



Scuola Dottorale in Ingegneria
Sezione di Ingegneria Meccanica e Industriale

XXIII Ciclo Dottorale

**Un metodo alle equazioni integrali di contorno per la
modellazione dell'invisibilità acustica**

Lorenzo Burghignoli

Docente guida: Prof. Umberto Iemma
Coordinatore: Prof. Edoardo Bemporad

Alla mia famiglia.

Ringraziamenti

Innanzitutto voglio ringraziare la mia famiglia. Il vostro affetto e la fiducia incondizionata mi hanno permesso di affrontare serenamente gli anni di formazione dottorale anche nei momenti più difficili.

Un sincero ringraziamento va al Prof. Umberto Iemma, il mio tutor, per tutti gli insegnamenti, i consigli, gli stimoli, il sostegno e per avermi introdotto nell'affascinante mondo della ricerca scientifica.

Voglio ringraziare Jacopo Serafini, Marco Molica e Matteo Diez, miei compagni di stanza, per le interessanti discussioni e per la simpatia che avete sempre dimostrato.

Un ringraziamento di cuore va alla mia "collega" Cecilia Leotardi, con la quale ho condiviso ogni momento importante fin dai tempi della Laurea. Il tuo affetto e la tua stima sono stati, e sono tutt'ora, fondamentali nel lavoro come nella vita.

Infine voglio ringraziare Monica Rossetti per l'amore ricevuto e per avermi supportato e "sopportato" nel periodo di scrittura della tesi.

Indice

Introduzione	6
1 Il problema di <i>Cummer-Schurig</i>	16
1.1 Le equazioni di governo dell'acustica lineare nel dominio della frequenza	16
1.2 La trasformazione di coordinate per il problema di <i>Cummer-Schurig</i>	17
1.3 Le equazioni nello spazio trasformato	19
1.4 Le condizioni al contorno	21
2 Un approccio integrale al problema di <i>Cummer-Schurig</i>	25
2.1 L'equazione di Helmholtz per il problema di <i>Cummer-Schurig</i>	25
2.2 L'equazione di Kirchhoff-Helmholtz nel mantello acustico	27
2.3 L'equazione di Kirchhoff-Helmholtz nella regione esterna	28
2.4 Il sistema di equazioni per il problema del <i>cloaking</i> acustico	30
2.5 L'estensione al caso multicorpo	31
3 Soluzione numerica attraverso il Metodo degli Elementi di Contorno Esteso	34
3.1 Il sistema di equazioni discretizzato	34
3.2 La matrice di trasferimento del <i>cloaking</i>	39
3.3 L'estensione al caso multicorpo	39
4 Risultati	42
4.1 Impostazione generale delle simulazioni numeriche	42
4.2 Risultati numerici nel caso di singolo ostacolo	44

4.3	L'efficienza del mantello acustico: la misura del campo secondario in Ω_h .	50
4.4	Risultati numerici nel caso di due oggetti acusticamente rigidi	53
5	Conclusioni	64
	Bibliografia	66
A	Invarianza delle equazioni di governo delle piccole perturbazioni acustiche in una trasformazione di coordinate	69
B	L'Equazione di Kirchhoff-Helmholtz	73

Introduzione

Nell'ultimo decennio si è assistito ad una crescita sorprendente dell'interesse, da parte della comunità scientifica, nei riguardi del concetto di *invisibilità* acustica. Ispirati dai risultati ottenuti in campo ottico ed elettromagnetico, dove il fenomeno dell'invisibilità è da tempo oggetto di studio e per il quale è disponibile in letteratura una vasta produzione scientifica, diversi autori si sono cimentati nell'impresa di estendere tale concetto al campo dell'acustica.

Quando un'onda di pressione interagisce con un ostacolo presente nel mezzo di propagazione, essa è costretta a deviare rispetto al caso indisturbato. Questo fenomeno, noto come *scattering* acustico, distorce il campo di pressione incidente manifestando la presenza dell'ostacolo. In quest'ottica, rendere un oggetto acusticamente *invisibile* equivale ad eliminare gli effetti di *scattering* da esso prodotti. Il *cloaking* acustico è una tecnica di mascheramento che consiste nel rivestire l'oggetto che si vuole rendere acusticamente *invisibile* con uno strato di uno speciale materiale, appartenente alla classe dei cosiddetti *metamateriali*, le cui proprietà non convenzionali consentono di controllare la propagazione delle perturbazioni acustiche nel rivestimento curvando i fronti d'onda attorno all'oggetto e riallineandoli a valle di questo come se fossero indisturbati.

Il presente lavoro di tesi ha come oggetto lo sviluppo di una formulazione integrale originale per l'analisi del *cloaking* acustico bidimensionale di *Cummer-Schurig*. La formulazione è ottenuta modellando le equazioni di governo dell'acustica nel rivestimento, indicato nel seguito con il termine mantello¹ acustico, con un'equazione di Helmholtz non

¹Traduzione italiana del termine inglese *cloak*.

omogenea nella quale i termini dipendenti dai parametri caratteristici del *metamateriale* sono trattati come una sorgente equivalente distribuita nel mantello. Il problema differenziale viene quindi affrontato applicando il metodo della soluzione fondamentale e risolto numericamente attraverso un Metodo degli Elementi di Contorno opportunamente esteso per tenere conto del contributo della sorgente equivalente.

Il Cloaking acustico

Nell'articolo scientifico "*One path to acoustic cloaking*" [1], S. A. Cummer e D. Schurig dimostrano, a livello teorico, che l'*invisibilità* acustica è realizzabile, in due dimensioni, sfruttando le proprietà di invarianza delle equazioni di governo dell'acustica lineare a seguito di una trasformazione di coordinate. La metodologia da loro introdotta si basa sui pionieristici risultati ottenuti da J. B. Pendry *et al.* [2] in campo elettromagnetico² sfruttando l'analogia esistente tra le equazioni di Maxwell e le equazioni dell'acustica in

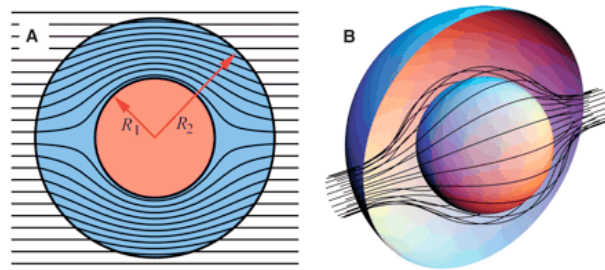


Figura 1: Il *cloaking* elettromagnetico teorizzato da J. B. Pendry (Tratta da [2]).

due dimensioni. Il metodo da loro proposto può essere descritto come segue. Si consideri in \mathbb{R}^2 il dominio semplicemente connesso individuato da una circonferenza di raggio R_2 e si applichi ad esso una trasformazione di coordinate che porti il centro della circonferenza in una lacuna circolare di raggio $R_1 < R_2$ lasciando inalterata la circonferenza stessa (cfr. Fig. 1). Nella trasformazione il dominio semplicemente connesso si deforma nella regio-

²In campo elettrostatico la stessa idea ma con un approccio differente era stata applicata qualche anno prima da Greenleaf *et al.* in [3]. In campo elettromagnetico invece, contemporaneamente al lavoro di Pendry *et al.*, Leonhardt in [4] propone un metodo basato sulle trasformazioni conformi.

ne a connessione multipla individuata dalla corona circolare compresa tra le circonferenze di raggio R_1 e R_2 , indicata nella Fig. 2 con il simbolo Ω_c e corrispondente al mantello acustico, mentre la regione esterna al mantello, indicata nella stessa figura con il simbolo Ω_h , rimane invece indeformata.

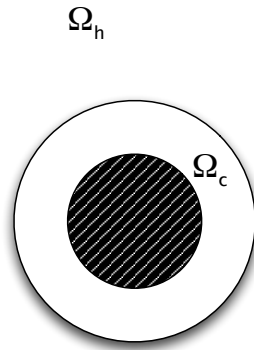


Figura 2: La regione esterna Ω_h e la regione deformata Ω_c .

Si consideri quindi un'onda acustica, governata dall'equazione di Helmholtz omogenea in \mathbb{R}^2 , che si propaghi nel mezzo elastico presente nella regione indeformata. Applicando la trasformazione di coordinate sia alla funzione d'onda che all'equazione di governo, si ottengono le corrispondenti espressioni scritte in termini delle nuove coordinate nella regione deformata. Si dimostra (cfr., *e.g.*, l'App. A per i dettagli della dimostrazione) che la forma dell'equazione delle piccole perturbazioni acustiche, valida nel mezzo elastico ideale sopra descritto, rimane invariata in una trasformazione di coordinate, *i.e.* la nuova equazione descrive ancora un fenomeno di tipo propagativo, e contestualmente vengono a modificarsi i parametri caratteristici del mezzo. In particolare il modulo di comprimibilità, costante nel vecchio sistema di riferimento, diventa variabile lungo la direzione radiale del mantello mentre la densità, rappresentata nel vecchio sistema da una grandezza scalare costante, si trasforma in un tensore del second'ordine i cui elementi risultano anch'essi funzioni della distanza radiale. Le nuove equazioni si possono dunque reinterpretare in termini delle coordinate nello spazio fisico ipotizzando che nel mantello sia presente un mezzo elastico caratterizzato da un modulo di comprimibilità non omogeneo e una densità non omogenea e anisotropa. Tali inusuali proprietà permettono al mantello acustico

di deviare i fronti d'onda di una perturbazione incidente attorno alla lacuna e riallinearli a valle di questa senza generare alcun fenomeno di *scattering* nel campo esterno (cfr. Fig. 3).

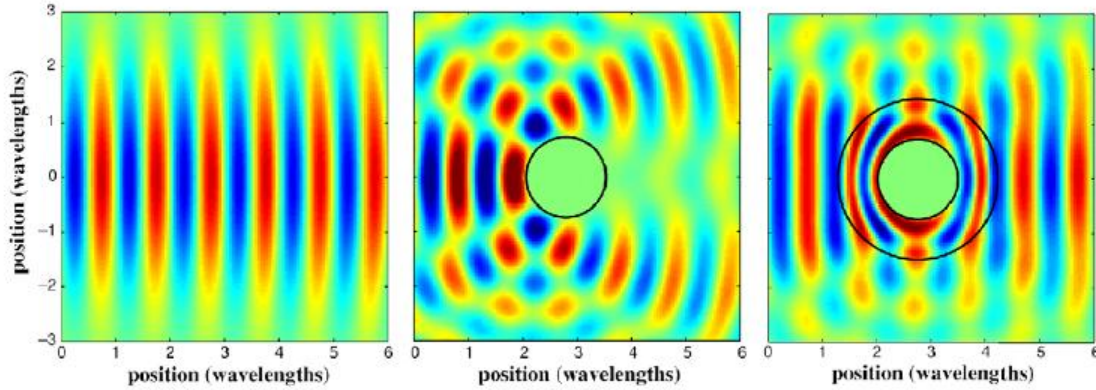


Figura 3: Confronto tra campo totale (immagine al centro) dovuto all'interazione tra un fascio gaussiano (immagine a sinistra) con un ostacolo cilindrico e lo stesso campo (immagine a destra) in presenza del mantello acustico di *Cummer-Schurig* (Tratta da [1]).

Successivamente alla pubblicazione del lavoro di S.A. Cummer e D. Schurig diversi autori hanno affrontato il tema del *cloaking* acustico, sia dal punto di vista prettamente teorico, sia proponendo approcci potenzialmente realizzabili con le tecnologie attualmente a disposizione, fino ad arrivare all'effettiva realizzazione sperimentale del mantello acustico. Di seguito vengono citati alcuni lavori di rilievo nell'ottica di inquadrare dal punto di vista cronologico i progressi ottenuti nel campo dell'invisibilità acustica, rimandando per approfondimenti alla sezione dedicata alla bibliografia.

Uno dei primi lavori dedicati all'estensione al caso tridimensionale del *cloaking* di *Cummer-Schurig* è dovuto a Chen e Chan [6] che propongono, nel contesto delle trasformazioni di coordinate, un metodo basato sull'isomorfismo tra l'equazione dell'acustica lineare e l'equazione di continuità della corrente. Il *cloaking* perfetto è quindi confermato risolvendo il problema di scattering attraverso il metodo dell'espansione in serie con funzioni sferiche

di Bessel.

Contemporaneamente alla pubblicazione del lavoro di Chen e Chan, S. Cummer *et al.* [7] ottengono lo stesso risultato basandosi però sulla teoria dello *scattering* acustico. Il metodo proposto è quindi utilizzato per la derivazione del tensore di densità e del modulo di comprimibilità nel caso di rivestimento sferico. I risultati presentati confermano anche in questo caso il potere mascherante del mantello acustico.

In [8] S.A. Cummer *et al.* analizzano il problema dell'invarianza delle equazioni dell'acustica in una trasformazione di coordinate. Attraverso argomentazioni puramente fisiche basate sulle modalità con le quali il flusso di energia acustica e i fronti d'onda si devono trasformare in un cambiamento di coordinate, gli autori mostrano come i vettori Campo Elettrico \mathbf{E} e Campo Magnetico \mathbf{H} nelle equazioni di Maxwell e il vettore di velocità \mathbf{v} nelle equazioni dell'acustica si trasformino diversamente (cfr. Fig. 4).

