Dottorato di Ricerca in Ingegneria dell'Elettronica Biomedica, dell'Elettromagnetismo e delle Telecomunicazioni XXI Ciclo

Applicazioni ingegneristiche dei metamateriali per la realizzazione di componenti a microonde e a frequenze ottiche

Candidato:

Sebastian Emanuel Lauro

Relatore:

Prof. Lucio Vegni

Anno Accademico 2008-2009

Indice

Capitolo Primo

Metamateriali e materiali plasmonici

1 MATERIALI PLASMONICI

2 METAMATERIALI ENG/MNG ALLE FREQUENZE DELLE MICROONDE

2.1 *Rodded Media*

2.2 *Parallel-Plate Media*

2.3 *Split Ring Resonators*

Capitolo Secondo

Linee di trasmissione accoppiate in microstriscia

1 CARATTERISTICHE GENERALI DELLE LINEE ACCOPPIATE

2 RAPPRESENTAZIONE CIRCUITALE

3 LINEE ACCOPPIATE

3.1 *Analisi*

3.2 *Accoppiatore co-direzionale o a onda progressiva*

3.3 *Accoppiatore contro-direzionale o a onda regressiva*

3.4 *Parametri degli accoppiatori direzionali*

4 LAMINA ENG ALL'INTERNO DEL SUBSTRATO DI UN ACCOPPIATORE DIREZIONALE IN MICROSTRISCIA

4.1 *Prima configurazione*

4.2 *Seconda configurazione*

5 APPLICAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI CONFORMI AL CASO DI DUE LINEE IN MICROSTRISCIA ACCOPPIATE

5.1 *Trasformazioni conformi*

5.2 *Modello a capacitore equivalente di un accoppiatore direzionale in microstriscia*

5.3 *Modo dispari*

5.4 *Modo pari*

5.5 *L'approssimazione di Wheeler per il calcolo della capacità equivalente*

5.6 *Calcolo del contributo dovuto allo strato ENG*

6 PROGETTO DI UN ACCOPPIATORE DIREZIONALE IN MICROSTRISCIA

6.1 *Riduzione della lunghezza di accoppiamento in un accoppiatore co-direzionale*

6.2 *Progetto di un divisore di potenza in microstriscia*

6.3 *Confronto tra i risultati ottenuti con analisi quasi-statica e quelli ottenuti con CST*

6.4 *Anisotropia e perdite nel metamateriale ENG*

6.5 *Progetto di un accoppiatore direzionale con inclusioni metalliche nel substrato*

6.6 *Ulteriori progetti di accoppiatori*

7 RIDUZIONE DELLA DIAFONIA TRA DUE LINEE DI TRASMISSIONE SIMMETRICHE IN MICROSTRISCIA

7.1 *Riduzione della diafonia*

7.2 *Risultati numerici*

7.3 *Propagazione di segnali gaussiani*

Capitolo Terzo

Strutture stratificate

1 STRUTTURA MULTI STRATO

1.1 *Incidenza di un'onda piana polarizzata TM*

1.1 *Incidenza di un'onda piana polarizzata TE*

2 STRUTTURA STRATIFICATA A PILA

2.1 *Incidenza di un'onda piana polarizzata TM*

2.2 *Approssimazione di ordine 0 polarizzazione TM*

2.3 *Incidenza di un'onda piana polarizzata TE*

2.4 *Approssimazione di ordine 0 polarizzazione TE*

Capitolo Quarto

Nano-circuiti

1 NANO-ELEMENTI

2 VERIFICA DELLE LEGGI DI KIRCHHOFF

3 FORMULE DI PROGETTO

4 FILTRI ARRESTA-BANDA

5 CONCLUSIONI

Capitolo Quinto

Filtri polarizzatori

1 PROPAGAZIONE DI UN'ONDA PIANA IN UN MEZZO ANISOTROPO

2 CONDIZIONI DI PROGETTO PER POLARIZZATORI TE E TM IN RIFLESSIONE

3 PROGETTO DI UN POLARIZZATORE IN RIFLESSIONE TM A MICROONDE

4 PROGETTO DI UN POLARIZZATORE IN RIFLESSIONE TE NEL VISIBILE

Appendice A

Capitolo Primo

Metamateriali e Materiali Plasmonici

L'interesse e i primi esperimenti sui metamateriali – materiali in cui le onde magnetiche interagiscono con inclusioni metalliche, inducendo fenomeni elettrici e magnetici che modificano la permittività e la permeabilità del mezzo in cui sono inseriti – risalgono agli ultimi anni del XIX secolo, quando il fisico Jagadis Chunder Bose cominciò a dedicarsi allo studio di materiali "artificiali", conducendo il primo esperimento alle frequenze delle microonde su strutture e geometrie arrotolate che erano essenzialmente mezzi chirali. Meno di due decenni dopo, questi esperimenti furono ripresi da Karl Ferdinand Lindman, che utilizzò gli stessi mezzi artificiali includendo in un mezzo ospite numerose eliche metalliche orientate in modo casuale; intorno alla metà del XX secolo, poi, Winston E. Kock riuscì a ricavare l'effettivo indice di rifrazione dei mezzi artificiali, aprendo la strada a numerosi altri studi, che si focalizzarono sulle singole proprietà dei materiali "ospiti" e sui parametri che potevano o meno incidere sulla resa d'utilizzo dei diversi materiali, come la forma, la dimensione, la composizione delle inclusioni metalliche, la loro densità, e così via. Il fisico russo Victor Veselago negli anni Sessanta studiò poi l'utilizzo di materiali in cui sia la permittività sia la permeabilità presentavano valori reali negativi a determinate frequenze e fu il primo a mostrare che un mezzo così fatto presentava un indice di rifrazione negativo.

Partendo proprio da queste basi, lo studio dei materiali artificiali – noti anche come "left-handed media" (LHM), "double negative metamaterials" (DNG), "backward-wave media" (BW media), "cloaking materials" solo per citare alcune espressioni – si è sviluppato enormemente, soprattutto negli ultimi dieci anni, con i rilevanti contribuiti di diversi gruppi di ricerca [1]. Il motivo di questo rinnovato interesse per l'elettromagnetismo, di cui si pensava di aver ampiamente indagato le possibili declinazioni, risiede proprio nelle caratteristiche potenziali dei metamateriali, che non sono materiali in senso stretto, poiché non è possibile trovarli in natura, quanto piuttosto strutture artificiali create per ottenere determinate e prefissate caratteristiche ottiche ed elettromagnetiche: proprio la possibilità di progettare dispositivi e sistemi con nuove caratteristiche e proprietà, non ottenibili con approcci convenzionali, ha dato nuova linfa a questa branca della ricerca nel campo dell'elettromagnetismo. Inoltre, la posizione intermedia dei metamateriali, a metà strada tra la

fisica e l'ingegneria, i relativi approcci multidisciplinari che ne derivano, pongono questi mezzi in una posizione particolare.

Esistono due principali categorie di metamateriali: i cristalli elettromagnetici o fotonici e i mezzi efficaci. Nella prima categoria vanno compresi quei materiali composti da strutture costituite da nano o micro-inclusioni periodiche, il cui periodo è comparabile con la lunghezza d'onda del segnale; di conseguenza, le proprietà elettromagnetiche di tali strutture derivano soprattutto dalla periodicità, al contrario di quanto accade invece nei mezzi efficaci: in questi ultimi, infatti, il periodo è decisamente più piccolo della lunghezza d'onda del segnale, e le proprietà elettromagnetiche di tali mezzi devono essere ricavate attraverso una procedura di omogeneizzazione.

Il lavoro svolto in questi anni di ricerca si concentra proprio su questa seconda categoria di materiali e, in particolare, su quella sottoclasse di metamateriali che presenta solo un elemento dei parametri costitutivi che assume valori negativi. Questi materiali, chiamati SNG (Single NeGative), presentano valori negativi della parte reale della permittività (ENG Epsilon-NeGative) o della permeabilità (MNG Mu-Negative) in una determinata banda di frequenza. Le caratteristiche particolari di tali materiali e il loro accoppiamento con materiali convenzionali o con altri materiali non convenzionali permettono la realizzazione di dispositivi dalle caratteristiche innovative e non realizzabili con l'utilizzo di materiali standard; numerosi lavori sono stati presentati a riguardo, nei quali sono stati impiegati come elementi base per la realizzazione di cavità risonanti e strutture guidati dalle dimensioni piuttosto minori della lunghezza d'onda [1] [3], per la riduzione della diffusione da oggetti [4], per il progetto di superlenti [5], etc.

1. MATERIALI PLASMONICI

Alle frequenze ottiche molti metalli presentano un valore della permittività negativo quando gli elettroni di conduzione sono liberi di muoversi in un ambiente caratterizzato da cariche statiche positive (ioni) e, nel complesso, questi metalli presentano una carica totale neutra: così è definito il comportamento *plasmonico* dei metalli che determina, a frequenze minori della frequenza di plasma, un valore negativo della permittività del mezzo.

Se applichiamo un campo elettromagnetico oscillante alla frequenza angolare ω a un mezzo plasmonico, il movimento degli elettroni potrà essere descritto nel seguente modo:

$$m\partial_t^2\mathbf{r} + m\gamma\partial_t\mathbf{r} = -e\,\mathbf{E}\,e^{j\omega t} \qquad (1)$$

dove m è la massa dell'elettrone e il secondo termine nella (1) rappresenta una forza viscosa che agisce sugli elettroni dovuta a tutti i processi anelastici presenti. Si è assunto che la lunghezza d'onda del campo sia maggiore dello spostamento degli elettroni, in modo tale che questi percepiscano il campo elettrico spazialmente costante e che le velocità coinvolte siano sufficientemente piccole da poter trascurare l'effetto del campo magnetico. Ciò porta a definire un vettore di polarizzazione per unità di volume nel mezzo:

$$\mathbf{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \mathbf{E} = -ne\mathbf{r} = -\frac{ne^2/m}{\omega(\omega - j\gamma)}\mathbf{E} \qquad (2)$$

dove n è la densità degli elettroni di conduzione e si è assunto che ogni elettrone contribuisca indipendentemente alla polarizzazione. Dalla (2) si ottiene l'equazione della costante dielettrica relativa del mezzo plasmonico:

$$\varepsilon = \varepsilon_\infty \left(1 - \frac{{f_{pl}}^2}{f\,(f - j\nu)}\right) \qquad (3)$$

dove $\varepsilon_\infty = 1$ è il valore della permittività relativa a frequenza infinita, $f_{pl} = (e/2\pi)\sqrt{n/m}$ è la frequenza di plasma e $\nu = \gamma/2\pi$ è la frequenza di collisione. Sostituendo la (3) nelle equazioni di Maxwell e considerando variazioni spaziali del tipo $e^{-j\mathbf{k}\bullet\mathbf{r}}$ si ottiene l'equazione di dispersione:

$$k^2 = (2\pi f/c)^2 - (2\pi f_{pl}/c)^2 \qquad (4)$$

dove k è il modulo del vettore d'onda e c è la velocità della luce nel vuoto. La permittività relativa assume valori negativi a frequenze minori della frequenza di plasma (3), schermando il plasma al suo interno da campi incidenti (il vettore d'onda assume valori puramente immaginari (4)). Al di sopra della frequenza di plasma, la permittività è positiva e consente la propagazione del campo elettromagnetico al suo interno (k è reale (4)). La trattazione svolta finora è la teoria di Drude-Lorentz, per questo motivo molto spesso la relazione (3) viene chiamata anche modello dispersivo di Drude.

Per molti metalli, la frequenza di plasma è alla frequenza dell'ultravioletto e ν è piccola rispetto a f_{pl}. Tipico esempio è l'argento (Figura 1), che può essere descritto alle frequenze

del visibile attraverso il modello dispersivo (3), dove $\varepsilon_\infty = 5$, $f_{pl} = 972.7\,\text{THz}$ e $\nu = 4.35\,\text{THz}$.

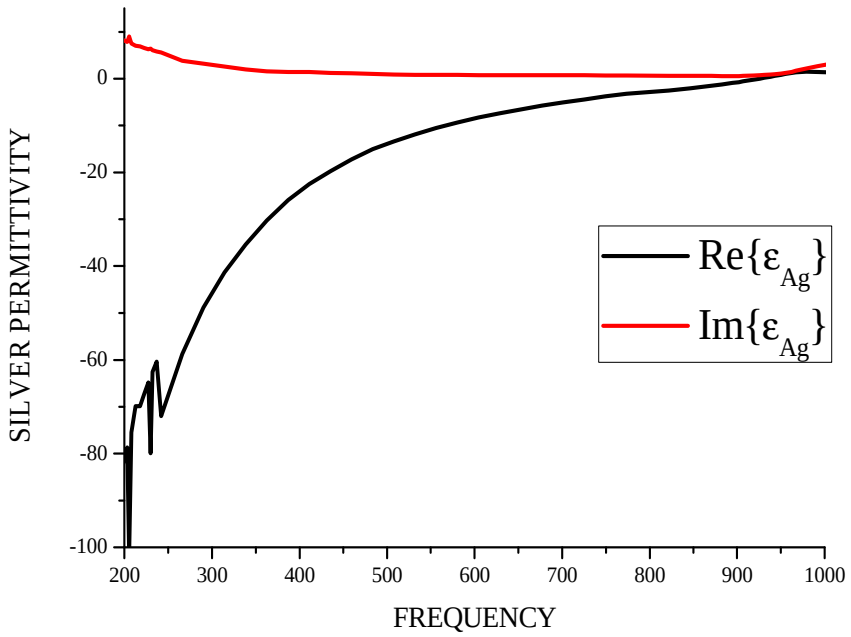


Figura 1: Permittività relativa dell'Argento.

In generale, comunque, la dissipazione dei metalli è molto elevata soprattutto alle basse frequenze $f \approx \nu$, e la parte immaginaria predomina sulla parte reale non consentendo il loro utilizzo come mezzi a permittività negativa (ENG).

Un valore negativo della parte reale della permittività può essere ottenuto anche nei mezzi dielettrici ordinari con cariche non libere, nella banda di frequenze al di sopra della frequenza di risonanza. Consideriamo un mezzo nel quale gli elettroni siano confinati intorno al nucleo e sia applicato un campo elettromagnetico: quest'ultimo determina una variazione della posizione degli elettroni. Si crea allora una forza contraria che ristabilisce la posizione di equilibrio degli elettroni: $-m(2\pi f_0)^2 \mathbf{r}$. Includendo questo termine nella (1) si ottiene la relazione di dispersione di Lorentz per la permittività relativa:

$$\varepsilon = 1 - \frac{(1-\varepsilon_s)\, f_0^{\,2}}{f^2 - f_0^{\,2} - j\nu f} \qquad (5)$$

dove $\varepsilon_s = 1 - n(2\pi e)^2 / \left(\varepsilon_0\, m\, f_0^{\,2}\right)$ è la permittività a frequenza nulla. Si può notare, in questo caso, che la permittività assume valori negativi nella banda di frequenza $\left(f_0, f_0\sqrt{\varepsilon_s}\right)$.

2. METAMATERIALI ENG/MNG ALLE FREQUENZE DELLE MICROONDE

Alle frequenze delle microonde non esistono materiali naturali che assumono valori negativi della parte reale della permittività o della permeabilità, solamente la ionosfera presenta un tale comportamento per la permittività al di sotto della frequenza di plasma. Proprio per studiare l'interazione dei campi elettromagnetici con fluidi ionizzati, come la ionosfera, Rotman propose [6] due differenti tipologie di mezzi artificiali che potessero mimare il comportamento di quest'ultima: 1) *Rodded Media*, una griglia di fili metallici disposti periodicamente; 2) *Parallel-Plate Media*, una guida a piatti piani paralleli che lavora al di sotto della frequenza di taglio per il modo fondamentale TE_{01}.

2.1 Rodded Media

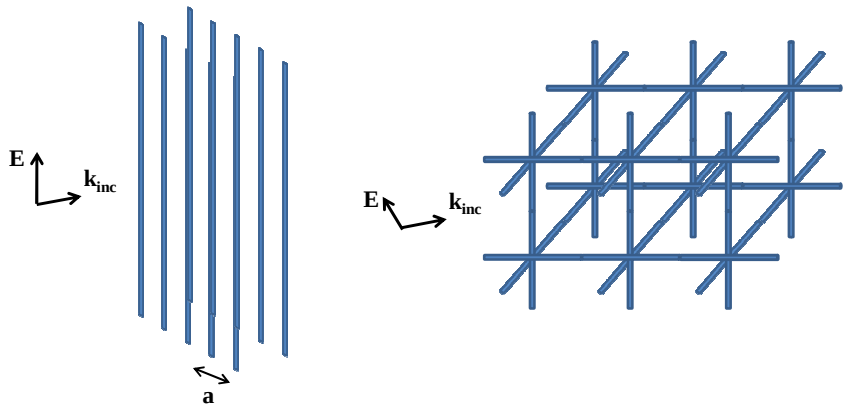


Figura 2: Rodded media configurazione uniassiale (figura a sinistra) e isotropo (figura a destra).

I *Rodded media* sono costituiti da una schiera periodica bi o tridimensionale di fili metallici immersi in un dielettrico isotropo e omogeneo (Figura 2). Il loro comportamento è stato ampiamente investigato in passato [6]-[8], e il loro utilizzo è stato riproposto recentemente per le particolari caratteristiche elettrodinamiche [9] che essi presentano.

Nell'ipotesi che la cella elementare sia sufficientemente piccola rispetto alla lunghezza d'onda $(a << \lambda_0)$ e che lo spessore dei fili sia piuttosto minore del periodo della struttura $(r << a)$, è possibile ricavare il valore efficace della permittività in funzione della geometria e delle caratteristiche dei materiali utilizzati [9]:

$$\varepsilon_{\|rod} = 1 - \frac{f_{pl}^{\ 2}}{f\left(f - j\nu\right)} \tag{6}$$

La frequenza di plasma e la frequenza di collisione sono allora date da:

$$f_{pl} = \frac{c/a}{\sqrt{2\pi \ln\left(a/r\right)}}, \quad \nu = 4\pi \frac{\varepsilon_s}{\sigma}\left(a/r\right)^2 f_{pl} \tag{7}$$

dove ε_s, c, a, r e σ indicano rispettivamente la permittività del mezzo ospitante, la velocità della luce nel vuoto, il periodo spaziale, il raggio dei fili e la conducibilità.

La configurazione bidimensionale determina una risposta anisotropa della struttura: solamente il campo elettrico parallelo ai fili può determinare una variazione del comportamento della struttura; la permittività efficace in tale direzione è data dalla (7) e risulta uguale a quella del mezzo ospitante sul piano perpendicolare. Al contrario, la configurazione tridimensionale permette di ottenere una risposta della struttura isotropa con permittività efficace data dalla (7).

2.2 Parallel-Plate Media

Figura 3: Guida a piatti piani e paralleli.

In alternativa al *rodded medium*, Rotman propose l'utilizzo di una struttura costituita da una guida o da una serie di guide a piatti piani e paralleli, riempita da un mezzo dielettrico isotropo e omogeneo ε_r (Figura 3). L'utilizzo di tale struttura è limitato a problemi bidimensionali, poiché si comporta come un mezzo efficace plasmonico solo se il campo è polarizzato linearmente (parallelo a piani metallici).

I modi fondamentali TE che si propagano all'interno di tale struttura sono caratterizzati dalla seguente costante di propagazione β^{TE} e dall'impedenza caratteristica Z^{TE}:

$$\beta^{TE} = \sqrt{k_0{}^2\varepsilon_r - \left(n\frac{\pi}{L}\right)^2} = k_0\sqrt{\varepsilon_{eff}}$$
$$Z^{TE} = \eta_0 \frac{k_0}{\beta^{TE}} = \eta_0 / \sqrt{\varepsilon_{eff}} \qquad (8)$$
$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_r - \left(m\frac{\lambda}{2L}\right)^2$$

dove L, k_0 e η_0 sono rispettivamente l'altezza della guida, il modulo del vettore d'onda nel vuoto e l'impedenza caratteristica nel vuoto. Considerando solo il modo fondamentale $(n=0)$, la guida a piatti piani e paralleli (8) funziona per incidenza normale come un mezzo plasmonico (3), dove $\varepsilon_{\inf} = \varepsilon_r$, $f_{pl} = c\sqrt{\varepsilon_r}/2L$ e $\nu = 0$. Nel caso di incidenza obliqua, bisogna tenere conto della presenza di una componente del vettore d'onda normale ai piatti k_n; la permittività efficace diviene:

$$\varepsilon_{eff} = \varepsilon_r - \left(\frac{c}{f}\right)^2 \left[\left(\frac{n}{2L}\right)^2 - \left(\frac{k_n}{2\pi}\right)^2\right] \qquad (9)$$

2.3 Split Ring Resonators

Alle frequenze delle microonde – così come a frequenze ottiche – non esistono materiali che presentano valori negativi della permeabilità. Un possibile modo per avere un tale comportamento è utilizzare delle nano-inclusioni metalliche che, eccitate opportunamente, possano determinare una magnetizzazione efficace attraverso la creazione di momenti magnetici generati da distribuzioni di correnti di conduzione e di spostamento e che, inoltre, presentino una polarizzazione elettrica indotta trascurabile.

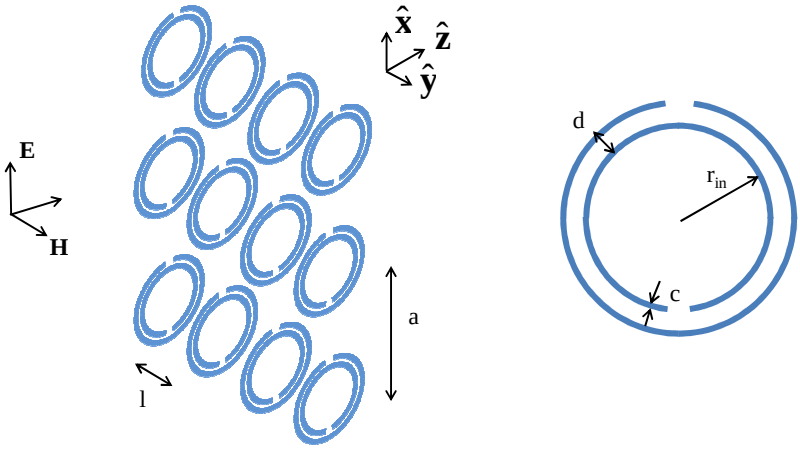


Figura 4: Split Ring Resonators.

Consideriamo una distribuzione periodica di inclusioni metalliche di forma circolare (Figura 4) e ipotizziamo che un campo elettromagnetico incida su di esse con un campo magnetico parallelo all'asse delle inclusioni (nella Figura 4 l'asse y); si induce, allora, una corrente superficiale circolare che tende a generare una magnetizzazione che si oppone al campo incidente. L'assenza, però, della chiusura dell'anello non permette alla corrente di scorrere sul singolo anello; la presenza del gap tra i due anelli concentrici permette la chiusura del circuito. La struttura così fatta si comporta come un circuito risonante L-C, dove il termine induttivo è dovuto alla corrente che scorre sugli anelli e la capacità è causata dal gap tra gli anelli.

Nell'ipotesi che il gap sia molto più piccolo del raggio dell'anello interno $d \ll r_{in}$, che le capacità dovute ai gap presenti sui singoli anelli siano trascurabili, che il campo magnetico incidente sia spazialmente costante $(\lambda \gg a)$ e che inoltre $r_{in} \gg c, \quad l < r_{in} \quad \ln(c/d) \gg \pi$, si ottiene la seguente permeabilità efficace per la struttura in Figura 4 [9]:

$$\mu_{eff} = 1 - \frac{(1-\mu_\infty) f^2}{f^2 - f_0^2 - j\gamma f} \qquad (10)$$

La frequenza di risonanza f_0, la frequenza di collisione γ e la permittività a infinito μ_∞ sono legate alla geometria della struttura e alle caratteristiche del materiale utilizzato nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
f_0 &= \frac{c_0}{r}\sqrt{\frac{3(l/r)}{\pi \ln(2c/d)}} \\
\gamma &= \frac{2(l/r)}{\omega \mu_0}\rho \\
\mu_\infty &= 1-\pi(r/a)^2
\end{aligned}
\tag{11}
$$

dove c_0 è la velocità della luce nel vuoto, ρ è la resistività per unità di lunghezza e gli altri parametri sono quelli mostrati in Figura 4.

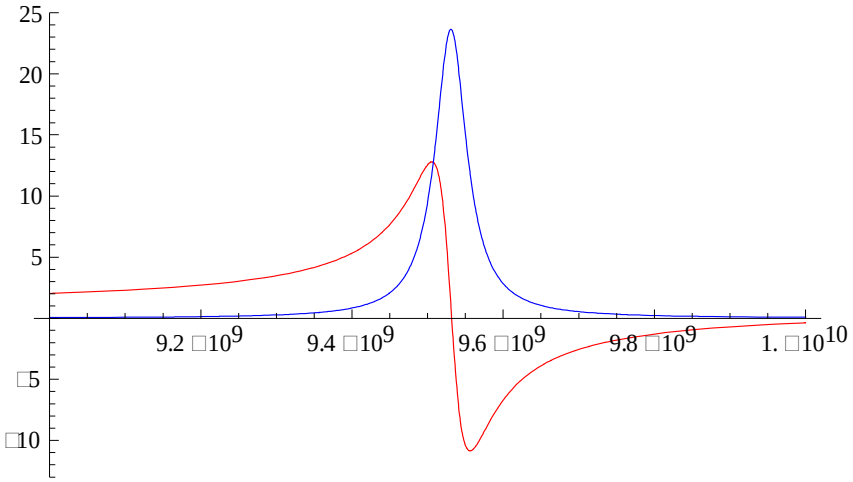


Figura 5: Andamento della permeabilità relativa (a=10mm, c=1mm, d=0.1mm, l=2mm, r=2mm).

La permeabilità presenta un andamento dispersivo simile a quello di Lorentz (5) e assume valori negativi nell'intervallo di frequenze $\left(f_0, f_0/\sqrt{\mu_\infty}\right)$.

Il mezzo descritto finora è anisotropo e la permeabilità efficace data dalla (10) è il valore della permeabilità solo sull'asse y (Figura 4). Per superare questa limitazione, si possono sistemare gli anelli in modo tale che per qualsiasi polarizzazione del campo il metamateriale risponda come un mezzo isotropo [9].

Bibliografia

[1] Caloz Christophe, Tatsuo Itoh, "Electromagnetic Metamaterials: Transmission Line Theory and Microwave Applications", John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2006.

[2] Alù Andrea and N. Engheta, "Pairing an Epsilon-Negative Slab With a Mu-Negative Slab: Resonance, Tunneling and Transparency," *IEEE Trans on Antennas and Propagation*, Vol. 51, No. 10, October 2003.

[3] Alù Andrea and N. Engheta, "Guided Modes in a Waveguide Filled With a Pair of Single-Negative (SNG), Double-Negative (DNG), and/or Double-Positive (DPS) Layers," *IEEE Trans on Microwave Theory and Techniques*, Vol. 52, No. 1, January 2004.

[4] Silveirinha Mario G., A. Alù, N. Engheta, "Parallel-plate metamaterials for cloacking structures," *Physical Review E*, **75**, 036603, 2007.

[5] Wood, B., J. B. Pendry, "Directed subwavelength imaging using a layered metal-dielectric system," *Physical Review B*, **74**, 2006.

[6] Rotman, Walter, "Plasma Simulation by Artificial Dielectrics and Parallel-Plate Media," *IRE Trans. on Antennas and Propagation*, pp. 82-95, January, 1962.

[7] Brown J., "Artificial dielectrics having refractive indices less than unity," *Proc. IEE*, Monograph No. 62R, vol. 100, pt. 4, pp. 51-62, May 1953.

[8] Brown J., W. Jackson, "The properties of artificial dielectrics at centimeter wavelengths," *Proc. IEE*, paper no. 1699R, vol. 102B, pp. 11-21, January, 1955.

[9] Pendry J. B., A. J. Holden, W. J. Stewart and, I. Youngs, "Extremely Low Frequency Plasmons in Metallic Mesostructures," *Physical Review Letters*, Vol. 76, No. 25, 17 June 1996.

[10] Pendry J. B., A. J. Holden, D. J. Robbins, and W. J. Stewart, "Magnetism from Conductors and Enhanced NonLinear Phenomena," *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tecniques*, Vol. 47, No. 11, November 1999.

Capitolo Secondo

Linee di trasmissione accoppiate in microstriscia

Le linee a microstriscia sono le linee di trasmissione più utilizzate per la realizzazione di componenti circuitali integrati alle microonde (MIC): i progressi fatti nella tecnologia dei circuiti stampati e i costi ridotti di realizzazione, infatti, hanno portato l'utilizzo delle linee a microstriscia in un'ampissima gamma di applicazioni [1]. Inoltre, la configurazione planare di tale struttura permette di determinare le caratteristiche primarie (velocità di fase e impedenza caratteristica) in funzione delle caratteristiche geometriche e fisiche della struttura in un singolo piano.

La configurazione a linee di trasmissione accoppiate consiste nel porre due linee di trasmissione in microstriscia (o anche più di due) sufficientemente vicine – la separazione tra di esse può essere sia costante sia variabile –, in tal modo si presenta un accoppiamento continuo tra i campi elettromagnetici delle due linee. Le linee accoppiate sono ampiamente utilizzate nei circuiti VLSI (Very Large Scale Integrated) per applicazioni digitali e circuiti integrati a microonde [2]. Numerose interconnessioni possono essere presenti su un singolo chip; nel progetto di queste interconnessioni è molto importante soddisfare i requisiti in termine di dimensioni, potenza, frequenza di clock, e ritardo di propagazione. Distorsione del segnale, rumore e diafonia tra le linee sono i tipici problemi da evitare. Un appropriato progetto permette, dunque, di limitare tali fenomeni e gioca un ruolo fondamentale nell'evoluzione della tecnologia VLSI.

Esistono numerosi componenti a microonde che sono realizzati utilizzando sezioni di linee accoppiate: possiamo elencarne i seguenti principali utilizzi come accoppiatori direzionali, filtri, balun, reti di adattamento d'impedenza, risonatori, induttori, capacitori, blocchi in corrente continua; tra questi, i più utilizzati sono i filtri e gli accoppiatori direzionali. Questi ultimi, in particolare, eseguono numerose funzioni nei circuiti e nei sottosistemi a microonde [3]; sono utilizzati per campionare la potenza per il controllo dell'ampiezza e la compensazione della temperatura; inoltre, vengono anche impiegati come divisori e combinatori di potenza. Negli amplificatori bilanciati il loro utilizzo permette di ottenere un ottimo valore del rapporto di onda stazionaria (ROS o VSWR) sia in ingresso, sia in uscita;

nei mixer bilanciati e negli analizzatori di rete, poi, sono utilizzati per campionare i segnali incidenti e riflessi.

1. CARATTERISTICHE GENERALI DELLE LINEE ACCOPPIATE

Un'importante proprietà di qualsiasi linea di trasmissione costituita da due conduttori ideali posti in un mezzo omogeneo è quella di supportare la propagazione di modi TEM – esempi comuni sono le linee coassiali e le linee bifilari. Una linea di trasmissione in microstriscia non supporta modi puramente TEM ma modi quasi-TEM: il campo elettromagnetico è distribuito essenzialmente nella sezione trasversale alla direzione di propagazione, ma esistono anche delle componenti longitudinali del campo che sono causate dai campi ai bordi dovuti alla discontinuità dielettrica tra l'aria e il substrato [1]. Dato che le componenti di bordo sono molto piccole rispetto al campo principale, in prima analisi è utilizzabile l'approssimazione di modi TEM. Si possono allora definire la costante di propagazione e l'impedenza caratteristica del modo in funzione dei parametri primari della linea: induttanza, capacità, resistenza e conduttanza. L'approssimazione di modo quasi-TEM è valida nel limite quasi-statico quando la frequenza di lavoro è abbastanza piccola, in modo tale che la distanza tra i conduttori risulta molto più piccola della lunghezza d'onda $\left(\approx \lambda_g / 20\right)$.

Nel caso di linee accoppiate, queste considerazioni sono ancora applicabili; bisogna però considerare il fatto che la struttura supporta un numero di modi pari al numero di conduttori meno uno. La trattazione a linee di trasmissione è allora applicabile per ogni singolo modo; in particolare, tratteremo d'ora in avanti il caso di due linee di trasmissione uguali in microstriscia poste abbastanza vicine da supporre che i campi presenti sulle due linee di trasmissione si perturbino continuamente tra di loro.

2. RAPPRESENTAZIONE CIRCUITALE

In Figura 6 è mostrata la sezione di una linea di trasmissione accoppiata simmetrica; ipotizzando che sia valida l'approssimazione quasi-statica, tale struttura supporta due modi fondamentali TEM.

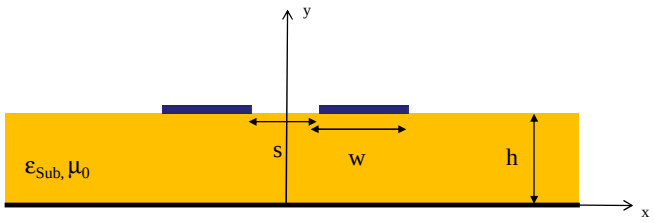
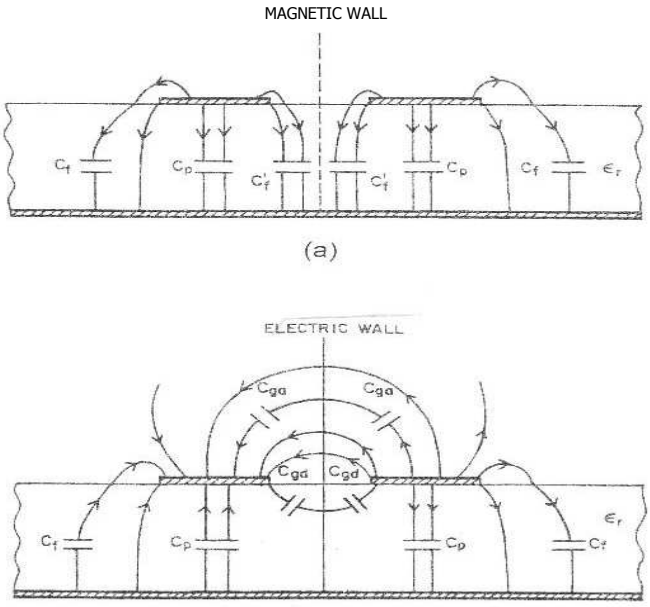


Figura 6: Linee di trasmissioni accoppiate.

La struttura è simmetrica rispetto a $x = 0$. Ponendo lungo l'asse di simmetria una parete elettrica perfetta o una parete magnetica perfetta si ottengono due possibili configurazioni di campo nella sezione trasversale. La parete magnetica perfetta equivale ad aver alimentato le due microstriscie con tensioni di ampiezza e polarità uguali; al contrario, la parete elettrica equivale a tensioni di ampiezza uguali ma polarità opposte. Le due distribuzioni di campo elettrico e magnetico che ne derivano equivalgono quindi ai due modi fondamentali che tale struttura può supportare: il modo pari (parete magnetica perfetta) e il modo dispari (parete elettrica perfetta). Ciascun modo è descrivibile attraverso le sue costanti secondarie (impedenza caratteristica e costante di propagazione) che possono essere valutate in forma approssimata attraverso numerose formule di progetto [4], [5] e [6]. In particolare, i parametri secondari possono essere calcolati utilizzando il modello circuitale proposto da Garg e Bahl [4], attraverso capacità singole e mutue. Tale rappresentazione e le distribuzioni delle linee di forza del campo elettrico nella sezione sono mostrate in Figura 7.



(b)

Figura 7: Distribuzione del campo elettrico e rappresentazione circuitale del modo pari a) e dispari b).

Tale rappresentazione circuitale consente di ottenere un semplice modello fisico della struttura, evidenziando i diversi contributi al calcolo della capacità dei singoli modi dovuti dal campo ai bordi, da quello di accoppiamento tra le strisce e da quello delle singole strisce come capacità a piatti piani e paralleli.

La capacità del modo pari è calcolabile come la somma di tre contributi:

$$C_e = C_p + C_f + C_f^{'} \qquad (1)$$

Dove C_p è la capacità a piatti paralleli tra la striscia e il piano di massa, C_f è la capacità di bordo (di *fringing*) all'esterno della striscia e $C_f^{'}$ è la capacità di bordo C_f modificata per tenere in conto la presenza dell'altra linea. Le espressioni per C_p, C_f and $C_f^{'}$ sono date in [4].

La capacità del modo dispari C_o è data invece da quattro contributi: C_p, C_f, C_{gd} e C_{ga}, ovvero

$$C_o = C_p + C_f + C_{gd} + C_{ga} \qquad (2)$$

La capacità C_{ga} descrive il flusso elettrico tra le strisce in aria e la capacità C_{gd} quello nella regione dielettrica.

L'impedenza caratteristica Z^c e la costante di propagazione β sono valutabili nel seguente modo:

$$\begin{aligned} Z_i^c &= \left[c\sqrt{C_i^a C_i} \right]^{-1} && i = e, o \\ \varepsilon_i &= \frac{C_i}{C_i^a} && i = e, o \\ \beta_i &= \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_i} && i = e, o \end{aligned} \qquad (3)$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto, ω la frequenza angolare di lavoro e C_e^a e C_o^a sono le capacità del modo pari e dispari nella configurazione a linee a microstriscia accoppiate con l'aria al posto del dielettrico.

Nelle linee accoppiate in microstriscia, l'impedenza del modo pari è maggiore di quella del modo dispari; queste assumono tuttavia lo stesso valore quando la separazione tra le due

strisce è sufficientemente grande ($S/h \gg 1$), poiché le capacità di accoppiamento diventano trascurabili $\left(C_{ga}, C_{gd} \approx 0\right)$. La differenza tra le costanti dielettriche dei due modi è piccola e può essere ulteriormente ridotta se la separazione tra le strisce è maggiore della loro larghezza ($S/W \gg 1$).

3. LINEE ACCOPPIATE

Normalmente, due approcci sono utilizzati per studiare l'accoppiamento tra linee di trasmissione: l'analisi dei modi normali e quella dei modi accoppiati [7], [8]. I modi normali di una linea di trasmissione simmetrica sono i modi pari e dispari: l'accoppiamento tra le linee può essere determinato in termini di velocità di fase e impedenze caratteristiche di tali modi delle linee accoppiate. L'approccio dei modi normali consente un metodo esatto di analisi delle linee accoppiate, così come quello dei modi accoppiati. In alcuni casi (per esempio quando due linee di trasmissione in mezzi non reciproci sono accoppiate), la determinazione dei parametri dei modi normali è molto elaborata; in questi casi, la teoria dei modi accoppiati può essere più semplice da utilizzare e, inoltre, risulta essere più intuitiva.

In questa sezione trattiamo l'analisi dei modi accoppiati come è stata discussa da Tripathi e da altri [8] [9]. La matrice di diffusione della struttura viene calcolata considerando le linee accoppiate come una rete a quattro porte. Viene poi mostrato il caso particolare di una struttura simmetrica per evidenziare come l'analisi a modi accoppiati sia strettamente legata a quella a modi normali. Infine, vengono analizzate le condizioni per le quali la rete a quattro porte composta di linee simmetriche accoppiate si comporta come un accoppiatore direzionale a *onda progressiva* o *onda regressiva*, evidenziando le proprietà di queste due tipologie di accoppiatori.

3.1 Analisi

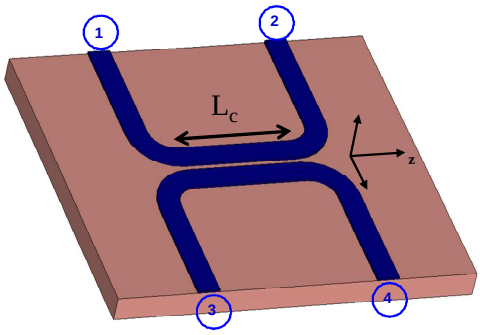


Figura 8: Due linee di trasmissione in microstriscia simmetriche.

Consideriamo due strutture guidanti che sono tra loro accoppiate: il campo presente su una di esse perturba il campo sull'altra. Consideriamo inoltre che tale struttura supporti modi TEM e che l'eccitazione sia sinusoidale del tipo $e^{j\omega t}$; possiamo, allora, definire delle tensioni (v_1, v_2) e delle correnti (i_1, i_2) sulle due linee. In un trattato infinitesimo dz della struttura il legame tra le correnti e le tensioni può essere espresso in forma vettoriale:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz}\mathbf{v} &= -\underline{\mathbf{Z}}\bullet\mathbf{i} \\ \frac{d}{dz}\mathbf{i} &= -\underline{\mathbf{Y}}\bullet\mathbf{v} \end{aligned} \qquad (4)$$

dove:

$$\mathbf{v} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{i} = \begin{Bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{Bmatrix} \quad \underline{\mathbf{Z}} = j\omega\underline{\mathbf{L}} + \underline{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} z_1 & z_m \\ z_m & z_2 \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{Y}} = j\omega\underline{\mathbf{C}} + \underline{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} y_1 & y_m \\ y_m & y_2 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Gli elementi della matrice $\underline{\mathbf{Z}}$ sono impedenze per unità di lunghezza: $z_1 = j\omega L_1 + R_1$ è l'impedenza serie che tiene in conto dei fenomeni induttivi e resistivi sulla linea *1* così come z_2 per la linea *2*; $z_m = j\omega L_m$ rappresenta l'accoppiamento induttivo tra le due linee. La matrice $\underline{\mathbf{Y}}$ contiene ammettenze per unità di lunghezza: $y_{1,2} = j\omega C_{1,2} + G_{1,2}$ descrive i contributi capacitivi e conduttivi sulle due linee; $y_m = j\omega C_m$ è l'accoppiamento di tipo capacitivo tra le due strutture guidanti.

In particolare, nel caso di linee in microstriscia accoppiate in cui si suppone in prima istanza assenza di perdite, gli elementi induttivi si possono ricavare dagli elementi capacitivi calcolati

sostituendo l'aria al dielettrico: $\underline{\mathbf{L}} = c^{-2}\underline{\mathbf{C}}_0$. La valutazione degli elementi capacitivi può essere fatta in diversi modi (per esempio [10] [11]). È importante sottolineare che nel caso di linee uguali, ovvero nel caso di struttura simmetrica, gli elementi capacitivi sono legati alle capacità del modo pari e dispari nel seguente modo: $C_1 = (C_e + C_o)/2$ e $C_m = (C_o - C_e)/2$ [11].

Imponendo ora una variazione della tensione di tipo $e^{\gamma z}$, derivando la prima equazione della (4) in z e sostituendo la seconda equazione della (4) nella prima derivata, si ottiene il seguente sistema algebrico:

$$\left(\gamma^2 \underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{Z}} \bullet \underline{\mathbf{Y}}\right) \bullet \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{6}$$

dove $\underline{\mathbf{I}}$ è la matrice identità 2x2.

Il sistema ammette soluzioni se il determinante della matrice si annulla; imponendo quest'ultima condizione, si ottengono quindi gli autovalori, ovvero le costanti complesse di propagazioni dei modi della struttura:

$$\det\begin{bmatrix} z_1 y_1 + z_m y_m - \gamma^2 & z_1 y_m + z_m y_2 \\ z_m y_1 + z_2 y_m & z_2 y_2 + z_m y_m - \gamma^2 \end{bmatrix} = 0 \tag{7}$$

L'equazione caratteristica è la seguente:

$$\gamma^4 - (a_1 + a_2)\gamma^2 + (a_1 a_2 - b_1 b_2) = 0 \tag{8}$$

dove a_1, a_2, b_1 e b_2 sono date dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} a_1 &= z_1 y_1 + z_m y_m \\ a_2 &= z_2 y_2 + z_m y_m \\ b_1 &= z_1 y_m + z_m y_2 \\ b_2 &= z_2 y_m + z_m y_1 \end{aligned} \tag{9}$$

Si ottengono due autovalori distinti (c, π):

$$\begin{aligned} \gamma_c^2 &= \left[a_1 + a_2 + \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4 b_1 b_2}\right]/2 \\ \gamma_\pi^2 &= \left[a_1 + a_2 - \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4 b_1 b_2}\right]/2 \end{aligned} \tag{10}$$

Gli autovettori del sistema algebrico sono i seguenti:

$$v_1^i = \frac{b_1}{\gamma_i^2 - a_1} v_2^i = \frac{\gamma_i^2 - a_2}{b_2} v_2^i \qquad i = c,, \pi, \tag{11}$$

È utile ora definire, per semplicità, il rapporto tra le tensioni nel caso di modo c e modo π:

$$\begin{aligned} R_c &= \frac{v_2^c}{v_1^c} = \frac{\gamma_c^2 - a_1}{b_1} = \frac{b_2}{\gamma_c^2 - a_2} \\ R_\pi &= \frac{v_2^\pi}{v_1^\pi} = \frac{\gamma_\pi^2 - a_1}{b_1} = \frac{b_2}{\gamma_\pi^2 - a_2} \end{aligned} \tag{12}$$

Una volta che siano stati ottenuti gli autovalori, è possibile esprimere la tensione sulle due linee come la somma dei modi c e π che tale struttura può supportare:

$$\begin{aligned} v_1 &= A_1 e^{-\gamma_c z} + A_2 e^{\gamma_c z} + A_3 e^{-\gamma_\pi z} + A_4 e^{\gamma_\pi z} \\ v_2 &= R_c A_1 e^{-\gamma_c z} + R_c A_2 e^{\gamma_c z} + R_\pi A_3 e^{-\gamma_\pi z} + R_\pi A_4 e^{\gamma_\pi z} \end{aligned} \tag{13}$$

Sostituendo l'equazioni (13) nella (4) si ottengono le espressioni delle correnti:

$$\begin{aligned} i_1 &= A_1 Y_{c1} e^{-\gamma_c z} - A_2 Y_{c1} e^{\gamma_c z} + A_3 Y_{\pi 1} e^{-\gamma_\pi z} - A_4 Y_{\pi 1} e^{\gamma_\pi z} \\ i_2 &= A_1 R_c Y_{c2} e^{-\gamma_c z} - A_2 R_c Y_{c2} e^{\gamma_c z} + A_3 R_\pi Y_{\pi 2} e^{-\gamma_\pi z} - A_4 R_\pi Y_{\pi 2} e^{\gamma_\pi z} \end{aligned} \tag{14}$$

dove Y_{c1}, Y_{c2}, $Y_{\pi 1}$ e $Y_{\pi 2}$ sono dati dalle seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} Y_{c1} &= \gamma_c \frac{z_2 - z_m R_c}{z_1 z_2 - z_m{}^2} \qquad & Y_{c2} &= \frac{\gamma_c}{R_c} \frac{z_1 R_c - z_m}{z_1 z_2 - z_m{}^2} \\ Y_{\pi 1} &= \gamma_\pi \frac{z_2 - z_m R_\pi}{z_1 z_2 - z_m{}^2} \qquad & Y_{\pi 2} &= \frac{\gamma_\pi}{R_\pi} \frac{z_1 R_\pi - z_m}{z_1 z_2 - z_m{}^2} \end{aligned} \tag{15}$$

Possiamo ora caratterizzare le due linee di trasmissioni accoppiate come una rete a quattro porte, per la quale è possibile definire le matrici di impedenza/ammettenza e la matrice di diffusione. È conveniente esprimere in forma vettoriale la dipendenza dei vettori **v** ed **i** dal vettore delle incognite $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}^\tau$. Consideriamo che la struttura sia di lunghezza *L*; sulle quattro porte (1, 2, 3 e 4) valgono le seguenti relazioni:

$$\begin{bmatrix} V_1 = v_1(0) \\ V_2 = v_1(L) \\ V_3 = v_2(0) \\ V_4 = v_2(L) \end{bmatrix} = \mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{-\gamma_c L} & e^{\gamma_c L} & e^{-\gamma_\pi L} & e^{\gamma_\pi L} \\ R_c & R_c & R_\pi & R_\pi \\ R_c e^{-\gamma_c L} & R_c e^{\gamma_c L} & R_\pi e^{-\gamma_\pi L} & R_\pi e^{\gamma_\pi L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 = i_1(0) \\ I_2 = -i_1(L) \\ I_3 = i_2(0) \\ I_4 = -i_2(L) \end{bmatrix} = \mathbf{I} = \begin{bmatrix} Y_{c1} & -Y_{c1} & Y_{\pi 1} & -Y_{\pi 1} \\ -Y_{c1} e^{-\gamma_c L} & Y_{c1} e^{\gamma_c L} & -Y_{\pi 1} e^{-\gamma_\pi L} & Y_{\pi 1} e^{\gamma_\pi L} \\ R_c Y_{c2} & -R_c Y_{c2} & R_\pi Y_{\pi 2} & -R_\pi Y_{\pi 2} \\ -R_c Y_{c2} e^{-\gamma_c L} & R_c Y_{c2} e^{\gamma_c L} & -R_\pi Y_{\pi 2} e^{-\gamma_\pi L} & R_\pi Y_{\pi 2} e^{\gamma_\pi L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \tag{16}$$

Possiamo quindi calcolare la matrice di impedenza, esplicitando la dipendenza della tensione ai capi delle linee in funzione delle correnti $\mathbf{V} = \underline{\mathbf{Z}}_m \bullet \mathbf{I}$:

$$\mathbf{Z}_m = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ e^{-\gamma_c L} & e^{\gamma_c L} & e^{-\gamma_\pi L} & e^{\gamma_\pi L} \\ R_c & R_c & R_\pi & R_\pi \\ R_c e^{-\gamma_c L} & R_c e^{\gamma_c L} & R_\pi e^{-\gamma_\pi L} & R_\pi e^{\gamma_\pi L} \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} Y_{c1} & -Y_{c1} & Y_{\pi 1} & -Y_{\pi 1} \\ -Y_{c1} e^{-\gamma_c L} & Y_{c1} e^{\gamma_c L} & -Y_{\pi 1} e^{-\gamma_\pi L} & Y_{\pi 1} e^{\gamma_\pi L} \\ R_c Y_{c2} & -R_c Y_{c2} & R_\pi Y_{\pi 2} & -R_\pi Y_{\pi 2} \\ -R_c Y_{c2} e^{-\gamma_c L} & R_c Y_{c2} e^{\gamma_c L} & -R_\pi Y_{\pi 2} e^{-\gamma_\pi L} & R_\pi Y_{\pi 2} e^{\gamma_\pi L} \end{bmatrix}^{-1} \tag{17}$$

Per quanto riguarda la valutazione della matrice di diffusione e in particolare di quella generalizzata, è utile definire una matrice di normalizzazione; consideriamo quindi che le quattro porte siano interfacciate con linee di trasmissione che hanno le medesime caratteristiche elettromagnetiche; la matrice di normalizzazione è pari alla matrice identità moltiplicata per la radice dell'ammettenza caratteristica dell'ipotetica linea di collegamento $\mathbf{N} = \sqrt{Y_N}\,\mathbf{I}$ (Y_n è l'ammettenza delle linee che si interfacciano alla struttura). La matrice di impedenza normalizzata è quindi $\mathbf{Z_N} = \mathbf{N} \bullet \mathbf{Z}_m \bullet \mathbf{N}$.

