ROMA TRE
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI

Ingegneria Meccanica e Industriale

XXVII CICLO

DEL CORSO DI DOTTORATO

Analisi strutturale di dentature a profilo non convenzionale

Dottorando:

Andrea Chiaramonte Radicella

Docente Guida:

Prof. Stefano Marini

Coordinatore:

Prof. Edoardo Bemporad

Indice

I. Introduzione pag. 6

II. Simbologia pag. 7

III. Cenni storici pag. 14

IV. Principali caratteristiche delle ruote dentate a profilo asimmetrico pag. 16

V. Obiettivi pag. 22

Capitolo I: La tecnologia per il taglio delle ruote dentate

1.1 Il taglio delle ruote dentate: generalità pag. 23

1.2 Dentatrice a creatore sistema *Pfauter* pag. 25

1.3 Dentatrice ad utensile circolare sistema Fellows pag. 26

1.4 Dentatrice stozzatrice sistemi Sunderland e Maag pag. 27

1.5 Costruzione di ruote dentate con profilo del dente asimmetrico pag. 28

Capitolo II: Caratteristiche geometriche delle ruote dentate asimmetriche

2.1 Caratteristiche generali del dente asimmetrico pag. 29

2.2 Parametri variabili nel taglio di ruote dentate asimmetriche pag. 32

2.2.1 Variazione del secondo angolo di pressione pag. 33

2.2.2 Variazione del raggio di arrotondamento di testa dell'utensile pag. 36

2.3 Effetto del fenomeno dell'interferenza nelle dentature ad evolvente pag. 40

2.4 Determinazione analitica del profilo del dente pag. 44

2.4.1 Arco di evolvente del fianco attivo pag. 47

2.4.2 Profilo di raccordo con la circonferenza interna pag. 53

2.4.3 Arco di circonferenza del dente pag. 57

2.4.4 Arco di circonferenza interna pag. 59

Capitolo III: La discretizzazione del dente

3.1 Il metodo di calcolo agli elementi finiti: generalità pag. 60

3.2 Analisi delle condizioni al contorno e dei requisiti del reticolo di discretizzazione pag. 66

3.2.1 La sollecitazione dovuta alla forza di contatto pag. 66

3.2.2 Il sistema dei vincoli pag. 67

3.2.3 Caratteristiche generali del reticolo di discretizzazione pag. 68

3.3 Suddivisione del profilo del dente pag. 70

3.4 Caratteristiche delle uscite del programma di discretizzazione del dente pag. 75

Capitolo IV: Il programma di discretizzazione del dente

Premessa pag. 77

4.1 Il principio di suddivisione del profilo pag. 78

4.2 Definizione per punti del profilo del dente pag. 88

4.3 Individuazione degli archi di circonferenza perpendicolari al profilo nei punti di egual quota pag. 91

4.4 Principio di suddivisione degli archi pag. 97

4.5 Individuazione del reticolo di discretizzazione in zone con profili aventi tangente di eguale segno pag. 100

4.6 La discretizzazione del profilo in prossimità di punti angolosi pag. 102

4.6.1 Soluzione nel caso di archi secanti pag. 103

4.6.2 Soluzione nel caso di zone con diradamento del reticolo a causa della curvatura opposta degli archi adiacenti pag. 104

4.7 Controllo delle dimensioni degli elementi pag. 105

4.8 Il formato di uscita del programma di calcolo pag. 106

4.9 L'immissione dei dati nel programma di calcolo ed il richiamo dei risultati pag. 107

Capitolo V: L'analisi del dente con il metodo di calcolo FEM

Introduzione pag. 121

5.1 La strategia di indagine seguita e la raffrontabilità dei risultati pag. 122

5.2 Analisi degli effetti della variazione del secondo angolo di pressione pag. 125

5.3 Ricerca del dente asimmetrico con la medesima resistenza meccanica di un dato dente simmetrico pag. 138

5.4 La riduzione di ingombro negli ingranaggi asimmetrici pag. 151

Capitolo VI: Considerazioni conclusive

6.1 Il dimensionamento degli ingranaggi asimmetrici pag. 156

6.2 Le proprietà del dente asimmetrico ed i possibili settori di impiego pag. 157

Conclusioni pag. 159

Bibliografia pag. 162

I. Introduzione

Il presente studio di ricerca, si propone come obiettivo quello di dare un contributo all'evoluzione nel campo delle ruote dentate.

Le ruote dentate, note fin dall'antichità in diverse forme ed a diversi livelli di evoluzione, rappresentano al giorno d'oggi uno degli elementi costruttivi delle macchine maggiormente diffuso sia in termini di unità in esercizio, sia in termini di varietà di campi di impiego ed utilizzo.

Con tali premesse si comprende come una minima evoluzione in questo settore comporti notevoli vantaggi in termini economici ed ambientali: anche il minimo aumento di rendimento, la minima riduzione di peso ed ingombri, la minima riduzione di utilizzo di materie prime ed energia, moltiplicata per ogni singola ruota dentata in esercizio consente notevoli vantaggi dunque obbliga e merita di essere esplorata.

Nel presente studio si analizzerà dapprima lo stato dell'arte nel settore delle ruote dentate, si individuerà il settore dove la ricerca è più attiva, si analizzeranno dunque le caratteristiche peculiari delle ruote innovative oggetto di attenzione valutando l'impatto non solo in termini di vantaggi legati al loro utilizzo, ma anche analizzando le tecnologie costruttive necessarie alla loro realizzazione e le metodologie di calcolo e dimensionamento attualmente a disposizione del progettista.

Di fatto si identificherà un'area dove dare un contributo sensibile allo sviluppo ed alla diffusione di tali ruote dentate e si svilupperà di conseguenza l'intero lavoro di ricerca oggetto del presente dottorato.

II. Simbologia

Nel presente studio viene adottata la simbologia oramai in uso nel campo degli ingranaggi e raccomandata a livello internazionale dalle ISO/R 701 (UNI 6773).

Il fatto di trattare profili non convenzionali costringe comunque ad introdurre (specie nella fase di studio relativa al reticolo di discretizzazione) simboli nuovi, non contemplati nelle precedenti normative; a tale scopo nella seguente simbologia si spera di fornire un mezzo per riconoscere in maniera rapida il significato di tali simboli, consentendo al lettore una più facile comprensione del testo.

a Interasse

b Larghezza assiale della fascia dentale

c Distanza dalla linea primitiva di taglio dal punto che genera la trocoide

h_{a0} Addendum nominale dell'utensile

m_0 Modulo di riferimento

m Valore assoluto del coefficiente angolare medio delle tangenti al profilo nei punti di eguale quota sui due fianchi opposti

m_d Coefficiente angolare, approssimativo della tangente al profilo di destra in corrispondenza del punto i-esimo

m_{d1} Coefficiente angolare della retta passante per i punti del profilo di destra contraddistinti dai punti i, i +1

m_{d2} Coefficiente angolare della retta passante per i punti del profilo di destra contraddistinti dagli indici i, i-1

m_s Coefficiente angolare, approssimativo, della tangente al profilo di sinistra in corrispondenza del punto i, i-esimo

m_{s1} Coefficiente angolare della retta passante per i punti del profilo di sinistra contraddistinti dagli indici i, i+1

m_{s2} Coefficiente angolare della retta passante per i punti del profilo di sinistra contraddistinti dagli indici i, i-1

q Termine noto della equazione della tangente al profilo del di sinistra in corrispondenza del punto i-esimo

r Raggio primitivo di riferimento

r_i Raggio circonferenza di troncatura interna

r_a Raggio circonferenza di troncatura esterna

r_b Circonferenza di base

r_e Distanza del punto generico dell'evolvente dal centro della ruota

r_p Distanza del punto generico del profilo di raccordo dal centro della ruota

r_t Distanza del punto generico della trocoide dal centro della ruota

r_u Distanza del punto di inizio dell'evolvente dal centro della ruota

s Spessore della ruota

s Spessore cordale del dente

s_a Spessore di testa del dente

s_b Spessore del dente sulla circonferenze di base

t Segmento individuato dai punti di tangenza della retta d'azione con le circonferenze di base

x Coefficiente di spostamento

y Distanza della generica sezione alla base del dente al centro della ruota

z Numero di denti della ruota

I_{fas} Indice i corrispondente al punto sullo spigolo di testa del dente

I_m Indice i corrispondente al punto sul profilo con massima concentrazione di elementi

I_{tot} Numero totale di suddivisioni lungo il fianco del dente

I_{ri} Indice i corrispondente al nodo coincidente con il punto di intersezione del profilo di raccordo con la circonferenza di troncatura interna

J_m Indice j che individua la zona a massima concentrazione di elementi a direzione orizzontale

K Differenza radiale fra due intervalli adiacenti al reticolo di discretizzazione

Kx Differenza in direzione orizzontale fra due intervalli adiacenti al reticolo di discretizzazione

N Numero di suddivisioni verticali del reticolo di discretizzazione

N_x Numero di suddivisioni per ciascun arco

R Raggio di curvatura dell'arco di circonferenza interpolato tra i punti di eguale quota sui due profili opposti

$R_{(i)}$ Raggio corrispondente all'iesimo punto di suddivisione del profilo

S1 Somma degli incrementi k per gli intervalli al di sopra del nodo a massima concentrazione di elementi

S2 Somma degli incrementi k per gli intervalli al di sotto del nodo a massima concentrazione di elementi

Sa Somma degli incrementi kx per gli intervalli (su di uno stesso arco) a sinistra del nodo a massima concentrazione di elementi

Sb Somma degli incrementi kx per gli intervalli (su di uno stesso arco) a destra del nodo a massima concentrazione di elementi

$Xc_{(i)}$ Ordinata del centro di curvatura dell'arco di circonferenza interpolato tra i punti di eguale quota, sui due fianchi opposti, contraddistinti dall'indice i

Xd Ordinata generica del punto sul profilo di destra del dente

$Xd_{(i)}$ Ordinata del punto di suddivisione iesimo del profilo di destra

Xm Ordinata del punto medio dell'arco

Xs Ordinata generica del punto sul profilo di sinistra del dente

$Xs_{(i)}$ Ordinata del punto di suddivisione iesimo del profilo di sinistra

$Yc_{(i)}$ Ascissa del centro di curvatura dell'arco di circonferenza interpolato tra i punti di eguale quota sui due fianchi opposti contraddistinti dall'indice i

$Ys_{(i)}$ Ascissa del punto di suddivisione iesimo sul profilo di sinistra

α Angolo di pressione di funzionamento

α_a Angolo di incidenza in corrispondenza dello spigolo di destra del dente

α_e Angolo di incidenza in corrispondenza di un punto dell'evolvente

α_0 Angolo di pressione e di riferimento

β_a Angolo sotteso dalla meta dello spessore di destra del dente

β_b Angolo sotteso dalla meta dello spessore di base del dente

γ_e Anomalia del punto generico dell'evolvente rispetto all'asse di simmetria del dente

γ_p Anomalia del punto generico del profilo di raccordo rispetto all'asse di simmetria del dente

γ_u Anomalia del punto di separazione tra evolvente e raccordo calcolato rispetto all'asse di simmetria del dente

δ_p Anomalia del punto generico del profilo di raccordo rispetto alla asse di simmetria del profilo stesso

δ_t Anomalia del punto generico della trocoide rispetto all'asse di simmetria della trocoide

ε Grado di approssimazione accettato nel programma di calcolo

η Dimensione radiale minima del reticolo di discretizzazione

λ Angolo fra l asse di simmetria del profilo di raccordo ed il raggio passante per il punto di intersezione fra evolvente e la circonferenza primitiva

ρ_{a0} Raggio di arrotondamento di destra dell'utensile

σ_a Tensione ideale per l'elemento maggiormente sollecitato del profilo di raccordo del dente asimmetrico

σ_i Tensione ideale (calcolata secondo la teoria di Von Mises)

σ_{max} Tensione ideale massima (calcolata secondo la teoria di Von Mises)

σ_s Tensione ideale per l'elemento, maggiormente sollecitato del profilo di raccordo del dente asimmetrico

ω Rapporto tra la dimensione dell'elemento di dimensione massima e l'elemento più piccolo del reticolo di discretizzazione

φ Angolo tra l asse di simmetria del profilo di raccordo e il raggio passante per il punto dell'evolvente sulla circonferenza di base

ψ Angolo tra la tangente alla trocoide in un punto e la congiungente lo stesso con il centro della ruota

$\Delta\alpha$ Differenza tra gli angoli di pressione sui due fianchi del dente (chiamato nel seguito anche grado di asimmetria del dente)

III. Cenni storici

Le ruote dentate sono note fin dai tempi dell'antichità ed hanno rappresentato, a diversi livelli di evoluzione, uno degli elementi maggiormente utilizzati per la trasmissione del moto e la riduzione degli sforzi.

Si hanno esempi di meccanismi con ruote dentate "a pioli" risalenti all'epoca pre-cristiana: i Romani utilizzavano con destrezza i rapporti di trasmissione delle ruote dentate per la realizzazione di strumenti di misura della distanza o per la moltiplicazione della forza.

Nel corso dei secoli le ruote dentate hanno subito evoluzioni su evoluzioni: la loro forma si è evoluta alla ricerca di rendimenti sempre maggiori, i materiali utilizzati e le tecnologie di taglio si sono evolute al fine di ottimizzare costi di produzione e caratteristiche meccaniche della ruote dentate.

Attualmente le ruote dentate maggiormente diffuse e punto di arrivo della evoluzione su accennata sono le ruote dentate con profilo ad evolvente, tali ruote dentate presentano il notevole vantaggio di ridurre gli strisciamenti associati all'ingranamento della coppia di ruote dentate ad un valore teorico pari a zero dunque un rendimento teorico di trasmissione unitario: il punto di partenza di un qualunque lavoro di

ricerca nel settore degli ingranaggi deve prendere come riferimento tal tipo di ruota dentata.

La conferma della bontà di tale scelta viene dal moltiplicarsi dei lavori di ricerca sulla evoluzione di un tal tipo di ruota dentata e relative varianti.

In particolare negli ultimi anni la ricerca si è focalizzata sulle ruote dentate a profilo asimmetrico ovvero ruote dentate con profilo ad evolvente e diverso angolo di pressione sui due fianchi del dente; tali ruote dentate presentano infatti notevoli vantaggi e limitate controindicazioni con un risultato netto positivo che le rende senza dubbio il settore dove è attualmente più redditizio concentrare gli sforzi della ricerca.

IV. Principali caratteristiche delle ruote dentate a profilo asimmetrico

Come anticipato brevemente, le ruote dentate a profilo asimmetrico sono ruote dentate con profilo ad evolvente, come le tradizionali ruote dentate, ma diverso angolo di pressione sui due fianchi del dente.

Il profilo ad evolvente delle ruote dentate asimmetriche garantisce che tali ruote dentate mantengano le medesime caratteristiche delle ruote dentate tradizionali ed in aggiunta caratteristiche che le rendono estremamente interessanti.

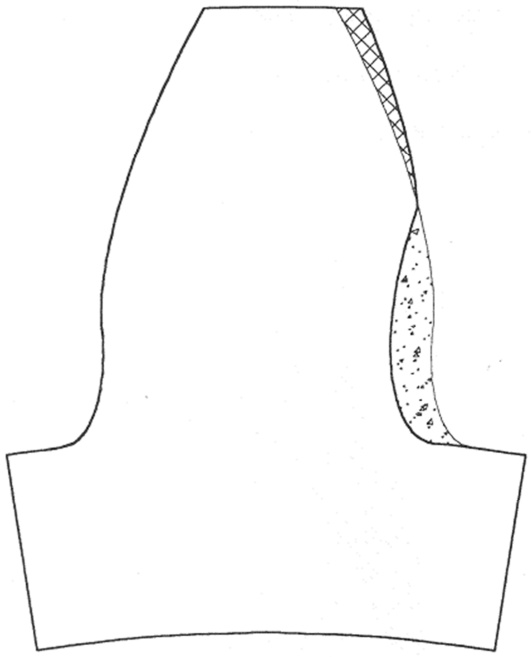
In particolare la ricerca ha dimostrato che aumentando il valore del secondo angolo di pressione il dente, assumendo una forma più tozza in corrispondenza della radice del dente stesso, guadagna in termini di robustezza incrementando in maniera sensibile la propria resistenza alla flessione ovvero la sollecitazione che, come noto, risulta essere la più gravosa per il dente.

Inoltre, aumentando il valore del secondo angolo di pressione, il dente si assottiglia in corrispondenza della testa con il risultato che nel suo complesso il dente, oltre a risultare più robusto risulta anche complessivamente più leggero, si può dunque pensare di ottenere, a

parità di altri parametri, ruote dentate più robuste semplicemente aumentando il valore del secondo angolo di pressione del dente o, parimenti, ottenere a parità di robustezza, ruote dentate di dimensioni, dunque peso, ridotte.

Contrariamente, riducendo il valore del secondo angolo di pressione il dente si assottiglia in corrispondenza della radice del dente, dunque si indebolisce, tuttavia la riduzione della sezione del dente comporta un aumento del volume della cava tra un dente ed il consecutivo con la conseguenza che nel caso di unità idrostatiche, ad esempio, si ha un incremento della portata che come noto rappresenta uno dei limiti di applicazione di tali unità.

In aggiunta la riduzione del secondo angolo di pressione comporta l'aumento della sezione del dente in corrispondenza della circonferenza di troncatura esterna e ciò ancora una volta torna a vantaggio della portata in quanto consente una maggior tenuta ai trafilamenti "periferici" senza dover ricorrere a tolleranze di lavorazione estremamente ridotte.



Ovviamente tale aumento di sezione di testa finisce con il rendere minimi, se non addirittura trascurabili, i guadagni in termini di peso, è tuttavia opportuno evidenziare che una ruota dentata con secondo angolo di pressione inferiore al primo può essere realizzata rilavorando una ruota dentata tradizionale, in tal modo ovviamente non si potrà godere dei vantaggi in termini di tenuta periferica, tuttavia i vantaggi in termini di riduzione di peso ed aumento della portata diventerebbero sensibili a tal punto che è sensato pensare di rilavorare gli ingranaggi di una pompa in esercizio riducendo il valore del secondo angolo di pressione al fine di aumentarne la portata (e ridurne il peso) senza dover sostituire la pompa stessa con una di maggiori dimensioni.

Tuttavia esistono anche degli effetti collaterali ovvero, variando il secondo angolo di pressione sia in positivo che in negativo avremo che, invertendo il moto, cambiano in maniera sensibile anche i carichi sugli alberi ed i cuscinetti rendendo di fatto tali ingranaggi non idonei alla inversione del senso di rotazione; tuttavia se si pensa che la stragrande maggioranza degli accoppiamenti prevede un unico verso di rotazione e che per la minima parte rimantenente, ancora una volta, la stragrande maggioranza prevede il moto inverso a carico ridotto (se non a vuoto come, ad esempio, nelle corse di ritorno di alcuni meccanismi) allora si comprende come tale “effetto collaterale” sia del tutto trascurabile ed

assolutamente non sufficiente a rendere le ruote dentate asimmetriche non idonee all'utilizzo su larga scala sia nel campo delle unità idrostatiche che nelle trasmissioni di potenza.

La ricerca ha inoltre dimostrato che le ruote dentate asimmetriche possiedono ulteriori vantaggi oltre a quelli su elencati; l'utilizzo delle ruote dentate asimmetriche consente ad esempio riduzioni di rumorosità: un dente più robusto si flette meno dunque minori sono le vibrazioni che si innescano di conseguenza e minore è il rumore emesso; ma maggior robustezza, dunque minori flessioni, spostano in alto anche le frequenze di risonanza consentendo dunque velocità di utilizzo superiori senza il rischio di introdurre fenomeni pericolosi.

Quanto su descritto è stato ampiamente dimostrato da numerosi lavori di ricerca portati avanti in diversi paesi dunque è indubbio che tali ruote dentate, oltre all'interesse scientifico fine a se stesso, sono oggetto di ricerca in quanto rappresentano realmente il successivo passo evolutivo in tale settore.

Ciò è maggiormente vero se si considera che, come si vedrà in dettaglio in seguito, le ruote dentate asimmetriche possono essere realizzate con le medesime macchine utensili e con le medesime tecnologie costruttive utilizzate per le ruote dentate tradizionali, anzi, a parità di altri parametri, la ruota dentata asimmetrica risulta anche più

conveniente sotto il profilo tecnologico in quanto avendo dimensioni ridotte richiede minor energia per il taglio: rimane dunque da chiarire per quale motivo tali ruote dentate non sono ampiamente diffuse e non hanno già sostituito le ruote tradizionali nella quasi totalità delle applicazioni dove è previsto l'impiego di ruote dentate.

Si ritiene che il maggior ostacolo legato alla diffusione di un tal tipo di ingranaggio sia di natura prettamente pratica: allo stato attuale infatti, contrariamente a ciò che accade per le ruote dentate tradizionali, non esiste per i denti asimmetrici una metodologia di calcolo standardizzata semplice ed affidabile che consenta al progettista di dimensionare la ruota dentata in funzione dei dati di progetto: il progettista, qualora volesse avvalersi di ruote dentate asimmetriche, oggi dovrebbe ricorrere quantomeno ad una analisi agli elementi finiti utilizzando uno strumento che nella maggioranza dei casi o non è disponibile, o è scarsamente noto o la entrambe le cose contemporaneamente; in ogni caso, anche là dove il progettista è uno smaliziato utilizzatore del FEM, il ricorso a tale metodologia per il dimensionamento dell'ingranaggio, oltre ad essere indubbiamente più dispendiosa quantomeno in termini di tempo ed impegno mentale, esporrebbe il progettista stesso a dei rischi e responsabilità che tipicamente non è chiamato ad assumersi nel corso del dimensionamento di una ruota dentata.

Pertanto, fatti salvi casi estremamente particolari e spesso applicazioni puramente sperimentali, le ruote dentate asimmetriche vengono di fatto non tenute nella giusta considerazione preferendo ricorrere a tecnologie tradizionali radicate anche se di fatto meno efficaci.

V. Obiettivi

Il presente studio si pone come obiettivo quello di superare quello che si ritiene il maggiore ostacolo alla diffusione delle ruote dentate a profilo asimmetrico, ovvero si propone di identificare una metodologia di calcolo, similare alla metodologia utilizzata per il dimensionamento delle ruote dentate tradizionali, che consenta al progettista di dimensionare le ruote dentate asimmetriche in maniera semplice ed agevole senza dover ricorrere a strumenti per lui di uso non comune, o assumersi responsabilità che esulano dalle proprie competenze specifiche.

Nei capitoli che seguono si affronterà il problema a 360 gradi partendo dalla analisi delle tecnologie più idonee per il taglio delle ruote dentate, passando per la identificazione di un modello di indagine, la realizzazione di un programma di discretizzazione che consenta di disegnare rapidamente profilo e mesh del dente per arrivare ad eseguire una campagna di analisi comparative al FEM che consenta di individuare una strategia di calcolo in grado di ovviare alla attuale difficoltà legata al dimensionamento delle ruote dentate raggiungendo così l'obiettivo prefissato.

CAPITOLO I

La tecnologia per il taglio delle ruote dentate

1.1 Il taglio delle ruote dentate: generalità

Le indispensabili doti di robustezza, elevato grado di precisione formale e la buona finitura superficiale del profilo attivo dei denti, in pratica costringono a realizzare le ruote dentate mediante una lavorazione per asportazione di truciolo.

Le macchine che lavorano per asportazione di truciolo sono tutte accomunate dalla presenza di un utensile per il taglio supportato da un apposito porta utensili, e di una tavola porta pezzo corredata dei vari dispositivi di ancoraggio per i pezzi da lavorare.

Alla macchina è affidato il compito di fornire, attraverso i relativi supporti, il moto di taglio, ovvero il movimento che consente all'utensile di asportare materiale, ed il moto di alimentazione il quale porge all'utensile la nuova superficie da lavorare; moto di taglio e di alimentazione sono in genere posseduti rispettivamente dall'utensile e dal pezzo in lavorazione.

Questa sommaria descrizione è fondamentale per poter in seguito per poter valutare se una macchina è o meno adatta al taglio delle ruote

dentate asimmetriche; la riterremo infatti tale se le modifiche da apportare si limiteranno alla semplice riprofilatura dell'utensile senza dover intervenire sui predetti moti di alimentazione e taglio, questi rappresentano infatti una caratteristica intrinseca della macchina stessa la cui alterazione, dove possibile, comporta in genere drastiche modifiche.

Si rammenta inoltre che non saranno prese in considerazione i procedimenti di taglio per riproduzione, ovvero quei procedimenti dove il profilo e ottenuto mediante copiatura di una sagoma, né tantomeno il taglio con frese di forma (metodi Brown e Sharpe); tali soluzioni infatti richiedono la preventiva determinazione e costruzione del profilo del dente (sagoma) o della cava tra due denti successivi, dunque mal si prestano alla costruzione di profili innovativi.

Inoltre, vale la pena ricordarlo, la scarsa precisione ed affidabilità delle macchine che operano secondo tali principi limita notevolmente l'utilizzo di tali procedimenti anche nel campo degli ingranaggi convenzionali dove oramai universalmente si adottano i procedimenti per generazione o inviluppo, ovvero quei procedimenti ove l'utensile e la ruota in taglio simulano il reale ingranamento della coppi dentata.

1.2 Dentatrice a creatore sistema *Pfauter*

La dentatrice a creatore utilizza quale utensile di taglio un utensile, il creatore appunto, che altro non è se non una fresa a vite a profilo costante la cui sezione normale all'elica del filetto si presenta come una dentiera a denti trapezoidali aventi il passo normale e l'angolo di pressione uguali a quelli della ruota da lavorare.

Il taglio avviene simulando l'ingranamento vite senza fine (creatore) ruota cilindrica; il fatto che il moto di taglio è circolare uniforme rende il taglio estremamente preciso, caratteristica questa che rende indispensabile l'utilizzo della dentatrice a creatore per quelle applicazioni dove sono richieste tolleranze estremamente ridotte.

La dentatrice a creatore viene correntemente utilizzata per la realizzazione di dentature, dritte o elicoidali, simmetriche; tuttavia la estrema versatilità di questa macchina ne consente l'utilizzo anche per ingranaggi asimmetrici.

Il semplice cambiamento dell'angolo di pressione del fianco del dente del creatore, che è rettilineo, consente infatti di realizzare dentature asimmetriche. La unica difficoltà deriverebbe dal fatto che il creatore è un utensile piuttosto complesso e apporvi modifiche potrebbe risultare laborioso.

1.3 Dentatrice ad utensile circolare sistema Fellows

È impiegata per il taglio di dentature esterne o interne, dritte o elicoidali di ruote cilindriche libere da un solo lato, mediante l'uso di un utensile a forma di ruota dentata detto ruota generatrice o coltello Fellows.

L'utensile è costituito da un pignone i cui denti sono profilati in modo da risultare taglienti. L'operazione di taglio si risolve in pratica in una stozzatura, i moti di generazione sono posseduti da ruota e coltello e sono entrambi moti circolari continui in pratica simulanti l'ingranamento del futuro ingranaggio con l'utensile.

Il moto di taglio è posseduto dall'utensile ed è rettilineo alternato parallelo all'asse della ruota dentata o inclinato rispetto ad essa a seconda che si realizzino dentature dritte o elicoidali.

Uno dei problemi legati all'utilizzo di tale sistema per la realizzazione di dentature asimmetriche è legato alla necessità di realizzare un utensile anch'esso con dentatura asimmetrica e profilo a evolvente, ricordiamo però che anche in questo caso le modifiche da apportare si limitano al profilo dell'utensile dunque il procedimento di taglio rimane inalterato.

1.4 Dentatrice stozzatrice sistemi Sunderland e Maag

I due sistemi sono molto simili; in entrambi i casi s'impiegano infatti utensili rettilinei con fianchi dei taglienti anch'essi rettilinei, in pratica l'utensile è la dentiera che si accoppierebbe con la ruota da tagliare.

Nel sistema Sunderland la ruota da tagliare ruota attorno al proprio asse e l'utensile dentiera, oltre a possedere il moto alternativo di taglio, parallelo all'asse della ruota o inclinato nel caso di denti elicoidali, trasla nella direzione di rotazione della ruota dando così origine al moto di generazione.

Nel sistema Maag invece, l'utensile possiede solamente il moto di taglio alternativo e la ruota possiede il moto di generazione costituito in questo caso da rotazione e traslazione debitamente combinati.

La realizzazione di dentature asimmetriche mediante uno dei due sistemi richiede in sostanza la sola riprofilatura dell'utensile dentiera, riprofilatura che dato il profilo rettilineo richiede minimo sforzo.

1.5 Costruzione di ruote dentate con profilo del dente asimmetrico

Come annunciato la costruzione dell'ingranaggio asimmetrico deve necessariamente avvenire con le tecnologie attualmente in uso, condizione questa necessaria per una reale diffusione di questo tipo di ingranaggio.

A tale scopo la precedente panoramica sulle tecnologie di taglio ha cercato di mettere in risalto le caratteristiche delle varie dentatrici evidenziando di volta in volta le modifiche da apportare qualora queste vanissero impiegate per il taglio di ingranaggi asimmetrici.

Alla luce di ciò appare evidente come i metodi più appropriati per la realizzazione di questo tipo di ingranaggio siano i metodi Sunderland e Maag i quali, impiegando un utensile dalla geometria estremamente semplice quale l'utensile dentiera, ben si prestano ad una iniziale produzione sperimentale di ingranaggi asimmetrici.

D'ora in avanti ci si riferirà pertanto solamente al taglio mediante dentiera, riservando il taglio con creatore o con coltello Fellows a future applicazioni particolari che rendono indispensabile il ricorso a tali tecnologie.

