txt", header = F, sep= "")
r=read.ts("DATASET 20100126.txt", header = F, sep= "")
y=ts(y,start=2004,frequency=260)
r=ts(r,start=2004,frequency=260)
n=length(r[,1])
m=matrix(0,n,3)
m[,1]=r[,1]
m[,2]=r[,2]
m[,3]=r[,3]
m=ts(m,start=2004,frequency=260)
e=y[,1]
p=y[,2]
c=y[,3]
d=y[,4]
j=y[,5]
######## GRAFICI SERIE SELEZIONATE ########
matplot(m,type="l",lwd=2,ylab="",col=c(1,2,20))
legend("left", c("EUR/USD", "PDS/EUR", "YEN/USD"),col = c(1,2,20),lty = c(1, 1, 1))
plot(m,xlab = "", ylab = "",main="")
par(mfrow=c(1, 3))
plot(e, col="dark red",xlab="", ylab="", main="EUR/USD")
plot(p,xlab="", ylab="", main="PDS/USD")
plot(c, col="dark blue",xlab="", ylab="", main="YEN/USD")
########## TABELLE ######################
mat<-round(matrix(0,3,6),4)
mat[1,]=summary(e)
mat[2,]=summary(p)
mat[3,]=summary(c)
rownames(mat)<-c("EUR/USD","PDS/USD","YEN/USD")
colnames(mat)<-c("min","1st Qu.","Median","Mean","3rd Qu.","Max")
print(xtable(mat), type="latex", sanitize.text.function = function(x){x})
```

```
######## ISTOGRAMMI #######################
par(mfrow=c(1,3))
hist.scott(e,prob=T,xlim=c(-2,2),xlab="",ylab="",main="EUR/USD", col="dark gray")
lines(density(e),col="darkred",lwd=3,xlab="",ylab="") hist.scott(p,prob=T,xlim=c(-2,2),xlab="",yl
lines(density(p),col="darkred",lwd=2,xlab="",ylab="")
hist.scott(c,prob=T,xlab="",ylab="",main="YEN/USD",col="darkgray")
lines(density(c),col="dark red",lwd=2,xlab="",ylab="")

#######STIMA MODELLI ARMA-GARCH ############

#####STIMA DEL MODELLO PER LA MEDIA DEI RENDIMENTI ######
arma.e=arima(e, order = c(1, 0,1),include.mean=F) #ARMA(1,1)
AIC(arma.e)
arma.p=arima(p, order = c(0, 0,1),include.mean=F) #MA(1)
AIC(arma.p)
arma.c=arima(c,order=c(0,0,1),include.mean=F) #MA(1)#
AIC(arma.c)
##### PER LA SERIE e,p,c ########################################
res.e=arma.e$res
res.p=arma.p$res
res.c=arma.c$res
res.e=as.vector(res.e)
res.p=as.vector(res.p)
res.c=as.vector(res.c)
is.vector(res.e)
is.vector(res.p)
is.vector(res.c)
z.e=res.e
z.p=res.p
z.c=res.c
res.st=function(x){
m=mean(x)
s=var(x)^0.5
z=(x-m)/s return(z)
}
res.e=res.st(z.e)
res.p=res.st(z.p)
res.c=res.st(z.c)
res.e=ts(res.e,start=2004,frequency=260)
res.p=ts(res.p,start=2004,frequency=260)
res.c=ts(res.c,start=2004,frequency=260)
par(mfrow=c(2, 3))
plot(res.e,type="l",main="EUR/USD",col="dark red")
abline(h=2.5)
plot(res.p,type="l",main="PDS/USD")
abline(h=2.5)
plot(res.c,type="l",main="YEN/USD",col="dark blue")
abline(h=2.5)
acf(res.e,main="")
acf(res.p,main="")
```