Possiamo quindi calcolare la matrice di diffusione nel seguente modo:

$$\mathbf{S} = (\mathbf{Z_N} - \mathbf{I}) \bullet (\mathbf{Z_N} + \mathbf{I})^{-1} \tag{18}$$

Una volta che siano state definite le matrici di impedenza e di diffusione, è utile considerare il caso particolare di struttura simmetrica; in questo caso, le impedenze e le ammettenze delle singole linee sono uguali tra loro: $z_1 = z_2 = z_s$ e $y_1 = y_2 = y_s$. In tal modo si ottiene che le costanti complesse, tenendo conto delle equazioni (9), (10) e (12), assumono la seguente semplice espressione:

$$\begin{aligned} \gamma_c^2 &= (z_s + z_m)(y_s + y_m) = \gamma_e{}^2 \\ \gamma_\pi^2 &= (z_s - z_m)(y_s - y_m) = \gamma_o{}^2 \end{aligned} \tag{19}$$

Nel caso di struttura simmetrica le costanti di propagazione dei modi *c* e π coincidono con quelle dei modi pari e dispari definite in (3) nel caso di assenza di perdite. Con il pedice *e* si vuole indicare che il modo è pari e con il pedice *o* che il modo è dispari. Il rapporto tra le ampiezze delle tensioni sulle due linee dei due modi *c* e π si riduce a

$$\begin{aligned} R_c &= 1 \\ R_\pi &= -1 \end{aligned} \tag{20}$$

Inoltre, dalla (15) risulta che $Y_{c1} = Y_{c2} = \sqrt{(y_s + y_m)/(z_s + z_m)} = Y_e$ e che $Y_{\pi 1} = Y_{\pi 2} = \sqrt{(y_s - y_m)/(z_s - z_m)} = Y_o$.

Nel caso di assenza di perdite le costanti di propagazione sono quantità puramente immaginarie e le impedenze quantità puramente reali:

$$\begin{aligned} \gamma_e &= j\beta_e = j\omega\sqrt{(C_1 + C_m)(L_1 + L_m)} \\ \gamma_o &= j\beta_o = j\omega\sqrt{(C_1 - C_m)(L_1 - L_m)} \\ Y_e &= \sqrt{(L_1 + L_m)/(C_1 + C_m)} \\ Y_o &= \sqrt{(L_1 - L_m)/(C_1 - C_m)} \end{aligned} \tag{21}$$

Riassumendo, nel caso di linee simmetriche le tensioni e le correnti sono esprimibili come la combinazione di modi propaganti regressivi e progressivi pari *e* e dispari *o* ($v_e^+(z), v_e^-(z), v_o^+(z)$ e $v_o^-(z)$) che interferiscono tra di loro con ampiezze e fasi differenti.

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(v_e^+(z) + v_e^-(z)\right) + \left(v_o^+(z) + v_o^-(z)\right) = A_1 e^{-j\beta_e z} + A_2 e^{j\beta_e z} + A_3 e^{-j\beta_o z} + A_4 e^{j\beta_o z} \\ v_2 &= \left(v_e^+(z) + v_e^-(z)\right) - \left(v_o^+(z) + v_o^-(z)\right) = A_1 e^{-j\beta_e z} + A_2 e^{j\beta_e z} - A_3 e^{-j\beta_o z} - A_4 e^{j\beta_o z} \\ i_1 &= Y_e\left(v_e^+(z) - v_e^-(z)\right) + Y_o\left(v_o^+(z) - v_o^-(z)\right) = A_1 Y_e e^{-j\beta_e z} - A_2 Y_e e^{j\beta_e z} + A_3 Y_o e^{-j\beta_o z} - A_4 Y_o e^{j\beta_o z} \\ i_2 &= Y_e\left(v_e^+(z) - v_e^-(z)\right) - Y_o\left(v_o^+(z) - v_o^-(z)\right) = A_1 Y_e e^{-j\beta_e z} - A_2 Y_e e^{j\beta_e z} - A_3 Y_o e^{-j\beta_o z} + A_4 Y_o e^{j\beta_o z} \end{aligned} \tag{22}$$

È interessante ora trattare due casi limiti per evidenziare meglio i fenomeni di interferenza tra i modi propaganti nella struttura simmetrica:

1) Il caso in cui le ammettenze dei due modi fondamentali siano uguali $Y_e = Y_o = Y_c$ ma le costanti di propagazioni siano differenti $\beta_e \neq \beta_o$. Mostreremo nella seguente sezione che è possibile in tale configurazione progettare un accoppiatore direzionale a onda progressiva.

2) Il caso in cui le costanti di propagazione siano uguali $\beta_e = \beta_o = \beta_c$ ma le impedenze siano differenti $Y_e \neq Y_o$. In questo caso si può progettare un accoppiatore direzionale a onda regressiva.

3.2 Accoppiatore co-direzionale o a onda progressiva

Nella seguente configurazione vogliamo mostrare che se due linee di trasmissione sono realizzate in modo tale che siano caratterizzate dall'avere due modi fondamentali TEM con differenti costanti di propagazione e uguali impedenze caratteristiche, allora è possibile trasferire tutto il segnale immesso su una linea su di un'altra. Ipotizziamo che le reti collegate alla struttura abbiano delle impedenze caratteristiche uguali a quelle dei modi propaganti $Y_n = Y_c$; questa condizione determina un perfetto adattamento dei modi pari e dispari ai carichi. Si ottengono in tal modo solo modi progressivi (nell'equazione (13) i termini A_2 e A_4 sono nulli). Applicando un generatore di tensione V_0 alla porta 1 (linea 1 nella sezione $z = 0$) si ottiene che il segnale si propaga nella linea 1 nella direzione delle z positive senza subire riflessione, perché è la combinazione dei due modi che sono a loro volta adattati; inoltre, parte dell'energia che si propaga nella linea 1 fluisce nella seconda linea, producendo un segnale su di essa che viaggerà nella stessa direzione di quello della linea 1 con un fenomeno di accoppiamenti di tipo co-direzionale.

L'andamento della tensione e della corrente può essere calcolato applicando le condizioni al contorno alle porte alla sezione $z = 0$ della struttura: $v_1(0) = V_0$ e $v_2(0) = 0$. I coefficienti A_1, A_3 sono facilmente ricavabili e si ottengono le seguenti espressioni per la tensione e la corrente sulle due linee:

$$
\begin{aligned}
v_1(z) &= V_0 e^{-j\frac{\beta_e+\beta_o}{2}z} \cos\left[(\beta_o - \beta_e) z/2\right] \\
v_2(z) &= jV_0 e^{-j\frac{\beta_e+\beta_o}{2}z} \sin\left[(\beta_o - \beta_e) z/2\right] \\
i_1(z) &= jY_c V_0 e^{-j\frac{\beta_e+\beta_o}{2}z} \sin\left[(\beta_o - \beta_e) z/2\right] \\
i_2(z) &= Y_c V_0 e^{-j\frac{\beta_e+\beta_o}{2}z} \cos\left[(\beta_o - \beta_e) z/2\right]
\end{aligned}
\qquad (23)
$$

Si è ipotizzato che gli autovalori siano puramente immaginari ($\gamma_e = j\beta_e$ e $\gamma_o = j\beta_o$), ovvero che le linee non presentino perdite ($z_{1,2,m} = j\omega L_{1,2,m}$ e $y_{1,2,m} = j\omega C_{1,2,m}$).

Si ottiene che il segnale è massimo $\left(v_1(0) = V_0\right)$ sulla linea 1 alla sezione $z = 0$ (porta 1) e minimo $\left(v_2(0) = 0\right)$ sulla stessa sezione sulla linea 2 (porta 3). Il segnale sulla linea 2 cresce per $z > 0$ fino al suo valore massimo $\left(v_2(z_m) = V_0\right)$ con trasferimento totale dell'energia sulla linea 2 alla sezione $z_m = (2m+1)\pi / \left|\beta_o - \beta_e\right|$, $m = 0,1,2...$ e minimo sulla linea 1 $\left(v_1(z_m) = 0\right)$.

La struttura composta dalle due linee accoppiate in tale configurazione può essere progettata come accoppiatore direzionale a onda progressiva; definendo opportunamente la lunghezza di accoppiamento L_c – il tratto di linea in cui le due linee di trasmissione sono affiancate – si possono ottenere i valori di accoppiamento che si desidera. Se, per esempio, si vuole progettare un divisore di potenza, la lunghezza di accoppiamento dovrà essere pari a $L_c = (2m+1)\pi / 2 / \left|\beta_o - \beta_e\right|$, $m = 0,1,2...$ in modo che alle porte 2 e 4 si abbia lo stesso valore di tensione $\left(v_1(L_c) = v_2(L_c) = V_0 / \sqrt{2}\right)$. La lunghezza d'accoppiamento è inversamente proporzionale alla differenza tra le costanti di propagazione del modo pari e di quello dispari. Negli accoppiatori direzionali realizzati in microstriscia questa differenza non è sufficientemente grande, portando a progetti di accoppiatori direzionali che presentano lunghezze di accoppiamento di decine se non centinaia di volte maggiori della lunghezza d'onda di lavoro: per questo motivo questa configurazione non viene quasi mai utilizzata alle frequenze delle microonde. Per ovviare a ciò, è stato proposto di utilizzare linee di trasmissione in microstriscia asimmetriche in modo da aumentare il divario tra i valori delle costanti di propagazione dei due modi fondamentali (in questo caso c e π) [12].

Nella figura seguente (Figura 9) sono mostrati gli andamenti dei parametri della matrice di diffusione calcolati utilizzando la relazione (18). Sono stati riportati sul grafico solamente i parametri S_{21} e S_{41} poiché gli altri parametri (S_{11} e S_{31}) sono nulli, avendo ipotizzato che la struttura sia adattata $Y_n = Y_c = Y_e = Y_o$. Nella figura la lunghezza di accoppiamento L_c è fissata e i parametri di diffusione variano al variare della frequenza. In particolare, si ha massimo trasferimento di potenza (unitario) alle frequenze $f_m = L_c^{-1}(2m+1)c / \left|2\left(\sqrt{\varepsilon_o} - \sqrt{\varepsilon_e}\right)\right|$ $m = 0,1,2...$

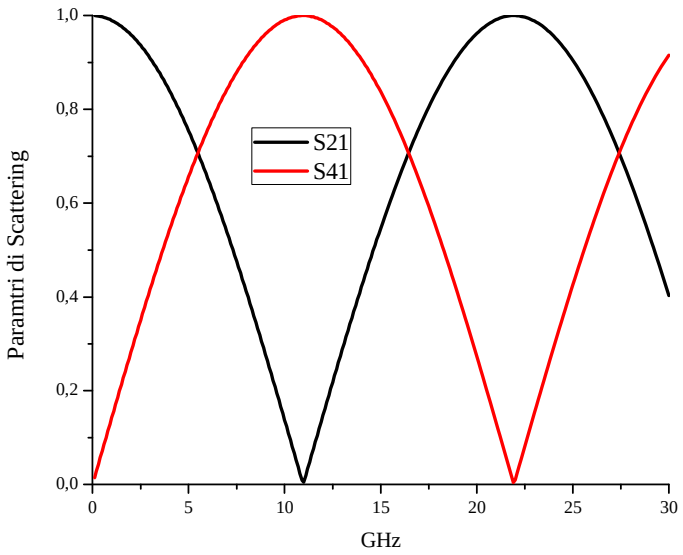


Figura 9: Parametri della matrice di diffusione.

3.3 Accoppiatore contro-direzionale o a onda regressiva

Nel paragrafo precedente è stato discusso il comportamento di un accoppiatore co-direzionale nel quale si ottiene un trasferimento di energia da una linea di trasmissione all'altra grazie alla differenza di velocità di fase dei modi, i quali interferiscono tra loro in modo costruttivo o distruttivo lungo la struttura. Nel caso dell'accoppiatore contro-direzionale, al contrario, i due modi presentano la stessa velocità di fase ma sono disadattati alle quattro porte. Si hanno quindi sia modi progressivi, sia modi regressivi.

Il progetto di un accoppiatore direzionale a onda regressiva richiede che l'interferenza dei modi (pari e dispari) progressivi e regressivi produca in modo costruttivo un segnale progressivo su una linea e uno regressivo nell'altra. A tal fine, l'impedenza caratteristica di carico ai capi delle linee è scelta in modo tale che sia la media geometrica di quella dei due modi fondamentali $Y_n = \sqrt{Y_e Y_o}$. Ipotizzando di porre un generatore di tensione alla porta 1 (linea 1 sezione $z = 0$), la combinazione lineare dei modi pari e dispari produce una tensione progressiva sulla linea 1 e una regressiva sulla linea 2 con assenza di segnale riflesso alla porta 1 e segnale trasmesso alla porta 4.

La tensione e la corrente non assumono in questo caso una forma compatta: è allora più significativo utilizzare l'espressione dei parametri di diffusione; utilizzando l'equazione (18)

nella quale vanno imposte la condizione di simmetria e l'uguaglianza tra le costanti di propagazione dei modi pari e dispari $(\beta_e = \beta_o = \beta_c)$ si ottengono i parametri:

$$S_{21} = \frac{\sqrt{1-k^2}}{\sqrt{1-k^2}\cos(\beta_c L_c) + j\sin(\beta_c L_c)}$$
$$S_{31} = \frac{jk\sin(\beta_c L_c)}{\sqrt{1-k^2}\cos(\beta_c L_c) + j\sin(\beta_c L_c)} \qquad (24)$$

dove k rappresenta il coefficiente di accoppiamento in tensione:

$$k = \frac{(Y_o - Y_e)}{(Y_o + Y_e)} = \frac{(Z_e - Z_o)}{(Z_e + Z_o)} \qquad (25)$$

Gli altri parametri della matrice di diffusione sono nulli: $S_{11} = S_{41} = 0$.

Il massimo trasferimento di potenza dalla linea 1 alla linea 2 si ottiene imponendo che il prodotto tra la costante di propagazione dei modi e la lunghezza di accoppiamento debba essere un multiplo intero e dispari di $\pi/2$:

$$\beta_c L_c = (2m+1)\pi/2 \quad m = 0,1,2... \qquad (26)$$

Sotto queste condizioni, alla porta 3 si ha una frazione di potenza $|S_{31}|^2$ pari a k^2 e alla porta 2 $|S_{21}|^2$ $1-k^2$. Se invece si vuole avere il minimo di trasferimento di potenza da una linea all'altra si deve imporre la seguente condizione:

$$\beta_c L_c = m\pi \quad m = 0,1,2... \qquad (27)$$

Non si avrà, infatti, alcun segnale alla porta 3 $|S_{31}|^2 = 0$ e il segnale di ingresso alla porta 2 $|S_{21}|^2 = 1$.

A differenza dell'accoppiatore direzionale a onda progressiva in cui si può avere il completo trasferimento di energia da una linea all'altra, in questo caso l'accoppiamento è funzione del rapporto delle impedenze dei due modi (25). Si può ottenere il completo trasferimento di energia da una linea all'altra solo se l'impedenza di un modo è molto maggiore dell'altra $Z_e >> Z_o \Rightarrow k \approx 1$. Nella realtà, gli accoppiatori direzionali a onda regressiva in

microstriscia non presentano mai rapporti tra le due impedenze maggiori di 2 e, quindi, l'accoppiamento $|S_{31}|^2$ può raggiungere al massimo il valore di -10 dB.

Nella figura seguente (Figura 10) sono mostrati i parametri della matrice di diffusione in funzione della frequenza; anche in questo caso, una volta fissata la lunghezza di accoppiamento, si ha massimo trasferimento di potenza alle seguenti frequenze: $f_m = 0.25(2m+1)L_c^{-1} / \sqrt{\varepsilon_c} \quad m = 0,1,2...$

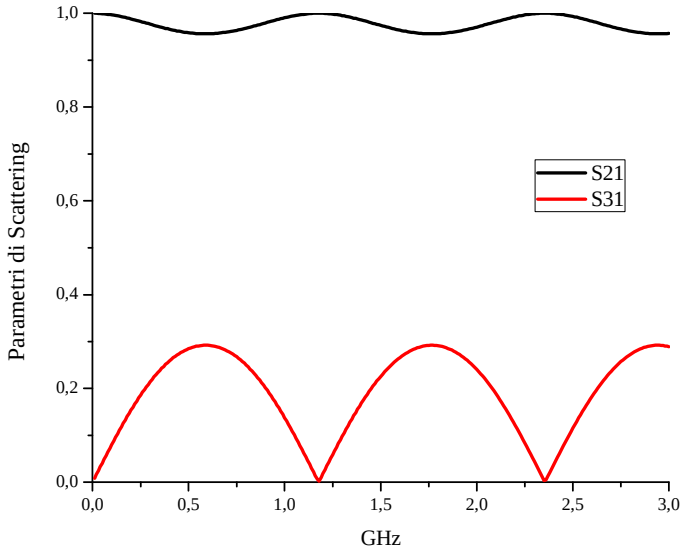


Figura 10: Parametri della matrice di diffusione di un accoppiatore direzionale in microstriscia.

3.4 Parametri degli accoppiatori direzionali

In generale, un accoppiatore direzionale progettato in microstriscia non soddisfa mai completamente le condizioni limite di accoppiatore co-direzionale o contro-direzionale. Nel primo caso, infatti, è richiesto che le impedenze dei due modi fondamentali siano uguali e tale condizione necessita di aumentare sufficientemente la distanza tra le strisce, a discapito di una diminuzione notevole della differenza tra le costanti propagazione dei due modi con un conseguente aumento della lunghezza di accoppiamento. Nell'altro caso, invece, è necessaria una diminuzione della larghezza delle singole strisce rispetto alla loro separazione; in questo modo il campo è meno confinato al di sotto delle strisce.

Alle frequenze delle microonde si progettano essenzialmente accoppiatori direzionali a onda regressiva e si utilizzano delle tecniche di compensazione della fase per minimizzare l'accoppiamento co-direzionale [2]. Nella figura sottostante (Figura 11) è mostrato

l'andamento dei parametri di scattering di un accoppiatore in microstriscia simmetrico. In questo caso reale è presente sia un accoppiamento contro-direzionale $|S_{31}|^2$, sia un accoppiamento co-direzionale $|S_{41}|^2$ e parte della potenza è riflessa alla porta 1 $|S_{11}|^2$.

È utile allora definire i parametri che caratterizzano un accoppiatore contro-direzionale, che è la configurazione più comunemente realizzata alle frequenze delle microonde:

1. L'accoppiamento: $C_{dB} = 20\log_{10} S_{31}$
2. La direttività: $D_{dB} = 20\log_{10}\left(S_{41} / S_{31}\right)$
3. L'isolamento: $I_{dB} = 20\log_{10} S_{41}$

Deve quindi valere la seguente identità: $I_{dB} = D_{dB} + C_{dB}$.

Nel caso di accoppiatori co-direzionali si possono definire gli stessi parametri sostituendo il pedice 3 con quello 4 e viceversa.

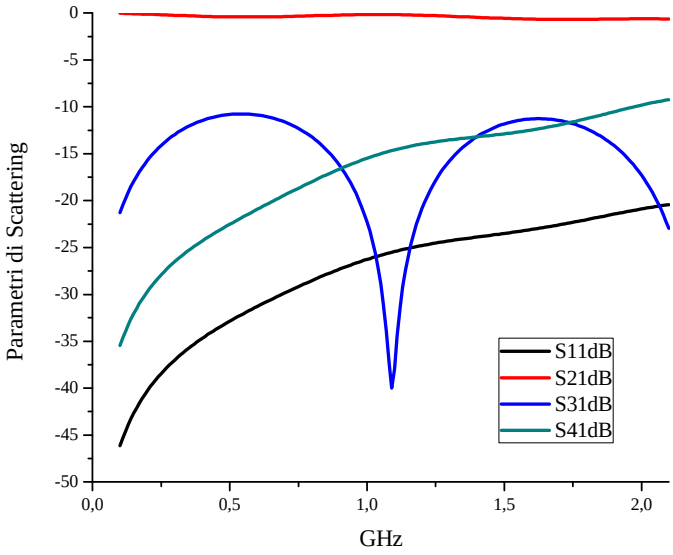


Figura 11: Parametri di diffusione di un accoppiatore direzionale in microstriscia.

4. LAMINA ENG ALL'INTERNO DEL SUBSTRATO DI UN ACCOPPIATORE DIREZIONALE IN MICROSTRISCIA

In questo paragrafo tratteremo il ruolo di una lamina ENG all'interno del substrato di linee accoppiate in microstriscia. Discuteremo un nuovo modello quasi–statico della struttura che descriva l'influenza della lamina di metamateriale estendendo il modello circuitale di Garg e Bahl. Saranno mostrate due possibili configurazioni della lamina e sarà trattata, per entrambe le configurazioni, l'influenza della lamina sul valore dell'impedenza caratteristica e della costante di propagazione dei modi fondamentali della struttura.

4.1 Prima configurazione

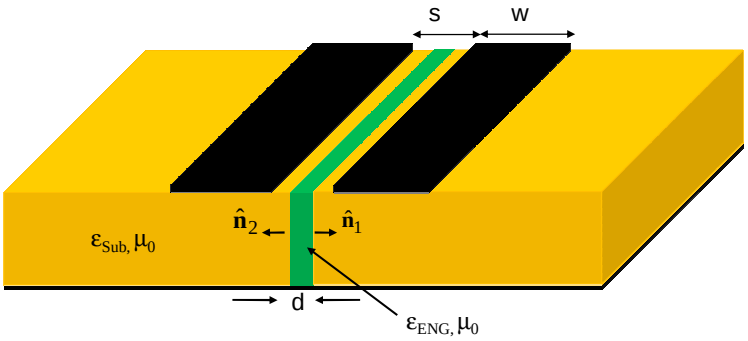


Figura 12: Linee accoppiate in microstriscia con lamina ENG all'interno del substrato.

La geometria alla quale si fa riferimento è mostrata in Figura 12, nella quale è stata introdotta una lamina di materiale ENG isotropo e omogeneo tra le due strisce all'interno del substrato, anch'esso costituito da un materiale isotropo e omogeneo. Nell'intervallo di frequenza di interesse la lamina presenta una parte reale negativa della permittività il cui valore assoluto è decisamente inferiore rispetto alla costante dielettrica del substrato. Poiché deve essere continua la componente normale del vettore spostamento elettrico alle interfacce tra i due mezzi, la scelta di una permittività di basso valore assoluto per la lamina di materiale ENG permette di ottenere una componente normale del campo elettrico di ampiezza molto elevata nei punti della lamina in prossimità delle interfacce. Infatti, applicando le condizioni al contorno per lo spostamento elettrico alle due interfacce le cui normali sono dirette secondo i versori $\hat{\mathbf{n}}_1$ e $\hat{\mathbf{n}}_2$:

$$\mathbf{E}_{1,2}^{ENG} \bullet \hat{\mathbf{n}}_{1,2} = \frac{\varepsilon_{sub}}{\varepsilon_{ENG}} \mathbf{E}_{1,2}^{sub} \bullet \hat{\mathbf{n}}_{1,2}$$

si ottiene:

$$\left|\mathbf{E}_{1,2}^{ENG}\right| \gg \left|\mathbf{E}_{1,2}^{sub}\right|$$

nell'ipotesi che:

$$\left|\frac{\varepsilon_{sub}}{\varepsilon_{ENG}}\right| \gg 1$$

In base al circuito equivalente mostrato nel paragrafo 2, appare evidente che la lamina di materiale ENG influisce prevalentemente sulla distribuzione di campo del modo dispari. L'effetto principale dell'introduzione della lamina di materiale ENG, infatti, è quello di avere, nella regione tra le due strisce occupata dalla lamina, un campo elettrico diretto principalmente come la normale alla lamina stessa.

Appare evidente che questo tipo di configurazione di campo ben si adatta alla condizione di simmetria per il modo dispari quasi-TEM, che è rappresentata da un piano elettrico perfetto (PEP), come mostrato nella parte sinistra della figura 1 del paragrafo 2.

In generale, la presenza della lamina di metamateriale ENG può essere descritta dal punto di vista circuitale da una nuova capacità equivalente C_{ENG}, sia per il modello circuitale del modo pari, sia per quello del modo dispari. Nella Figura 13 sono mostrati i modelli circuitali di Garg e Bahl del modo pari e dispari modificati, per tenere in conto della presenza della lamina ENG; nella Figura 13 (b) è stata eliminata la capacità di accoppiamento nel dielettrico $\left(C_{gd}\right)$, ipotizzando che l'accoppiamento nel substrato sia causato essenzialmente all'interno della lamina ENG e descrivibile dalla capacità C_{ENG}^{o}.

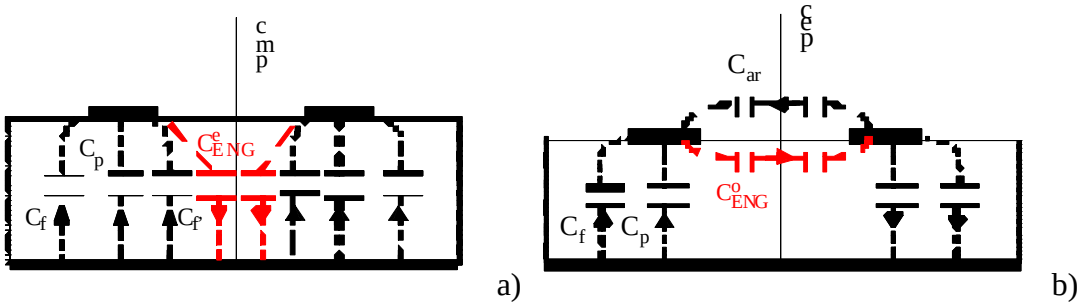


Figura 13: Modelli circuitale del modo pari (a) e del modo dispari (b).

La capacità equivalente dei due modi $\left(C_e^m \; e \, C_o^m\right)$ è data dalla seguente somma di capacità in parallelo:

$$
\begin{aligned}
&C_e^m = C_p + C_f + C_f^{'} + C_{ENG}^e \approx C_p + C_f + C_f^{'} = C_e \\
&C_o^m = C_p + C_f + C_{ga} + C_{ENG}^o = C_o(1-\chi_o) \\
&\chi_o = -C_{ENG}^o / C_o
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Il contributo della lamina ENG determina essenzialmente la modifica del valore della capacità del modo dispari; tale variazione relativa è descritta dal termine χ_o che è una quantità positiva: infatti, la capacità C_{ENG}^o è una quantità negativa, valutabile come la capacità di un capacitore a piatti piani e paralleli e, dunque, proporzionale alla permittività della lamina che è, per ipotesi, negativa (ENG).

Le impedenze caratteristiche $Z_{(o,e),m}^c$ e le costanti di propagazione $\beta_{(o,e),m}$ assumono le seguenti espressioni:

$$
\begin{aligned}
&Z_{o,m}^c \simeq \left[c\sqrt{C_o^a C_o (1-\chi_o)} \right]^{-1} = Z_o^c / \sqrt{(1-\chi_o)} \\
&Z_{e,m}^c \simeq Z_e^c \\
&\beta_{o,m} \simeq \frac{\omega}{c}\sqrt{C_o(1-\chi_o)/C_o^a} = \beta_o \sqrt{(1-\chi_o)} \\
&\beta_{e,m} \simeq \beta_e
\end{aligned}
\tag{29}
$$

La variazione relativa della capacità del modo dispari χ_o è, in generale, piccola poiché la lamina ENG presenta una permittività relativa piccola rispetto a quella del dielettrico che riempie il resto del substrato delle due linee in microstriscia accoppiate. Possiamo affermare che l'introduzione della lamina ENG contribuisce, con una piccola perturbazione, al comportamento della struttura; in particolare, si ottiene che la variazione più considerevole si ha sull'accoppiamento co-direzionale, che dipende dalla differenza delle costanti di propagazione dei due modi fondamentali. La variazione sull'accoppiamento contro-direzionale è meno rilevante poiché la variazione dell'ampiezza dell'impedenza caratteristica del modo dispari comporta una variazione meno sensibile sul valore dell'accoppiamento in tensione k.

In conclusione, l'introduzione di una lamina ENG comporta una diminuzione del valore della costante di propagazione del modo dispari e un aumento dell'impedenza caratteristica dello stesso modo.

4.2 Seconda configurazione

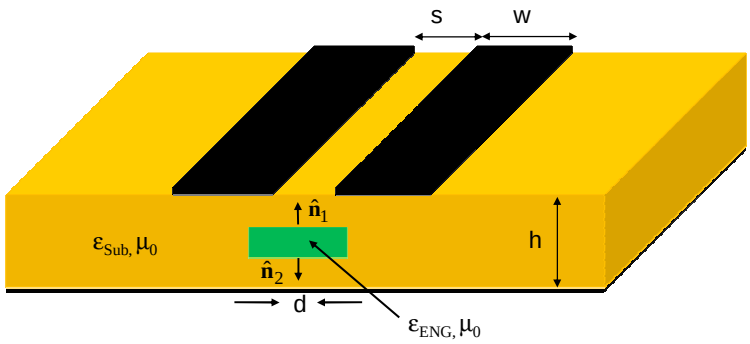


Figura 14: Due linee di trasmissione in microstriscia.

Una lamina omogenea e isotropa ENG è posta tra le due strisce all'interno di un substrato dielettrico (Figura 14). Nella banda di frequenze di interesse, la parte reale della permittività della lamina ENG ε_{ENG} presenta valori negativi, mentre si assume che il substrato sia riempito da un materiale ad alta permittività. Assumiamo che il valore assoluto della permittività dello strato ENG sia molto più piccolo della costante dielettrica del substrato: dato che la componente normale del vettore spostamento elettrico deve essere continua alle interfacce, la scelta di un valore basso della permittività della lamina ENG permette di ottenere un'ampiezza di campo elettrico di intensità elevata nelle regioni dello strato di metamateriale prossime alle interfacce. Applicando le condizioni al contorno dello spostamento elettrico alle due interfacce, nell'ipotesi $|\varepsilon_{sub}/\varepsilon_{ENG}| >> 1$, si ottiene $\left|E_{n_{1,2}}^{ENG}\right| >> \left|E_{n_{1,2}}^{sub}\right|$. Il principale effetto della permittività della lamina ENG è, quindi, quello di forzare nello strato stesso un campo elettrico diretto normale rispetto alle interfacce. Assumendo che sia sempre valida nella banda di frequenza di lavoro l'approssimazione di modi quasi-TEM, l'accoppiamento e le caratteristiche delle due linee accoppiate in microstriscia sono descrivibili con il modello circuitale di Garg-Bahl. Questo modello è stato modificato per tenere in conto l'influenza dello strato di metamateriale (Figura 15).

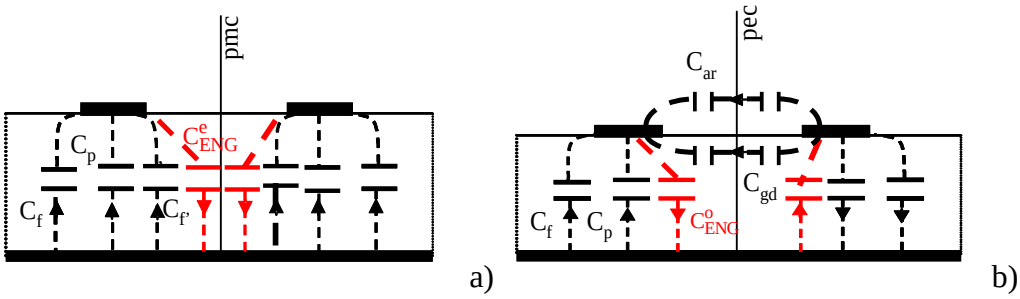


Figura 15: Modello circuitale equivalente per i modi quasi-TEM pari (a) e dispari (b) delle linee di trasmissione accoppiate della Fig. 2.

La presenza della lamina ENG può essere descritta attraverso due capacità equivalenti C^o_{ENG} e C^e_{ENG}. Queste due nuove capacità sono collegate in parallelo con le altre e, siccome nella banda di interesse la permittività esibisce valori negativi, anche le capacità relative sono negative.

La capacità equivalente dei due modi $\left(C^m_e \, e \, C^m_o\right)$ è data dalla seguente somma di capacità in parallelo:

$$\begin{aligned} C^m_e &= C_p + C_f + C'_f + C^e_{ENG} = C_e\left(1-\chi_e\right) \\ C^m_o &= C_p + C_f + C_{ga} + C_{gd} + C^o_{ENG} \approx C_o \\ \chi_e &= -C^e_{ENG} / C_e \end{aligned} \qquad (30)$$

Appare evidente che questo tipo di configurazione di campo ben si adatta alla condizione di simmetria per il modo quasi-TEM pari. Il contributo della lamina ENG determina essenzialmente la modifica del valore della capacità del modo pari; tale variazione relativa è descritta dal termine χ_e.

Le impedenze caratteristiche $Z^c_{(o,e),m}$ e le costanti di propagazione $\beta_{(o,e),m}$ assumono le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} Z^c_{e,m} &\simeq \left[c\sqrt{C^a_e C_e(1-\chi_e)}\right]^{-1} = Z^c_e / \sqrt{(1-\chi_e)} \\ Z^c_{o,m} &\simeq Z^c_o \\ \beta_{e,m} &\simeq \frac{\omega}{c}\sqrt{C_e(1-\chi_e)/C^a_e} = \beta_e\sqrt{(1-\chi_e)} \\ \beta_{o,m} &\simeq \beta_o \end{aligned} \qquad (31)$$

La variazione relativa della capacità del modo pari χ_e, dunque, risulta in generale modesta: come abbiamo visto in precedenza, la lamina ENG presenta infatti una permittività relativa decisamente piccola rispetto a quella del dielettrico. Possiamo concludere quindi che in questa configurazione l'introduzione della lamina ENG contribuisce – con una lieve perturbazione – al comportamento della struttura; in particolare, l'introduzione di una lamina ENG comporta una diminuzione del valore della costante di propagazione del modo pari e un aumento dell'impedenza caratteristica dello stesso modo.

5. APPLICAZIONE DELLE TRASFORMAZIONI CONFORMI AL CASO DI DUE LINEE IN MICROSTRISCIA ACCOPPIATE

La tecnica delle trasformazioni conformi è stata applicata in passato per la risoluzione di problemi di fisica matematica e continua a essere utilizzata ancora oggi in diversi campi applicativi [13]. Il suo utilizzo è spesso legato alla soluzione di un'equazione di Laplace, la quale è invariante se il piano in cui è definito il problema è trasformato in un altro piano. Conseguentemente, geometrie anche complicate possono essere trasformate in configurazioni più convenienti alla risoluzione del problema specifico senza alcuna modifica delle equazioni alle derivate parziali che ne descrivono il comportamento. Nel campo della progettazione di dispositivi alle frequenze delle microonde e delle onde millimetriche le trasformazioni conformi sono ampiamente utilizzate per la modellazione di linee di trasmissione in microstriscia e antenne [14].

In questo paragrafo tratteremo l'utilizzo delle trasformazioni conformi per la valutazione delle costanti secondarie (impedenza caratteristica e costante di propagazione) di due linee accoppiate simmetriche in microstriscia. Tale trattazione consente di evidenziare il legame tra le caratteristiche fisiche e geometriche della struttura con le caratteristiche della linea e, inoltre, di determinare delle formule di progetto utili per la progettazione di tali strutture come accoppiatori direzionali. Si ipotizza che sia valida l'approssimazione quasi-stazionaria e che la struttura supporti due modi quasi-TEM pari e dispari: in questo modo il campo elettrico è ricavabile dalla conoscenza della distribuzione di un potenziale scalare in una generica sezione che è soluzione dell'equazione alle derivate parziali di Laplace.

5.1 Trasformazioni conformi

Una trasformazione di un insieme di punti che giacciono in un piano-*z* complesso in un altro insieme di punti nel piano-*w* complesso tramite la funzione $w = f(z)$ si dice conforme se si conserva l'angolo nei punti regolari z_0 (ovvero per tutti i punti in cui $f'(z_0) \neq 0$). Allora, valutando la derivata della funzione di trasformazione in forma polare

$$\frac{dw}{dz} = f'(z) = \rho e^{i\theta}$$

Se poniamo $dw = dRe^{i\Omega}$ e $dz = dre^{i\omega}$ allora

$$dR = \rho dr \quad e \quad \Omega = \omega + \theta$$

Quindi, un tratto infinitesimale dz viene trasformato in

$$dw = \rho e^{i\theta} dz$$

con un'ampiezza che è maggiorata di un fattore ρ e la sua direzione che è ruotata di un angolo θ; entrambi questi termini dipendono solo dalla funzione $f'(z)$ nel punto in cui si vuole valutare l'incremento. Quindi, se consideriamo due curve c_1 e c_2 nel piano-*z* che s'intersecano in un punto z_0 e le rispettive curve trasformate χ_1 e χ_2 nel piano-*w* che s'intersecano nel punto w_0, il fattore di maggiorazione (ρ) e rotazione (θ) è lo stesso. L'angolo tra le curve c_1 e c_2 nel punto z_0 è $\omega_1 - \omega_2$. L'angolo tra le curve trasformate poi è calcolabile come: $\Omega_1 - \Omega_2 = (\omega_1 + \theta) - (\omega_2 + \theta) = \omega_1 - \omega_2$ che mostra che l'angolo tra le curve si conserva.

Nelle applicazioni pratiche è spesso necessario determinare il campo racchiuso all'interno di un contorno poligonale. In particolare, nei problemi di elettrostatica è utile trasformare la geometria di partenza in un capacitore a piatti piani paralleli, in modo da ottenere un campo elettrico omogeneo all'interno di esso. In molti casi questa operazione non può essere realizzata in un'unica trasformazione ed è necessario trasformare il piano di partenza *z* in un piano-*t* ausiliario (o anche in una serie di piani ausiliari), e infine trasformare il piano-*t* nel piano finale *w*. Il particolare piano-*t* selezionato per questo scopo è quello sul quale i contorni del poligono di partenza giacciono sull'asse reale e i punti del piano-*z* sono *mappati* nel semipiano superiore del piano-*t*. La funzione che soddisfa tale condizione è chiamata trasformazione di Schwarz-Christoffel: questa trasformazione è utilizzata anche per passare dal piano-*t* al piano-*w*.

La trasformazione è esprimibile in forma differenziale nel seguente modo:

$$\frac{dz}{dt} = f'(t) = A(t-r_1)^{-\alpha_1}(t-r_2)^{-\alpha_2}...(t-r_n)^{-\alpha_n} = \prod_{k=1}^{n}(t-r_k)^{-\alpha_k} \qquad (32)$$

I punti r_k sono punti singolari, giacciono sull'asse reale del piano-t e rappresentano nel piano-*z* i punti in cui il contorno del poligono presenta discontinuità. I coefficienti α_k sono legati agli angoli interni θ_k del poligono nel seguente modo:

$$\alpha_k = 1 - \theta_k / \pi$$

La funzione di trasformazione in forma integrale è:

$$z = A_1 \int \frac{dt}{\prod (t - r_k)^{\alpha_k}} + A_2 = f_1(t) \tag{33}$$

Così come il piano-*t* può essere trasformato nel piano-*w* (o latri piani), da:

$$w = B_1 \int \frac{dt}{\prod (t - r_k)^{\alpha_k}} + B_2 = f_2(t) \tag{34}$$

Infine il legame tra il piano-*z* e il piano-*w* è il seguente: $z = f_1\left[f_2^{-1}(w) \right]$.

La limitazione di questo metodo risiede nella valutazione dell'integrale per forme complicate poligonali.

Se le parti del poligono che si vuole trasformare sono aperte si assume che si chiudano all'infinito (nelle figure seguenti ciò è indicato con una linea punteggiata). Due, e solo due, punti nel piano-*t* (r_k) possono essere scelti e posti arbitrariamente; gli altri punti comprese le costanti di integrazione devono essere determinate nell'analisi.

La posizione dei punti nel piano-*w* è arbitraria con l'unica condizione che sia soddisfatta l'equipotenzialità, rispettando le ipotesi fisiche del problema definite nel piano-*z*.

5.2 Modello a capacitore equivalente di un accoppiatore direzionale in microstriscia

La geometria alla quale si fa riferimento è mostrata in Figura 16 dove è raffigurata la sezione destra di una struttura costituita da due linee di trasmissione simmetriche accoppiate in microstriscia. In questa sezione viene estesa la formulazione ottenuta da Wan [15] alfine di derivare formule accurate per la progettazione di linee accoppiate in microstriscia con una lamina di ENG posta all'interno del substrato tra le due strisce.

Nell'analisi seguente si assume che le strisce siano considerate di spessore infinitesimale e che siano dei conduttori perfetti.

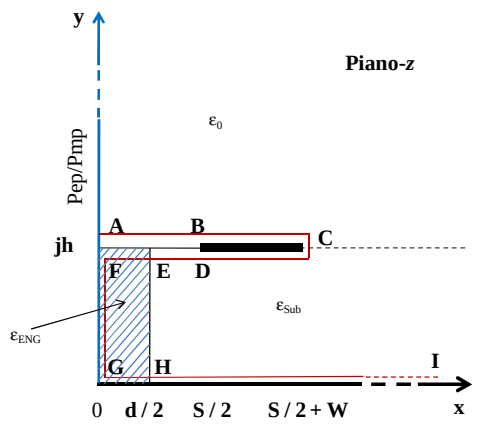


Figura 16: Sezione di due linee accoppiate in microstriscia piano-z.

L'applicazione della tecnica delle trasformazioni conformi deve essere fatta distintamente per il modo pari e per quello dispari. L'analisi di entrambi i modi è eseguita dunque ponendo una parete elettrica o magnetica sull'asse di simmetria della struttura (nella Figura 16 l'asse di simmetria è rappresentato dalla linea blu). La trasformazione di Schwarz-Christoffel verrà applicata quattro volte per ottenere due capacitori equivalenti per i due modi fondamentali.

La prima trasformazione del piano-*z* nel piano-*t* è comune ai due modi:

$$z = z_0 + C\int_0^t \frac{\left(u^2 - \chi^2\right)du}{\sqrt{\left(u^2-1\right)\left(u^2-1/m\right)}} \qquad (35)$$

Il piano-*t* è mostrato nella Figura 17; la corrispondenza con i punti del piano-z è stata evidenziata con le medesime lettere in minuscolo.

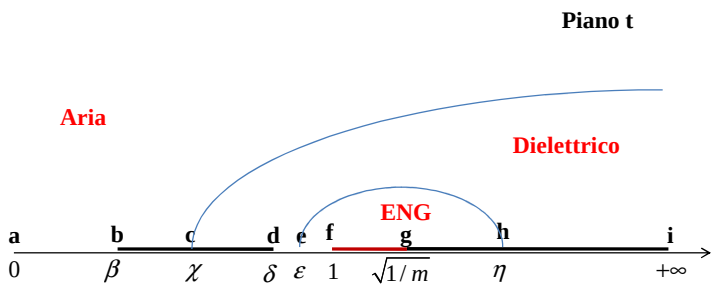


Figura 17: piano-t.

Il calcolo dei termini incogniti che compaiono nell'equazione integrale (35) e sull'asse reale del piano-*t* sono calcolabili imponendo la corrispondenza tra i punti del piano-*z* e quelli del piano-*t*.

Qui di seguito riportiamo il calcolo di tali coefficienti:

Calcolo di z_0, Corrispondenza tra il punto **A** nel piano-z e il punto **a** nel piano-t:

$$\begin{matrix} t = 0 + j0 \\ z = 0 + jh^{+} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad z_0 = jh$$

$$z = jh + C/\sqrt{m}\left[\left(1 - m\chi^2\right)F(t,m) - E(t,m)\right] \tag{36}$$

Calcolo di χ, Corrispondenza tra il punto **G** nel piano-z e il punto **g** nel piano-t:

$$\begin{matrix} t = 1/m + j0 \\ z = 0 + j0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \left(1 - m\chi^2\right) = E(m)/K(m)$$

$$z = jh + C/\left(\sqrt{m}K(m)\right)\left[F(t,m)E(m) - E(t,m)K(m)\right] \tag{37}$$

Calcolo di *C*, Corrispondenza tra il punto **F** nel piano-z e il punto **f** nel piano-t:

$$\begin{matrix} t = 1 + j0 \\ z = 0 + jh^{-} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad C/\left(\sqrt{m}K(m)\right) = 2h/\pi$$

$$z = jh + \left(2h/\pi\right)\left[F(t,m)E(m) - E(t,m)K(m)\right] \tag{38}$$

Calcolo di m, Corrispondenza tra il punto **C** nel piano-z e il punto **c** nel piano-t:

$$\begin{matrix} t = \chi + j0 \\ z = S/2 + W + jh \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} S/2 + W = 2h/\pi\left[F(\chi,m)E(m) - E(\chi,m)K(m)\right] \\ \left(1 - m\chi^2\right) = E(m)/K(m) \end{cases}$$

Calcolo di ε e η, Corrispondenza tra i punti **E** e **H** nel piano-z e i punto **e** e **h** nel piano-t:

$$\begin{matrix} t = \varepsilon + j0 \\ z = d/2 + jh \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad d/2 = 2h/\pi\left[F(\varepsilon,m)E(m) - E(\varepsilon,m)K(m)\right]$$

$$\begin{matrix} t = \eta + j0 \\ z = d/2 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad d/2 = jh + 2h/\pi\left[F(\eta,m)E(m) - E(\eta,m)K(m)\right]$$

Calcolo di m e β, Corrispondenza tra i punti **B** e **G** nel piano-z e i punto **b** e **g** nel piano-t:

$$\begin{matrix} t = \beta + j0 \\ z = S/2 + jh^{-} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad S/2 = 2h/\pi\left[F(\beta,m)E(m) - E(\beta,m)K(m)\right]$$

$$\begin{matrix} t = \delta + j0 \\ z = S/2 + jh^{-} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad S/2 = 2h/\pi\left[F(\delta,m)E(m) - E(\delta,m)K(m)\right]$$

Le funzioni F(x,y), E(x,y), K(x) e E(y) indicano rispettivamente gli integrali ellittici di prima e seconda specie e quelli completi di prima e seconda specie; la loro definizione e le loro proprietà sono riportate nell'Appendice A.