Capitolo II

Caratteristiche geometriche delle ruote dentate asimmetriche

2.1 caratteristiche generali del dente asimmetrico

Illustrate le tecnologie di taglio degli ingranaggi ed individuata tra queste la più idonea per il taglio di ruote asimmetriche, è giunto ora il momento di elencare le caratteristiche fondamentali dell'ingranaggio asimmetrico.

L'ingranaggio asimmetrico è fondamentalmente un ingranaggio i cui denti possiedono diversi angoli di pressione sui due fianchi attivi e più precisamente, supponendo di mantenere inalterato il primo angolo di pressione e pari a 20°, come avviene per le dentature convenzionali, si considererà il secondo angolo di pressione inferiore o meno a tale valore.

Tale variazione che apparentemente potrebbe sembrare poco significativa in realtà comporta notevoli differenziazioni del profilo e della sua capacità di resistere alle sollecitazioni, inoltre non va dimenticato che una tale variazione dell'angolo di pressione comporta una diversa distribuzione dei carichi sui cuscinetti dunque sugli alberi che supportano l'ingranaggio. Si preferisce in questa sede trascurare quest'ultimo aspetto poiché non consentirebbe un reale raffronto con l'ingranaggio simmetrico che rappresenta sempre il metro di paragone

attraverso il quale obiettivamente valutare l'unità asimmetrica; si riterrà pertanto che il contatto tra i due profili coniugati avvenga sempre lungo il profilo con angolo di pressione pari a $20^{o,}$ il che equivale ad ipotizzare un unico verso di rotazione per la coppia in presa.

Il secondo profilo può avere, entro i limiti che più avanti definiremo, l'angolo di pressione inferiore o superiore ai 20^0 del proporzionamento modulare normalizzato; come vedremo tale alterazione cambierà radicalmente il modo di reagire alle sollecitazioni del dente che risulterà più o meno robusto a seconda che il secondo angolo di pressione sia maggiore o minore al primo.

Tale caratteristica è fondamentalmente dettata dal fatto che l'aumento del secondo angolo di pressione comporta un inspessimento della radice del dente, sezione che risulta la maggiormente sollecitata dalle tensioni di flessione causa della quasi totalità delle rotture per fatica degli ingranaggi.

La diminuzione del secondo angolo di pressione comporta l'effetto opposto, accompagnato ovviamente da una diminuzione di peso, diminuzione che può essere interessante in talune applicazioni particolari.

Compito che ci si propone di svolgere è appunto valutare quali siano gli incrementi e/o le diminuzioni di volume, dunque di peso, associate alla variazione dello stato tensionale nel dente asimmetrico quantificando così in maniera precisa le potenzialità delle unità asimmetriche.

2.2 Parametri variabili nel taglio di ruote dentate asimmetriche

I parametri sui quali è possibile intervenire nel taglio di ruote dentate asimmetriche sono essenzialmente due e ciascuno di essi, come vedremo, modificherà in maniera più o meno profonda le caratteristiche geometriche dunque la robustezza del dente.

Il primo di tali parametri è senza dubbio il secondo angolo di pressione dell'utensile dentiera (il primo angolo infatti lo abbiamo ipotizzato fisso e pari ai classici 20° del proporzionamento modulare).

È questo che come vedremo caratterizzerà in maniera inequivocabile l'ingranaggio asimmetrico.

Va inoltre ricordato che la diminuzione del secondo angolo di pressione imporra condizioni maggiormente proibitive per il fenomeno dell'interferenza che sarà spesso presente e costituirà una delle caratteristiche associate alla diminuzione stesa dell'angolo di pressione.

Il secondo parametro su cui intervenire è invece l'arrotondamento di testa dell'utensile, mediante tale arrotondamento si addolcisce il raccordo tra dente e circonferenza base evitando così pericolose concentrazioni di tensione in punti angolosi.

2.2.1 Variazione del secondo angolo di pressione

Come annunciato la variazione del secondo angolo di pressione rappresenta il parametro fondamentale nel taglio delle ruote asimmetriche, è infatti questo il parametro che permette le più evidenti differenze del profilo del dente asimmetrico rispetto al simmetrico.

Un minor angolo di pressione del secondo profilo provoca infatti l'assottigliamento dello spessore del piede del dente con la conseguente diminuzione di volume, dunque di peso, ed al contempo una diminuzione della sezione resistente, dunque della resistenza complessiva del dente.

A questa infatti fa riscontro l'aumento di sezione del dente in corrispondenza della testa; tale diminuzione non è significativa in termini di resistenza ma diviene particolarmente interessante nel caso di ingranaggi per unità idrostatiche primarie e secondarie dove l'aumento di spessore di testa del dente consente di aumentare notevolmente la tenuta radiale senza ricorrere a costose lavorazioni di precisione, volte alla riduzione dei giochi radiali tra ingranaggio e corpo pompa.

L'aumento del secondo angolo di pressione causa invece un notevole irrobustimento del dente che consente, a parità di dimensioni prestazioni superiori o a parità di prestazioni, dimensioni ridotte.

L'aumento di sezione in questo caso si concentra infatti nella zona di raccordo del dente con la circonferenza di troncatura interna, zona che è la maggiormente sollecitata dalla tensione di flessione dovuta alla forza di contatto.

Il valore del secondo angolo, come vedremo, non può essere scelto arbitrariamente esistendo dei limiti geometrici ben precisi, sia nel caso di ingranaggi simmetrici che non.

Tale limite lo si può facilmente individuare sull'utensile dentiera come rilevabile in figura 2.1 dove viene rappresentata una generica dentiera simmetrica ed, in tratteggio, il limite massimo assumibile dall'angolo di pressione. Tale limite, come annunciato, corrisponde al verificarsi sull'utensile di una punta in corrispondenza della testa, punta che risulta inammissibile dal punto di vista tecnico e tecnologico.

Il valore limite dell'angolo di pressione ad esso corrispondente può essere espresso in forma analitica. È immediato infatti verificare dalla figura 2.1 che per tale valore vale la relazione seguente:

$$\mathrm{Tg}\alpha_{max}\frac{TS}{VT}$$

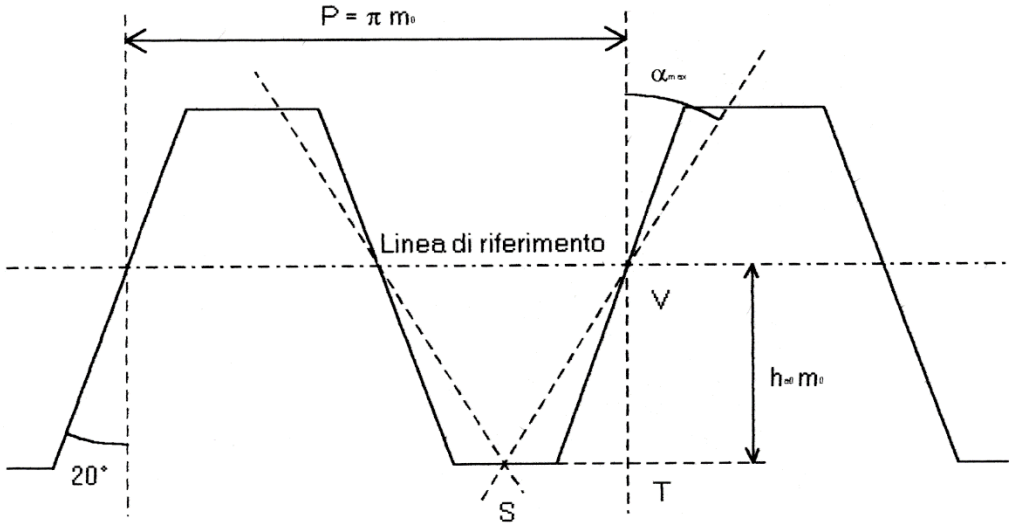


Fig. 2.1

Dalla quale esplicitando TS e VT otteniamo per α_{max} il valore

α_{max} = arcTg $(\pi * m_0)/(4h_{a0} * m_0)$ = ArcTg$(\pi/4h_{a0})$

Nel caso di proporzionalmente modulare $h_{a0} = 1{,}25$ otteniamo il valore limite α_{0max}=34,1419°

2.2.2 Variazione del raggio di arrotondamento di testa dell'utensile

L'arrotondamento dello spigolo presente sulla testa dell'utensile dentiera al raccordo tra fianco e testa è una operazione normalmente effettuata sulla stragrande maggioranza degli utensili.

Tale spigolo infatti oltre ad essere un tagliente rappresenta un profilo di forma e deve pertanto mantenere il più a lungo possibile inalterato il proprio aspetto dipendendo da esso la precisione del taglio.

L'operazione di arrotondamento non ha solo scopo tecnologico: la variazione di tale parametro comporta infatti delle alterazioni di forma per il dente; in particolare avremo che il raccordo tra fianco e circonferenza di base non è più un trocoide ma diviene l'inviluppo delle circonferenze aventi raggi di curvatura pari al raggio di arrotondamento e centro sulla trocoide generata dagli stessi centri di curvatura nella operazione di taglio.

A questo secondo aspetto sarà dedicata maggior attenzione essendo il presente studio mirato alla analisi strutturale del dente e non agli aspetti tecnologici del taglio.

Anche per il raggio di arrotondamento, così come per l'angolo di pressione, esistono dei limiti di natura tecnica infatti il raggio di

arrotondamento di testa potrà tutt'al più raggiungere il valore per il quale la tangente nel punto di raccordo con la testa della dentiera parta dal punto S intersezione dell'asse del dente con la testa.

La situazione limite ora descritta è rappresentata nella seguente figura 2.2 che costituisce anche lo spunto per l'esatta determinazione del valore limite del raggio di arrotondamento fornendo gli elementi base per i successivi sviluppi matematici

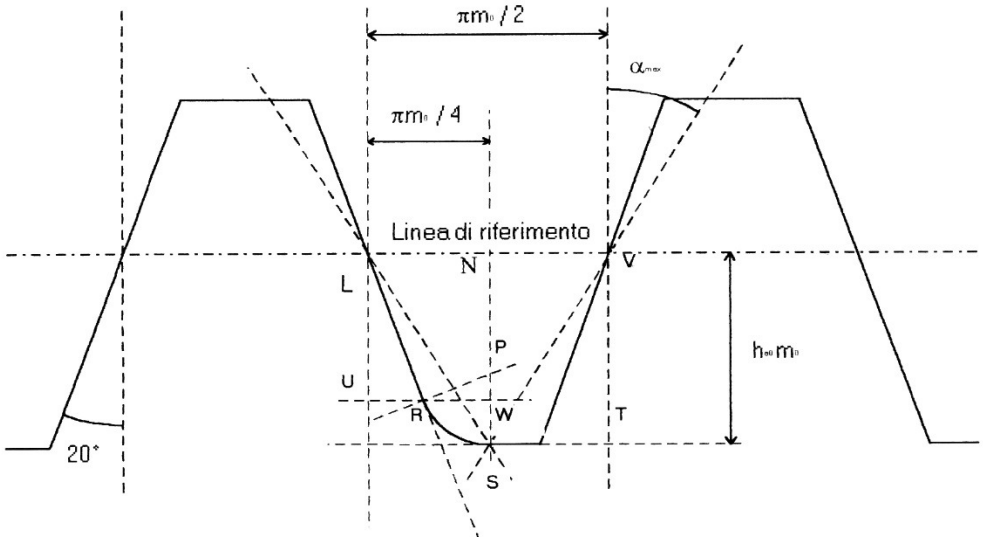


Fig. 2.2

E' immediato ricavare infatti che per il raggio di arrotondamento massimo ρ_{a0max} sussistano le seguenti relazioni:

ρ_{a0max} = PR = PS con PR = PW/senα

Da cui esplicitando PW otteniamo

$PW = PS – WS = \rho_{a0} - WS$

ove $WS = NS – NW = h_{a0} * m_0 – NW$

ma per NW sussiste la relazione

$NW = LU = RU/Tg\alpha_0$

Con

$RU = WU – WR = WU – PR \cos \alpha_0 = 0{,}25\ \pi\ m_0 - \rho_{a0} \cos \alpha_0$

Possiamo allora scrivere che

$WS = h_{a0} \bullet m_0 – RU/Tg\ \alpha_0 = h_{a0} * m_0 – 0{,}25\ \pi\ m_0/\ Tg\ \alpha_0 +$

$+ \rho_{a0} \cos \alpha_0 / Tg\ \alpha_0$

Dunque per PW varrà la seguente espressione:

$PW = \rho_{a0} - h_{a0} \bullet m_0 + 0{,}25\ \pi\ m_0/\ Tg\ \alpha_0 - \rho_{a0} \cos \alpha_0 / Tg\ \alpha_0$

Allora

$\rho_{a0} = PR = PW/sen\alpha_0 = \rho_{a0} / sen\alpha_0 – h_{a0} \bullet m_0/ sen\alpha_0 +$

$+ 0{,}25\ \pi\ m_0 / (Tg\alpha_0 \bullet sen\alpha_0) – \rho_{a0} \cos\alpha_0 / (Tg\ \alpha_0 * sen\alpha_0)$

Dove raccogliendo ed esplicitando rispetto a ρ_{a0} si ottiene per ρ_{a0} la seguente espressione

$$\rho_{a0} = 0{,}25\ m_0 \bullet (\pi \cos \alpha_0 - 4\ h_{a0}\ \mathrm{sen}\alpha_0)/(1 - \mathrm{sen}\alpha_0)$$

Risultano allora evidenti i parametri che influenzano il valore del raggio di arrotondamento ed è immediato calcolare il valore massimo ad esso attribuibile una volta note le caratteristiche geometriche dell'utensile.

2.3 Effetto del fenomeno dell'interferenza nelle dentature ad evolvente

Il fenomeno dell'interferenza può essere sinteticamente descritto come la compenetrazione (fisicamente impossibile) tra i fianchi dei denti di ruote che durante il funzionamento presentano una linea di ingranamento che cade, anche per un solo estremo, esternamente al segmento individuato dalla tangente comune alle due circonferenze base.

Questa compenetrazione si traduce nelle fasi di taglio in una scavatura dei profili verso la base con notevole indebolimento del dente nel suo complesso. Per tale motivo la interferenza viene sempre evitata nel caso di ingranaggi per trasmissioni mentre, in qualche caso, è presente nella costruzione di ingranaggi per unità idrostatiche, dove l'indebolimento del dente da essa causato viene compensato dalla maggior robustezza di ruote caratterizzate da un numero di denti molto basso dunque massicce.

Nello studio di ingranaggi asimmetrici il fenomeno dell'interferenza è spesso presente sul fianco caratterizzato dal minor angolo di pressione che impone condizioni più severe per scongiurare tale fenomeno. Di seguito riportiamo i passi fondamentali per giungere alla

determinazione di una condizione analitica di facile utilizzazione per i successivi sviluppi e che consenta di valutare, prima del taglio, se il dente sarà o meno tagliato con interferenza.

Facendo riferimento alla seguente figura 2.3 si può osservare che la su accennata condizione per scongiurare l'interferenza, ovvero linea di ingranamento contenuta nel segmento generato dalla tangente alle due circonferenze di base, diviene nel caso di rocchetto dentiera:

PM<PT

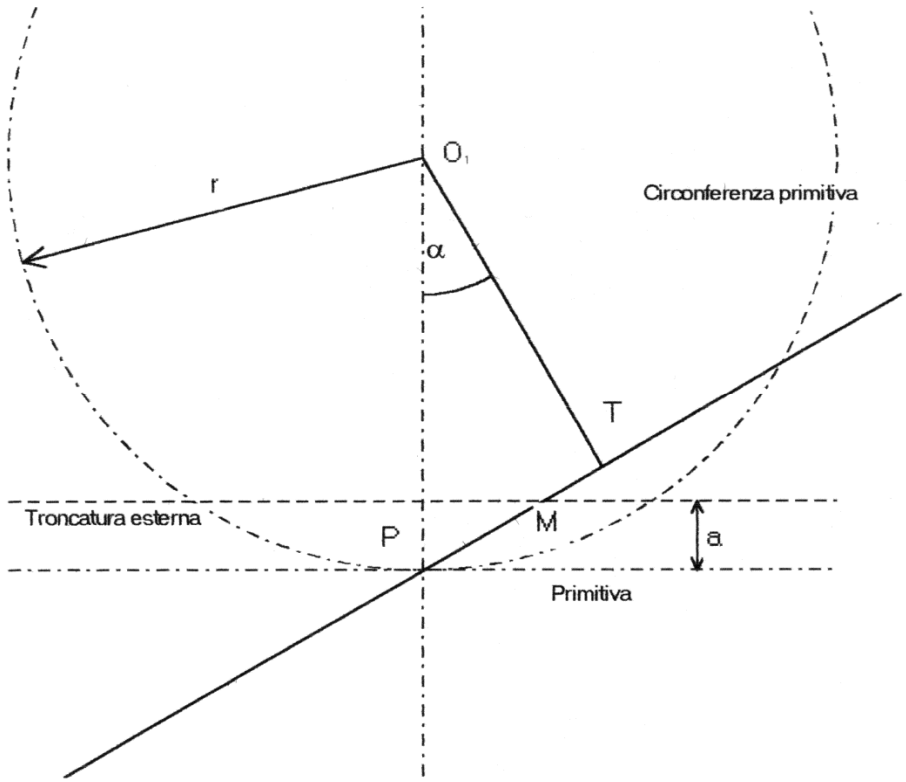


Fig. 2.3

Dove esplicitando PM e PT otteniamo:

$$a / \text{sen}\alpha < r\ \text{sen}\alpha$$

Nel caso di proporzionamento modulare essendo

$$a = m \qquad \text{ed} \qquad r = 0{,}5\ m\ Z_1$$

con Z_1 numero di denti della ruota, otteniamo in definitiva:

$$Z_{min} = 2 / \text{sen}^2\alpha$$

Che nel caso di taglio con spostamento relativo X = S/m diviene:

$$Z_{min} = 2 \bullet (1\text{-}X) / \text{sen}^2\alpha$$

Come si può vedere l'angolo di pressione limita direttamente il numero dei denti dell'ingranaggio.

Nel caso di dentature asimmetriche ovviamente esisteranno due limiti uno per ciascun fianco del dente. Il primo, relativo all'angolo di

pressione normalizzato e pari a 20^0 sarà generalmente rispettato, mentre il secondo sarà ben più restrittivo nelle dentature con secondo angolo di pressione inferiore e verrà alle volte oltrepassato.

2.4 Determinazione analitica del profilo del dente

Il profilo del dente, sia esso asimmetrico o meno, si presenta come l'unione di diverse curve aventi ciascuna delle caratteristiche ben precise e direttamente riconducibili e/o deducibili dai parametri di taglio.

Più precisamente, suddividendo il dente mediante quello che si chiama asse del dente nel caso di profili simmetrici ed elencando a partire dal piede del dente gli archi di curva che incontriamo avremo, riferendoci alla figura 2.4, i seguenti profili:

1. Tratto AB, corrispondente all'arco di circonferenza di raggio r_i e centro in O (con O traccia dell'asse della ruota nel piano del dente);
2. Tratto BC, corrispondente al profilo di raccordo con la circonferenza di troncatura interna. Il profilo corrispondente a tale arco assume forma diversa a seconda che l'utensile abbia lo spigolo vivo o sia arrotondato. Avremo cioè che BC è un arco di trocoide nel caso di utensili a spigolo vivo, mentre diviene l'inviluppo delle circonferenze aventi raggio pari al raggio di curvatura dello smusso e centro sulla trocoide generata dal centro di curvatura dello smusso stesso nel caso di utensili con spigolo arrotondato.

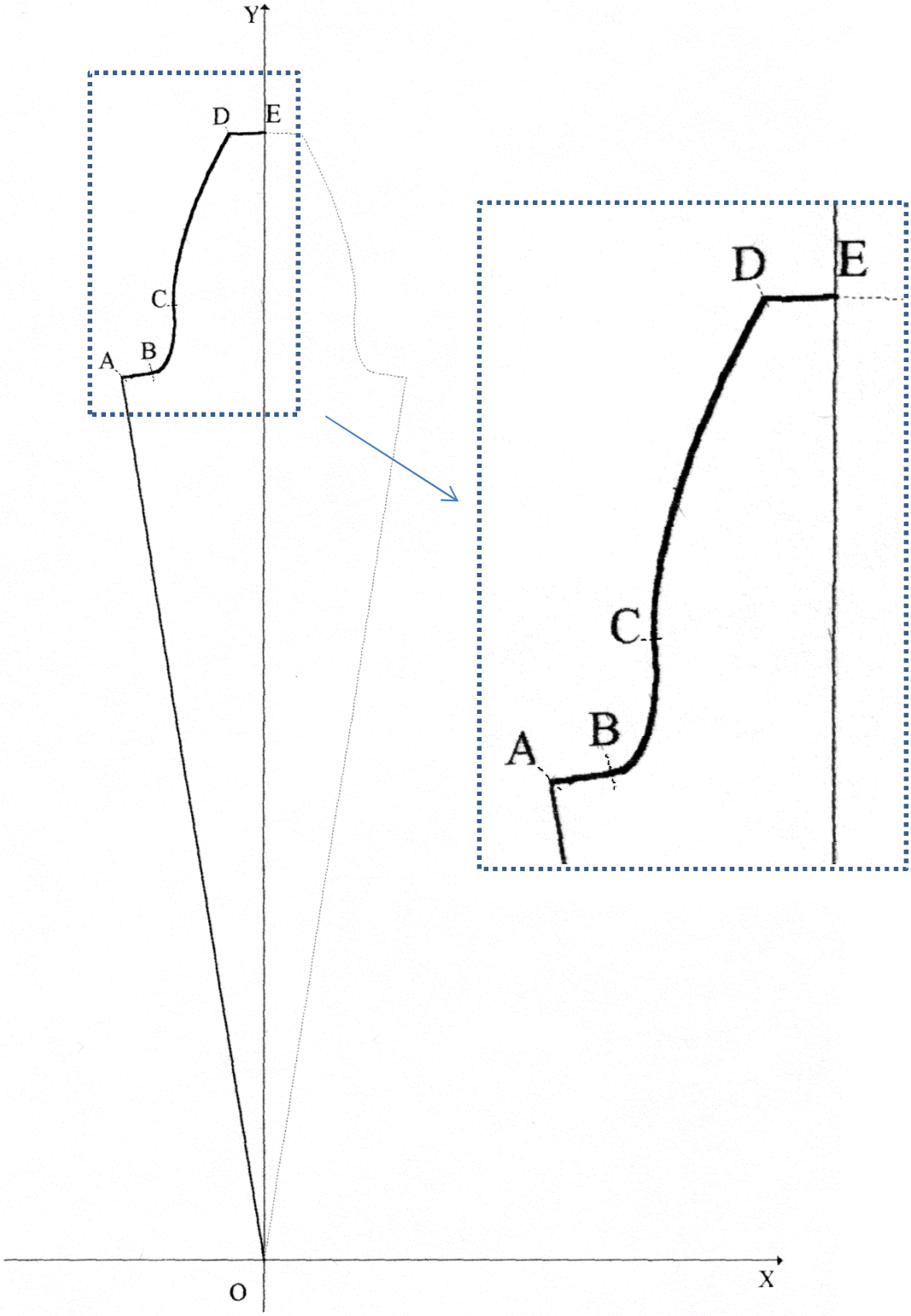


Fig. 2.4

3. Tratto CD identificabile con il fianco attivo del dente e profilato secondo l'evolvente di cerchio avente circonferenza di base con centro in O e raggio pari ad r_b
4. Tratto DE identificabile con l'arco di circonferenza avente centro in O e raggio r_b pari alla circonferenza di troncatura esterna.

Ciascuno di questi profili sarà riferito in un primo momento al sistema di riferimento che consente la più semplice determinazione della equazione che identifica il profilo in questione, riservandoci poi di trasportare le equazioni così determinate ad un sistema di riferimento unico che consenta di identificare l'intero profilo del dente.

I profili che desteranno maggior interesse saranno ovviamente il fianco attivo ed il profilo di raccordo del dente con la circonferenza interna essendo il tratto AB ed il tratto DE dei semplici archi di circonferenza.

Ciò premesso passiamo alla identificazione analitica dei profili dando, come anticipato, precedenza agli archi di evolvente.

2.4.1 Arco di evolvente del fianco attivo

Per la definizione di questo tratto del profilo del dente conviene riferirsi ad un sistema di coordinate polari avente origine in corrispondenza del punto O, ed asse y coincidente con la retta passante per O e per il punto di inizio dell'evolvente sulla circonferenza di base.

In un tale sistema di riferimento (fig. 2.5) è possibile dimostrare come la equazione della evolvente assuma la seguente espressione

$$\rho = r_e = r_b / \cos \alpha_e$$

$$\varepsilon = \mathrm{Tg}\ \alpha_e - \alpha_e = \mathrm{inv}\ \alpha_e$$

Con le seguenti limitazioni sulla ρ e sulla ε

$$r_i \leq \rho \leq r_a \qquad \varepsilon_u \leq \varepsilon \leq \varepsilon_a \qquad \alpha_u \leq \alpha_e \leq \alpha_a$$

Dove si sono indicati con α_u ed α_a

$$\alpha_u = \mathrm{arcos}\ (r_b/r_u) \qquad \text{e con} \qquad \alpha_a = \mathrm{arcos}\ (r_b/r_a)$$

Gli angoli che individuano rispettivamente il punto di separazione tra evolvente e profilo di raccordo e angolo individuante lo spigolo di testa del dente.

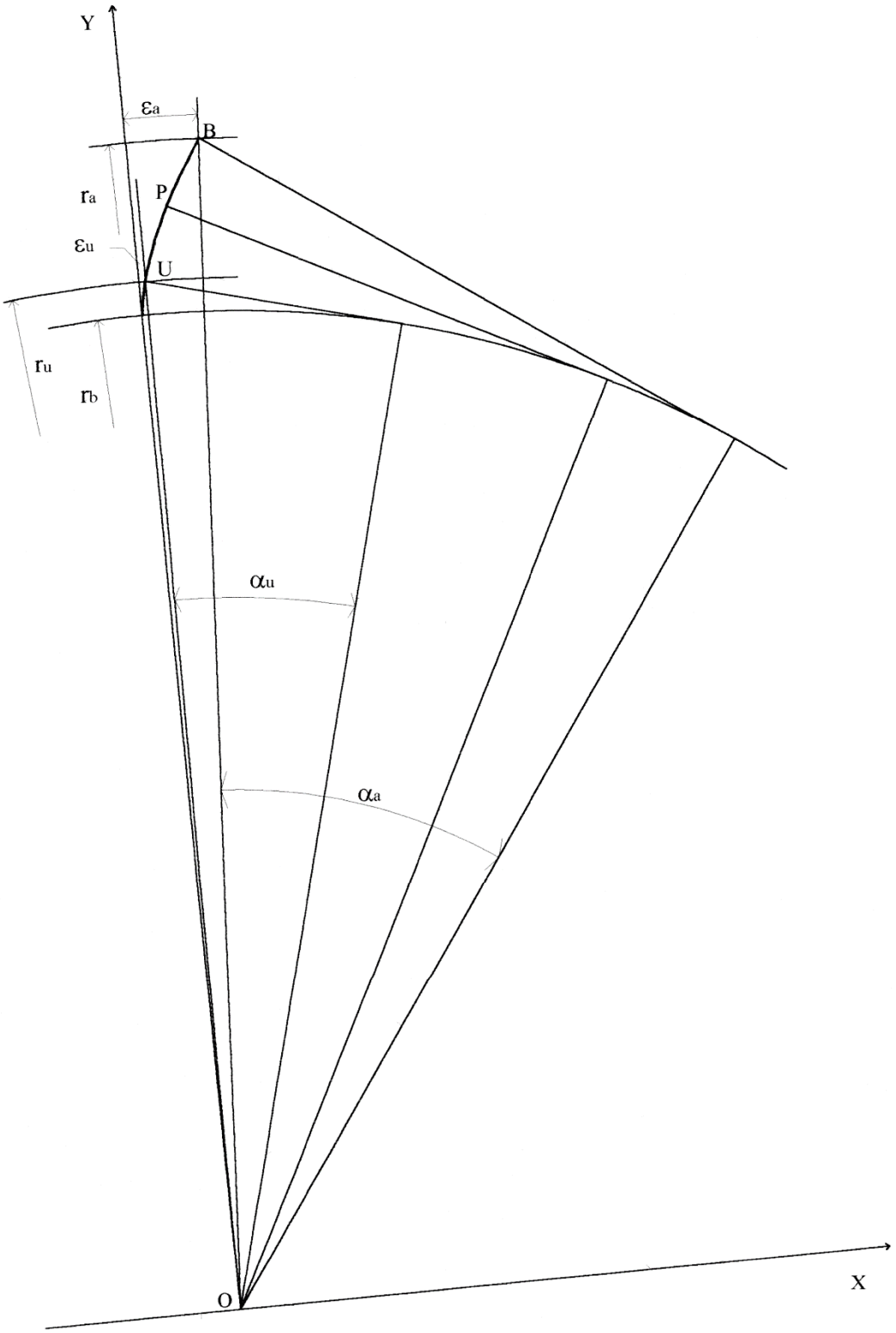


Fig. 2.5

Per quanto riguarda il punto di separazione tra evolvente e profilo di raccordo ricordiamo di seguito le fasi per il suo calcolo analitico nel caso di dente tagliato senza interferenza, mediante utensile a spigolo vivo od arrotondato. Proponiamo inoltre una procedura di calcolo automatico che consentirà l'individuazione di tale punto per approssimazioni successive nel caso di taglio con interferenza; tale procedura consente di scavalcare le difficoltà legate alla esatta determinazione del punto d intersezione dei due profili ottenendo risultati il cui grado di approssimazione è direttamente selezionabile dall'utente.