```
acf(res.c,main="")
jb.e=jarque.bera.test(res.e)
jb.p=jarque.bera.test(res.p)
jb.c=jarque.bera.test(res.c)
lb.e=Box.test(res.e,lag=12,type="Ljung-Box")
lb.p=Box.test(res.p,lag=12,type="Ljung-Box")
lb.c=Box.test(res.c,lag=12,type="Ljung-Box")
###### i test di jb rifiutato probabilmente per presenza di valori anomali #####
res2.e=res.e^2
res2.p=res.p^2
res2.c=res.c^2
par(mfrow = c(1, 3))
acf(res2.e,main="EUR/USD",col="dark red",xlab="",ylab="")
acf(res2.p,main="PDS/USD", xlab="",ylab="")
acf(res2.c,main="YEN/USD", col="dark blue",xlab="",ylab="")
####chiara presenza di autocorrelazione #######
fit.e=garchFit(~arma(1,1)+garch(1,1),data=e,include.mean=F)
summary(fit.e)
garch.e=fit.e@residuals
acf(garch.e)
pacf(garch.e)
fit.p=garchFit(~arma(0,1)+garch(1,1),data=p,include.mean=F)
summary(fit.p)
garch.p=fit.p@residuals
acf(garch.p)
pacf(garch.p)
fit.c=garchFit(~arma(0,1)+garch(1,1),data=c,include.mean=F)
summary(fit.c)
garch.c=fit.c@residuals
acf(garch.c)
pacf(garch.c)
######Grafici#######
garch.e=ts(garch.e,start=2004,frequency=260)
garch.p=ts(garch.p,start=2004,frequency=260)
garch.c=ts(garch.c,start=2004,frequency=260)
par(mfrow = c(2, 3))
plot(garch.e,type="l",main="EUR/USD",col="darkred",xlab="",ylab="")
abline(h=2.5)
plot(garch.p,type="l",main="PDS/USD")
abline(h=2.5)
plot(garch.c,type="l",main="CNY/USD",col="dark blue")
abline(h=2.5)
acf(garch.e,main="",xlab="",ylab="")
acf(garch.p,main="",xlab="",ylab="")
acf(garch.c,main="",xlab="",ylab="")

######Stima Modelli MS-GARCH(1,1) #####
######NORMALE VS T-STUDENT - KLAASSEN #

#### SERIE EUR/USD ####
```

```
z=z.e
####### SETTAGGIO PARAMETRI INIZIALI #####
h10=var(z)
#### LV VARIANZA DELL'INTERTO CAMPIONE ###
h20=var(z[1000:1400])
#### HV VARIANZA DI UN CAMPIONE SCELTO CON PRESUNTA ALTA VOLATILITA' ####
##### STIMA PARAMETRI GARCH DI PARTENZA ######
fitx=garchFit(~garch(1, 1),
data = z, include.mean=F,trace=F) fity=garchFit(~garch(1, 1),
data = z[1000:1400], include.mean=F,trace=F)
parx=coef(fitx)
pary=coef(fity)
pary=matrix(0,1,3)
pary[1,1]=coef(fity)[1]
pary[1,2]=coef(fity)[2]
pary[1,3]=coef(fity)[3]
#matrice probabilità transizione#
P=matrix(0,2,2)
a=P[1,1]=0.74
b=P[2,1]=0.26
c=P[2,2]=0.28
d=P[1,2]=0.72
p=(1-P[2,2])/(2-P[1,1]-P[2,2])
q=(1-P[1,1])/(2-P[1,1]-P[2,2])
Beta=matrix(0,nrow = 2, ncol = 3)
a01=Beta[1,1]=parx[1]
a11=Beta[1,2]=parx[2]
b1=Beta[1,3]=parx[3]
a02=Beta[2,1]=pary[1]
a12=Beta[2,2]=pary[2]
b2=Beta[2,3]=pary[3]
############### stadio1 varianza e densità ##################
h1=Beta[1,1]+Beta[1,2]*(z[1])^2+Beta[1,3]*h10
h2=Beta[2,2]+Beta[2,3]*(z[1])^2+Beta[2,3]*h20
f1=dnorm(z[1],mean=0,sd=sqrt(h1),log=F)
f2=dnorm(z[1],mean=0,sd=sqrt(h2),log=F)
p1=p
p2=q
log(f1*p1)
log(f2*p2)
####LOOP MLE E PROBABILITA' EX ANTE ######
MLENT=function(f1,f2,p1,p2,h1,h2,a,c,Beta,z,n){
m=matrix(nrow = n, ncol = 12)
for(t in 2:n){
p1[t]=a*(f1[t-1]*p1[t-1]/(f1[t-1]*p1[t-1]+f2[t-1]*p2[t-1]))
+c*(f2[t-1]*p2[t-1]/(f1[t-1]*p1[t-1]+f2[t-1]*p2[t-1]))
p2[t]=1-p1[t]
h1[t]=Beta[1,1]+Beta[1,2]*(z[t-1])^2+Beta[1,3]*h1[t-1]                    h2[t]=Beta[2,1]+Beta[2,2]*
f1[t]=dnorm(z[t],mean=0,sd=sqrt(h1[t]),log=F)
f2[t]=dnorm(z[t],mean=0,sd=sqrt(h2[t]),log=F)
```