5.3 Modo dispari

Verranno ora elencate le successive trasformazioni dopo la prima comune ad entrambi i modi, necessarie per ottenere una geometria a strisce metalliche parallele per la configurazione del modo dispari:

Seconda Trasformazione: $piano\, t \rightarrow piano\, \zeta$

$$\begin{aligned} t' &= t/\delta \\ \zeta &= F(t', \delta^2) \end{aligned} \tag{39}$$

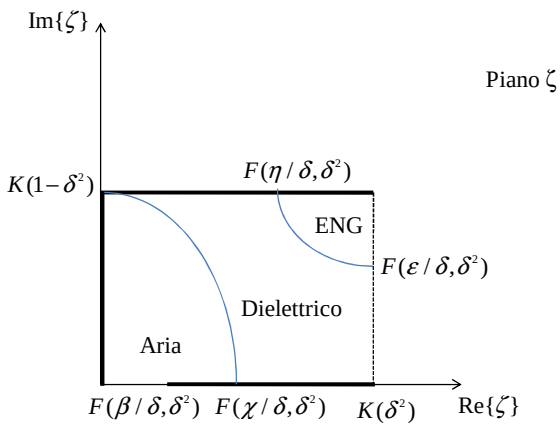


Figura 18: Seconda Trasformazione.

Terza trasformazione: $piano\, \zeta \rightarrow piano\, \tau$

$$\begin{aligned} \zeta' &= \zeta - K(\delta^2) \\ \zeta_\beta' &= K(\delta^2) - F(\beta/\delta, \delta^2) \\ \zeta_\chi' &= K(\delta^2) - F(\chi/\delta, \delta^2) \\ \zeta_\eta' &= K(\delta^2) - F(\eta/\delta, \delta^2) \\ \zeta' &= F(\tau, \delta^2) \end{aligned} \tag{40}$$

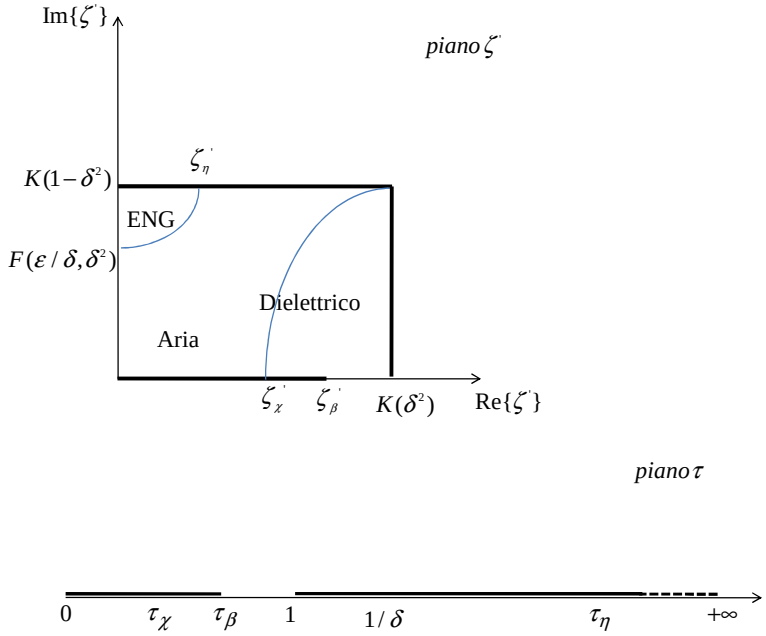


Figura 19: Terza Trasformazione.

Quarta trasformazione: $piano\,\tau \rightarrow piano\,\mathrm{Z}$

$$\begin{aligned} \tau' &= \tau / \tau_\beta \\ \zeta_\beta' &= F(\tau_\beta, \delta^2) \\ Z &= F(\tau', \tau_\beta^2) \\ Z_\varepsilon &= F(1/\delta\tau_\beta, \tau_\beta^2) \end{aligned} \qquad (41)$$

Con quest'ultima trasformazione si ottiene, infine, la geometria a capacitore equivalente a striscie parallele (Figura 20).

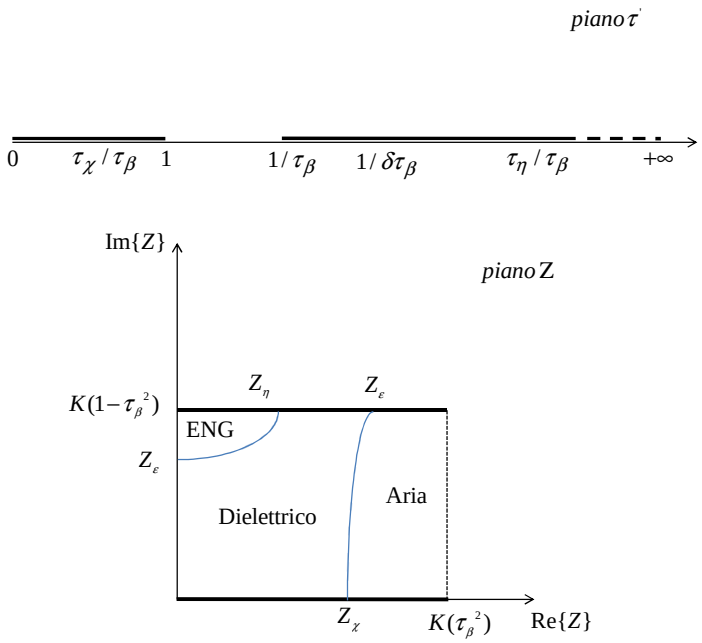


Figura 20: Quarta trasformazione per il modo dispari.

5.4 Modo pari

Per il modo pari si applica la stessa metodologia del modo dispari tenendo conto della differente condizione di simmetria nell'origine (parete magnetica perfetta).

Seconda Trasformazione: $piano\, t \rightarrow piano\, \zeta$

$$\begin{aligned} t' &= t/\delta \\ \zeta &= F(t', m\delta^2) \end{aligned} \tag{42}$$

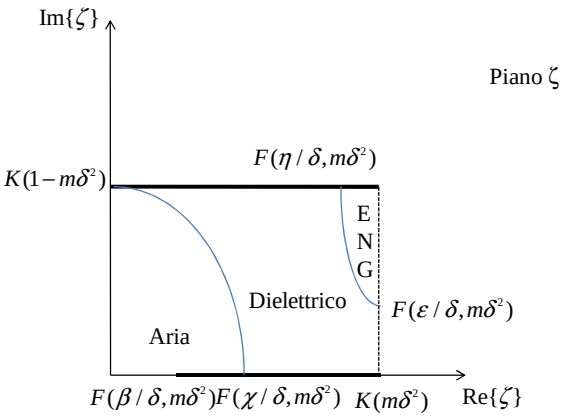


Figura 21: Seconda trasformazione per il modo dispari.

Terza trasformazione: $piano\,\zeta \rightarrow piano\,\tau$

$$
\begin{aligned}
\zeta' &= \zeta - K(m\delta^2) \\
\zeta_\beta' &= K(m\delta^2) - F(\beta/\delta, m\delta^2) \\
\zeta_\chi' &= K(m\delta^2) - F(\chi/\delta, m\delta^2) \\
\zeta_\eta' &= K(m\delta^2) - F(\eta/\delta, m\delta^2) \\
\zeta' &= F(\tau, \delta^2)
\end{aligned}
\tag{43}
$$

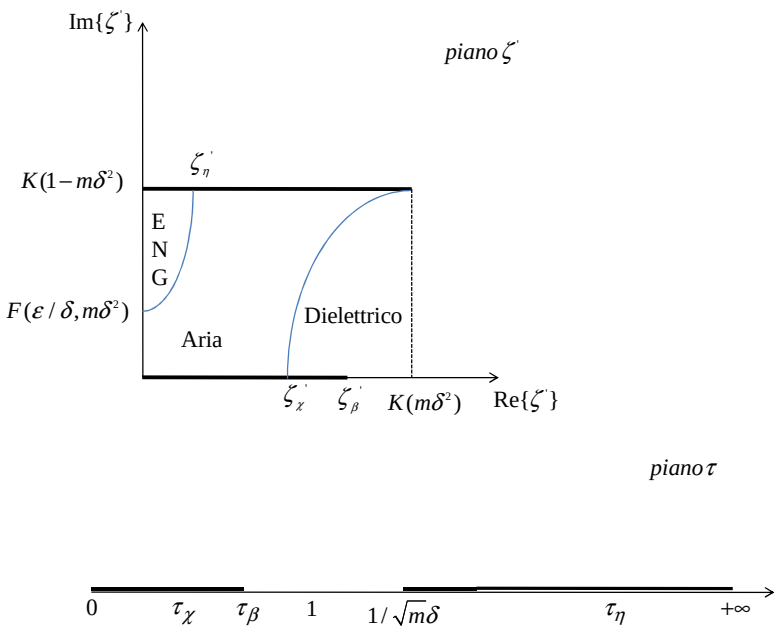


Figura 22: Terza trasformazione per il modo pari.

Quarta trasformazione: $piano\,\tau \rightarrow piano\,\mathrm{Z}$

$$
\begin{aligned}
\tau' &= \tau / \tau_\beta \\
\zeta_\beta' &= F(\tau_\beta, m\delta^2) \\
Z &= F(\tau', m\delta^2 \tau_\beta{}^2)
\end{aligned}
\tag{44}
$$

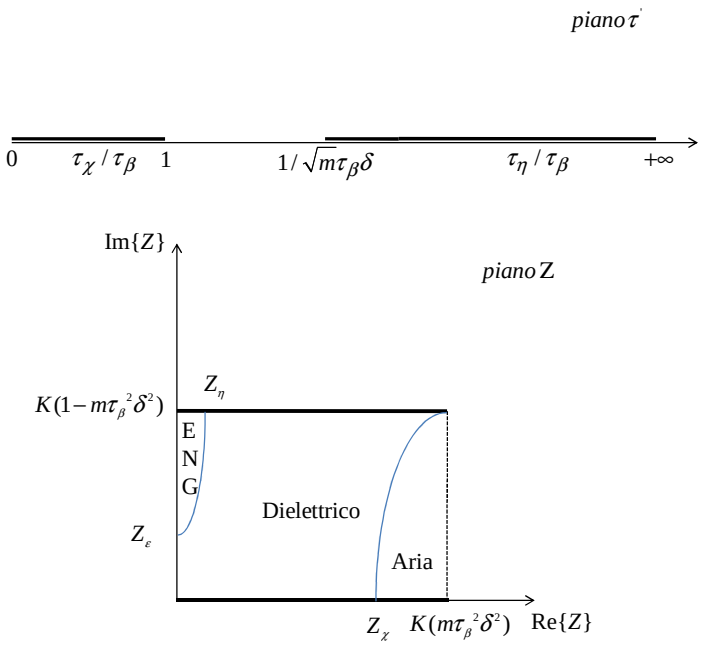


Figura 23: Quarta trasformazione per il modo pari.

5.5 L'approssimazione di Wheeler per il calcolo della capacità equivalente

L'analisi fatta finora conduce a una geometria a piatti piani paralleli con tre mezzi che riempiono lo spazio tra i due piatti. La disposizione dei tre materiali non consente di calcolare analiticamente la capacità equivalente del modo pari e del modo dispari; inoltre, la presenza di queste tre regioni determina una disomogeneità del campo elettrico all'interno del capacitore.

Wheeler nel 1964 propose una tecnica per l'analisi di una linea di trasmissione in microstriscia che ancora oggi è ampiamente impiegata: egli, infatti, utilizzò la tecnica delle trasformazioni conformi per ottenere una configurazione a capacità a piatti piani e paralleli riempita da dielettrico e aria. La valutazione della capacità avveniva tramite la valutazione della costante dielettrica effettiva che riempiva il capacitore. Per tale stima propose di trasformare la curva ellittica che separa il dielettrico dall'aria approssimandola con un contorno rettangolare.

In questo modo si vengono a creare delle regioni che sono in *serie* o in *parallelo* con le altre (Figura 24).

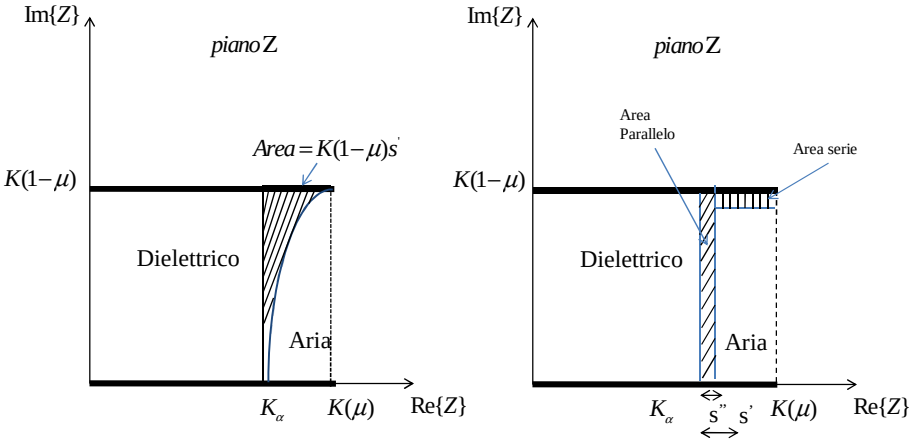


Figura 24: Approssimazione di Wheeler del capacitore equivalente di una linea in microstriscia.

Queste aree *serie* e *parallelo* possono essere descritte in termini di un'area parallela equivalente di larghezza s data da:

$$s = s'' + \frac{s' - s''}{\varepsilon_{sub}} \tag{45}$$

dove s'' rappresenta lo spessore efficace nel caso in cui il contributo dell'area ombreggiata in Figura 24 venga considerato solo come un contributo parallelo ($\varepsilon_{diel} \to \infty$): è questo il caso di una microstriscia posta tra aria e dielettrico con due piani di masse uno al disopra e l'altro al disotto; s' rappresenta invece lo spessore efficace nel caso in cui tutta l'area ombreggiata dia un contributo ($\varepsilon_{diel} \to 1$). Lo spessore equivalente s dell'area ombreggiata è rappresentato dalla combinazione di tali contributi: tale spessore è dato dalla somma di quello parallelo s'' e di quello serie $(s' - s'')/\varepsilon_{sub}$.

La capacità e il valore efficace della costante dielettrica possono essere allora calcolati nel seguente modo:

$$\begin{aligned} C &= \frac{K(\mu) - K_\alpha - s}{K(1-\mu)} + \varepsilon_{diel}\frac{K_\alpha + s}{K(1-\mu)} \\ \varepsilon_{eff} &= 1 + \frac{K_\alpha + s}{K(\mu)}\left(\varepsilon_{diel} - 1\right) \end{aligned} \tag{46}$$

Il calcolo di s' è facilmente ottenibile una volta che si consideri l'arco che delimita l'area ombreggiata come l'arco di un'ellisse. Allora, lo spessore è calcolabile come la quarta parte dell'area dell'ellisse divisa per l'altezza del capacitore:

$$s' = \left(1 - \pi/4\right)\left(K(\mu) - K_\alpha\right)$$

Per quanto riguarda il calcolo di s'', questo può essere valutato modificando la geometria iniziale: si pone un piano metallico all'altezza $z = j2h$ (dove h è l'altezza del substrato) in modo da rendere la struttura simmetrica.

L'approccio di Wheeler può essere utilizzato anche per lo studio di strutture di linee di trasmissione accoppiate in microstriscia. In tale caso, l'analisi va eseguita in modo distinto per i due modi pari e dispari. La capacità dei due modi può essere calcolata utilizzando le equazioni (46) e (45) con le opportune sostituzioni (confrontare la Figura 24 con la Figura 23 e la Figura 20).

Il valore dello spessore s'' è calcolabile nel seguente modo per i due modi:

$$s'' = \frac{K(mm_i)}{K(1-mm_i)} K(1-\mu) - K_\alpha \quad i = e, o$$

$$mm_e = 1 - \cosh^2\left(\frac{\pi S}{4h}\right) sech^2\left(\frac{\pi(S+2W)}{4h}\right)$$

$$mm_o = 1 - \sinh^2\left(\frac{\pi S}{4h}\right) csch^2\left(\frac{\pi(S+2W)}{4h}\right)$$

5.6 Calcolo del contributo dovuto allo strato ENG

Attraverso la tecnica delle trasformazioni conformi abbiamo ottenuto due capacitori equivalenti per il modo pari e dispari (Figura 20 e Figura 23), nei quali la lamina di metamateriale ENG riempie una piccola regione dell'area tra i piatti metallici e si trova in *parallelo* e in *serie* con la regione occupata dal dielettrico. L'approssimazione di Wheeler, in questo caso, non è completamente utilizzabile per la valutazione dell'influenza dello strato di ENG all'interno del substrato; infatti, non è possibile ottenere dei casi-limite (come nel caso di Wheeler) per tener conto dei contributi serie e parallelo. Comunque, nelle formule di progetto che presentiamo utilizziamo in parte la sua metodologia per valutare la capacità totale della struttura.

Il contributo dato dallo strato ENG sul calcolo della capacità del modo pari può essere trascurato, così come è stato fatto nell'analisi circuitale (Paragrafo 4.1): la regione ENG (Figura 23) è in serie con il dielettrico e presenta una capacità equivalente piccola rispetto al dielettrico (la larghezza Z_η e il valore della permittività sono molto piccoli). Inoltre, tanto più le strisce sono larghe rispetto all'altezza ($W >> h$) e distanti tra loro rispetto allo spessore dello strato ENG ($S >> d$), tanto il contributo dello strato ENG può essere trascurato, poiché il campo è confinato sostanzialmente sotto le strisce.

Discorso diverso deve essere fatto per il calcolo del contributo ENG nel caso di modo dispari. In questo caso (Figura 20), la regione ENG si sviluppa essenzialmente in larghezza; questa regione si trova ad essere in serie con il dielettrico per una larghezza (Z_η) non più trascurabile e con un'altezza (K_ε) inoltre molto piccola: la capacità equivalente risulta dunque grande poiché inversamente proporzionale all'altezza e proporzionale alla larghezza ($C_{ENG} \propto \varepsilon_{ENG} K_\eta / K_\varepsilon$).

La valutazione di tale contributo può essere fatta solo in modo approssimativo, in quanto l'area ENG si trova sia in serie che in parallelo con il dielettrico.

Un'approssimazione che si può fare alfine di ottenere semplici formule di progetto è quella di considerare solamente il contributo parallelo, ovvero trasformare l'area ENG in un rettangolo di base Z_η e altezza calcolata in modo tale da conservare l'area occupata dalla regione ENG ($h_{ENG} = A_{ENG} / \mathrm{K}_\eta$).

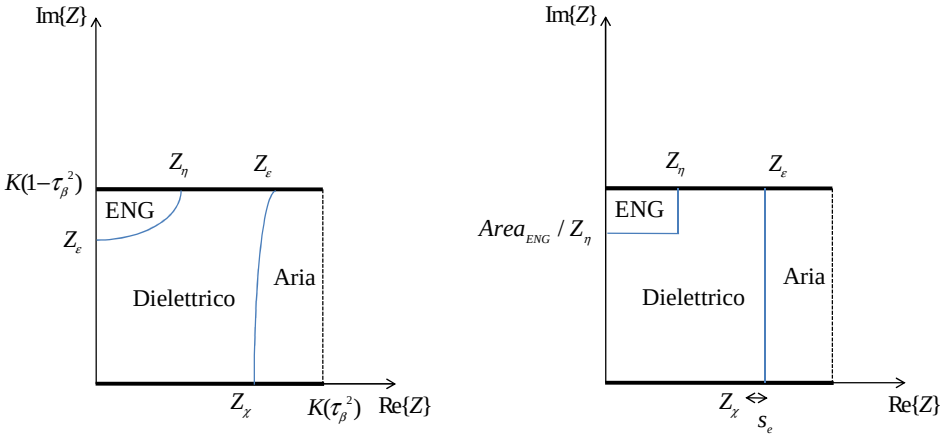


Figura 25: Trasformazione del capacitore del modo dispari attraverso l'approssimazione proposta.

Con tale approssimazione possiamo facilmente calcolare la capacità equivalente nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
&C_{ENG} \simeq \varepsilon_{ENG} \frac{Z_\eta^{\,2}}{Area_{ENG}} \approx \varepsilon_{ENG} \frac{Z_\eta}{(1-\pi/4)Z_\varepsilon} \\
&C_{aria} = \frac{K(\tau_\beta^{\,2}) - Z_\chi - s_e}{K(1-\tau_\beta^{\,2})} \\
&C_{serieENG/diel} = C_{ENG} // \varepsilon_{diel} \frac{Z_\eta^{\,2}}{K(1-\tau_\beta^{\,2})Z_\eta - Area_{ENG}} = C_{ENG} // \varepsilon_{diel} \frac{Z_\eta}{K(1-\tau_\beta^{\,2}) - (1-\pi/4)Z_\varepsilon} \\
&C_{totale} = C_{serieENG/diel} + \varepsilon_{diel} \frac{Z_\chi + s_e - Z_\eta}{K(1-\tau_\beta^{\,2})} + C_{aria}
\end{aligned}
\tag{47}
$$

In alternativa a tale approssimazione, le capacità del modo pari e del modo dispari possono essere valutate numericamente utilizzando il metodo agli elementi finiti (FEM) attraverso l'analisi bidimensionale delle geometrie ottenute con le trasformazioni per i due distinti casi.

6. PROGETTO DI UN ACCOPPIATORE DIREZIONALE IN MICROSTRISCIA

Nei paragrafi precedenti è stato analizzato il comportamento di due linee accoppiate simmetriche in microstriscia: è stato mostrato il modello circuitale per i modi fondamentali pari e dispari e il legame che sussiste tra i parametri circuitali e le costanti secondarie dei due modi; è stato evidenziato, inoltre, il manifestarsi all'interno della struttura di due distinti fenomeni di accoppiamento (co-direzionale e contro-direzionale); infine è stata analizzata l'influenza di una lamina di ENG all'interno del substrato delle due linee accoppiate da un punto di vista circuitale e sono state ricavate delle formule di progetto attraverso la tecnica delle trasformazioni conformi.

In questo paragrafo vogliamo mostrare come la presenza di uno strato ENG all'interno della struttura permetta di progettare accoppiatori direzionali a onda progressiva (accoppiamento co-direzionale) in una configurazione che presenta una lunghezza di accoppiamento minore della lunghezza d'onda di lavoro. Diverse tipologie di accoppiatori direzionali saranno analizzate; verranno poi confrontati i risultati *full-wave* ottenuti con il software commerciale CST Microwave Studio e quelli ottenuti tramite un'analisi quasi-statica. Verranno considerate, inoltre, altre geometrie e sarà analizzata la possibilità che il metamateriale ENG presenti un certo grado di anisotropia. Infine, verrà presentato il progetto di un accoppiatore co-direzionale in microstriscia utilizzando come metamateriale ENG il mezzo a piatti metallici proposto da Rotman.

6.1 Riduzione della lunghezza di accoppiamento in un accoppiatore co-direzionale

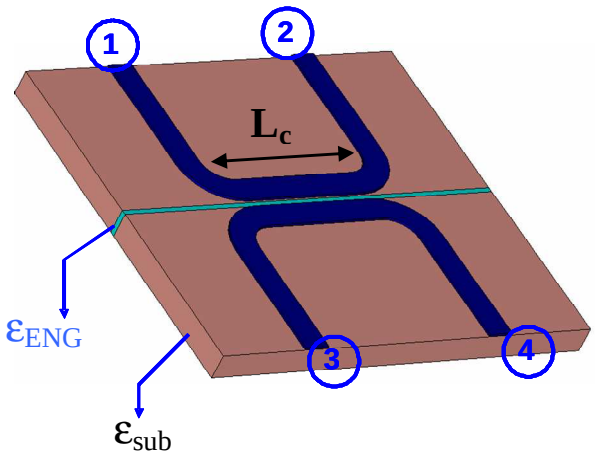


Figura 26: Accoppiatore direzionale con lamina ENG all'interno del substrato (w = 9.8mm, s=3,4mm, h=10mm, ε_{sub}=8.9, L_c=56 mm, d=1.1mm)

La struttura a cui si fa riferimento è quella in Figura 26, dove la lamina di ENG è posta tra le due strisce all'interno del substrato e determina una variazione delle caratteristiche del modo dispari che viene eccitato all'interno dell'accoppiatore. Come già discusso nel paragrafo 4.1, rispetto alla configurazione standard si ha una riduzione della costante di propagazione del modo dispari e un aumento dell'impedenza caratteristica dello stesso modo:

$$\begin{aligned} Z_{o,m}^{c} &\simeq Z_{o}^{c} / \sqrt{(1-\chi_o)} \\ \beta_{o,m} &\simeq \beta_o \sqrt{(1-\chi_o)} \end{aligned} \qquad 0 < \chi_o < 1$$

Il modo pari non subisce modifiche sostanziali e le costanti secondarie sono calcolabili come nel caso standard.

Nelle linee di trasmissione simmetriche accoppiate in microstriscia, l'impedenza del modo pari è sempre maggiore di quella del modo dispari, così come la costante di propagazione del modo pari è maggiore di quella del modo dispari: l'introduzione dello strato di metamateriale ENG consente, allora, di aumentare la differenza tra le costanti di propagazione e di diminuire quella tra le impedenze caratteristiche.

In questo caso si ottengono due risultati:

I) La riduzione della lunghezza di accoppiamento L_c , poiché è inversamente proporzionale alla differenza delle costanti di propagazione dei due modi

$$L_c = \alpha / \left|\beta_o - \beta_e\right|, \quad m = 0,1,2... \tag{48}$$

dove α è un fattore che è funzione dell'accoppiamento desiderato.

II) La riduzione del valore dell'accoppiamento in tensione k che è proporzionale alla differenza tra le impedenze caratteristiche dei due modi

$$k = \frac{Z_e^c - Z_o^c}{Z_e^c + Z_o^c} \tag{49}$$

È importante porre l'accento sul fatto che, per quanto si abbia una riduzione della differenza tra le impedenze caratteristiche, tale diminuzione non sarà mai sufficiente a ridurre il fenomeno di trasferimento di energia nella direzione opposta a quella di propagazione del segnale fatto propagare nella struttura. La causa di ciò sta nella piccola perturbazione che l'introduzione della lamina ENG comporta nelle caratteristiche della rete a quattro porte; al contrario, la variazione della costante di propagazione del modo dispari, essendo una variazione di fase e non di ampiezza (come nel caso del coefficiente *k*), comporta una

considerevole variazione dell'accoppiamento co-direzionale, con una notevole variazione della lunghezza di accoppiamento.

Gli accoppiatori co-direzionale in microstriscia che saranno mostrati nelle pagine seguenti sono progettati in modo da lavorare alla frequenza per la quale si ha il valore minimo del contributo di accoppiamento contro-direzionale.

Possiamo infine anche rilevare che, a parità di lunghezze di accoppiamento L_C e di frequenza di lavoro, l'introduzione dello strato di metamateriale all'interno del substrato permette di aumentare l'accoppiamento co-direzionale.

6.2 Progetto di un divisore di potenza in microstriscia

Considereremo ora come esempio il progetto di un accoppiatore direzionale a -3dB che divide equamente la potenza immessa alla porta 1 sulla porta 2 e sulla porta 4. La struttura è mostrata in Figura 26. La lamina ENG è riempita da un materiale omogeneo e dispersivo la cui permittività varia in frequenza con un andamento alla Drude: la frequenza di plasma è pari a 1.39 GHz e $\varepsilon_\infty = 1$; il substrato è riempito da un dielettrico che ha una permittività relativa pari a $\varepsilon_{Sub} = 8.9$; la larghezza delle strisce è pari a $W = 9.8\,\text{mm}$, la separazione a $S = 3.2\,\text{mm}$ e l'altezza del substrato a $h = 10\,\text{mm}$.

L'accoppiatore è progettato per lavorare intorno alla frequenza di 1.0 GHz; a questa frequenza la permittività dello strato ENG è negativa e pari a -0.93. Applicando la tecnica delle trasformazioni conformi descritta nel paragrafo 5 si ottengono due capacitori equivalenti (Figura 27) per i due modi fondamentali (pari e dispari).

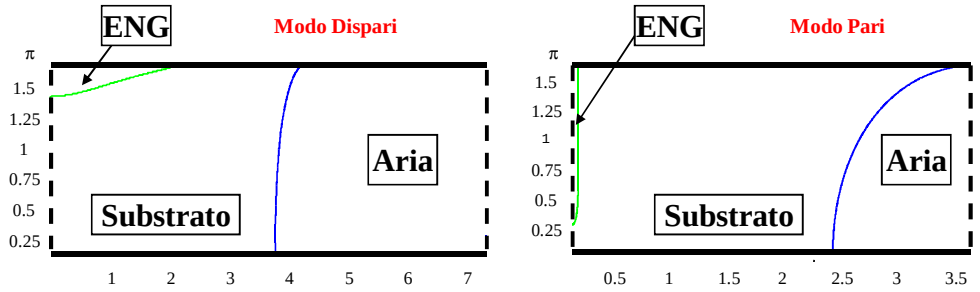


Figura 27: Capacitori equivalenti del modo pari e dispari.

Come mostrato nella Figura 27, il modo pari non subisce alcuna sostanziale modifica dovuta all'introduzione della lamina ENG; l'area occupata dallo strato di metamateriale nella geometria a capacità a piatti piani e paralleli risulta essere molto piccola e la capacità

equivalente del modo pari è calcolabile come il parallelo tra le capacità delle aree occupate dal dielettrico, l'aria e il metamateriale ENG. Dato che la larghezza e la permittività della regione ENG sono molto piccole rispetto a quelle delle altre regioni, si ha che la capacità totale del modo pari sia data semplicemente dalla somma dei contributi della regione occupata dall'aria e di quella occupata dal dielettrico:

$$C_e = C_{aria} + C_{sub} + C_{ENG} \cong C_{aria} + C_{sub}$$ \

Il calcolo dei termini C_{aria} e C_{sub} può essere eseguito utilizzando l'approssimazione di Wheeler, come è stato discusso nel paragrafo 5.5. Il valore dell'impedenza caratteristica è valutabile nel seguente modo:

$$Z_e = \frac{1}{c\sqrt{C_e C_e^a}}$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto e C_e^a è la capacità del modo pari nel caso in cui il dielettrico e il metamateriale ENG vengano sostituiti con l'aria. Si ottiene in tal modo che l'impedenza caratteristica è pari a 65.45 Ohm. La costante dielettrica efficace del modo pari è ottenibile come il rapporto tra le capacità sopra menzionate $\left(\varepsilon_e = C_e / C_e^a\right)$ e il suo valore relativo è 6.49.

Per quanto riguarda il modo dispari, la Figura 27 mostra come la regione riempita dal metamateriale ENG si trovi essenzialmente in serie con la regione dielettrica sottostante. La valutazione dell'impedenza caratteristica Z_o^{ENG} e della permittività efficace ε_o^{ENG} può essere fatta, poi, utilizzando la trattazione fatta nel paragrafo 5.6, nella quale la regione ENG è approssimata inizialmente come un quarto di ellisse e poi trasformata in un rettangolo per facilitare il calcolo della capacità del modo: ad esempio, alla frequenza di 1.0 GHz si ottiene con tale trattazione il valore della permittività efficace ε_o^{ENG} del modo pari uguale a 1.32 e l'impedenza caratteristica Z_o^{ENG} pari a 71 Ohm. Nel caso di assenza della lamina ENG si ottiene che l'impedenza caratteristica Z_o è pari a 35 Ohm e la permittività efficace ε_o a 5.15.

Questi risultati concordano con l'analisi fatta con il modello circuitale (Paragrafo 4.1). La variazione della permittività efficace da 5.15 a 1.32 e dell'impedenza caratteristica da 35 Ohm a 71 Ohm sono sufficientemente rilevanti da modificare sostanzialmente il comportamento elettromagnetico della struttura.

È ora necessario soffermarsi sulla variazione in frequenza dei parametri elettromagnetici, poiché la permittività della lamina ENG è per ipotesi dispersiva.

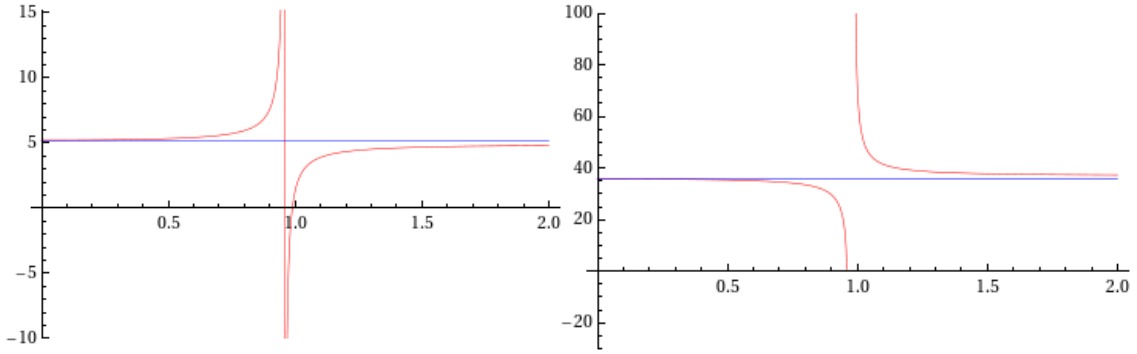


Figura 28: Andamento in frequenza della permittività efficace e dell'impedenza caratteristica del modo dispari.

In Figura 28 è mostrato l'andamento in frequenza della parte reale della permittività efficace ε_o^{ENG} e dell'impedenza caratteristica Z_o^{ENG} del modo dispari; entrambi i parametri presentano un andamento iperbolico simile ad un andamento Lorentziano; la permittività efficace ε_o^{ENG} cambia segno molto velocemente intorno alla frequenza di 1 GHz e l'impedenza caratteristica presenta valori molto elevati in tale intorno (l'impedenza caratteristica è inversamente proporzionale alla radice della permittività). Entrambe le quantità assumono un andamento poco dispersivo a frequenze molto basse e molto alte, tendendo al valore che esse hanno in assenza della lamina di metamateriale ENG.

È importante notare, inoltre, che non è possibile progettare un accoppiatore direzionale alle frequenze per le quali il valore della permittività o dell'impedenza caratteristica tende ad annullarsi o a valori molto elevati – valori per i quali si avrebbe in un caso il massimo del valore dell'accoppiamento contro-direzionale $k = (Z_e - Z_o)/(Z_e + Z_o) \overset{Z_o \to 0,\infty}{\to} 1$ e, nell'altro, la minima lunghezza di accoppiamento $L_c \propto 1/\left(\sqrt{\varepsilon_e} - \sqrt{\varepsilon_o}\right)$; infatti, in tale intervallo la variazione in frequenza di tali parametri è troppo rapida per poter pensare di progettare il dispositivo.

La progettazione di un accoppiatore direzionale in microstriscia con accoppiamento a onda progressiva richiede che l'accoppiamento contro-direzionale sia minimizzato e che la lunghezza di accoppiamento non sia troppo grande rispetto alla lunghezza d'onda di lavoro λ_0: risulta quindi appropriato utilizzare in questo esempio l'intervallo di frequenza a destra

della frequenza $f_0^{\varepsilon_o}$ alla quale si annulla la permittività efficace del modo dispari; in particolare, converrà scegliere come frequenza centrale di lavoro quella per la quale l'impedenza del modo dispari si discosta il meno possibile da quella del modo pari e abbastanza prossima alla frequenza $f_0^{\varepsilon_o}$ in modo da avere una differenza sufficientemente elevata tra le permittività. In particolare, scegliendo come frequenza centrale 1 GHz, si ottiene un coefficiente di accoppiamento in tensione k molto piccolo (0.04) e scegliendo una lunghezza d'accoppiamento L_c pari a $56\,\text{mm}$ $(\simeq \lambda_0/6)$ si ottiene che il prodotto tra la differenza tra le costanti di propagazione e la lunghezza di accoppiamento è circa $\pi/4$, consentendo in tale modo il progetto di un divisore di potenza.

Qui di seguito è mostrato l'andamento in frequenza dei parametri della matrice di diffusione della struttura calcolati con l'analisi sviluppata nel paragrafo 3 e le relative formule di progetto (Figura 29). L'accoppiatore direzionale si comporta da divisore di potenza: alla frequenza di 1 GHz la frazione di potenza alla porta 2 è uguale a quella sulla porta 4 $|S_{21}|^2 = |S_{41}|^2$, con valori molto bassi della potenza riflessa e della potenza alla porta 3 $|S_{11}|^2, |S_{31}|^2 < -20\,\text{dB}$.

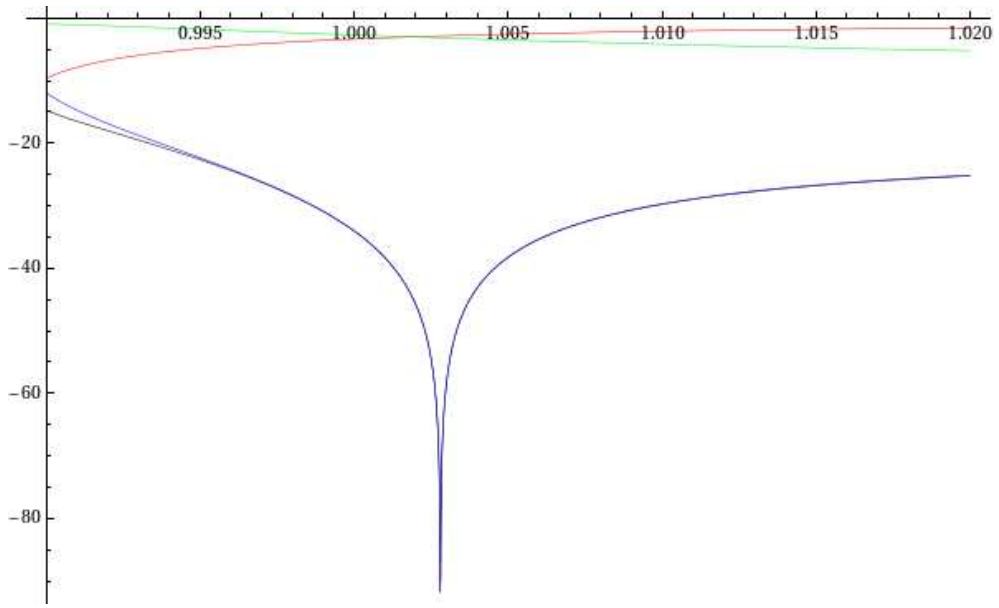


Figura 29: Parametri della matrice di diffusione dell'accoppiatore direzionale mostrato in Figura 26.

6.3 Confronto tra i risultati ottenuti con analisi quasi-statica e quelli ottenuti con CST

I risultati mostrati in precedenza di una rete a quattro porte costituita da due linee accoppiate in microstriscia sono stati ottenuti utilizzando una metodologia di analisi che impone numerose approssimazioni al modello. Questo ha permesso di ottenere delle formule di progetto che consentono la valutazione dei parametri secondari dei modi che la struttura supporta e che permettono di fare un'analisi sia qualitativa sia quantitativa della rete a quattro porte, alfine di ottenere il progetto di accoppiatori direzionali.

Le approssimazioni che finora sono state assunte sono le seguenti: i modi che si possono propagare sono puramente TEM e, quindi, ricavabili dalla conoscenza della distribuzione della tensione e della corrente sulla sezione trasversale della struttura; si può, allora, utilizzare la tecnica delle trasformazioni conformi per ricavare i parametri secondari dei due modi fondamentali TEM che si propagano nella struttura. La presenza della lamina di metamateriale ENG all'interno del substrato della struttura ha richiesto l'utilizzo di ulteriori approssimazioni discusse nel paragrafo 5.6 per valutare l'influenza di tale mezzo sul comportamento della struttura; queste ultime possono comportare un margine di errore maggiore rispetto alle precedenti, in quanto il metamateriale ENG varia sensibilmente di frequenza e ciò influenza fortemente l'individuazione del punto di lavoro della struttura.

Consideriamo ora i risultati ottenuti tramite l'utilizzo di simulazioni *full-wave* con l'impiego del software commerciale CST Microwave Studio.

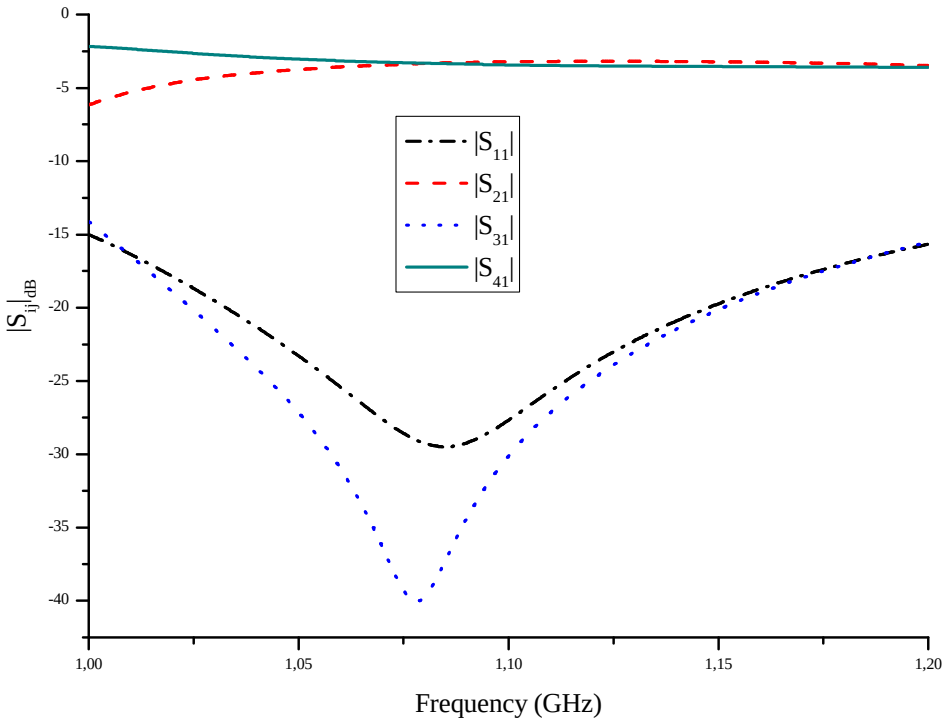


Figura 30: Parametri della matrice di diffusione della struttura di Figura 26.

In Figura 30 sono mostrati i parametri della matrice di diffusione della struttura già analizzata nella sezione precedente, con le medesime dimensioni e proprietà elettromagnetiche dei materiali che la costituiscono. Confrontando questi risultati con quelli ottenuti in precedenza, si può dunque notare che la frequenza di lavoro della rete a quattro porte risulta leggermente spostata: si osserva infatti che la frazione di potenza riflessa alla porta 1 $|S_{11}|^2$ e trasmessa alla porta 3 $|S_{31}|^2$ è minima a 1.07 GHz e presenta inoltre, alle porte 2 e 4, il medesimo valore $|S_{21}|^2 = |S_{41}|^2 \simeq -3\text{dB}$. Inoltre, possiamo osservare che il comportamento della struttura è meno sensibile in frequenza: la potenza alle porte 2 e 4 si mantiene infatti costante su un ampio intervallo di frequenza (da 1,05 a 1,2 GHz).

Nonostante dunque esistano delle discrepanze tra i risultati ottenuti con un'analisi *full-wave* rispetto a quelli ottenuti tramite un'analisi quasi-statica, le formule di progetto proposte possono essere comunque utilizzate come primo strumento di analisi e di progetto, per poi essere affiancate da una più accurata analisi *full-wave* che permetta di ottimizzare il progetto del dispositivo.

Infine, è necessario mostrare l'andamento in frequenza dei parametri della matrice di diffusione della struttura mostrata in Figura 26 nel caso in cui venga eliminata la lamina ENG all'interno del substrato.

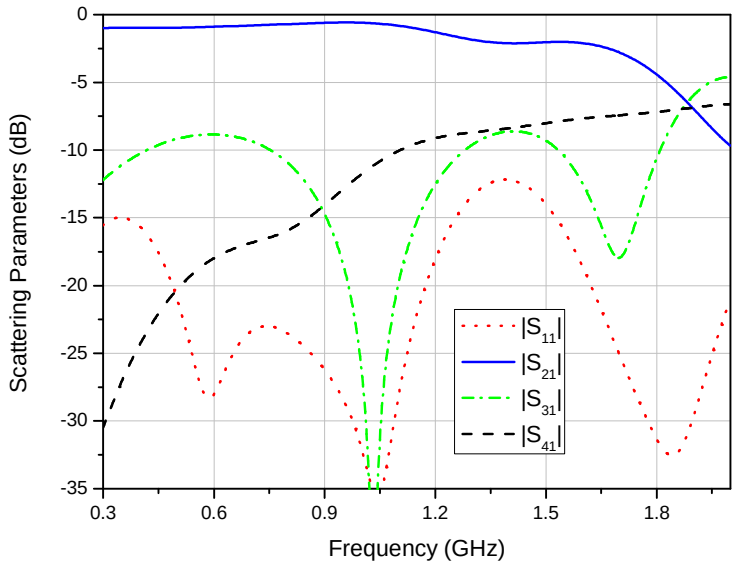


Figura 31: Parametri di diffusione di Figura 26 nella quale è stata eliminata la lamina ENG.

In questo modo possiamo evidenziare come l'utilizzo di una lamina ENG all'interno del substrato abbia permesso di aumentare l'accoppiamento co-direzionale a parità di lunghezza di accoppiamento: si può notare che in Figura 31 l'accoppiamento co-direzionale intorno alla frequenza di 1.05 GHz è minore $\left(|S_{41}|^2 \simeq -10\,\text{dB}\right)$ rispetto al progetto proposto in precedenza.

6.4 Anisotropia e perdite nel metamateriale ENG

Vogliamo ora considerare la possibilità che il metamateriale ENG presenti un certo grado di anisotropia e di perdite. È noto, infatti, che i metamateriali ENG possono presentare un comportamento differente nei tre assi di simmetria e che, inoltre, la caratteristica dispersiva del mezzo artificiale richiede che esso assorba parzialmente una parte dell'energia. Se si volesse ad esempio utilizzare un insieme di fili metallici paralleli come mezzo a permittività negativa, questo presenterebbe una spiccata anisotropia (causata dalla disposizione spaziale dei fili) e delle perdite (causate dall'utilizzo di metalli non ideali).

Mostreremo ora come l'utilizzo di lamine ENG anisotrope non comporti alcuna sostanziale modifica del comportamento della struttura rispetto al caso isotropo.

Ipotizziamo che uno strato omogeneo e anisotropo di metamateriale ENG sia posto all'interno del substrato della struttura tra le due strisce, come mostrato in Figura 26. Lo strato di metamateriale ENG è descritto dalle seguenti relazioni costitutive:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_x(\omega) & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{Sub} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{Sub} \end{bmatrix} \mathbf{E} \qquad (50)$$
$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

dove supponiamo che sull'asse y e z la permittività della lamina coincida con quella del dielettrico che riempie il substrato ε_{Sub} e che $\varepsilon_x(\omega)$ sia descritto da un modello dispersivo alla Drude: questa condizione si ha anche nel caso in cui venga realizzata la lamina ENG con dei fili metallici disposti lungo l'asse x. Supponiamo inoltre che le dimensioni dell'accoppiatore siano le stesse di quello discusso nelle sezioni precedenti, così come il valore della costante dielettrica del substrato.