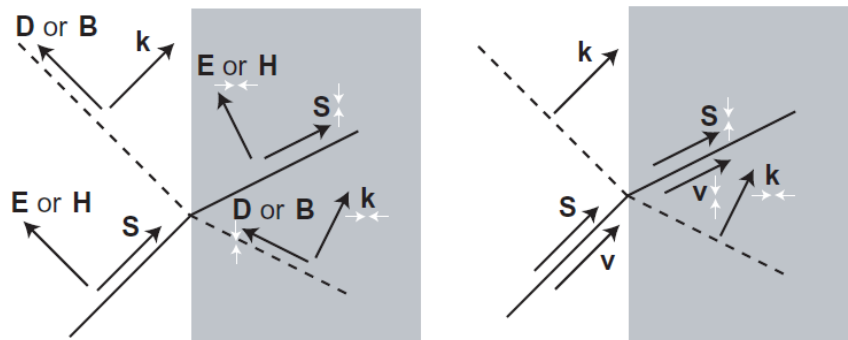


Figura 4: La trasformazione dei vettori nel caso elettromagnetico (sinistra) e acustico (destra) (Tratta da [8]). La regione con lo sfondo bianco è lo spazio indeformato mentre la regione con lo sfondo grigio è lo spazio deformato a seguito di uno "stiramento" dell'asse delle x .

Questo fatto spiega perchè l'analisi condotta da Milton *et al.* in [5], basata sull'assunzione che \mathbf{v} si trasformi nello stesso modo di \mathbf{E} e \mathbf{H} , non fosse in grado di mostrare l'invarianza delle equazioni dell'acustica in una trasformazione di coordinate. In App. A sono ripor-

tati gli sviluppi matematici del metodo, i cui risultati sono utilizzati come base teorica nel primo capitolo del presente lavoro di tesi dedicato alla descrizione del *cloaking* acustico di *Cummer-Schurig* .

Tra i primi studi dedicati agli aspetti realizzativi del *cloaking* si distingue il lavoro di Torrent e Sánchez-Dehesa che in [9] propongono un mantello acustico la cui struttura consiste in un composito multistrato realizzato alternando due tipi di *metamateriali* isotropi. Gli autori mostrano come tali *metamateriali* possano essere costituiti da *crystalli sonici* contenenti due tipi di cilindri materiali caratterizzati da parametri elastici scelti in base al tipo di vincolo acustico richiesto. In Fig.5 è mostrato lo schema realizzativo del mantello.

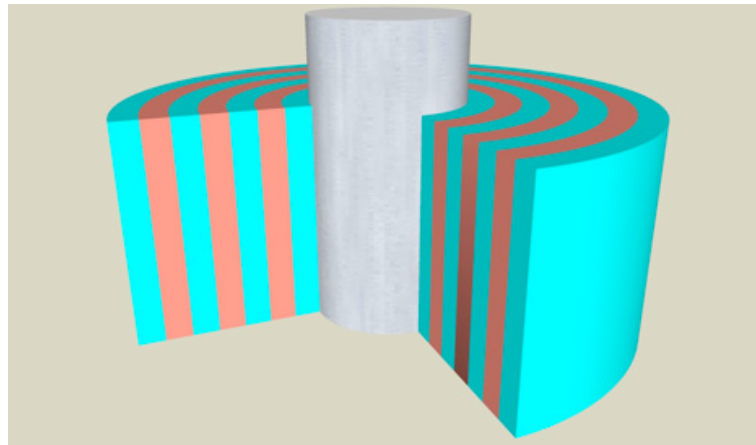


Figura 5: Vista schematica del mantello acustico proposto da Torrent e Sánchez-Dehesa (Tratta da [9]).

Norris in [10] fornisce una teoria organica del *cloaking* acustico attraverso una formulazione alternativa basata sulla teoria dell'elasticità finita. L'autore mostra come il mantello acustico di *Cummer-Schurig* sia in realtà un caso particolare di una classe più generale di mantelli acustici caratterizzati da densità anisotropa e rigidità anisotropa. Questo risultato è ottenuto utilizzando una particolare classe di *metamateriali*, nota con il nome di *pentamode materials* [11], caratterizzata da cinque modi di deformazione simili al taglio,

e un modo di sforzo e deformazione.

Pendry e Li in [12] propongono una modalità di realizzazione di un *metafluido* caratterizzato da densità anisotropa e modulo di compressibilità modellabile arbitrariamente per la progettazione di mantello acustico a banda larga. La strategia realizzativa si basa sull'osservazione che ogni trasformazione di coordinate può essere considerata una sequenza di compressioni e allungamenti con le quali è possibile definire completamente i parametri caratteristici del *metafluido*. L'implementazione di tali parametri è quindi ottenuta definendo una struttura costituita da piastre di massa infinita, attorno alle quali il fluido può scorrere, in grado di modificare la reazione del flusso a gradienti di pressione in una direzione lasciando inalterata la reazione lungo le altre due direzioni.

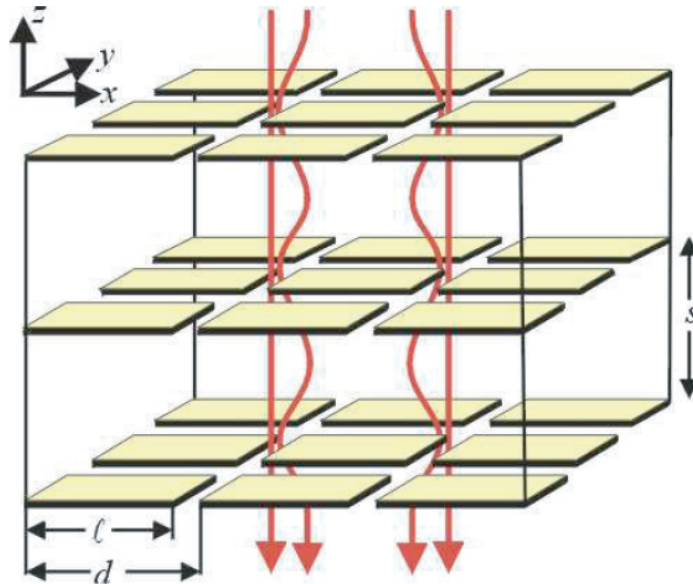


Figura 6: La struttura costituita da piastre di massa infinita proposta da Pendry e Li (Tratta da [12]).

In [13] Hu *et al.* propongono un metodo numerico per la valutazione dei parametri caratteristici del mantello acustico, nel caso di forma arbitraria, basato sull'ipotesi di trasformazione di coordinate armonica. Fissata la forma dell'oggetto da mascherare, quest'assun-

zione permette di determinare la corrispondente trasformazione di coordinate risolvendo l'equazione di Laplace con condizioni al contorno di Dirichlet.

Gli stessi autori in [14] sviluppano una metodologia per la progettazione di un mantello acustico bidimensionale di forma arbitraria non singolare, basata sull'osservazione che i parametri caratteristici del mezzo presente nel mantello possono essere espressi in termini degli allungamenti lungo le direzioni principali di deformazione. Poichè si dimostra che la nascita delle singolarità nei parametri caratteristici del mezzo contenuto nel mantello è connessa al comportamento singolare di uno degli allungamenti principali durante la trasformazione di coordinate, mentre gli altri due allungamenti rimangono al finito, gli autori impongono che anche l'allungamento perpendicolare al piano del mantello tenda allo stesso ordine di infinito dell'allungamento singolare in modo da mantenere al finito tali parametri.

Un esempio di effettiva realizzazione di un mantello acustico è proposto da Popa *et al.* in [15]. Sfruttando la proprietà d'invarianza delle equazioni acustiche in un cambiamento di coordinate e la semplicità delle trasformazioni lineari, gli autori progettano e realizzano un mantello acustico per il mascheramento di un oggetto di forma triangolare immerso in aria le cui caratteristiche inerziali anisotrope sono ottenute con semplici piastre di plastica perforata (cfr. Fig. 7). Le buone prestazioni del dispositivo sono valutate tramite misure del campo di pressione nel caso di una sorgente a banda larga.

L'approccio integrale

La scelta di affrontare il problema del *cloaking* acustico con un approccio integrale è motivato da diverse ragioni. La prima ragione nasce dall'osservazione che in molti problemi di acustica è richiesto di valutare il campo di pressione a distanze anche molto elevate dalle sorgenti che lo hanno prodotto. Un metodo di campo, quale ad esempio il Metodo degli Elementi finiti, il Metodo dei Volumi Finiti o il Metodo delle Differenze Finite, richie-

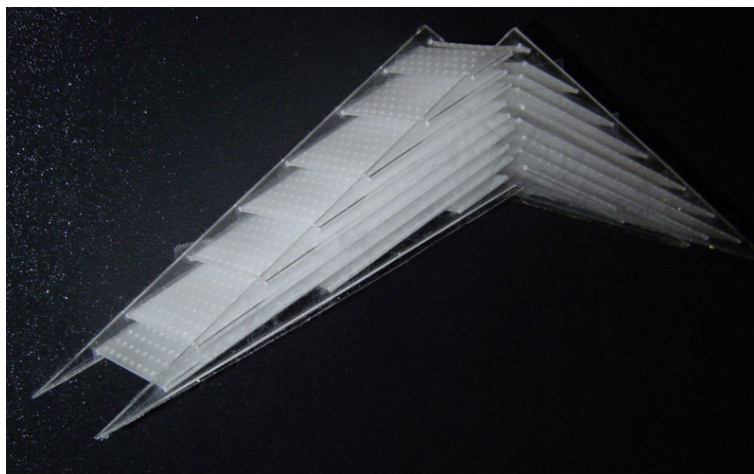


Figura 7: Il mantello acustico realizzato da Popa *et al.* (Tratta da [15]).

derebbe di definire una griglia di calcolo estesa oltre il punto in cui si desidera calcolare la soluzione per soddisfare correttamente la condizione di radiazione ed evitare riflessioni spurie dovute alle inevitabili inaccuratezze numeriche. In conseguenza, all'aumentare della distanza del punto di calcolo dalla sorgente crescono necessariamente i gradi di libertà del sistema e con essi la richiesta di risorse computazionali. Nel caso di analisi a frequenze molto elevate, per le quali sono necessarie griglie molto fitte per ottenere soluzioni sufficientemente accurate, tale richiesta può addirittura essere insostenibile anche per i calcolatori più potenti. Un metodo integrale richiede, invece, di discretizzare solo le superfici presenti nel campo, nel caso di problemi tridimensionali, o le curve di contorno, nel caso di problemi bidimensionali come quello affrontato nel presente lavoro. Pertanto, fissata la frequenza di analisi, *i.e.* la dimensione della griglia di calcolo sulla frontiera del dominio, anche il numero di gradi di libertà risulta fissato e quindi indipendente dalla distanza tra il punto di valutazione della pressione acustica nel campo e le superfici d'integrazione.

La seconda ragione risiede nella possibilità di derivare una relazione diretta *ingresso-uscita* tra la grandezza nota, rappresentata dal campo incidente, e la grandezza incognita, rappresentata dal valore della pressione acustica totale nel dominio d'interesse. Infatti, attraverso la metodologia presentata in questo lavoro la soluzione del problema è ottenuta nella for-

ma di una rappresentazione integrale che permette di valutare la grandezza incognita in un punto qualsivoglia del dominio una volta noto il valore sul contorno della grandezza stessa e della sua derivata normale. Ne consegue che a livello numerico è possibile definire una Matrice di Trasferimento i cui elementi tengano conto delle proprietà non convenzionali del mezzo contenuto nel mantello attraverso la presenza dei corrispondenti parametri caratteristici. Questo fatto risulta particolarmente vantaggioso nell'ottica di integrare tale metodologia in un contesto di ottimizzazione finalizzato alla minimizzazione dello *scattering* acustico, per esempio in quei casi in cui non sia possibile determinare analiticamente le espressioni di tali parametri. Facendo riferimento alla descrizione del problema di *Cummer-Schurig* riportata precedentemente si evince, infatti, come le caratteristiche del mezzo contenuto nel mantello acustico dipendano dalla particolare trasformazione di coordinate scelta. A sua volta la trasformazione è legata alla forma del corpo che si vuole mascherare e solo per alcuni casi semplici, corrispondenti a figure geometriche elementari, si conosce in forma analitica. Appare chiaro come il metodo proposto possa essere uno strumento alternativo per la determinazione delle espressioni del tensore di densità e del modulo di comprimibilità nel caso si desideri mascherare acusticamente oggetti di forma arbitraria.

Infine occorre tenere presente il carattere altamente innovativo della metodologia proposta per l'analisi del *cloaking* acustico, sia per ciò che concerne gli aspetti prettamente teorici (formulazione integrale di contorno), sia per quanto riguarda gli aspetti numerici (metodo degli elementi di contorno esteso). Allo stato attuale, infatti, non sono presenti in letteratura lavori in cui il problema oggetto di questa tesi sia affrontato con un approccio analogo.