Nel caso di taglio senza interferenza avremo allora che il valore r_u sarà direttamente ricavabile dalla:

$$r_u = \sqrt{OD^2 + DT^2}$$

dove, vedi figura 2.6, per DT ed OD valgono le seguenti relazioni

$$OD = r - h_{a0} + \rho_{a0} \cdot (1 - \text{sen}\alpha_0) + x\, m_0$$

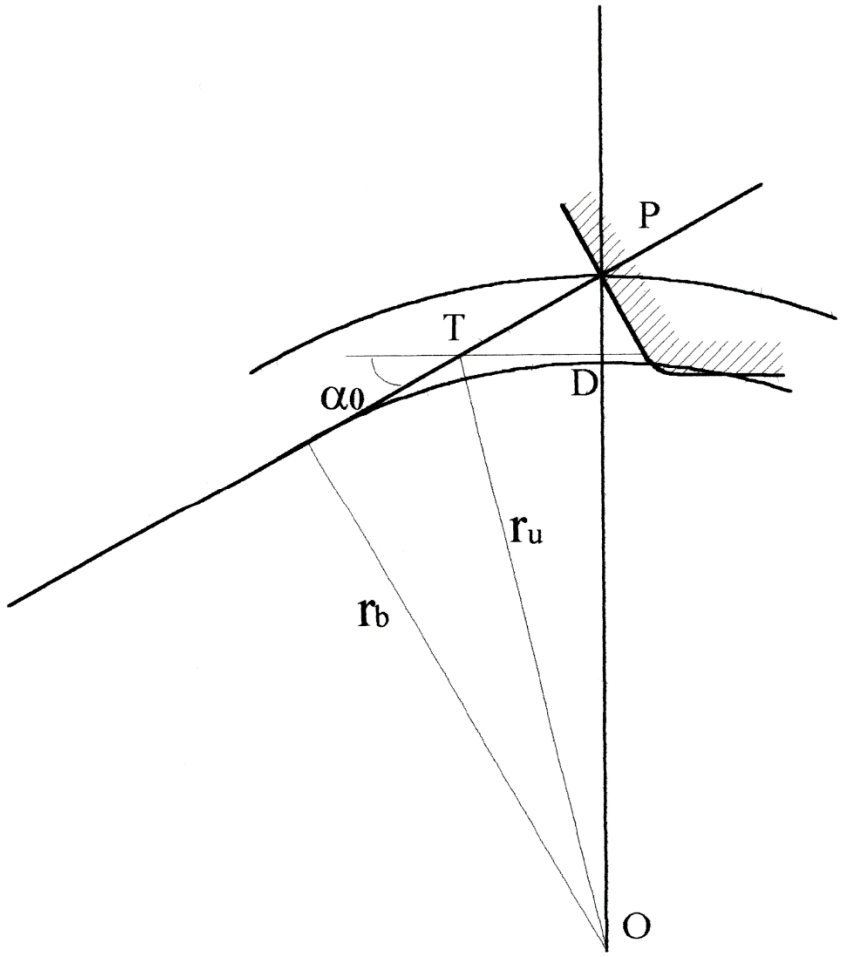


Fig. 2.6

Con PD esprimibile mediante la relazione

$$PD = h_{a0} - \rho_{a0} \cdot (1 - \text{sen}\alpha_0) - x\, m_0$$

In definitiva avremmo cioè la espressione di r_u

$$r_u = (((h_{a0} - \rho_{a0} \cdot (1\text{-sen}\alpha_0) - x\ m_0)^2 / Tg^2\alpha) + (r - h_{a0} + \rho_{a0} \cdot (1\text{-sen}\alpha_0) + x\ m_0)^2)^{1/2}$$

Nel caso di ruota tagliata con interferenza, la determinazione del punto di separazione tra fianco attivo e profilo di raccordo verrà effettuata mediante un procedimento iterativo concettualmente già utilizzato con successo in precedenti studi. In pratica, definite le equazioni parametriche dei due profili rispetto ad un unico sistema di riferimento, si prova un valore di r_u di primo tentativo e si calcolano gli angoli γ_{ue} e γ_{ut} corrispondenti ad r_u sui due profili se γ_{ut} risulta minore di γ_{ut} ciò significa che il valore di tentativo r_u è inferiore al valore reale; incrementeremo allora r_u di un Δr e ripeteremo il confronto finché la differenza γ_{ut} - γ_{ue} non cambia di segno. Questo dato indica che il valore di tentativo ha oltrepassato il valore reale di r_u. Il valore di tentativo della successiva iterazione sarà dato $r_u - \Delta r'$ ove $\Delta r' = \Delta r /2$.

Il programma prosegue dunque come in precedenza fino alla successiva variazione di segno della differenza γ_{ut} - γ_{ue} ; a tal punto cambierà dunque nuovamente segno all'incremento, ulteriormente dimezzato, e così via finche' il valore della differenza γ_{ut} - γ_{ue} scende al di

sotto di una soglia prefissata corrispondente al grado di approssimazione impostato.

Il procedimento, ovviamente, sarà automatizzato mediante l'impiego del calcolatore, in tal modo si potrà dunque disporre in tempo reale dei dati necessari all'ulteriore sviluppo del programma.

2.4.2 Profilo di raccordo con la circonferenza interna

Come anticipato, questo profilo assume diverso aspetto a seconda che il dente sia tagliato mediante utensile con spigolo vivo o smussato.

Nel primo caso avremo che il profilo è una trocoide, mentre nel secondo caso si tratterà della curva inviluppo delle circonferenze di raggio pari al raggio di arrotondamento dello smusso e centro sulla trocoide generata, nella fase di taglio dal centro di curvatura dello smusso stesso.

Per la determinazione dell'equazione corrispondente a questo profilo ci riferiremo ad un sistema di riferimento polare avente origine nel centro della ruota ed asse Y orientato come in figure 2.7; l'asse Y rappresenta cioè l'asse di simmetria della trocoide sia essa generata dallo spigolo di testa o dal centro di curvatura dello smusso.

Nel caso di spigolo vivo avremo cioè che l'equazione del profilo di raccordo è la seguente *(Tratta da G. Henriot - Ingranaggi, trattato teorico e pratico)*

$$\varepsilon = \mathrm{arcTg}\ (r_t^2/(r - c)^2)^{1/2} - (1/r)(\ r_t^2 - (r - c)^2)^{1/2}$$

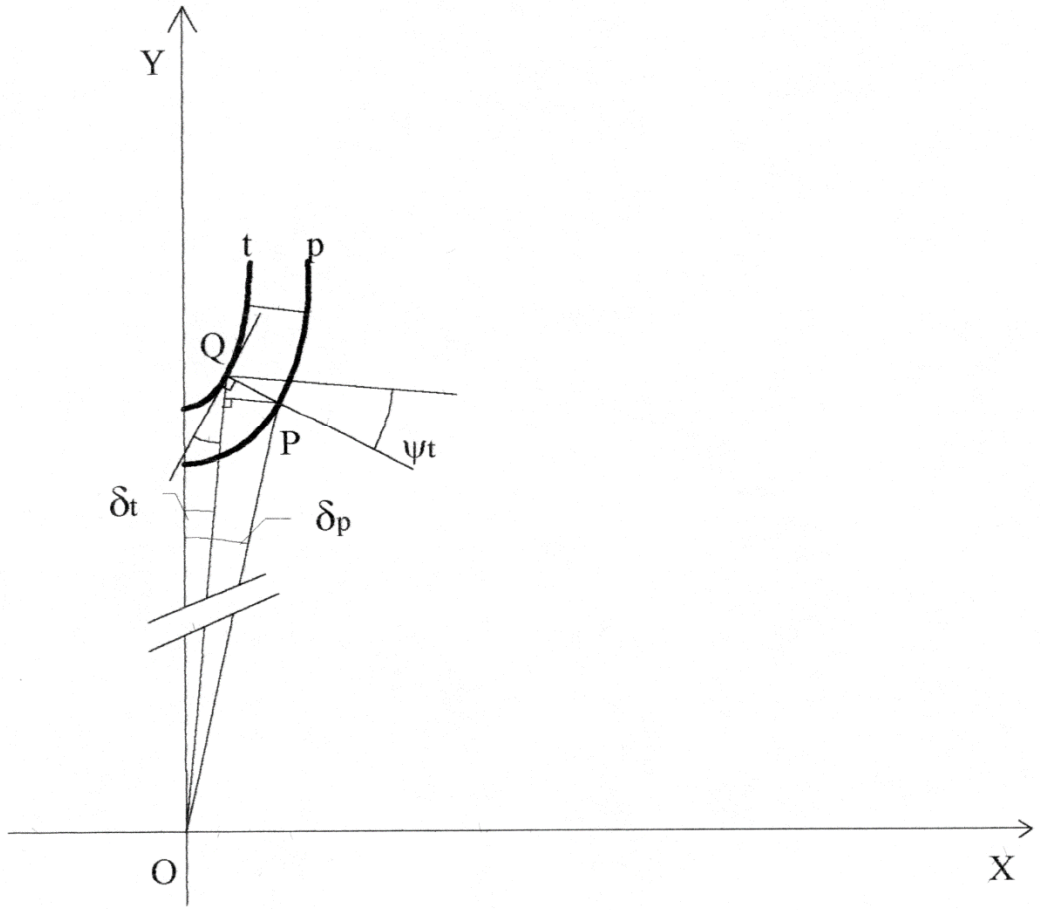


Fig. 2.7

In tale espressione ε ed r_t rappresentano rispettivamente la anomalia e la distanza dal centro della ruote, r è il raggio della circonferenza primitiva e per c vale la $c = h_{a0} - xm_0$

Per r_t ed ε sussistono le seguenti limitazioni

$$ri \leq r_t \leq ru \qquad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_t$$

A questo punto mediante alcune trasformazioni si può giungere alla equazione in forma parametrica del profilo di raccordo infatti posto

$$r_t = \rho \qquad e \qquad t = ((\rho/r_t)^2 -1)^{1/2}$$

Otteniamo per il profilo in questione la seguente espressione

$$\begin{cases} r = r_i \, (t^2+1)^{1/2} \\ \varepsilon = \text{arcTg } t - (r_i/r)t \end{cases}$$

Nel caso di utensile con spigolo di testa arrotondato la precedente espressione non è più valida, in questo caso il profilo è determinato dagli inviluppi delle circonferenze con raggio pari al raggio di arrotondamento e centro sulla trocoide generata dal centro di curvatura dello smusso di testa dell'utensile. Anche in questo caso è possibile determinare la equazione parametrica del profilo. Dalla stesa fig. 2.7 si può osservare come ad ogni punto della trocoide generata dal centro di curvatura dello

smusso si possa far corrispondere un punto sul profilo di raccordo mediante semplici considerazioni geometriche; ad un generico punto Q della citata trocoide si associa infatti il punto P sul profilo di raccordo individuato dalla intersezione con il profilo della normale per Q alla tangente alla trocoide per Q stesso.

Dal teorema di Carnot si ottiene allora che:

$$OP^2 = OQ^2 + PQ^2 - 2PQ \bullet OQ \cos OQP$$

Dove OP, OQ, ed OQP valgono:

$$OP = r_p \qquad OQ = r_t \qquad PQ = \rho_{a0} \qquad OQP = \pi/2 - \psi_t$$

Per cui si ottiene:

$$r_p = (r_t^2 + \rho_{a0}^2 - 2\, r_t \bullet \rho_{a0} \bullet \text{sen}\, \psi_t)^{1/2}$$

Con ψ_t dato dalla seguente espressione

$$\psi_t = \text{arcTg}\, (r_t \bullet d\delta_t/dr_t) = \text{arcTg}\, ((r \bullet (r - c) - r_t^2) / r(r_t^2\, (r - c)^2)^{1/2})$$

2.4.3 Arco di circonferenza del dente

La determinazione analitica della equazione di questo profilo è estremamente semplice. Esso infatti è semplicemente determinato dal raggio della circonferenza di troncatura esterna r_a e dall'angolo β_a che individua tale arco. L'espressione di β_a che daremo, considerando sempre metà del profilo, sarà al solito funzione dei parametri dell'utensile ed in particolare dell'angolo di pressione.

Il sistema di riferimento polare adottato avrà al solito origine in O mentre l'asse delle Y coinciderà con quello che nel caso di denti simmetrici sarebbe l'asse del dente.

In tal sistema di riferimento è immediato verificare che per β_a vale la:

$$\beta_a = \beta_b - \text{inv}\,\alpha_a = \beta_b - \text{Tg}\alpha_a - \alpha_a$$

Dove β_b è l'angolo che sottende la metà dello spessore di base del dente dato dalla $\beta_b = s_b/2r_b$ con s_b spessore sulla circonferenza base del dente ricavabile, come un qualsiasi altro spessore, dallo spessore lungo la primitiva dato dalla $s_p = m_0 \cdot (\pi/2 + 2 \cdot x \cdot \text{Tg}\alpha_0)$ mediante l'espressione:

$$s_b = r_b \bullet (s_b / r + 2\ \mathrm{inv}\alpha_0)$$

Avremo in definitiva:

$$\beta_a = ((m_0 \bullet (\pi/2 + 2 \bullet x \bullet \mathrm{Tg}\alpha_0))/r \ + \ 2\ \mathrm{inv}\alpha_0)) - \mathrm{inv}\alpha_0$$

2.4.4 Arco di circonferenza interna

Riferendo anche questo profilo al sistema di riferimento precedente avremo che, anche in questo caso l'arco è completamente definito dal raggio di troncatura interno e dall'angolo γ_i definito dalla seguente espressione:

$$\gamma_i = \gamma - \varphi - \beta_b$$

Dove β_b sarà calcolato come è stato già calcolato β_a al paragrafo precedente e γ è l'angolo che sottende metà del dente (γ = p/z), mentre per φ valgono le seguenti considerazioni:

$$\varphi = \lambda - \mathrm{inv}\alpha_0$$

con λ espresso dalla:

$$\lambda = (c \bullet \mathrm{Tg}\alpha_0 + \rho_{a0}/\cos\alpha_0) / r = (c \bullet \mathrm{sen}\ \alpha_0 + \rho_{a0}) / r_b$$

CAPITOLO III

La discretizzazione del dente

3.1 Il metodo di calcolo agli elementi finiti: generalità

Il metodo di calcolo agli elementi finiti è una tecnica di calcolo per strutture continue bi-tri dimensionali, che sfrutta la capacità dei calcolatori di gestire grosse moli di equazioni in tempi ridottissimi. In pratica il metodo di calcolo al FEM trasforma le equazioni differenziali in algebriche, mediante quella che si definisce una discretizzazione del continuo, riducendo così ad un procedimento numerico la soluzione di sistemi di equazioni differenziali alle derivate parziali con condizioni iniziali ed al contorno note.

Il limite di questa tecnica è legato alla corretta definizione delle condizioni al contorno ed al fatto che il reticolo di discretizzazione deve essere correttamente proporzionato, non bisogna infatti dimenticare che il calcolatore non fa altro che eseguire una serie di calcoli e che i dati di questi calcoli sono definiti dall'utente il quale pertanto si dovrà occupare non solo della corretta impostazione di questi ma anche del razionale sfruttamento del sistema calcolatore-programma di calcolo.

Su questo secondo aspetto verteranno i prossimi paragrafi: si dovrà infatti determinare la soluzione che a parità di nodi consenta il maggior numero di elementi, per far ciò si dovranno pertanto esaminare attentamente tutte le caratteristiche del continuo in esame (il dente) e della sollecitazione a cui esso è sottoposto, sfruttando al meglio tutto ciò che consente la semplificazione del problema a partire dalla scelta del tipo di elemento; solo in tal modo infatti si riesce a gestire in maniera ottimale la capacità di calcolo.

Nel capo dei continui elastici il metodo può' essere applicato in due modi distinti corrispondenti nella Scienza delle costruzioni ai metodi delle forze ed a quello delle deformazioni; in ogni caso l'analisi può essere suddivisa in tre fasi distinte:

1) Idealizzazione strutturale
2) Valutazione delle proprietà dell'elemento
3) Analisi strutturale dell'assemblaggio degli elementi

L'idealizzazione strutturale consiste nella suddivisione del sistema originale in un assemblaggio di elementi discreti; in generale si può affermare che l'attendibilità del risultato migliori utilizzando una discretizzazione più fine rispetto ad una più grossolana, sebbene risultati soddisfacenti sono ottenibili senza ricorrere a reticoli di discretizzazione estremamente fitti e difficilmente gestibili.

Gli elementi sono in grado di interagire tra loro solo attraverso un numero finito di punti detti nodi; le caratteristiche elastiche di ciascun elemento sono allora definite dalla relazione tra carichi applicati e spostamenti nodali, relazione esprimibile attraverso la matrice di rigidezza dell'elemento che fornisce in modo rapido una visione delle caratteristiche dell'elemento e nel complesso della struttura.

Per quel che riguarda l'assemblaggio degli elementi è fondamentale rispettare contemporaneamente l'equilibrio delle forze e la congruenza di spostamenti e/o deformazioni che devono rimanere compatibili con le caratteristiche fisiche e geometriche del singolo elemento, dunque della intera struttura.

I requisiti richiesti possono essere soddisfatti sia dal metodo delle forze che dal metodo degli spostamenti; nel primo caso la distribuzione delle tensioni è scelta punto per punto rispettando la condizione di equilibrio e solo globalmente la condizione di congruenza, mentre nel caso di metodo degli spostamenti la strategia di calcolo sarà opposta ovvero si rispetterà punto per punto la condizione di congruenza e solo globalmente la condizione di equilibrio.

Tra i due metodi quello più frequentemente utilizzato è il metodo degli spostamenti, questo infatti basandosi su relazioni cinematiche, e non statiche, non è legato al gradi di iperstaticità della struttura;

l'utilizzazione del metodo degli spostamenti può essere ridotta alle seguenti fasi:

a) Valutazione delle proprietà degli elementi in un riferimento locale particolarmente conveniente
b) Trasporto delle matrice di rigidezza dell'elemento dal riferimento locale al sistema di riferimento della struttura
c) Assemblaggio delle matrici di rigidezza dei singoli elementi per ottenere la matrice di rigidezza globale dell'intera struttura
d) Formulazione e soluzione delle equazioni di equilibrio tra carichi nodali (R) e spostamenti nodali risultanti (r)

$$(R) = (K) \bullet (r)$$

e) Valutazione delle deformazioni dell'elemento a partire dagli spostamenti nodali calcolati tramite relazioni cinematiche ed infine, determinazione delle forze dell'elemento conoscendo le deformazioni dello stesso attraverso le matrici di rigidezza.

L'insieme dei vari passi di calcolo viene effettuato da un pacchetto schematizzato in quattro sezioni fondamentali:

a) Una sezione di input di geometria, materiali, carichi e condizioni al contorno della struttura, o meglio della modellizzazione della struttura in esame
b) Una sezione di libreria degli elementi e di generazione di modelli matematici per gli elementi strutturali ed i carichi applicati
c) Una sezione di costruzione e soluzione del modello matematico per il sistema strutturale globale
d) Una sezione di output per gli spostamenti e le deformazioni e le tensioni calcolate

Come si vede dunque all'operatore rimangono essenzialmente due compiti, la scelta del tipo di schematizzazione della struttura e la selezione dell'elemento, o degli elementi, da utilizzare; da questi due passi dipende la affidabilità e l'esito del calcolo; nel caso dell'analisi agli elementi finiti la precisione è dunque legata a problemi di ordine tecnico direttamente collegabili alla capacità ed alla sensibilità dell'analista che non potendosi avvalere di formule e/o garanzie circa la bontà di questa o quella modellizzazione dovrà affidarsi al proprio bagaglio di esperienze.

In questo contesto valgono alcuni principi guida, elencati di seguito, i quali, benché siano lontani dal garantire la affidabilità del calcolo, nel

caso non siano rispettati di sicuro compartano che il calcolo risultante sarà di scarsa affidabilità

Tali semplici regole sono le seguenti:

a) Evitare elementi con lati troppo dissimili tra loro, mantenendo il rapporto tra i lati contigui il più possibile prossimo all'unità
b) Evitare che gli angoli degli elementi quadrilateri si discostino in maniera sensibile dall'angolo retto
c) Evitare che vi siano numerosi condizioni di incongruenza come ad esempio nodi appartenenti ad un solo elemento

Nel nostro studio tali tre semplici regole costituiranno il principio guida del programma automatico di discretizzazione del dente, nostro compito sarà pertanto quello di interpretare al meglio tali esigenze e di realizzare un complesso di algoritmi che consenta di realizzare la discretizzazione al meglio per un gran numero di casi, partendo semplicemente dalle caratteristiche geometriche del dente fornite come input dall'utente.

3.2 analisi delle condizioni al contorno e dei requisiti del reticolo di discretizzazione

Come premesso, la corretta definizione delle condizioni al contorno e la razionale scelta del reticolo di discretizzazione sono alla base della attendibilità di un qualsiasi studio agli elementi finiti; è ovvio dunque riservare particolare attenzione a questa fase del problema. Per evitare da una parte grossolane imprecisioni e dall'altra sforzi inutili, verranno pertanto di seguito analizzati uno ad uno gli aspetti più significativi del caso in esame.

3.2.1 la sollecitazione dovuta alla forza di contatto

Il dente per il particolare compito che è chiamato a svolgere, la trasmissione di coppia, è soggetto ad una forza, la forza di contatto, che pur non essendo costante in modulo, lo è in direzione e verso. Questa forza, date le dimensioni degli elementi, dunque la distanza tra nodi contigui, la possiamo ritenere applicata puntualmente in corrispondenza di uno dei nodi degli elementi che si affacciano lungo il profilo del dente; tale forza per le dentature dritte, di cui ci si sta occupando, giace nel piano normale all'asse di rotazione dell'ingranaggio, piano che è anche di simmetria per l'ingranaggio stesso se si considera, come noi faremo, il

paino che divide in due lo spessore del dente. Questa caratteristica ci consente di far rientrare il caso in esame nel caso estremamente semplificato di stato di tensione e deformazione piano; in tal modo si potranno scegliere tra gli elementi in cui suddividere il dente quelli che il programma di calcolo agli EF chiama “three dimensional plane stress element”.

Questi sono elementi a quattro nodi complanari dotati di spessore, ovvero il programma di calcolo acquisisce come dati per la definizione del singolo elemento, oltre alle coordinate dei quattro nodi, lo spessore dell’elemento, spessore che consente, ad esempio, di caricare gli elementi con un carico distribuito su di una faccia (ad esempio dente sottoposto alla pressione di mandata ed aspirazione nel casi di ingranaggi per unità idrauliche)

3.2.2. Il sistema dei vincoli

Per quel che riguarda i vincoli è chiaro che questi debbano essere degli incastri e che questi incastri debbano essere posti in una zona del dente che non risenta dell’interazione con i denti contigui dell’ingranaggio; a tal proposito si esaminerà anche una porzione della

ruota dentata interna al dente che rappresenterà appunto la sezione di incastro del dente stesso.

3.2.3 caratteristiche generali del reticolo di discretizzazione

La realizzazione del reticolo di discretizzazione si otterrà suddividendo in direzione verticale ed orizzontale la regione delimitata dai profili opposti del dente e dalla sezione di incastro, l'intersezione delle linee di suddivisione verticali e orizzontali genererà il reticolo di discretizzazione del dente.

Le modalità di tale suddivisione saranno dettagliatamente descritte nei paragrafi che seguono: in questa sede si descrivono semplicemente i requisiti che devono possedere gli elementi per garantire un buon margine di affidabilità nel successivo studio agli EF.

È innanzitutto fondamentale riuscire a suddividere il dente in elementi dello stesso tipo, elementi a quattro nodi come anticipato, evitando elementi "ibridi" quali gli elementi triangolari, che verrebbero considerati dal programma di calcolo come elementi a quattro nodi con due nodi coincidenti, mentre sono tassativamente "vietati" elementi con numero di nodi superiori a quattro, questi infatti non rientrerebbero più

nella categoria degli elementi trattabili nell'ambito della semplificazione dello stato di tensione e deformazione piano aumentando a dismisura, a parità di elementi, le difficolta di calcolo costringendo quindi a ridurre il numero di elementi trattabili per rientrare nei limiti imposti dal calcolatore e dal programma di calcolo.

Altro requisito che gli elementi della discretizzazione devono possedere è la “regolarità della forma”, intendendo con questa espressione che l’elemento a quattro nodi possieda gli angoli il più possibile vicini all'angolo retto e che il rapporto tra il lato minore e il lato maggiore non vada oltre i valori dell'ordine di 1/3; queste prerogative consentono infatti una più realistica interpretazione della realtà da parte del programma di calcolo con gli ovvi benefici in termini di precisione di calcolo complessiva.

3.3 Suddivisione del profilo del dente

Il profilo del dente, come evidenziato nel capitolo precedente, è composto da un susseguirsi di curve la cui complessità è già stata messa in evidenza; la discretizzazione della regione compresa in questo profilo presenterà pertanto una serie di problemi la cui soluzione è uno degli scopi del lavoro.

Le difficoltà si accentuano se si pensa che il nostro studio si focalizzerà su denti asimmetrici e che pertanto non si potranno sfruttare proprietà comuni dei due profili opposti ma in pratica si dovrà sempre operare come se si stesse trattando due denti o meglio due semi-denti distinti.

Primo problema che si incontra nell'affrontare la discretizzazione del dente è ovviamente la definizione delle coordinate del profilo, tale definizione in un programma di discretizzazione sarà una definizione per punti, punti che, uniti con tratti rettilinei, devono fornire una ottima approssimazione del profilo, approssimazione che, proprio in quanto tale, deve essere la più precisa possibile in modo da poter poi utilizzare i risultati in uscita dal programma di calcolo agli EF con un buon margine di affidabilità.

Tale esigenza impone dii effettuare una discretizzazione a passo variabile in modo da avere un elevato numero di segmenti, dunque di elementi, nelle zone in cui il raggio di curvatura è estremamente ridotto ed averne meno dove la curvatura del profilo è inferiore.

Questa esigenza fondamentalmente è condivisa anche dal metodo di calcolo agli EF infatti la zona del profilo con minor raggio di curvatura è quella di raccordo alla base del dente, zona che, come l'esperienza insegna, è la maggiormente sollecitata dalla tensione di flessione.

Pertanto possiamo affermare che esigenze geometriche e di calcolo impongono un elevato numero di elementi nella zona di raccordo.

Questa caratteristica sarà pertanto presa come base di partenza per la suddivisione del profilo; tuttavia arrestando l'analisi a questo punto si rischierebbe di mutilare il programma di quella flessibilità di cui in precedenza si è accennato e che consente all'utente di focalizzare l'attenzione su di un punto qualsiasi del dente infittendo a volontà il reticolo di discretizzazione in tale zona.

Si procederà pertanto eseguendo una prima discretizzazione del dente, riservando alle varie curve che si susseguono lungo il profilo un numero di elementi che stanno tra loro secondo un rapporto fisso predefinito rispettando l'esigenza di infittire il numero di elementi nella

zona di raccordo del dente; il numero di nodi assegnato alle tratte di curva lungo il profilo verrà a questo punto visualizzato assieme alla richiesta dei dati relativi al rapporto di infittimento ed alla zona in cui tale infittimento si vuole che sia massimo, dopodiché' in base ai dati immessi si effettuerà l'effettiva suddivisione del profilo rispondente alle esigenze dell'utente.

Tal modo di procedere consente all'utente di orientarsi in maniera più precisa nell'ambito della suddivisione del dente riuscendo ad ottenere così, al primo tentativo, l'uscita desiderata senza dover ricorrere a successivi affinamenti.

La suddivisione del profilo fornisce i punti di partenza per la suddivisione verticale del dente; i punti corrispondenti sui due profili opposti saranno uniti infatti tra di loro da un arco di circonferenza con tangente perpendicolare, o quasi, alla tangente al profilo nel punto di intersezione delle due curve.

Tale condizione consente infatti di avere elementi quasi perfettamente rettangolari in prossimità del profilo soddisfacendo così l'esigenza di precisione in prossimità della superficie del dente, zona intuibilmente sollecitata in maniera più intensa da parte della flessione dovuta alla forza di contatto.

La scelta di archi di circonferenza per unire i punti sui due fianchi opposti è dettata dal fatto che le curve che chiudono il fianco del dente sono la circonferenza di troncatura esternai in testa e la circonferenza di troncatura interna alla base: questo consente dunque una più graduale suddivisione del profilo.

Per quel che riguarda la suddivisione orizzontale si è pensato di suddividere ciascun arco nello stesso numero di parti e con il medesimo criterio. Il programma di suddivisione in questa fase richiede unicamente il numero di suddivisioni che si desidera per ciascun arco, poi, in base ai dati precedentemente immessi relativamente alla zona di infittimenti massimo, sceglie automaticamente le dimensioni di ciascun intervallo in maniera da avere elementi con lati uguali nella zona di infittimento e la distanza tra nodi successivi crescente di una quantità costante K rispetto alla distanza tra i due nodi precedenti.

I criteri così scelti consentono al sistema una estrema elasticità di calcolo e parimenti una elevata gradualità nella variazione di dimensioni degli elementi fornendo una discretizzazione automatica realmente funzionale con elementi quasi perfettamente quadri e più fitti dove l'utente desidera la massima precisione di calcolo.