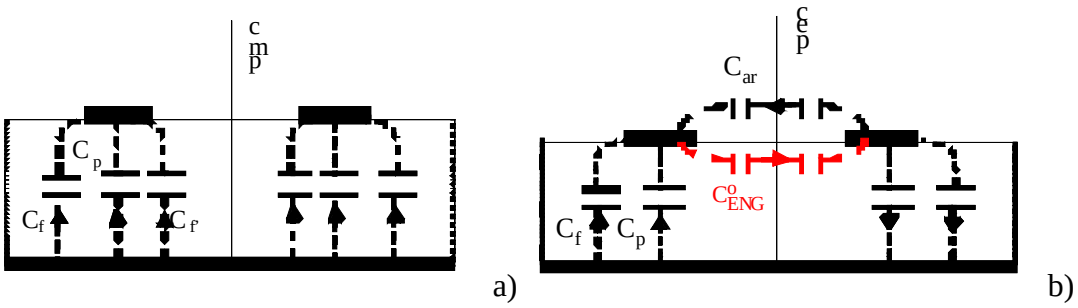


Figura 32: Modello circuitale dei modi pari e dispari nel caso della presenza di uno strato ENG anisotropo.

Possiamo ora riprendere il modello circuitale dei modi pari e dispari trattato nel paragrafo 4.1 e modificarlo per descrivere l'influenza della lamina ENG anisotropa. La caratteristica dello strato descritta dalla (50) produce una disomogeneità della permittività solo sull'asse x: questo comporta che il modello circuitale del modo pari rimanga inalterato poiché le linee di forza del campo elettrico non percepiscono la presenza dello strato di metamateriale; al contrario, la configurazione del modo dispari si adatta bene alla presenza della discontinuità dielettrica sull'asse x. Infatti, lavorando alla frequenza f_0 per la quale si ha un valore

negativo della permittività $\varepsilon_x(f_0) < 0$ e, in valore assoluto, minore rispetto a quella del substrato con uno spessore dello strato sufficientemente piccolo, si ottiene che, poiché lo spostamento elettrico deve soddisfare le condizioni di continuità alle interfacce tra strato ENG e substrato dielettrico $\varepsilon_x(f_0)\mathbf{E}^{ENG} \bullet \hat{x} = \varepsilon_{sub}\mathbf{E}^{sub} \bullet \hat{x}$, il campo elettrico all'interno della lamina ENG sarà di ampiezza molto elevata e diretto lungo l'asse x. Possiamo, quindi, affermare che l'influenza dello strato di metamateriale può essere descritto circuitalmente da una capacità C_{ENG}^{o} all'interno del modello del modo dispari come è mostrato in Figura 32.

Le capacità del modo pari e dispari allora sono esprimibili nel seguente modo:

$$\begin{aligned} C_e^m &= C_p + C_f + C_f^{'} = C_e \\ C_o^m &= C_p + C_f + C_{ga} + C_{ENG}^{o} = C_o(1-\chi_o) \\ \chi_o &= -C_{ENG}^{o} / C_o \end{aligned} \qquad (51)$$

Il significato dei singoli termini è stato spiegato nei paragrafi precedenti.

È chiaro dunque, confrontando le relazioni (51) con quelle definite nel paragrafo 4.1, che la caratteristica di anisotropia della lamina ENG non comporta differenti comportamenti rispetto al caso anisotropo; ad avvalorare tale affermazione riportiamo qui di seguito i parametri della matrice di diffusione per tale configurazione: le dimensioni e le caratteristiche elettromagnetiche dei materiali sono le stesse dei casi trattati finora. Inoltre, sono state anche considerate le perdite che il metamateriale ENG può presentare, perdite che producono una riduzione del valore di frazione di potenza sulle porte 2 e 4: $|S_{21}|^2 = |S_{41}|^2 \simeq -3.4\,\mathrm{dB}$.

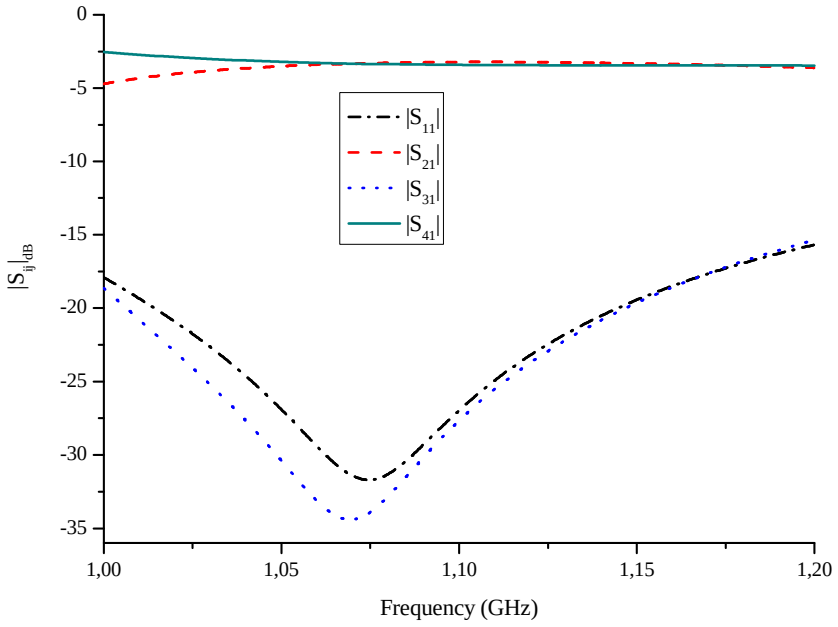


Figura 33: Ampiezza dei parametri di diffusione per l'accoppiatore in Figura 26 (d = 1.1 mm, s = 3.2 mm, w = 9.8 mm, h = 10 mm, ε_{sub} = 8.9).

6.5 Progetto di un accoppiatore direzionale con inclusioni metalliche nel substrato

Consideriamo adesso la struttura mostrata in Figura 34. Sono stati inseriti due piatti metallici paralleli all'interno del substrato (isotropico e omogeneo) tra le due strisce: i piatti metallici agiscono come una lamina di materiale ENG, come discusso nel capitolo 1.

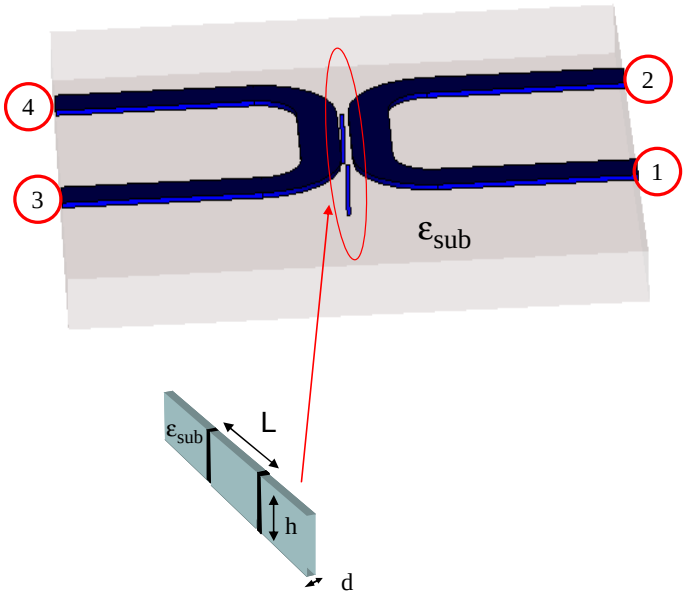


Figura 34: Linea a microstriscia accoppiata con una lamina ENG, realizzata attraverso l'inclusione di due piatti metallici paralleli.

L'analisi presentata in precedenza può essere utilizzata per progettare una linea a microstriscia accoppiata con elevati valori d'accoppiamento co-direzionale.

Mostriamo adesso i risultati numerici ottenuti per tre diverse geometrie attraverso il software commerciale CST Microwave Studio®. Consideriamo in primo luogo l'accoppiatore in Figura 34 senza inclusione metallica: questo accoppiatore è progettato per avere il massimo accoppiamento contro-direzionale ($|S_{31}| \approx -9dB$ Figura 31) e una bassa direttività $|S_{41}|$.

Consideriamo poi lo stesso accoppiatore direzionale mostrato in Figura 34, ma stavolta con le inclusioni metalliche. I parametri di diffusione ottenuti per questo progetto sono mostrati in Figura 35. A causa della dispersione della permittività del mezzo efficace costituito dai piatti piani paralleli, nell'intervallo di frequenza 1.4-1.8 GHz la nuova struttura è in grado di dividere la potenza d'ingresso alla porta 1 tra le porte 2 e 4 ($|S_{41}| \approx |S_{21}| \simeq -3dB$) e presenta valori di accoppiamento contro-direzionale decisamente bassi ($|S_{31}| < -20dB$).

Abbiamo poi considerato altre due geometrie. Nella prima abbiamo scelto di analizzare una struttura che presenti una riduzione della distanza (s=3mm) tra le due strisce rispetto al caso precedente: i risultati numerici mostrano che anche in questo caso è comunque possibile ottenere un divisore di potenza con un basso accoppiamento contro-direzionale (Figura 36). Infine, abbiamo considerato una separazione maggiore (s=4mm): l'incremento di tale separazione tra le strisce consente di ridurre l'accoppiamento indesiderato ($|S_{31}|$) in un'ampia

banda di frequenza (Figura 37).

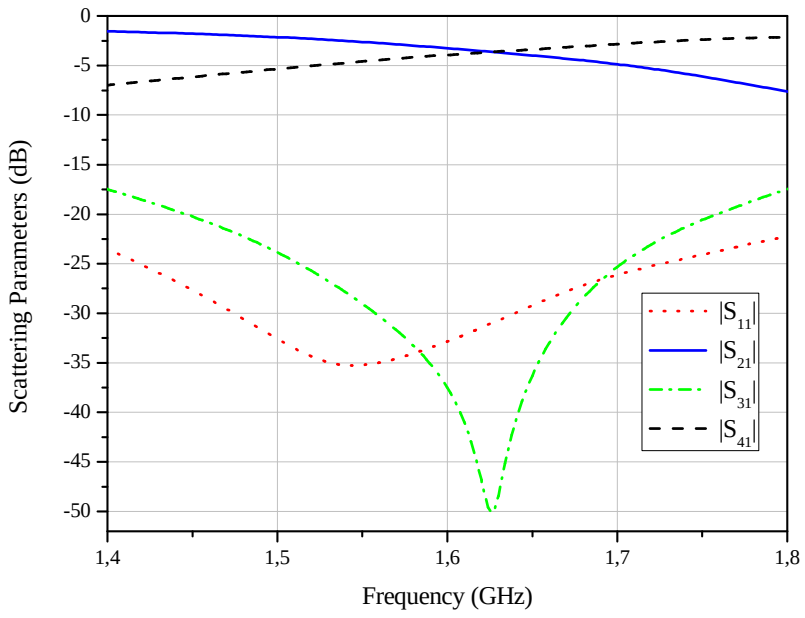


Figura 35. Linea a microstriscia accoppiata con inclusioni di piatti metallici (w = 9.8mm, s=3,4mm, h=10mm, ε_{sub}=8.9, L=33mm, d=1.1mm).

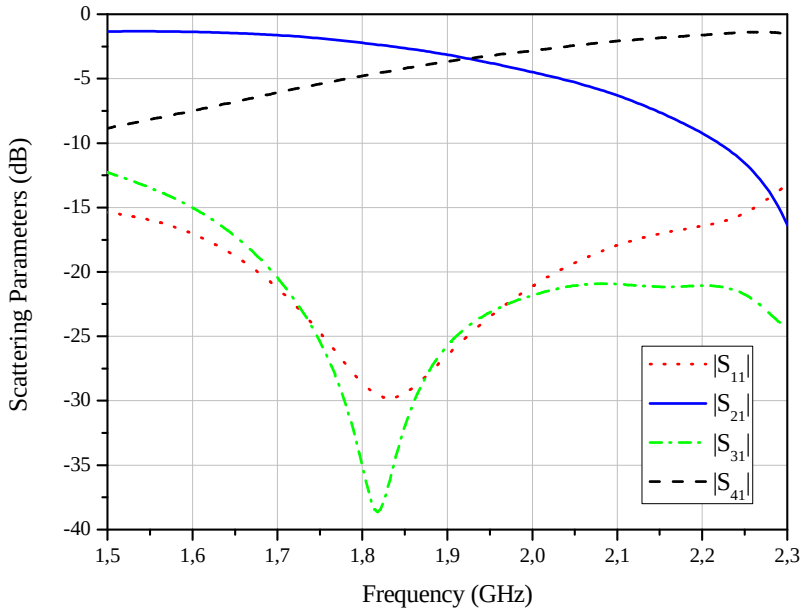


Figura 36. Linea a microstriscia accoppiata con inclusioni di piatti metallici (w = 7mm, s=3mm, h=6mm, ε_{sub}=10,2, L=33mm, d=1.1mm).

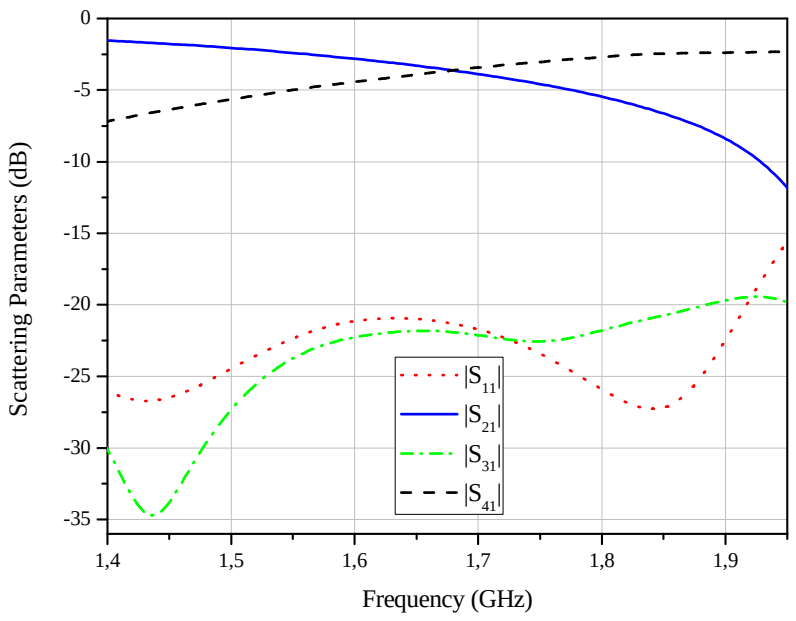


Figura 37. Linea a microstriscia accoppiata con inclusioni di piatti metallici (w = 12mm, s=4mm, h=10mm, ε_{sub}=7.3, L=40mm, d=1.1mm).

6.6 Ulteriori progetti di accoppiatori

Qui di seguito riportiamo l'andamento in frequenza dei parametri della matrice di diffusione di ulteriori progetti di accoppiatori direzionali con caratteristiche geometriche ed elettromagnetiche differenti rispetto al caso precedente; tali risultati mostrano che, variando le caratteristiche della struttura di Figura 26, si riesce ad ottenere – sempre utilizzando l'analisi trattata finora – il progetto di accoppiatori a onda progressiva.

Nei casi seguenti sono stati ricavati i risultati modellando la lamina di metamateriale ENG come un plasma di gas ionizzato racchiuso all'interno di un involucro di vetro (pyrex) [17]. I risultati presentati in Figura 38 possono essere confrontati con quelli della Figura 31, dove è mostrata l'ampiezza dei parametri di diffusione quando la lamina di materiale ENG non è presente. Da questo confronto risulta dunque chiaro che l'introduzione di una lamina di materiale ENG permette di ottenere un valore di accoppiamento altrimenti non ottenibile in condizione standard.

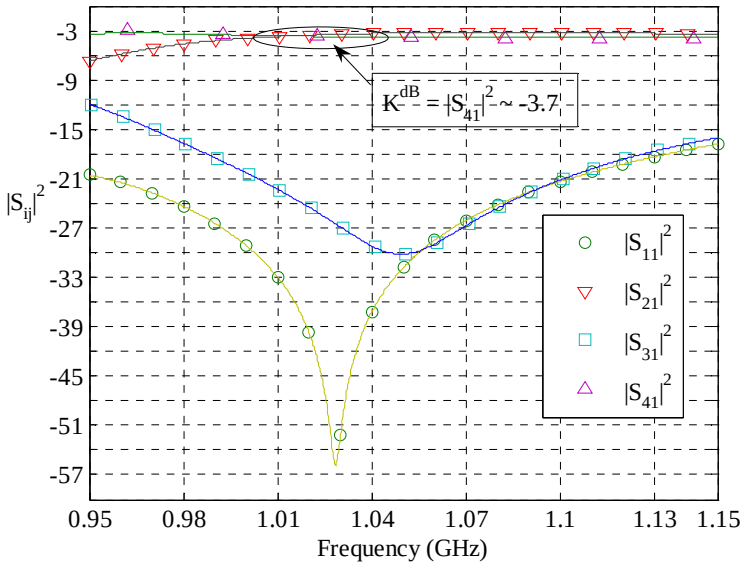


Figura 38: Parametri di diffusione dell'accoppiatore della Figura 26 (d = 1.1 mm, s = 3.2 mm, w = 9.8 mm, h = 10 mm, ε_{sub} = 8.9). Le strisce sono in rame, il substrato in alluminio, il vetro è pyrex e le perdite sono: $\mathrm{Im}(\varepsilon_{Eng}), \mathrm{Im}(\varepsilon_{Sub}), \mathrm{Im}(\varepsilon_{Glass}) \propto 10^{-2}$ **.**

Inoltre, sono mostrati i risultati per una diversa geometria nel caso in cui la lamina ENG sia assente (Figura 40), sia presente (Figura 39) o sia modellata come un gas ionizzato (Figura 41). Anche in questo caso, otteniamo un divisore di potenza.

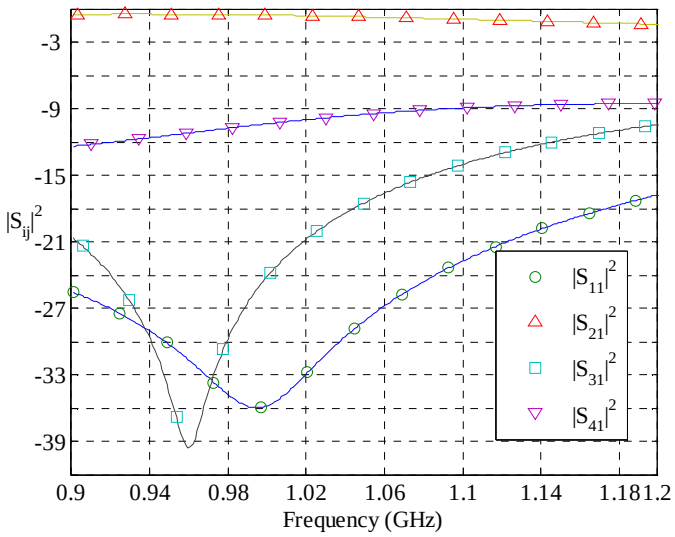


Figura 39: Ampiezza dei parametri di diffusione dell'accoppiatore in Figura 26 senza la lamina ENG (d = 0.8 mm, s = 3.0 mm, w = 7.0 mm, h = 8 mm, ε_{sub} = 10.2).

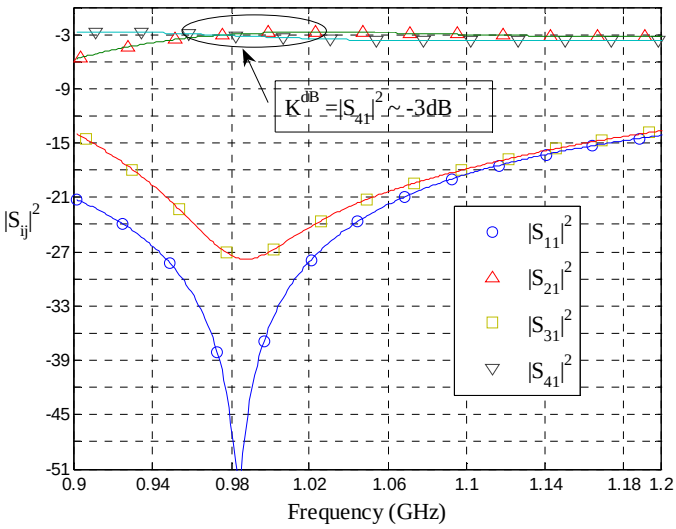


Figura 40: Ampiezza dei parametri di diffusione dell'accoppiatore in Figura 26 (d = 0.8 mm, s = 3.0 mm, w = 7.0 mm, h = 8 mm, ε_{sub} = 10.2).

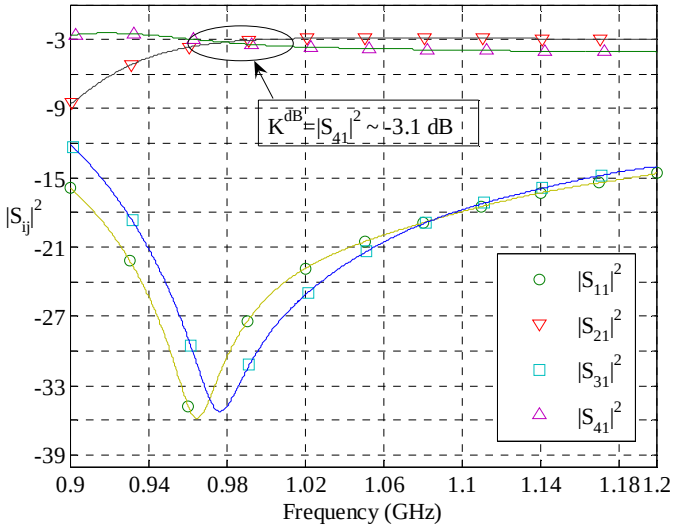


Figura 41: Ampiezza dei parametri di diffusione dell'accoppiatore in Figura 26 (d = 0.8 mm, s = 3.0 mm, w = 7.0 mm, h = 8 mm, ε_{sub} = 10.2). Le strisce sono in rame, il substrato in alluminio, il vetro è pyrex e le perdite sono: $\mathrm{Im}(\varepsilon_{Eng}), \mathrm{Im}(\varepsilon_{Sub}), \mathrm{Im}(\varepsilon_{Glass}) \propto 10^{-2}$ **.**

Infine, vogliamo riportare nella tabella seguente il valore della permittività della lamina ENG calcolata con le formule di progetto, il valore ottenuto attraverso le simulazioni *full-wave* con CST Microwave Studio e l'errore relativo che si commette utilizzando tali formule di progetto.

w (mm)/s (mm)/h (mm)/ε_{sub}	d (mm)	ε_{ENG} (Formule di Progetto)	ε_{ENG} (CST)	Errore Relativo(%)
9.8/3.4/10/9.2	0,8	-0,53	-0,51	3,779
	1,3	-0,855	-0,797	7,277
	2,5	-1,645	-1,663	1,082
	3	-1,974	-1,915	3,08
9.8/3.0/10/8.8	0,8	-0,507	-0,497	2,012
	1,3	-0,825	-0,772	6,865
	2,5	-1,586	-1,501	5,662
	2,8	-1,766	-1,61	9,689
7.0/3.0/8.0/10.2	0,8	-0,728	-0,651	11,828
	1,3	-1,001	-1,008	0,694
	1,5	-1,365	-1,151	18,592
	2,5	-2,276	-2,078	9,528
7.5/3.0/8.0/9.57	0,8	-0,681	-0,663	2,714
	1,3	-1,107	-0,994	11,368
	1,5	-1,363	-1,214	12,273
	2,5	-2,129	-2,039	4,413

Tabella 1: Confronto tra I risultati ottenuti attraverso le formule di progetto e attraverso le simulazioni *full-wave* con CST Microwave Studio.

7. RIDUZIONE DELLA DIAFONIA TRA DUE LINEE DI TRASMISSIONE SIMMETRICHE IN MICROSTRISCIA

In questo paragrafo focalizziamo l'attenzione sul progetto di una linea a microstriscia bifilare "caricata" con metamateriali, ampliando il lavoro presentato nei paragrafi precedenti sul progetto di un accoppiatore direzionale, dove è stato mostrato che è possibile progettare un accoppiatore co-direzionale, con valori di accoppiamento non ottenibili tramite una configurazione standard di medesime dimensioni, una volta che siano stati scelti opportunamente i parametri geometrici e fisici del metamateriale introdotto in tale struttura.
Vogliamo ora trattare il medesimo fenomeno, ma da un'ottica differente. Quando, infatti, due circuiti stampati si trovano troppo "vicini" tra loro, è presente un fenomeno di interferenza (diafonia) tra i segnali trasmessi sui singoli circuiti: questo fenomeno può essere considerato positivo nel caso in cui si vogliano progettare accoppiatori direzionali; altrimenti, in generale, è un fenomeno indesiderato soprattutto quando, per motivi tecnologici ed economici, è necessario un alto livello di integrazione e quindi la diafonia deve essere eliminata o, quanto meno, ridotta.
Lo scopo di questo studio è mostrare come l'uso di particolari metamateriali permetta di modificare le prestazioni delle microstrisce accoppiate per quanto riguarda i valori di accoppiamento ottenibili: proponiamo quindi un'interpretazione euristica di questo fenomeno fisico. La validità di tale analisi è poi verificata attraverso simulazioni *full-wave*, utilizzando il software CST Microwave Studio®: vengono quindi presentati i risultati ottenuti per diverse configurazioni e geometrie.

7.1 Riduzione della diafonia

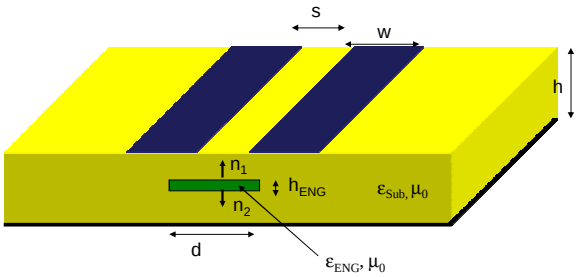


Figura 42: Microstrisce accoppiate con una lamina ENG all'interno del substrato.

La struttura analizzata è costituita da due microstrisce stampate su un substrato dielettrico a elevata permittività (poggiato su di un piano di massa), nel quale è stata posta una lamina di

metamateriale ENG (Figura 42). La parte reale della permittività del metamateriale $\varepsilon_z(\omega)$ presenta valori negativi in una determinata banda di frequenza.

Come già discusso nel paragrafo 4.2, l'introduzione di una lamina ENG comporta principalmente una diminuzione del valore della costante di propagazione del modo pari e un aumento dell'impedenza caratteristica dello stesso modo: infatti, la configurazione geometrica proposta concorre alla diminuzione della capacità totale del modo pari.

Error! Objects cannot be created from editing field codes.

I fenomeni di accoppiamento tra le due linee di trasmissione, come già discusso in precedenza (paragrafo 3), sono determinati dalla differenza tra i valori delle impedenze caratteristiche dei due modi (accoppiamento contro-direzionale) e quelli delle costanti di propagazione (accoppiamento co-direzionale). In particolare, la costante di propagazione del modo pari è, se non sono sufficientemente distanti le strisce, maggiore di quella del modo dispari; un'oculata scelta dei parametri della lamina ENG (permittività, spessore e altezza), dunque, porta ad ottenere una riduzione della costante di propagazione del modo e, in tale maniera, un assottigliamento della differenza delle due costanti di propagazione. Le due linee di trasmissione in microstriscia mostrate in Figura 42, che sono poste in parallelo per una certa lunghezza L, possono scambiarsi energia attraverso un processo di accoppiamento co-direzionale solo se tale lunghezza è proporzionale alla differenza delle costanti di propagazione dei due modi, che è la lunghezza di accoppiamento L_c. Allora, l'introduzione della lamina di metamateriale ENG produce, per quanto appena affermato, un notevole aumento della lunghezza L_c:

$$L_c \propto 1/\left|\beta_o - \beta_e\right| = \frac{c}{2\pi f}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_e} - \sqrt{\varepsilon_o}} \xrightarrow{\beta_o \simeq \beta_e = \beta_c} \infty$$

L'accoppiamento contro-direzionale può essere ridotto lavorando alla frequenza f_0, per la quale tale accoppiamento è minimo.

Possiamo dunque concludere che, se la lunghezza L è sufficientemente minore della lunghezza di accoppiamento L_c e si lavora intorno alla frequenza f_0, si ottiene l'eliminazione di entrambi gli accoppiamenti (rappresentati qui dai parametri della matrice di diffusione $\left|S_{31}\right|$ per quello contro-direzionale e $\left|S_{41}\right|$ per quello co-direzionale):

$$|S_{41}| = Sin\left(\frac{2\pi}{c} f_0 \left(\sqrt{\varepsilon_e} - \sqrt{\varepsilon_o}\right) L/2\right) \overset{L \ll L_c}{\simeq} 0$$

$$|S_{31}| = \frac{k\, Sin\left(\frac{2\pi}{c} f_0 \sqrt{\varepsilon_c} L\right)}{\sqrt{1-k^2}\, Cos\left(\frac{2\pi}{c} f_0 \sqrt{\varepsilon_c} L\right) + jSin\left(\frac{2\pi}{c} f_0 \sqrt{\varepsilon_c} L\right)} \overset{f_0 = mcL/\left(2\sqrt{\varepsilon_c}\right)}{=} 0$$

7.2 Risultati numerici

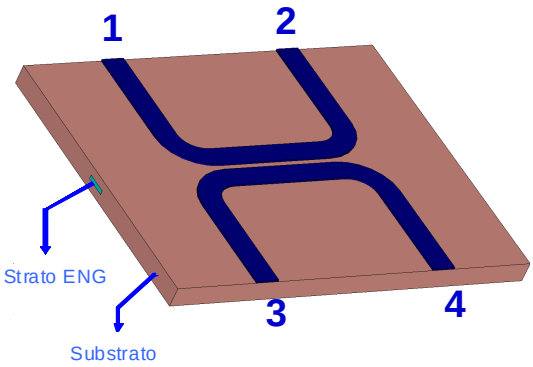


Figura 43: Linee in microstriscia accoppiate (w = 9.8mm, s=3,2mm, h=10mm, ε_{sub}=8.9, L=56 mm, d=2 mm).

Mostriamo ora le simulazioni numeriche della struttura mostrata in Figura 43, ottenute utilizzando il software commerciale CST Microwave Studio. Qui di seguito (Figura 44) è mostrato l'andamento in frequenza dei parametri della matrice di diffusione della struttura di Figura 43 nel caso in cui la lamina di metamateriale ENG non sia presente.

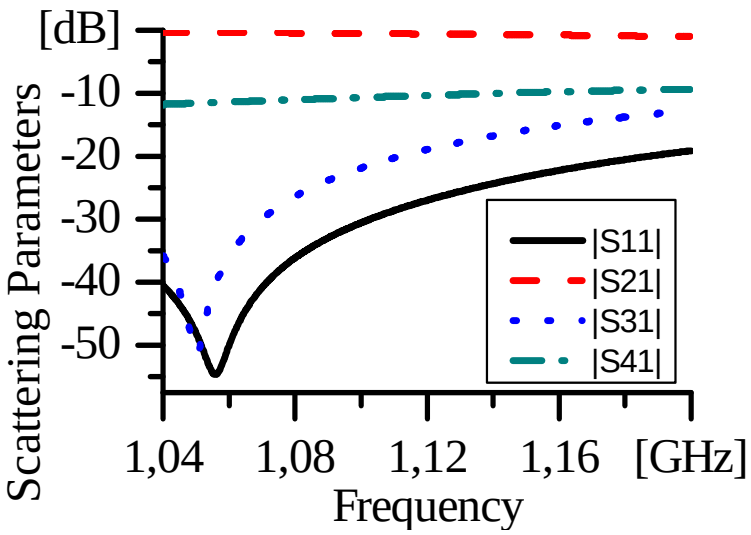


Figura 44: Parametri di diffusione della struttura (Figura 42) senza la lamina ENG.

Nell'intervallo di frequenza mostrato in Figura 44 si ha un accoppiamento co-direzionale $|S_{41}|^2$ costante e pari a -10 dB e un valore di accoppiamento contro-direzionale $|S_{41}|^2$ che è minimo a 1.05 GHz e che aumenta al crescere della frequenza.

Consideriamo ora il caso in cui sia presente uno strato di metamateriale ENG all'interno del substrato (Figura 43): le dimensioni della struttura e il valore della permittività del substrato sono le medesime del caso precedente; la permittività del metamateriale ENG assume il valore di -0.88 alla frequenza di lavoro di 1.12 GHz e presenta un andamento dispersivo alla Drude con frequenza di plasma pari a 1,51 GHz.

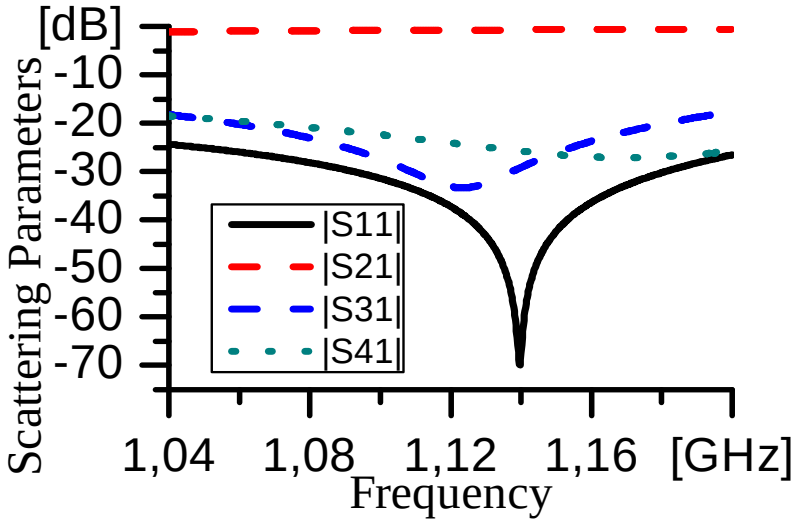


Figura 45: Parametri della matrice di diffusione della struttura di Figura 43.

I parametri della matrice di diffusione ottenuti per questa configurazione sono mostrati in Figura 45. Rispetto al caso precedente, nell'intervallo di frequenza 1.04-1.2 GHz si ha una riduzione della diafonia alla porta 4 (si passa da un valore di -10 dB a uno di -20 dB) e il minimo del valore della diafonia alla porta 3 alla frequenza di 1.12 GHz. Possiamo concludere che, in tale configurazione, sull'intervallo di frequenza considerato le due linee di trasmissione in microstriscia presentano dei valori di accoppiamento molto bassi (-20 dB) non ottenibili nella situazione standard con le medesime dimensioni.

7.3 Propagazione di segnali gaussiani

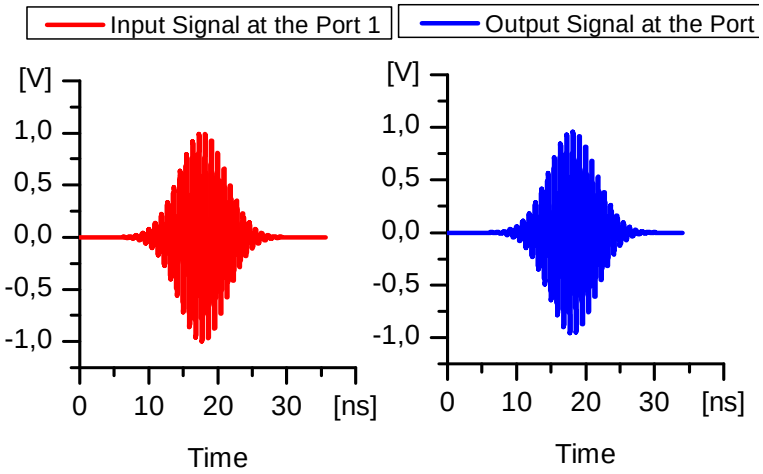


Figura 46:Confronto tra il segnale di ingresso e quello di uscita.

Vogliamo ora discutere il problema della propagazione di segnali nella struttura mostrata in Figura 43. Considereremo due casi: 1) la propagazione di segnali a banda stretta; 2) la propagazione di segnali a banda larga.

Ipotizziamo nel primo caso di eccitare la struttura alla porta 1 con un impulso Gaussiano a banda stretta (Figura 46), il cui spettro è centrato a 1.12 GHz. Il segnale viaggia senza una significativa perdita di potenza (Figura 46) e i segnali alle porte 3 e 4 sono bassi ($<6\ 10^{-2}$), come anche quello riflesso alla porta 1 ($<4\ 10^{-2}$), come è mostrato in Figura 47.

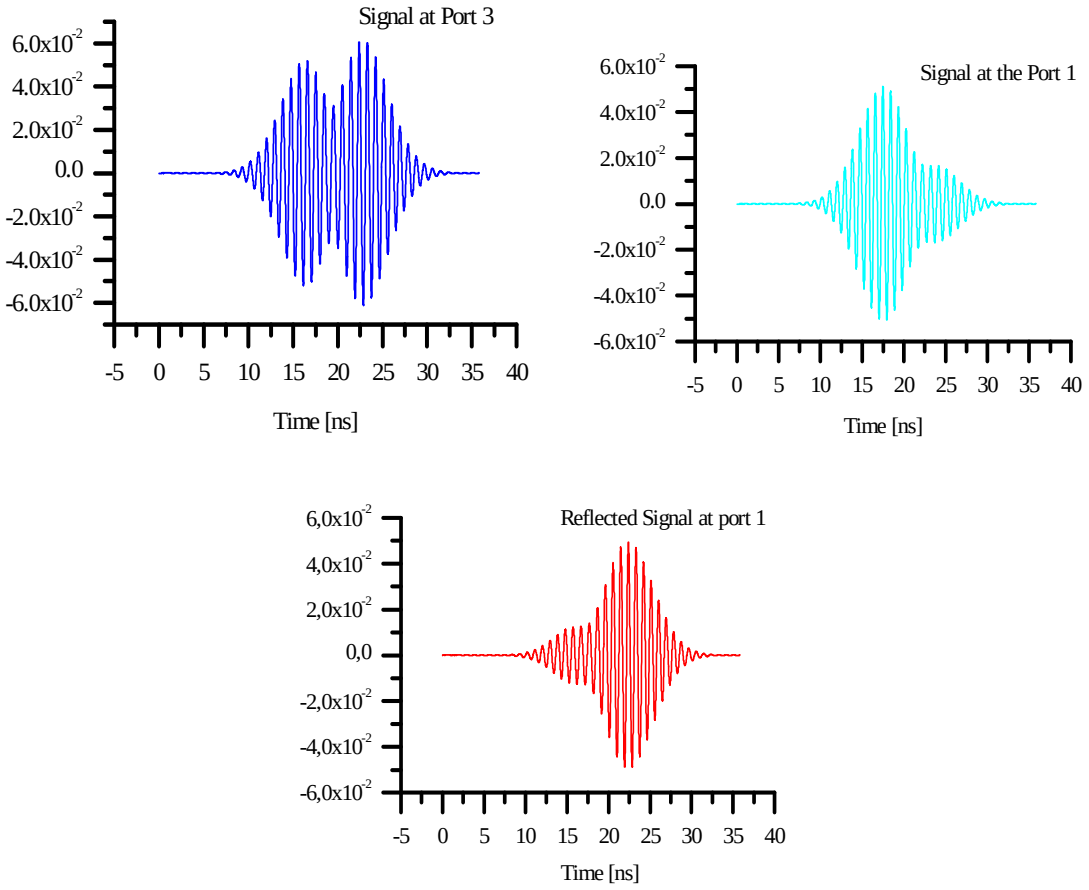


Figura 47: segnali alle porte 3, 4 e 1.

Nel secondo caso abbiamo testato la struttura proposta attraverso un'eccitazione a banda larga (un segnale Gaussiano il cui spettro si estende sull'intervallo di frequenza 0-2 GHz). In questo caso la permittività dello strato di metamateriale ENG presenta un modello dispersivo alla Lorentz: il modello di Drude non è valido per analisi su bande molto ampie che comprendano le basse frequenze. L'andamento dispersivo intorno alla frequenza di 1.12 GHz è il medesimo di quello ipotizzato nell'esempio precedente.

I risultati corrispondenti sono mostrati in Figura 48. Il comportamento temporale dei segnali risulta essere peggiore rispetto a quello proposto nell'esempio precedente, dal momento che la struttura è progettata per lavorare ad una determinata frequenza (dobbiamo tener presente che la lamina ENG è un materiale dispersivo e con perdite e il valore richiesto di permittività negativa si raggiunge esclusivamente ad una determinata frequenza). Comunque, in Figura 49 vengono confrontati i segnali d'uscita nel caso della presenza o dell'assenza della lamina di metamateriale ENG e si ottiene il medesimo comportamento.

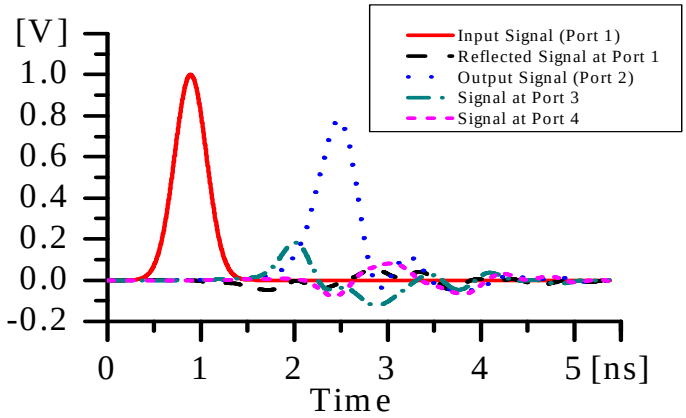


Figura 48: Comportamento dei segnali alle 4 porte per un eccitazione di un impulso Gaussiano (0-2 GHz).alla porta 1.

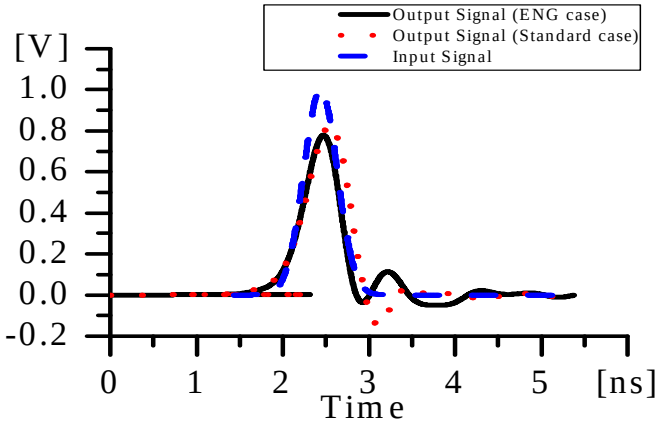


Figura 49: Confronto tra i segnali di uscita e di ingresso nel caso di eccitazione di un impulso Gaussiano con e senza lamina ENG.

Possiamo quindi concludere che l'utilizzo di un strato di metamateriale ENG nel caso a banda larga non comporta nessun sostanziale mutamento nel comportamento della struttura; il suo utilizzo risulta quindi più indicato per le applicazioni a banda stretta.

Possiamo inoltre affermare che i risultati ottenuti attraverso l'utilizzo del software commerciale CST rispettano l'analisi fatta con l'utilizzo del modello circuitale (paragrafo 4.2).

Gli argomenti affrontati in questo capitolo sono stati presentati nelle pubblicazioni elencate qui di seguito in bibliografia [18]-[31].

Bibliografia

[1] Gupta K. C., R. Garg, I. J. Bahl and P. Barthia, *Microstrip lines and slotlines*, Norwood, MA, Artech House, 2nd Ed. 1996.

[2] Mongia, R., I. Bahl, and P. Bhartia, *RF and Microwave Coupled-Line Circuits*, Norwood, MA: Artech House, 1999.

[3] Cohn, S. B., and R. Levy, "History of Microwave passive Components with Particular Attention to Directional Couplers," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-32, 1984, pp. 1046-1054.

[4] Garg R., and I. J. Bahl, "Characteristics of Coupled Microstriplines", *IEEE Transactions of Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-27, no. 7, July 1979.

[5] Hammerstad, E., and O. Jenson, "Accurate Models for Microstrip Computer-Aided Design," *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp.*, Dig. 1980, pp. 407-409.

[6] Kirschning, M., and R. H. Jansen, "Accurate Wide-Range Design Equations for the Frequency-Dependent Characteristics of Parallel Coupled Microstrip Lines," *IEEE Trans.*, Vol.MTT-32, Jan. 1984, pp083-90. Corrections: *ibid*, Mar. 1985, p. 288.

[7] Reed. J., and G. J. Wheeler, "A method of Analysis of Simmetrical Four-Port Networks," *IRE Trans.*, Vol. MTT-4, Oct. 1956, pp. 246-253.

[8] Tripathi V. K., "Asymmetric Coupled Transmission Lines in an Inhomogeneous Medium," *IEEE Trans*, Vol.MTT-23, Sept. 1975, pp. 734-739.

[9] Krage, M. K., and G. I. Haddad, "Characteristics of Coupled Microstrip Transmission Lines-I: Coupled-Mode Formulation of Inhomogeneous Lines," *IEEE Trans*, Vol. MTT-18, Apr. 1970, pp. 217-222.

[10] G. I. Zysman, A. K. Johnson, "Coupled transmission linenetworks in an inhomogeneous dielectric medium," IEEETrans. Microwave Theory Tech., vol. MT'I'-17, pp. 753-759, 1969.

[11] Krage, M. K., and G. I. Haddad, "Characteristics of Coupled Microstrip Transmission Lines-II: Evaluation of Coupled-Line Parameters," *IEEE Trans*, Vol. MTT-18, Apr. 1970, pp. 222-228.

[12] Ikalainen, P. K., and G. L. Matthaei, "Wideband Forward-Coupling Microstrip Hybrids With High Directivity," *IEEE Trans*, Vol. MTT-35, Aug. 1987, pp 719-725.

[13] Nehari Zeev, Conformal Mapping, McGraw-Hill Book Company, Inc, Pr. Ed. 1952.

[14] Schinzinger R., P. A. A. Laura, Conformal Mapping, Methods and Applications, Dover Publications, Inc, Mineola, New York, 2003.

[15] Wan C., "Analytically and accurately and determined quasi-static parameters of coupled microstrip lines. IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol 44, no 1, January 1996.

[16] Wheeler H. A., "Transmission-line properties of parallel strips separated by a dielectric sheet", IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, vol. 13 pp. 172-185, 1965.

[17] D. Killips, P. Barba, G. Dester, A. Bogle, and L. Kempel, "Simulation of Double Negative (DNG) Composite Materials Using Non-Periodic Constitutive Materials," Proceedings of the Third Workshop on Metamaterials and Special Materials for Electromagnetic Applications and TLC, Roma, Italia, March, 30-31 2006.

[18] S. E. Lauro, F. Bilotti, A. Toscano, L. Vegni, BEM analysis of electromagnetic components filled with unconventional materials, COMPEL: The International Journal for Computation and Mathematics in Electrical and Electronic Engineering, Vol. 27, pp. 1273-1285, 2008.

[19] S. E. Lauro, F. Bilotti, A. Toscano, L. Vegni, Accoppiatori direzionali ad elevati valori di accoppiamento tramite l'impiego di meta materiali, accettato per la pubblicazione sui Quaderni della Società Italiana di Elettromagnetismo.

[20] S. E. Lauro, A. Toscano, L. Vegni, Enhanced Coupling Values in Coupled Microstrip Lines using Metamaterials, The Radioengineering journal, June 2008, Volume 17, Number 2.

[21] F. Bilotti, S. E. Lauro, A. Toscano and L. Vegni, Efficient Modeling of the Crosstalk between two Coupled Microstrip Lines over Non Conventional Materials Using an Hybrid Technique, June 2008, Vol. 44, pages 1482-85, IEEE Transactions on Magnetics.

[22] S. E. Lauro, A. Toscano, and L. Vegni, Symmetrical Coupled microstrip lines with ENG metamaterial loading, 13TH IEEE CEFC 2008, 11-15 May 2008, Athens, Greece.