```
d1=c(z,z[1:t])
d2=c(z[800:1400],z[1:t])
fitx=garchFit(formula=~garch(1,1),data=d1,include.mean=F,trace=F)
fity=garchFit(formula=~garch(1,1), data=d2, include.mean=F, trace=F)
Beta[1,]=coef(fitx)
Beta[2,]=coef(fity)
m[t,7:9]=Beta[1,]
m[t,10:12]=Beta[2,]
m[t,1]=p1[t]
m[t,2]=p2[t]
m[t,3]=f1[t]
m[t,4]=f2[t]
m[t,5]=h1[t]
m[t,6]=h2[t]
}
m
}
n=length(z)
mle2=MLENT(f1,f2,p1,p2,h1,h2,a,c,Beta,z,n)
### matrice mle2 contiene le stime####

mle2[1,1]=p
n=length(z.e)
### Smoothing probability ####
SMPRT=function(sp1,mle2,n){
f=matrix(nrow = n, ncol = 1)
for(t in 2:n){
sp1[t]=(mle2[t-1,3]*mle2[t-1,1])/(mle2[t-1,3]*mle2[t-1,1]+mle2[t-1,4]*mle2[t-1,2])
f[t,1]=sp1[t]
}
f
}
fr2=SMPRT(p,mle2,n)
sm1.e=fr2[,1]
sr1.e=ifelse(sm1.e<=0.47999,1,0)
sr2.e=ifelse(sm1.e>=0.47999,-1,1.5)
sm1.e=ts(sm1.e,start=2004,frequency=260)
sr1.e=ts(sr1.e,start=2004,frequency=260)
sr2.e=ts(sr2.e,start=2004,frequency=260)
#####fine cicli####
###########Grafici conclusivi######
par(mfrow = c(3, 1))
plot(sm1.e,main="Smooth Probability EUR/USD", col="dark blue",xlab="",ylab="")
plot(sm1.p,main="Smooth Probability GBP/USD", col="dark gray",xlab="",ylab="")
plot(sm1.c,main="Smooth Probability YEN/USD", col="dark red",xlab="",ylab="")
par(mfrow = c(3, 1))
plot(sr1.e,main="Smooth Probability EUR/USD",col="dark blue",xlab="",ylab="")
plot(sr1.p,main="Smooth Probability GBP/USD",col="dark gray",xlab="",ylab="")
plot(sr1.c,main="Smooth Probability YEN/USD", col="dark red",xlab="",ylab="")
z.e=res.e=ts(res.e,start=2004,frequency=260)
```

```
z.p=res.p=ts(res.p,start=2004,frequency=260)
z.c=res.c=ts(res.c,start=2004,frequency=260)
par(mfrow = c(3, 1))
plot(z.e, type="l",lwd=1,main="EUR/USD",xlab="",ylab="")
lines(sr2.e,col="dark red",lwd=2,xlab="",ylab="")
plot(z.p, type="l",lwd=1,main="GBP/USD", col="dark gray",xlab="",ylab="")
lines(sr2.p,col="dark red",lwd=2,xlab="",ylab="")
plot(z.c, type="l",lwd=1,main="YEN/USD", col="dark blue",xlab="",ylab="")
lines(sr2.c,col="dark red",lwd=2,xlab="",ylab="")
##########valutazione persistenza############
mle2[1559,8]+mle2[1559,9]
# LV mle3[1559,8]+mle3[1559,9] mle4[1559,8]+mle4[1559,9]
mle2[1559,11]+mle2[1559,12]
# HV mle3[1559,11]+mle3[1559,12] mle4[1559,11]+mle4[1559,12]