I problemi non sono comunque tutti risolti: infatti la forma particolare del dente e la possibile presenza di punti aventi, a parità di

quota, tangenti inclinate nello stesso verso, non consente di interpolare tra i punti corrispondenti sui due profili un arco di circonferenza che possieda i su citati requisiti; pertanto in queste zone particolari del dente si dovrà ricorrere a soluzioni alternative, soluzioni che, essendo basate su particolari interpolazioni del programma di calcolo, si preferisce esporre nel capitolo successivo dove verranno anche ampiamente illustrati gli algoritmi di calcolo sviluppati per ottenere le caratteristiche della discretizzazione in questa fase semplicemente enunciate.

3.4 Caratteristiche delle uscite del programma di discretizzazione del dente

Il programma di discretizzazione realizzato è un programma di preparazione di dati, dati che verranno poi successivamente elaborati da un più complesso programma di calcolo agli elementi finiti, questa prerogativa ci pone di fronte al problema della definizione del formato dei dati in uscita.

Al fine di rendere il programma quanto più possibile flessibile si è pensato di utilizzare il formato di uscita dei programmi CAD, la caratteristica comune di tutti i programmi di calcolo FEM è infatti quella di avere la possibilità di interpretare i dati in formato dxf provenienti dai programmi CAD essendo questi infatti la piattaforma di lavoro del progettista.

L'utilizzo di questo formato è stato inoltre estremamente utile in fase di sviluppo del programma, la possibilità infatti di visualizzare a monitor l'elaborato del programma di calcolo ha permesso di evidenziare via via le anomalie ed eventuali bug del programma di calcolo permettendo affinamenti successivi sino all'ottenimento della versione finale. In fase di sviluppo si è resa inoltre necessaria una seconda uscita del programma di calcolo infatti il formato dxf non è intellegibile all'utente

pertanto per comprendere le ragioni del risultato ottenuto si è pensato ad una seconda uscita in formato txt che riassumesse le caratteristiche del dente in termini geometri e parametri di discretizzazione ed in aggiunta le coordinate dei singoli nodi. Ciò nel caso di reticoli anomali ha permesso di comprendere più facilmente le ragioni di tali anomalie e di individuare soluzioni appropriate anche per casi estremamente particolari. La possibilità di usufruire di questa uscita accessoria si è rilevata talmente utile che si è pensato di renderla disponibile anche a programma di calcolo ultimato.

CAPITOLO IV

Il programma di discretizzazione del dente

Premessa

In questo capitolo si illustreranno gli algoritmi di calcolo impiegati per ottenere la discretizzazione del dente e si illustrerà il modo in cui questi sono stati automatizzati.

Si illustrerà inoltre il modo di procedere del programma e si esamineranno le richieste di dati ed il modo di interpretare i risultati.

Questa fase sarà dunque dedicata alla presentazione del programma di calcolo messo a punto mettendone in luce le caratteristiche e fornendo indicazioni circa la maniera in cui utilizzarlo.

4.1 Il principio di suddivisione del profilo

Nel capitolo precedente si sono illustrati i motivi che costringono ad adottare un metodo di discretizzazione del dente estremamente elastico e si è spiegato, in forma discorsiva, come ottenere tale elasticità; vedremo ora come è possibile automatizzare il processo.

È ovvio innanzitutto che si debbano riferire le equazioni del profilo ad un unico sistema di riferimento; tale operazione è tuttavia semplice in quanto le equazioni delle varie curve componenti il profilo sono già state determinate, pertanto mediante delle semplici equazioni di trasporto il profilo verrà riferito ad un unico riferimento, che in questa fase continuerà ad essere polare; questa condizione ci permetterà infatti di individuare i punti estemi dei due profili opposti in corrispondenza dei valori coincidenti con il raggio di troncatura esterna anche nel caso di dentature asimmetriche.

L'importanza di tale proprietà risiede nel fatto che tali valori forniranno la dimensione dell'intervallo che dovrà essere sottoposta alla suddivisione; pertanto si potrà impiegare un unico processo per entrambi i profili anche nel caso di dentature asimmetriche.

Le caratteristiche di tale suddivisione dovranno essere tali da dividere il profilo in un numero di parti e con rapporto di infittimento

direttamente selezionabile dall'utente; inoltre si è imposto che le dimensioni degli intervalli adiacenti differiscano di una quantità costante, in tal modo si ha una estrema gradualità di crescita dell'intervallo.

Di seguito sono riportati i passaggi essenziali che hanno consentito di giungere alla definizione dell'algoritmo di calcolo utilizzato.

Si suppongono definiti i raggi di troncatura esterna ed interna in base ai dati del dente forniti dall'utente: resta così definito l'intervallo che deve essere suddiviso. A questo punto viene richiesto il numero di suddivisioni da effettuare sul profilo; sia N il valore impostato dall'utente, il programma effettua allora una suddivisione di primo orientamento riservando

20•N/150 suddivisioni per l'arco di circonferenza interna,

50•N/150 suddivisioni per il profilo di raccordo,

75•N/150 suddivisioni per il fianco attivo,

5•N/150 suddivisioni per la circonferenza di testa.

I dati di questa prima suddivisione vengono quindi forniti come "output" sul terminale video assieme alla richiesta della zona in cui si vuole la massima concentrazione di archi; la risposta a questa domanda

deve essere un numero, corrispondente all'indice identificativo dell'intervallo dove si desidera la maggiore densità di elementi.

Nell'effettuare tale scelta l'utente è aiutato da dei dati sul terminale video i quali si riferiscono alla suddivisione standard effettuata automaticamente dal programma di calcolo.

Indichiamo con Im il valore impostato dall'utente; a questo punto il programma richiede il rapporto tra minima e massima concentrazione. Rispondendo con il valore 1 a tale domanda si lascia inalterata la suddivisione di orientamento effettuata inizialmente; per valori superiori il programma rieffettua la suddivisione in punti del profilo di raccordo e del fianco attivo lasciando inalterate quelle sulla circonferenza di troncatura interna ed esterna. Indichiamo con ω il valore immesso. A questo punto il programma individua dove si trova la sezione in cui gli intervalli sono più radi; se risulta

$$Im > I_{tot}/2$$

con

$$I_{tot} = (50 + 75) \bullet N/150$$

numero totale di intervalli lungo il fianco, tale sezione si troverà al disotto dell'intervallo a massima concentrazione. Se risulta

$$I_m < I_{tot}/2$$

la sezione si trova al disopra.

Questa distinzione è fondamentale per i successivi sviluppi. Nel caso in cui la sezione più rada si trova al disopra della sezione più fitta, abbiamo infatti il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} R_{(Ifas)} - R_{(Ifas-1)} = R_{(Im+1)} - R_{(Im)} + K \bullet (Ifas\text{-}Im\text{-}1) \\ (R_{(Im+1)} - R_{(Im)}\ \omega = R_{(Ifas)} - R_{(Ifas-1)} \end{cases} \qquad (4.1.1)$$

Ove $R_{(i)}$ rappresenta il valore del raggio in corrispondenza dell'i-esimo punto di suddivisione, per "Ifas" si intende l'indice "I" corrispondente allo spigolo di testa mentre Im è l'indice corrispondente alla zona di massima concentrazione della suddivisione (indice impostato dall'utente). "K" rappresenta invece l'incremento, costante tra due qualsiasi intervalli adiacenti, esclusi ovviamente quelli che condividono i punto di suddivisione con l'indice Im (intervalli compresi cioè tra $R_{(Im+1)}$ ed $R_{(Im)}$ e l'intervallo

tra $R_{(Im)}$ ed $R_{(Im-1)}$ intervalli uguali tra loro; il sistema 4.1.1 esprime la costanza della crescita tra intervalli adiacenti e l'esistenza di un rapporto prefissato e pari a ω tra intervallo di dimensioni minori ed intervallo di dimensioni maggiori.

Dal sistema precedente si ricava per l'incremento K la seguente espressione:

$$K = \frac{(\omega\text{-}1) \bullet (R_{(Im+1)} - R_{(Im)})}{(Ifas - Im - 1)}$$

(4.1.2)

La condizione di incremento costante tre due intervalli consecutivi permette di definire l'intervallo da suddividere come:

$$R_{(Ifas)} - R_{(Iri)} = (Ifas - Iri)\ (R_{(Im+1)} - R_{(Im)}) + K\ (S_1 + S_2)$$

(4.1.3)

Ove l'indice Iri contraddistingue il primo valore sul profilo di raccordo dell'indice I che individua I punti di suddivisione dell'intervallo;

in pratica avremo cioè che $R_{(Iri)}$ coincide con il valore del raggio di troncatura interna ed $R_{(Ifas)}$ coincide invece con il valore del raggio di troncatura esterna. Pertanto la differenza a primo membro è nota e coincide con l'intervallo da suddividere.

Discorso diverso per S_1 ed S_2. Come imposto, infatti, ciascun intervallo differisce dal precedente di una quantità costante K; pertanto indicando con η la minima distanza tra i punti di suddivisione successivi ($\eta = R_{(Im+1)} - R_{(Im)} = R_{(Im)} - R_{(Im-1)}$), lo spessore di ciascun intervallo è esprimibile come somma di η e di tanti incrementi K quanti sono gli intervalli che lo separano dall'intervallo di spessore η.

Cioè dato comunque X>Im con Iri>X>Ifas, sussiste la relazione:

$$R_{(X+1)} - R_{(X)} = \eta + K\,(X\text{-}Im\text{-}\,1)$$

Mentre per X<Im Vale la corrispondente:

$$R_{(X)} - R_{(X-1)} = \eta + K\,(X\text{-}Im\text{-}\,1)$$

È facile allora intuire che S_1 ed S_2 sono dati dalle seguenti somme:

S_1 = 1+2+3+4+5……..+ (Ifas- Im -1)

S_2 = 1+2+3+4+5……..+ (Im- Iri -1)

La 4.1.3 esprime cioè il fatto che, grazie alle condizioni imposte, l'intervallo di troncatura interna è esprimibile come la somma di (Ifas- Iri) intervalli e di tanti incrementi K dati appunto dalla somma di S_1 ed S_2 definiti come sopra.

Dalle 4.1.2 e 4.1.3 otteniamo la seguente espressione

$$R_{(Ifas)} - R_{(Iri)} = (Ifas- Iri)\ \eta + \eta\ (S_1 + S_2) \bullet (\omega-1)/(Ifas-Im-1)$$

dalla quale possiamo ricavare l'espressione per η, ovvero la dimensione dell'intervallo minimo:

$$\eta = R_{(Im+1)} - R_{(Im)} = (R_{(Ifas)} - R_{(Iri)}) \ / \ (\ (Ifas- Iri) + (S_1 + S_2) \bullet (\omega-1)/(Ifas-Im-1)\ ) \qquad (4.1.4)$$

Dove tutte le grandezze a secondo membro sono definite o definibili rapidamente in base alle caratteristiche del dente ed ai dati immessi dall'utente; definito η è immediate ricavare K dalla 4.1.2.:

$$K=(\omega-1)/(Ifas-Im-1)\bullet(R_{(Ifas)} - R_{(Iri)}) \,/\, (\,(Ifas-Iri) + (S_1 + S_2)\,(\omega-1)/(Ifas-Im-1)\,)$$

Espressione che, con le dovute semplificazioni, assume la forma:

$$K= =(\omega-1)\bullet(R_{(Ifas)} - R_{(Iri)}) \,/\, (\,(Ifas-Iri)\bullet(Ifas-Im-1) + (S_1 + S_2)\bullet(\omega-1)\,) \qquad (4.1.5)$$

che definisce in maniera semplice l'incremento tra due intervalli successivi.

In maniera analoga si definiscono le medesime grandezze nel caso in cui la zona a concentrazione più rada si trovi al disotto della zona a massimo infittimento; in questo caso ovviamente sono diverse le equazioni di partenza:

$$\begin{cases} R_{(Iri+1)} - R_{(Iri)} = R_{(Im)} - R_{(Im-1)} + K_{(Im - Iri\ -1)} \\ (R_{(Im)} - R_{(Im-1)}\ \omega = R_{(Iri+1)} - R_{(Iri)} \end{cases} \qquad (4.1.6)$$

Dalle quali risulta:

$$K = \frac{(\omega\text{-}1) \bullet (R_{(Im+1)} - R_{(Im)})}{(Im - Iri - 1)}$$

(4.1.7)

la quale, sostituita nella 4.1.3, che rimane invariata, fornisce l'espressione di η nel secondo caso:

$$\eta = R_{(Im)} - R_{(Im-1)} = (R_{(Ifas)} - R_{(Iri)}) \,/\, (\,(Ifas - Iri) + (S_1 + S_2) \bullet (\omega\text{-}1)/(Im\text{-}Iri\text{-}1)\,)$$

(4.1.8)

e dunque l'espressione di K risulta:

$$K = (\omega\text{-}1) \bullet (R_{(Ifas)} - R_{(Iri)}) \,/\, (\,(Ifas - Iri) \bullet (Im\text{-}Iri\text{-}1) + (S_1 + S_2) \bullet (\omega\text{-}1)\,)$$

(4.1.9)

Definiti dunque gli algoritmi di calcolo alla base della suddivisione del dente rimane il problema dell'automatizzazione di questi e della conseguente traduzione in linguaggio macchina. In questa sede si descriverà solamente il diagramma a blocchi del processo essendo il listato del programma di calcolo sterile e privo di interesse. (Fig. 4.1 a fine capitolo).

4.2 Definizione per punti del profilo del dente

La suddivisione dell'intervallo individuato da raggio di troncatura esterna e raggio di troncatura interna illustrata nel paragrafo precedente ci consente di individuare, con la precisione voluta, punti sui due profili giacenti su circonferenze con il medesimo raggio, punti che fatta eccezione per le dentature simmetriche, che dato il carattere dello studio rappresenteranno un'eccezione e non la normalità, giaceranno su quote diverse rispetto al sistema di riferimento globale del dente. Il riferimento ha origine nel centro dell'ingranaggio, asse Z diretto come l'asse di rotazione, asse Y diretto come l'asse del dente (ovviamente per i denti asimmetrici tale asse non esisterà, comunque si continuerà a far riferimento ad esso anche nel caso di denti asimmetrici individuandolo come l'asse di simmetria del dente avente gli angoli di pressione uguali al primo), ed asse X diretto di conseguenza.

Come detto le quote dei punti su tale profilo saranno in genere diverse. Per una più razionale discretizzazione del dente è opportuno che i punti corrispondenti sui due profili opposti abbiano la stessa quota; a tal fine è stato messo a punto un processo iterativo che ricerca il punto di eguale quota sul profilo opposto per successivi affinamenti, dando così la possibilità di avere, su dentature di eguale modulo e numero di

denti ma diverso valore del secondo angolo di pressione, discretizzazioni raffrontabili in quanto effettuate partendo dal primo profilo che rimane invariato; il tutto ovviamente se si mantiene il medesimo principio di discretizzazione, principio impostabile di volta in volta tramite il rapporto di infittimento ed il numero totale di suddivisioni del profilo.

Caratteristica fondamentale di tale processo è la rapidità e la precisione. Infatti la ricerca viene effettuata dapprima ricercando sul secondo profilo il primo punto la cui quota oltrepassa la quota del punto in esame; a questo punto si diminuisce di una quantità Δr il raggio corrispondente nel riferimento polare, e si ripete tale operazione finché la quota del punto sul secondo profilo non scende al disotto del valore del primo, a questo punto si dimezza il Δr e si somma al valore raggiunto, e così via dimezzando e cambiando segno ogni volta che la quota viene oltrepassata senza raggiungere il grado di precisione impostato.

Dopodiché si passa al punto successivo sino all'individuazione di tutti i punti sul secondo profilo con quota uguale (nei limiti di approssimazione impostati) alla quota del punto corrispondente sul primo profilo.

Al solito riportiamo esclusivamente il diagramma a blocchi che illustra il flusso logico del processo di calcolo, essendo il listato di scarso interesse pratico (Fig. 4.2 a fine capitolo).

4.3 Individuazione degli archi di circonferenza perpendicolari al profilo nei punti id egual quota

Individuati sui profili opposti i punti di eguale quota si risolverà ora il problema di raccordare questi punti con una curva, sufficientemente semplice, che fornirà le linee orizzontali per la suddivisione in direzione verticale del dente.

Tali curve saranno degli archi di circonferenza, che per garantire elementi quasi perfettamente rettangolari in corrispondenza della superficie, dovranno essere perpendicolari ad entrambi i profili nei punti di egual quota.

La ricerca di tali archi si effettuerà dapprima individuando la tangente la profilo nei punti in questione, dopodiché si individuerà la perpendicolare ai due profili e si ricercherà l'arco di circonferenza che possiede come tangenti la perpendicolare al profilo.

Per poter interpolare un arco di circonferenza tra due punti di eguale quota è necessario che le due diverse tangenti posseggano il medesimo coefficiente angolare ma di segno opposto. A tale scopo è necessario scegliere come tangenti all'arco di circonferenza il valore medio dei coefficienti angolari delle due perpendicolari al profilo del dente, in tal modo l'arco non sarà esattamente perpendicolare al profilo

ma il grado di approssimazione sarà sufficiente a scongiurare errori legati alla differenza di tale angolo dall'angolo retto (si avranno al più differenze di qualche grado).

Una tal maniera di procedere consente buoni risultati per denti simmetrici ma presenta problemi nel caso di denti asimmetrici, dove l'esistenza di zone dei profili con tangente di segno uguale crea l'impossibilità di interpolare circonferenze che rispondono ai requisiti imposti; alla soluzione di questo problema sarà dedicato in seguito un intero paragrafo. Per quanto riguarda la procedura di definizione degli archi, anch'essa, partendo da una struttura definita per punti, segue un procedimento approssimato; così la tangente nel punto i-esimo del profilo sarà definita come la retta con coefficiente angolare dato dalla media dei coefficienti angolari delle rette passanti per i punti (i, i+1) ed (i, i-1); in tal modo si ottiene una tangente che approssima in maniera molto buona la tangente al profilo. E' inoltre interessante notare che il grado di approssimazione migliora in quelle zone dove l'utente, volendo maggior precisione, ha richiesto un maggior numero di suddivisioni, rispettando così le esigenze dell'utente anche nella definizione della tangente al profilo.

Definite le tangenti sui due profili opposti in corrispondenza dei punti di eguale quota sui profili opposti, è immediato ricavare il valore

medio della tangente ai due profili e da questo individuare il centro dell'arco di circonferenza cercato; l'ordinata Xc(i) del centro dell'arco i-esimo sarà data infatti dal valor medio delle ordinate dei punti Xs(i) ed Xd(i), mentre per l'ascissa Yc(i) uno dei modi più semplici per ottenerla è imporre l'appartenenza del centro alla tangente media al profilo ovvero la normale nel punto di tangenza dell'arco di circonferenza; determinate le coordinate del centro si determina immediatamente il raggio di curvatura dell'arco mediante la distanza del centro ed uno dei due punti sul profilo.

Resta così completamente determinata l'equazione della circonferenza della quale l'arco è parte; in pratica si procederà alla seguente maniera. Individuate le coordinate Xs(i), Ys(i) e Xd(i), Ys(i) dei punti di egual quota in corrispondenza del punto i-esimo avremo i due coefficienti angolari

$$m_{s1}=\frac{Ys(i+1)-Ys(i)}{Xs(i+1)-Xs(i)} \qquad m_{s2}=\frac{Ys(i)-Ys(i-1)}{Xs(i)-Xs(i-1)}$$

ed analogamente per il profilo di destra

$$m_{d1}=\frac{Yd(i+1)-Yd(i)}{Xd(i+1)-Xd(i)} \qquad m_{d2}=\frac{Yd(i)-Yd(i-1)}{Xd(i)-Xd(i-1)}$$

da queste si ricava poi il coefficiente angolare della tangente al profilo di destra e di sinistra come valor medio ovvero

$$m_s=\frac{\mathrm{ms1+ms2}}{2} \qquad m_d=\frac{\mathrm{md1+md2}}{2}$$

il coefficiente angolare della tangente media sarà allora dato dalla

$$m=\frac{|\mathrm{ms}|+|\mathrm{md}|}{2}$$

che sui due profili opposti riacquisterà il segno corrispondente: si ricava allora la ordinata Xc(i) del centro come:

$$Xc(i)=\frac{Xs(i)+Xd(i)}{2}$$

e l'ordinata Yc(i) imponendo l'appartenenza del centro ad una delle tangenti al profilo; determinata allora interamente la tangente imponendo il passaggio per il punto di tangenza avremo:

$$Yc(i) = m * Xc(i) + q$$

Ove q è dato dalla

$$q = Ys(i) - m * Xs(i)$$

Definite così le coordinate del centro si definirà il raggio come la distanza di uno dei punti di tangenza dal centro stesso; avremo cioè:

$$R = \sqrt{\left(Xc(i) - Xs(i)\right)^2 + \left(Yc(i) - Ys(i)\right)^2}$$

A questo punto è immediato ricavare l'equazione della circonferenza nella forma

$$X^2 + Y^2 + aX + bY + c = 0$$

Ove

$$a = -2Xc(i) \quad ; \quad b = -2Yc(i) \quad e \quad c = Xc^2(i) + Yc^2(i) - r^2$$

Ovviamente dovendo individuare semplicemente l'arco compreso tra i punti di eguale quota la equazione della circonferenza andrà accompagnata dalle seguenti limitazioni sulla Y:

$$Y, Ys(i) \quad se \quad Yc(i) > Ys(i) \quad e \quad Y > Ys(i) \quad se \quad Yc(i)\ ,\ Ys(i)$$

L'intero procedimento è completamente automatizzato e seguirà il flusso logico esposto nel diagramma a blocchi relativo riportato in figura 4.3 a fine capitolo.

4.4 Principio di suddivisione degli archi

La suddivisione degli archi rappresenta l'ulteriore passo verso la realizzazione del reticolo di discretizzazione: attraverso di essa si individueranno infatti i punti che uniti tramite segmenti forniranno assieme agli archi di circonferenza la maglia del reticolo.

Questa fase riveste un'importanza particolare infatti deve consentire di avere elementi il più possibile quadrati nella zona di massima concentrazione garantendo così un elevato grado di precisione nel calcolo in tali zone.

Il principio base della suddivisione degli archi partirà pertanto da tale requisito e si definirà in base a questo l'incremento da dare alla dimensione minima dell'intervallo sull'arco, dimensione nota e pari al valore η già definito per la suddivisione del profilo (vedi 4.1.4 – 4.1.8).

La prima verifica effettuata dal programma di calcolo è relativa al numero di suddivisioni impostato dall'utente: questo infatti dovrà consentire un numero di intervalli di dimensione almeno pari a h. se ciò non si verifica un messaggio di errore mette l'utente in guardia consigliando di ridurre il numero di suddivisioni da effettuare lungo l'arco. Se tale eventualità non si verifica il programma prosegue ricercando l'incremento da attribuire a ciascun intervallo per ricoprire l'intero arco

con elementi via via crescenti della quantità costante da determinare. Determinate dunque le coordinate del punto medio dell'arco si calcolerà il valore dell'incremento Kx come segue: sia Nx il numero di suddivisioni per il singolo arco ed Xm la ordinata del punto medio dell'arco (l'algoritmo lavora sulla sola ordinata ricavando poi la ascissa del punto mediante la condizione di appartenenza all'arco di circonferenza); utilizzando un algoritmo simile a quello utilizzato per la suddivisione del profilo avremo che, indicate con Xd ed Xs le ordinate dei punti sul profilo di destra e di sinistra rispettivamente, risulta:

$$Xd - Xs = Nx * \eta + 2 * Kx * s$$

dalla quale si ricava

$$Kx = \frac{Xd - Xs - Nx * \eta}{2 * s}$$

che ci fornisce la espressione cercata per Kx; in essa ovviamente s assume il significato già visto nel caso della suddivisione verticale del

dente da S_1 ed S_2. Avremo cioè che impostato dall'utente il valore Jm dove si vuole la massima concentrazione, S sarà definito come:

$$S = Sa + Sb$$

Ove

$$Sa = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + (Jm - 1)$$

$$Sb = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots + (\frac{Nx}{2} - Jm - 1)$$

Il problema della discretizzazione del dente sarebbe dunque in teoria risolto; l'unione dei punti corrispondenti su archi adiacenti consentirebbe infatti di individuare il reticolo ricercato.

Le cose in realtà non stanno così esistendo, come anticipato, zone del dente particolarmente critiche dove il sistema illustrato non funziona correttamente; la soluzione del problema in tali zone e l'individuazione delle stesse sarà argomento del prossimo paragrafo.

Si riporta il diagramma a blocchi dell'algoritmo illustrato. (Fig. 4.4 a fine capitolo).

4.5 Individuazione del reticolo di discretizzazione in zone con profili aventi tangente di eguale segno

La particolare forma del dente è la causa della necessità di sviluppare un apposito programma di calcolo per otterare la mesh di discretizzazione.

Uno dei problemi da affrontare in tal senso è quello di raccordare zone del dente i cui profili opposti presentano la tangente di eguale segno, in tal caso infatti non è possibile interpolare un arco di circonferenza tra i due profili mantenendo tale arco pressoché perpendicolare al profilo stesso, si dovrà pertanto ricorrere ad una diversa strategia.

Si è pertanto stabilito di saltare il procedimento di calcolo per gli archi con estremi su punti del profilo con tangente di eguale segno, contare mediante un indice gli archi saltati e reintrodurre un eguale numero di suddivisioni in direzione verticale, suddivisioni create dividendo l'intervallo corrispondente a tali zone in un numero di parti uguali al numero di archi saltati; tale procedura verrà adottata per tutti gli intervalli individuati dalle coppie di punti corrispondenti individuati dalla precedente suddivisione sugli archi che si affacciano alla zona in esame.

Effettuata dunque la suddivisione verticale dell'intervallo individuato da ciascuna coppia di nodi corrispondenti sugli archi che si affacciano a tale zona, si attribuirà a ciascuna di queste suddivisioni l'ordinata anch'essa individuata dividendo semplicemente l'intervallo in direzione X in un numero di parti uguale al numero di archi soppressi; in tal modo si ottiene una ottima risposta per quel che concerne la perpendicolarità ai profili opposti ed al contempo non si generano archi adiacenti con curvatura opposta. L'unico aspetto negativo di tale strategia è che in tali zone si interrompe il processo di graduale crescita tra intervalli adiacenti, tale aspetto tuttavia non influenza in maniera sensibile la bontà della mesh di discretizzazione in quanto interessa un numero limitato di archi e anche perché il principio di crescita costante adottato doveva semplicemente garantire elementi adiacenti dimensionalmente molto dissimili tra loro.

4.6. La discretizzazione del profilo in prossimità di punti angolosi

La presenza sul profilo del dente di punti ove si ha un brusco cambiamento del raggio di curvatura del profilo mette in crisi la strategia finora adottata, in tali zone infatti si vengono a creare situazioni anomale con archi adiacenti aventi raggio di curvatura opposto, ciò si traduce in zone con archi che generano elementi di dimensioni anomale rispetto agli elementi adiacenti oppure archi che si intersecano tra di loro con il risultato in entrambi i casi di compromettere l'affidabilità del successivo calcolo FEM. Tale situazione costringe alla ricerca, come nel caso di tangenti al profilo aventi lo steso segno, di una soluzione ad hoc che consenta di rimanere nei limiti di accuratezza imposti.

I due casi esposti verranno trattati separatamente essendo originati da situazioni diverse.

4.6.1 Soluzione nel caso di archi secanti

In questo caso il programma di calcolo elimina automaticamente gli archi che si intersecano ed il relativo reticolo, il programma per individuare tali zone esegue un controllo su tutti i nodi corrispondenti, arco per arco, quando risulta che la quota dell'arco in esame scende al disotto della quota del nodo corrispondente sull'arco precedente (o come meglio vedremo in seguito non appena la differenza di quota scende al disotto di un valore preimpostato), il programma elimina l'arco e passa al successivo eliminandolo a sua volta se si ripresenta una situazione simile.

La zona del dente così trattata dovrà dunque essere sottoposta ad un nuovo processo di discretizzazione; a tale scopo si verificherà innanzitutto se la zona liberata consente l'inserimento di linee orizzontali e in caso positivo quante linee vanno inserite; tale verifica si baserà sulle dimensioni degli elementi sugli archi adiacenti non eliminati, si inseriranno cioè linee orizzontali se tale inserimento non provoca la creazione di elementi troppo diversi dagli elementi adiacenti.

Se ciò non risulta necessario si uniranno semplicemente i nodi sugli archi superstiti con segmenti rettilinei ricreando così il reticolo nella zona in esame.

4.6.2 Soluzione nel caso di zone con diradamento del reticolo a causa della curvatura opposta degli archi adiacenti

Questa situazione si verifica di frequente nella zona di raccordo del dente anche nel caso di dentature simmetriche, specie se tagliate con interferenza; la soluzione del problema è in questo caso estremamente semplice basterà infatti verificare le dimensioni degli elementi inserendo una linea orizzontale tra i punti medi dei segmenti verticali che uniscono i nodi degli archi adiacenti ogni qualvolta le dimensioni degli elementi diventano tali da risultare doppie dell'elemento precedente. Ovviamente si adopererà un procedimento simile anche quando il rapporto tra le dimensioni degli elementi adiacenti diviene 1/3, 1/4 ecc.; in tal caso si inseriranno 3 e 4 linee rispettivamente. L'algoritmo utilizzato consente in teoria di gestire zone con elementi adiacenti che stanno tra loro secondo un rapporto qualsiasi, tuttavia il procedimento sinora utilizzato per la discretizzazione dovrebbe garantire che tale rapporto si aggiri, anche in tali zone particolari, sempre attorno a valori inferiori a 1/2, 1/3.

4.7 Controllo delle dimensioni degli elementi

Come già ricordato, per ottenere un buon grado di attendibilità del calcolo è necessario che gli elementi della discretizzazione abbiano la forma più regolare possibile; a tal proposito si è vista la limitazione sugli angoli che non devono allontanarsi dal valore di 90° per di più di qualche grado; analoga limitazione esiste per il rapporto tra i lati degli elementi, rapporto che deve mantenersi entro valori di 1/3 , 1/4 .