[23] S. E. Lauro, A. Toscano, L. Vegni, Metamaterials slab for high-speed integrated circuits design, 11 Th International Symposium on Microwave and optical technology (ISMOT-2007), 17-21 December 2007, Rome, Italy.

[24] F. Bilotti, S. E. Lauro, A. Toscano, L. Vegni, Design of ENG loaded coupled microstriplines with very high and very low coupling values, Metamaterials 2007, October 22-26, 2007, Rome, Italy.

[25] S. E. Lauro, A. Toscano and L. Vegni, Enhanced Coupling Values in Coupled Microstriplines Using Metamaterials, International Conference on Electromagnetics and Communications, ICECom 2007, September 24-26, on pages 1-4, Dubrovnik, Croatia.

[26] F. Bilotti, S. E. Lauro, A. Toscano and L. Vegni, Coupled Microstriplines with ENG Metamaterial loading: Physical concepts, Design formulas, and Numerical simulations, International Conference on Electromagnetics in Advanced Applications, ICEAA 2007, September 17-21, on pages 798-801, Torino, Italy.

[27] F. Bilotti, S. E. Lauro, A. Toscano, and L. Vegni, Efficient Modeling of the Crosstalk between two Coupled Microstrip Lines over Non Conventional Materials Using an Hybrid Technique, COMPUMAG, 24-28 June 2007, Aachen, Germany.

[28] S. E. Lauro, F. Bilotti, A.Toscano, and L. Vegni, Efficient reduction of the Cross-Talk between two coupled microstrip lines using metamaterials, EMC Workshop 12-14 June 2007, Paris, France.

[29] A. Toscano, L. Vegni, F. Bilotti, S. E. Lauro, Metamaterials as Complex Dielectrics in the Design of a New Class of Integrated Circuits, SPIE Europe's International Congress on Optics & Optoelectronics (ICOO), 16-19 April 2007, Prague, Czech Republic.

[30] F. Bilotti, S. E. Lauro, A. Toscano, and L. Vegni, Coupled microstrip lines with metamaterial loading: principle of operation, model and possible applications, Proc. of Nanometa 2007, the 1st European Topical Meeting on Nanophotonics and Metamaterials, 8-11 Jan., 2007, Seefeld, Austria.

[31] A. Toscano, S. E. Lauro, F. Bilotti, L. Vegni, Applicazione del metodo agli elementi finiti per la riduzione della diafonia tra linee a microstriscia accoppiate, XVI Riunione Nazionale di Elettromagnetismo, 18-21 Settembre 2006, Genova, Italy.

[32] S. E. Lauro, F. Bilotti, A.Toscano, and L. Vegni, Metamaterials as Complex Dielectrics in the Design of High-Speed Integrated Circuits, Proc. of the Third Workshop on Metamaterials and Special Materials for Electromagnetic Applications and TLC, p .61, March 30-31, 2006, Rome, Italy.

Capitolo Terzo

Strutture stratificate

Le strutture stratificate sono state studiate nel secolo scorso in ampi campi della fisica e dell'ingegneria, soprattutto in ottica e a microonde, per il loro utilizzo nella realizzazione di dispositivi come riflettori, superlenti, filtri, polarizzatori, reticoli diffrattivi, etc.

In questo capitolo, in particolare, vogliamo trattare la combinazione di mezzi dielettrici e di mezzi plasmonici (ad esempio l'argento), come cella base di una struttura periodica. L'accoppiamento di tali mezzi consente di determinare fenomeni di risonanza e, inoltre, permette di interdire o consentire la propagazione del campo elettromagnetico all'interno della struttura in particolari direzioni; infatti, come verrà spiegato in seguito, l'utilizzo di mezzi plasmonici che variano in frequenza secondo un modello dispersivo alla Drude permette di accoppiare mezzi con permittività positiva (dielettrici standard) con mezzi che possono assumere valori negativi (mezzi plasmonici), facendo sì che, nell'ipotesi che gli spessori di questi strati siano sufficientemente piccoli rispetto alla lunghezza d'onda, la struttura sia caratterizzata da una permittività efficace, che può assumere una vasta gamma di valori determinando delle caratteristiche inusuali per la struttura stessa.

Nella seguente trattazione si discuterà il comportamento della struttura stratificata come mezzo efficace: tale approssimazione è valida nell'ipotesi che il periodo sia sufficientemente piccolo rispetto alla lunghezza d'onda. Sarà trattata la variazione spaziale dei materiali in un'unica direzione; il mezzo efficace, in tale modo, sarà caratterizzato da un certo grado di anisotropia descrivibile come un mezzo birifrangente con gli elementi dei tensori costitutivi che saranno determinati in funzione dei parametri elettromagnetici (permittività e permeabilità) e di quelli geometrici (il riempimento relativo) dei mezzi che costituiscono la singola cella.

Saranno trattate due differenti configurazioni: 1) una struttura multistrato di lunghezza finita e sezione indefinita; 2) una struttura a pila di lunghezza infinita ma di spessore finito. Verrà dunque analizzata la prima configurazione e saranno proposte e testate semplici formule di progetto. Questa stessa struttura verrà poi utilizzata (capitolo 4) come mezzo a permittività pari a zero (ENZ) per il suo utilizzo come isolatore per il progetto di nano-filtri alle frequenze ottiche e degli infrarossi. La seconda configurazione sarà ampiamente analizzata in modo da

poter essere utilizzata nel progetto di filtri spaziali e filtri polarizzatori alle frequenze ottiche. In entrambe le analisi verranno considerate distintamente la propagazione all'interno delle strutture stratificate di onde polarizzate TE e TM.

1. STRUTTURA MULTI STRATO

1.1 Incidenza di un'onda piana polarizzata TM

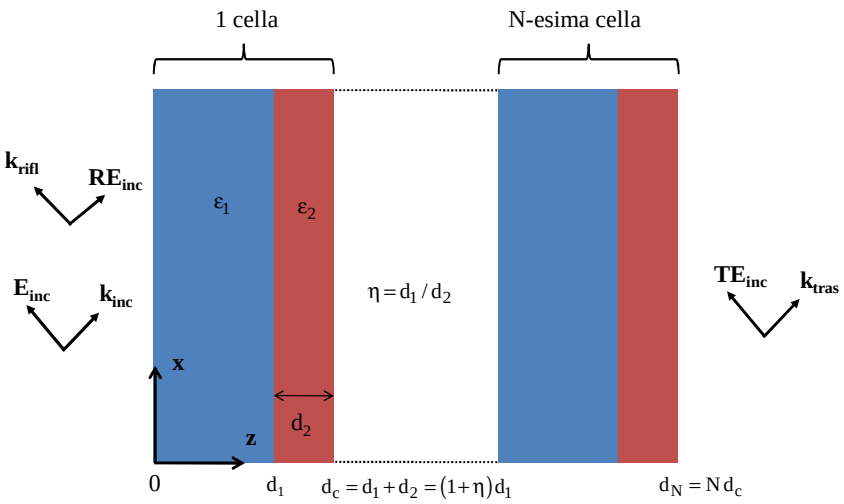


Figura 50: Struttura multistrato.

Consideriamo una struttura multistrato costituita da una successione periodica lungo l'asse z di due strati distinti di spessore (d_1, d_2) di sezione indefinita e permittività ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$) come mostrato in Figura 50. La struttura è composta da N celle di lunghezza d_c e può essere analizzata attraverso la trattazione delle matrici di trasmissione. L'utilizzo di tale metodo consente di calcolare la matrice di trasmissione del multistrato ($\underline{\mathbf{T}}_m$) come la potenza N-esima di quella della singola cella ($\underline{\mathbf{T}}_c$). Una volta noti i termini della matrice, è molto semplice calcolare i coefficienti di trasmissione e riflessione (o di diffusione) di un'onda piana che incida su tale struttura [1].

Consideriamo ora la propagazione di un'onda piana TM. La matrice di trasmissione di un singolo strato è data dalla seguente espressione [1]:

$$\underline{\mathbf{T}}_i = \begin{bmatrix} \cos(k_{z,i}\, d_i) & j\dfrac{\eta_0}{k_0}\dfrac{k_{z,i}}{\varepsilon_i}\sin(k_{z,i}\, d_i) \\ j\dfrac{k_0}{\eta_0}\dfrac{\varepsilon_i}{k_{z,i}}\sin(k_{z,i}\, d_i) & \cos(k_{z,i}\, d_i) \end{bmatrix} \qquad (1)$$

dove si suppone una propagazione lungo l'asse z con una costante di propagazione nei singoli strati $k_{z,i} = \sqrt{k_0{}^2 \varepsilon_i - \left(k_x{}^2 + k_y{}^2\right)}$. La matrice di trasmissione della cella è data dal prodotto di quelle dei due singoli strati.

$$\underline{\mathbf{T}}_c = \begin{bmatrix} \cos(k_{z,1}\,d_1)\cos(k_{z,2}\,d_2) - \dfrac{\varepsilon_2 k_{z,1}}{\varepsilon_1 k_{z,2}}\sin(k_{z,1}\,d_1)\sin(k_z^2\,d_2) & j\dfrac{\eta_0}{k_0}\left(\dfrac{k_{z,2}}{\varepsilon_2}\cos(k_{z,1}\,d_1)\sin(k_{z,2}\,d_2) + \dfrac{k_{z,1}}{\varepsilon_1}\sin(k_{z,1}\,d_1)\cos(k_{z,2}\,d_2)\right) \\ j\dfrac{k_0}{\eta_0}\left(\dfrac{\varepsilon_1}{k_{z,1}}\sin(k_{z,1}\,d_1)\cos(k_{z,2}\,d_2) + \dfrac{\varepsilon_2}{k_{z,2}}\cos(k_{z,1}\,d_1)\sin(k_{z,2}\,d_2)\right) & \cos(k_{z,1}\,d_1)\cos(k_{z,2}\,d_2) - \dfrac{\varepsilon_1 k_{z,2}}{\varepsilon_2 k_{z,1}}\sin(k_{z,1}\,d_1)\sin(k_{z,2}\,d_2) \end{bmatrix} \quad (2)$$

La matrice di trasmissione della cella può essere decomposta diagonalizzando la matrice: $\underline{\mathbf{T}}_c = \underline{\mathbf{Q}} \bullet \underline{\mathbf{\Lambda}} \bullet \underline{\mathbf{Q}}^{-1}$, dove $\underline{\mathbf{Q}} = \left\{\mathbf{v}_1{}^t, \mathbf{v}_2{}^t\right\}$ è la matrice degli autovettori e $\underline{\mathbf{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{bmatrix}$ è la matrice degli autovalori. La matrice $\underline{\mathbf{T}}_c$ ha determinante unitario poiché il determinante della matrice di trasmissione del singolo strato ha determinante unitario $\left(\det \underline{\mathbf{T}}_c = \det \underline{\mathbf{T}}_1 \det \underline{\mathbf{T}}_2 = 1\right)$ e di conseguenza gli autovalori risulteranno l'uno il reciproco dell'altro:

$$\lambda_+ = 1/\lambda_- \quad \left(\det \underline{\mathbf{T}}_c = \det\left(\underline{\mathbf{Q}} \bullet \underline{\mathbf{\Lambda}} \bullet \underline{\mathbf{Q}}^{-1}\right) = \det \mathbf{Q} \det \underline{\mathbf{\Lambda}} \det \underline{\mathbf{Q}}^{-1} = \det \underline{\mathbf{\Lambda}} = \lambda_+ \lambda_- = 1\right)$$

A questo punto, il calcolo di $\underline{\mathbf{T}}_m$ può essere ottenuto elevando all'N-sima potenza $\underline{\mathbf{T}}_c$. Si può ora sfruttare la proprietà delle matrici: $\underline{\mathbf{T}}_m = \left(\underline{\mathbf{Q}} \bullet \underline{\mathbf{\Lambda}} \bullet \underline{\mathbf{Q}}^t\right)^N = \underline{\mathbf{Q}} \bullet \underline{\mathbf{\Lambda}}^N \bullet \underline{\mathbf{Q}}^t$. In questo modo, solamente la matrice degli autovalori è elevata alla N-esima potenza. Questi ultimi, introducendo il rapporto tra gli spessori $\eta = d_2 / d_1$, assumono la seguente espressione:

$$\begin{aligned} &\lambda_\pm = a \pm j\sqrt{1-a^2} = e^{\pm j \arccos(a)} = e^{\pm j k_{z,eff}(1+\eta) d_1} \\ &a = \cos(k_{z,1} d_1)\cos(k_{z,2}\eta d_1) - \frac{\left(\varepsilon_1 k_{z,2}\right)^2 + \left(\varepsilon_2 k_{z,1}\right)^2}{2\,\varepsilon_1 k_{z,2}\,\varepsilon_2 k_{z,1}}\sin(k_{z,1} d_1)\sin(k_{z,2}\eta d_1) = \cos\left(k_{z,eff}\,(1+\eta)\,d_1\right) \end{aligned} \quad (3)$$

La seconda espressione che compare nella (3) non è altro che la relazione di dispersione del multistrato.

È interessante sviluppare allora la relazione di dispersione in serie di Taylor nell'ipotesi di spessori sottili rispetto alla lunghezza d'onda $k_0 d_c = 2\pi(1+\eta)\,d_1 / \lambda_0 \ll 1$, in modo tale da valutare il valore efficace del vettore d'onda lungo l'asse z $k_{z,eff}$ in funzione del valore delle permittività dei due strati e del rapporto tra gli spessori:

$$
\begin{aligned}
&a = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2}{(1+\eta)} \frac{\varepsilon_2 k_{z,1}{}^2 + \eta\varepsilon_1 k_{z,2}{}^2}{(1+\eta)\varepsilon_1\varepsilon_2} \right)\left((1+\eta)d_1\right)^2 + O\left(d_1{}^4\right), \quad d_1 \to 0 \\
&a = \cos\left(k_{z,eff}\,(1+\eta)\,d_1\right) = 1 - \frac{1}{2} k_{z,eff}\,\left((1+\eta)\,d_1\right)^2 + O\left(d_1{}^4\right), \quad d_1 \to 0 \\
&k_{z,eff} \equiv \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2}{(1+\eta)} \frac{\varepsilon_2 k_{z,1}{}^2 + \eta\varepsilon_1 k_{z,2}{}^2}{(1+\eta)\varepsilon_1\varepsilon_2}}
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Nella prima espressione della (3) l'autovalore λ è stato posto in forma di esponenziale complesso, in modo da evidenziare il suo significato fisico di termine di ritardo di fase del campo dovuto all'attraversamento della struttura. Tale assunzione è valida solo quando $|a| < 1$: infatti, l'autovalore è una quantità complessa e il suo modulo è unitario. Al contrario per $|a| > 1$ l'autovalore è una quantità reale e, quindi, esprimibile come un esponenziale reale che indica che la struttura proibisce la propagazione del campo.

Per meglio evidenziare questo punto possiamo per semplicità considerare l'ipotesi che gli spessori siano piccoli rispetto alla lunghezza d'onda. La terza equazione della (4) ci indica che si ha propagazione all'interno del multistrato se l'argomento della radice è una quantità positiva : $\frac{\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2}{(1+\eta)} \frac{\varepsilon_2 k_{z,1}{}^2 + \eta\varepsilon_1 k_{z,2}{}^2}{(1+\eta)\varepsilon_1\varepsilon_2} > 0$; imponendo la dipendenza dalle caratteristiche del mezzo $\left(k_{z,i} = \sqrt{k_0{}^2\varepsilon_i - \left(k_x{}^2 + k_y{}^2\right)}\right)$ e dall' incidenza del campo $\left(k_x{}^2 + k_y{}^2 = k_0{}^2 \sin^2\theta\right)$ troviamo le condizioni sul valore che deve assumere la permittività del mezzo 1 ε_1 affinché si abbia la propagazione del campo nell'ipotesi che il mezzo 2 sia un dielettrico standard $(\varepsilon_2 \geq 1)$:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2}{1+\eta}\left(1 - \frac{\sin^2\theta}{1+\eta}\frac{\varepsilon_2 + \eta\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right) \geq 0 \\
&\varepsilon_2 \geq 1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1 \in \left[-\eta\varepsilon_2, 0\right) \cup \left[\frac{\varepsilon_2 \sin^2\theta}{\eta\left(\varepsilon_2 - \sin^2\theta\right) + \varepsilon_2}, +\infty\right)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

Nel caso in cui i mezzi considerati siano due dielettrici standard $(\varepsilon_1 \geq 1, \quad \varepsilon_2 \geq 1)$ la condizione (5) è sempre soddisfatta per qualsiasi valore della permittività dei due mezzi, del rapporto degli spessori e dell'angolo di incidenza; in questo caso, la struttura permette sempre

la propagazione del campo nell'ipotesi di piccoli spessori (questo non è sempre vero nel caso di strati non sottili: infatti, una struttura composta da strati multipli di un quarto della lunghezza d'onda si comporta da riflettore).

Nel caso in cui uno dei due mezzi risulti essere dispersivo (per esempio $\varepsilon_1 = 1 - \left(\mathrm{f_{pl}}/\, f\right)^2$ dove $\mathrm{f_{pl}}$ è la frequenza di plasma) e l'altro sia un dielettrico standard, la condizione (5) determina delle bande in frequenza di interdizione e di conduzione.

Calcolati gli autovalori e quindi la matrice $\underline{\mathbf{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ bisogna calcolare gli autovettori che compongono la matrice $\underline{\mathbf{Q}} = \left\{ \mathbf{v}_1{}^t, \mathbf{v}_2{}^t \right\}$. Questi ultimi sono esprimibili nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \{-p, 1\} \\ \mathbf{v}_2 &= \{p^*, 1\} \end{aligned} \tag{6}$$

dove p, ricordando che *a* è dato dalla (3), assume la seguente espressione:

$$p = \frac{\eta_0}{k_0} k_{z,1} k_{z,2} \frac{\sqrt{1-a^2} - j\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_2 k_{z,1}{}^2}{\varepsilon_1 k_{z,2}} - \frac{\varepsilon_1 k_{z,2}{}^2}{\varepsilon_2 k_{z,1}}\right)\sin(k_{z,1}d_1)\sin(k_{z,2}\eta d_1)}{\left(k_{z,2}\varepsilon_1 \sin(k_{z,1}d_1)\cos(k_{z,2}\eta d_1) + k_{z,1}\varepsilon_2 \cos(k_{z,1}d_1)\sin(k_{z,2}\eta d_1)\right)} = |p| e^{j\alpha_p} \tag{7}$$

p ha le dimensioni di un'impedenza ed assume la seguente espressione approssimata:

$$p = \frac{\eta_0}{k_0}\sqrt{\frac{k_{z,2}{}^2\varepsilon_1 + k_{z,1}{}^2\varepsilon_2\eta}{\left(\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2\right)\varepsilon_1\varepsilon_2}} + O(d_1), \quad d_1 \to 0 \tag{8}$$

La matrice di trasmissione del multistrato è allora calcolabile nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}}_m &= \underline{\mathbf{Q}} \bullet \underline{\mathbf{\Lambda}}^N \bullet \underline{\mathbf{Q}}^t = \frac{1}{p+p^*}\begin{bmatrix} -p & p^* \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-jNx} & 0 \\ 0 & e^{jNx} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & p^* \\ 1 & p \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{p+p^*}\begin{bmatrix} -pe^{-jNx} & \left(pe^{-jNx}\right)^* \\ e^{-jNx} & e^{jNx} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & p^* \\ 1 & p \end{bmatrix} = \\ &\overset{p=|p|e^{j\alpha_p}}{=} \frac{1}{\cos(\alpha_p)}\begin{bmatrix} \cos\left(\alpha_p - Nx\right) & j|p|\sin\left(Nx\right) \\ \frac{j}{|p|}\sin\left(Nx\right) & \cos\left(\alpha_p + Nx\right) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{9}$$

dove $x = ar\cos(a)$.

Vogliamo ora dimostrare che tale struttura si comporta come una lamina birifrangente di spessore $d_N = N(1+\eta)d_1$ caratterizzata dai seguenti tensori costitutivi nell'ipotesi di piccoli spessori:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad , \quad \mu = \mu_0 \tag{10}$$

La matrice di trasmissione per una lamina birifrangente ($\underline{\mathbf{T}}_{br}^{TM}$) assume la seguente espressione [2]:

$$\underline{\mathbf{T}}_{br}^{TM} = \begin{bmatrix} \cos\left(k_z^{TM} N(1+\eta)d_1\right) & jZ^{TM}\sin\left(k_z^{TM} N(1+\eta)d_1\right) \\ \dfrac{j}{Z^{TM}}\sin\left(k_z^{TM} N(1+\eta)d_1\right) & \cos\left(k_z^{TM} N(1+\eta)d_1\right) \end{bmatrix} \tag{11}$$

dove la costante di propagazione lungo l'asse z è: $k_z^{TM} = \sqrt{k_0{}^2\varepsilon_x - \left(k_x{}^2 + k_y{}^2\right)\dfrac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}}$ e l'impedenza caratteristica è: $Z^{TM} = \dfrac{\eta_0}{k_0}\dfrac{k_z^{TM}}{\varepsilon_x}$.

Quando gli spessori sono sufficientemente piccoli rispetto alla lunghezza d'onda di lavoro ($k_{z,i}d_i = \sqrt{k_0{}^2\varepsilon_i - \left(k_x{}^2 + k_y{}^2\right)}d_i << 1, i = 1,2$), gli autovalori e gli autovettori possono essere approssimabili nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \lambda &= e^{\pm j\sqrt{\frac{\varepsilon_1+\eta\varepsilon_2}{(1+\eta)}\left(k_0{}^2-\left(k_x{}^2+k_y{}^2\right)\left(\frac{\varepsilon_2+\eta\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right)/(1+\eta)\right)}(1+\eta)d_1} + O(d_1{}^2), \quad d_1 \to 0 \\ p &= \frac{\eta_0}{k_0}\sqrt{\frac{(1+\eta)}{\varepsilon_1+\eta\varepsilon_2}\left(k_0{}^2 - \left(k_x{}^2 + k_y{}^2\right)\left(\frac{\varepsilon_2+\eta\varepsilon_1}{\varepsilon_1\varepsilon_2}\right)/(1+\eta)\right)} + O(d_1), \quad d_1 \to 0 \end{aligned} \tag{12}$$

Sostituendo tali formule approssimate (12) nella (9), si ottiene la seguente matrice:

$$\underline{\mathbf{T}}_m = \frac{1}{\cos(\alpha_p)}\begin{bmatrix} \cos\left(\alpha_p - Nx\right) & j|p|\sin\left(Nx\right) \\ \frac{j}{|p|}\sin\left(Nx\right) & \cos\left(\alpha_p + Nx\right) \end{bmatrix} \overset{(14),(16)}{=}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos\left(k_{z,eff}^{TM} N(1+\eta)d_1\right) & jZ_{eff}^{TM}\sin\left(k_{z,eff}^{TM} N(1+\eta)d_1\right) \\ \frac{j}{Z_{eff}^{TM}}\sin\left(k_{z,eff}^{TM} N(1+\eta)d_1\right) & \cos\left(k_{z,eff}^{TM} N(1+\eta)d_1\right) \end{bmatrix} \tag{13}$$

La (13) risulterà identica alla (11) una volta che siano stati definiti i valori efficaci per l'impedenza caratteristica Z_{eff}^{TM} , la costante di propagazione $k_{z,eff}^{TM}$ e gli elementi costitutivi del tensore della permittività $\left(\varepsilon_{x,eff}, \varepsilon_{z,eff}\right)$ nel seguente modo:

$$\begin{aligned} Z_{eff}^{TM} &\simeq \frac{\eta_0}{k_0}\frac{k_{z,eff}^{TM}}{\varepsilon_{x,eff}} = \frac{\eta_0}{k_0}\sqrt{k_0{}^2 - \left(k_x{}^2 + k_y{}^2\right)/\varepsilon_{z,eff}} \;/\; \sqrt{\varepsilon_{x,eff}} \\ k_{z,eff}^{TM} &\simeq \sqrt{k_0{}^2\varepsilon_{x,eff} - \left(k_x{}^2 + k_y{}^2\right)\left(\varepsilon_{x,eff}/\varepsilon_{z,eff}\right)} \\ \varepsilon_{x,eff} &= (\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2)/(1+\eta) \\ \varepsilon_{z,eff} &= (1+\eta)\frac{\varepsilon_1\varepsilon_2}{\eta\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \end{aligned} \tag{14}$$

Vogliamo ora discutere la validità delle approssimazioni appena proposte, mostrando gli andamenti del coefficiente di trasmissione/riflessione nel caso di una struttura multistrato costituita da N celle riempite da un materiale plasmonico (che ha un andamento dispersivo alla Drude con frequenza di plasma di 2 GHz) e da un dielettrico standard $\left(\varepsilon_d = 5\right)$. I grafici mostrano i confronti tra i risultati ottenuti con le formule approssimate (14) e quelli reali, per incidenza normale $\left(\theta = 0\right)$ e rapporto tra gli spessori unitario $\left(\eta = 1\right)$.

Nei primi grafici è stata fissata la lunghezza totale del multistrato $d_T = N\left(1+\eta\right)d_1 = \lambda_0/5 \overset{f_0=1GHz}{=} 60\,cm$ e si è fatto variare il numero di celle N in modo da ottenere una diminuzione dello spessore della singola cella $\left(d_c = d_t/N\right)$.

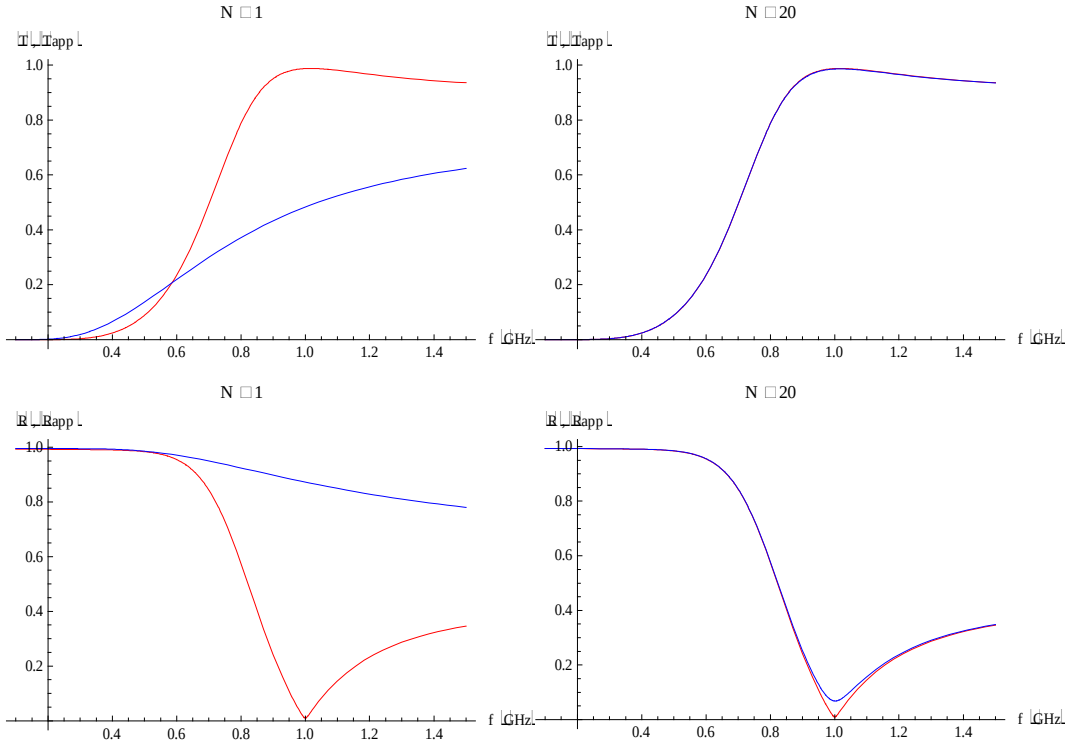


Figura 51: Modulo dei coefficienti di trasmissione e riflessione (le linee in blu rappresentano i risultati esatti e in rosso quelli approssimati).

Nei grafici successivi, invece, è stato fissato lo spessore della cella $d_c = (1+\eta)\, d_1 = \lambda_0 / 25 \overset{f_0=1GHz}{=} 12cm$ variando il numero degli strati N.

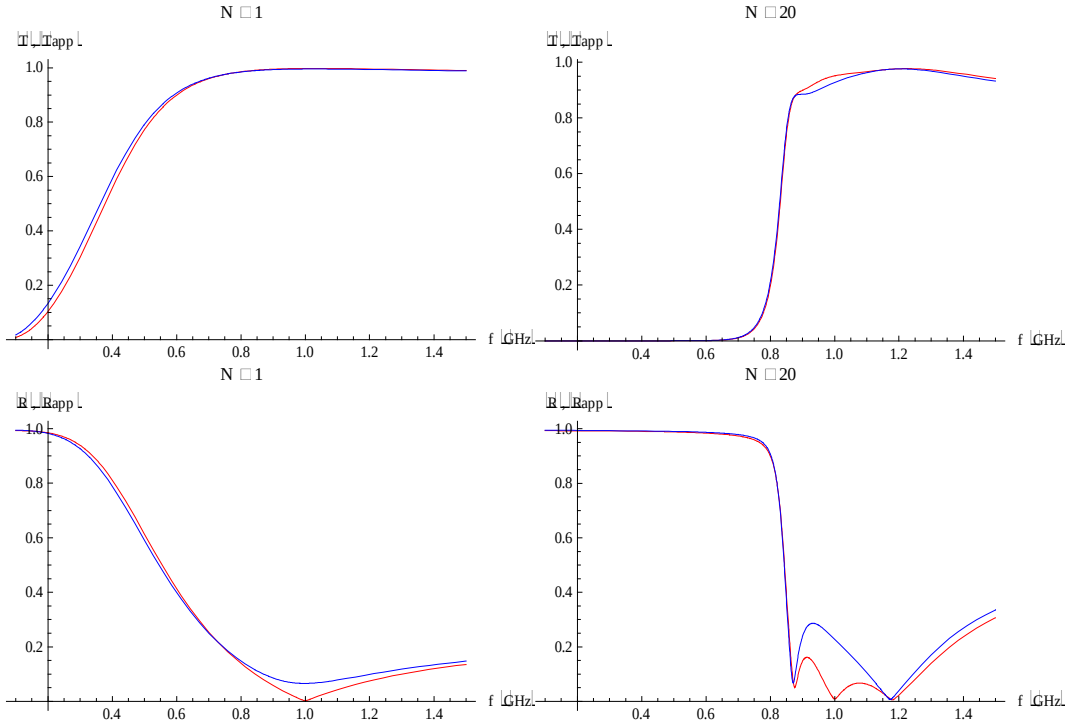


Figura 52:Modulo dei coefficienti di trasmissione e riflessione (le linee in blu rappresentano i risultati esatti e in rosso quelli approssimati).

È chiaro dall'analisi dei grafici che l'approssimazione è applicabile solo se lo spessore della cella è sufficientemente piccolo. A riprova di ciò, nelle figure sottostanti sono mostrati gli andamenti degli errori relativi mediati sull'intervallo di frequenza considerato al variare del numero di celle, sia nel caso in cui la lunghezza totale è fissa, sia nel caso opposto in cui è la lunghezza della cella ad essere costante. È da notare che nel secondo caso l'approssimazione può risultare meno accurata al crescere del numero degli strati se lo spessore non è sufficientemente piccolo $\left(d_c = \lambda_0 / 5\right)$.

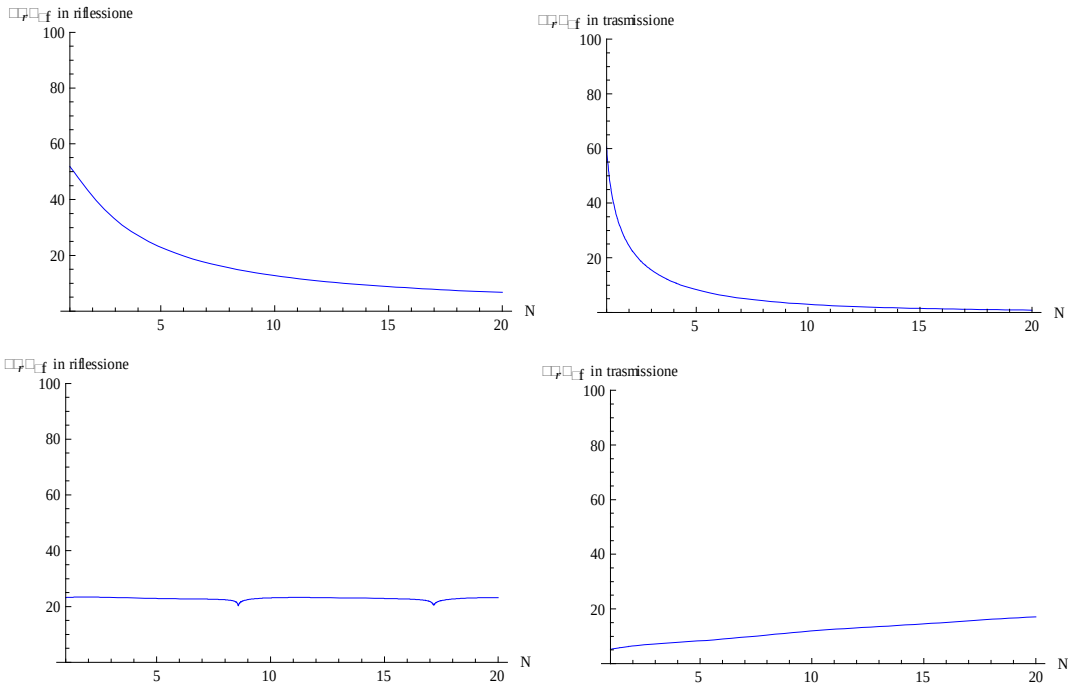


Figura 53: Errori relativi mediati in frequenza.

Vogliamo ora discutere la validità delle approssimazioni (14) in funzione dell'angolo di incidenza. Nei seguenti grafici si è assunto che lo spessore della cella sia sufficientemente piccolo $d_c = (1+\eta)\, d_1 \overset{d_1=\lambda_0/50,\eta=1}{=} \lambda_0 / 25 \overset{f_0=1GHz}{=} 12mm$ e che vi sia un numero di strati pari a $N = 10$. Inoltre, assumiamo che il primo mezzo sia un materiale dispersivo e che la sua permittività vari in frequenza con un andamento dispersivo alla Drude $\varepsilon_1(f) = 1 - \left(f_{pl} / f\right)^2$ con frequenza di plasma pari a: $f_{pl} = 2 f_0 = 2GHz$ e che il secondo sia un dielettrico standard $\varepsilon_2 = 5$.

Prima di valutare il comportamento del coefficiente di trasmissione al variare dell'angolo di incidenza, è conveniente mostrare le regioni in cui è consentita la propagazione del campo: imponendo le condizioni (5), si ottengono le bande di conduzione e di interdizione di tale campo in funzione dell'angolo di incidenza e della frequenza. Tali bande sono mostrate nella figura sottostante, dove le zone di trasmissione sono colorate in verde, mentre quelle di interdizione in bianco. Nelle altre due figure sono mostrati gli andamenti delle permittività efficaci lungo gli assi x e z $\varepsilon_{x,eff}$, $\varepsilon_{z,eff}$.

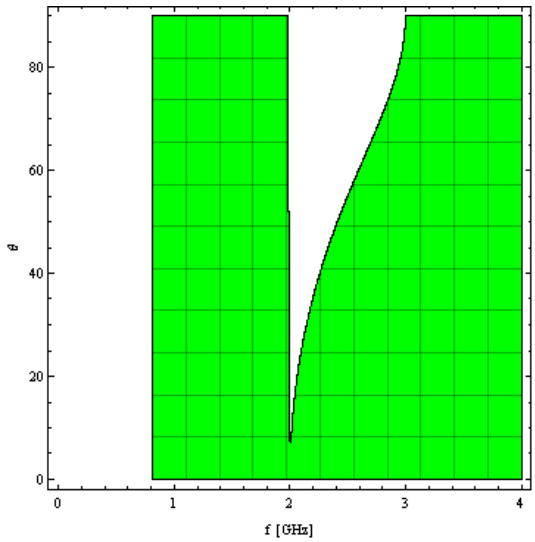


Figura 54: Bande di conduzione e di interdizione.

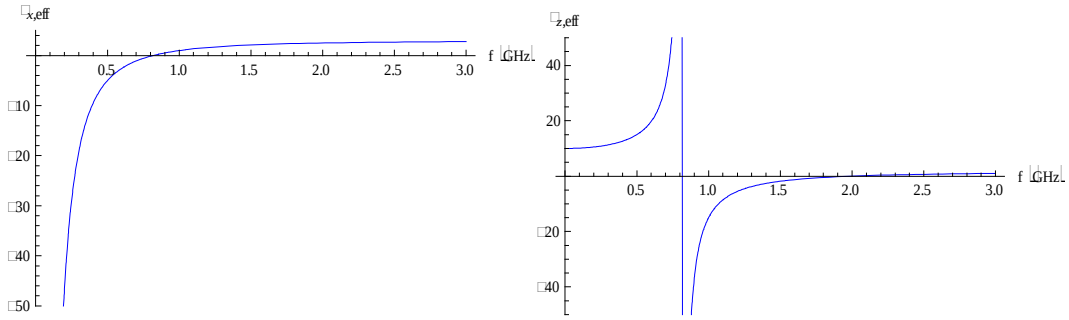


Figura 55: Permittività efficaci lungo l'asse x (figura a sinistra) e lungo l'asse z (figura a destra).

Per piccoli angoli di incidenza si ha propagazione all'interno del multistrato per frequenze maggiori di $0.8GHz$. In questo intervallo, la componente longitudinale del vettore d'onda $k_{z,eff}^{TM} \simeq \eta_0 \sqrt{\varepsilon_{x,eff}} \sqrt{1-\sin^2(\theta)/\varepsilon_{z,eff}}$ assume valori reali perché $\varepsilon_{x,eff} = (\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2)/(1+\eta) > 0$ e $\sin^2(\theta)/\varepsilon_{z,eff} < 1$. Si può notare che per frequenze maggiori della frequenza di plasma del mezzo 1 e per angoli maggiori di una certa soglia $(\theta > \theta_{\min}(f))$ si viene a creare una banda proibita. In questo intervallo di frequenze, $\varepsilon_{z,eff} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 (1+\eta)/(\eta\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ assume valori minori dell'unità e $\varepsilon_{x,eff}$ è sempre positivo. Il valore minimo dell'angolo per il quale tale banda si crea è in funzione della frequenza ed è facilmente calcolabile imponendo che $1-\sin^2(\theta)/\varepsilon_{z,eff} < 0$. Si ottiene quindi la seguente espressione e la sua approssimante valida per frequenze maggiori della frequenza di plasma:

$$\theta\left(f > f_{pl}\right) > \theta_{\min} = Arc\sin\sqrt{\frac{\varepsilon_1(f)\varepsilon_2}{\eta\varepsilon_1(f)+\varepsilon_2}(1+\eta)} \overset{\varepsilon_2 >> \eta\varepsilon_1(f)}{\simeq} \sqrt{2\frac{f-fpl}{fpl}(1+\eta)}, \quad f > f_{pl} \quad (15)$$

I limiti massimi di tale banda $\left(\text{per } \theta = \pi/2\right)$ sono determinati dalle seguenti condizioni:

1. Il limite sinistro si ha per l'annullamento della permittività efficace longitudinale $\varepsilon_{z,eff} = 0$ che è determinato da quella del mezzo 1 alla frequenza di plasma $f = f_{pl} = 2GHz$.
2. Il limite destro è determinato dal valore unitario della permittività efficace longitudinale $\varepsilon_{z,eff} = 1$ ovvero quando vale la seguente identità: $\frac{\eta}{\varepsilon_2} + \frac{1}{\varepsilon_1} = 1 + \eta$

La struttura, quindi, in tale intervallo di frequenze si comporta come un filtro spaziale.

Nei grafici seguenti sono, infine, confrontati gli andamenti del coefficiente di trasmissione calcolato in maniera esatta e approssimata. Si evince che l'approssimazione continua ad essere valida al variare dell'angolo di incidenza una volta che sia stato scelto un valore opportunamente piccolo per lo spessore degli strati (nei grafici sottostanti $d_1 = \lambda_0 / 50$).

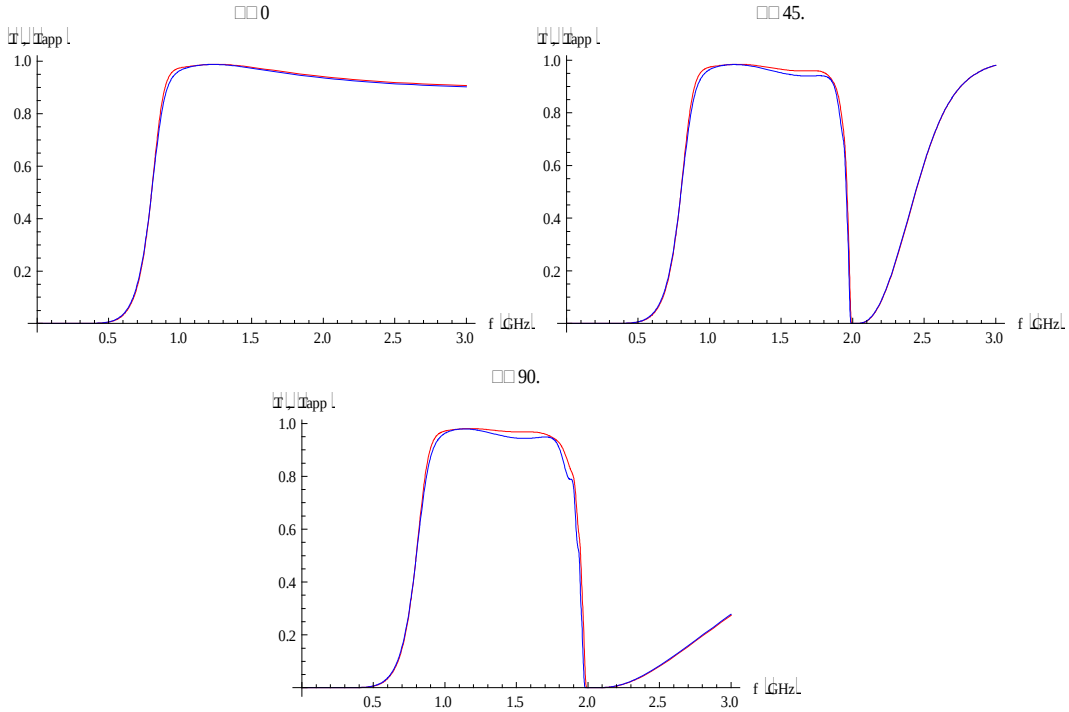


Figura 56: Coefficiente di trasmissione calcolato in modo esatto (blu) e approssimato (rosso).

1.1 *Incidenza di un'onda piana polarizzata TE*

Consideriamo ora la propagazione di un'onda piana TE. La matrice di trasmissione di un singolo strato è data dalla seguente espressione:

$$\underline{\mathbf{T}}_i = \begin{bmatrix} \cos(k_{z,i}\, d_i) & j\dfrac{\eta_0 k_0}{k_{z,i}}\sin(k_{z,i}\, d_i) \\ j\dfrac{k_{z,i}}{\eta_0 k_0}\sin(k_{z,i}\, d_i) & \cos(k_{z,i}\, d_i) \end{bmatrix} \tag{16}$$

dove la costante di propagazione lungo l'asse z è: $k_{z,i} = \sqrt{k_0{}^2\varepsilon_i - \left(k_x{}^2 + k_y{}^2\right)}$. La matrice di trasmissione della cella è data dal prodotto di quelle dei due singoli strati.

$$\underline{\mathbf{T}}_c = \begin{bmatrix} \cos(k_{z,1}\, d_1)\cos(k_{z,2}\, d_2) - \dfrac{k_{z,2}}{k_{z,1}}\sin(k_{z,1}\, d_1)\sin(k_z^2\, d_2) & j\eta_0 k_0\left(\dfrac{1}{k_{z,2}}\cos(k_{z,1}\, d_1)\sin(k_{z,2}\, d_2) + \dfrac{1}{k_{z,1}}\sin(k_{z,1}\, d_1)\cos(k_{z,2}\, d_2)\right) \\ j\dfrac{1}{\eta_0 k_0}\left(k_{z,1}\sin(k_{z,1}\, d_1)\cos(k_{z,2}\, d_2) + k_{z,2}\cos(k_{z,1}\, d_1)\sin(k_{z,2}\, d_2)\right) & \cos(k_{z,1}\, d_1)\cos(k_{z,2}\, d_2) - \dfrac{k_{z,1}}{k_{z,2}}\sin(k_{z,1}\, d_1)\sin(k_{z,2}\, d_2) \end{bmatrix} \tag{17}$$

Applicando la stessa procedura sviluppata nella sezione precedente per il caso TM, si ottiene la seguente espressione per gli autovalori e per la relazione di dispersione:

$$\begin{aligned} &\lambda_{\pm} = a \pm j\sqrt{1-a^2} = e^{\pm j\arccos(a)} = e^{\pm j\, k_{z,eff}\,(1+\eta)d_1} \\ &a = \cos(k_{z,1}d_1)\cos(k_{z,2}\eta d_1) - \frac{\left(k_{z,2}\right)^2 + \left(k_{z,1}\right)^2}{2\, k_{z,2}\, k_{z,1}}\sin(k_{z,1}d_1)\sin(k_{z,2}\eta d_1) \\ &a = \cos\left(k_{z,eff}\,(1+\eta)\, d_1\right) \end{aligned} \tag{18}$$

Gli autovettori sono dati da:

$$p = \eta_0 k_0 \frac{\sqrt{1-a^2} + j\dfrac{k_{z,2}{}^2 - k_{z,1}{}^2}{2k_{z,2}k_{z,1}}\sin(k_{z,1}d_1)\sin(k_{z,2}\eta d_1)}{\left(k_{z,2}\sin(k_{z,1}d_1)\cos(k_{z,2}\eta d_1) + k_{z,1}\cos(k_{z,1}d_1)\sin(k_{z,2}\eta d_1)\right)} = |p|e^{j\alpha_p} \tag{19}$$

La matrice di trasmissione è allora esprimibile attraverso l'equazione (9).