Capitolo 1

Il problema di *Cummer-Schurig*

Nel presente capitolo è analizzato il modello teorico alla base della tecnica di mascheramento acustico nota con il nome di *Cummer-Schurig acoustic cloaking*, dal nome dei suoi ideatori. Essa consente di rendere un cilindro acusticamente *invisibile* attraverso un particolare rivestimento anulare costituito da un materiale le cui caratteristiche non convenzionali possono essere ottenute applicando le proprietà di invarianza delle equazioni delle piccole perturbazioni di pressione a seguito di una trasformazione di coordinate.

Il capitolo è organizzato come segue. Nel primo paragrafo si introducono le equazioni di governo dell'acustica scritte nel dominio della frequenza. Nel secondo e terzo paragrafo sono analizzate, rispettivamente, la trasformazione di coordinate alla base del problema di *Cummer-Schurig* e la forma delle equazioni dell'acustica nello spazio trasformato. Infine, nell'ultimo paragrafo, vengono ampiamente descritte le condizioni al contorno del problema differenziale che descrive la propagazione acustica nel mantello acustico.

1.1 Le equazioni di governo dell'acustica lineare nel dominio della frequenza

Le equazioni che descrivono la propagazione delle piccole perturbazioni di pressione nel caso di fluido a riposo non viscoso, non conduttivo e con modulo di scorrimento nullo

sono l'Equazione di Conservazione della Massa e l'Equazione di Bilancio della Quantità di moto nella forma di Equazione di Eulero. Come ben noto queste equazioni si ottengono da quelle di Navier-Stokes, imponendo le ipotesi di assenza di viscosità e conduttività, e possono scriversi, in forma differenziale non conservativa, nella forma linearizzata

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\mathcal{K}_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p \quad (1.2)$$

in cui p rappresenta la pressione acustica, \mathbf{v} la velocità acustica¹ e $\mathcal{K}_0 = \rho c^2$ il modulo di compressibilità del fluido, avendo indicato con c la velocità del suono.

L'analisi proposta in questo lavoro si articola nel dominio della frequenza, dunque risulta necessario riscrivere le equazioni appena introdotte nel nuovo dominio. Indicando pertanto la dipendenza temporale delle variabili mediante la convenzione $e^{i\omega t}$, le Eqq. 1.1 e 1.2 danno luogo a

$$i\omega \tilde{p} = \mathcal{K}_0 \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (1.3)$$

$$\nabla \tilde{p} = i\omega \rho_0 \mathbf{v} \quad (1.4)$$

dove con il simbolo $\tilde{}$ si è indicata la trasformata di Fourier della grandezza in considerazione. Le equazioni 1.3 e 1.4 rappresentano il punto di partenza degli sviluppi teorici descritti nelle sezioni che seguono.

1.2 La trasformazione di coordinate per il problema di *Cummer-Schurig*

Si consideri la seguente trasformazione di coordinate nel piano

$$\begin{cases} r' = R_1 + r(R_2 - R_1)/R_2 \\ \theta' = \theta \end{cases} \quad (1.5)$$

¹La p e la \mathbf{v} rappresentano i contributi acustici rispettivamente di pressione e di velocità rispetto ai valori globali di pressione e velocità presenti nel campo, ossia $p_{tot} = p_0 + p$ e $\mathbf{v}_{tot} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}$. In particolare $\mathbf{v}_{tot} = \mathbf{v}$ perchè si assume $\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$, *i.e.* il fluido è a riposo.

con $R_2 > R_1$. Tale trasformazione è invertibile in tutti i punti del piano tranne nell'origi-

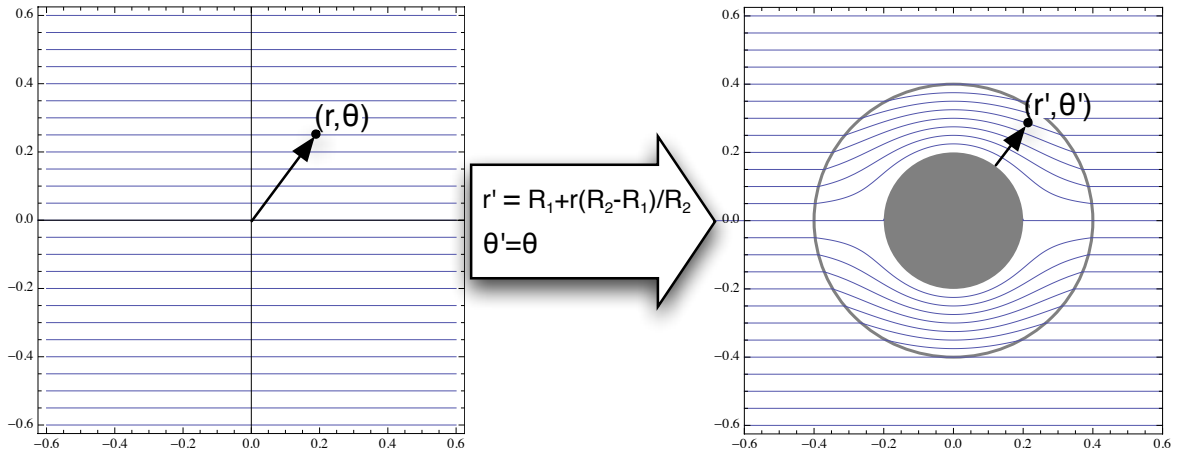


Figura 1.1: La trasformazione di coordinate per il problema di *Cummer-Schurig* .

ne del sistema di riferimento. Sia ω il dominio interno ad una circonferenza C di raggio R_2 centrata nell'origine e sia Ω_h il dominio esterno a C . Applicando la trasformazione di coordinate espressa dalla relazione 1.5, l'origine del sistema di riferimento viene trasformata in un cerchio di raggio R_1 , mentre la circonferenza di raggio R_2 rimane inalterata. La Fig. 1.1 mostra l'effetto di tale trasformazione. In particolare (cfr. Fig. 1.2) si può osservare come il dominio ω si sia trasformato in una corona circolare di spessore $\Delta = R_2 - R_1$ indicata in figura con il simbolo Ω_c . Il simbolo Ω_h indica il dominio *host* (*host* = ospitante) dove è presente il fluido ideale descritto nel Par. 1.1, mentre il simbolo Ω_c rappresenta il dominio *cloak* (*cloak* = mantello) i cui contorni sono indicati rispettivamente con i simboli Γ^I e Γ^O . Il termine mantello nasce dall'osservazione che la corona circolare può considerarsi il rivestimento di un corpo cilindrico indefinitamente esteso coincidente con la lacuna.

Nel paragrafo seguente sono analizzati gli effetti della trasformazione di coordinate applicata alle Eqq. 1.3 e 1.4 che governano la propagazione delle perturbazioni acustiche in seno al fluido originariamente presente nel dominio ω , e sono mostrate le caratteristiche non convenzionali del mezzo trasformato contenuto nel dominio Ω_c .

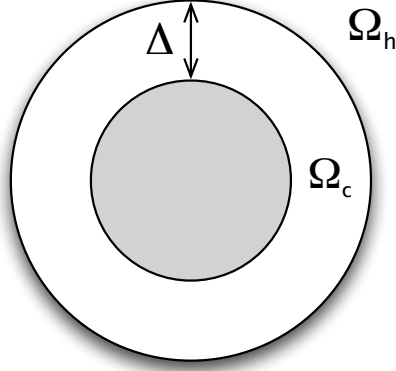


Figura 1.2: Il cilindro circondato dal *mantello acustico* di *Cummer-Schurig* .

1.3 Le equazioni nello spazio trasformato

Si dimostra (cfr. [8]) che le equazioni dell'acustica lineare scritte per un fluido ideale sono invarianti in una trasformazione di coordinate, a patto di introdurre, nelle equazioni trasformate, un tensore di densità che prende il posto della classica densità scalare. Applicando la trasformazione di coordinate 1.5 all'Equazione di Conservazione della Massa 1.3 e all'Equazione di Eulero 1.4 si ottiene il seguente sistema di equazioni²

$$i\omega\tilde{p} = \mathcal{K}\nabla_p \cdot \mathbf{v} \quad (1.6)$$

$$\nabla_p\tilde{p} = i\omega\bar{\bar{\rho}}\mathbf{v} \quad (1.7)$$

in cui il simbolo ∇_p rappresenta l'operatore nabla in coordinate polari e $\bar{\bar{\rho}}$ rappresenta il tensore di densità. Come si può osservare, le Eqq. 1.6 e 1.7 risultano formalmente identiche alle corrispondenti Eqq. 1.3 e 1.4 valide nel dominio indeformato Ω_h . Pertanto, l'applicazione della trasformazione di coordinate alle equazioni di governo si riflette unicamente sull'espressione della densità e del modulo di compressibilità nella regione deformata Ω_c . In particolare, la trasformazione di coordinate per il problema di *Cummer-Schurig* introduce un tensore di densità la cui matrice associata risulta diagonale se scritta

²Per i dettagli sulla dimostrazione si confronti l'appendice A

in un riferimento polare

$$\bar{\varrho} = \begin{bmatrix} \varrho_r & 0 \\ 0 & \varrho_\theta \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

in cui gli elementi sulla diagonale ϱ_r e ϱ_θ rappresentano rispettivamente la densità radiale e la densità circonferenziale. Un materiale dotato di questa caratteristica si dice a densità *ortotropa circolare*. Sviluppando l'operatore divergenza nell'Eq. 1.6 e proiettando l'Eq. 1.7 lungo le direzioni coordinate r e θ si ottiene il set di equazioni scalari valide nel dominio Ω_c

$$i\omega\varrho_\theta v_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \theta} \quad (1.9)$$

$$i\omega\varrho_r v_r = -\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} \quad (1.10)$$

$$i\omega \frac{1}{\mathcal{K}} \tilde{p} = -\frac{1}{r} \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \quad (1.11)$$

Sostituendo nell'Eq. 1.11 le espressioni di v_r e v_θ ricavabili dalle 1.9 e 1.10 si ottiene l'espressione

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\varrho_r}{\varrho_\theta} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\varrho_r} \frac{\partial \varrho_r}{\partial r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \omega^2 \frac{\varrho_r}{\mathcal{K}} \tilde{p} = 0 \quad (1.12)$$

che rappresenta l'equazione differenziale che governa la propagazione delle perturbazioni acustiche nel dominio Ω_c . Il problema differenziale si completa con opportune condizioni al contorno da imporre su Γ^0 e Γ^1 il cui significato fisico è discusso nel paragrafo successivo.

Per completare la descrizione del problema di *Cummer-Schurig* occorre determinare come si modificano i parametri caratteristici del mezzo contenuto in Ω_c a seguito della trasformazione di coordinate introdotta. Di seguito sono riportate le espressioni di tali parametri, ricavabili attraverso le relazioni A.12 e A.17

$$\frac{\varrho_r}{\varrho_0} = \frac{r}{r - R_1} \quad (1.13)$$

$$\frac{\varrho_\theta}{\varrho_0} = \frac{r - R_1}{r} \quad (1.14)$$

$$\frac{\mathcal{K}}{\mathcal{K}_0} = \left(\frac{R_2 - R_1}{R_2} \right)^2 \frac{r}{r - R_1} \quad (1.15)$$

È importante notare come alcuni di questi parametri, in particolare la densità radiale e il modulo di comprimibilità, diventino singolari avvicinandosi al contorno interno del mantello acustico, ponendo serie limitazioni sulla realizzazione pratica di un mantello acustico basato sulla presente teoria. Tuttavia questo limite, data l'impostazione di carattere essenzialmente metodologico del presente lavoro di tesi, seppur introducendo alcune importanti implicazioni numeriche discusse diffusamente nel capitolo dedicato ai risultati numerici, non costituisce un ostacolo di natura teorica per il prosieguo della trattazione.

1.4 Le condizioni al contorno

Per chiudere il problema differenziale associato all' Eq. 1.12 occorre imporre opportune condizioni al contorno sulla superficie del corpo Γ^i e all'interfaccia tra il dominio Ω_c e il dominio Ω_h . Nel paragrafo 1.3 sono stati definiti il dominio *host* Ω_h , il dominio *cloak* Ω_c e il contorno del dominio Ω_c . Quest'ultimo è formato dal contorno interno Γ^i , coincidente con il contorno del corpo, e il contorno esterno Γ^o , coincidente con l'interfaccia tra i due mezzi. I simboli Γ_-^o e Γ_+^o indicano rispettivamente il lato interno ed esterno di Γ^o , cfr. Fig. 1.3(b), e analogamente \mathbf{n}^- e \mathbf{n}^+ indicano le normali unitarie che puntano rispettivamente a Ω_c e Ω_h . I contorni dei due domini sono quindi definiti come $\partial\Omega_c = \Gamma^i \cup \Gamma_-^o$ e $\partial\Omega_h = \Gamma_+^o \cup \Gamma_\infty$.