Per garantire tale proprietà il programma esegue un ulteriore controllo verificando che il rapporto tra i lati del singolo elemento non superi il valore 1/3, introducendo in tal caso un ulteriore arco di suddivisione scongiurando così il pericolo di elementi mal proporzionati.

L'inserimento di tale arco ovviamente provoca l'alterazione del rapporto tra archi adiacenti reimpostato dall'utente, tale alterazione tuttavia viene effettuata al fine di garantire nel successivo studio al FEM un elevato grado di precisione ed essendo questo lo scopo principale del programma di discretizzazione messo a punto, si capisce come le impostazioni effettuate dall'utente passino in secondo piano qualora entrino in conflitto con le esigenze di calcolo.

4.8 Il formato di uscita del programma di calcolo

Come anticipato il programma di discretizzazione del dente altro non è che un programma “accessorio” che consente rapidamente e con precisione di realizzare un reticolo di discretizzazione del dente che garantisca il rispetto delle condizioni necessarie ad evitare errori grossolani nel successivo calcolo al FEM.

Il programma di discretizzazione dovrà allora fornire un’uscita che sia digeribile dai programmi di calcolo al FEM. Allo scopo si è deciso di utilizzare il formato dxf che è il formato di uscita comune dei programmi CAD proprio in quanto i programmi di calcolo al FEM sono in genere in grado di gestire tale formato.

4.9 L'immissione dei dati nel programma di calcolo ed il richiamo dei risultati

La menzionata flessibilità del programma di calcolo si traduce all'atto pratico in un continuo dialogo con il programma di calcolo, di seguito per una illustrazione del programma si riporteranno le varie fasi di immissione dati relativi ad un caso studiato, con il valore immesso tra virgolette:

Inserire in numero di denti Z=? "20"

Inserire il valore del modulo, m=? "2"

Primo angolo di pressione =? "20"

Secondo angolo di pressione =? "26"

Spostamento relativo =? "0"

Valore del raggio di troncatura esterna =? "0"

Addendum nominale utensile =? "0"

Raggio di arrotondamento =? "0"

Quante suddivisioni vuoi sul profilo =? "60"

ic = 8

ir = 20

ifa = 30 — dati in uscita Sez. B

it = 2

itot = 60

Dove vuoi la massima concentrazione di archi ? “10”

iri = 9

ifa = 59 — dati in uscita Sez. C

Che rapporto vuoi tra min. e max. concentrazione, 1/ ? = “5”

S1 = 1176

S2 = 0

Delt = 3.04054054054071 E-02

KK = 2.5337837837837837839 2E-03 dati in uscita Sez. D

Xs 59 = -0.69476449 Ys 59 = 21.98902700

Xd 59 = 0.47008240 Yd 59 = 21.99497800

Quante suddivisioni vuoi per il singolo arco n=? “30”

Dove vuoi la massima concentrazione di settori? = “15”

I dati tra virgolette sono i valori immessi dall'utente gli altri rappresentano le uscite del programma, nel caso specifico alle richieste relative alle caratteristiche geometriche dell'utensile la risposta è stata "0" tale valore attiva le impostazioni di default impostate secondo il proporzionalmente modulare.

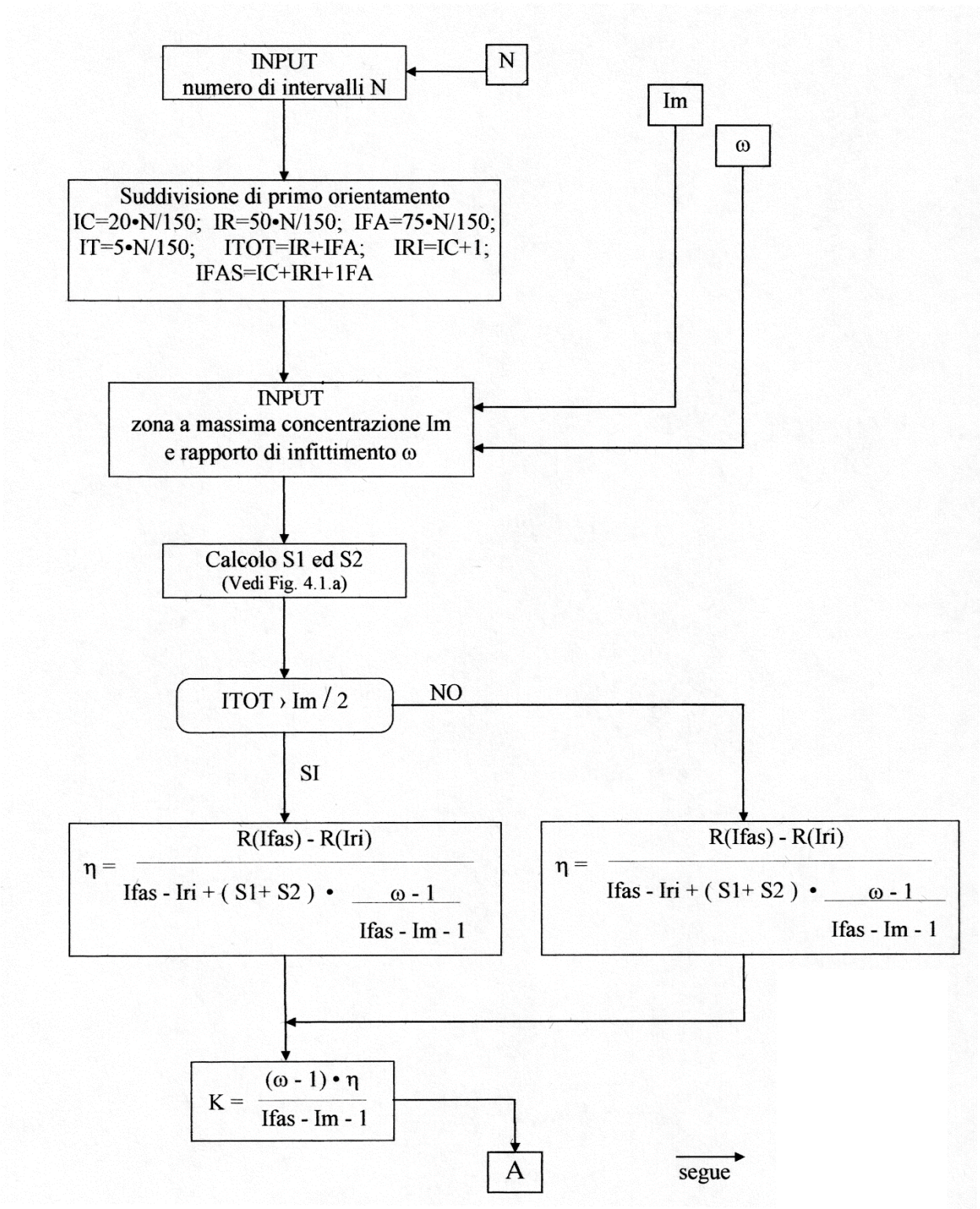
I dati forniti nella sez. B sono i dati relativi alla suddivisione di default del dente dove ic rappresenta il numero di punti individuato sull'arco di circonferenza di troncatura interna, ir quello relativo al profilo di raccordo, ifa quello sul fianco attivo ed it quello sull'arco di circonferenza di troncatura esterna.

Nella sez. C si riporta il valore dell'indice "i" relativo al primo punto sul profilo di raccordo e dell'ultimo del fianco attivo, "iri" ed "ifas" rispettivamente; infine nella sez. D si riportano i valori relativi alla suddivisione effettuata dove S1 ed S2 sono i valori delle costanti illustrate nel paragrafo 4.1, Delt è la dimensione dell'intervallo minimo e KK è il valore dell'incremento relativo a due intervalli consecutivi. Vengono poi riportate le coordinate dello spigolo di testa del dente sui due fianchi opposti in modo da verificare la asimmetria del dente: lo spigolo di testa del dente non rientra infatti nella ricerca del punto di eguale quota sul secondo profilo, per i denti asimmetrici con secondo angolo di pressione inferiore al primo infatti allo spigolo di testa del

dente sul fianco attivo corrisponderebbe un punto sulla circonferenza di troncatura esterna.

I risultati relativi alla suddivisione sono direttamente richiamabili a schermo mentre per quel che concerne la visualizzazione del risultato ottenuto bisognerà ovviamente caricare il file .dxf in uscita in un programma CAD. Visualizzata la mesh di discretizzazione, se non soddisfatti del risultato si potrà far girare nuovamente il programma modificando i parametri caratteristici della suddivisione o, nel caso di affinamenti minimi, modificare la mesh direttamente tramite CAD. Nel corso dello studio tale esigenza non si è mai verificata ed il programma di discretizzazione ha sempre fornito risultati più che soddisfacenti al primo tentativo.

Diagramma a blocchi relativo alla suddivisione del profilo del dente



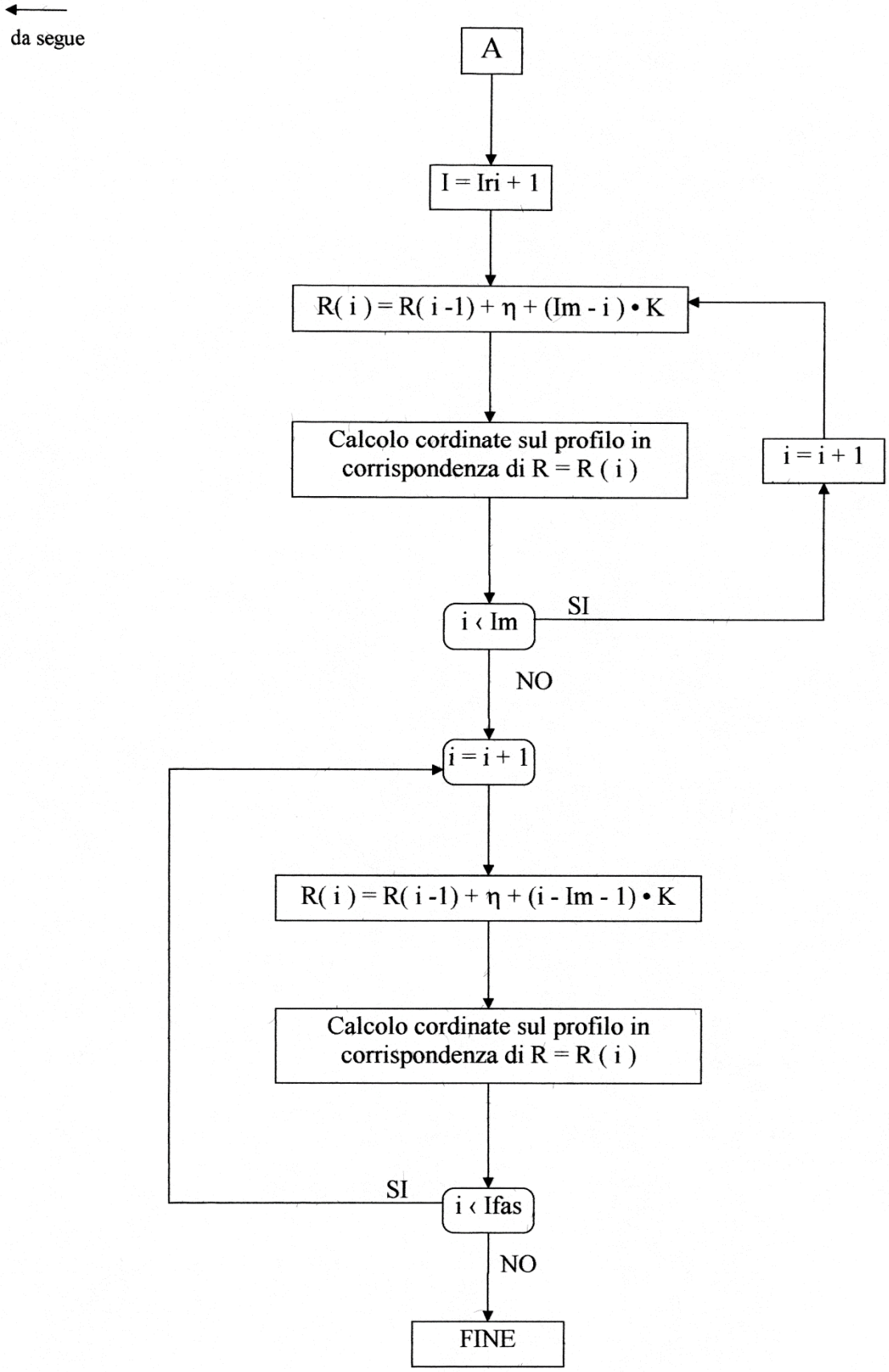

da segue
A
I = Iri + 1
R(i) = R(i -1) + η + (Im - i) • K
Calcolo cordinate sul profilo in corrispondenza di R = R (i)
i = i + 1
i ‹ Im
SI
NO
i = i + 1
R(i) = R(i -1) + η + (i - Im - 1) • K
Calcolo cordinate sul profilo in corrispondenza di R = R (i)
SI
i ‹ Ifas
NO
FINE

Fig. 4.1

Diagramma a blocchi relativo al calcolo delle costanti S1 ed S2

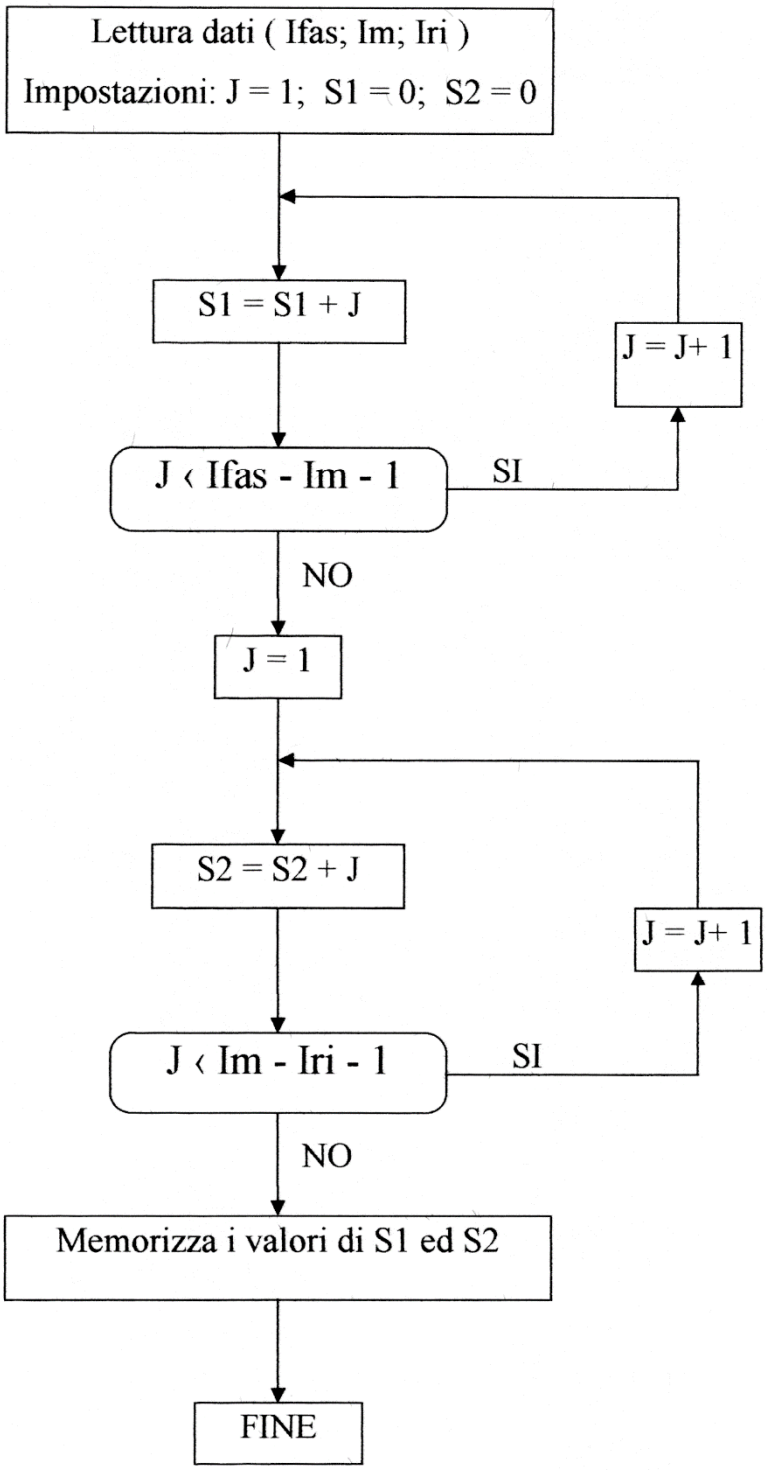
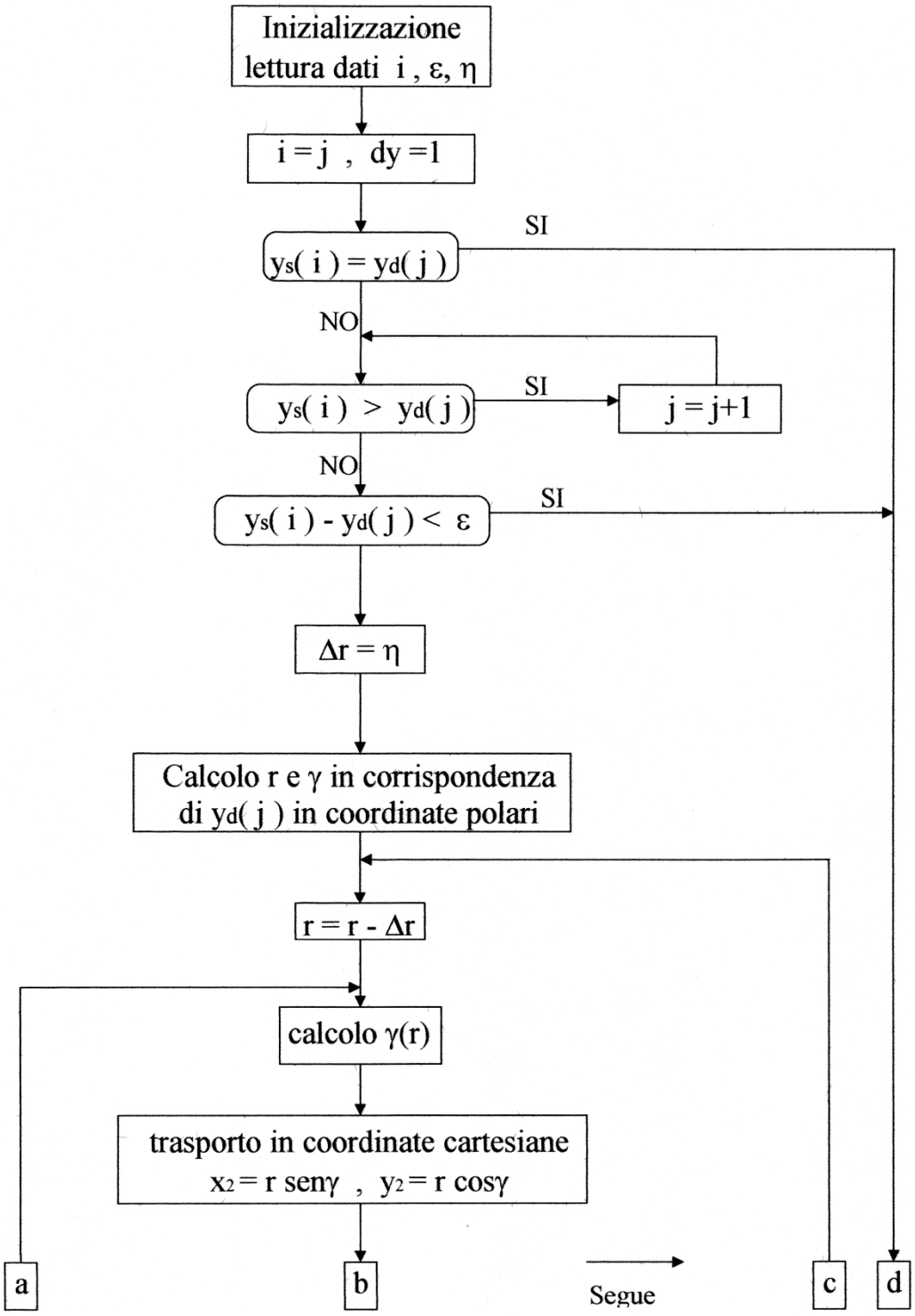


Fig. 4.1.a

Diagramma a blocchi relativo al flusso logico seguito dal programma di calcolo per la ricerca dei punti di egual quota sui due profili



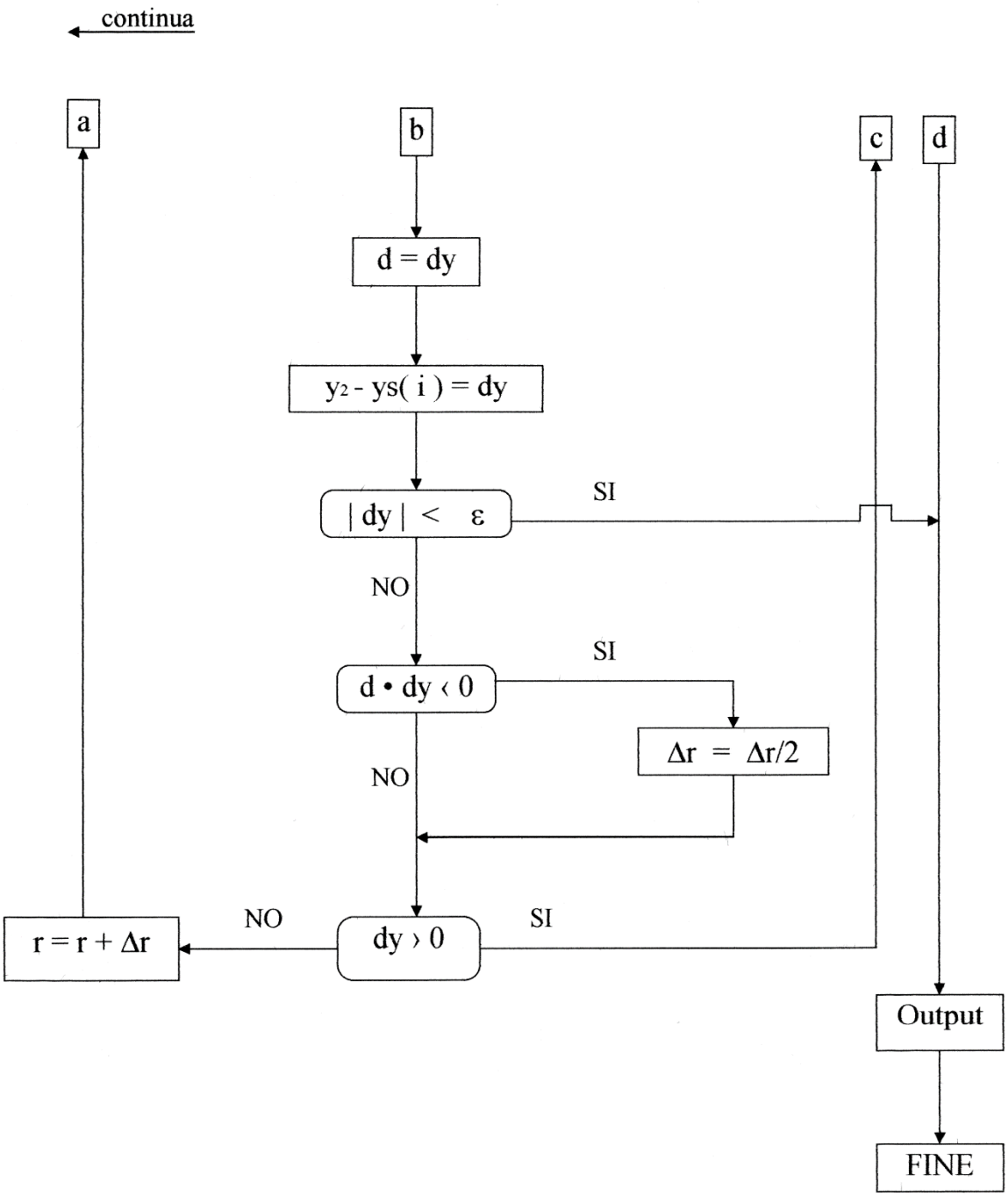

continua
a
b
c
d
d = dy
y2 - ys(i) = dy
| dy | < ε
SI
NO
d • dy ‹ 0
SI
Δr = Δr/2
NO
r = r + Δr
NO
dy › 0
SI
Output
FINE

Fig. 4.2

Diagramma a blocchi relativo al calcolo dell'equazione degli archi di circonferenza

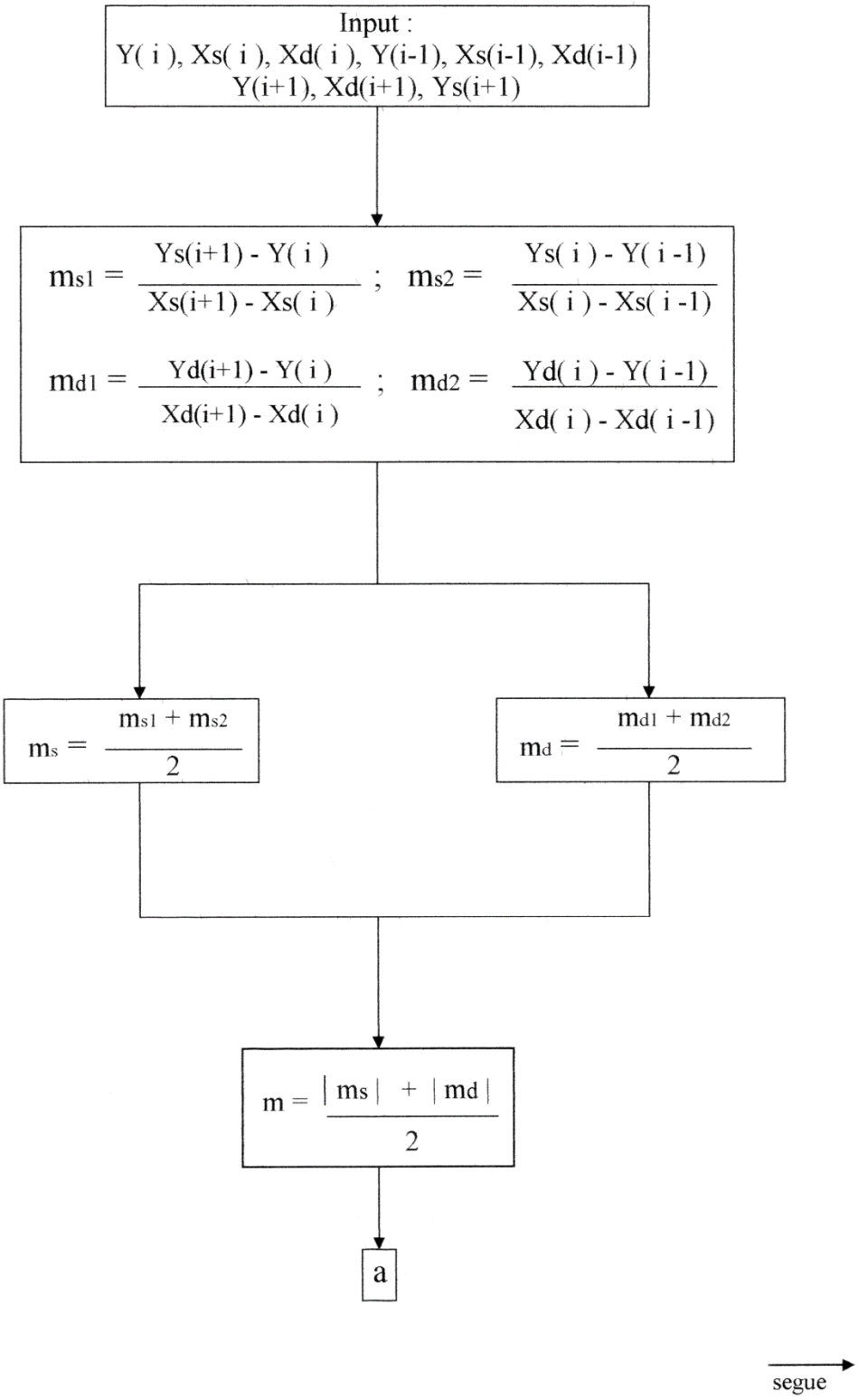


Fig. 4.3

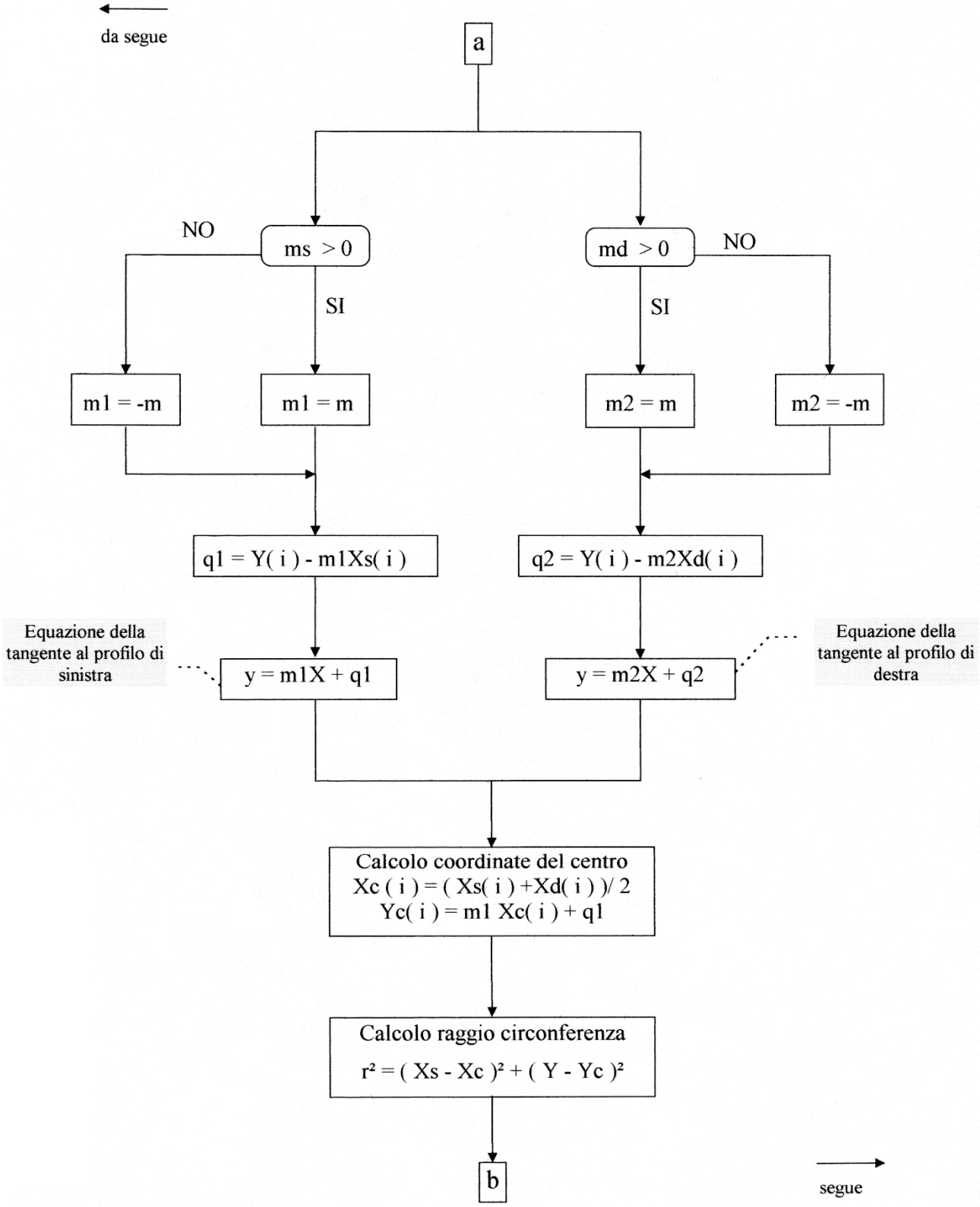

da segue
a
NO
ms > 0
SI
md > 0
NO
SI
m1 = -m
m1 = m
m2 = m
m2 = -m
q1 = Y(i) - m1Xs(i)
q2 = Y(i) - m2Xd(i)
Equazione della tangente al profilo di sinistra
y = m1X + q1
y = m2X + q2
Equazione della tangente al profilo di destra
Calcolo coordinate del centro
Xc (i) = (Xs(i) +Xd(i))/ 2
Yc(i) = m1 Xc(i) + q1
Calcolo raggio circonferenza
r² = (Xs - Xc)² + (Y - Yc)²
b
segue