##### STIMA MS-GARCH HAAS #########

###### FUNZIONE DI VEROSIMIGLIANZA ##################
ll=function(p){
setwd("C:\\Dataset")
library(tseries)
y=read.ts("FOREX_20040102_20091224_20091224.txt")
y=ts(y,start=2004,frequency=260)
ed=y[,1]
arma1=arima(ed, order = c(1, 0,1),include.mean=F)
res=arma1$res
res=as.vector(res)
is.vector(res)
z=res
theta=matrix(0,6,1)
theta[1]=p[1]
theta[2]=p[2]
theta[3]=p[3]
theta[4]=p[4]
theta[5]=p[5]
theta[6]=p[6]
P=matrix(0,2,2) #matrice probabilità transizione#
a=P[1,1]=0.70#0.74
b=P[2,1]=0.30#0.26
c=P[2,2]=0.18#0.28
d=P[1,2]=0.82#0.72
p=(1-P[2,2])/(2-P[1,1]-P[2,2])
q=(1-P[1,1])/(2-P[1,1]-P[2,2])
Beta=matrix(0,nrow = 2, ncol = 3)
a0=Beta[,1]=c(theta[1],theta[2])
a1=Beta[,2]=c(theta[3],theta[4])
dim(diag(2))
b=diag(1,2,2)
b[1,1]=Beta[1,3]=theta[5]
b[2,2]=Beta[2,3]=theta[6]
```

```
##### Definizioni matrici ################
T=length(z)
ksi=matrix(1,2,T+1)
xsi=matrix(1,2,T)
h=matrix(1,2,T)
loglik=matrix(0,T,1)
h[1,1]=var(z)
h[2,1]=var(z)*1.02
ksi[,2]=c(p,q)
loglik =matrix(,T,1)
LL=matrix(0,2,1)
ones=matrix(1,1,2)
#### VEROSIMIGLIANZA ###############
lmle=matrix(0,T+1,2)
for(t in 2:T) {
                h[,t]=a0+a1*z[t]^2+b%*%h[,t-1]
                LL[1,1]= ksi[1,t]*dnorm(z[t],0,sqrt(h[1,t]))
                LL[2,1]= ksi[2,t]*dnorm(z[t],0,sqrt(h[2,t]))
                xsi[,t]=LL/sum(LL)
                ksi[,t+1]=P%*%xsi[,t]
                loglik[t,1]=log(ones%*%LL)
                lmle[t,1]=loglik[t,1]
                lmle[t,2]=ksi[1,t+1] }
lmle ones1=matrix(1,1,T-1)
L = -(ones1%*%lmle[2:T]/T)
}
nlminb(c(0.0001757441,0.0009380483,0.0341589067,0.0443088184,0.9173645376,0.9510287350),ll,      l
################


###### ANALISI&TEST BREAK STRUTTURALI ########


####DATI#####
library(strucchange)
z.e=res.e
z.p=res.p
z.c=res.c
z.e=ts(z.e,start=2004,frequency=260)
z.p=ts(z.p,start=2004,frequency=260)
z.c=ts(z.c,start=2004,frequency=260)
################################
m5=efp(z.e^2 ~ 1,type="OLS-CUSUM",data=z.e^2)
bound.m5=boundary(m5,alpha=0.005)
m6=efp(z.p^2 ~ 1,type="OLS-CUSUM",data=z.p^2)
bound.m6=boundary(m6,alpha=0.005)
m7=efp(z.c^2 ~ 1,type="OLS-CUSUM",data=z.c^2)
bound.m7=boundary(m7,alpha=0.005)
par(mfrow = c(1, 3))
plot(m5,main="OLS-CUSUM test EUR/USD",col="dark red",xlab="")
```