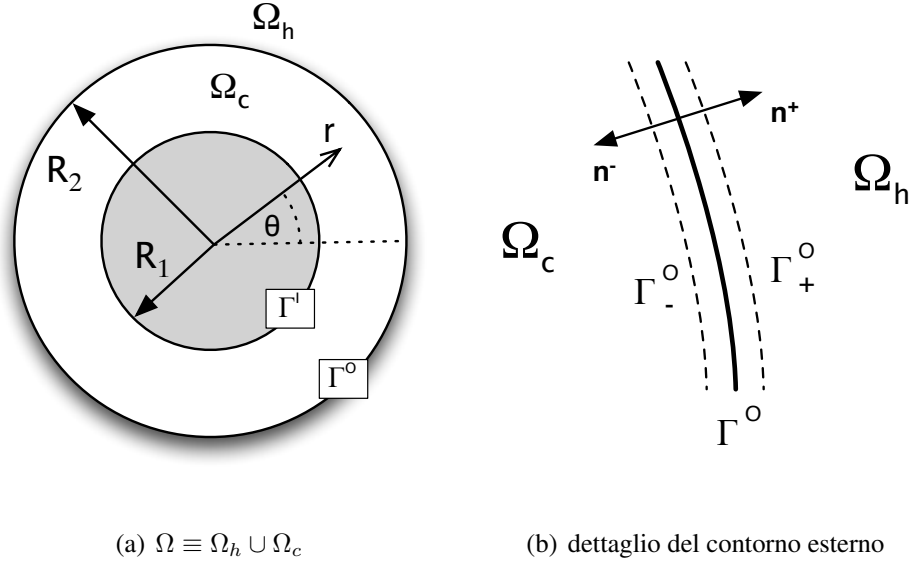


Figura 1.3: Il dominio nel problema di *Cummer-Schurig* .

Condizione al contorno su Γ^I

La condizione al contorno su Γ^I traduce matematicamente il comportamento acustico del corpo interagente con il campo acustico presente nel mantello acustico. La forma più generale di tale condizione può scriversi

$$\alpha(\mathbf{x}, \omega) \tilde{p}(\mathbf{x}, \omega) + \beta(\mathbf{x}, \omega) \frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{x}, \omega)}{\partial n} = f(\mathbf{x}, \omega) \quad (1.16)$$

dove α , β , e f sono funzioni complesse dello spazio \mathbf{x} e della frequenza ω . Nel caso in cui $\alpha = 0$ e $f = 0$ la relazione 1.16 si riduce alla condizione al contorno di *Neumann*, mentre nel caso in cui $\beta = 0$ e $f = 0$ si ottiene la condizione al contorno di *Dirichlet*. Introducendo l'espressione dell'impedenza acustica \mathcal{Z} (cfr., e.g., [18])

$$\mathcal{Z} = \frac{\tilde{p}}{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_s} \quad (1.17)$$

dove \mathbf{n}_s indica la normale interna alla superficie Γ^I , e facendo uso del teorema di Bernoulli linearizzato che lega la perturbazione di pressione \tilde{p} alla velocità acustica \mathbf{v}

$$\tilde{p} = -i\rho\omega\tilde{\varphi} \quad (1.18)$$

si può derivare l'espressione della condizione al contorno nel caso di superficie impedente

$$p(\mathbf{x}, k) + i \frac{\mathcal{Z}}{\rho\omega} \frac{\partial p(\mathbf{x}, k)}{\partial n} = 0 \quad (1.19)$$

Nel presente lavoro sono stati presi in considerazione due tipi di condizioni al contorno omogenee corrispondenti rispettivamente alle condizioni di *Neumann* e *Dirichlet*

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Superficie acusticamente rigida} \quad (1.20)$$

$$\tilde{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Superficie acusticamente soffice} \quad (1.21)$$

Condizione al contorno su Γ°

La condizione al contorno su Γ° riveste un ruolo fondamentale nel fenomeno del cloaking acustico, perchè stabilisce il legame tra il campo acustico presente nel dominio Ω_c in cui è presente il mezzo a densità anisotropa e il campo esterno dove è presente il mezzo convenzionale. Sulla superficie d'interfaccia tra i due mezzi occorre imporre la continuità del campo acustico che corrisponde alla continuità della componente normale della velocità acustica e della pressione acustica (si veda, *e.g.*, [10]). Assumendo trascurabili gli effetti del moto di Γ° lungo la direzione normale \mathbf{n} , la continuità della componente normale della velocità acustica si riduce alla continuità della componente normale dell'accelerazione. Tenendo presente che nella regione Ω_c la densità compare nella forma di un tensore del second'ordine (cfr. Eq.1.7), tale condizione si scrive

$$(\boldsymbol{\varrho}^{-1} \nabla p) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\varrho_0} \nabla p \cdot \mathbf{n} \quad (1.22)$$

Nel paragrafo 1.3 si è già sottolineato che nel problema di *Cummer-Schurig* il tensore di densità è diagonale quando rappresentato in coordinate polari, e ha come elementi la densità radiale ϱ_r e circonferenziale ϱ_θ . Introducendo il versore radiale $\hat{\mathbf{r}}$ e il versore circonferenziale $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, l'Eq. 1.22 può essere riscritta nella forma

$$(\boldsymbol{\varrho}^{-1} \nabla p) \cdot \mathbf{n} = \left(\frac{1}{\varrho_r} \frac{\partial p}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{\varrho_\theta r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} \right) \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial n} \quad (1.23)$$

e notando che per la specifica configurazione geometrica del mantello $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{n} = -\mathbf{n}^- = \mathbf{n}^+$, quest'ultima espressione si semplifica in

$$\frac{\partial p}{\partial n^-} = -\frac{\varrho_r}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial n^+} \quad (1.24)$$

La continuità della pressione acustica attraverso Γ^0 si può esprimere semplicemente come $p^- = p^+$.

Osservando infine che nel dominio Ω_h il campo acustico soddisfa la classica equazione di Helmholtz omogenea $\nabla^2 \tilde{p} + k_0^2 \tilde{p} = 0$, il problema differenziale che governa il cloaking acustico di *Cummer-Schurig* risulta completamente determinato in $\Omega \equiv \Omega_h \cup \Omega_c$. Per riassumere, di seguito è riportato il sistema di equazioni differenziali con le condizioni al contorno

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla^2 \tilde{p} + k_0^2 \tilde{p} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_h \\ \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\varrho_r}{\varrho_\theta} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\varrho_r} \frac{\partial \varrho_r}{\partial r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \omega^2 \frac{\varrho_r}{\mathcal{K}} \tilde{p} = 0, & \mathbf{x} \in \Omega_c \\ \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} = 0 \quad \text{ovvero} \quad \tilde{p} = 0, & \mathbf{x} \in \Gamma^1 \\ \frac{\partial p}{\partial n^-} = -\frac{\varrho_r}{\varrho_0} \frac{\partial p}{\partial n^+}, & \mathbf{x} \in \Gamma^0 \\ p^- = p^+, & \mathbf{x} \in \Gamma^0 \end{array} \right. \quad (1.25)$$

Capitolo 2

Un approccio integrale al problema di

Cummer-Schurig

Nel presente capitolo viene riscritta l'equazione che governa la propagazione acustica nel mantello acustico nella forma di un'equazione di Helmholtz non omogenea. Il campo acustico nel piano è quindi ottenuto risolvendo il sistema di equazioni valide rispettivamente nel dominio *host* Ω_h e nel dominio *cloak* Ω_c attraverso un approccio integrale basato sul metodo della *Soluzione Fondamentale*. Nelle prime due sezioni sono riportate le Rappresentazioni Integrali di Contorno per la pressione acustica in entrambi i domini. Nell'ultima sezione la formulazione è estesa al caso di più corpi presenti nel campo.

2.1 L'equazione di Helmholtz per il problema di *Cummer-Schurig*

Nel capitolo precedente è stata ricavata l'equazione valida nel dominio Ω_c

$$\frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial_r}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\partial_r} \frac{\partial \partial_r}{\partial r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \omega^2 \frac{\partial_r}{\mathcal{K}} \tilde{p} = 0 \quad (2.1)$$

Se si somma e si sottrae il termine $\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2}$ ad entrambi i membri è possibile ricostruire a primo membro il laplaciano in coordinate polari¹. Ulteriormente, sommando e sottraendo il termine $\omega^2 \frac{\varrho_0}{\mathcal{K}_0}$ e isolando a primo membro l'operatore delle onde (scritto nel dominio della frequenza), l'Eq. 2.1 si può reinterpretare come un'equazione di Helmholtz non omogenea

$$\nabla^2 \tilde{p} + k_0^2 \tilde{p} = \tilde{\sigma} \quad (2.3)$$

dove $k_0 = \omega/c_0 = \omega \sqrt{\varrho_0/\mathcal{K}_0}$ e in cui si è posto

$$\tilde{\sigma} = \left(1 - \frac{\varrho_r}{\varrho_\theta}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho_r} \frac{\partial \varrho_r}{\partial r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \omega^2 \left(\frac{\varrho_r}{\mathcal{K}} - \frac{\varrho_0}{\mathcal{K}_0}\right) \tilde{p} \quad (2.4)$$

Il termine $\tilde{\sigma}$ tiene conto dell'anisotropia inerziale del mezzo contenuto nella regione *cloak* ed è responsabile dei fenomeni non convenzionali dovuti alla presenza del mantello acustico². Esso rappresenta infatti una sorgente continua distribuita nel dominio Ω_c che interagendo con il campo acustico presente ne modifica le caratteristiche di propagazione in accordo con i parametri 1.9, 1.10 e 1.11 presentati nel Par. 1.3. E' importante notare che adottando questo approccio l'equazione ottenuta è ancora scritta in termini dello stesso mezzo presente nella regione esterna al mantello, come si può evincere dall'espressione del termine k_0 nell'Eq.2.3.

¹La rappresentazione del laplaciano in coordinate polari risulta

$$\nabla^2[\] = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial[\]}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2[\]}{\partial \theta^2} \quad (2.2)$$

²L'Eq. 2.3 ricorda l'equazione di governo delle perturbazioni del potenziale di velocità aerodinamico causate da un corpo in regime transonico [26]. La differenza fondamentale risiede nel fatto che il termine $\tilde{\sigma}$ a secondo membro della Eq. 2.3 è lineare.

2.2 L'equazione di Kirchhoff-Helmholtz nel mantello acustico

Applicando il metodo della soluzione fondamentale³ all'equazione

$$\nabla^2 \tilde{p}(\mathbf{y}, k_0) + k_0^2 \tilde{p}(\mathbf{y}, k_0) = \tilde{\sigma}(\mathbf{y}, k_0) \quad \mathbf{y} \in \overline{\Omega}_c \quad (2.5)$$

si ottiene la Rappresentazione Integrale al Contorno (RIC) di Kirchhoff-Helmholtz per la pressione in Ω_c

$$\begin{aligned} E_c(\mathbf{y}) \tilde{p}(\mathbf{y}, k_0) = & \oint_{\partial\Omega_c} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0) \frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{x}, k_0)}{\partial n} - \tilde{p}(\mathbf{x}, k_0) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0)}{\partial n} \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \\ & + \int_{\Omega_c} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0) \tilde{\sigma}(\mathbf{x}, k_0) d\Omega(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad \mathbf{y} \in \overline{\Omega}_c \quad (2.6)$$

in cui \mathbf{y} indica il punto d'osservazione, o punto influenzato, e \mathbf{x} il punto sorgente, o punto d'integrazione, k_0 è il numero d'onda e G rappresenta la funzione di Green di spazio libero bidimensionale. Adottando la convenzione $e^{i\omega t}$ per la dipendenza temporale delle variabili, la funzione di Green si esprime nella forma

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} \mathcal{H}_0^{(2)}(k_0 R)$$

in cui $\mathcal{H}_0^{(2)}(k_0 R)$ rappresenta la funzione di Hankel di seconda specie di ordine zero ed $R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ il vettore congiungente il punto d'osservazione e il punto d'integrazione. Il termine $E_c(\mathbf{y})$ rappresenta la funzione dominio, definita come

$$E_c(\mathbf{y}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{y} \in \Omega_c \\ 0 & \mathbf{y} \notin \Omega_c \\ 0.5 & \mathbf{y} \in \partial\Omega_c \end{cases} \quad (2.7)$$

Per facilità di lettura si riporta il termine $\tilde{\sigma}$ definito nel Par. 2.1

$$\tilde{\sigma} = \left(1 - \frac{\varrho_r}{\varrho_\theta}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \tilde{p}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\varrho_r} \frac{\partial \varrho_r}{\partial r} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} + \omega^2 \left(\frac{\varrho_r}{\mathcal{K}} - \frac{\varrho_0}{\mathcal{K}_0}\right) \tilde{p} \quad (2.8)$$

³Si veda l'appendice B per i dettagli.

Si noti come il termine sorgente $\tilde{\sigma}$, che come già menzionato equivale ad una sorgente distribuita in Ω_c , dipenda linearmente da \tilde{p} e dalle derivate parziali di \tilde{p} lungo le direzioni radiali e circonferenziali r e θ .

La soluzione della R.I.C. 2.6 viene ottenuta, una volta imposte le opportune condizioni al contorno già ampiamente discusse nel Par.1.4, in due passi successivi:

1. Si impone che il punto di calcolo si trovi sulla superficie di contorno ($\mathbf{y} \in \partial\Omega_c$) pertanto la 2.6 si riduce ad una relazione di compatibilità tra il valore della pressione sulla superficie del mantello $\partial\Omega_c$, il valore della sua derivata normale $\frac{\partial t p}{\partial n}$ sulla stessa superficie ed il valore di $\tilde{\sigma}$ all'interno del dominio Ω_c . Risolvendo l'equazione integrale associata a tale relazione di compatibilità si ottiene il valore di \tilde{p} sulla superficie $\partial\Omega_c$.
2. Una volta calcolato il valore di \tilde{p} sulla frontiera del mantello acustico è possibile, riutilizzando la relazione 2.6 nella sua accezione di rappresentazione integrale, calcolare il valore di pressione in qualsiasi punto del campo d'interesse.