Fig. 4.3

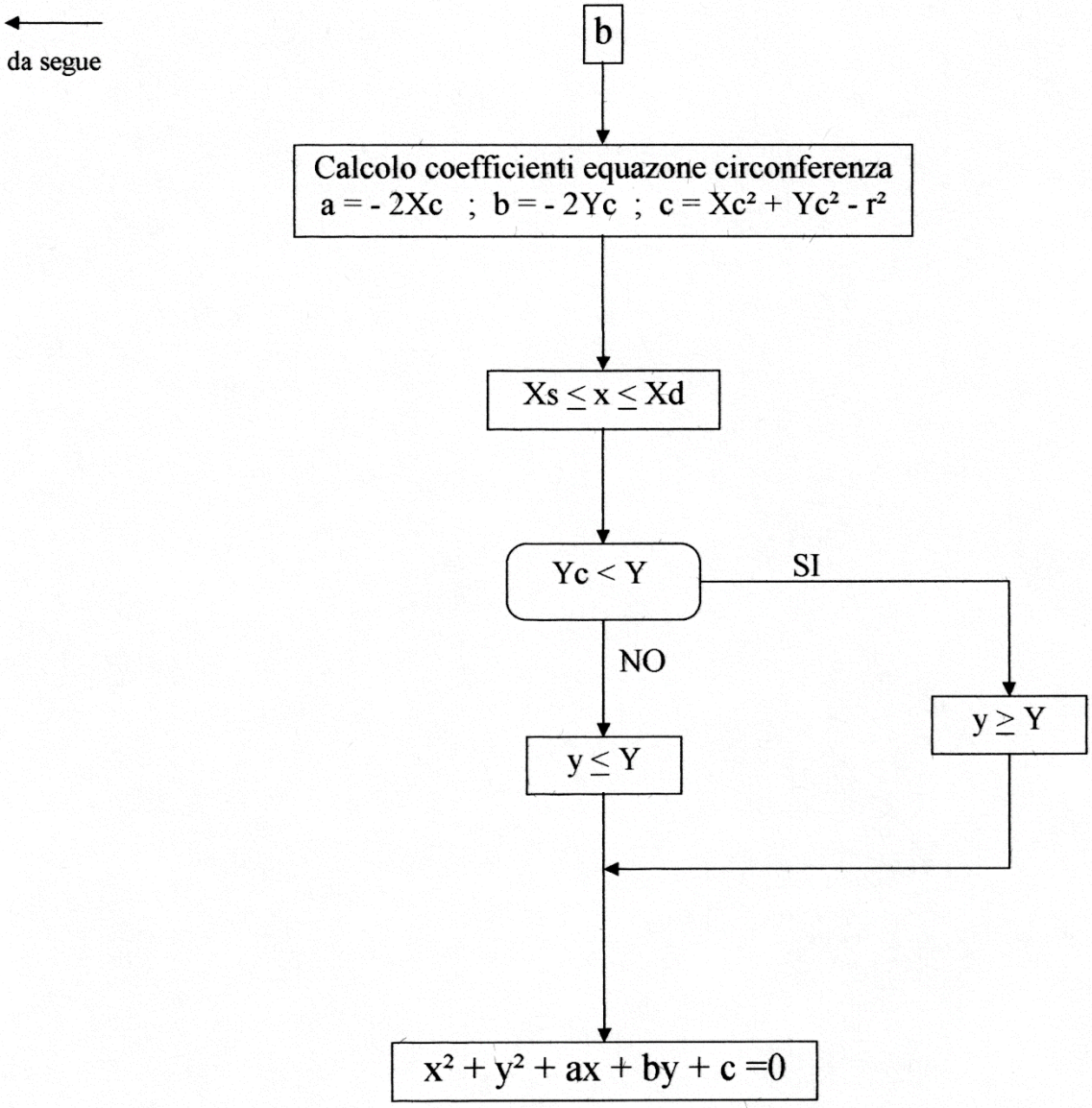

da segue
b
Calcolo coefficienti equazone circonferenza
a = - 2Xc ; b = - 2Yc ; c = Xc² + Yc² - r²
Xs ≤ x ≤ Xd
Yc < Y
SI
NO
y ≥ Y
y ≤ Y
x² + y² + ax + by + c =0

Fig. 4.3

Diagramma a blocchi relativo al processo di suddivisione degli archi

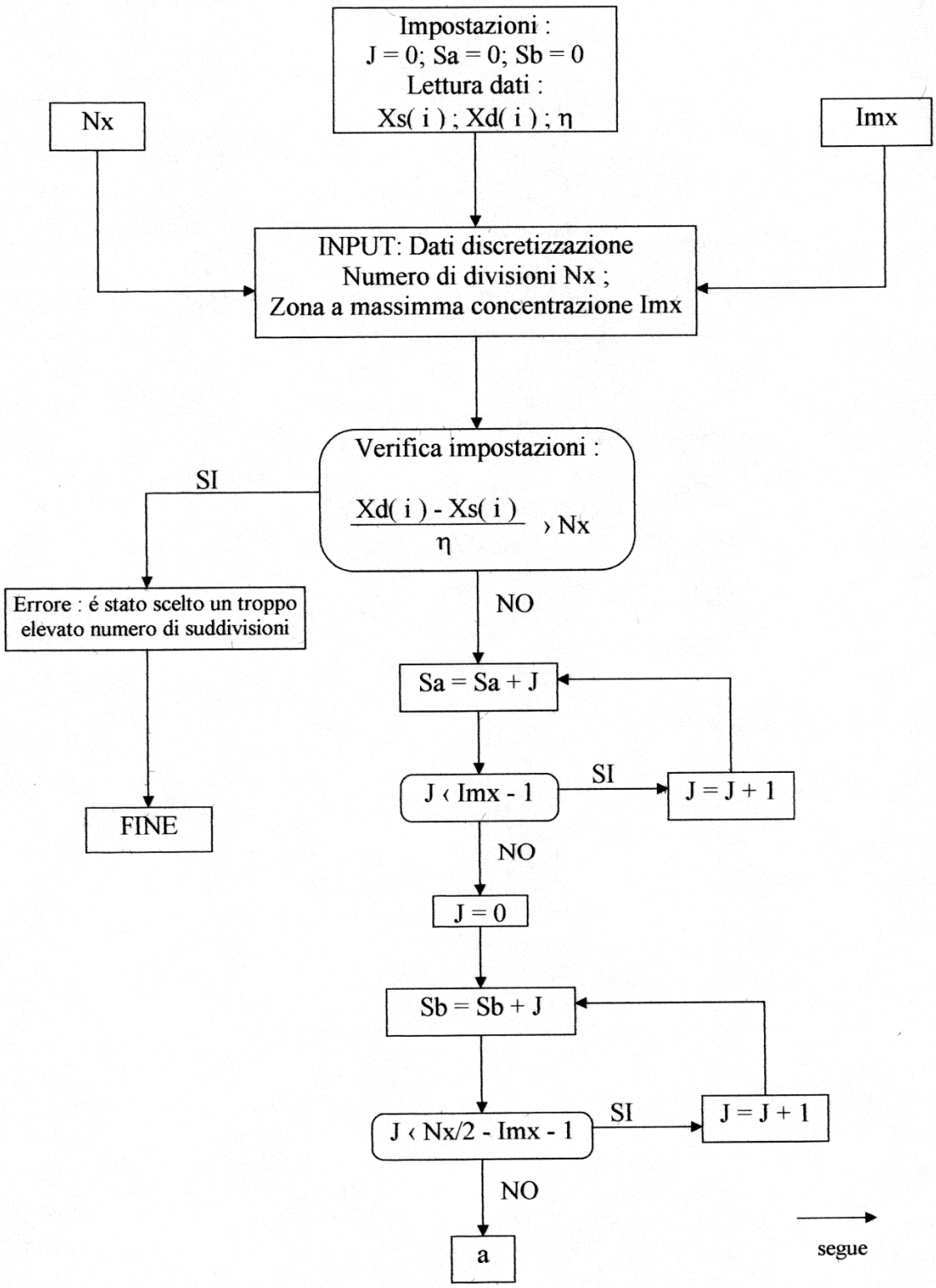


Fig. 4.4

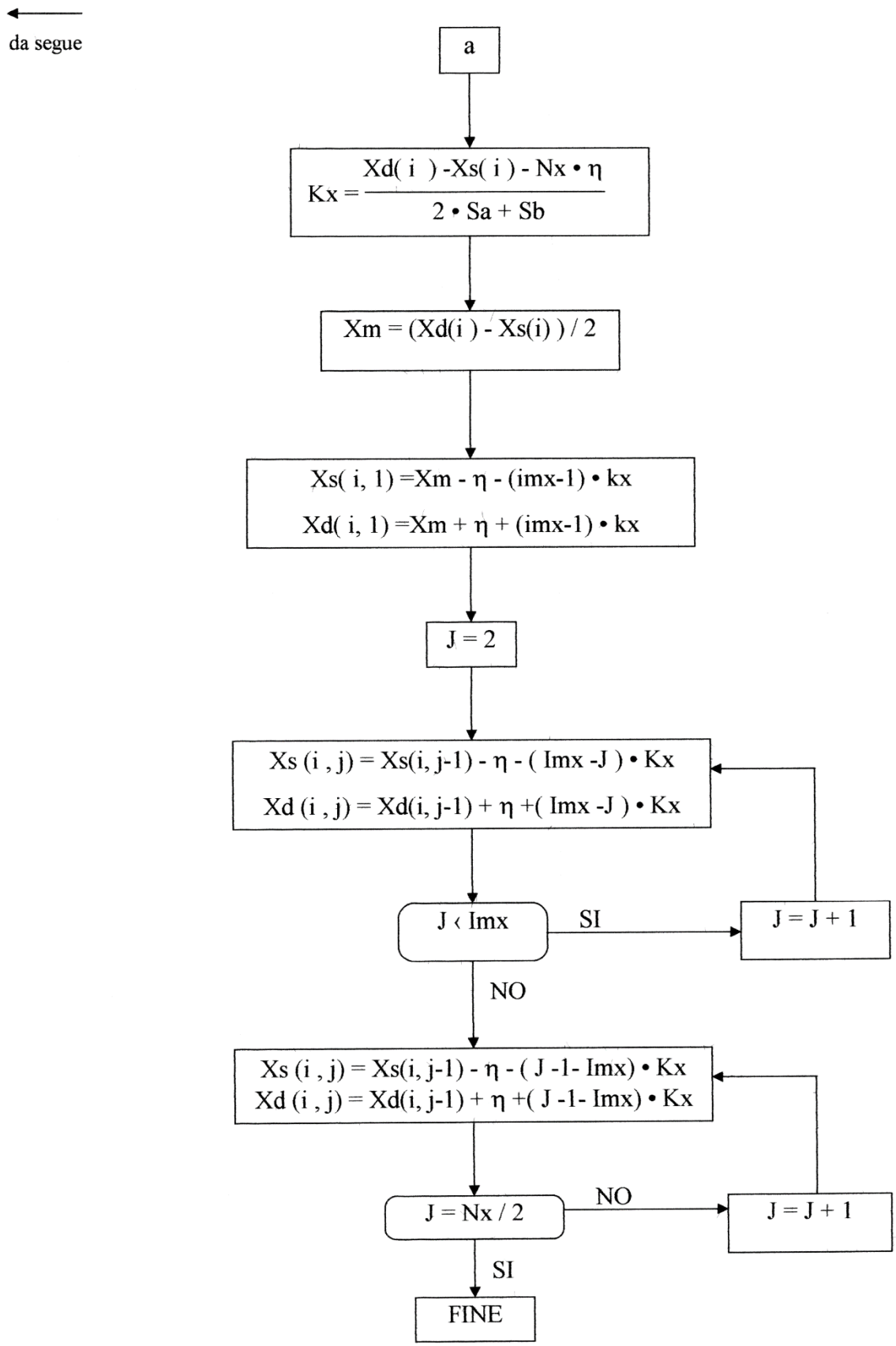

da segue
a
Kx = (Xd(i) -Xs(i) - Nx • η) / (2 • Sa + Sb)
Xm = (Xd(i) - Xs(i)) / 2
Xs(i, 1) =Xm - η - (imx-1) • kx
Xd(i, 1) =Xm + η + (imx-1) • kx
J = 2
Xs (i , j) = Xs(i, j-1) - η - (Imx -J) • Kx
Xd (i , j) = Xd(i, j-1) + η +(Imx -J) • Kx
J ‹ Imx
SI
J = J + 1
NO
Xs (i , j) = Xs(i, j-1) - η - (J -1- Imx) • Kx
Xd (i , j) = Xd(i, j-1) + η +(J -1- Imx) • Kx
J = Nx / 2
NO
J = J + 1
SI
FINE

Fig. 4.4

Capitolo V

L'analisi del dente con il metodo di calcolo FEM

Introduzione

In questa fase dello studio, si sfrutterà il programma messo a punto per studiare al FEM un gran numero di dentature a profilo non convenzionale (secondo angolo di pressione diverso dal primo) raffrontandole con le corrispondenti dentature simmetriche ciò sia al fine di mostrare le potenzialità del programma di discretizzazione messo a punto, sia al fine identificare le caratteristiche delle dentature asimmetriche evidenziandone vantaggi e svantaggi, sia al fine di individuare una relazione che consenta in maniera facile ed intuitiva il passaggio dal dimensionamento della dentatura standard (utilizzando le formule del Lewis o i metodi ISO) al corrispondente ingranaggio asimmetrico avente medesime dimensioni ma caratteristiche meccaniche "migliori" o viceversa, caratteristiche meccaniche identiche ma dimensioni, dunque peso, inferiore.

Di seguito per motivi di sinteticità si riporteranno solo alcuni casi specifici rappresentativi del lavoro svolto.

5.1 La strategia di indagine seguita e la raffrontabilità dei risultati

Pe poter raffrontare i risultati relativi al calcolo FEM di dentature spesso molto dissimili tra loro bisognerà seguire alcune fondamentali regole.

Innanzitutto ricordiamo che il programma di calcolo messo a punto consente di avere sul fianco attivo (quello di sinistra per definizione) la medesima suddivisione del profilo indipendentemente dal valore (dunque dalla forma) del secondo angolo di pressione, ovviamente mantenendo inalterate le caratteristiche della suddivisione stessa del profilo.

Scelto dunque un ingranaggio tipo, andranno definite le variabili di discretizzazione più idonee definendo le aree dove si desidera la maggior concentrazione degli elementi per avere risultati maggiormente attendibili.

L'esperienza insegna che l'area soggetta a maggiori sollecitazioni è la zona di raccordo tra fianco attivo e circonferenza di troncatura interna, in tale zona si vorrà dunque un maggior infittimento del reticolo di discretizzazione, ciò fatto, si visualizzerà il risultato ottenuto e si apporteranno le eventuali necessarie migliorie, la figura 5.1 mostra il

risultato ottenuto con un ingranaggio campione avente modulo m=2 mm numero di denti Z pari a 20 e proporzionamento modulare normalizzato.

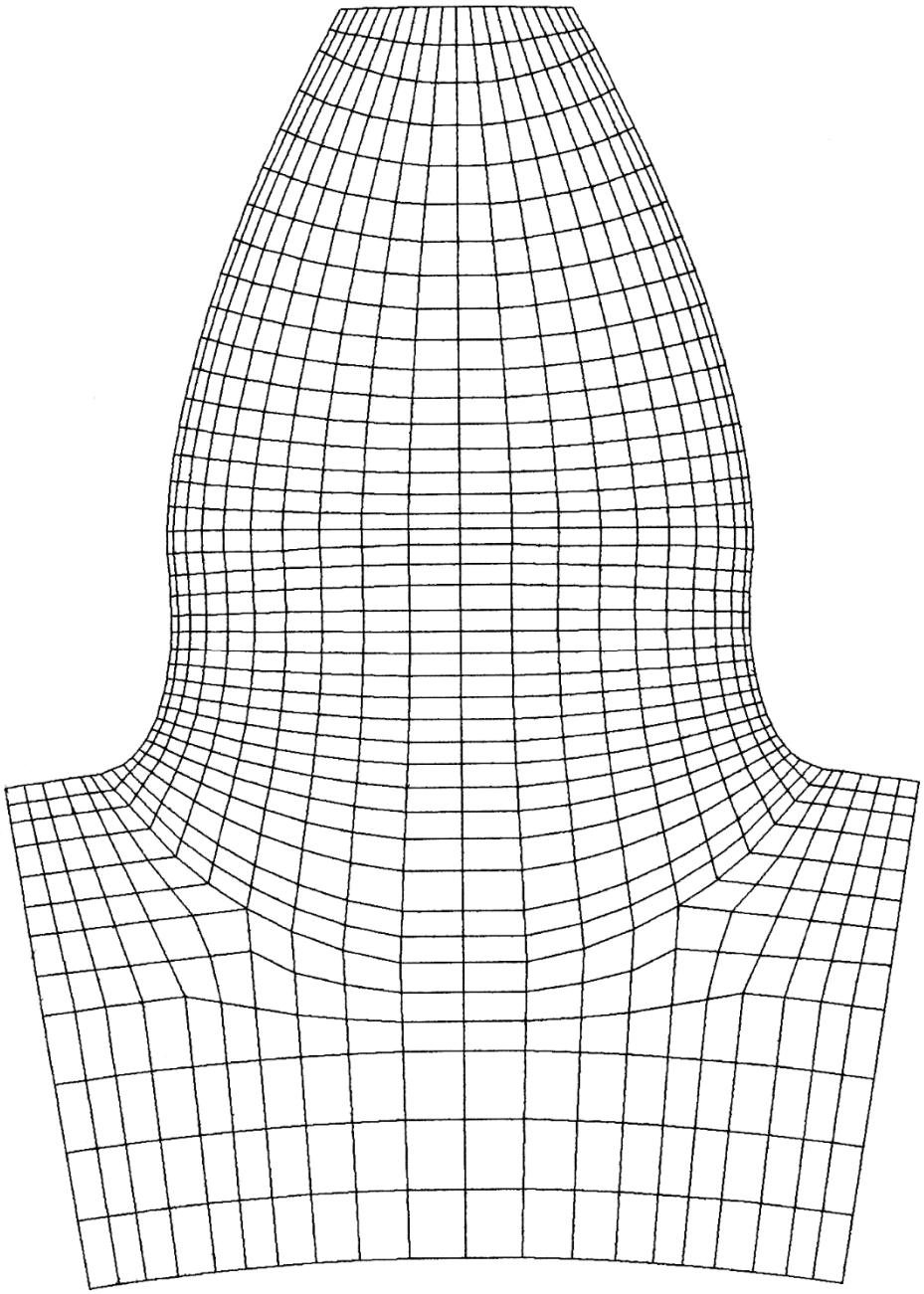


Fig. 5.1

Per quel che concerne la strategia di indagine si comincerà con l'analizzare il dente simmetrico per passare poi all'analisi di denti di pari modulo ma con secondo angolo di pressione differente, analizzando di volta in volta gli effetti della variazione del secondo angolo di pressione sullo stato tensionale del dente.

Esaminato un discreto numero di casi si passerà dunque alla ricerca del dente asimmetrico avente diverso modulo ma medesime caratteristiche in termini di robustezza meccanica.

Per ovvie ragioni di sinteticità di seguito viene riportato un estratto dello studio effettuato per un numero limitato di casi, i risultati sono raccolti per semplicità in tabelle riassuntive.

5.2 Analisi degli effetti della variazione del secondo angolo di pressione.

Come anticipato partiremo analizzando il dente simmetrico dunque varieremo il secondo angolo di pressione a parità di altre caratteristiche e valuteremo gli effetti di tale variazione in termini di robustezza meccanica del dente. Per completezza si varierà anche il punto di applicazione del carico e si analizzerà l'effetto di tale variazione. Questa fase del calcolo costituisce una sorta di verifica della bontà dei risultati ottenuti infatti gli effetti legati a questa variazione sono del tutto prevedibili dal punto di vista qualitativo e costituirà un modo per identificare eventuali errori.

La tabella V.I riporta i risultati dell'analisi per il dente simmetrico 20°- 20° e per due sue varianti 20°- 23° e 20°- 26°. L'analisi è stata effettuata per 5 posizioni diverse del carico corrispondenti a 5 istanti diversi dell'ingranamento, in esse è compresa anche al situazione limite (mai reale) di carico applicato in corrispondenza dello spigolo di testa del dente. Questa situazione verrà considerata con particolare attenzione in quanto ci pone in una condizione di vantaggio in termini della sicurezza del calcolo.

La prima colonna della tabella riporta il numero di identificazione del nodo sollecitato dalla forza di contatto. La mesh realizzata per il dente simmetrico, riferendosi al fianco attivo del dente, continuerà ad essere valida anche nel caso di denti dal profilo asimmetrico rimanendo di fatto il reticolo di discretizzazione inalterato grazie alle caratteristiche del mesh generator realizzato. La seconda colonna della tabella ripota i valori degli angoli di pressione del dente dunque consente di identificare di che tipo di dente si tratta, la terza colonna identifica con un numero l'elemento maggiormente sollecitato all'interno del dente, la quarta colonna mostra invece il valore della tensione ideale corrispondente calcolata tramite la teoria di Von Mises.

Il valore della tensione ideale viene riportato in tre diversi sistemi di misura (Sistema Britannico, Sistema Internazionale e sistema tecnico degli ingegneri).

Le ultime due colonne sono infine le più significative in quanto consentono un rapido raffronto dello stato di tensione del dente, nella quinta colonna troviamo infatti un indice definito "indice di sollecitazione" $I_s = (\sigma_{ia} / \sigma_{is}) \times 100$ che, posto pari a 100 per gli ingranaggi simmetrici, assume il valore corrispondente per gli ingranaggi asimmetrici.

L'ultima colonna è infine dedicata alla variazione percentuale dello stato di tensione tra dente simmetrico e dente asimmetrico ovvero

$\Delta\sigma\% = ((\sigma_{ia} - \sigma_{is}) / \sigma_{is}) \times 100$, anche questa grandezza come la precedente permette una rapida valutazione delle caratteristiche del dente.

Le figure 5.2 a,b,c, mostrano il reticolo di discretizzazione in corrispondenza del profilo di raccordo sui due fianchi e la relativa numerazione degli elementi, ciò consentirà di orientarsi all'interno del reticolo di discretizzazione.

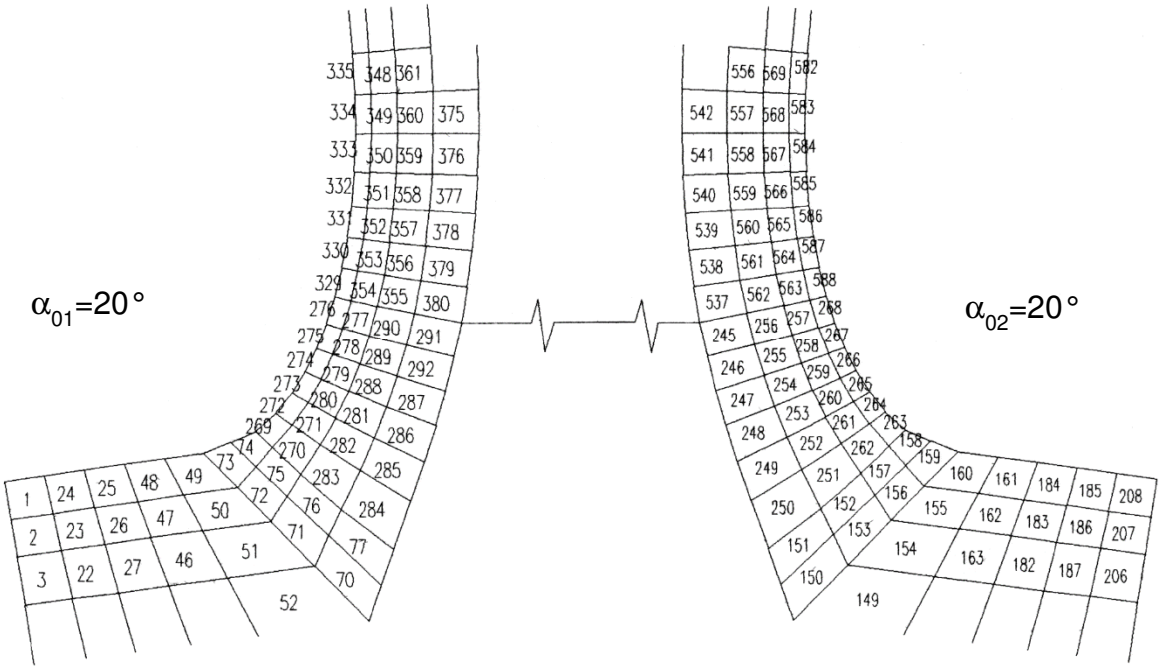


Fig. 5.2.a

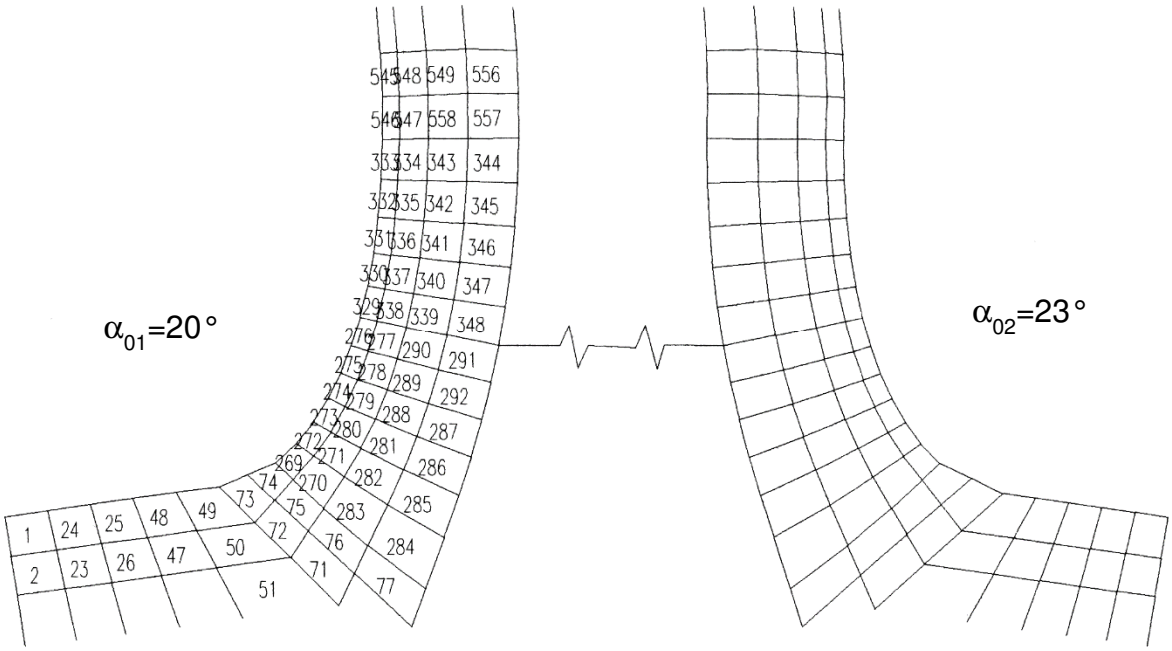


Fig. 5.2.b

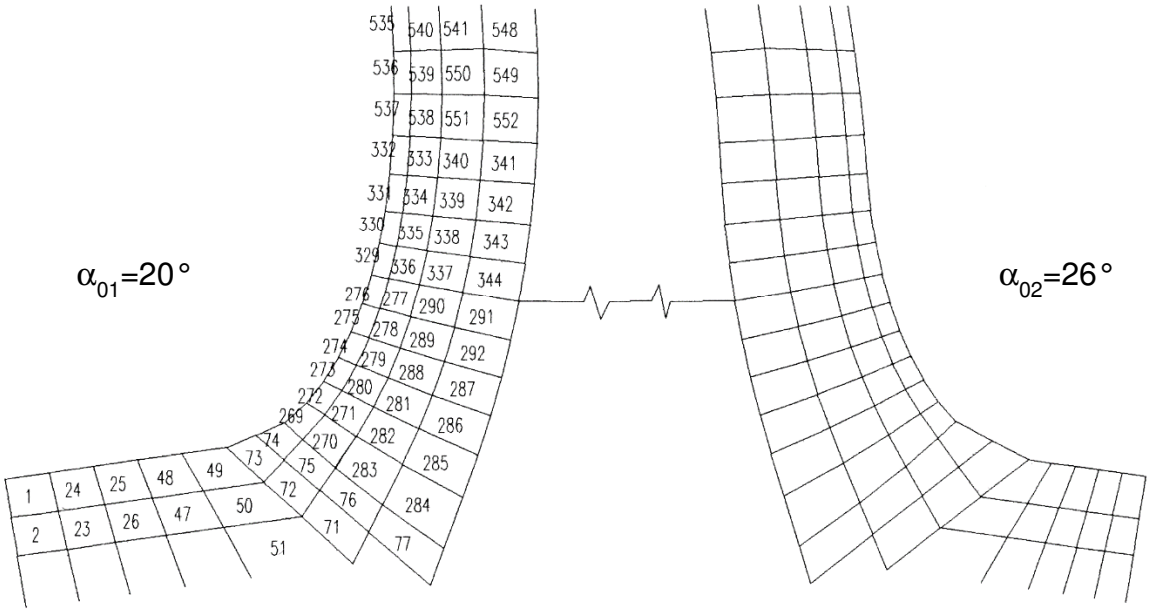


Fig. 5.2.c

Come si può osservare dalla tabella V.I a pagina seguente la zona di maggior interesse pratico ed in particolare l'elemento maggiormente sollecitato (l'elemento 273) sono sempre collocati nella medesima zona del dente indipendentemente dalla posizione del carico. La tabella consente inoltre di rilevare la scarsa influenza della posizione del carico in termini di variazione percentuale della tensione, ciò consente di limitare la variazione del carico ad una casistica inferiore; la riduzione percentuale di tensione inoltre decresce, seppur di poco in corrispondenza delle condizioni di carico più gravose lasciando intuire una "predisposizione" degli ingranaggi asimmetrici verso le condizioni di carico più gravose.