È utile ora esprimere le forme approssimate delle (18) e (19) nell'ipotesi di piccoli spessori $k_0\,(1+\eta)\,d_1 << 1$:

$$\lambda_{\pm} = e^{\pm j k_{z,eff}(1+\eta)d_1}$$
$$k_{z,eff} = \sqrt{k_0^2\left(\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2\eta}{1+\eta}\right)-\left(k_x^2+k_y^2\right)}+O\left(d_1^2\right), \quad d_1 \to 0 \qquad (20)$$
$$p = \eta_0 \frac{k_0}{k_{z,eff}} + O\left(d_1^2\right), \quad d_1 \to 0$$

In tale ipotesi, la matrice di trasmissione assume dunque la seguente espressione approssimata:

$$\underline{\mathbf{T}}_N = \begin{bmatrix} \cos\left(k_{z,eff} N (1+\eta) d_1\right) & j\frac{\eta_0 k_0}{k_{z,eff}}\sin\left(k_{z,eff} N (1+\eta) d_1\right) \\ j\frac{k_{z,eff}}{\eta_0 k_0}\sin\left(k_{z,eff} N (1+\eta) d_1\right) & \cos\left(k_{z,eff} N (1+\eta) d_1\right) \end{bmatrix} + O\left(N d_1^2\right), \quad d_1 \to 0 \quad (21)$$

Considerando un mezzo birifrangente descritto dalla (10) nel quale il valore della permittività relativa sull'asse y sia espresso da $\varepsilon_y^{eff} = (\varepsilon_1+\varepsilon_2\eta)/(1+\eta)$, la matrice di trasmissione di tale mezzo per incidenza TE $\underline{\mathbf{T}}_{ani}^{TE}$ risulterà uguale a quella approssimata del multistrato definita dalla (21):

$$\underline{\mathbf{T}}_{ani}^{TE} = \begin{bmatrix} \cos\left(k_{z,ani}^{TE} N (1+\eta) d_1\right) & j\frac{\eta_0 k_0}{k_{z,ani}^{TE}}\sin\left(k_{z,ani}^{TE} N (1+\eta) d_1\right) \\ j\frac{k_{z,ani}^{TE}}{\eta_0 k_0}\sin\left(k_{z,ani}^{TE} N (1+\eta) d_1\right) & \cos\left(k_{z,ani}^{TE} N (1+\eta) d_1\right) \end{bmatrix} \qquad (22)$$
$$k_{z,ani}^{TE} = \sqrt{k_0^2\varepsilon_y - \left(k_x^2+k_y^2\right)}$$

Dall'analisi svolta per incidenza TE e TM possiamo definire le relazioni costitutive della struttura stratificata; nell'ipotesi che lo spessore della cella sia sufficientemente minore della lunghezza d'onda, il multistrato si comporta come un mezzo birifrangente con asse straordinario lungo l'asse z e ordinario sugli altri assi:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{eff} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y^{eff} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z^{eff} \end{bmatrix} \quad \mu = \mu_0$$

$$\varepsilon_x^{eff} = \varepsilon_y^{eff} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \eta}{1+\eta} \tag{23}$$

$$\varepsilon_z^{eff} = \frac{1+\eta}{\eta\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \varepsilon_1 \varepsilon_2$$

Infine, è utile considerare il caso particolare di incidenza normale di un'onda TE e TM; il campo che si propaga all'interno del multistrato percepirà la struttura come un mezzo isotropo con costante dielettrica relativa pari a ε_x^{eff} . Questa condizione si verifica nel caso dei nano-filtri, che tratteremo nel capitolo 4; si ottiene allora che questa struttura può essere utilizzata come uno strato isolante caratterizzato da una permittività nulla alla frequenza di lavoro. Quest'ultima condizione può essere ottenuta semplicemente accoppiando due mezzi di dimensioni uguali che sono tra loro complementari dal punto di vista elettrico (permittività di segno opposto e valore assoluto uguale) o, più in generale, se:

$$\frac{\varepsilon_1(f_0) + \varepsilon_2 \eta}{1+\eta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_1(f_0) = -\varepsilon_2 \eta \tag{24}$$

2. STRUTTURA STRATIFICATA A PILA

2.1 Incidenza di un'onda piana polarizzata TM

Si consideri una struttura periodica lungo l'asse x di lunghezza infinita e di spessore finito. La cella base è costituita da due strati distinti di spessore (h_1, h_2) e permittività ($\varepsilon_1, \varepsilon_2$), come mostrato in Figura 57. Si vuole studiare l'incidenza di un'onda piana nel piano $\{x, z\}$ e, in particolar modo, determinare le condizioni di propagazione o di interdizione lungo l'asse z. Consideriamo il caso di un'onda piana TM $\underline{\mathbf{E}} = \{E_x, 0, E_z\}$ $\underline{\mathbf{H}} = \{0, H_y, 0\}$.

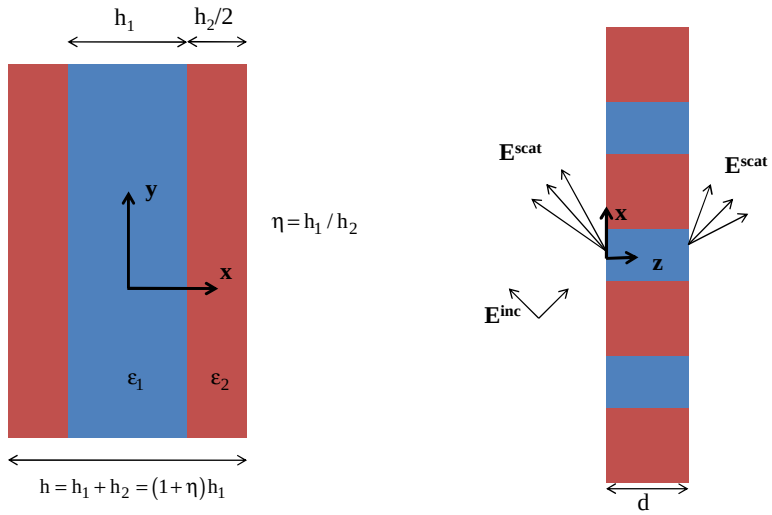


Figura 57: Struttura stratificata a pila.

La trattazione che segue utilizza due differenti risoluzioni del problema elettromagnetico cosi come sono state proposte in [3] e [4].

Supponiamo per semplicità che la larghezza degli strati lungo l'asse y sia grande rispetto alla lunghezza d'onda: si può assumere che i campi non varino spazialmente lungo y $\left(\partial / \partial_y = 0\right)$.

Le equazioni di Maxwell nel caso di propagazione di un modo TM e di eccitazione di tipo monocromatica $e^{-j\omega t}$ sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \partial_x H_y &= j\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)E_z \\ \partial_x E_z &= -\frac{k_0{}^2\varepsilon(x) + \partial_z^2}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)} H_y \\ E_x &= -\frac{1}{j\omega\varepsilon_0\varepsilon(x)}\partial_z H_y \end{aligned} \tag{25}$$

Si ottiene l'equazione delle onde una volta che sia stata fatta la sostituzione $H_y = \sqrt{\varepsilon(x)}F(x,z)$:

$$\nabla^2 F + k^2(x)F = 0$$
$$k^2(x) = k_0{}^2\varepsilon(x) - \frac{3}{4}\left(\frac{\varepsilon'(x)}{\varepsilon(x)}\right)^2 + \frac{\varepsilon''(x)}{2\varepsilon(x)} \qquad (26)$$

dove $\varepsilon(x)$ è la permittività relativa del reticolo. L'equazione differenziale (26) è l'equazione di Hill. Poiché $\varepsilon(x)$ è una funzione periodica di periodo h, possiamo espandere in serie di Fourier $k^2(x)$:

$$k^2(x) = k_0{}^2\sum_{-\infty}^{+\infty} p_n e^{2\pi jn\frac{x}{h}} \qquad (27)$$

Possiamo fattorizzare la funzione $F(x,z)$ ed espandere anch'essa in serie di Fourier:

$$F(x,z) = \sum_n q_n(z)e^{jk_{xn}x} \qquad (28)$$

dove k_{xn} è il vettore d'onda lungo l'asse x che si deve conservare in tutto lo spazio (all'interno e all'esterno del reticolo) secondo la condizione di Floquet:

$$k_{xn} = k_{x0} + 2n\pi / h, \quad n = ...-2,-1,0,1,2.... \qquad (29)$$

dove k_{x0} è la componente del vettore d'onda lungo l'asse x di un ipotetico campo incidente $\left(\text{per esempio } k_{x0} = k_0 \sin\theta_{in}\right)$. Inserendo la (28) nella (27), otteniamo un sistema di equazioni differenziali accoppiate:

$$\frac{d^2}{dz^2}\mathbf{q}(z) + \underline{\mathbf{P}}\bullet\mathbf{q}(z) = 0 \qquad (30)$$

dove $\mathbf{q}(z)$ è un vettore di dimensione infinita i cui termini sono $q_n(z)$ e $\underline{\mathbf{P}}$ è una matrice anch'essa di dimensione infinita i cui elementi sono definiti da:

$$P_{nl} = k_0{}^2 p_{n-l} - k_{xn}{}^2\delta_{nl}$$

e δ_{nl} è la funzione delta di Kronecker. Il sistema può essere risolto assumendo una soluzione del tipo:

$$\mathbf{q}(z) = \mathbf{c}\, e^{jk_z z} \tag{31}$$

dove k_z è la costante di propagazione lungo z all'interno del reticolo, e **c** è un vettore costante (indipendente da z). Sostituendo la (31) nella (30) otteniamo un sistema algebrico omogeneo:

$$\left(\underline{\mathbf{P}} + k_{zm}{}^2 \underline{\mathbf{1}}\right) \bullet \mathbf{c}_m = 0 \tag{32}$$

dove $\underline{\mathbf{1}}$ è la matrice unitaria. L'imposizione dell'annullamento del determinante della matrice $\det\left(\underline{\mathbf{P}} + k_z{}^2 \underline{\mathbf{1}}\right) = 0$ determina la conoscenza degli autovalori k_{zm} e degli autovettori $\mathbf{c}_m$ (con elementi c_{nm}). Allora, la funzione $F(x,z)$ può essere riscritta nel seguente modo:

$$F(x,z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} q_n(z) e^{-jk_{xn}x} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-jk_{xn}x} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(c_{nm}^{-} e^{jk_{zm}z} + c_{nm}^{+} e^{-jk_{zm}z}\right) \tag{33}$$

Questa metodologia per la risoluzione del problema è esatta ed è applicabile sempre per qualsiasi funzione periodica $\varepsilon(x)$; inoltre, consente la determinazione della distribuzione del campo all'interno del reticolo. Il principale svantaggio dell'utilizzo di tale approccio è il trattamento di matrici di dimensione indefinite che richiede, nella pratica, il troncamento delle rappresentazioni in serie a una somma di 2N+1 termini.

Un approccio diverso [4] è quello di considerare separatamente i campi nei diversi strati e, in particolare, suddividere la singola cella in tre zone: $I_1 : x \in \left[-\frac{h}{2}, -\frac{h}{2(1+\eta)}\right]$ $I_2 : x \in \left[-\frac{h}{2(1+\eta)}, \frac{h}{2(1+\eta)}\right]$ $I_3 : x \in \left[\frac{h}{2(1+\eta)}, \frac{h}{2}\right]$. In questo modo è possibile ottenere in forma chiusa ed esatta la relazione di dispersione che determina il valore della costante di propagazione lungo z k_z in funzione dei parametri noti del problema $\left(k_{xn}, h, \eta, \varepsilon_1, \varepsilon_2, k_0\right)$.

Nello strato i-esimo la permittività del mezzo è costante (è indipendente da x). Inoltre, per il teorema di Floquet, agli estremi della cella deve valere:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}}(h/2, z) &= \underline{\mathbf{E}}(-h/2, z) e^{-jk_{xn}h} \\ \underline{\mathbf{H}}(h/2, z) &= \underline{\mathbf{H}}(-h/2, z) e^{-jk_{xn}h} \end{aligned} \tag{34}$$

Imponendo una variazione lungo z del tipo $e^{\pm jk_z z}$ all'interno dell'i-esimo strato, il campo magnetico soddisfa l'equazione di Helmholtz:

$$\begin{aligned} &\partial_x{}^2 H_y + \left(k_0{}^2\varepsilon_i - k_z{}^2\right) H_y = 0 \quad i = 1,2 \\ &\underline{\mathbf{E}} = \frac{\partial_x H_y \hat{\mathbf{z}} - \partial_z H_y \hat{\mathbf{x}}}{j\omega\varepsilon_i} \end{aligned} \tag{35}$$

Il campo magnetico assume dunque la seguente distribuzione lungo l'asse x:

$$\begin{aligned} &H_{yi} = H_i^+ e^{-jk_{xi}x} + H_i^- e^{jk_{xi}x} \quad E_{zi} = -jk_{xi}\left(H_i^+ e^{-jk_{xi}x} - H_i^- e^{jk_{xi}x}\right) \quad i = 1,2,3 \\ &k_{xi} = \sqrt{k_0{}^2\varepsilon_2 - k_z{}^2}, \quad x \in I_1\, e\, I_3 \quad k_{xi} = \sqrt{k_0{}^2\varepsilon_1 - k_z{}^2}, \quad x \in I_2 \end{aligned} \tag{36}$$

Imponendo la continuità delle componenti tangenziali del campo elettrico e magnetico:

$$\begin{aligned} &H_{y1}\left(-\frac{h}{2(1+\eta)}\right) = H_{y2}\left(-\frac{h}{2(1+\eta)}\right) \quad E_{z1}\left(-\frac{h}{2(1+\eta)}\right) = E_{z2}\left(-\frac{h}{2(1+\eta)}\right) \\ &H_{y2}\left(\frac{h}{2(1+\eta)}\right) = H_{y3}\left(\frac{h}{2(1+\eta)}\right) \quad E_{z2}\left(\frac{h}{2(1+\eta)}\right) = E_{z3}\left(\frac{h}{2(1+\eta)}\right) \end{aligned}$$

e imponendo la condizione (34): $H_{y1}(-h/2) = H_{y3}(h/2)e^{jk_{xn}h}$ e $E_{z1}(-h/2) = E_{z3}(h/2)e^{jk_{xn}h}$ otteniamo il seguente sistema omogeneo:

$$\underline{\mathbf{M}} \bullet \begin{Bmatrix} H_{y3}(h/2) \\ E_{y3}(h/2) \end{Bmatrix} = \left(\underline{\mathbf{T}} - e^{jk_{xn}h}\underline{\mathbf{1}}\right) \bullet \begin{Bmatrix} H_{y3}(h/2) \\ E_{y3}(h/2) \end{Bmatrix} = 0 \tag{37}$$

Annullando il determinante della matrice $\underline{\mathbf{M}}$, otteniamo la seguente relazione di dispersione.

$$\cos(k_{xn}h) = \cos(k_{x1}h/(1+\eta))\cos(k_{x2}h\eta/(1+\eta)) - \frac{(\varepsilon_1 k_{x2})^2 + (\varepsilon_2 k_{x1})^2}{2\varepsilon_1 k_{x2}\,\varepsilon_2 k_{x1}}\sin(k_{x1}h/(1+\eta))\sin(k_{x2}h\eta/(1+\eta)) \tag{38}$$

Per un fissato valore di k_{xn} definito dalla (29), abbiamo un numero infinito e discreto di valori di $k_z = k_{zm}$. Una volta determinata la costante di propagazione lungo l'asse z k_{zm} del campo all'interno del reticolo, bisogna determinare la distribuzione trasversale del campo $H_y = H_y(x) \quad E_x = E_x(x)$ alfine di ottenere la frazione di campo trasmessa e diffusa.

Possiamo quindi utilizzare la prima trattazione per esprimere il campo elettrico e magnetico utilizzando la rappresentazione (33):

$$
\begin{aligned}
E_x(x,z) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(g_m^- e^{jk_{zm}z} + g_m^+ e^{-jk_{zm}z}\right)V_{nm}e^{-jk_{xn}x} \\
H_y(x,z) &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(g_m^- e^{jk_{zm}z} + g_m^+ e^{-jk_{zm}z}\right)I_{nm}e^{-jk_{xn}x}
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Questa è una rappresentazione modale dei campi in termine dei modi che si propagano nella direzione z: ogni termine m-esimo ha un'ampiezza $g_m^{\pm}$ che deve essere determinata. Noto il valore di k_{xn}, k_{zm} è ricavabile dalla risoluzione della relazione di dispersione e I_{nm} sono gli autovettori del sistema omogeneo (32) $\left(I_{mn} = c_{nm}\right)$. I valori di V_{nm} sono determinabili imponendo che le (39) soddisfino le equazioni di Maxwell:

$$
\begin{aligned}
&E_x(x,z) = -\frac{\partial_z H_y(x,z)}{j\omega\varepsilon(x)} \\
&\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} j\omega\varepsilon(x)\left(g_m^- e^{jk_{zm}z} + g_m^+ e^{-jk_{zm}z}\right)V_{nm} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} jk_{zm}\left(-g_m^- e^{jk_{zm}z} + g_m^+ e^{-jk_{zm}z}\right)I_{nm} \\
&V_{nm} = \sum_r Z_{m,n-r} I_{mr}
\end{aligned}
\tag{40}
$$

Ipotizziamo per semplicità che il reticolo sia immerso nel vuoto e di voler risolvere il campo prodotto da un'onda piana che incida con un angolo θ_{in}. I campi a sinistra $\left(z<0\right)$ e a destra $\left(z>d\right)$ del reticolo sono rappresentabili nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
E_x^{z<0} &= e^{-jk_0\sin\theta_{in}x - jk_0\cos\theta_{in}z} + \sum_{-\infty}^{+\infty} s_n e^{-jk_{xn}x + j\sqrt{k_0^2 - k_{xn}^2}\,z} \\
H_y^{z<0} &= \frac{\eta_0 k_0}{\cos\theta_{in}} e^{-jk_0\sin\theta_{in}x - jk_0\cos\theta_{in}z} - \sum_{-\infty}^{+\infty} s_n \frac{\eta_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_{xn}^2}} e^{-jk_{xn}x + j\sqrt{k_0^2 - k_{xn}^2}\,z} \\
E_x^{z>d} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} t_n e^{-jk_{xn}x - j\sqrt{k_0^2 - k_{xn}^2}\,z} \\
H_y^{z>d} &= \sum_{-\infty}^{+\infty} t_n \frac{\eta_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_{xn}^2}} e^{-jk_{xn}x - j\sqrt{k_0^2 - k_{xn}^2}\,z}
\end{aligned}
\tag{41}
$$

Imponendo la continuità delle componenti tangenziali dei campi alle due interfacce $\left(z=0,d\right)$, possiamo determinare le ampiezze dei modi dei campi nelle tre regioni $\left(g_m^{\pm},\quad s_n,\quad t_n\right)$.

$$
\begin{aligned}
&\delta_{n0} + s_n = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(g_m^- + g_m^+ \right) V_{nm} \\
&\frac{\eta_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_{xn}^2}} \left(\delta_{n0} - s_n \right) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(g_m^+ - g_m^- \right) I_{nm} \\
&t_n e^{-j\sqrt{k_0^2 - k_{xn}^2} h} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(g_m^- e^{jk_{zm}h} + g_m^+ e^{-jk_{zm}h} \right) V_{nm} \\
&t_n \frac{\eta_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_{xn}^2}} e^{-j\sqrt{k_0^2 - k_{xn}^2} h} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \left(g_m^+ e^{-jk_{zm}h} - g_m^- e^{jk_{zm}h} \right) I_{nm}
\end{aligned}
\tag{42}
$$

Moltiplicando la terza equazione della (42) per $\frac{\eta_0 k_0}{\sqrt{k_0^2 - k_{xn}^2}}$ e sottraendola con l'ultima della (42) si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{g}^- = e^{j\underline{\mathbf{K}}h} \bullet \underline{\mathbf{R}}_0 \bullet e^{j\underline{\mathbf{K}}h} \bullet \mathbf{g}^+ \\
&\underline{\mathbf{R}}_0 = \left(\underline{\mathbf{I}} + \underline{\mathbf{Y}}_0 \bullet \underline{\mathbf{V}} \right)^{-1} \bullet \left(\underline{\mathbf{I}} - \underline{\mathbf{Y}}_0 \bullet \underline{\mathbf{V}} \right) \\
&\left(\underline{\mathbf{I}} \right)_{mn} = I_{mn} \quad \left(\underline{\mathbf{V}} \right)_{mn} = V_{mn} \quad \left(\underline{\mathbf{Y}}_0 \right)_{mn} = \frac{k_0 \cos\theta_{in}}{\sqrt{k_0^2 - k_{xn}^2}} \delta_{mn} \quad \left(e^{-j\underline{\mathbf{K}}h} \right)_{mn} = e^{-jk_m h} \delta_{mn}
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Moltiplicando la prima equazione della (42) per $\frac{\eta_0}{\sqrt{k_0^2 - k_{xn}^2}}$ e sottraendola con la seconda della (42) si ottiene:

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{g}^+ = \underline{\mathbf{S}}^{-1} \bullet \underline{\mathbf{T}}_0 \bullet \mathbf{e} \\
&\left(\mathbf{e} \right)_n = 1 \\
&\underline{\mathbf{S}} = \underline{\mathbf{1}} - \underline{\mathbf{R}}_0 \bullet e^{-j\underline{\mathbf{K}}h} \bullet \underline{\mathbf{R}}_0 \bullet e^{-j\underline{\mathbf{K}}h} \\
&\underline{\mathbf{T}}_0 = 2 \left(\underline{\mathbf{I}} + \underline{\mathbf{Y}}_0 \bullet \underline{\mathbf{V}} \right)^{-1} \bullet \underline{\mathbf{Y}}_0
\end{aligned}
\tag{44}
$$

Infine le ampiezze dei campi diffusi per $z < 0$ $\left(s_n \right)$ e le ampiezze dei campi diffusi per $z > d$ sono calcolabili nel seguente modo:

$$
\begin{aligned}
&\underline{\mathbf{s}} = \underline{\mathbf{T}}_0^{-1} \bullet \left(e^{j\underline{\mathbf{K}}h} \bullet \underline{\mathbf{R}}_0 \bullet e^{j\underline{\mathbf{K}}h} \bullet \mathbf{g}^+ - \underline{\mathbf{R}}_0 \right) \bullet \underline{\mathbf{S}}^{-1} \bullet \underline{\mathbf{T}}_0 \\
&\underline{\mathbf{a}} = \underline{\mathbf{V}} \bullet \left(\underline{\mathbf{1}} + \underline{\mathbf{R}}_0 \right) \bullet e^{j\underline{\mathbf{K}}h} \bullet \underline{\mathbf{S}}^{-1} \bullet \underline{\mathbf{T}}_0
\end{aligned}
\tag{45}
$$

2.2 Approssimazione di ordine 0 polarizzazione TM

Consideriamo ora la situazione in cui lo spessore della cella h sia molto minore della lunghezza d'onda. In tale circostanza risulta che solamente l'ordine zero $(n=0)$ può eccitarsi all'interno del reticolo: il vettore d'onda lungo x dato dalla (29) deve essere minore di k_0 affinché il campo diffuso si possa propagare nel semispazio $z<0$ e nel semispazio $z>d$ (ipotizzando che tali semispazi siano riempiti con il vuoto per semplicità):

$$\begin{aligned} & k_{xn} = k_0 \sin\theta_{in} + 2\pi\frac{n}{h} \quad n = \ldots -2,-1,0,1,2\ldots. \\ & |k_{xn}| < k_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\sin\theta_{in} + \frac{n\lambda}{h}\right| < 1 \end{aligned} \tag{46}$$

È chiaro che nell'ipotesi di piccoli spessori $(\lambda / h >> 1)$ la condizione (46) è soddisfatta solo per $n=0$. Questo comporta che $k_{xn} = k_{x0} = k_0 \sin\theta_{in}$. In tali ipotesi la relazione di dispersione (38) che determina la componente longitudinale del vettore d'onda k_z all'interno del reticolo è approssimabile nel seguente modo:

$$\begin{aligned} & k_{xn}{}^2 \left(\frac{\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2}{1+\eta}\right)^{-1} + k_z{}^2 \left(\varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{1+\eta}{\varepsilon_2 + \eta\varepsilon_1}\right)^{-1} = k_0{}^2 \\ & k_z{}^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2(1+\eta)\frac{k_0{}^2(\varepsilon_1+\eta\varepsilon_2) - (1+\eta)k_{xn}{}^2}{(\varepsilon_2+\eta\varepsilon_1)(\varepsilon_1+\eta\varepsilon_2)} \end{aligned} \tag{47}$$

La prima equazione della (47) può essere considerata come l'equazione di dispersione di un mezzo birifrangente per il quale l'asse straordinario è l'asse x:

$$\begin{aligned} & k_x{}^2\varepsilon_z{}^{-1} + k_z{}^2\varepsilon_x{}^{-1} = k_0{}^2 \\ & \varepsilon_y = \varepsilon_z \end{aligned} \tag{48}$$

In questo modo possiamo assumere che le permittività relative sono date dalle seguenti espressioni:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_{z,y} = \frac{\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2}{1+\eta} \quad \varepsilon_x = \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{1+\eta}{\varepsilon_2+\eta\varepsilon_1} \\ & k_z{}^2 = k_0{}^2\varepsilon_x\left(1 - \varepsilon_z{}^{-1}(k_x / k_0)^2\right) \end{aligned} \tag{49}$$

Assumiamo che il mezzo 1 presenti un andamento dispersivo della permittività relativa di tipo plasmonico $\varepsilon_1 = \varepsilon_\infty - \dfrac{f_{pl}^{\ 2}}{f\,(f - j\delta)}$ e che il mezzo 2 sia un dielettrico di tipo convenzionale $(\varepsilon_2 \geq 1)$: si ottiene allora che l'accoppiamento di questi due mezzi produca un andamento efficace della permittività lungo gli assi y e z di tipo plasmonico e lungo l'asse x di tipo Lorenziano:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_z = \varepsilon_\infty^{'} - \frac{f_{pl}^{'\,2}}{f\,(f - j\delta)} \quad \left(\varepsilon_\infty^{'} = \frac{\varepsilon_\infty + \eta\varepsilon_2}{1+\eta} \quad f_{pl}^{'} = \frac{f_{pl}}{\sqrt{1+\eta}} \right) \\ &\varepsilon_x = \varepsilon_\infty^{''} - \frac{\left(\varepsilon_s - \varepsilon_\infty^{''}\right) f_{ris}^{\ 2}}{f^2 - f_{ris}^{\ 2} - j\delta\, f} \quad \left(\varepsilon_\infty^{''} = \frac{\varepsilon_\infty \varepsilon_2 (1+\eta)}{(\varepsilon_2 + \eta\varepsilon_\infty)} \quad \varepsilon_s = \varepsilon_2 \frac{(1+\eta)}{\eta} \quad f_{ris} = \sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon_2 + \eta\varepsilon_\infty}}\, f_{pl} \right) \end{aligned} \tag{50}$$

Possiamo ora fare delle considerazioni riguardo particolari valori che le suddette permittività possono assumere.

Alla frequenza $f = f_{0x} = \sqrt{\dfrac{f_{pl}^{\ 2}}{\varepsilon_\infty} + \delta^2}$ la parte reale della permittività del mezzo 1 si annulla e, così, anche quella della permittività efficace lungo l'asse x $\left(\mathrm{Re}\{\varepsilon_1(f_{0x})\} = 0 \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\{\varepsilon_x(f_{0x})\} \propto \mathrm{Re}\{\varepsilon_1(f_{0x})\} = 0\right)$; allora, la costante di propagazione lungo z assume valori molto piccoli se si utilizza un mezzo con basse perdite $k_z = \beta + j\alpha = \sqrt{\mathrm{Im}\{\varepsilon_x\}/2}(1+j)\sqrt{1 - \varepsilon_z^{-1}\left(k_x / k_0\right)^2}$. A questa frequenza il reticolo non determina alcuno sfasamento per l'onda che si propaga al suo interno.

Alla frequenza di risonanza $f = f_{ris}$ abbiamo che la permittività lungo l'asse x ε_x assume valori molto grandi e, nel caso limite di assenza di perdite $(\delta = 0)$, tende ad infinito con conseguente interdizione del campo al suo interno.

La parte reale della permittività lungo l'asse z $\mathrm{Re}\{\varepsilon_z\}$ si annulla ad una frequenza proporzionale alla frequenza di plasma del mezzo 1 $\left(f = f_{0z} = \sqrt{\dfrac{f_{pl}^{'\,2}}{\varepsilon_\infty^{'}} - \delta^2} = \sqrt{\dfrac{f_{pl}^{\ 2}}{\varepsilon_\infty + \eta\varepsilon_2} - \delta^2} \;\Rightarrow\; \mathrm{Re}\{\varepsilon_z(f_{z0})\} = 0 \right)$ o, semplicemente, per $\mathrm{Re}\{\varepsilon_1(f_{0z})\} = -\eta\varepsilon_2$ e, nel caso ideale di assenza di perdite $(\delta = 0)$, a tale frequenza la

relazione di dispersione approssimata (48) è indeterminata (tranne che nel caso di incidenza normale $k_x = k_0 \sin\theta_{in} \overset{\theta_{in}=0}{=} 0$).

Dopo aver affrontato questi casi particolari, conviene discutere ora le bande di interdizione e di propagazione che tale struttura può determinare. In particolare, la propagazione all'interno del reticolo è proibita se la parte reale del quadrato della costante di propagazione lungo z è negativa $\mathrm{Re}\left\{k_z^{\,2}\right\} = \mathrm{Re}\left\{k_0^{\,2}\varepsilon_x\left(1-\varepsilon_z^{\,-1}\sin^2\theta_{in}\right)\right\} < 0$ (nell'ipotesi di piccole perdite). Si ottengono così due bande Δf_z e Δf_x, che sono determinate imponendo rispettivamente le condizioni $\mathrm{Re}\left\{1-\varepsilon_z^{\,-1}\sin^2\theta_{in}\right\} < 0$ e $\mathrm{Re}\{\varepsilon_x\} < 0$:

$$f \in \Delta f_z = \left(f_{0z}, \sqrt{f_{0z}^{\,2}\frac{\varepsilon_\infty}{\varepsilon_\infty - \sin^2\theta_{in}} + \delta^2 \frac{\sin^2\theta_{in}}{\varepsilon_\infty - \sin^2\theta_{in}}} \right] = \left(\sqrt{\frac{f_{pl}^{\,2}}{\varepsilon_\infty + \eta\varepsilon_2} + \delta^2}, \sqrt{\frac{f_{pl}^{\,2}}{\varepsilon_\infty + \eta\varepsilon_2 - \sin^2\theta_{in}} + \delta^2} \right] \quad (51)$$

$$f \in \Delta f_x = [\, f_{ris}, f_{0x} \,] = \left[\sqrt{\frac{\eta}{\varepsilon_2 + \eta\varepsilon_\infty}}\, f_{pl}, \sqrt{\frac{f_{pl}^{\,2}}{\varepsilon_\infty} + \delta^2} \right]$$

Nel caso in cui il rapporto tra gli spessori sia di poco maggiore dell'unità $\left(\eta = d_2 / d_1 > \dfrac{\varepsilon_\infty}{\varepsilon_\infty - \sin^2\theta_{in}} \right)$ le due bande non presentano intersezioni e sono, invece, due bande di interdizione. Al contrario, per valori minori di tale quantità si ha un'intersezione tra le due bande che crea una banda di conduzione. Per valori molto piccoli di η la banda Δf_z tende a ridursi, mentre la banda Δf_x tende a crescere – rappresentando quest'ultima l'unica banda proibita. Ciò è facilmente giustificabile se ricordiamo che al diminuire η cresce il contributo medio del materiale plasmonico che a frequenze minori di $\sqrt{f_{pl}^{\,2}/\varepsilon_\infty + \delta^2}$ presenta valori negativi della permittività.

Vogliamo ora discutere la larghezza della banda Δf_z in funzione delle caratteristiche dei materiali e dell'angolo di incidenza θ_{in}, nell'ipotesi che $\eta > \dfrac{\varepsilon_\infty}{\varepsilon_\infty - \sin^2\theta_{in}}$ (ricordiamo che le due bande sono distinte). Per prima cosa, possiamo notare che per incidenza normale $(\theta_{in} = 0)$ tale banda non esiste più; inoltre, per angoli molto piccoli tale banda è concentrata

nell'intorno destro della frequenza in cui la permittività efficace lungo l'asse z si annulla $\left(f = f_{0z}\right)$: a tale frequenza la costante di propagazione k_z assume un valore indeterminato se l'angolo di incidenza non è sufficientemente piccolo. Esiste quindi un angolo massimo $\theta_{\max}$ entro il quale si ha la propagazione del campo.

Imponendo che la parte reale dell'argomento della radice della costante di propagazione sia maggiore di zero $\mathrm{Re}\left\{1-\varepsilon_z^{-1}\sin^2\theta_{in}\right\}>0$, possiamo determinare, in funzione della frequenza e nell'ipotesi di piccole perdite, l'andamento dell'angolo massimo $\theta_{\max}$:

$$\theta \le \theta_{\max} \overset{\mathrm{Re}\{\varepsilon_z\}>>\mathrm{Im}\{\varepsilon_z\}}{=} \arcsin\left(\frac{|\varepsilon_z|}{\sqrt{\mathrm{Re}\{\varepsilon_z\}}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{\left(f^2-f_{0z}{}^2\right)^2+f^2\delta^2}{f^2\left(f^2-f_{0z}{}^2+\delta^2\right)}\frac{\varepsilon_\infty+\eta\varepsilon_2}{\eta+1}}\right) \quad (52)$$

Tale valore è minimo alla frequenza $f=\sqrt{f_{0z}{}^2+f_{0z}\delta}$ ($\theta_c = Min\{\theta_{\max}\} = \arcsin\left(\sqrt{\delta\frac{2f_{0z}+\delta}{\left(f_{0z}+\delta\right)^2}\frac{\varepsilon_\infty+\eta\varepsilon_2}{\eta+1}}\right)$) e cresce all'aumentare della frequenza fino a raggiungere il suo valore massimo $\left(\theta=\pi/2\right)$ per $f=\sqrt{\frac{f_{pl}{}^2}{\left(\varepsilon_\infty-1\right)+\eta\left(\varepsilon_2-1\right)}+\delta^2}$.

Possiamo in conclusione affermare che nell'intorno di $f_{0z}=f_{pl}/\sqrt{\varepsilon_\infty+\eta\varepsilon_2}$ il reticolo si comporta da filtro passa-banda spaziale con banda angolare ($\Delta\theta=\left[0,\theta_c\right]$) come mostrato in Figura 58. Tale banda cresce all'aumentare delle perdite del mezzo 1 (nell'ipotesi ideale di mezzo privo di perdite essa si riduce ad un punto $\theta=0$).

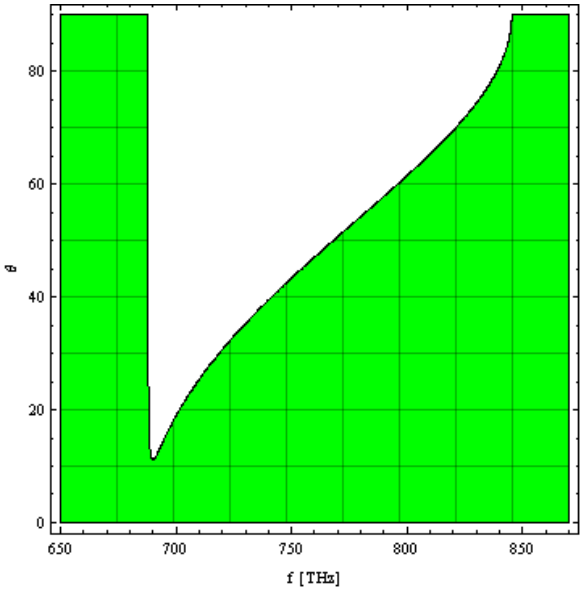


Figura 58: Bande di conduzione (in verde) e di interdizione (in bianco) in funzione dell'angolo di incidenza e della frequenza.

Inoltre, il reticolo si comporta da filtro stoppa banda in frequenza con due bande distinte quando $\theta > \theta_c$ e $\eta > \varepsilon_\infty / \left(\varepsilon_\infty - \sin^2 \theta_{in}\right)$ com'è mostrato nella Figura 59.

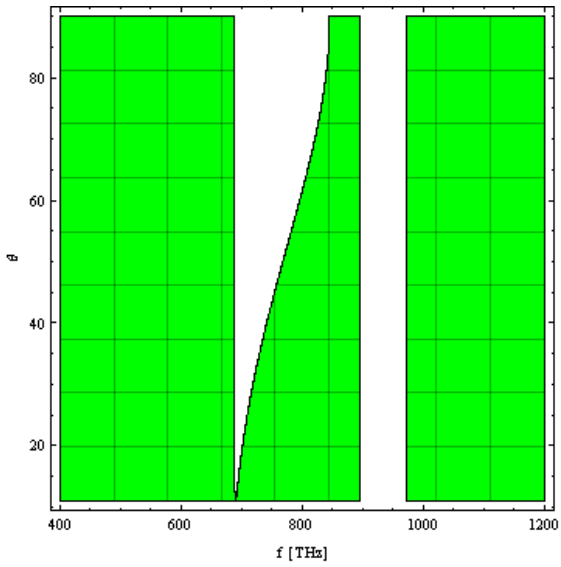


Figura 59: Bande di conduzione (in verde) e di interdizione (in bianco) in funzione dell'angolo di incidenza e della frequenza.

2.3 Incidenza di un'onda piana polarizzata TE

Si consideri la struttura studiata nel paragrafo 2) sezione I, si vuole studiare l'incidenza di un'onda piana nel piano $\{x, z\}$ e in particolar modo determinare le condizioni di propagazione

o di interdizione lungo l'asse z nel caso di incidenza di un'onda piana TE $\underline{\mathbf{H}} = \{H_x, 0, H_z\}$ $\underline{\mathbf{E}} = \{0, E_y, 0\}$.

Supponiamo per semplicità che la larghezza degli strati lungo l'asse y è grande rispetto alla lunghezza d'onda, si può assumere che i campi non variano spazialmente lungo y $(\partial / \partial_y = 0)$. Le equazioni di Maxwell nel caso di propagazione di un'onda piana TE sono le seguenti:

$$\begin{aligned} \partial_x E_y &= -j\omega\mu_0 H_z \\ \partial_x H_z &= \frac{k_0{}^2 \varepsilon(x) + \partial_z^2}{j\omega\mu_0} E_y \\ H_x &= \frac{1}{j\omega\mu_0} \partial_z E_y \end{aligned} \qquad (53)$$

Derivando la prima equazione della (53) lungo x e sostituendo la seconda nella prima, si ottiene l'equazione di Helmholtz (avendo fatto la sostituzione $E_y = F(x,z)$):

$$\begin{aligned} &\nabla^2 F + k^2(x) F = 0 \\ &k^2(x) = k_0{}^2 \varepsilon(x) \end{aligned} \qquad (54)$$

A questo punto è applicabile la stessa metodologia sviluppata nel paragrafo 2) sezione I. Si possono ottenere in tal modo la distribuzione di campo all'interno e all'esterno del reticolo e la relazione di dispersione. In particolare, quest'ultima assume in questo caso la seguente espressione:

$$\begin{aligned} &\cos(k_{xn} h) = \cos(k_{x1} h_1)\cos(k_{x2} h_2) - \frac{k_{x2}{}^2 + k_{x1}{}^2}{2 k_{x2} k_{x1}} \sin(k_{x1} h_1)\sin(k_{x2} h_2) \\ &k_{x1} = \sqrt{k_0{}^2 \varepsilon_1 - k_z{}^2}, \quad k_{x2} = \sqrt{k_0{}^2 \varepsilon_2 - k_z{}^2}, \quad k_{xn} = k_{x0} + n\, 2\pi / h \quad n = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2 \ldots \\ &h_1 = h/(1+\eta), \quad h_2 = h\eta/(1+\eta) \end{aligned} \qquad (55)$$

2.4 Approssimazione di ordine 0 polarizzazione TE

Consideriamo ora la situazione in cui lo spessore della cella h sia molto minore della lunghezza d'onda. In tale circostanza risulta che solamente l'ordine zero $(n = 0)$ può eccitarsi all'interno del reticolo: il vettore d'onda lungo x k_{xn} deve essere minore di k_0 affinché il

campo diffuso si possa propagare nel semi-spazio $z<0$ e nel semi-spazio $z>d$ (ipotizzando che tali semispazi siano riempiti con il vuoto per semplicità).

$$\begin{aligned} & k_{xn} = k_0 \sin\theta_{in} + 2\pi\frac{n}{h} \quad n = \ldots -2,-1,0,1,2\ldots. \\ & |k_{xn}| < k_0 \quad \Rightarrow \quad \left|\sin\theta_{in} + \frac{n\lambda}{h}\right| < 1 \end{aligned} \tag{56}$$

È chiaro che nell'ipotesi di piccoli spessori $(\lambda / h >> 1)$ la condizione (56) è soddisfatta solo per $n=0$. Questo comporta che $k_{xn} = k_{x0} = k_0 \sin\theta_{in}$. In tali ipotesi la relazione di dispersione (55) che determina la componente longitudinale del vettore d'onda k_z all'interno del reticolo è approssimabile nel seguente modo:

$$k_{xn}{}^2 + k_z{}^2 = k_0{}^2 \frac{\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2}{1+\eta} \tag{57}$$

L'equazione (57) può essere considerata come l'equazione di dispersione di un mezzo omogeneo, ma considerando quanto discusso nel paragrafo precedente è più giusto considerarla come la relazione di dispersione di un mezzo birifrangente per la polarizzazione TE:

$$k_x{}^2 + k_z{}^2 = k_0{}^2 \varepsilon_y \tag{58}$$

In questo modo la permittività relativa lungo l'asse y è:

$$\begin{aligned} & \varepsilon_y = \frac{\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2}{1+\eta} \\ & k_z{}^2 = k_0{}^2 \left(\varepsilon_y - (k_{xn} / k_0)^2\right) \end{aligned} \tag{59}$$

Se consideriamo come fatto in precedenza un andamento dispersivo della permittività relativa di tipo plasmonico $\varepsilon_1 = \varepsilon_\infty - \dfrac{f_{pl}{}^2}{f\,(f - j\delta)}$ per il mezzo 1 e di tipo convenzionale per il mezzo 2 $(\varepsilon_2 \geq 1)$, l'andamento della permittività lungo gli assi y è di tipo:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_\infty^{'} - \frac{f_{pl}^{'}{}^2}{f\,(f - j\delta)} \quad \left(\varepsilon_\infty^{'} = \frac{\varepsilon_\infty + \eta\varepsilon_2}{1+\eta} \quad f_{pl}^{'} = \frac{f_{pl}}{\sqrt{1+\eta}}\right) \tag{60}$$

Il reticolo in questo caso si comporta da filtro passa-alto: per valori negativi della permittività efficace lungo y ε_y, il reticolo ammette una costante di propagazione immaginaria (avendo trascurato la parte reale che dipende dalle perdite nel mezzo1) e il campo si attenua all'interno della struttura; per valori positivi della permittività la costante di propagazione assume valori reali. La frequenza che determina la soglia tra l'interdizione e la propagazione, nell'assunzione di piccole perdite $\left(\delta << f_{pl}\right)$, è la seguente:

$$f_c = \sqrt{\frac{{f'_{pl}}^2}{\varepsilon'_\infty - \sin^2\theta_{in}} + \delta^2} = \sqrt{\frac{{f_{pl}}^2}{\varepsilon_\infty + \eta\varepsilon_2 - (1+\eta)\sin^2\theta_{in}} + \delta^2} \qquad (61)$$

avendo assunto che $k_{xn} / k_0 = \sin\theta_{in}$.

Inoltre, come mostrato nella Figura 60, tale banda è indipendente dall'angolo di incidenza.

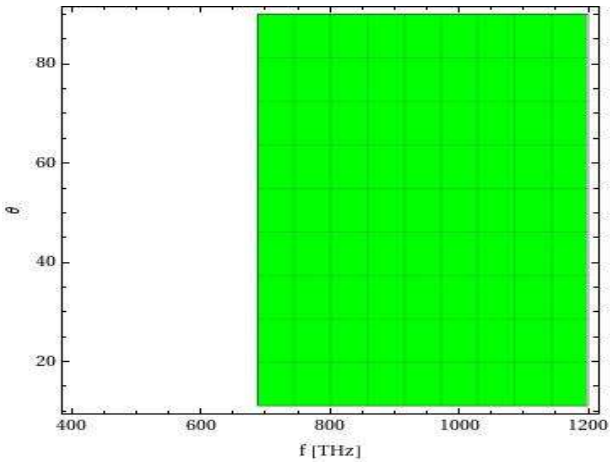


Figura 60: Bande di conduzione (in verde) e di interdizione (in bianco) in funzione dell'angolo di incidenza e della frequenza.

Possiamo dunque concludere che la struttura stratificata a pila si comporta, nell'ipotesi di piccoli spessori, come un mezzo birifrangente:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \quad \mu = \mu_0$$

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1\varepsilon_2 \frac{1+\eta}{\eta\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \qquad (62)$$

$$\varepsilon_z = \varepsilon_y = \frac{\varepsilon_1 + \eta\varepsilon_2}{1+\eta}$$

Inoltre essa consente, nel caso in cui uno dei due mezzi utilizzati sia un materiale plasmonico e l'altro un dielettrico, di ottenere due distinti comportamenti per le due polarizzazioni TE e TM: in un caso presenta delle bande di interdizioni in frequenza per la propagazione del campo al suo interno ed è sensibile in una banda all'angolo del campo incidente (TM), mentre nell'altro caso si comporta semplicemente da filtro passa-alto (TE).

Bibliografia

[1] Pozar David M., Microwave Engineering, Capitolo 4, Third Edition, John Wiley & Sons, 2007.

[2] Orfanidis Sophocles J., Electromagnetic Wave and Antennas, www.ece.rutgers.edu/~orfanidi, 2008.

[3] Peng, S. T., T. Tamir, H. L. Bertoni, "Theory of Periodic Dielectric Waveguides," *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-23, No. 1, January 1975.

[4] Lewis Laurence R., A. Hessel, "Propagation Characteristics of Periodic Arrays of Dielectric Slabs," *IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques*, Vol. MTT-19, No. 3, March 1971.

Capitolo Quarto

Nano-Circuiti

In questo capitolo trattiamo il progetto di filtri a frequenze ottiche, basati sull'approccio agli elementi concentrati proposto recentemente dal gruppo del professor Engheta. Verrà discussa la combinazione di nano-elementi di forma cilindrica e il loro relativo utilizzo come elementi concentrati; proprio a questo scopo, sarà verificata l'applicazione delle leggi di Kirchhoff a frequenze ottiche al fine di mostrare che i nano-elementi si comportano realmente come le loro controparti in radio frequenza. Inoltre, sarà discusso il problema dell'isolamento di tali elementi a frequenze ottiche e saranno ampliamente trattate le possibili problematiche riguardanti la realizzazione di nano-isolatori. Saranno poi proposte semplici formule di progetto per la realizzazione di filtri a frequenze ottiche e diverse tipologie di filtri saranno testate attraverso l'utilizzo di simulazioni *full-wave*.

1. NANO-ELEMENTI

Negli ultimi anni si è sviluppato un crescente interesse per la tecnologia a nano-scala e sono state recentemente proposte moltissime applicazioni in campi diversi (come ad esempio le telecomunicazioni, la diagnostica per immagini, etc.). Tra queste, un'applicazione interessante è quella proposta dal gruppo del professor Engheta [1]-[5], riguardo alla realizzazione di nano-circuiti alle frequenze degli infrarossi e ottiche. Dal momento che la corrente di conduzione non gioca un ruolo particolare a queste frequenze, gli elementi a nanocircuiti proposti sono basati sul concetto di corrente di spostamento. Il professor Engheta e il suo gruppo hanno mostrato come, di fatto, sia possibile stabilire un'analogia completa tra gli elementi a circuiti ottici e le loro controparti a radio frequenza.

Il ruolo di conduttori nella connessione degli elementi è assolto da materiali ottici con una parte reale della permittività molto grande (Epsilon-Very-Large – EVL – materiali), mentre quello di isolatori che coprono il circuito e che impediscono alla corrente di spostamento di fuoriuscire dal circuito è invece assolto da materiali ottici con una parte reale della permittività prossima a zero (Epsilon-Near-Zero – ENZ – materiali). Induttori e capacitori sono derivati dai nanoelementi con una parte reale della permittività rispettivamente negativa

o positiva. Infine, i resistori sono derivati da materiali ottici caratterizzati da una parte immaginaria della permittività predominante su quella reale.

È utile notare che tutti i materiali menzionati in precedenza sono facilmente disponibili alle frequenze del visibile e degli infrarossi (si veda in merito il primo capitolo). Materiali regolari con permittività più ampie di quella dello spazio libero sono utilizzati per nanocapacitori e nanoconnettori, mentre sia i nanoinduttori sia i nanoisolatori sono ottenuti utilizzando materiali plasmonici (come ad esempio i metalli nobili e i dielettrici polari), che presentano naturalmente a queste frequenze una parte reale della permittività negativa o, comunque, minore di quella dello spazio libero.

Consideriamo, ora, dei nanocilindri minori della lunghezza d'onda, come quello mostrato in Figura 61, che presentano una sezione trasversale *S*, lunghezza ℓ, raggio *r* uniformi e che sono costituiti da un materiale non magnetico con permittività ε.