```
plot(m6,main="OLS-CUSUM test PDS/USD",xlab="",ylab="")
plot(m7,main="OLS-CUSUM test YEN/USD",col="dark blue",xlab="", ylab="")
## convenience functions #
# set up a normal regression model which #
# explicitely also models the variance
normlm <- function(formula, data = list()) {
rval <- lm(formula, data = data)
class(rval) <- c("normlm", "lm")
return(rval)
}
estfun.normlm <- function(obj) {
res <- residuals(obj)
ef <- NextMethod(obj)
sigma2 <- mean(res^2)
rval <- cbind(ef, res^2 - sigma2)
colnames(rval) <- c(colnames(ef), "(Variance)")
return(rval)
}
## MODELLO NORMALE PER I RESIDUI #####
m1 <- gefp(z.e ~ 1, fit = normlm, vcov = meatHAC, sandwich = FALSE)
m2 <- gefp(z.p ~ 1, fit = normlm, vcov = meatHAC, sandwich = FALSE)
m3 <- gefp(z.c ~ 1, fit = normlm, vcov = meatHAC, sandwich = FALSE)
par(mfrow = c(1, 3))
plot(m1,main="M-fluctuation test EUR/USD",col="dark red",xlab="")
plot(m2,main="M-fluctuation test PDS/USD",xlab="",ylab="")
plot(m3,main="M-fluctuation test YEN/USD",col="dark blue",xlab="", ylab="")
## PRESENZA DI BREAK POINT ##
dating bp.e <- breakpoints(I(z.e^2) ~ 1)
bp.p <- breakpoints(I(z.p^2) ~ 1)
bp.c <- breakpoints(I(z.c^2) ~ 1)
plot(bp.e)
## DUE SHOCK NELLA VARIANZA ####
bp.e
bp.p
bp.c
### GRAFICI ##########
n=length(z.e)
par(mfrow = c(1, 3))
plot(z.e, main="EUR/USD Breakdate=2008(178) ",col="dark red",xlab="",ylab="")
abline(v = time(z.e)[bp.e$breakpoints], lty = 2)
lines(time(z.e)[confint(bp.e)$confint[c(1,3)]], rep(min(z.e), 2), col = 2, type = "b")
plot(z.p, main="PDS/USD Breakdate=2008(184) ",ylab="",xlab="")
abline(v = time(z.p)[bp.p$breakpoints], lty = 2)
lines(time(z.p)[confint(bp.p)$confint[c(1,3)]], rep(min(z.p), 2), col = 2, type = "b")
plot(z.c, main="YEN/USD Breakdate=2008(178) ",col="dark blue",xlab="", ylab="")
abline(v = time(z.c)[bp.c$breakpoints], lty = 2)
lines(time(z.c)[confint(bp.c)$confint[c(1,3)]], rep(min(z.c), 2), col = 2, type = "b")
```

Elenco delle figure

2.1 Tracciato densità di una distribuzione N(0,1) a confronto di una t-Student 26

3.1 Serie storica giornaliera degli andamenti dei tassi di cambio rilevati giornalmente nel periodo compreso fra il 01/01/2004 e il 23/12/2009. Dunque 1559 osservazioni per ciascuna serie storica. 33

3.2 Serie storica giornaliera della volatilità dei rendimenti dei tassi di cambio in percentuale. I grafici non sono rappresentati nella stessa scala volutamente. I dati sono giornalieri e la prima osservazione è relativa al 2/01/2004 mentre l'ultima è del 24/12/2009. Tutti e tre i processi sono descritti sulla base dell'eq.1.1 vista in Parte I. 34

3.3 Serie storica giornaliera della volatilità dei rendimenti dei tassi di cambio in percentuale 35

3.4 Serie storica giornaliera della volatilità dei rendimenti dei tassi di cambio in percentuale 37

3.5 Serie storica giornaliera dei residui dei modelli $ARMA(1,1)-GARCH(1,1)$, $MA(1)-GARCH(1,1)$ e $MA(1)-GARCH(1,1)$ rispettivamente per le serie EUR/USD, GBP/USD e YEN/USD con relative stime per le ACF sui residui. 40