2.3 L'equazione di Kirchhoff-Helmholtz nella regione esterna

Nel dominio aperto Ω_h la pressione acustica è governata dalla classica equazione di Helmholtz $\nabla^2 \tilde{p} + k_0^2 \tilde{p} = 0$. La RIC di Kirchhoff-Helmholtz, che si ottiene applicando anche in questo caso la procedura standard basata sul metodo della soluzione fondamentale, risulta

$$E_h(\mathbf{y}) \tilde{p}(\mathbf{y}, k_0) = \oint_{\partial\Omega_h} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0) \frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{x}, k_0)}{\partial n} - \tilde{p}(\mathbf{x}, k_0) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0)}{\partial n} \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

Imponendo la condizione di radiazione di Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow \text{inf}} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} - ik_0 r \right) = 0 \quad (2.10)$$

che assicura l'unicità della soluzione dell'equazione di Helmholtz eliminando le soluzioni non fisiche corrispondenti a campi che si irradiano dall'infinito, l'Eq. 2.9 si riduce a

$$E_h(\mathbf{y}) \tilde{p}(\mathbf{y}, k_0) = \oint_{\Gamma_{\dagger}^{\circ}} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0) \frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{x}, k_0)}{\partial n} - \tilde{p}(\mathbf{x}, k_0) \frac{\partial G(\mathbf{x}, \mathbf{y}, k_0)}{\partial n} \right] d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (2.11)$$

dove è stato eliminato il contributo integrale dovuto a Γ_{∞} .

Infine, il valore della pressione \tilde{p} in Ω_h è calcolato utilizzando il procedimento descritto nel paragrafo precedente.

Il campo primario e il campo secondario

Per identificare correttamente gli effetti dovuti ai fenomeni di *scattering* acustico, il campo di pressione acustica nel dominio Ω_h può essere convenientemente decomposto in due contributi, rispettivamente il campo *primario* \tilde{p}_p e il campo *secondario* \tilde{p}_s . Il campo *primario* è definito come il campo acustico che sarebbe presente nel dominio in assenza di corpi, provvisti o meno di *mantello* acustico. Il campo *secondario*, invece, rappresenta proprio il campo acustico dovuto agli effetti di *scattering* indotti dagli ostacoli presenti nel dominio. Poiché il campo totale è la somma di questi due contributi

$$\tilde{p} = \tilde{p}_p + \tilde{p}_s \quad (2.12)$$

il campo *secondario* può essere ricavato sottraendo al campo totale il campo *primario* dovuto alle sorgenti acustiche presenti nel dominio di interesse. La perfetta *invisibilità* acustica equivale dunque ad ottenere un campo *secondario* tale che $\tilde{p}_s = 0$ e quindi un campo totale coincidente con il campo *primario*.

2.4 Il sistema di equazioni per il problema del *cloaking* acustico

Riassumendo i risultati ottenuti nei due paragrafi precedenti, il campo di pressione acustica nel problema del *cloaking* acustico si può ottenere risolvendo il seguente sistema di equazioni⁴

$$E_c \tilde{p} = \oint_{\Gamma^i} \left(G \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n} - \tilde{p} \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Gamma + \oint_{\Gamma^o} \left(G \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n^-} - \tilde{p} \frac{\partial G}{\partial n^-} \right) d\Gamma + \int_{\Omega_c} G \tilde{\sigma} d\Omega \quad (2.13)$$

$$E_h \tilde{p} = \oint_{\Gamma_+^o} \left(G \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n^+} - \tilde{p} \frac{\partial G}{\partial n^+} \right) d\Gamma \quad (2.14)$$

imponendo le condizioni al contorno discusse nel Par.1.4. Come già sottolineato in precedenza, noti i valori della pressione e della derivata normale della pressione sui contorni dei rispettivi domini, le Eqq. 2.13 e 2.14 possono essere usate come rappresentazioni integrali della pressione in ogni punto del campo acustico, mentre se solo il valore della pressione o della derivata normale della pressione è noto dalle condizioni al contorno, esse possono essere utilizzate come equazioni integrali per ottenere il set completo di valori di Cauchy sulle superfici integrali e successivamente come rappresentazioni integrali per ottenere il campo acustico in $\Omega = \Omega_h \cup \Omega_c$.

Utilizzando la decomposizione in campo *primario* e *secondario* (cfr. Eq.2.12) e osservando che \tilde{p}_p soddisfa identicamente l'equazione di Helmholtz $\nabla^2 \tilde{p}_p + k_0^2 \tilde{p}_p = 0$, la rappresentazione integrale per la pressione acustica totale nel dominio Ω_h si riduce alla rappresentazione integrale per la sola pressione *secondaria*

$$E_h \tilde{p}_s = \oint_{\Gamma_+^o} \left(G \frac{\partial \tilde{p}_s}{\partial n^+} - \tilde{p}_s \frac{\partial G}{\partial n^+} \right) d\Gamma \quad (2.15)$$

I valori della pressione \tilde{p}_s e $\frac{\partial \tilde{p}_s}{\partial n^+}$ sulla frontiera Γ^o , necessari per rappresentare attraverso la 2.15 il campo *secondario* nel dominio Ω_h , si ottengono imponendo le condizioni di

⁴Per semplicità di lettura nel prosieguo del presente lavoro sono state omesse le dipendenze dalle variabili spaziali e dal numero d'onda.

continuità 1.23 e 1.24. Ponendo $\tilde{\chi} = \partial\tilde{p}/\partial n$ e tenendo conto della decomposizione 2.12 tali condizioni possono essere riscritte nella forma

$$\tilde{p} = \tilde{p}_p + \tilde{p}_s \quad (2.16)$$

$$\tilde{\chi}^- = -\frac{\varrho_r}{\varrho_0} (\tilde{\chi}_p^+ + \tilde{\chi}_s^+) \quad (2.17)$$

Sostituendo le Eqq. 2.16 e 2.17 nell'Eq. 2.13 si ottiene

$$\begin{aligned} E_c \tilde{p} - \oint_{\Gamma^i} \left(G \tilde{\chi} - \tilde{p} \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Gamma - \oint_{\Gamma^o} \left(G \tilde{\chi}_s^- - \tilde{p}_s \frac{\partial G}{\partial n^-} \right) d\Gamma - \int_{\Omega_c} G \tilde{\sigma} d\Omega \\ = \oint_{\Gamma^o} \left(-G \frac{\varrho_r}{\varrho_0} \tilde{\chi}_p^+ - \tilde{p}_p \frac{\partial G}{\partial n^-} \right) d\Gamma \end{aligned} \quad (2.18)$$

dove i termini dipendenti dal campo *primario* sono stati spostati a secondo membro in quanto rappresentano dei termini noti.

La metodologia descritta può essere sintetizzata come segue:

- Attraverso l'Eq. 2.18, l'Eq 2.15 nella forma di equazione integrale e le relazioni di continuità 2.16, 2.17 si ottengono i valori della pressione \tilde{p}_s e della sua derivata normale su Γ_+^o ;
- si risolve il campo secondario nel dominio Ω_h propagando i valori sul contorno Γ_+^o ottenuti al passo precedente attraverso l'Eq. 2.15 nella forma di rappresentazione integrale;
- si ottiene il campo totale in Ω_h sommando campo secondario e campo primario.

2.5 L'estensione al caso multicorpo

La formulazione ottenuta nel paragrafo precedente può essere estesa facilmente al caso di un numero arbitrario di corpi - provvisti o meno di *mantello* acustico - presenti nel dominio d'interesse. Indicando con N_o il numero di ostacoli presenti nel campo, la rappresentazione integrale del campo di pressione in Ω_h si ottiene sommando i singoli contributi integrali

dovuti agli N_o oggetti

$$E_h \tilde{p} = \sum_{j=1}^{N_o} \left[\oint_{\Gamma^{o^j}} \left(G \frac{\partial \tilde{p}}{\partial n^+} - \tilde{p} \frac{\partial G}{\partial n^+} \right) d\Gamma \right] \quad (2.19)$$

Si può notare come la presenza di ogni *mantello* acustico, rappresentata dal termine $\tilde{\sigma}$, non compaia direttamente nell'Eq.2.19. La formulazione integrale per ogni dominio Ω_c , essendo legata al dominio esterno Ω_h solo attraverso le condizioni di continuità imposte all'interfaccia dei due mezzi, rimane infatti invariata rispetto al caso di singolo oggetto presente nel campo.

La formulazione estesa è stata ottenuta pertanto considerando l'espressione del campo *secondario*, nelle espressioni 2.16 e 2.17, come la somma dei singoli contributi dovuti agli N_o ostacoli

$$\tilde{p}(\mathbf{x}) = \tilde{p}_p(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{N_o} \tilde{p}_s^j(\mathbf{x}) \quad \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_h \quad (2.20)$$

dove $\partial\Omega_h = \bigcup_{j=1}^{N_o} \Gamma^{o^j}$. Esprimendo le condizioni di continuità all'interfaccia tra il dominio Ω_h e il q -esimo oggetto attraverso la decomposizione 2.20, si ottengono le seguenti relazioni

$$\tilde{p}^{q-} = \tilde{p}_p^{q+} + \tilde{p}_s^{q+} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{N_o} \tilde{p}_s^{j+} \quad (2.21)$$

$$\tilde{\chi}^{q-} = -\frac{\varrho_r}{\varrho_0} \left(\tilde{\chi}_p^{q+} + \tilde{\chi}_s^{q+} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{N_o} \tilde{\chi}_s^{j+} \right) \quad (2.22)$$

Infine, sostituendo le Eqq.2.21 e 2.22 nell'Eq.2.13 si ottiene la rappresentazione integrale per il q -esimo ostacolo

$$\begin{aligned} E_c \tilde{p}^q - \oint_{\Gamma^{l^q}} \left(G \tilde{\chi}^q - \tilde{p}^q \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Gamma - \oint_{\Gamma^{o^q}} \left(G \tilde{\chi}_s^{q-} - \tilde{p}_s^q \frac{\partial G}{\partial n^-} \right) d\Gamma - \int_{\Omega_c^q} G \tilde{\sigma}^q d\Omega \\ + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{N_o} \oint_{\Gamma^{o^j}} \left(G \tilde{\chi}_s^{j-} - \tilde{p}_s^j \frac{\partial G}{\partial n^-} \right) d\Gamma = \oint_{\Gamma^{o^q}} \left(-G \frac{\varrho_r}{\varrho_0} \tilde{\chi}_p^{q+} - \tilde{p}_p^q \frac{\partial G}{\partial n^-} \right) d\Gamma \quad (2.23) \end{aligned}$$

dove il contributo dei restanti $N_o - 1$ oggetti è stato isolato per chiarezza espositiva. Anche in questo caso il secondo membro è costituito solo da grandezze note dovute al campo *primario*.

Capitolo 3

Soluzione numerica attraverso il Metodo degli Elementi di Contorno Esteso

Il sistema di equazioni ricavato nel capitolo precedente viene ora affrontato numericamente attraverso una versione estesa del Metodo degli Elementi di Contorno (*Boundary Element Method*) opportunamente modificato per tenere conto del contributo di volume dovuto alla presenza del termine sorgente $\tilde{\sigma}$ nell'equazione di governo per la pressione acustica nel dominio *cloak*. Dopo alcune considerazioni sulla discretizzazione degli elementi geometrici viene riportato lo sviluppo dell'algoritmo di calcolo e infine viene derivata la matrice di trasferimento del *cloaking*.

3.1 Il sistema di equazioni discretizzato

La soluzione numerica del Problema ai Valori di Contorno rappresentato dalle Eqq. 2.18, 2.15, alle quali sono associate rispettivamente le condizioni al contorno 1.23, 1.24 e la condizione al contorno sul cilindro scatterante (cfr. Par.1.4), può essere ottenuta attraverso il Metodo degli Elementi di Contorno (BEM, dall'inglese **B**oundary **E**lement **M**ethod). Nel

presente lavoro di tesi, viene proposta una versione opportunamente estesa di tale metodo per tenere conto dei contributi di volume dovuti alla presenza della sorgente distribuita $\tilde{\sigma}$ nel mantello acustico.

Come già osservato, la scelta di un metodo agli elementi di contorno è giustificata dalla necessità di dover discretizzare solo le superfici integrali (o al massimo, come nel caso in esame, la regione rappresentata dal mantello acustico) e non l'intero dominio di calcolo. Di conseguenza lo sforzo computazionale necessario per determinare la soluzione in un punto qualsivoglia del campo è indipendente dalla distanza tra le superfici integrali ed il punto di calcolo stesso. Al contrario, in un metodo di campo, *e.g.* il Metodo degli Elementi Finiti, occorre definire una griglia di calcolo tanto più estesa quanto più lontano dal corpo si trova il punto di dove si vuole determinare la soluzione. In un problema di acustica, come ad esempio quello rappresentato dal *cloaking* acustico, è tutt'altro che raro dover valutare il campo di pressione a distanze molto superiori rispetto alla dimensione caratteristica dell'oggetto da mascherare, rendendo di conseguenza non conveniente, se non proibitivo, l'uso di un metodo di campo.