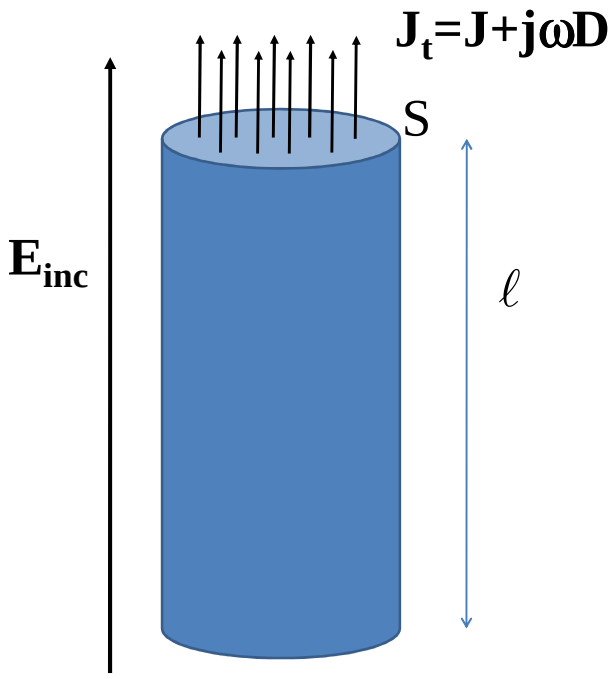


Figura 61: Nano-cilindro alle frequenze ottiche.

Consideriamo che il nano-elemento si trovi all'interno di una struttura guidante che supporti un modo fondamentale TEM, per esempio in una guida a piatti piani e paralleli. Nell'ipotesi che l'altezza della guida sia sufficientemente piccola rispetto alla lunghezza d'onda $(\ell \ll \lambda_0)$, il campo incidente sarà spazialmente costante sul nano-elemento e sarà inoltre diretto parallelamente all'asse del cilindro; allora, l'elemento potrà essere caratterizzato

circuitalmente e si potrà definire l'impedenza o l'ammettenza dell'elemento. Questa potrà essere calcolata semplicemente come il rapporto tra la differenza di potenziale che cade su di esso e la corrente che "scorre" in esso (a frequenze ottiche bisogna tener in conto anche della corrente di spostamento). Si otterrà allora:

$$Z = \frac{v}{i} = \frac{\int \mathbf{E} \bullet \mathbf{dl}}{\iint \left(j\omega \mathbf{D} + \mathbf{J} \right) \bullet \hat{\mathbf{n}} \, dS} \tag{1}$$

Ipotizziamo ora che il mezzo sia caratterizzato dalle seguenti relazioni costitutive:

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E} \\ \mathbf{J} &= \sigma \mathbf{E} \end{aligned} \tag{2}$$

e ipotizziamo inoltre che la frequenza sia sufficientemente grande e che le perdite Ohmiche siano sufficientemente piccole da poter assumere $\omega|\varepsilon| \gg \sigma$: in questo modo otteniamo che l'impedenza assume la seguente espressione:

$$Z = \frac{1}{j\omega\left(\varepsilon_r - j\varepsilon_i\right)} \frac{\ell}{S} \tag{3}$$

dove è stato anche ipotizzato che vi siano delle perdite dielettriche $\varepsilon = \varepsilon_r - j\varepsilon_i$.

Nel caso in cui le perdite siano trascurabili $\left(\varepsilon_i \ll \varepsilon_r\right)$ e il materiale che riempie il nano-cilindro possa assumere sia valori positivi sia valori negativi, possiamo distinguere quattro casi significativi:

1) $\varepsilon_r > 0$ a una data frequenza che comporta che il nano-elemento risulti equivalente ad un nanocapacitore caratterizzato dalla seguente capacità:

$$C = \varepsilon_r \frac{S}{\ell} \tag{4}$$

2) $\varepsilon < 0$ a una data frequenza determina che il nanoelemento sia equivalente a un nanoinduttore caratterizzato da questa induttanza:

$$L = \frac{1}{\omega^2 |\varepsilon_r|} \frac{\ell}{S} \tag{5}$$

La 3) e la 4) sono i due casi limite in cui la permittività assume un valore nullo (ENZ) o un valore molto grande (EVL) e determinano che il nano-cilindro sia, rispettivamente, un isolatore o un connettore:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0 \Rightarrow \quad & Z \to \infty \\ \varepsilon \to \infty \Rightarrow \quad & Z = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Nel caso in cui, invece, la parte immaginaria della permittività predomini su quella reale $(\varepsilon_r \ll \varepsilon_i)$, il nano-elemento si comporta da nano-resistore:

$$R = \frac{1}{\omega \varepsilon_i} \frac{\ell}{S} \tag{7}$$

Due elementi nano-circuitali eccitati da un campo elettrico esterno possono essere considerati connessi in parallelo quando la direzione del campo elettrico è parallela alla loro interfaccia comune. L'interconnessione serie, invece, corrisponde al caso in cui la direzione del campo elettrico è ortogonale all'interfaccia comune tra i due nano-elementi connessi e, quindi, lo spostamento di corrente si conserva da un elemento all'altro, come tra due elementi serie in un circuito a radio frequenza. Queste condizioni sono soddisfatte solo se il campo interno ai nano-elementi è uniforme (non c'è perdita per *leakage* della corrente di spostamento). Quindi, le interconnessioni serie e parallele funzionano idealmente quando un materiale EVL viene posto all'interfaccia comune tra i due elementi e un materiale ENZ è utilizzato per evitare la perdite dovute alla discontinuità dielettrica ($\mathbf{J} = j\omega\varepsilon_{ENZ}\mathbf{E} = 0$ è nulla al di fuori dell'elemento).

2. VERIFICA DELLE LEGGI DI KIRCHHOFF

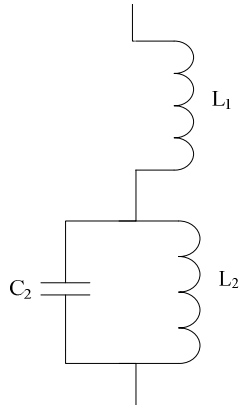


Figura 62: Schema del circuito preso in esame.

In questa sezione vogliamo verificare se siano ancora applicabili le leggi di Kirchhoff ai nano-circuiti. Consideriamo il circuito mostrato in Figura 62 e la sua implementazione attraverso nano-cilindri (Figura 63). La nano-struttura consiste quindi in una connessione serie tra: 1) un nano-induttore, costituito da un cilindro circolare (verde chiaro, in posizione superiore nella Figura 63) con raggio $R_{L1} = \lambda/100 = 5\ nm$ (dove λ rappresenta la lunghezza dello spazio libero a $f_0 = 600\ THz$: $\lambda = 500\ nm$) e altezza $\ell_{L1} = 9/400\ \lambda = 11.25\ nm$, costituito da un materiale plasmonico caratterizzato da una parte reale negativa della permittività nell'intervallo di frequenza di interesse, seguendo il modello di dispersione di Drude e presentando $\varepsilon_{L1} = -3\varepsilon_0$ a f_0; 2) un nano-circuito costituito da una connessione parallela tra: 2a) un nano-capacitore (arancione chiaro, posizione inferiore nella Figura 63) con parametri geometrici $R_{C2} = R_{L1}(1-1/\sqrt{2})$, ℓ_{L1} e costituito da un materiale dielettrico regolare con $\varepsilon_{C2} = 9\varepsilon_0$ e 2b) un nano-induttore (verde chiaro, posizione inferiore nella Figura 63) con parametri geometrici $R_{L2} = R_{L1}/\sqrt{2}$, ℓ_{L1}, costituito dallo stesso materiale plasmonico descritto in precedenza (ad esempio $\varepsilon_{L2} = -3\varepsilon_0$ alla frequenza f_0).

I due nano-elementi sono connessi attraverso un nano-connettore EVL (rosso chiaro) con permittività $\varepsilon = 200\varepsilon_0$, con parametri geometrici $R_{EVL} = R_{L1}$, $\ell_{EVL} = \lambda/200$; l'intero nano-circuito è isolato con un nano-isolatore (trasparente e con parametri geometrici $R_{ENZ} = 1.5R_{L1}$, $\ell_{ENZ} = \lambda/20$), che segue a sua volta la legge della dispersione di Drude di un materiale plasmonico.

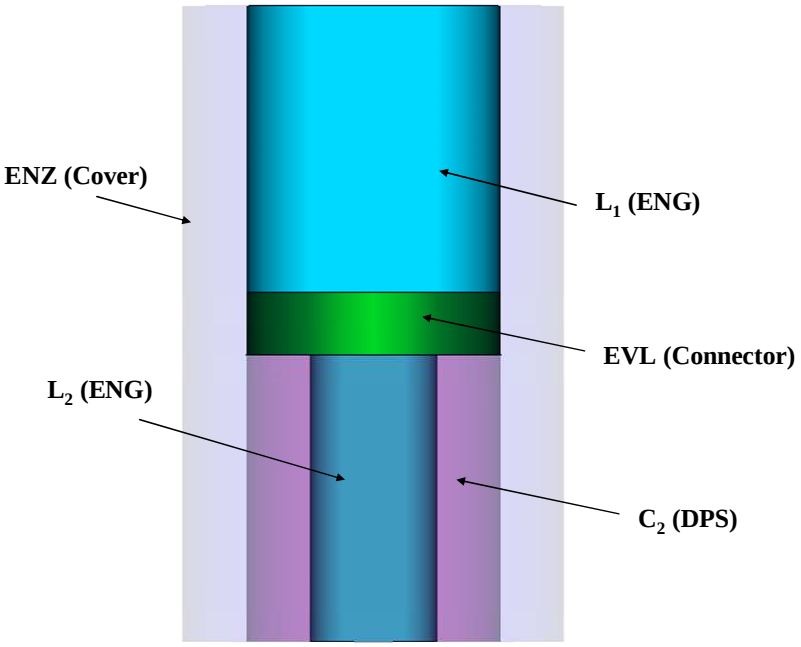


Figura 63: Connessione a serie parallele LC in presenza di una copertura ENZ e di un nano-connettore EVL.

Allo scopo di mostrare che la nano-struttura in Figura 63 si comporta come il circuito agli elementi concentrati descritto in Figura 62, abbiamo eseguito simulazioni numeriche *full-wave* utilizzando il software commerciale CST Microwave Studio. Il nano-circuito è stato eccitato da un'onda piana con un campo elettrico diretto lungo l'asse della nano-struttura cilindrica composita e con ampiezza E_0.

In Figura 64 e in Figura 65 viene mostrata la componente z del campo elettrico alla frequenza f_0 sul piano di simmetria che taglia il nano-circuito ($r = 0$, all'interno del nano-induttore L_2) e $r = 0.8\ R_{L1}$ (all'interno del nano-capacitore C_2). I risultati in Figura 64 e in Figura 65 mostrano chiaramente come il campo elettrico lungo i due percorsi sia lo stesso, determinando così che il nano-capacitore C_2 e il nano-induttore L_2 siano connessi in parallelo.

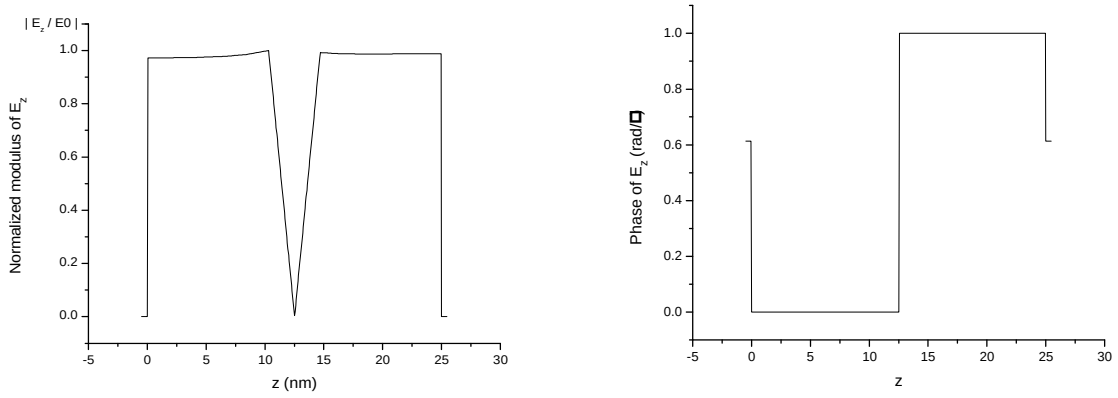


Figura 64: Componente z del campo elettrico lungo l'asse di simmetria (r=0).

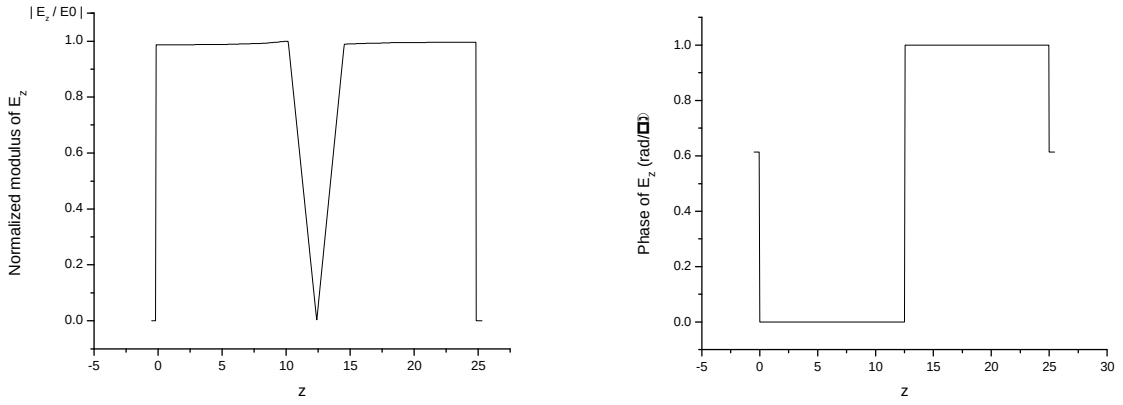


Figura 65: Componente z del campo elettrico lungo l'asse z con r = 0.85 R.

Possiamo ora dimostrare che il nano-circuito descritto nella Figura 63 soddisfa la legge della corrente di Kirchhoff (la somma algebrica delle correnti all'interfaccia tra i due nano-elementi è pari a zero):

$$I_{L_1} = I_{L_2} + I_{C_2} \tag{8}$$

Dal momento che un'equivalenza completa tra i circuiti a radiofrequenza e i nano-circuiti ottici dipende dall'analogia tra la densità della corrente di conduzione e la densità della corrente di spostamento, l'equazione (8) può essere riscritta in questi termini:

$$\mathbf{D}_{L_1} \bullet \hat{\mathbf{n}}\, S_{L_1} = \mathbf{D}_{L_2} \bullet \hat{\mathbf{n}}\, S_{L_2} + \mathbf{D}_{C_2} \bullet \hat{\mathbf{n}}\, S_{C_2} \tag{9}$$

dove $\mathbf{D}_i$ è il vettore di spostamento elettrico all'interno dei tre nano-elementi ($i = L_1, L_2, C_2$), S_i è la loro sezione trasversale e $\hat{\mathbf{n}}$ è il versore normale alle superfici della base dei cilindri.

Il vettore di spostamento elettrico è connesso al campo elettrico attraverso le relazioni costitutive; quindi, considerando i materiali che costituiscono il nano-circuito come dei materiali isotropici, possiamo scrivere le seguenti uguaglianze:

$$\begin{aligned} I_{L_1} &= D_{nL_1} S_{L_1} = \varepsilon_{L_1} E_{L_1} S_{L_1} \simeq -3\varepsilon_0 E_0 \pi R_{L_1}^2 \\ I_{L_2} &= D_{nL_2} S_{L_2} = \varepsilon_{L_2} E_{L_2} S_{L_2} \simeq 3\varepsilon_0 E_0 \pi R_{L_2}^2 = \frac{3}{2}\varepsilon_0 E_0 \pi R_{L_1}^2 = -\frac{1}{2} I_{L_1} \\ I_{C_2} &= D_{nC_2} S_{C_2} = \varepsilon_{C_2} E_{C_2} S_{C_2} \simeq -9\varepsilon_0 E_0 \pi (R_{L_1}^2 - R_{L_2}^2) = -9\varepsilon_0 E_0 \pi R_{L_1}^2 + \frac{9}{2}\varepsilon_0 E_0 \pi R_{L_1}^2 = \frac{3}{2} I_{L_1} \end{aligned} \tag{10}$$

Dalla (10), si vede chiaramente che la (8) è soddisfatta.

3. FORMULE DI PROGETTO

In questa sezione analizziamo la precedente combinazione di nano-cilindri alfine di determinare le condizioni di risonanza serie e parallelo; queste condizioni possano essere utilizzate per progettare nano-filtri: infatti, se il circuito lavora alla condizione di risonanza serie, si ottiene che la struttura si comporta da filtro arresta-banda intorno a tale frequenza; se invece il circuito lavora alla frequenza in cui si ha la condizione di risonanza parallelo, la struttura si comporta da filtro passa-banda.

La configurazione è quella mostrata in Figura 62 e in Figura 63. La condizione serie si determina imponendo che l'impedenza totale del circuito si annulli $\left(Z_t \left(f_{0s} \right) = 0 \right)$; in tale modo otteniamo la seguente relazione che lega i valori delle permittività dei tre mezzi e le loro caratteristiche geometriche:

$$\varepsilon_{L_2} S_{L_2} \ell_{L_1} \ell_{C_1} + \varepsilon_{L_1} S_{L_1} \ell_{L_2} \ell_{C_1} + \varepsilon_{C_1} S_{C_1} \ell_{L_2} \ell_{L_1} = 0 \tag{11}$$

Nel caso in cui i due induttori siano realizzati con materiali plasmonici $\varepsilon_{L_1} = \varepsilon_{s_1} \left(1 - \left(f_{pl_1} / f \right)^2 \right)$ e $\varepsilon_{L_2} = \varepsilon_{s_2} \left(1 - \left(f_{pl_2} / f \right)^2 \right)$ e il capacitore sia realizzato con un dielettrico ε_{C_1}, possiamo ottenere la frequenza di risonanza serie:

$$f_{0s} = \sqrt{\frac{\varepsilon_{s_2} f_{pl_2}{}^2 S_{L_2} \ell_{L_1} \ell_{C_1} + \varepsilon_{s_1} f_{pl_1}{}^2 S_{L_1} \ell_{L_2} \ell_{C_1}}{\varepsilon_{s_2} S_{L_2} \ell_{L_1} \ell_{C_1} + \varepsilon_{s_1} S_{L_1} \ell_{L_2} \ell_{C_1} + \varepsilon_{C_1} S_{C_1} \ell_{L_2} \ell_{L_1}}} \tag{12}$$

Nel caso particolare in cui il nano-induttore 2 sia assente, ovvero quando il nano-capacitore si trova in serie con il nano-induttore, la (11) e la (12) assumono la seguente semplice espressione:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_{L_1} / \varepsilon_{C_1} = -\ell_{C_1} / \ell_{L_1} \\ &f_{0s} = f_{pl_1} / \sqrt{1+\left(\varepsilon_{C_1} / \varepsilon_{s_1}\right)\left(\ell_{L_1} / \ell_{C_1}\right)} \end{aligned} \tag{13}$$

L'equazione (13) stabilisce che i rapporti tra i valori assoluti delle parti reali delle permittività e le lunghezze dei due nano-cilindri debbano essere uguali.

La condizione di risonanza parallelo è calcolabile imponendo che l'ammettenza del circuito sia nulla $\left(Y_t\left(f_{0p} \right) = 0 \right)$; in tale modo si ottiene:

$$\varepsilon_{L_2} S_{L_2} \ell_{C_1} + \varepsilon_{C_1} S_{C_1} \ell_{L_2} = 0 \tag{14}$$

e la seguente frequenza di risonanza parallelo:

$$f_{0p} = f_{pl_1} / \sqrt{1+\left(\varepsilon_{C_1} / \varepsilon_{s_2}\right)\left(\ell_{L_2} / \ell_{C_1}\right)\left(S_{C_1} / S_{L_2}\right)} \tag{15}$$

4. FILTRI ARRESTA-BANDA

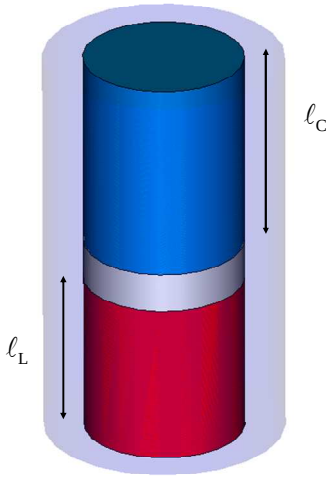


Figura 66: Nano filtro arresta-banda.

Presentiamo qui di seguito alcuni esempi che mostrano come nano-filtri alle frequenze ottiche possano essere facilmente ottenuti attraverso semplici formule di progetto analoghe a quelle della loro controparte a bassa frequenza.

Nano-filtro ottico arresta-banda a 300 THz

Come primo esempio, consideriamo il progetto di un nano-filtro ottico arresta-banda nella regione THz con f_0 = 300 THz. La coppia risonante serie è costituita da un nano-cilindro dielettrico di Carbonato di Silicio (SiC) con raggio $R = \lambda / 100$ e $\varepsilon_{SiC}(f = 300THz) = 6.68\varepsilon_0$

e da un nano-cilindro di Potassio (K) con lo stesso raggio e permittività data da $\varepsilon_K(300THz) = \varepsilon_0(-9.241 - j0.2445)$. Il nano-connettore EVL è costituito da Germanio (Ge) [$\varepsilon_{Ge}(300\text{ THz}) = \varepsilon_0(21.23 - j1.29)$]; il nano-isolatore ENZ è realizzato attraverso una struttura multistrato di Potassio (K) e Ossido di Silicio (SiO) [$\varepsilon_{SiO}(300\text{ THz}) = \varepsilon_0(3.496 - j0.005)$] di spessore rispettivamente $d_K = 10.6\text{ nm}$ e $d_{SiO} = 4\text{ nm}$.

Utilizzando la formula di progetto (13), possiamo ottenere il rapporto tra le lunghezze dei due nanocilindri:

$$\frac{\ell_L}{\ell_C} = \frac{|-9.24|}{6.68} = 1.38 \qquad (16)$$

Dal momento che le componenti devono essere molto più piccole della lunghezza d'onda [$\lambda(300\text{ THz}) = 1000\text{ nm}$ *], possiamo scegliere:*

$$\ell = \ell_C + \ell_L = \lambda / 200 = 5\,nm \qquad (17)$$

e, quindi:

$$\begin{cases} \ell_L = 2.9\text{ nm} \\ \ell_C = 2.1\text{ nm} \end{cases} \qquad (18)$$

La Figura 67 riporta le ampiezze dei parametri di diffusione S_{11}(linea tratteggiata) e S_{21} (linea continua) del filtro. Dalla Figura 67 è ben evidente che il nano-circuito, progettato secondo le formule di progetto (8)–(10), mostra un comportamento arresta-banda centrato con $f_0 \simeq 303.5\,THz$.

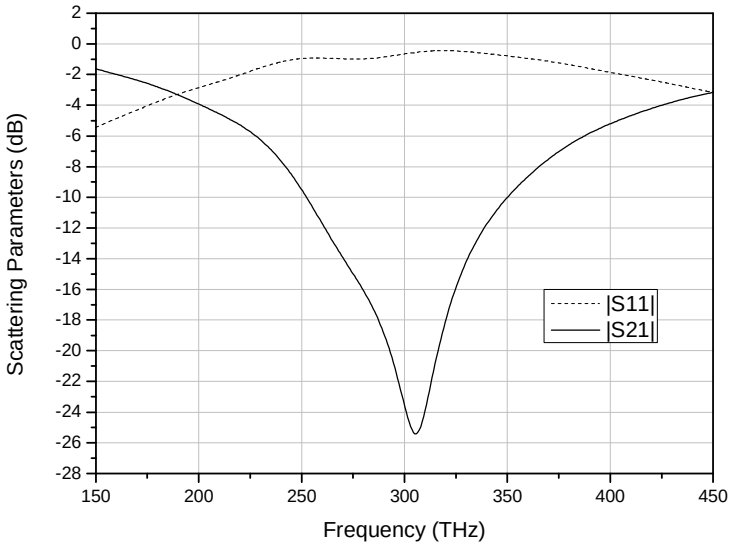


Figura 67: Ampiezza dei parametri di diffusione S_{11}(linea tratteggiata) e S_{21}(linea continua) rispetto alla frequenza (150-450 THz).

Le formule di progetto (13), così, sono state in grado di predire la frequenza di risonanza del filtro con un errore relativo piccolo sulla frequenza di risonanza ($err_{rel} \simeq 1.2\%$).

La larghezza di banda del filtro a 3dB è di circa 270.0 THz e, così, il fattore di qualità corrispondente risulta essere:

$$Q = \frac{f_0}{B} = \frac{303.5 \cdot 10^{12}}{270 \cdot 10^{12}} \simeq 1.12 \qquad (19)$$

Nella Fig. 8 tracciamo la componente z di un campo elettrico lungo l'asse di simmetria con $f = 290\,THz$. Per $0 \le z \le 100\,nm$, il percorso è interno al nanoinduttore, mentre per $105\,nm < z \le 134.86\,nm$ lo stesso è interno al nanocapacitore.

Dalla Figura 68 si vede inoltre che, se escludiamo la zona del mezzo EVL, il campo elettrico è quasi uniforme sia all'interno del nano-induttore $2.1\,nm < z \le 5\,nm$ sia all'interno del nano-capacitore, $0 \le z \le 2.1\,nm$ coerentemente con quanto ci aspettavamo dall'analogia del circuito proposto. Verifichiamo inoltre che la legge della corrente di Kirchhoff sia soddisfatta ($I_L = I_C$):

$$\frac{|I_L|}{|I_C|} = \frac{|D_{nL}|S}{|D_{nC}|S} = \frac{|\varepsilon_L||E_L|}{|\varepsilon_C||E_C|} = 1 \Rightarrow \frac{|E_L|}{|E_C|} = \frac{|\varepsilon_C|}{|\varepsilon_L|} = 0.72 \qquad (20)$$

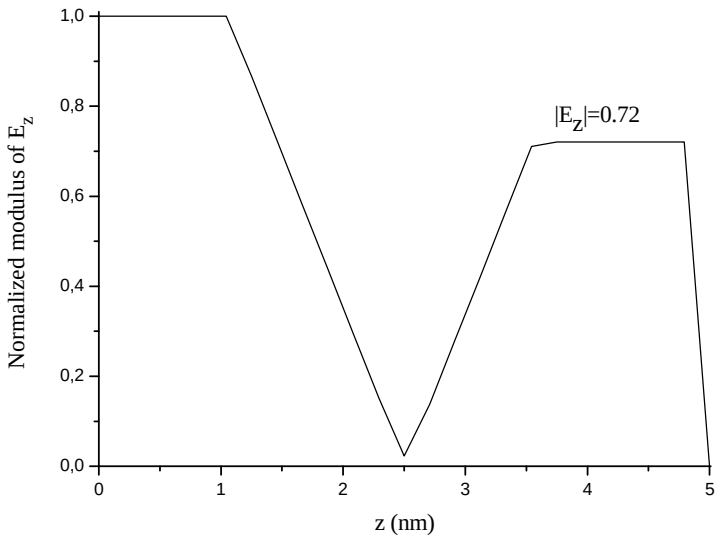


Figura 68: Ampiezza normalizzata della componente z del campo elettrico lungo l'asse di simmetria con f= 303 THz.

Nano-filtro ottico arresta-banda a 600 THz

In questo secondo esempio consideriamo un filtro arresta-banda che lavora nella banda del visibile con $f_0 = 600$ THz . La coppia risonante serie è realizzata con un nano-cilindro dielettrico di Carbonato di Silicio (SiC) di raggio $R = \lambda / 100$ con $\varepsilon_{SiC}(f = 600THz) = 7.18\varepsilon_0$ e da un nano-cilindro d'Argento (Ag) con lo stesso raggio e una permittività data da $\varepsilon_{Ag}(600THz) = \varepsilon_0(-8.262 - j0.737)$. Il nano-connettore EVL è realizzato in Silicio (Si) [$\varepsilon_{Si}(600 \text{ THz}) = \varepsilon_0(18.63 - j0.62)$]; il nano-isolatore ENZ è realizzato con una struttura multistrato di Argento e Ossido di Silicio [$\varepsilon_{SiO}(600 \text{ THz}) = \varepsilon_0(4.12 - j0.143)$], di spessore rispettivamente $d_{Si} = 4$ nm e $d_{SiO} = 2$ nm .

In questo caso, il rapporto tra le lunghezze dei due nano-cilindri è dato da:

$$\frac{\ell_L}{\ell_C} = \frac{|-8.26|}{7.18} = 1.15 \qquad (21)$$

Poiché i nano-elementi presentano delle dimensioni di gran lunga minori della lunghezza d'onda, (λ a 600 THz è 500 nm) , possiamo scegliere:

$$\ell_L = 1.34\,nm \qquad (22)$$

e

$$\ell_C = \ell_L / 1.15 = 1.16 \text{ nm} \qquad (23)$$

Dalla Figura 69 è chiaro che il nano-circuito progettato secondo le formule di progetto (13), mostra un comportamento arresta-banda centrato con $f_0 \simeq 605 THz$. Di nuovo, le formule di progetto sono state dunque in grado di predire la frequenza di risonanza del filtro con un errore relativo molto piccolo, $err_{rel} < 1\%$. Anche in questo caso (si veda la Figura 70) il campo elettrico è quasi uniforme sia all'interno del nanoinduttore sia all'interno del nanocapacitore, e la legge della corrente di Kirchhoff risulta soddisfatta ($I_L = I_C$):

$$\frac{|E_L|}{|E_C|} = \frac{|\varepsilon_C|}{|\varepsilon_L|} = 0.87 \qquad (24)$$

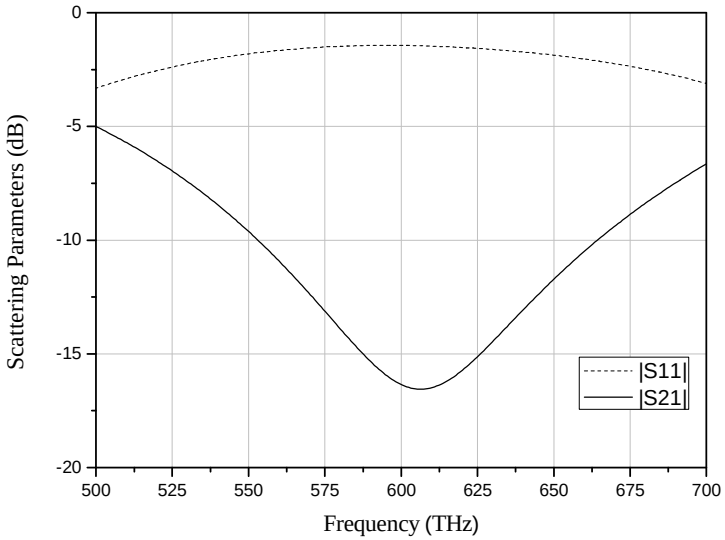


Figura 69: Ampiezza dei parametri di diffusione in funzione della frequenza S_{11}(linea tratteggiata) e S_{21}(linea continua).

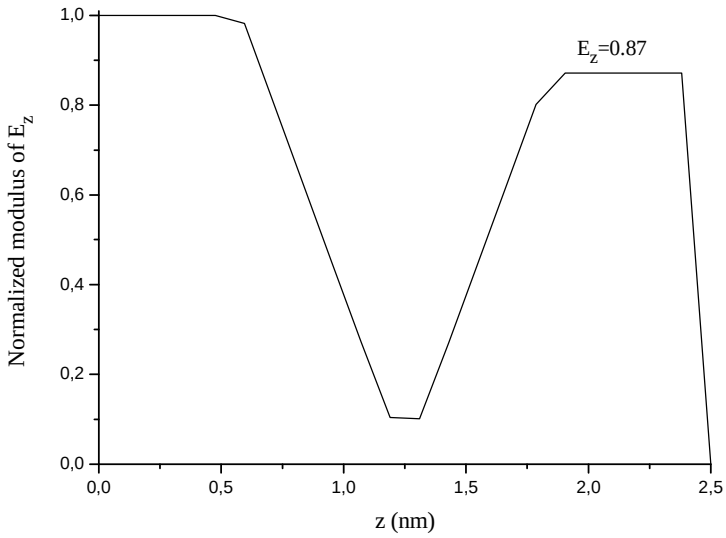


Figura 70: Ampiezza normalizzata della componente z del campo elettrico lungo l'asse di simmetria con f = 607 THz.

5. CONCLUSIONI

In questo capitolo, sfruttando il concetto di elementi nano-circuitali, abbiamo mostrato inizialmente come interconnessioni realistiche di nano-elementi alle frequenze ottiche e THz si comportino come le loro controparti in radio frequenza. Il comportamento delle interconnessioni è stato verificato secondo le leggi di Kirchhoff sul voltaggio e sulla corrente. Successivamente, sono state ricavate nuove formule di progetto che permettono di progettare un modello di filtro in modo rapido ed efficace. Infine, sono stati presentati alcuni risultati numerici ottenuti attraverso simulazioni *full-wave* a frequenze ottiche e THz, per mostrare l'efficacia delle formule proposte nel progetto affidabile e preciso di filtri di base.

Bibliografia

[1] N. Engheta, A. Salandrino and A. Alù, "Circuit elements at Optical Frequencies: nano-resistor, nano-capacitor and nano-inductor," Phys.Rew.Lett. **95**, 095504 (2005).

[2] M. Silveirinha, A.Alù, J.Li and N.Engheta, "Nanoinsulators and nanoconnectors for optical nanocircuits," published online at http://arxive.org/abs/cond-mat/0703600v1.

[3] A. Alù, A. Salandrino and N. Engheta, "Parallel, Series, and Intermediate Interconnections of Optical Nanocircuit Elements Part 2: Nanocircuit and Physical Interpretation," published online at http://arxiv.org/abs/0707.1003v1.

[4] A. Alù, M. Young and N. Engheta, "Nanofilters for Optical Nanocircuits," published online at http://arxiv.org/abs/0710.0616v1.

[5] A. Alù and N. Engheta, "Plasmonic Resonant Optical Nanoswitch," published online at http://arxiv.org/abs/0710.4895v1.

Capitolo Quinto

Filtri Polarizzatori

In questo capitolo vogliamo presentare il progetto di filtri polarizzatori alle frequenze delle microonde e alle frequenze ottiche che presentano una risposta che è indipendente dall'angolo di incidenza su un'ampia banda di frequenza.

Il capitolo è organizzato nel seguente modo: nel primo paragrafo verrà trattata la propagazione di un'onda piana in un mezzo anisotropo e saranno calcolati i coefficienti di trasmissione e riflessione nel caso in cui tale mezzo sia immerso in aria; in particolare, mostreremo che l'utilizzo di un mezzo birifrangente che presenta valori negativi della permittività/permeabilità sull'asse straordinario permette di realizzare filtri polarizzatori. Nei paragrafi seguenti mostreremo il progetto di polarizzatori alle frequenze delle microonde e ottiche con l'utilizzo di mezzi birifrangenti realizzati con metamateriali e con strutture stratificate.

1. PROPAGAZIONE DI UN'ONDA PIANA IN UN MEZZO ANISOTROPO

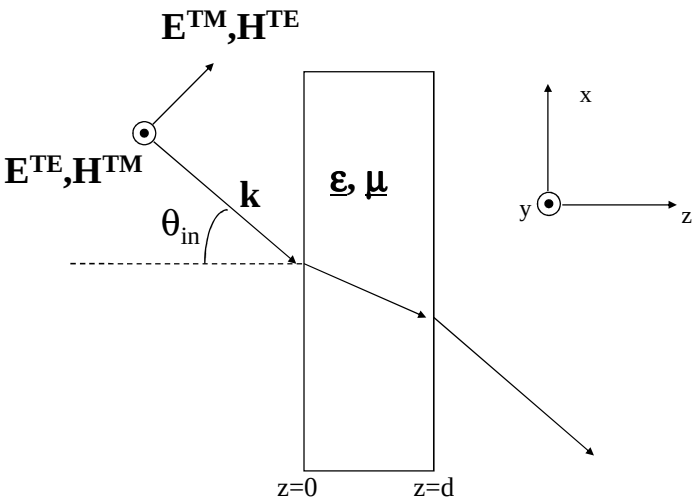


Figura 71: Incidenza di un'onda piana su uno strato anisotropo.

Consideriamo il problema della riflessione e della trasmissione di un'onda piana che incide su uno strato di spessore finito e sezione di dimensione indefinita, immerso in un mezzo omogeneo (per esempio l'aria) come mostrato in Figura 71. Il mezzo è descritto dai seguenti tensori della permittività e permeabilità in un sistema di riferimento cartesiano:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \qquad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} \tag{1}$$

Supponiamo che il comportamento del mezzo sia il medesimo sul piano {x,y} $\left(\varepsilon_y = \varepsilon_x \text{ e } \mu_y = \mu_x\right)$: in tale modo si avrà che il mezzo ha caratteristiche di birifrangenza con asse straordinario sull'asse z.

Ipotizziamo, ora, che si abbia nel mezzo birifrangente la propagazione di un'onda piana ($\mathbf{E},\mathbf{H} \propto \mathbf{E}_0,\mathbf{H}_0 e^{-jk_x x - jk_y y - jk_z z}$). Tale assunzione equivale a sostituire nelle equazioni di Maxwell le derivate parziali con le proiezioni del vettore d'onda ($\partial_x = -jk_x$, $\partial_y = -jk_y$ e $\partial_z = -jk_z$) e, così, ad ottenere un sistema omogeneo: $\mathbf{A}\left(k_x,k_y,k_z\right)\bullet\left(\mathbf{E}_0,\mathbf{H}_0\right) = \mathbf{0}$. Imponendo l'annullamento del determinante della matrice $\mathbf{A}\left(k_x,k_y,k_z\right)$ $\left(\det\left\{\mathbf{A}\left(k_x,k_y,k_z\right)\right\} = 0\right)$, si ottengono due relazioni di dispersione (I e II):

$$\begin{aligned} &I) \quad \left(k_x^2 + k_y^2\right)/\mu_z + k_z^2/\mu_x = k_0^2\varepsilon_x \\ &II) \quad \left(k_x^2 + k_y^2\right)/\varepsilon_z + k_z^2/\varepsilon_x = k_0^2\mu_x \end{aligned} \tag{2}$$

dove $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ è il modulo del vettore d'onda nel vuoto.

Le relazioni di dispersione I e II determinano l'esistenza di due autovalori distinti, una volta scelta la direzione di propagazione e i due autovettori corrispondenti.

Consideriamo, ora, di essere interessati alla propagazione lungo l'asse z, così com'è mostrato in Figura 71; poiché la componente del vettore d'onda sul piano {x,y} $\left(k_t\hat{\mathbf{t}} = k_x\hat{\mathbf{x}} + k_y\hat{\mathbf{y}}\right)$ si deve conservare (k_t deve essere uguale sia all'interno del mezzo sia all'esterno ed è una quantità reale pari a $k_t = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = k_0 \sin\left(\theta_{in}\right)$), si ha la propagazione del campo all'interno dello strato solo se anche la componente longitudinale è reale $\left(k_z \in \Re\right)$. Si possono considerare, dal punto di vista geometrico, le relazioni di dispersione come le equazioni di una quadratica: $\left(k_t / s_t\right)^2 + \left(k_z / s_z\right)^2 = 1$, dove $s_t = \left(k_0\sqrt{\mu_z\varepsilon_x} \text{ nella I e } k_0\sqrt{\varepsilon_z\mu_x} \text{nella II}\right)$

$s_z = k_0\sqrt{\mu_x \varepsilon_x}$ (nella I e nella II) . La condizione di esistenza di propagazione richiede, allora, che la componente tangenziale del vettore d'onda sia minore della lunghezza del semiasse $k_t^2 < s_t^2$ e che $s_z^2 > 0$. È facile constatare che questa condizione è sempre verificata per qualunque angolo di incidenza quando il mezzo anisotropo ha gli elementi delle matrici costitutive che sono quantità positive maggiori dell'unità ed è posto tra due semispazi di aria; se, però, consideriamo che il mezzo è un mezzo dispersivo (per esempio un plasma, una ferrite o un metamateriale), questa condizione può non essere verificata: infatti potremo avere, in un certo intervallo di frequenza, valori negativi di alcuni degli elementi dei tensori costitutivi – per esempio, potremmo avere che $\varepsilon_x < 0 \quad \vee \quad \mu_{z,x} > 0$ e, in tal caso, non esisterà alcun valore della componente tangenziale k_t che renda reale la componente longitudinale k_z . Si avrà allora che l'onda nel mezzo è un'onda evanescente con la componente longitudinale che è una quantità puramente immaginaria ($k_z = -jh_z = -j\sqrt{k_0^2 |\varepsilon_x| \mu_x + k_t^2 \mu_x / \mu_z}$).

Fissato l'asse z come direzione di propagazione del campo, gli autovettori sono facilmente ottenibili. Imponendo l'autovalore che si ricava dalla I $\left(k_z^I = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_x \mu_x - k_t^2 \mu_x / \mu_z} \right)$, si ottiene che il campo elettrico giace sul piano perpendicolare all'asse di propagazione (polarizzazione s o TE$(\hat{\mathbf{z}})$) e che il campo magnetico è perpendicolare ad esso. La relazione di dispersione II $\left(k_z^{II} = \sqrt{k_0^2 \varepsilon_x \mu_x - k_t^2 \varepsilon_x / \varepsilon_z} \right)$ determina l'altra polarizzazione (polarizzazione p o TM $(\hat{\mathbf{z}})$), nella quale il campo magnetico giace nel piano perpendicolarmente all'asse di propagazione.

A tali risultati si può giungere anche in modo inverso: imponendo nelle equazioni di Maxwell le due possibili polarizzazioni TE($\hat{z}$) e TM($\hat{z}$) per il campo elettromagnetico, le componenti del campo saranno legate alla componente longitudinale nel seguente modo:

$$TE)\begin{cases} H_x = -\dfrac{k_z\, k_x}{\omega^2 \varepsilon_y \mu_x - k_z{}^2} H_z \\ H_y = -\dfrac{k_z\, k_y}{\omega^2 \varepsilon_x \mu_y - k_z{}^2} H_z \\ E_x = \dfrac{\omega \mu_y}{k_z} H_y \quad E_y = -\dfrac{\omega \mu_x}{k_z} H_x \end{cases} \qquad TM)\begin{cases} E_x = -\dfrac{k_z\, k_x}{\omega^2 \varepsilon_x \mu_y - k_z{}^2} E_z \\ E_y = -\dfrac{k_z\, k_y}{\omega^2 \varepsilon_y \mu_x - k_z{}^2} E_z \\ H_x = -\dfrac{\omega \varepsilon_y}{k_z} E_y \quad H_y = \dfrac{\omega \varepsilon_x}{k_z} E_x \end{cases} \tag{3}$$

Sostituendo queste espressioni nelle equazioni di Maxwell e tenendo conto delle caratteristiche di birifrangenza $\left(\varepsilon_y = \varepsilon_x,\ \mu_y = \mu_x\right)$, il vettore d'onda lungo l'asse di propagazione (z) deve essere uguale all'espressione che si ricava dalla relazione di dispersione (2) per le due polarizzazioni rispettivamente:

$$\begin{array}{l} TE)\left\{ \dfrac{k_x{}^2 \mu_x}{\omega^2 \varepsilon_y \mu_x - k_z{}^2} + \dfrac{k_y{}^2 \mu_y}{\omega^2 \varepsilon_x \mu_y - k_z{}^2} - \mu_z = 0 \right. \\ TM)\left\{ \dfrac{k_x{}^2 \varepsilon_x}{\omega^2 \mu_y \varepsilon_x - k_z{}^2} + \dfrac{k_y{}^2 \varepsilon_y}{\omega^2 \mu_x \varepsilon_y - k_z{}^2} - \varepsilon_z = 0 \right. \end{array} \quad \begin{array}{c} \varepsilon_x = \varepsilon_y \\ \mu_y = \mu_x \\ \Rightarrow \end{array} \quad \begin{array}{l} TE)\left\{ k_z^{TE} = k_z^{I} \right. \\ TM)\left\{ k_z^{TM} = k_z^{II} \right. \end{array} \tag{4}$$

Nel caso in cui l'asse straordinario non coincida più con quello di propagazione, ma per esempio coincida con l'asse x $\left(\varepsilon_y = \varepsilon_z,\ \mu_y = \mu_z\right)$, le componenti del campo elettromagnetico per le due polarizzazioni sono ancora date dalla (3), ma gli autovalori cambiano assumendo le seguenti espressioni:

$$\begin{array}{l} \left(k_z{}^{TE}\right)^2 = \dfrac{1}{2\mu_z}\left\{ \begin{array}{l} -k_y{}^2\mu_x - k_x{}^2\mu_z + \mu_z k_0{}^2\left(\varepsilon_y\mu_x + \varepsilon_x\mu_y\right) - \sqrt{\left(k_x{}^2\mu_x - \mu_y k_y{}^2 - \mu_z k_0{}^2\left(\varepsilon_y\mu_x - \varepsilon_x\mu_y\right)\right)^2 + 4k_y{}^2 k_x{}^2 \mu_y\mu_x} \\ -k_y{}^2\mu_x - k_x{}^2\mu_z + \mu_z k_0{}^2\left(\varepsilon_y\mu_x + \varepsilon_x\mu_y\right) + \sqrt{\left(k_x{}^2\mu_x - \mu_y k_y{}^2 - \mu_z k_0{}^2\left(\varepsilon_y\mu_x - \varepsilon_x\mu_y\right)\right)^2 + 4k_y{}^2 k_x{}^2 \mu_y\mu_x} \end{array} \right. \\ \left(k_z{}^{TM}\right)^2 = \dfrac{1}{2\varepsilon_z}\left\{ \begin{array}{l} -k_y{}^2\varepsilon_y - k_x{}^2\varepsilon_x + \varepsilon_z k_0{}^2\left(\varepsilon_x\mu_y + \varepsilon_y\mu_x\right) - \sqrt{\left(k_x{}^2\varepsilon_x - \varepsilon_y k_y{}^2 - \varepsilon_z k_0{}^2\left(\mu_y\varepsilon_x - \mu_x\varepsilon_y\right)\right)^2 + 4k_y{}^2 k_x{}^2 \varepsilon_y\varepsilon_x} \\ -k_y{}^2\varepsilon_y - k_x{}^2\varepsilon_x + \varepsilon_z k_0{}^2\left(\varepsilon_x\mu_y + \varepsilon_y\mu_x\right) + \sqrt{\left(k_x{}^2\varepsilon_x - \varepsilon_y k_y{}^2 - \varepsilon_z k_0{}^2\left(\mu_y\varepsilon_x - \mu_x\varepsilon_y\right)\right)^2 + 4k_y{}^2 k_x{}^2 \varepsilon_y\varepsilon_x} \end{array} \right. \end{array} \tag{5}$$

In questo caso si ottengono due autovalori per ciascuna delle due polarizzazioni: infatti, l'equazione di dispersione che si ricava non è più un polinomio di secondo grado ma uno di quarto grado di tipo biquadratico.

È utile ora considerare due casi limite: 1) il vettore d'onda del campo incidente giace nel piano $\{y,z\}$; 2) il vettore d'onda giace nel piano $\{x,z\}$. In entrambi i casi, ogni autovettore ha un unico autovalore.

Nel primo caso la componente del vettore d'onda lungo l'asse x deve essere nulla; le costanti di propagazione assumono, allora, la seguente espressione:

$$(k_x = 0) \Rightarrow \begin{array}{l} \left(k_z^{TE}\right)^2 = k_0^2 \varepsilon_x \mu_y - k_t^2 \\ \left(k_z^{TM}\right)^2 = k_0^2 \varepsilon_y \mu_x - k_t^2 \end{array} \quad k_t = k_x \tag{6}$$

Nel secondo caso si deve imporre l'annullamento della componente del vettore d'onda lungo l'asse y e così si ottiene:

$$(k_y = 0) \Rightarrow \begin{array}{l} \left(k_z^{TE}\right)^2 = k_0^2 \varepsilon_x \mu_y - k_t^2 \mu_x / \mu_z \\ \left(k_z^{TM}\right)^2 = k_0^2 \varepsilon_y \mu_x - k_t^2 \varepsilon_x / \varepsilon_z \end{array} \quad k_t = k_x \tag{7}$$

In quest'ultimo caso si ricavano gli stessi autovalori calcolati per un mezzo che presentava l'asse straordinario sull'asse z, con l'unica differenza che il vettore d'onda debba giacere sul piano $\{y,z\}$ e che si sostituisca il pedice y con quello x.