Nodo caricato	Dente $\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Elemento a σ_{max}	Carico		σ_i	I_s	$\Delta\sigma\%$
			Lbt	N	kg/mm^2		
836	20° - 20°	273	1000	4445.3	2.05	100	-
	20° - 23°	273	1000	4445.3	1.96	95.29	-4.7
	20° - 26°	273	1000	4445.3	1/86	90.8	-9.19
847	20° - 20°	273	1000	4445.3	2.12	100	-
	20° - 23°	273	1000	4445.3	2.02	95.24	-4.76
	20° - 26°	273	1000	4445.3	1.93	90.71	-9.29
848	20° - 20°	273	1000	4445.3	2.2	100	-
	20° - 23°	273	1000	4445.3	2.09	95.2	-4.8
	20° - 26°	273	1000	4445.3	1.99	90.64	-9.36
867	20° - 20°	273	1000	4445.3	2.23	100	-
	20° - 23°	273	1000	4445.3	2.12	95.18	-4.82
	20° - 26°	273	1000	4445.3	2.02	90.6	-9.4
868	20° - 20°	273	1000	4445.3	2.26	100	-
	20° - 23°	273	1000	4445.3	2.16	95.16	-4.84
	20° - 26°	273	1000	4445.3	2.05	90.56	-9.44

Tabella V.I

A conferma dei risultati ottenuti si è ampliata la casistica esaminata includendo denti con secondo angolo di pressione pari a 28°, 30°, 10° e 16° analizzando così anche denti con secondo angolo di pressione inferiore al primo, la tabella V.II che segue si differenzia dalla V.I solo per il fatto di contemplare un solo caso di carico, situazione questa che come verificato in precedenza non toglie alcuna generalità ai risultati specie se si considera la condizione di carico più gravosa (carico in corrispondenza dello spigolo di testa del dente, nodo 868).

Nella tabella V.II i dati relativi al dente simmetrico sono quelli evidenziati con fondo grigio, questi infatti costituiscono il metro di paragone per valutare il dente asimmetrico.

Nodo caricato	Dente $\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Elemento a σ_{max}	Carico		σ_i	I_s	$\Delta\sigma\%$
			Lbt	N	kg/mm^2		
868	20° - 10°	273	1000	4445.3	2.68	118.14	18.14
	20° - 16°	273	1000	4445.3	2.42	106.76	6.76
	20° - 20°	273	1000	4445.3	2.26	100	-
	20° - 23°	273	1000	4445.3	2.16	95.16	-4.84
	20° - 26°	273	1000	4445.3	2.05	90.56	-9.44
	20° - 28°	273	1000	4445.3	1.95	86.13	-13.87
	20° - 30°	273	1000	4445.3	1.92	84.47	-15.26

Tabella V.II

Dalla tabella V.II è possibile osservare che la variazione di tensione percentuale cresce al crescere della differenza tra gli angoli di pressione sui due profili opposti; questa proprietà ci spinge nella ricerca di una relazione tra differenza tra gli angoli di pressione sui due profili e variazione percentuale di tensione.

A tale scopo è stata redatta la tabella V.III; in questa tabella sono riportati, oltre ad una sintesi delle tabelle precedenti anche il rapporto tra variazione percentuale di tensione e differenza tra gli angoli di pressione $\Delta\sigma\%/\Delta\alpha$ e la variazione percentuale di superficie del dente. Questa ultima grandezza ci fornisce un ulteriore parametro per la valutazione delle caratteristiche del dente asimmetrico: a parità di spessore in direzione assiale, tale variazione corrisponde alla variazione percentuale di volume dunque di peso della fascia dentata; data l'impossibilità di definire geometricamente la morfologia della ruota dentata ci riferiremo di conseguenza alla sola superficie racchiusa dal profilo del dente e dalla circonferenza di troncatura interna. Il calcolo di tale superficie può essere facilmente ottenuto dal sistema CAD e ciò evidenzia ancora una volta l'utilità di utilizzare quale formato di uscita del programma di generazione della mesh il formato dxf.

Dalla tabella V.III si può osservare come risulti sconveniente ridurre il secondo angolo di pressione in quanto tale riduzione comporta

un notevole indebolimento del dente pur consentendo notevoli riduzioni di peso; contrariamente gli ingranaggi con secondo angolo di pressione superiore al primo risultano sensibilmente più robusti con incremento di peso estremamente contenuti, ciò lascia presagire la possibilità di costruire ingranaggi di dimensioni ridotte ma aventi le medesime caratteristiche prestazionali

Dente $\alpha_{01} - \alpha_{02}$	$\Delta\alpha$	I_s	$\Delta\sigma\%$	$\Delta\sigma\% / \Delta\alpha$	ΔA
20° - 10°	- 10°	118.14	18.14	1.81	-4.25
20° - 16°	- 4°	106.76	6.76	1.69	-1.36
20° - 20°	-	100	-	-	-
20° - 23°	3°	95.16	-4.84	1.61	0.85
20° - 26°	6°	90.56	-9.44	1.57	1.6
20° - 28°	8°	86.13	-13.87	1.59	2.08
20° - 30°	10°	84.47	-15.26	1.52	2.54

Tabella V.III

Lo scopo della tabella V.III è comunque quello di verificare la esistenza di un qualche legame tra variazione percentuale di tensione

massima e differenza tra gli angoli di pressione dei due fianchi del profilo del dente; a tal proposito i risultati ottenuti sono stati graficati in un piano cartesiano con i risultati riportati in figura 5.3

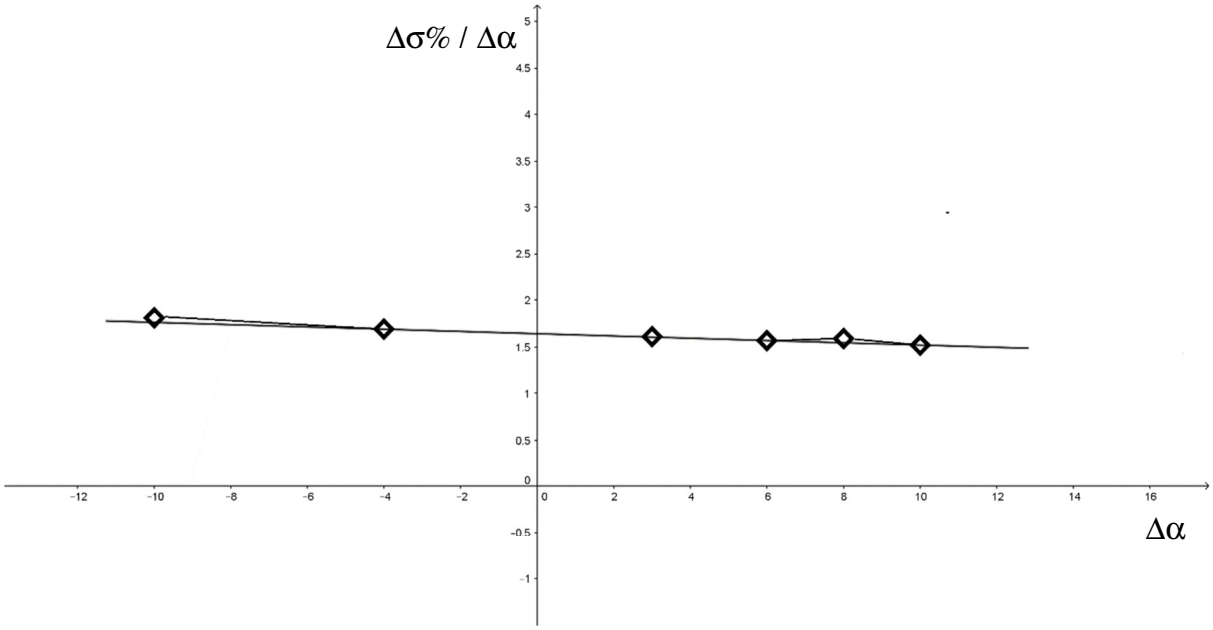


Figura 5.3

Dal grafico in figura si evince la possibilità di interpolare una retta tra i dati relativi al legame tra $\Delta\sigma\% / \Delta\alpha$ ed il $\Delta\alpha$ stesso. Prima di ricercare la equazione di questa retta si preferisce verificare questa proprietà su di un diverso tipo di ingranaggio caratterizzato da un angolo di pressione di soli 17,5°, in questo modo si verificheranno le proprietà evidenziate anche nel caso di angolo di pressione diverso dal valore di 20° finora considerato. La tabella che segue presenta la stessa chiave di lettura delle tabelle realizzate per il dente precedente. Anche in questo

caso il carico è stato applicato in corrispondenza del nodo sullo spigolo di testa del dente ed anche in questo caso l'elemento maggiormente sollecitato è risultato l'elemento 273 che occupa una posizione molto simile alla posizione osservata in precedenza. La tabella V.IV evidenzia inoltre l'ottima corrispondenza tra i risultati delle due diverse analisi.

Dente $\alpha_{01} - \alpha_{02}$	$\Delta\alpha$	I_s	$\Delta\sigma\%$	$\Delta\sigma\% / \Delta\alpha$	ΔA
17.5° - 12°	- 5.5°	110.07	10.07	1.83	-2.38
17.5° - 14°	- 3.5°	106.34	6.34	1.81	-1.8
17.5° - 17.5°	-	100	-	-	-
17.5° - 20°	2.5°	95.79	-4.21	1.68	0.08
17.5° - 23°	5.5°	90.99	-9.01	1.64	1.69
17.5° - 26°	8.5°	85.05	-14.95	1.67	2.46
17.5° - 30°	12.5°	80.55	-19,45	1.56	3.41

Tabella V.IV

Anche in questo caso i risultati relativi sono stati graficati per verificare la presenza di un legame tra $\Delta\sigma\% / \Delta\alpha$ ed il $\Delta\alpha$ stesso, i risultati sono mostrati dalla figura 5.4

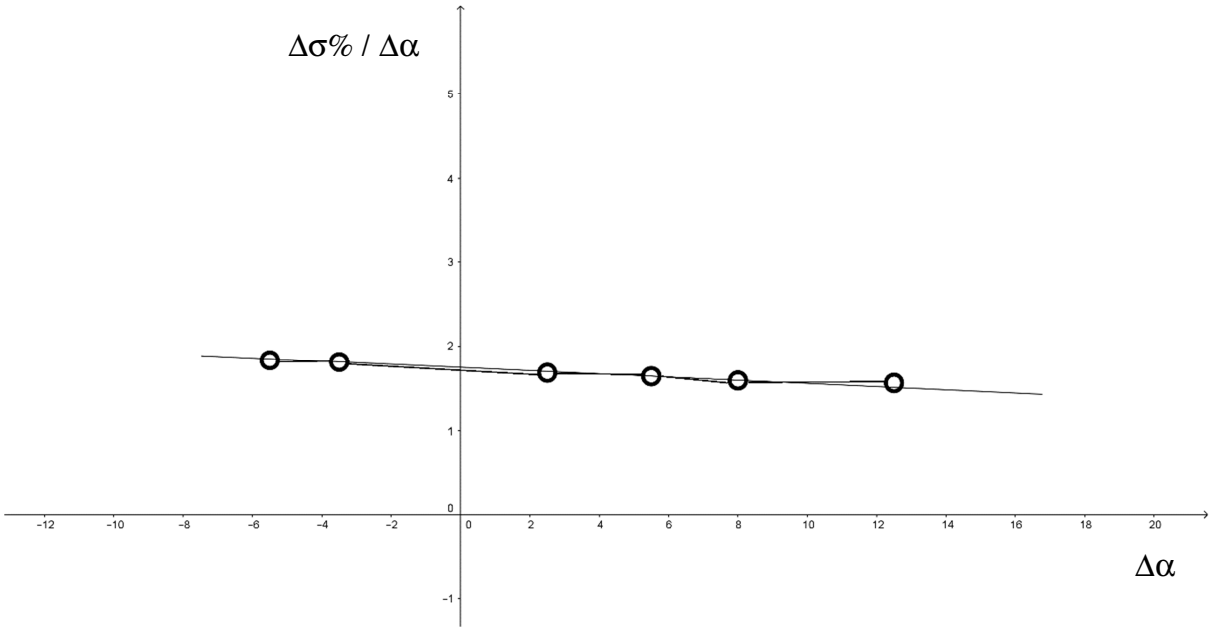


Figura 5.4

L'ottima corrispondenza tra i casi esaminati ci spinge a riportare su di un unico grafico i risultati ottenuti dunque sulla base di essi (grafico in figura 5.5) identificare la equazione della retta interpolata

$$\Delta\sigma\% / \Delta\alpha = 1.65 - 0.013\ \Delta\alpha$$

Dalla quale otteniamo la relazione tra $\Delta\sigma\%$ e $\Delta\alpha$.

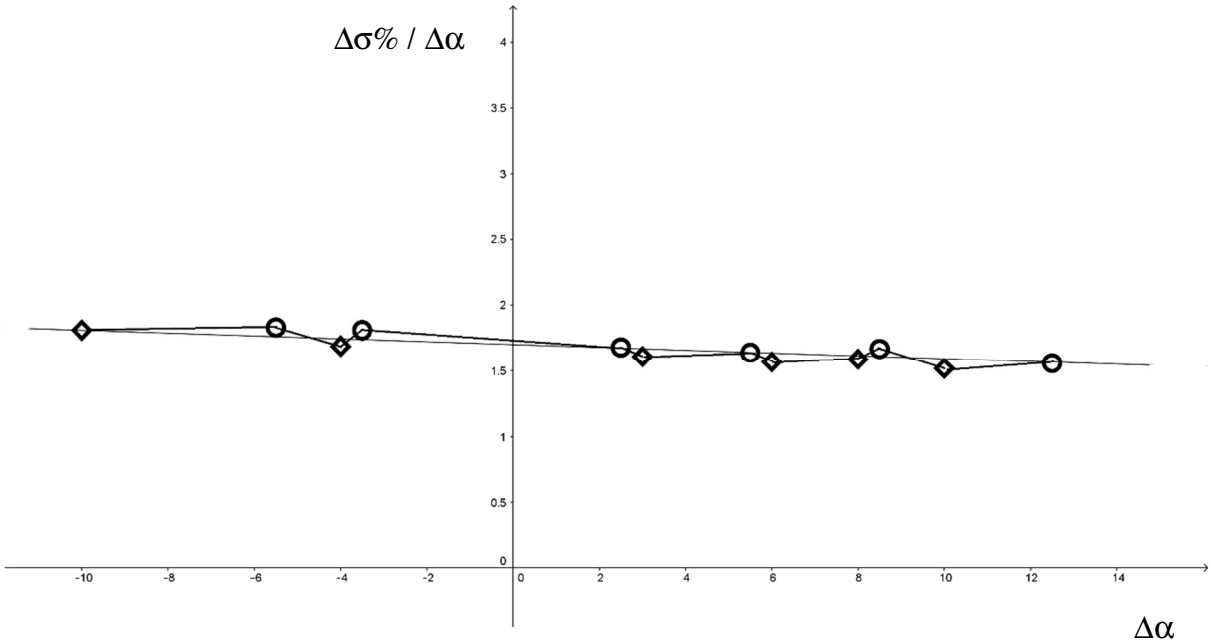


Figura 5.5

Avremo cioè:

$$\Delta\sigma\% = (1.65 - 0.013\ \Delta\alpha) \cdot \Delta\alpha \qquad (5.2.2)$$

questa relazione tornerà utile in seguito quando alla ricerca del dente asimmetrico equivalente si ridurrà percentualmente il modulo di una quantità pari a $\Delta\sigma\%$.

5.3 Ricerca del dente asimmetrico con la medesima resistenza meccanica di un dato dente simmetrico

Come anticipato, il passo successivo nell'analisi delle dentature asimmetriche è la ricerca del dente asimmetrico avente secondo angolo di pressione superiore al primo, modulo ridotto e la medesima resistenza meccanica del dente simmetrico di riferimento.

La ricerca si limiterà a denti con secondo angolo di pressione superiore al primo in quanto come evidenziato nel corso del presente studio tali dentature presentano caratteristiche meccaniche superiori rispetto alle dentature con secondo angolo di pressione inferiore.

Per quel che riguarda la scelta del valore del modulo del dente asimmetrico avente le medesime caratteristiche del dente simmetrico di riferimento, non esistono in proposito studi documentati pertanto si procederà per tentativi; tuttavia anche in una procedura per tentativi è sensato adottare un criterio razionale al fine di limitare la dispersione di risorse. Per tale ragione si è pensato di ridurre percentualmente il modulo del dente asimmetrico di una quantità pari all'incremento di robustezza osservato per il dente asimmetrico avente gli stessi angoli di pressione e modulo pari al modulo del dente simmetrico di riferimento, in

sostanza cioè si è tentato di sfruttare i risultati ottenuti nel capitolo precedente al fine di avere una linea guida in questa fase dello studio.

Come si vedrà in seguito questa procedura ha consentito di raggiungere risultati molto interessanti.

Il primo dente asimmetrico esaminato è stato un 20° – 26° con modulo ridotto del 10% rispetto al modulo del simmetrico di riferimento; tale riduzione è stata scelta come primo tentativo in quanto come rilevabile nella tabella V.II il dente asimmetrico di pari modulo risultava meno sollecitato del 9.44%. I risultati relativi a tale primo tentativo sono riportati nella tabella V.V:

$m_0 = m_0 - m_0 \cdot 0.1 = 1.8$ mm			Tensione massima (N / mm^2) corrispondente al carico sui nodi:			Superficie del dente (mm^2)	
$\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Modulo (mm)	Carico (N)	836	848	868	A	ΔA%
20° - 20°	2	4445.3	20.12	21.52	22.23	13.4574	-
20° - 26°	1.8	4445.3	20.29	21.66	22.35	11.0758	-17.69%
$\Delta\sigma$%			0.82%	0.65%	0.57%		

Tab V.V

I risultati in tabella mostrano un'ottima corrispondenza tra i valori della tensione, tale corrispondenza è tanto migliore se si pensa che il primo tentativo è stato fatto in modo approssimato, si è pertanto

proceduto alla riduzione del modulo esattamente del 9.44% ed i risultati sono stati raggruppati nella tabella V.VI:

$m_0 = m_0 - m_0 \cdot 0.1 = 1.811$ mm			Tensione massima (N / mm^2) corrispondente al carico sui nodi:			Superficie del dente (mm^2)	
$\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Modulo (mm)	Carico (N)	836	848	868	A	ΔA%
20° - 20°	2	4445.3	20.12	21.52	22.23	13.4574	-
20° - 26°	1.81	4445.3	20.17	21.53	22.22	11.0758	-17.69%
$\Delta\sigma$%			0.23%	0.05%	-0.05%		

Tab. V.VI

Come si può vedere in questo caso i risultati godono di un'approssimazione ancora migliore pertanto, anziché procedere per tentativi nella ricerca del modulo ridotto in grado di offrire esattamente la stessa robustezza del dente simmetrico, si è preferito verificare su di un maggior numero di casi se la "regola" identificata, ovvero che il modulo del dente asimmetrico "equivalente" è pari al modulo del dente simmetrico di riferimento ridotto percentualmente di una quantità pari alla riduzione percentuale della sollecitazione osservata sul dente asimmetrico di pari modulo, fosse confermata. Se così fosse infatti, visto il legame esistente tra variazione del secondo angolo di pressione e

variazione percentuale della sollecitazione, si potrebbe identificare il modulo ridotto del dente simmetrico semplicemente in funzione della differenza tra secondo e primo angolo di pressione, ovvero essendo il primo angolo di pressione pari a 20° nelle dentature normalizzate, semplicemente in base al valore del secondo angolo di pressione.

Le tabelle che seguono mostrano i risultati ottenuti. A questo punto dunque visto il legame tra riduzione percentuale di tensione e differenza tra gli angoli sui profili opposti identificata dalla

$$\Delta\sigma\% = (1.65 - 0.013\,\Delta\alpha) \cdot \Delta\alpha$$

Potremmo introdurre un indice di asimmetria I_a tale che:

$$I_a = \Delta\sigma\% = (1.65 - 0.013\,\Delta\alpha) \cdot \Delta\alpha \quad (5.3.1.)$$

Allora il modulo del dente asimmetrico equivalente verrà calcolato mediante la

$$m_a = m_0 - m_0 \bullet I_a / 100 \quad (5.3.2.)$$

dove m_a rappresenta il modulo del dente asimmetrico ed m_0 il modulo del dente simmetrico di riferimento. Le tabelle seguenti mostrano i risultati ottenuti comparando dente simmetrico ed asimmetrico equivalente con modulo calcolato mediante la 5.3.2.

$$\Delta\alpha = 3° \qquad I_a = (1.65 - 0.013\,\Delta\alpha)\cdot\Delta\alpha = 4.83$$

$m_0 = m_0 - m_0 \cdot I_a/100$ =1.904mm			Tensione massima (N / mm^2) corrispondente al carico sui nodi:			Superficie del dente (mm^2)	
$\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Modulo (mm)	Carico (N)	836	848	868	A	ΔA%
20° - 20°	2	4445.3	20.12	21.52	22.23	13.4574	
20° - 23°	1.9	4445.3	20.17	21.55	22.25	12.2448	-8.98%
$\Delta\sigma$%			0.23%	0.13%	0.09%		

Tabella V.VII

$$\Delta\alpha = 6° \qquad I_a = (1.65 - 0.013\,\Delta\alpha)\cdot\Delta\alpha = 9.432$$

$m_0 = m_0 - m_0 \cdot I_a/100$ = 1.811 mm			Tensione massima (N / mm^2) corrispondente al carico sui nodi:			Superficie del dente (mm^2)	
$\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Modulo (mm)	Carico (N)	836	848	868	A	ΔA%
20° - 20°	2	4445.3	20.12	21.52	22.23	13.4574	
20° - 26°	1.81	4445.3	20.17	21.53	22.22	11.1992	-16.78
$\Delta\sigma$%			0.23%	0.05%	-0.05%		

Tabella V.VIII

$$\Delta\alpha = 10° \quad I_a = (1.65 - 0.013\,\Delta\alpha)\cdot\Delta\alpha = 15.2$$

$m_0 = m_0 - m_0 \cdot 0.1 = 1.696$ mm			Tensione massima (N / mm^2) corrispondente al carico sui nodi:			Superficie del dente (mm^2)	
$\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Modulo (mm)	Carico (N)	836	848	868	A	ΔA%
20° - 20°	2	4445.3	20.12	21.52	22.23	13.4574	-
20° - 30°	1.7	4445.3	19.98	21.3	21.97	10.3263	-23.27%
$\Delta\sigma$%			-0.68%	-1.01%	-1.15%		

Tabella V.IX

Le precedenti tabelle mostrano che le differenze di sollecitazione tra dente simmetrico e dente asimmetrico equivalente con modulo ridotto e calcolato tramite la 5.3.2 sono ridottissime e là dove superano il punto percentuale sono sempre differenze a favore della sicurezza, ovvero il dente asimmetrico equivalente così calcolato risulta meno sollecitato del dente simmetrico di riferimento.

Il fatto che la formula identificata faccia riferimento solamente alla differenza tra l'angolo di pressione sui due fianchi ha stimolato la ricerca anche esplorando dentature aventi primo angolo di pressione diverso da

20° in particolare si sono esaminate dentature con angolo di pressione paria 17,5°.

Le tabelle relative a tale confronto sono quelle che seguono e mostrano anch'esse errori percentuali modesti se non addirittura trascurabili. Ciò è maggiormente vero se si considera che anche in questo caso gli errori sono stati sempre per "eccesso" ovvero il dente asimmetrico equivalente così calcolato è risultato essere, seppur di poco, più robusto del dente di riferimento.

$$\Delta\alpha = 5.5° \quad I_a = (1.65 - 0.013\,\Delta\alpha)\cdot\Delta\alpha = 8.68$$

$m_0 = m_0 - m_0 \cdot 0.1 = 1.826$ mm			Tensione massima (N / mm^2) corrispondente al carico sui nodi:			Superficie del dente (mm^2)	
$\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Modulo (mm)	Carico (N)	836	848	868	A	ΔA%
17.5°- 17.5°	2	4445.3	21.76	23.39	24.21	13.239	-
17.5°- 23°	1.83	4445.3	21.69	23.27	24.07	11.2713	-14.86%
$\Delta\sigma$%			-0.32%	-0.51%	-0.59%		

Tab.V.X

$\Delta\alpha = 8.5°$ $I_a = (1.65 - 0.013\ \Delta\alpha)\cdot\Delta\alpha = 13.09$

$m_0 = m_0 - m_0 \cdot 0.1 = 1.738$ mm			Tensione massima (N / mm^2) corrispondente al carico sui nodi:			Superficie del dente (mm^2)	
$\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Modulo (mm)	Carico (N)	836	848	868	A	ΔA%
17.5°- 17.5°	2	4445.3	21.76	23.39	24.21	13.239	-
17.5°- 26°	1.74	4445.3	21.73	23.28	24.08	10.2438	-22.62%
$\Delta\sigma$%			-0.17%	-0.46%	-0.56%		

Tab.V.XI

$\Delta\alpha = 12.5°$ $I_a = (1.65 - 0.013\ \Delta\alpha)\cdot\Delta\alpha = 18.59$

$m_0 = m_0 - m_0 \cdot 0.1 = 1.628$ mm			Tensione massima (N / mm^2) corrispondente al carico sui nodi:			Superficie del dente (mm^2)	
$\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Modulo (mm)	Carico (N)	836	848	868	A	ΔA%
17.5°- 17.5°	2	4445.3	21.76	23.39	24.21	13.239	-
17.5°- 30°	1.63	4445.3	21.66	23.19	23.97	9.0935	-31.31%
$\Delta\sigma$%			-0.47%	-0.85%	-1.01%		

Tab.V.XII

Ad ulteriore verifica della metodologia di calcolo sono state verificate dentature estremamente diverse tra loro per modulo e numero di denti rispetto a quelli finora utilizzati, grazie infatti agli strumenti realizzati (il MESH generator in particolare) la analisi al FEM di una dentatura si è rivelata essere operazione di pochi minuti. I risultati ottenuti sono stati raccolti nelle tabelle seguenti analoghe alle precedenti ed anche in questi casi i risultati sono stati estremamente interessanti.