Gli aspetti chiave di un Metodo degli Elementi di Contorno, così come per la versione estesa proposta, sono rappresentati dalle modalità di discretizzazione della geometria delle superfici integrali e delle incognite, di seguito descritti.

Per quanto riguarda la discretizzazione della geometria, sia la frontiera interna Γ^i sia la frontiera esterna Γ^o sono suddivise in M elementi di linea mentre il dominio Ω_c è suddiviso in N elementi di superficie, per un totale di $2M + N$ elementi di calcolo. In entrambi i casi si è scelto di adottare un'approssimazione all'ordine uno, *i.e.* di tipo lineare, che trasforma gli elementi di linea in segmenti di retta e gli elementi di superficie in superfici bilineari (si veda Fig. 3.1). Per quanto riguarda la soluzione si è scelta una formulazione all'ordine zero, *i.e.* costante a tratti. Ogni funzione incognita del problema è considerata costante su ciascun elemento e pari al valore che essa assume nel centroide dell'elemento stesso. Il sistema discretizzato così ottenuto è stato infine risolto attraverso il metodo di collocazione, con punti di collocazione coincidenti con i $2M + N$ centroidi degli elementi.

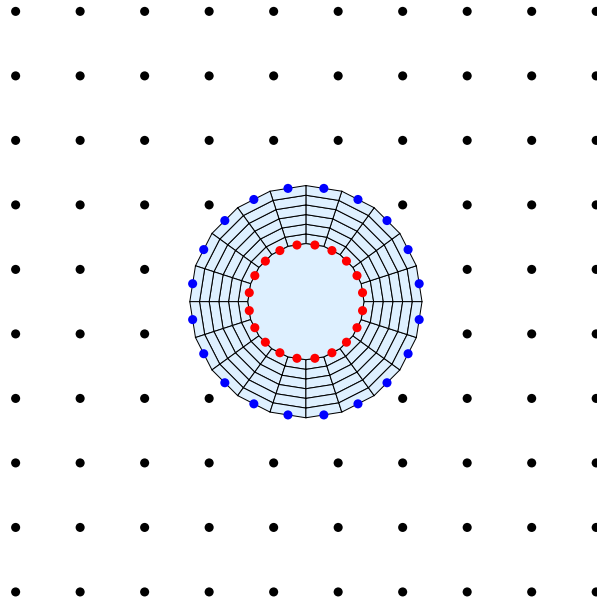


Figura 3.1: Il dominio di calcolo.

Indicando con \mathbf{y}_k ($k = 1, \dots, 2M + N$) i punti di collocazione, la forma approssimata dell'Eq. 2.13 risulta

$$E_c(\mathbf{y}_k) \tilde{p}(\mathbf{y}_k) \simeq \sum_{j=1}^{2M} (B_{kj} \tilde{\chi}_j - C_{kj} \tilde{p}_j) + \sum_{q=1}^N \tilde{H}_{kq} \sigma_q \quad (3.1)$$

dove Γ_j e Ω_q sono rispettivamente il j -esimo elemento di linea e il q -esimo elemento di superficie e B_{kj} , C_{kj} e H_{kq} sono i coefficienti di influenza definiti come¹

$$B_{kj} = \int_{\Gamma_j} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (3.2)$$

$$C_{kj} = \int_{\Gamma_j} \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) \cdot \mathbf{n} d\Gamma(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

$$H_{kq} = \int_{\Omega_q} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}_k) d\Omega(\mathbf{x}), \quad (3.4)$$

dove \mathbf{n} è la normale unitaria al j -esimo elemento di contorno Γ_j entrante nel dominio Ω_c . Per ottenere il sistema di equazioni discretizzate valide nel dominio Ω_c si procede collocando l'Eq.3.1 rispettivamente negli M centroidi degli elementi di linea sul contorno

¹Nelle matrici di influenza il primo indice rappresenta il punto d'osservazione, o punto di calcolo, mentre il secondo indice rappresenta l'elemento sorgente, o punto d'integrazione.

$\partial\Omega_c = \Gamma^l$, negli M centroidi degli elementi di linea del contorno $\partial\Omega_c = \Gamma^o$ e negli N centroidi degli elementi di superficie nel dominio Ω_c . Il sistema finale, espresso in forma matriciale, risulta dunque

$$\mathbf{Y}^l \tilde{\mathbf{p}}^l - \mathbf{B}^l \tilde{\boldsymbol{\chi}}^l + \hat{\rho} \mathbf{B}^{l0} \tilde{\boldsymbol{\chi}}_s^o + \mathbf{C}^{l0} \tilde{\mathbf{p}}_s^o - \mathbf{H}^{l\Omega} \mathbf{S} \tilde{\mathbf{p}}^\Omega = -\hat{\rho} \mathbf{B}^{l0} \tilde{\boldsymbol{\chi}}_p^o - \mathbf{C}^{l0} \tilde{\mathbf{p}}_p^o \quad (3.5)$$

$$\mathbf{C}^{o1} \tilde{\mathbf{p}}^l - \mathbf{B}^{o1} \tilde{\boldsymbol{\chi}}^l + \hat{\rho} \mathbf{B}^{oo} \tilde{\boldsymbol{\chi}}_s^o + \mathbf{Y}^{oo} \tilde{\mathbf{p}}_s^o - \mathbf{H}^{o\Omega} \mathbf{S} \tilde{\mathbf{p}}^\Omega = -\hat{\rho} \mathbf{B}^{oo} \tilde{\boldsymbol{\chi}}_p^o - \mathbf{Y}^{oo} \tilde{\mathbf{p}}_p^o \quad (3.6)$$

$$\mathbf{C}^{\Omega 1} \tilde{\mathbf{p}}^l - \mathbf{B}^{\Omega 1} \tilde{\boldsymbol{\chi}}^l + \hat{\rho} \mathbf{B}^{\Omega o} \tilde{\boldsymbol{\chi}}_s^o + \mathbf{C}^{\Omega o} \tilde{\mathbf{p}}_s^o + (\mathbf{I} - \mathbf{H}^{\Omega\Omega} \mathbf{S}) \tilde{\mathbf{p}}^\Omega = -\hat{\rho} \mathbf{B}^{\Omega o} \tilde{\boldsymbol{\chi}}_p^o - \mathbf{C}^{\Omega o} \tilde{\mathbf{p}}_p^o \quad (3.7)$$

dove $\tilde{\mathbf{p}}^x$ e $\tilde{\boldsymbol{\chi}}^x$ sono i vettori colonna contenenti rispettivamente i valori della pressione e della derivata normale della pressione valutati nei centroidi degli elementi di calcolo. L'apice X può essere uguale a l , O , o Ω a seconda che il punto di collocazione si trovi rispettivamente sulla frontiera interna Γ^l , sulla frontiera esterna Γ^o o nel dominio *cloak* Ω_c . Inoltre $\mathbf{Y}^{xy} = 0.5 \mathbf{I} + \mathbf{C}^{xy}$ e $\hat{\rho} = \rho_r / \rho_0$. La matrice \mathbf{S} è l'operatore che fornisce il valore di $\tilde{\sigma}$ attraverso uno schema numerico alle difference finite per la valutazione delle derivate parziali della pressione \tilde{p} rispetto a r e θ in Ω_c .

Nella tabella 3.1 è riportata, a titolo riassuntivo, la nomenclatura utilizzata nel metodo per identificare le matrici dei coefficienti di influenza.

Occorre notare che il sistema di $2M + N$ equazioni 3.5, 3.6 e 3.7 è sottodeterminato poiché il numero delle incognite, ossia $\tilde{\mathbf{p}}^l$ e $\tilde{\boldsymbol{\chi}}^l$ su Γ^l , $\tilde{\mathbf{p}}_s^o$ e $\tilde{\boldsymbol{\chi}}_s^o$ su Γ^o e $\tilde{\mathbf{p}}^\Omega$ in Ω_c , risulta essere $3M + N$. Per chiudere il problema si ricorre all'equazione integrale, Eq. 2.15, che lega il valore della pressione *secondaria* e della sua derivata normale su Γ_+^o . A livello discreto tale condizione si può scrivere

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}}_s^o = [\mathbf{B}^{oo}]^{-1} \left(\frac{1}{2} \mathbf{I} + \mathbf{C}^{oo} \right) \tilde{\mathbf{p}}_s^o = \mathbf{Z}^{oo} \tilde{\mathbf{p}}_s^o \quad (3.8)$$

Il sistema di $2M + N$ equazioni in $2M + N$ ottenuto sostituendo la relazione 3.8 nel sistema di equazioni Eqq. 3.5, 3.6 e 3.7 può essere infine riscritto in forma compatta

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{\Lambda} \mathbf{b} \quad (3.9)$$

Tabella 3.1: La convenzione dei nomi delle matrici nel Metodo degli Elementi di Contorno esteso agli Elementi di Campo.

Matrici	dimensione	coefficienti	punto influenzato	elemento d'integrazione
$\mathbf{B}^{\parallel}, \mathbf{C}^{\parallel}$	$M \times M$	B_{kj}, C_{kj}	$\mathbf{y}_k \in \Gamma^{\parallel}$	$\Gamma_j \in \Gamma^{\parallel}$
$\mathbf{B}^{\text{I}^{\circ}}, \mathbf{C}^{\text{I}^{\circ}}$	$M \times M$	B_{kj}, C_{kj}	$\mathbf{y}_k \in \Gamma^{\text{I}^{\circ}}$	$\Gamma_j \in \Gamma^{\circ}$
$\mathbf{B}^{\text{O}^{\circ}}, \mathbf{C}^{\text{O}^{\circ}}$	$M \times M$	B_{kj}, C_{kj}	$\mathbf{y}_k \in \Gamma^{\text{O}^{\circ}}$	$\Gamma_j \in \Gamma^{\circ}$
$\mathbf{B}^{\text{O}^{\parallel}}, \mathbf{C}^{\text{O}^{\parallel}}$	$M \times M$	B_{kj}, C_{kj}	$\mathbf{y}_k \in \Gamma^{\text{O}^{\circ}}$	$\Gamma_j \in \Gamma^{\parallel}$
$\mathbf{B}^{\Omega^{\parallel}}, \mathbf{C}^{\Omega^{\parallel}}$	$N \times M$	B_{kj}, C_{kj}	$\mathbf{y}_k \in \Omega_c$	$\Gamma_j \in \Gamma^{\parallel}$
$\mathbf{B}^{\Omega^{\circ}}, \mathbf{C}^{\Omega^{\circ}}$	$N \times M$	B_{kj}, C_{kj}	$\mathbf{y}_k \in \Omega_c$	$\Gamma_j \in \Gamma^{\circ}$
$\mathbf{H}^{\text{I}^{\circ}\Omega}$	$M \times N$	H_{kq}	$\mathbf{y}_k \in \Gamma^{\text{I}^{\circ}}$	$\Omega_q \in \Omega_c$
$\mathbf{H}^{\text{O}^{\circ}\Omega}$	$M \times N$	H_{kq}	$\mathbf{y}_k \in \Gamma^{\text{O}^{\circ}}$	$\Omega_q \in \Omega_c$
$\mathbf{H}^{\Omega^{\circ}\Omega}$	$N \times N$	H_{kq}	$\mathbf{y}_k \in \Omega_c$	$\Omega_q \in \Omega_c$

avendo posto

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} -\hat{\rho} \mathbf{B}^{\text{I}^{\circ}} & -\mathbf{C}^{\text{I}^{\circ}} \\ -\hat{\rho} \mathbf{B}^{\text{O}^{\circ}} & -\mathbf{Y}^{\text{O}^{\circ}} \\ -\hat{\rho} \mathbf{B}^{\Omega^{\circ}} & -\mathbf{C}^{\Omega^{\circ}} \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

e indicando il vettore colonna dei termini noti con

$$\mathbf{b} = \begin{Bmatrix} \tilde{\chi}_p^{\text{O}^{\circ}} \\ \tilde{\rho}_p^{\text{O}^{\circ}} \end{Bmatrix} \quad (3.11)$$

La forma del vettore colonna \mathbf{z} e della matrice $\mathbf{\Delta}$ dipende dalla natura dell'oggetto attraverso le condizioni al contorno discusse nel Par.1.4. In particolare per un corpo acusticamente *rigido* (problema di Neumann) si ha