3.6 Nei grafici in figura sull'asse delle ordinate è rappresentata la probabilità di essere nel regime di LV. Sull'asse delle ascisse è rappresenato il tempo t. La probabilità *smooth* è stata calcolata secondo l'approccio di Klaassen (vedi 2.7). Le distribuzioni proposte sono di tipo Normale per entrambi i regimi ipotizzati per la varianza condizionata. 46

3.7 Nei grafici in figura sull'asse delle ordinate è rappresentata la probabilità di essere nel regime di LV. Sull'asse delle ascisse è rappresenato il tempo t. La probabilità *smooth* è stata calcolata secondo l'approccio di Klaassen (vedi eq.2.7). Le distribuzioni proposte sono di tipo Normale per il regime di LV e tipo t-Student per il regime di HV. 47

4.1 Processi empirici di fluttuazione e M test 51

4.2 Serie storica giornaliera della volatilità dei rendimenti dei tassi di cambio in percentuale con evidenza dei breakpoints, vedi linee tratteggiate su tutti e tre i grafici, come da stima effettuata. 53

4.3 Nei grafici in figura sull'asse delle ordinate è rappresentata la probabilità di essere nel regime di LV. Sull'asse delle ascisse è rappresenato il tempo t. La probabilità *smooth* è stata calcolata secondo l'approccio di Klaassen (vedi eq.2.7). Le distribuzioni proposte sono di tipo Normale per il regime di LV e per il regime di HV. Sull'asse secondario sono evidenziate le frequenze dei salti di regime (linea rossa) rispetto al tempo t. Gli iniziali frequenti salti di regime possono essere non considerati. 55

Elenco delle tabelle

3.1 Stima modelli classe $ARMA(p,q)$ 38

3.2 Stime Modelli $ARMA - GARCH$ 39

3.3 Stime parametri $MS - GARCH$ - algoritmo di Klaassen. Sulle colonne, rispettivamente, ω, α e βcorrispondono ai parametri dei modelli $GARCH(1,1)$. Per ogni serie storica sono riportate le stime per regime $\Longrightarrow$*Low Volatility* (LV) e *High Volatility* (HV) a cui sono associate le distribuzioni di probabilità di tipo Normale ($\Rightarrow N(0,\sigma)$ ovvero t-Student ($\Rightarrow t(0,v,\sigma)$. La colonna $\rho = \alpha + \beta$ riporta i valori stimati per la persistenza dei modelli $GARCH(1,1)$. Inoltre sono indicati i valori per i vettori delle probabilità non condizionate, che sono rispettivamente: $\pi_{LV} = (1-\pi_2)/(2-\pi_1-\pi_2)$ e $\pi_{HV} = (1-\pi_1)/(2-\pi_2-\pi_1)$. Oltre al valore della funzione di massima verosimiglianza ($\Rightarrow l$) è riportato il criterio di selezione AIC. . . . 45

3.4 Stime parametri $MS - GARCH$. Sulle colonne, rispettivamente, ω, α e βcorrispondono ai parametri dei modelli $GARCH(1,1)$. Per ogni serie storica sono riportate le stime per regime $\Longrightarrow$*Low Volatility* (LV) e *High Volatility* (HV) a cui sono associate le distribuzioni di probabilità di tipo Normale ($\Rightarrow N(0,\sigma)$ .La colonna $\rho = \alpha + \beta$ riporta i valori stimati per la persistenza dei modelli $GARCH(1,1)$. Inoltre sono indicati i valori per i vettori delle probabilità non condizionate, che sono rispettivamente: $\pi_{LV} = (1-\pi_2)/(2-\pi_1-\pi_2)$ e $\pi_{HV} = (1-\pi_1)/(2-\pi_2-\pi_1)$. Oltre al valore della funzione di massima verosimiglianza ($\Rightarrow l$) è riportato il criterio di selezione AIC. 49

4.1 RSS BIC Breakdating 52