Le tabelle che seguono si riferiscono a dente con proporzionamento modulare normalizzato, modulo m_0 = 3mm, numero di denti z=18; le varianti riportate in seguito sono le 20° - 26° e 20° - 30°

Per $\Delta\alpha = 6°$ otteniamo $I_a = \Delta\sigma\% = (1.65 - 0.013\,\Delta\alpha) \cdot \Delta\alpha = 9.432$

$m_0 = m_0 - m_0 \cdot 0.1 = 2.717$ mm			Tensione massima (N / mm^2) corrispondente al carico sui nodi:			Superficie del dente (mm^2)	
$\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Modulo (mm)	Carico (N)	836	848	868	A	ΔA%
20° - 20°	3	4445.3	13.75	14.71	15.2	29.9127	-
20° - 26°	2.72	4445.3	13.74	14.67	15.14	24.949	-16.59%
$\Delta\sigma\%$			-0.12%	-0.31%	-0.39%		

Tabella V.XIII

Per $\Delta\alpha = 10°$ otteniamo $I_a = \Delta\sigma\% = (1.65 - 0.013\,\Delta\alpha) \cdot \Delta\alpha = 15.2$

$m_0 = m_0 - m_0 \cdot 0.1 = 2.544$ mm			Tensione massima (N / mm^2) corrispondente al carico sui nodi:			Superficie del dente (mm^2)	
$\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Modulo (mm)	Carico (N)	836	848	868	A	ΔA%
20° - 20°	3	4445.3	13.75	14.71	15.2	29.9127	-
20° - 30°	2.54	4445.3	13.76	14.67	15.14	22.079	-26.2%
$\Delta\sigma\%$			-0.07%	-0.22%	-0.37%		

Tabella V.XIV

Le tabelle che seguono si riferiscono a dente con proporzionamento modulare normalizzato, modulo m_0 = 10mm, numero di denti z=30; le varianti riportate in seguito sono le 20° - 26° e 20° - 30°. Anche in questo caso, dipendendo I_a solo dalla differenza tra gli angoli di pressione sui due fianchi, il modulo del dente andrà ridotto della stessa quantità percentuale ovvero 9.432% e 15.2% i risultati sono riassunti nelle tabelle V.XV e V.XVI

$\Delta\alpha = 6°$ $\quad I_a = \Delta\sigma\% = (1.65 - 0.013\ \Delta\alpha) \cdot \Delta\alpha = 9.432$

$m_0 = m_0 - m_0 \cdot 0.1 = 9.06$ mm			Tensione massima (N / mm^2) corrispondente al carico sui nodi:			Superficie del dente (mm^2)	
$\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Modulo (mm)	Carico (N)	836	848	868	A	ΔA%
20° - 20°	10	4445.3	3.83	4.08	4.21	348.73	-
20° - 26°	9.06	4445.3	3.89	4.14	4.26	290.22	-16.78%
$\Delta\sigma\%$			1.43%	1.26%	1.14%		

Tab. V.XV

$\Delta\alpha = 10°$ $\quad I_a = \Delta\sigma\% = (1.65 - 0.013\ \Delta\alpha) \cdot \Delta\alpha = 15.2$

$m_0 = m_0 - m_0 \cdot 0.1 = 8.48$ mm			Tensione massima (N / mm^2) corrispondente al carico sui nodi:			Superficie del dente (mm^2)	
$\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Modulo (mm)	Carico (N)	836	848	868	A	ΔA%
20° - 20°	10	4445.3	3.83	4.08	4.21	348..73	-
20° - 26°	8.48	4445.3	3.92	4.14	4.28	256.36	-26.48%
$\Delta\sigma\%$			2.34%	1.96%	1.66%		

Tab. V.XVI

Le tabelle che seguono si riferiscono a dente con proporzionamento modulare normalizzato, modulo m_0 = 5mm, numero di denti z=36; le varianti riportate in seguito sono le 20° - 27°.

Anche in questo caso il calcolo del modulo viene fatto senza alcuno studio preventivo ma semplicemente calcolandolo mediante la 5.3.2. La tabella V.XVII riassume i risultati

$\Delta\alpha = 7°$ $\quad I_a = \Delta\sigma\% = (1.65 - 0.013\,\Delta\alpha) \cdot \Delta\alpha = 10.91$

$m_0 = m_0 - m_0 \cdot 0.1 = 4.454$ mm			Tensione massima (N / mm^2) corrispondente al carico sui nodi:			Superficie del dente (mm^2)	
$\alpha_{01} - \alpha_{02}$	Modulo (mm)	Carico (N)	836	848	868	A	ΔA%
20° - 20°	5	4445.3	7.54	8.02	8.27	88.21	-
20° - 27°	4.45	4445.3	7.71	8.17	8.42	70.93	-19.59%
$\Delta\sigma\%$			2.26%	1.97%	1.86%		

Tab. V.XVII

I risultati ottenuti e verificati per un numero di ingranaggi superiore a quello riassunto nelle pagine precedenti, mostrano come la formula utilizzata per il calcolo del dente asimmetrico equivalente dia risultati con errore inferiore al 2%, tale risultato è estremamente interessante se si

considera la semplicità con la quale il calcolo viene effettuato (semplicemente in base alla differenza tra i due angoli di pressione) e se si considera anche che le metodologie di calcolo utilizzate per il dimensionamento degli ingranaggi convenzionali ammettono margini di approssimazione in linea con i pochi punti percentuali verificati nel presente studio.

5.4 La riduzione di ingombro negli ingranaggi asimmetrici

L'ultima colonna delle tabelle riportate nel paragrafo precedente riportava sempre la riduzione percentuale della superficie del dente; come anticipato infatti questa è una ulteriore fase del presente studio ovvero valutare gli effetti in termini di riduzione di peso ed ingombri legati all'utilizzo di dentature equivalenti. I risultati che seguono, come anticipato, fanno riferimento alla sola superficie del dente (ovvero l'area racchiusa dal profilo del dente e dalla circonferenza di troncatura interna) ciò perché la morfologia della ruota ove "appoggia" la corona di denti può variare notevolmente in funzione del campo di applicazione. Ciò premesso dalle tabelle precedenti è possibile rilevare che riducendo il valore del secondo angolo di pressione si ha una riduzione di superficie, tuttavia tale riduzione è accompagnata da una riduzione della robustezza del dente superiore ai benefici ottenibili pertanto non si ritiene consigliabile seguire questa strada al fine di una riduzione di peso, è comunque interessante notare come la riduzione del secondo angolo di pressione comporti un aumento della sezione di testa del dente (fig. 5.6), ciò, in applicazioni particolari quali le pompe idrauliche, ad esempio, potrebbe avere effetti notevoli in termini di aumento della portata.

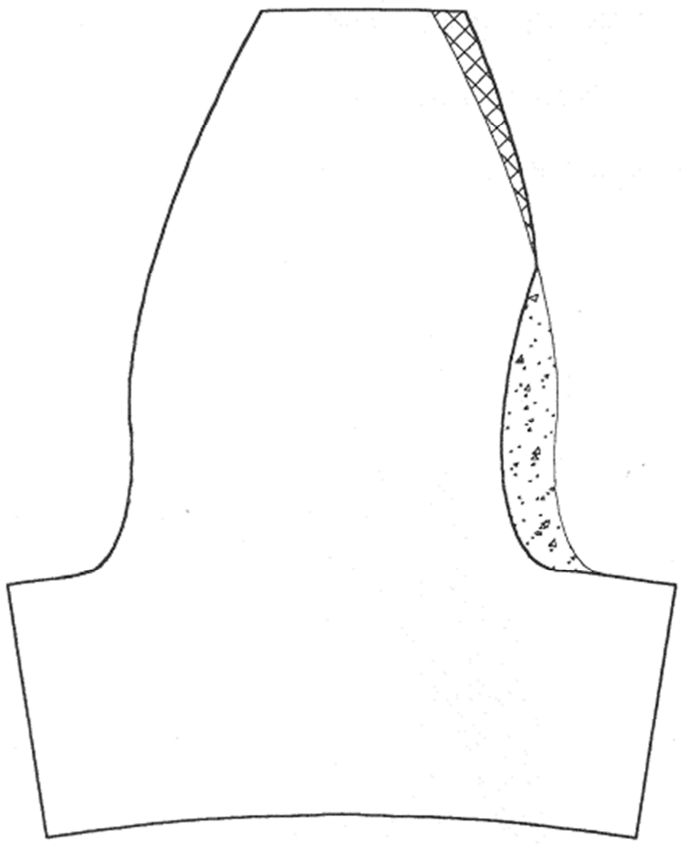


Fig. 5.6

Diversamente vanno le cose in caso di secondo angolo di pressione superiore al primo, a parità di modulo si ha infatti un lieve incremento di superficie, ampiamente compensato dal notevole irrobustimento del dente, altresì le tabelle precedenti hanno mostrato come sia possibile realizzare denti asimmetrici con modulo ridotto e pari caratteristiche meccaniche, in tal caso la riduzione di superficie del dente, dunque del suo peso, può raggiungere riduzioni che superano il 30% (31.31% per denti con differenza tra gli angoli di pressione pari a

12,5°). La figura 5.7 evidenzia questa differenza: i due denti sovrapposti sono, in termini meccanici, equivalenti.

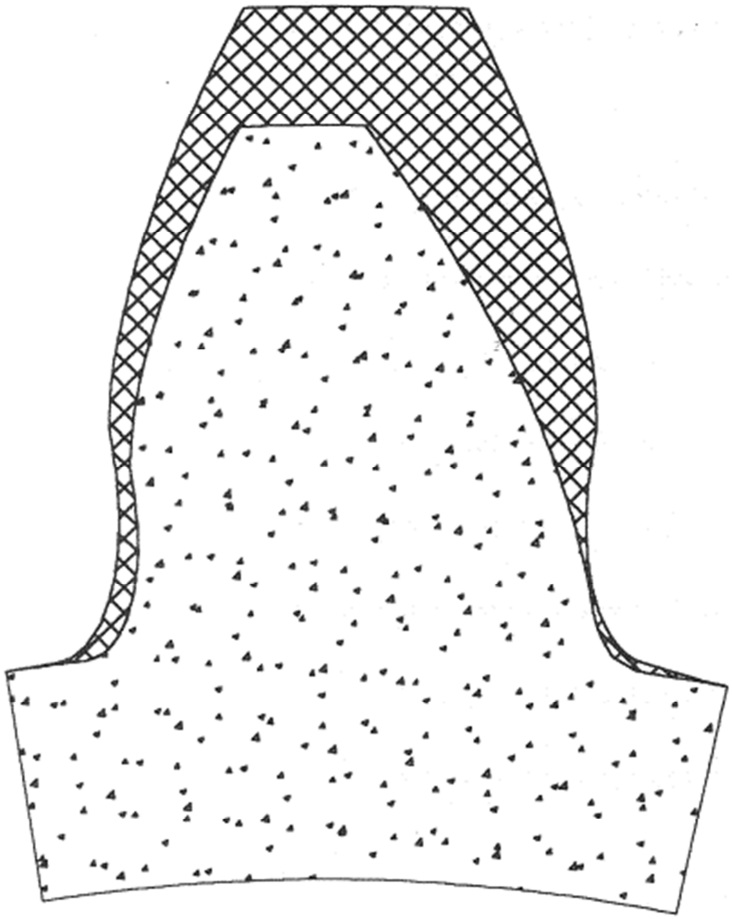


Figura 5.7

La figura 5.8 rappresenta invece la sovrapposizione delle due ruote dentate e consente di valutare a colpo d'occhio la notevole riduzione di ingombro complessiva dell'ingranaggio.

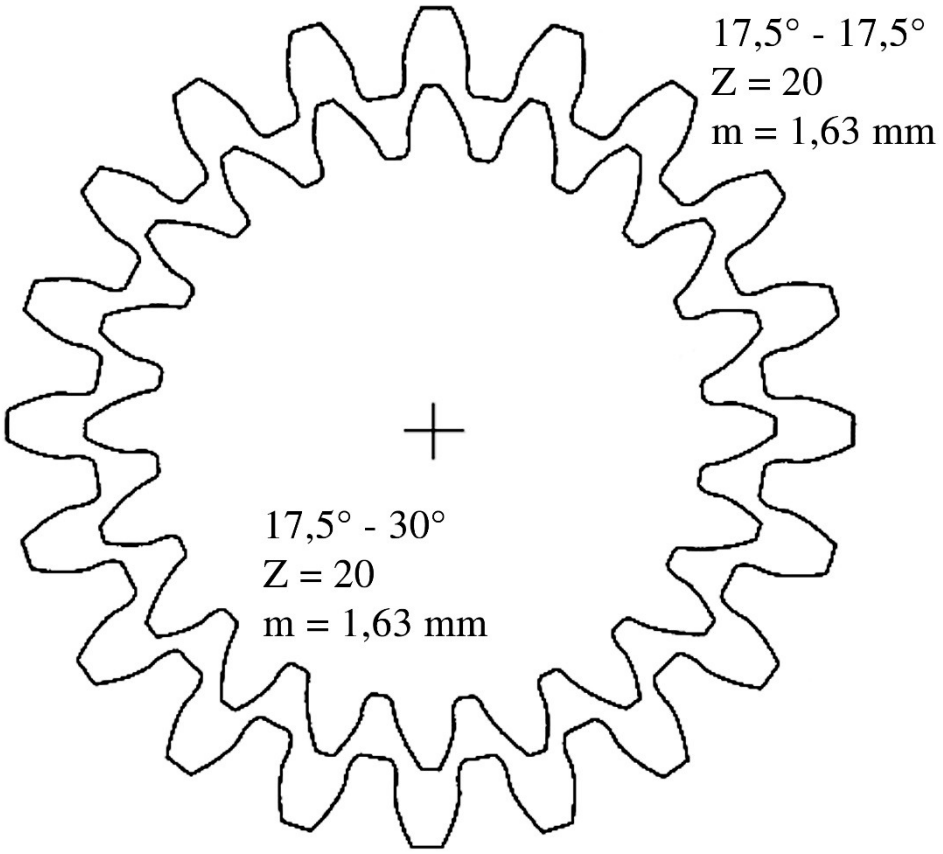


Figura 5.8

Infine per avere una visione complessiva la figura 5.9 simula e raffronta l'ingranamento tra una coppia convenzionale ed una coppia di ingranaggi asimmetrici, in entrambi i casi con rapporto di trasmissione unitario.

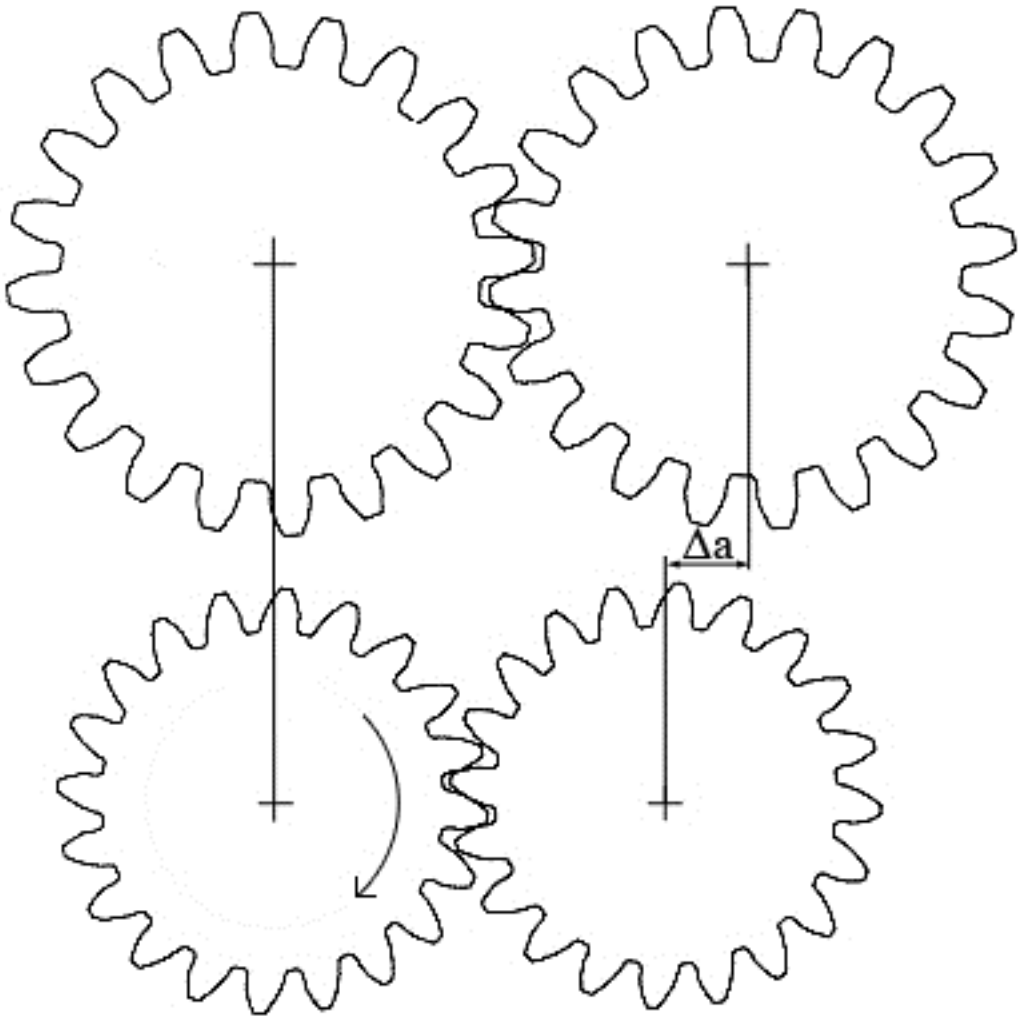


Figura 5.9

Capitolo VI

Considerazioni conclusive

6.1 Il dimensionamento degli ingranaggi asimmetrici

Uno degli aspetti maggiormente rilevanti del presente studio è senza dubbio quello di esser riusciti ad identificare una metodologia di calcolo per gli ingranaggi asimmetrici che consente, con un notevole margine di affidabilità, il loro dimensionamento in maniera agevole ed intuitiva partendo dalle dimensioni del corrispondente ingranaggio simmetrico di riferimento.

Tale metodologia assume ancora maggior rilevanza se si considera che nella fase iniziale di diffusione di un tal tipo di ingranaggi si potrebbe pensare di sostituire agli ingranaggi convenzionali di trasmissioni già esistenti, ingranaggi asimmetrici, alla ricerca di prestazioni superiori o ingombri/pesi inferiori a parità di prestazioni; la metodologia di calcolo sviluppata consente di identificare il modulo del dente asimmetrico equivalente (o di conoscere in anticipo l'irrobustimento del dente asimmetrico a parità di modulo) semplicemente in funzione della differenza tra i valori degli angoli di pressione tra i due fianchi del dente.

6.2 Le proprietà del dente asimmetrico ed i possibili settori di impiego

Chiunque possieda un minimo di esperienza nel dimensionamento di organi meccanici o, più semplicemente, osservi con occhio critico un ingranaggio simmetrico accanto ad uno asimmetrico di pari modulo e numero di denti, è in grado di intuire in maniera qualitativa quali saranno le caratteristiche fondamentali del dente asimmetrico e quali saranno le differenze dall'ingranaggio convenzionale; l'innovazione di tale studio è quella di esser riusciti a mettere a punto una procedimento, una metodologia di calcolo, in grado di quantificare dette differenze. La maggior robustezza del dente asimmetrico, intuibile grazie alla maggior sezione resistente in corrispondenza delle circonferenza di troncatura interna, è ora infatti quantificabile in funzione della differenza degli angoli di pressione sui due fianchi del dente.

L'irrobustimento del dente asimmetrico è comunque uno degli aspetti analizzati nel presente studio; importante è stato anche valutare le variazioni di volume, dunque di peso, corrispondenti alla variazione del secondo angolo di pressione a parità di caratteristiche strutturali; questo aspetto infatti consente di intuire i campi di impiego dove un tal tipo di ingranaggio potrebbe fornire contributi maggiormente sensibili.

Questi aspetti pongono gli ingranaggi asimmetrici con secondo angolo di pressione superiore al primo in una posizione di netta superiorità nei confronti degli ingranaggi convenzionali.

È anche possibile realizzare denti asimmetrici con secondo angolo di pressione inferiore al primo. Anche per questi ultimi esistono delle interessanti possibili applicazioni; tali ingranaggi, infatti, potrebbero essere utilizzati per aumentare portata in una pompa ad ingranaggi presentando un vano interdentale di maggiore volume a parità di ingombro globale.

Conclusioni

A conclusione del presente studio è possibile affermare che il dente asimmetrico può rappresentare una delle più importanti vie da percorrere nella ricerca dell'incremento prestazionale degli ingranaggi. In questo settore, infatti, la precisione delle lavorazioni, la qualità dei trattamenti meccanici e termici hanno raggiunto un livello tale che le migliorie conseguibili percorrendo le vie "tradizionali" risultano minime ed estremamente costose.

L'utilizzo di profili non convenzionali del tipo di quelli trattati nel presente studio consente invece di ottenere, con particolare riferimento a dentature aventi secondo angolo di pressione superiore al primo, incrementi prestazionali che superano i 10 punti percentuali senza alcun costo aggiuntivo.

Nel caso di dentature asimmetriche equivalenti (ovvero di pari caratteristiche meccaniche ma dimensioni ridotte rispetto alle corrispondenti dentature simmetriche) si possono ottenere addirittura costi di produzione inferiori; ciò grazie al peso e all'ingombro contenuti e quindi alla minore quantità di materiale da lavorare.

Come precisato nel presente lavoro, il taglio di tali ruote dentate innovative non richiede infatti alcuna modifica sostanziale delle dentatrici; l'unica modifica necessaria riguarda infatti semplicemente il profilo di taglio dell'utensile che, essendo, rettilineo per le dentatrici Sunderland e Maag, non pone alcun problema tecnologico.

Il presente studio di ricerca ha inoltre consentito di identificare una metodologia di calcolo per gli ingranaggi asimmetrici, di agevole applicazione; viene infatti messa a disposizione una procedura che consente al progettista di utilizzare le proprie usuali competenze anche per il dimensionamento del dente innovativo e di ottenere, per il dente asimmetrico, risultati conformi con le attuali normative di standardizzazione internazionale riferite a denti simmetrici.

Il diverso angolo di pressione sul secondo fianco del dente comporta delle limitazioni dovute alla diversa angolazione della forza di contatto che determina carichi diversi su alberi e cuscinetti. Di tale caratteristica funzionale ha però rilievo solo nel caso di accoppiamenti dove è previsto il funzionamento a pieno carico per entrambi i versi di trasmissione della coppia; condizione questa che si verifica raramente nelle usuali applicazioni (in genere al moto inverso è associata la corsa di "ritorno" del meccanismo, operazione che qualora si verifichi avviene di solito a carico ridotto).

Il presente studio, oltre ad aver approfondito le caratteristiche strutturali delle dentature asimmetriche, fornisce un valido supporto alla diffusione di ingranaggi a denti asimmetrici attraverso la messa a punto di una metodologia di calcolo strutturata e di agevole utilizzo.

Nell'ambito del presente studio sono stati redatti i seguenti due articoli scientifici:

- A. Chiaramonte R., G. Di Francesco, V. La Battaglia, S. Marini
  "Methodology for Structural Calculation of Gear Teeth with Unconventional Profile"
  International Conference for Mechanical, Manufacturing, Modelling and Mechatronic (Kuala Lumpur – Malaysia, Feb 2016);
  MATEC Web of Conferences Vol. 51, 2016
  (DOI: 10.1051/matecconf/20165101006)

- A. Chiaramonte R., G. Di Francesco, V. La Battaglia, S. Marini
  "Procedure for the automatic mesh generation of innovative gear teeth"
  2nd International Conference on Mechanical Design and Engineering (Torino – Italy, Jan 2016), Matec Web of Conference Vol. 45, 2016
  (DOI: 10.1051/matecconf/20164504009)

Bibliografia

1. Song, W., Zhou, H., Zhao, Y. “Design of the conjugated straight-line internal gear pairs for fluid power gear machines” (2013) Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science.
2. Hsieh, M.-C., Lai, C.-C., Lai, C.-H., Lai, K.-T. “Error analysis of the modeling and assembly of gears with asymmetric tooth profile” (2013) Applied Mechanics and Materials
3. Li, X.-L., Wang, G.-C., Zhu, F.-X., Zhou, J.-Y., He, Q. “Analysis on support reaction of asymmetric gear based on friction between teeth” (2011) Hangkong Dongli Xuebao/Journal of Aerospace Power
4. Spitas, V., Spitas, C. “Numerical modeling of wire-prestressed gear teeth” (2007) Proceedings of the IASTED International Conference on Modelling, Identification, and Control, MIC
5. Yang, S.-C. “Study on an internal gear with asymmetric involute teeth” (2007) Mechanism and Machine Theory
6. G. Di Francesco, S. Marini, ”Ruote dentate caratterizzate da denti a profilo asimmetrico”. Convegno Nazionale AIAS, Parma, Tip. Benedettina, Parma, (1995).

7. G. Di Francesco, S. Marini, “Structural analysis of tooth having an asymmetrical winding profile”. Convegno Nazionale AIAS, Ed. Salentina Galatina, Gallipoli Lecce, (1996)
8. G. Di Francesco, S. Marini, “Structural Analysis of Asymmetrical Teeth : Reduction of Size and Weight” Gear Technology, Randall Publishing inc. Sept- Oct. 1997, Elk Grove Village IL. U.S.A.(1997)
9. G. Di Francesco, S. Marini, “Dentature asimmetriche: evoluzione e procedura analitica per il dimensionamento” Organi di Trasmissione, Tecniche Nuove, Milano, (1998)
10. MSC Software Italia: Nastran, Patran, Marc, distributed in Italy by MSC. Software V.le Città d’Europa, 681- 00144 Rome
11. F. L. Litvin, Theory of Gearing, NASA Reference Publication 1212, AVSCOM Techical Report, (1989)
12. D. W. Dudley, D.P. Townsend, Dudley’s Gear Handbook, MC Grow-Hill. Inc., USA, (1996)
13. R. L. Mott, Machine Elements in Mechanical Design Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey Columbus, Ohio, (1999)
14. G. Di Francesco – S. Marini – G. Grasso – C. Clienti, “Asymmetric gear wheel thermographic analysis”, Colloque Photomecanique 2004 – étude du comportement des matèriaux et des structures, Albi (2004)

15. G. Di Francesco – S. Marini, “Studio delle tensioni di flessione al piede di dentature asimmetriche ed individuazione dei parametri di dimensionamento”, Convegno XIV ADM / XXXIII AIAS, Bari (2004)
16. G. Di Francesco – S. Marini, “Tensioni di flessione di dentature asimmetriche e dimensionamento”, Organi di Trasmissione (April 2005), Tecniche Nuove, Milan (2005)
17. Di Francesco – S. Marini, “Asymmetrical gear wheel design: determining the bending stress in relation to the degree of asymmetry”, TMT 2004 – Trends in the development of machinery and associated technology, Neum (2004)
18. G. Di Francesco – S. Marini, “Asymmetrical gear wheels: automatized procedure for the design”, International Conference on Gears, Munich 2005
19. G. Di Francesco – S. Marini, “Adattamento della procedura ISO C alle dentature asimmetriche”, XXXIV Convegno AIAS, Milan (2005)
20. G. Di Francesco – S. Marini, “Asymmetric teeth: bending stress calculation”, Gear Technology (Mar-Apr 2007), Randall Publishing inc., Elk Grove Village, IL USA (2007)
21. Karpat, F., Cavdar, K., Babalik, F.C. “Computer aided analysis of involute spur gears with asymmetric teeth” (2005) VDI Berichte
22. Sanders, A., Houser, D.R., Kahraman, A., Harianto, J., Shon, S. “An experimental investigation of the effect of tooth asymmetry and tooth

root shape on root stresses and single tooth bending fatigue life of gear teeth" (2011) Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference

23. Ekwaro-Osire, S., Durukan, I., Alemayehu, F.M. "Experimental and probabilistic analysis of asymmetric gear tooth" (2011) Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series
24. Ekwaro-Osire, S., Jang, T.-H., Stroud, A., Durukan, I., Alemayehu, F.M., Swift, A., Chapman, J. "Gear with asymmetric teeth for use in wind turbines" (2011) Conference Proceedings of the Society for Experimental Mechanics Series
25. Karpat, F., Ekwaro-Osire, S. "Efficiency of the high contact ratio involute spur gears with asymmetric teeth" (2010) ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings (IMECE)
26. Deng, X., Hua, L., Han, X. "Research on the design and modification of asymmetric spur gear" (2015) Mathematical Problems in Engineering, 2015
27. Thirumurugan, R., Deepak, C.C.C. "Design and analysis of asymmetrical spur gear drive for automobile gear box application" (2014) Applied Mechanics and Materials

28. Anand Mohan, N., Senthilvelan, S. “Preliminary bending fatigue performance evaluation of asymmetric composite gears” (2014) Mechanism and Machine Theory
29. Medvecká-Beňová, S., Mantič, M., Grega, R. “The stress analysis in dangerous section of gear teeth” (2014) Applied Mechanics and Materials
30. Pedersen, N.L. “Improving bending stress in spur gears using asymmetric gears and shape optimization” (2010) Mechanism and Machine Theory
31. A. Kapelevich, “Direct gear design for asymmetric tooth gears” Mechanisms and Machine Science, 34, pp. 117-143, (2016)