A questo punto, possiamo utilizzare la trattazione delle linee di trasmissione per calcolare il coefficiente in riflessione e in trasmissione. La tensione e la corrente che si propagano in una linea di trasmissione sono legate tra loro dalle seguenti equazioni:

$$\begin{array}{l} \partial_z V = j\beta\eta I \\ \partial_z I = j(\beta/\eta) V \end{array} \tag{8}$$

È facile mostrare che anche i moduli dei vettori trasversali del campo elettrico e magnetico soddisfano le medesime equazioni differenziali se si ipotizza di considerare un mezzo con asse straordinario sull'asse x e il vettore d'onda del campo incidente sul piano $\{x,z\}$:

$$\begin{array}{ll} \partial_z E_j = j\beta\eta H_i & i = x(TE),\ y(TM) \\ \partial_z H_j = j(\beta/\eta) E_i & j = y(TE),\ x(TM) \end{array} \tag{9}$$

dove β e η assumono le seguenti espressioni per le due polarizzazione TE e TM:

$$\beta^{TE} = (k_z)^{TE} = k_0\sqrt{\varepsilon_y\mu_x - \left(\frac{k_t}{k_0}\right)^2 \frac{\mu_x}{\mu_z}}$$
$$\beta^{TM} = (k_z)^{TM} = k_0\sqrt{\mu_y\varepsilon_x - \left(\frac{k_t}{k_0}\right)^2 \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_z}}$$
$$\eta^{TE} = -E_y / H_x = \eta_0 / \sqrt{\frac{\varepsilon_y}{\mu_x} - \left(\frac{k_t}{k_0}\right)^2} / \mu_x\mu_z \qquad (10)$$
$$\eta^{TM} = E_x / H_y = \eta_0 \sqrt{\frac{\mu_y}{\varepsilon_x} - \left(\frac{k_t}{k_0}\right)^2} / \varepsilon_x\varepsilon_z$$

Questa analogia è utilizzabile anche per gli altri due casi considerati precedentemente.

Possiamo ora utilizzare le relazioni della linea di trasmissione descritta dai suddetti parametri per calcolare la riflessione all'ingresso della linea (il coefficiente di riflessione del mezzo) e il coefficiente di trasmissione al carico (il coefficiente di trasmissione del mezzo). Consideriamo allora che lo strato di materiale anisotropo abbia uno spessore d, sia immerso nel vuoto e che un'onda piana incida con un angolo di incidenza θ_{in} (Figura 71). Il coefficiente di riflessione dell'interfaccia ρ è calcolabile attraverso la relazione di Fresnel:

$$\rho = \frac{\eta^{TE,TM} - \eta_0^{TE,TM}}{\eta^{TE,TM} + \eta_0^{TE,TM}} \qquad (11)$$

dove $\eta_0^{TE,TM}$ è l'impedenza caratteristica del vuoto per le due polarizzazioni ($\eta_0^{TE} = 120\pi / Cos(\theta_{in})$ e $\eta_0^{TM} = 120\pi Cos(\theta_{in})$). I coefficienti di riflessione e trasmissione sono dati, allora, dalle seguenti espressioni:

$$\Gamma\big|_{z=0} = \rho\frac{1-e^{-2j\beta d}}{1-\rho^2 e^{-2j\beta d}} \qquad T\big|_{z=d} = \frac{\left(1-\rho^2\right)e^{-j\beta d}}{1-\rho^2 e^{-2j\beta d}} \qquad (12)$$

2. CONDIZIONI DI PROGETTO PER POLARIZZATORI TE E TM IN RIFLESSIONE

Vogliamo ora determinare quali siano le caratteristiche che devono avere le matrici di permittività e permeabilità per progettare un polarizzatore in riflessione TE o TM.

Un polarizzatore TE in riflessione è caratterizzato dall'avere i seguenti requisiti:

$$\begin{cases} \Gamma^{TE} = 1 \\ T^{TM} = 1 \end{cases} \quad ovvero \quad \begin{cases} T^{TE} = 0 \\ \Gamma^{TM} = 0 \end{cases} \tag{13}$$

Ora, alfine di determinare le caratteristiche del mezzo anisotropo, consideriamo inoltre che lo spessore sia piccolo rispetto alla lunghezza d'onda $d << \lambda_0$ e che i coefficienti di riflessione e di trasmissione siano indipendenti dall'angolo di incidenza dell'onda piana.

Le condizioni che possono determinare il soddisfacimento della (13) sono che il coefficiente di riflessione all'interfaccia per la polarizzazione TE $\left(\rho^{TE} = 1\right)$ sia unitario e che quello della polarizzazione TM sia nullo $\left(\rho^{TM} = 0\right)$. Queste condizioni possono essere soddisfatte se l'impedenza del campo polarizzato TE è puramente immaginaria $\mathrm{Re}\left\{\eta^{TE}\right\} = 0$ e l'impedenza di quello TM è uguale all'impedenza caratteristica del vuoto $\eta^{TM} = \eta_0^{TM}$.

L'impedenza caratteristica della polarizzazione TE η^{TE} (10) è puramente immaginaria se l'argomento della radice è negativo $\frac{\varepsilon_y}{\mu_x} - \frac{Sin^2(\theta_{inc})}{\mu_x \mu_z} < 0$. Tale condizione può essere verificata imponendo una delle due seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} &1) \quad \mu_x < 0 \quad \varepsilon_y > Sin^2(\theta_{inc}) / \mu_z \\ &2) \quad \mu_x > 0 \quad \varepsilon_y < Sin^2(\theta_{inc}) / \mu_z \end{aligned} \tag{14}$$

Inoltre, deve essere soddisfatta l'uguaglianza tra l'impedenza caratteristica del mezzo anisotropo con quella del vuoto per la polarizzazione TM. Questa condizione si traduce nell'imporre:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_z = \mu_y = 1 \tag{15}$$

Il progetto di un polarizzatore TM in riflessioni richiede il soddisfacimento delle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \Gamma^{TM} = 1 \\ T^{TE} = 1 \end{cases} \quad ovvero \quad \begin{cases} T^{TM} = 0 \\ \Gamma^{TE} = 0 \end{cases} \tag{16}$$

Utilizzando la medesima procedura, si ottengono le seguenti condizioni sugli elementi delle matrici della permittività e della permeabilità:

$$\begin{aligned} &1) \quad \varepsilon_x < 0 \quad \mu_y > Sin^2(\theta_{inc}) / \varepsilon_z \\ &2) \quad \varepsilon_x > 0 \quad \mu_y < Sin^2(\theta_{inc}) / \varepsilon_z \\ &\mu_x = \mu_z = \varepsilon_y = 1 \end{aligned} \tag{17}$$

È chiaro che ci sono molte combinazioni di potenziali mezzi che possono soddisfare le (14) e (15) e la (17). In particolare, vogliamo trattare qui due casi particolari:

1) il progetto di polarizzatori in riflessione TE e TM, nei quali lo strato di Figura 71 sia caratterizzato da anisotropia solo per la permeabilità.

2) Il progetto di polarizzatore in riflessione TE e TM con anisotropia solo per la permittività.

Il soddisfacimento delle condizioni (14) e (15) determina nel primo caso di anisotropia della permittività che le relazione costitutive possano essere le seguenti:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \underline{\mathbf{I}} \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mu_x < 0 \tag{18}$$

Nel secondo caso di anisotropia della permittività, invece, le relazioni costitutive possono essere:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_y << -1 \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \mu_0 \underline{\mathbf{I}} \tag{19}$$

Se vogliamo invece progettare un polarizzatore TM, dobbiamo considerare le seguenti relazioni costitutive per il primo caso:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \underline{\mathbf{I}} \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \mu_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mu_y << -1 \tag{20}$$

e le seguenti per il secondo caso:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \varepsilon_x < 0 \quad \underline{\boldsymbol{\mu}} = \mu_0 \underline{\mathbf{I}} \tag{21}$$

3. PROGETTO DI UN POLARIZZATORE IN RIFLESSIONE TM A MICROONDE

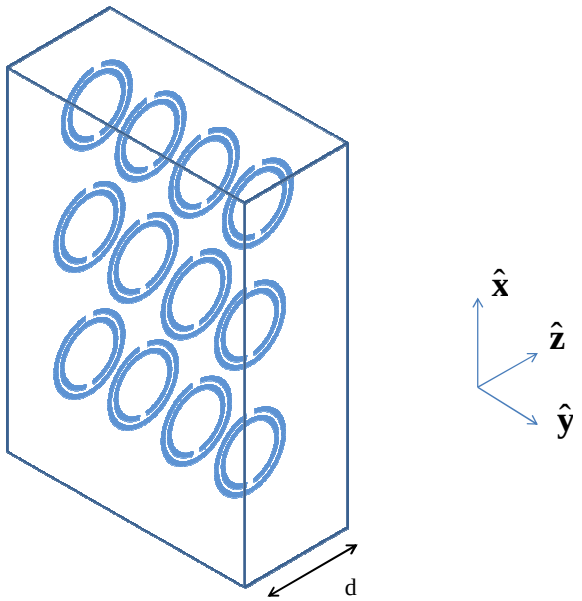


Figura 72: Strato di un mezzo anisotropo costituito da una schiera di Split Ring Resonators.

Abbiamo mostrato nel paragrafo precedente che è possibile progettare un polarizzatore TE in riflessione se si utilizza uno strato caratterizzato dalle (18); questo strato può essere facilmente realizzato alle frequenze delle microonde (capitolo 1), utilizzando un metamateriale costituito da una schiera di Split Ring Resonators (SRRs) come è mostrato in Figura 72. Come è stato già discusso nel capitolo 1, una distribuzione di anelli concentrici metallici determina la seguente caratteristica di anisotropia e di dispersione per la permeabilità efficace del mezzo:

$$\underline{\boldsymbol{\mu}} = \mu_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y(f) & 0 \\ 0 & & 1 \end{bmatrix} \quad \mu_y(f) = 1 - \frac{(1-\mu_\infty) f^2}{f^2 - f_{ris}{}^2 - j\gamma f} \qquad (22)$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0$$

dove i termini μ_∞, f_{ris} γ indicano rispettivamente la permittività a frequenza infinita, la frequenza di risonanza e la frequenza di damping; il legame tra questi termini e le dimensioni degli anelli di metallo sono date nel capitolo 1.

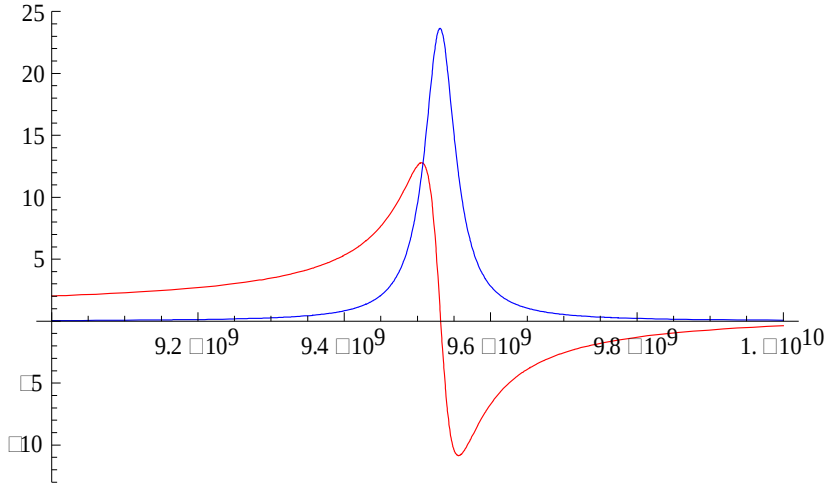


Figura 73: Andamento in frequenza della permeabilità.

Consideriamo, ora, che incida un'onda piana proveniente da un semispazio di aria con il vettore d'onda che giace nel piano $\{x, z\}$ e pari a: $\mathbf{k}_{inc} = k_0 \cos\theta_{in}\hat{\mathbf{z}} + k_0 \sin\theta_{in}\hat{\mathbf{x}}$.

Se l'onda piana è polarizzata linearmente TE all'interno dello strato, essa presenterà la seguente costante di propagazione lungo l'asse z e impedenza caratteristica (10):

$$\begin{aligned} k_z^{TE} &= k_0 \cos\theta_{in} \\ \eta^{TE} &= \eta_0 / \cos\theta_{in} \end{aligned} \qquad (23)$$

Se l'onda piana è invece polarizzata linearmente TM avremo:

$$\begin{aligned} k_z{}^{TM} &= k_0 \sqrt{\mu_y(f) - \sin^2\theta_{in}} \\ \eta^{TM} &= \eta_0 \sqrt{\mu_y(f) - \sin^2\theta_{in}} \end{aligned} \qquad (24)$$

Si ottiene dalla (11) che i coefficienti di Fresnel assumono la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \rho^{TE} &= 0 \\ \rho^{TM}(f, \theta_{in}) &= \frac{\sqrt{\mu_y(f) - \sin^2\theta_{in}} - cos\theta_{in}}{\sqrt{\mu_y(f) - \sin^2\theta_{in}} + cos\theta_{in}} \end{aligned} \qquad (25)$$

Il coefficiente di riflessione alla sezione $z = 0$ è nullo per la polarizzazione TE $\left(\Gamma^{TE} = 0\right)$; al contrario, per il modo TM è una funzione che dipende dalla frequenza e dall'angolo di incidenza:

$$\Gamma_{in}^{TM}\left(f,\theta_{in}\right)=\rho^{TE}\left(f,\theta_{in}\right)\frac{1-e^{-2jk_z^{TM}(f,\theta_{in})d}}{1-\left(\rho^{TE}\left(f,\theta_{in}\right)\right)^2 e^{-2jk_z^{TE}(f,\theta_{in})d}} \qquad (26)$$

Lavorando nell'intervallo di frequenza per il quale la permeabilità $\mu_y\left(f\right)$ assume valori negativi, otteniamo che sia la costante di propagazione e sia l'impedenza caratteristica (10) diventano delle funzioni puramente immaginarie (se ipotizziamo di trascurare le perdite $\gamma=0$); quindi, il coefficiente di riflessione diventa una funzione costante di modulo unitario e indipendente dalla frequenza e dall'angolo di incidenza $\left(\Gamma_{in}^{TM}\left(f,\theta_{in}\right)=1\right)$. L'intervallo di frequenza in cui la permeabilità assume valori negativi è delimitato a sinistra dalla frequenza di risonanza f_{ris} e a destra dalla frequenza alla quale la permeabilità assume il valore 0 $\left(\mu_y\left(f_0\right)=0\Rightarrow \quad f_0\approx f_{ris}/\sqrt{\mu_\infty}\right)$. L'ampiezza di tale banda di frequenza dipende dal valore di μ_∞, che è funzione delle dimensioni degli Split Ring Resonators (SRRs) e quindi può essere facilmente ingegnerizzata.

Vogliamo ora trattare l'influenza delle perdite $\left(\gamma\neq 0\right)$ dovute alla conducibilità finita dei metalli utilizzati. Ipotizziamo che nell'intervallo di frequenza di nostro interesse tali perdite siano piccole:

$$\begin{cases}\mu_y\left(f\right)=-\mu_r\left(f\right)-j\,\mu_i\left(f\right) & \\ \mu_i\left(f\right)<<\mu_r\left(f\right) & f\in\left(f_{ris},f_0\right] \\ \mu_r\left(f\right)>0 & \end{cases}$$

Possiamo applicare le seguenti approssimazioni per ricavare la costante di propagazione e l'impedenza caratteristica:

$$\begin{aligned} k_z^{TM}\left(\theta_{in}\right) &= k_0\sqrt{-\mu_r-sin^2\left(\theta_{in}\right)-j\mu_i}=k_0\sqrt{-\mu_r-sin^2\left(\theta_{in}\right)}\sqrt{1+j\mu_i/\left(\mu_r+sin^2\left(\theta_{in}\right)\right)} \\ &\simeq -jk_0\left(\psi_i\left(\theta_{in}\right)+j\psi_r\left(\theta_{in}\right)\right) \\ \psi_r\left(\theta_{in}\right) &= \mu_i/2\sqrt{\mu_r+sin^2\left(\theta_{in}\right)} \\ \psi_i\left(\theta_{in}\right) &= \sqrt{\mu_r+sin^2\left(\theta_{in}\right)} \end{aligned} \qquad (27)$$

e

$$\eta^{TM}\left(\theta_{in}\right)=\eta_0\sqrt{-\mu_r-sin^2\left(\theta_{in}\right)-j\mu_i}\simeq\eta_0\left(\psi_r-j\psi_i\right) \tag{28}$$

Il coefficiente di Fresnel allora è il seguente:

$$\begin{aligned}
\rho^{TM} &= r^{TM}\,e^{-j\varphi^{TM}}\\
r^{TM} &\simeq \sqrt{\frac{\left(cos\left(\theta_{in}\right)-\psi_r\left(\theta_{in}\right)\right)^2+\psi_i\left(\theta_{in}\right)^2}{\left(cos\left(\theta_{in}\right)+\psi_r\left(\theta_{in}\right)\right)^2+\psi_i\left(\theta_{in}\right)^2}}\approx 1+\frac{2\psi_r\left(\theta_{in}\right)cos\left(\theta_{in}\right)}{\psi_i\left(\theta_{in}\right)^2+\cos^2\left(\theta_{in}\right)-2\psi_r\left(\theta_{in}\right)cos\left(\theta_{in}\right)}\\
\varphi^{TM} &\approx arctan\left(2\psi_i\left[\theta_{in}\right]cos\left(\theta_{in}\right)/\left(\psi_i^2\left(\theta_{in}\right)-cos^2\left(\theta_{in}\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Applicando tale coefficiente e l'espressione **Error! Reference source not found.** alla (26) otteniamo:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{in}^{TM} &\simeq r^{TM}e^{-j\varphi^{TM}}\frac{1-e^{-2k_0d\psi_i}e^{-2jk_0d\psi_r}}{1-\left(r^{TM}\right)^2e^{-j2\varphi^{TM}}e^{-2k_0d\psi_i}e^{-2jk_0d\psi_r}}=\\
&\approx r^{TM}\frac{sinh\left(j\,k_0d\,\psi_r+k_0d\,\psi_i\right)}{sinh\left(j\,(k_0d\,\psi_r+\varphi^{TE})+k_0d\,\psi_i\right)}=r^{TM}\frac{tanh\left(k_0d\,\psi_i\right)cos\left(k_0d\,\psi_r\right)+jsin\left(k_0d\,\psi_r\right)}{tanh\left(k_0d\,\psi_i\right)cos\left(k_0d\,\psi_r+\varphi^{TE}\right)+jsin\left(k_0d\,\psi_r+\varphi^{TE}\right)}
\end{aligned} \tag{29}$$

Ponendo $k_0d\,\psi_i\gg 1$ $\left(k_0d\sqrt{\mu_r+sin^2\left(\theta_{in}\right)}>>1\right)$ possiamo approssimare la tangente iperbolica con 1 e, così, ottenere che il coefficiente in riflessione è pari a:

$$\Gamma_{in}^{TM}\approx r^{TM}e^{-j\varphi^{TM}} \tag{30}$$

Il modulo del coefficiente di riflessione è circa unitario se il rapporto tra la parte reale e immaginaria della permeabilità è sufficientemente grande $\left(\mu_r/\mu_i\gg 1\Rightarrow\ r^{TM}\simeq 1\right)$ ed è indipendente dall'angolo del campo incidente.

Abbiamo appena mostrato che è possibile progettare un polarizzatore in riflessione TM nell'intervallo in cui la permeabilità è negativa, tale polarizzatore è indipendente dall'angolo se le perdite non sono troppo grandi e se soprattutto vale la condizione:

$$k_0d\sqrt{\mu_r+sin^2\left(\theta_{in}\right)}>>1 \tag{31}$$

Quest'ultima condizione può essere soddisfatta in due differenti modi: scegliendo uno spessore dello strato sufficientemente grande, oppure sfruttando i valori elevati del valore assoluto che la permeabilità può assumere nell'intervallo di frequenza da noi considerato. La

prima scelta permette di ottenere un banda molto ampia; al contrario, la scelta di un mezzo che lavori solo nell'intervallo di frequenze per le quali il valore assoluto della permittività sia sufficientemente grande e con uno spessore piccolo permette di ottenere una banda molto stretta.

Qui di seguito riportiamo i risultati di un progetto di un polarizzare TM in riflessione a banda stretta. Gli SRRs sono stati progettati in modo da presentare un andamento in frequenza della permittività lungo l'asse y che presenta una frequenza di risonanza pari a 9.53 GHz e la frequenza f_0 pari a 11 GHz (Figura 73). Nell'intervallo delimitato da queste due frequenze il coefficiente di riflessione è grande e è pari a 1 nel sotto intervallo in cui la permittività è sufficientemente elevata da permettere il soddisfacimento della condizione (31) (Figura 74).

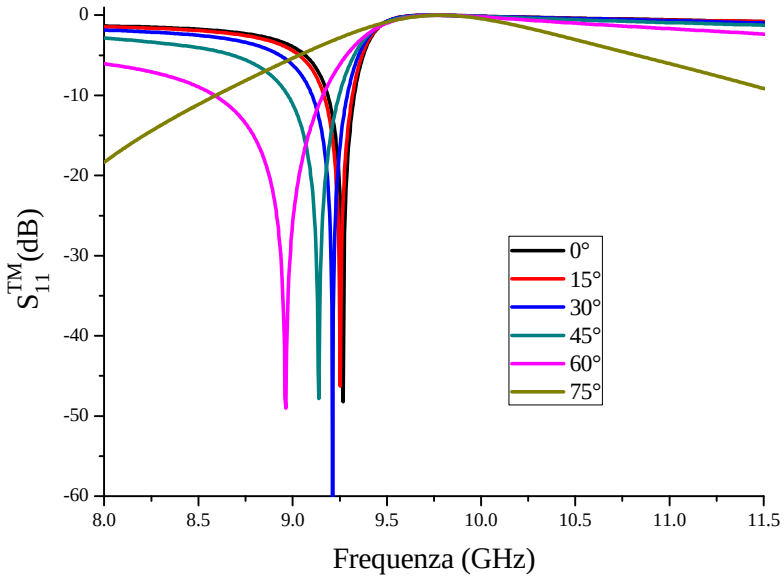


Figura 74: Coefficiente di riflessione in dB per la polarizzazione TM
$(a = 10\,mm, c = 1\,mm, d = 0.1\,mm, l = 2\,mm, r_{in} = 2\,mm, r_{out} = 4.1\,mm)$.

Questo sotto intervallo è più evidente mostrando il coefficiente in trasmissione (Figura 75).

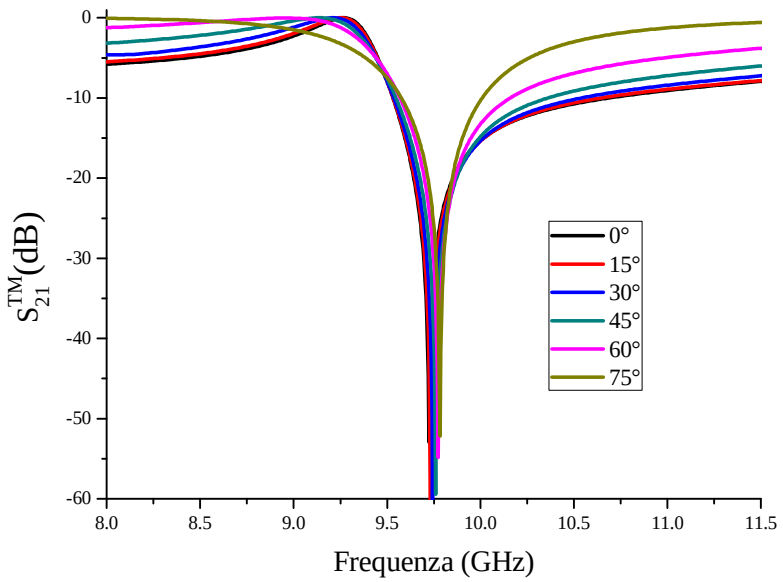


Figura 75: Coefficiente di trasmissione in dB per la polarizzazione TM

$(a = 10\,mm, c = 1\,mm, d = 0.1\,mm, l = 2\,mm, r_{in} = 2\,mm, r_{out} = 4.1\,mm)$.

Per quanto riguarda la riflessione e la trasmissione della polarizzazione TE, i risultati mostrano che lo strato di SRRs permette completamente la trasmissione di tale polarizzazione (Figura 76 e Figura 77).

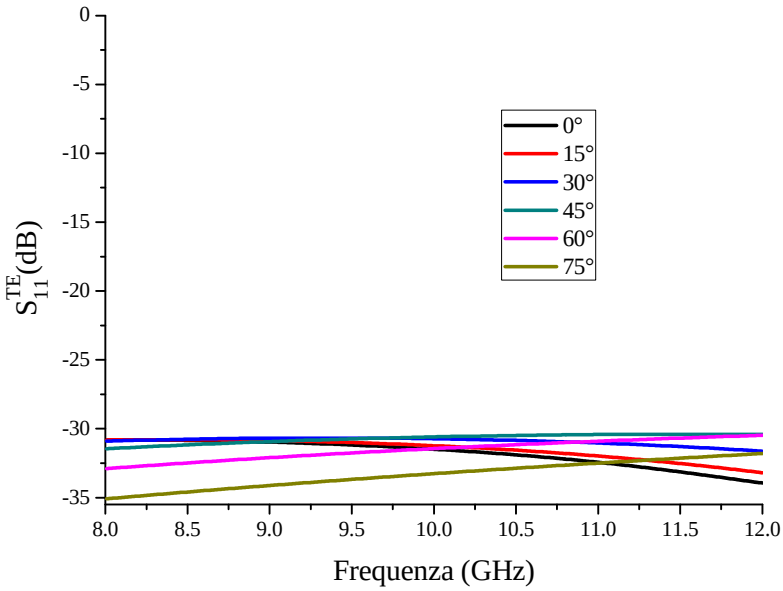


Figura 76: Coefficiente di riflessione in dB per la polarizzazione

TE $(a = 10\,mm, c = 1\,mm, d = 0.1\,mm, l = 2\,mm, r_{in} = 2\,mm, r_{out} = 4.1\,mm)$.

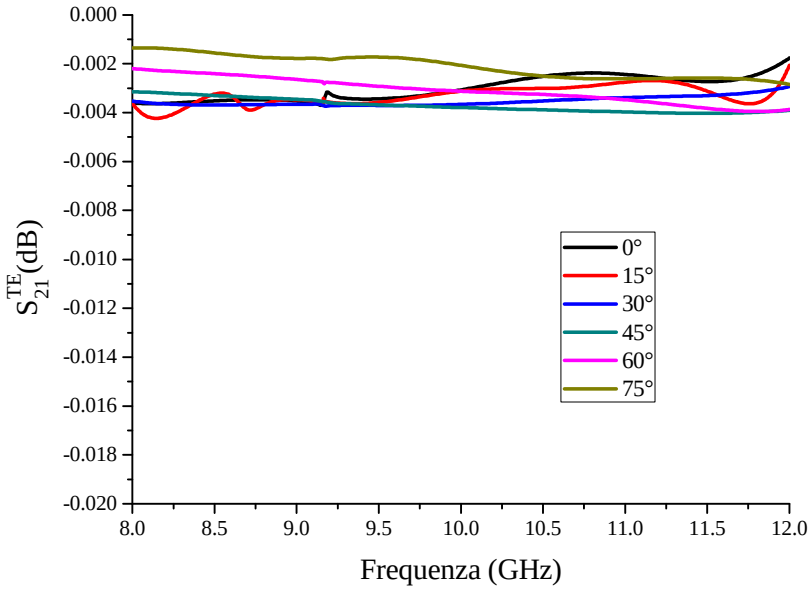


Figura 77: Coefficiente di trasmissione in dB per la polarizzazione TE

$$\left(\mathbf{a = 10\,mm, c = 1\,mm, d = 0.1\,mm, l = 2\,mm, r_{in} = 2\,mm, r_{out} = 4.1\,mm}\right).$$

La trattazione appena discussa per il progetto di un polarizzatore TM in riflessione a microonde consente di progettare un polarizzatore TE in riflessione utilizzando il principio di dualità: invertendo infatti il materiale utilizzato, da magnetico a dielettrico, anche la polarizzazione riflessa cambia da TM a TE. È facile dimostrare che se si utilizza un mezzo che è il duale degli SRRs (per esempio una schiera di fili metallici paralleli), descritto dalla (19), si ottiene il progetto di un polarizzatore in riflessione TE.

4. PROGETTO DI UN POLARIZZATORE IN RIFLESSIONE TE NEL VISIBILE

Dopo aver trattato il progetto di un polarizzatore in riflessione TM alle frequenze delle microonde, vogliamo ora mostrare quello di un polarizzatore TE nelle frequenze del visibile. Abbiamo discusso nel paragrafo 2 che è possibile progettare un polarizzatore TE se il mezzo utilizzato è descritto dalla (12) o dalla (14).

A frequenze ottiche tale dispositivo può essere realizzato utilizzando una struttura stratificata composta da un'alternanza di lamine dielettriche e plasmoniche isotrope di spessore d_1 e d_2 sufficientemente piccole.

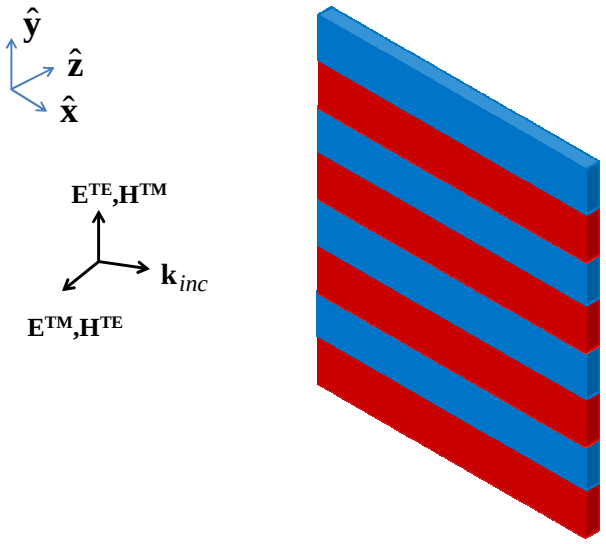


Figura 78: Mezzo birifrangente realizzato a partire da un mezzo stratificato.

È stato mostrato nel capitolo 1 che il mezzo stratificato rappresentato in Figura 78, costituito da un alternarsi di un materiale plasmonico di permittività relativa $\varepsilon_1(f)$ e un mezzo dielettrico di permittività ε_2, mima il comportamento di un mezzo birifrangente uniassiale, il cui tensore della permittività $\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}$ e la permeabilità μ sono i seguenti:

$$\underline{\boldsymbol{\varepsilon}} = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad \mu = \mu_0 \tag{32}$$

E dove termini della matrice sono i seguenti:

$$\begin{aligned} \varepsilon_y(f) &= (1+\kappa)\frac{\varepsilon_1(f)\varepsilon_2}{\kappa\varepsilon_1(f)+\varepsilon_2} \\ \varepsilon_x(f) &= \varepsilon_z(f) = \frac{\varepsilon_1(f)+\kappa\varepsilon_2}{1+\kappa} \end{aligned} \tag{33}$$

e κ è il rapporto tra gli spessori:

$$\kappa = \frac{d_2}{d_1} \tag{34}$$

Diversamente dal progetto del polarizzatore alle frequenze delle microonde, in questa configurazione si ottengono dei valori nella matrice della permittività che sono differenti dall'unità e di natura dispersiva; il valore unitario della permeabilità nel piano $\{x, z\}$ (22)

permetteva, nel caso precedente, di assicurare un coefficiente di trasmissione unitario indipendentemente dalla frequenza di lavoro (Figura 77). Al contrario, in tale progetto la natura dispersiva degli elementi $\varepsilon_x(f)$ e $\varepsilon_z(f)$ comporta una riduzione sulla banda di lavoro: tali elementi, infatti, possono assumere il valore unitario solo ad una data frequenza f_1 e variano intorno ad essa con un andamento in frequenza di tipo plasmonico (Figura 79).

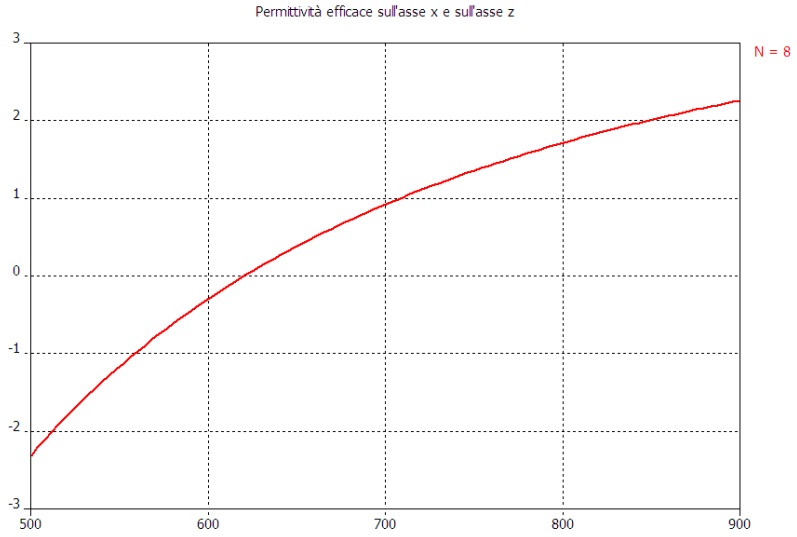


Figura 79: Andamento in frequenza di $\varepsilon_x(f)$ e $\varepsilon_z(f)$.

La permittività sull'asse y $\varepsilon_y(f)$ invece presenta un andamento di tipo Lorentziano, come è mostrato in Figura 80.

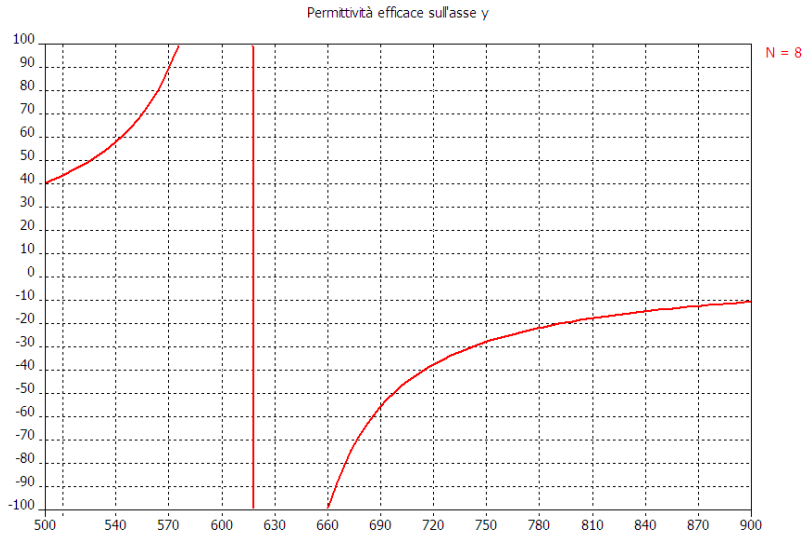


Figura 80: Andamento in frequenza di $\varepsilon_y(f)$.

Le (19) che determinano le condizioni per il progetto del polarizzatore TE in riflessione impongono che la struttura debba lavorare alla frequenza f_1 per la quale la permittività lungo l'asse x assume il valore unitario e la permittività sull'asse y assume in valore assoluto valori molto elevati:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x(f_1) &= \frac{\varepsilon_1(f)+\kappa\varepsilon_2}{1+\kappa} = 1 \\ \left|\varepsilon_y(f_1)\right| &= \left|(1+\kappa)\frac{\varepsilon_1(f)\varepsilon_2}{\kappa\varepsilon_1(f)+\varepsilon_2}\right| \gg 1 \end{aligned} \qquad (35)$$

Queste due condizioni determinano i valori che debbono assumere le permittività dei due mezzi utilizzati $(\varepsilon_1(f)$ e $\varepsilon_2)$ e il rapporto tra gli spessori κ. Ad esempio, utilizzando come mezzi l'Argento – che ha un comportamento plasmonico nella banda del visibile (capitolo 1) – e il Carbonato di Silicio $(\varepsilon_2 = 6.45)$ e imponendo un rapporto tra gli spessori pari ad 1, si ottiene che a 700 THz la permittività efficace lungo x assume il valore unitario (Figura 79) e la permittività efficace lungo y assume valori in modulo molto grandi (Figura 80).

Il coefficiente di riflessione per incidenza di un'onda polarizzata TE con il vettore d'onda che giace nel piano $\{x,z\}$ è calcolabile utilizzando il principio di dualità; i risultati ottenuti in precedenza nel paragrafo 3 sono impiegabili una volta che si sostituisca al tensore di

permeabilità quello di permittività di questa configurazione e si consideri la polarizzazione TE al posto di quella TM:

$$\Gamma_{in}^{TE} \simeq r^{TE} \frac{tanh\left(k_0 d\,\psi_i\right) cos\left(\,k_0 d\,\psi_r\,\right) + jsin\left(\,k_0 d\,\psi_r\,\right)}{tanh\left(k_0 d\,\psi_i\right) cos\left(k_0 d\,\psi_r + \varphi^{TE}\right) + jsin\left(k_0 d\,\psi_r + \varphi^{TE}\right)} \qquad (36)$$

Ponendo $k_0 d\,\psi_i \gg 1$ $\left(k_0 d\sqrt{\varepsilon_r + sin^2\left(\theta_{in}\right)} >> 1\right)$ possiamo approssimare la tangente iperbolica con 1 e, così, ottenere che il coefficiente in riflessione è pari a:

$$\Gamma_{in}^{TE} \approx r^{TE} e^{-j\varphi^{TE}} \qquad (37)$$

Qui di seguito sono riportati gli andamenti del coefficiente di riflessione e di trasmissione del polarizzatore a riflessione TE; come si può notare, in Figura 81 e in Figura 82 si ha un ottimo comportamento del polarizzatore per la polarizzazione TE su un'ampia banda (500-900 THz), indipendentemente dall'angolo di incidenza. Non si ottiene la completa riflessione poiché sono stati utilizzati mezzi con perdite $\left(\left|S_{11}^{TE}\right|^2 \simeq -0.5\,dB\right)$. La risposta per incidenza di un'onda polarizzata TM è invece a banda stretta: ciò è dovuto all'impossibilità di avere un valore unitario della permittività sul piano $\{x, z\}$ su un'ampia banda (la struttura stratificata è stata progettata per avere tale valore alla frequenza di 700 THz).

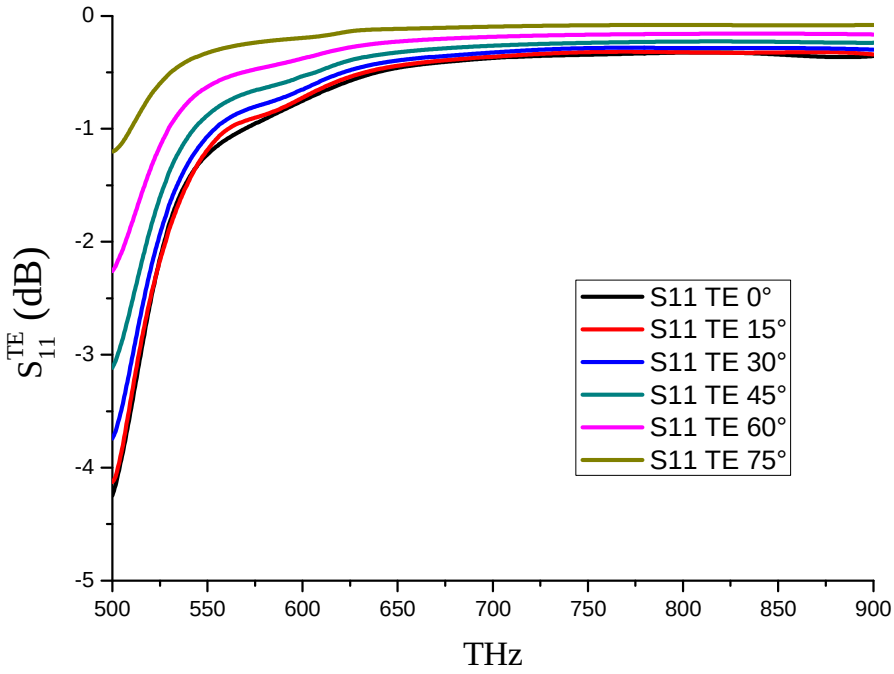


Figura 81: Coefficiente di riflessione per incidenza TE d_1=d_2=11.65nm.

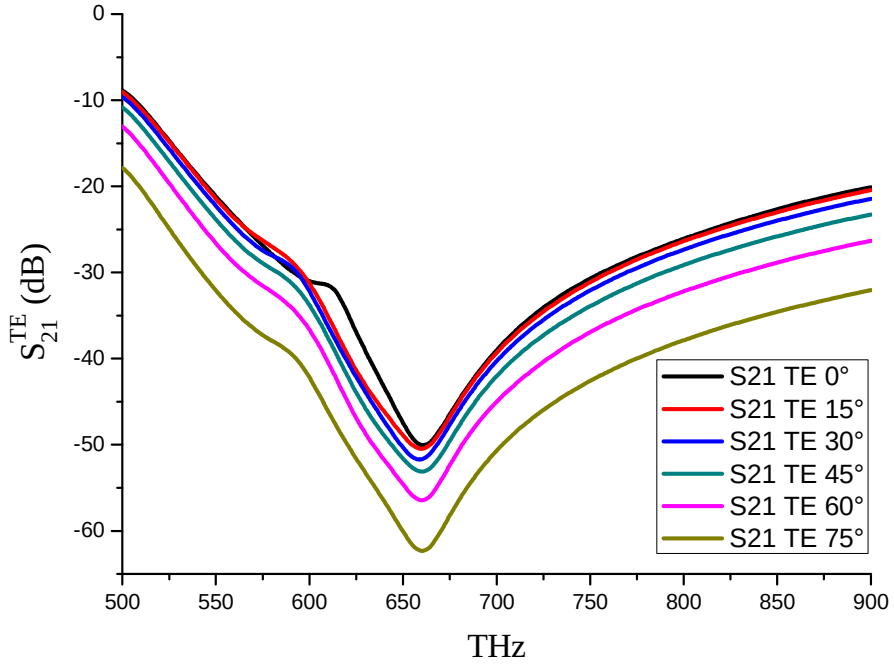


Figura 82: Coefficiente di trasmissione per incidenza TE d_1=d_2=11.65nm

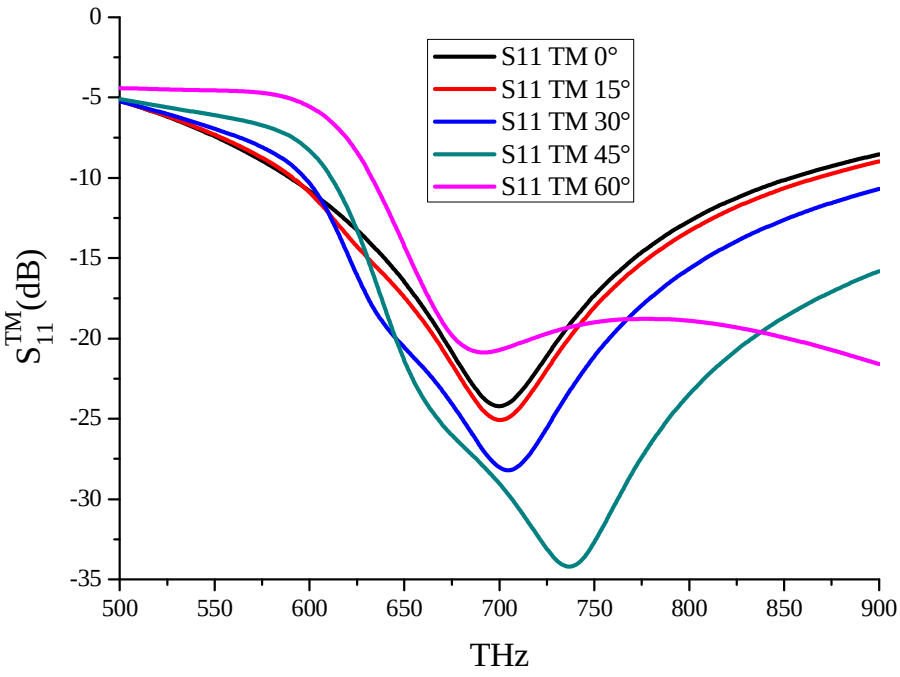


Figura 83: Coefficiente di riflessione per incidenza TM d_1=d_2=11.65nm

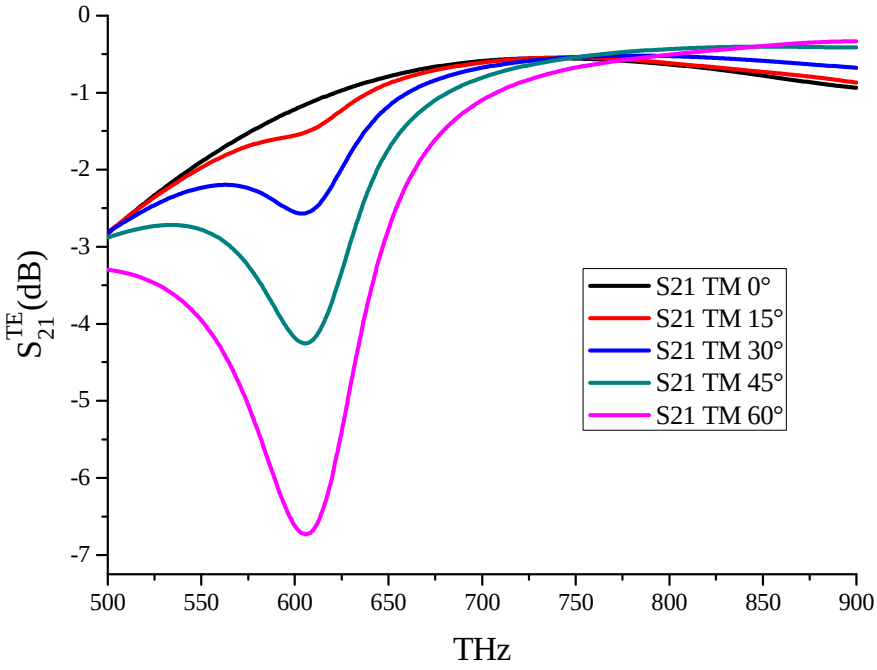


Figura 84: Coefficiente di trasmissione per incidenza TM d_1=d_2=11.65nm.

Appendice A

Qui di seguito sono riportate alcune definizioni e proprietà degli integrali ellittici:

Integrali Ellittici di prima $F(t,m)$ e seconda specie $E(t,m)$:

$$
\begin{aligned}
F(t,m) &= \int_0^t \frac{du}{\sqrt{\left(1-u^2\right)\left(1-mu^2\right)}} \overset{u=\sin\phi}{=} \int_0^{\sin^{-1}(t)} \frac{d\phi}{\sqrt{1-m\sin^2(\phi)}} = F(\varphi,m) \\
E(t,m) &= \int_0^t \sqrt{\frac{1-mu^2}{1-u^2}}du \overset{u=\sin\phi}{=} \int_0^{\sin^{-1}(t)} \sqrt{1-m\sin^2(\phi)}d\phi = E(\varphi,m)
\end{aligned}
\tag{38}
$$

Integrali Ellittici completi di prima $K(m)$ e seconda specie $E(m)$

$$
\begin{aligned}
K(m) &= F(1,m) = F(\pi/2,m) \\
E(m) &= E(1,m)
\end{aligned}
\tag{39}
$$

Relazioni tra le funzioni ellittiche:

$$
\begin{aligned}
&F(1/\sqrt{m},m) = K(m) + jK(1-m) \\
&E(1/\sqrt{m},m) = E(m) - jE(1-m) + jK(1-m) \\
&E(m)K(1-m) + K(m)E(1-m) - K(m)K(1-m) = \pi/2 \\
&F(t,m), t \to \infty = jK(1-m)
\end{aligned}
\tag{40}
$$