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{p}}^{\parallel} \\ \tilde{\mathbf{p}}_s^{\text{O}^{\circ}} \\ \tilde{\mathbf{p}}^{\Omega^{\circ}} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{\Delta} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}^{\parallel} & \mathbf{C}^{\text{I}^{\circ}} - \hat{\rho} \mathbf{B}^{\text{I}^{\circ}} \mathbf{Z}^{\text{O}^{\circ}} & -\mathbf{H}^{\text{I}^{\circ}\Omega} \\ \mathbf{C}^{\text{O}^{\parallel}} & \mathbf{Y}^{\text{O}^{\circ}} - \hat{\rho} \mathbf{B}^{\text{O}^{\circ}} \mathbf{Z}^{\text{O}^{\circ}} & -\mathbf{H}^{\text{O}^{\circ}\Omega} \\ \mathbf{C}^{\Omega^{\parallel}} & \mathbf{C}^{\Omega^{\circ}} - \hat{\rho} \mathbf{B}^{\Omega^{\circ}} \mathbf{Z}^{\text{O}^{\circ}} & \mathbf{I} - \mathbf{H}^{\Omega^{\circ}\Omega} \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.12)$$

mentre per un corpo acusticamente soffice (problema di Dirichlet) si ottiene

$$\mathbf{z} = \begin{Bmatrix} \tilde{\chi}^i \\ \tilde{\mathbf{p}}_s^o \\ \tilde{\mathbf{p}}^{\Omega} \end{Bmatrix}, \quad \Delta = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{ii} & \mathbf{C}^{io} - \hat{\rho} \mathbf{B}^{io} \mathbf{Z}^{oo} & -\mathbf{H}^{i\Omega} \mathbf{S} \\ \mathbf{B}^{oi} & \mathbf{Y}^{oo} - \hat{\rho} \mathbf{B}^{oo} \mathbf{Z}^{oo} & -\mathbf{H}^{o\Omega} \mathbf{S} \\ \mathbf{B}^{\Omega i} & \mathbf{B}^{\Omega o} - \hat{\rho} \mathbf{B}^{\Omega o} \mathbf{Z}^{oo} & \mathbf{I} - \mathbf{H}^{\Omega\Omega} \mathbf{S} \end{pmatrix}^{-1} \quad (3.13)$$

3.2 La matrice di trasferimento del *cloaking*

Una volta noto il campo *secondario* $\tilde{\mathbf{p}}_s^o$ su Γ_+^o è possibile ottenere il campo *secondario* in tutto il dominio *host* Ω_h attraverso l'Eq. 2.15 che in questo caso è utilizzata come rappresentazione integrale. Considerando N^M microfoni virtuali posizionati in Ω_h e indicando con $\tilde{\mathbf{p}}_s^M$ il vettore colonna contenete i valori del campo di pressione valutato nei microfoni virtuali si può scrivere

$$\tilde{\mathbf{p}}_s^M = \mathbf{B}^{MO} \tilde{\chi}_s^o - \mathbf{C}^{MO} \tilde{\mathbf{p}}_s^o \quad (3.14)$$

dove l'apice M indica che i punti di calcolo corrispondono ai microfoni virtuali presenti in Ω_h . L'Eq. 3.14 può essere ulteriormente modificata nella forma

$$\tilde{\mathbf{p}}_s^M = \mathbf{A} \mathbf{b} \quad (3.15)$$

dove è messo in risalto il legame diretto della pressione $\tilde{\mathbf{p}}_s^M$ con il campo incidente, rappresentato dal vettore colonna \mathbf{b} , attraverso la matrice di trasferimento del *cloak* definita come

$$\mathbf{A} = \left(\mathbf{0} \mid \mathbf{Q} \mid \mathbf{0} \right) \Delta \Lambda \quad (3.16)$$

posto $\mathbf{Q} = \mathbf{B}^{MO} \mathbf{Z}^{oo} - \mathbf{C}^{MO}$.

3.3 L'estensione al caso multicorpo

In quest'ultimo paragrafo viene affrontata l'estensione del metodo numerico al caso di N_o oggetti presenti nel campo acustico. Nel Par. 2.5 è stata ricavata la formulazione integrale

per il caso multicorpo, di seguito riportata per semplicità di lettura

$$\begin{aligned}
E_c \tilde{p}^q &- \oint_{\Gamma^{1q}} \left(G \tilde{\chi}^q - \tilde{p}^q \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\Gamma - \oint_{\Gamma^{0q}} \left(G \tilde{\chi}_s^{q-} - \tilde{p}_s^{q-} \frac{\partial G}{\partial n^-} \right) d\Gamma - \int_{\Omega_c^q} G \tilde{\sigma}^q d\Omega \\
&+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{N_o} \oint_{\Gamma^{0j}} \left(G \tilde{\chi}_s^{j-} - \tilde{p}_s^{j-} \frac{\partial G}{\partial n^-} \right) d\Gamma = \oint_{\Gamma^{0q}} \left(-G \frac{\partial r}{\partial \rho} \tilde{\chi}_p^{q+} - \tilde{p}_p^q \frac{\partial G}{\partial n^-} \right) d\Gamma
\end{aligned}$$

Questa espressione, valida per il q -esimo oggetto da mascherare, differisce dall'equazione integrale ricavata per il singolo oggetto solo per la presenza del termine di sommatoria, il quale rappresenta il contributo al campo secondario dovuto alla presenza degli altri $N_o - 1$ oggetti. Pertanto la corrispondente forma discretizzata si ottiene dalla 3.1 aggiungendo l'espressione approssimata di tale sommatoria

$$E_c(\mathbf{y}_k) \tilde{p}^q(\mathbf{y}_k) \simeq \sum_{j=1}^{2M} \left(B_{kj}^{(q)} \tilde{\chi}_j^{(q)} - C_{kj}^{(q)} \tilde{p}_j^{(q)} \right) + \sum_{l=1}^N \tilde{H}_{kl}^{(q)} \sigma_l^{(q)} + \sum_{\substack{t=1 \\ t \neq q}}^{N_o} \sum_{j=1}^M \left(B_{kj}^{(t)} \tilde{\chi}_j^{(t)} - C_{kj}^{(t)} \tilde{p}_j^{(t)} \right) \quad (3.17)$$

Applicando all'Eq.3.17 il metodo di collocazione descritto nel Par. 3.1, si ottiene un sistema finale di $N_o \times (2M + N)$ equazioni discretizzate accoppiate nelle $N_o \times (3M + N)$ incognite rappresentate da $\tilde{\mathbf{p}}^{1q}$ e $\tilde{\chi}^{1q}$ su Γ^{1q} , $\tilde{\mathbf{p}}_s^{0q}$ e $\tilde{\chi}_s^{0q}$ su Γ^{0q} e $\tilde{\mathbf{p}}^{\Omega q}$ in Ω_c^q con $q = 1..N_o$. In forma compatta tale sistema può scriversi

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}_q^{\parallel} \tilde{\mathbf{p}}^{1q} - \mathbf{B}_q^{\parallel} \tilde{\chi}^{1q} + \hat{\varrho} \mathbf{B}_q^{\text{IO}} \tilde{\chi}_s^{0q} + \mathbf{C}_q^{\text{IO}} \tilde{\mathbf{p}}_s^{0q} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{N_o} \left(\mathbf{B}^{\text{qj}} \tilde{\chi}_s^{\text{Ot}} - \mathbf{C}^{\text{qj}} \tilde{\mathbf{p}}_s^{\text{Ot}} \right) - \mathbf{H}_q^{\text{IO}\Omega} \tilde{\mathbf{p}}^{\Omega q} &= \\
&= -\hat{\varrho} \mathbf{B}_q^{\text{IO}} \tilde{\chi}_p^{0q} - \mathbf{C}_q^{\text{IO}} \tilde{\mathbf{p}}_p^{0q} \\
\mathbf{C}_q^{\text{Oj}} \tilde{\mathbf{p}}^{1q} - \mathbf{B}_q^{\text{Oj}} \tilde{\chi}^{1q} + \hat{\varrho} \mathbf{B}_q^{\text{OO}} \tilde{\chi}_s^{0q} + \mathbf{Y}_q^{\text{OO}} \tilde{\mathbf{p}}_s^{0q} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{N_o} \left(\mathbf{B}^{\text{qj}} \tilde{\chi}_s^{\text{Ot}} - \mathbf{C}^{\text{qj}} \tilde{\mathbf{p}}_s^{\text{Ot}} \right) - \mathbf{H}_q^{\text{OO}\Omega} \tilde{\mathbf{p}}^{\Omega q} &= \\
&= -\hat{\varrho} \mathbf{B}_q^{\text{OO}} \tilde{\chi}_p^{0q} - \mathbf{Y}_q^{\text{OO}} \tilde{\mathbf{p}}_p^{0q} \\
\mathbf{C}_q^{\Omega j} \tilde{\mathbf{p}}^{1q} - \mathbf{B}_q^{\Omega j} \tilde{\chi}^{1q} + \hat{\varrho} \mathbf{B}_q^{\Omega \text{O}} \tilde{\chi}_s^{0q} + \mathbf{C}_q^{\Omega \text{O}} \tilde{\mathbf{p}}_s^{0q} + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq q}}^{N_o} \left(\mathbf{B}^{\text{qj}} \tilde{\chi}_s^{\text{Ot}} - \mathbf{C}^{\text{qj}} \tilde{\mathbf{p}}_s^{\text{Ot}} \right) + (\mathbf{I} - \mathbf{H}_q^{\Omega \Omega} \mathbf{S}) \tilde{\mathbf{p}}^{\Omega q} &= \\
&= -\hat{\varrho} \mathbf{B}_q^{\Omega \text{O}} \tilde{\chi}_p^{0q} - \mathbf{C}_q^{\Omega \text{O}} \tilde{\mathbf{p}}_p^{0q}
\end{aligned}$$

Le $N_o \times M$ equazioni necessarie a chiudere il problema si ricavano, in modo analogo a quanto fatto per il caso di singolo oggetto, a partire dall'espressione approssimata dell'Eq. 2.15 scritta per il q -esimo oggetto.

Capitolo 4

Risultati

In questa sezione sono presentati i risultati numerici ottenuti simulando il problema di *Cummer-Schurig* attraverso la formulazione integrale derivata nei paragrafi precedenti, sia nel caso di singolo oggetto presente nel campo acustico sia nel caso multicorpo. Per tutti i casi considerati è stato effettuato un confronto tra la soluzione *naked*, ossia nella configurazione priva di mantello acustico, e la soluzione *cloaked* ottenuta considerando la presenza del mantello. La bontà dell'effetto mascherante è stata infine valutata introducendo un'opportuna metrica basata sulla norma L_2 del campo di scattering.

4.1 Impostazione generale delle simulazioni numeriche

Nelle sezioni precedenti è stata presentata la formulazione integrale per il problema di *Cummer-Schurig*, estesa al caso di un numero arbitrario di corpi presenti nel campo acustico, quindi è stata derivata la matrice di trasferimento del *cloaking* attraverso lo sviluppo di un opportuno metodo degli elementi di contorno esteso agli elementi di campo. Per validare la formulazione è stato implementato un codice utilizzando l'ambiente di calcolo parallelo offerto dal software commerciale Wolfram *Mathematica*TM. Le simulazioni sono state condotte fissando le dimensioni geometriche del corpo scatterante, del mantello acustico e i parametri caratteristici del mezzo presente nel dominio esterno Ω_h facendo variare la frequenza del campo primario e il numero degli elementi della griglia di calcolo.

Il mezzo nella regione esterna

Per quanto riguarda il mezzo presente nella regione esterna è stata scelta aria in condizioni standard al livello del mare le cui caratteristiche principali sono riportate di seguito

- Densità $\rho_0 = 1.125 \text{ Kg/m}^3$
- Modulo di comprimibilità $\mathcal{K}_0 = 1.4 \times 10^5 \text{ Pa}$
- Velocità del suono $c_0 = 343 \text{ m/s}$

Il mantello acustico

Per quanto riguarda il mantello acustico con riferimento alla Fig. 4.1 si è posto

- $R_1 = 0.2 \text{ m}$
- $R_2 = 0.4 \text{ m}$
- $\Delta = 0.2 \text{ m}$

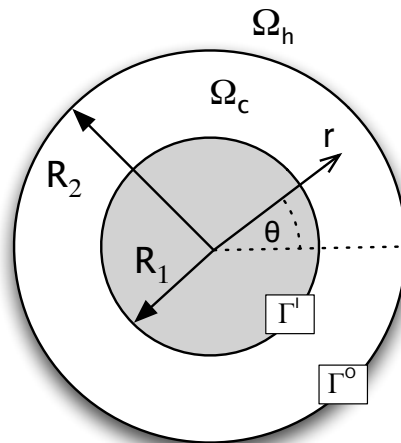


Figura 4.1: Il mantello acustico di *Cummer-Schurig* .

Il campo primario

Sono state considerate due tipologie di campo primario

- Onda piana $\tilde{p}(\mathbf{x}, k_0) = e^{-i k_0 x}$
- Monopolo $\tilde{p}_p(\mathbf{x}, k_0) = i/4 \mathcal{H}_0^{(2)}(k_0 R)$

Per entrambi i casi la frequenza è stata fatta variare nell'intervallo compreso tra 800 Hz e 1600 Hz , corrispondente alle frequenze ridotte comprese nell'intervallo $2.96 \leq k_0 a \leq 5.92$, con lunghezza di riferimento $a = R_1$.

Le dimensioni della griglia di calcolo

Come discusso al Par.3.2 i contorni Γ^I e Γ^O (cfr. Fig. 4.1) sono stati suddivisi ciascuno in M elementi di calcolo mentre la regione *cloak* è stata suddivisa in $N = N_\rho * N_\theta$ elementi di superficie, dove N_ρ e N_θ indicano rispettivamente il numero degli elementi in direzione radiale e circonferenziale, per un totale di $2M + N$ elementi. Nelle simulazioni numeriche il numero di elementi lungo una particolare direzione è stato scelto dipendentemente dalla frequenza analizzata secondo il seguente criterio

$$N_{elem} = N_\lambda * L/\lambda \quad (4.1)$$

dove si è indicato con N_{elem} il numero di elementi lungo la direzione scelta, con L la lunghezza caratteristica lungo la direzione scelta, con N_λ il numero di elementi per lunghezza d'onda e infine con λ la lunghezza d'onda. Al fine di ricostruire con un'accuratezza accettabile i campi acustici è stato fissato $N_\lambda > 5$ in tutte le simulazioni.

4.2 Risultati numerici nel caso di singolo ostacolo

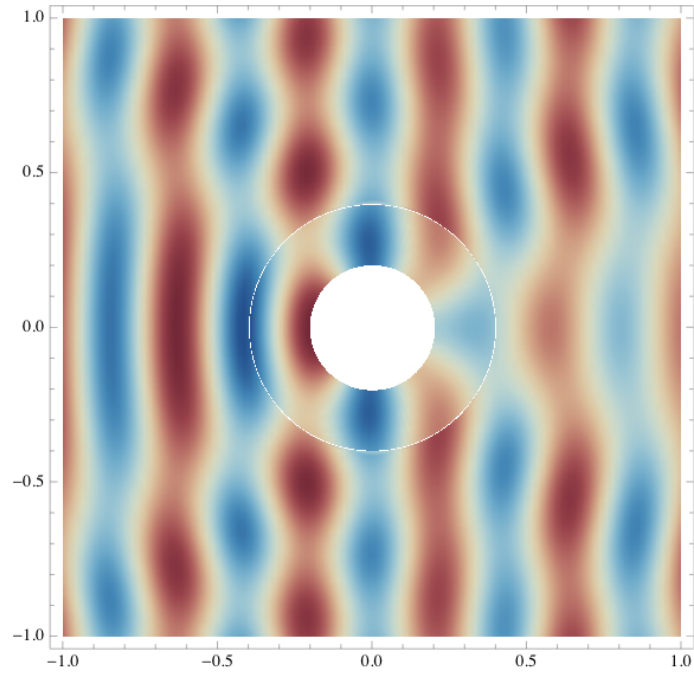
Ostacolo acusticamente rigido in presenza di un'onda piana

Il primo caso analizzato riguarda un cilindro acusticamente rigido in presenza di un campo primario dovuto ad un'onda piana che si propaga nella direzione delle x positive.

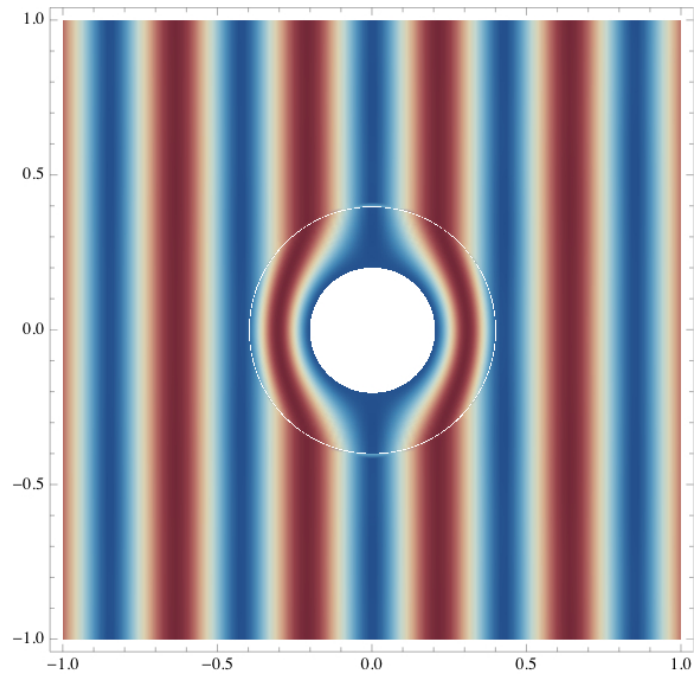
Come menzionato in precedenza, le simulazioni sono state effettuate variando la frequenza nell'intervallo 800 Hz e 1600 Hz corrispondente al range di frequenze ridotte $2.96 \leq k_0 a \leq 5.92$.

In Fig. 4.2(b) è rappresentata la parte reale della pressione totale nel dominio $\Omega_c \cup \Omega_h$ alla frequenza $f = 800 \text{ Hz}$ (corrispondente alla frequenza ridotta $ka = 2.96$) nel caso in cui sia presente il mantello acustico, mentre nella Fig. 4.2(a) è rappresentata per lo stesso caso la parte reale del campo totale nella configurazione priva di mantello, ottenuta ponendo $\tilde{\sigma} = 0$ nella formulazione. Come si può osservare, il mantello acustico devia considerevolmente i fronti d'onda nella regione Ω_c permettendo all'onda incidente di aggirare l'ostacolo e riallinearsi a valle di questo. Inoltre non si notano apprezzabili cambiamenti nell'intensità del campo sia a valle dell'oggetto che a monte di questo. L'effetto è sorprendente se si considera, con riferimento alla Fig. 4.2(a), l'importanza dei fenomeni di *front-scattering* e *back-scattering* nel dominio Ω_h .

Le Figg. 4.3 e 4.4 mostrano i risultati per lo stesso oggetto in presenza di onda piana rispettivamente nei casi $f = 1200 \text{ Hz}$ ($ka = 4.44$) e $f = 1600 \text{ Hz}$ ($ka = 5.91$). Sebbene anche per questi due casi test l'effetto del mantello acustico sia rimarchevole, osservando attentamente il campo totale nella regione Ω_h nella Fig. 4.4(b), riferita al caso $f = 1600 \text{ Hz}$, si può notare una zona a valle dell'oggetto in cui i colori sono leggermente sbiaditi rispetto al resto del dominio acustico. L'analisi approfondita di questo risultato è fornita nella sezione 4.3 dedicata all'analisi quantitativa dell'effetto mascherante del mantello acustico.

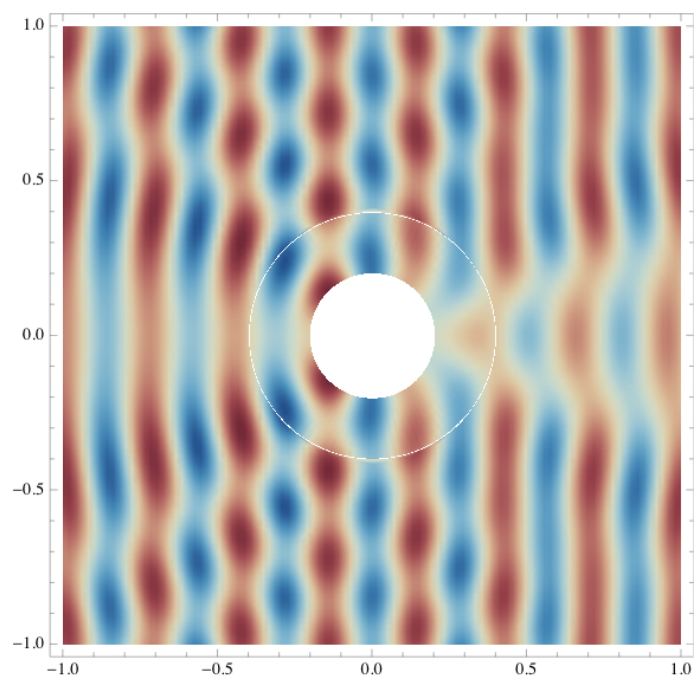


(a) Ostacolo privo di mantello

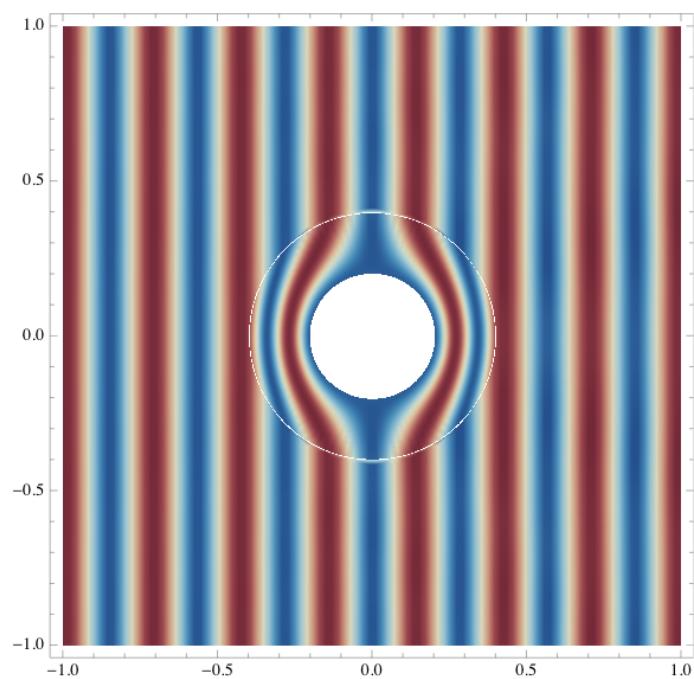


(b) Ostacolo provvisto di mantello

Figura 4.2: Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 2.96$ ($f = 800$ Hz). Ostacolo acusticamente rigido nel caso di onda piana proveniente da sinistra.

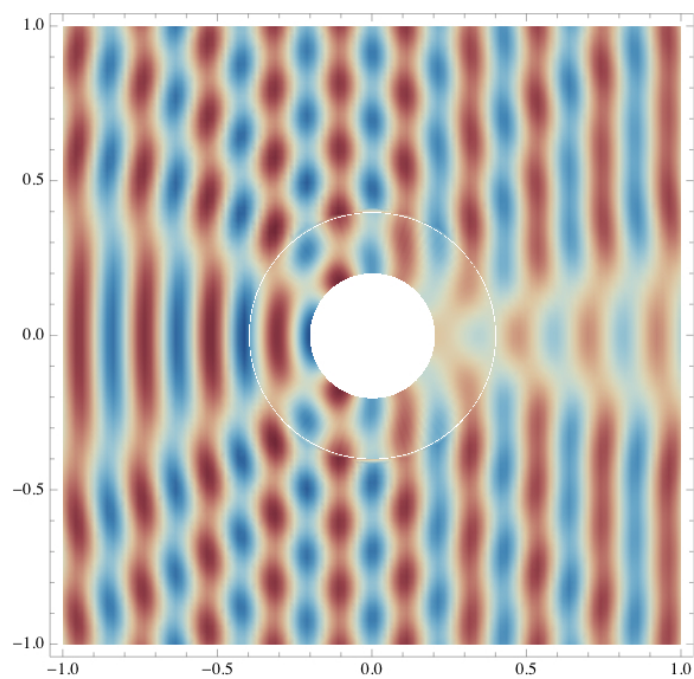


(a) Ostacolo privo di mantello

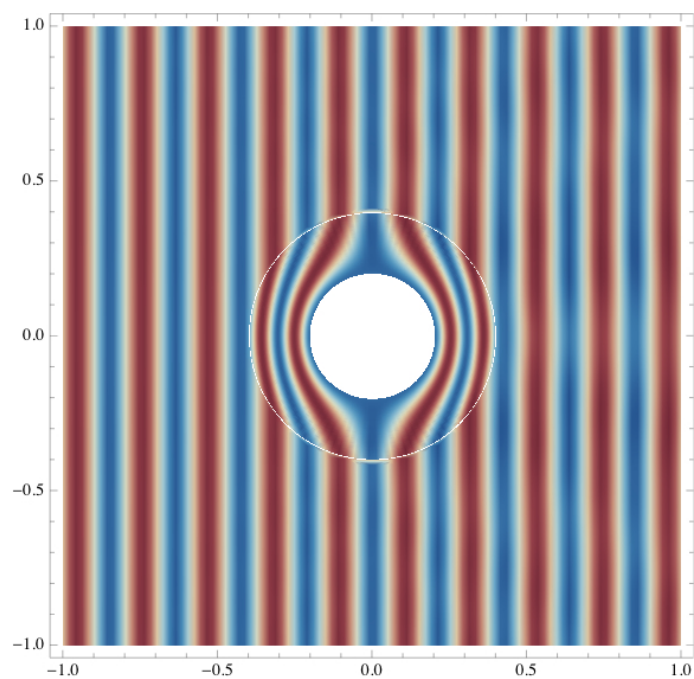


(b) Ostacolo provvisto di mantello

Figura 4.3: Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 4.44$ ($f = 1200$ Hz). Ostacolo acusticamente rigido nel caso di onda piana proveniente da sinistra.



(a) Ostacolo privo di mantello



(b) Ostacolo provvisto di mantello

Figura 4.4: Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 5.91$ ($f = 1600$ Hz). Ostacolo acusticamente rigido nel caso di onda piana proveniente da sinistra.

Ostacolo acusticamente rigido in presenza di un monopolo

Nelle Figg. 4.5(b) e 4.5(a) sono raffigurati gli andamenti della parte reale del campo totale, rispettivamente nella configurazione con e senza mantello acustico, nel caso di campo primario dovuto ad un monopolo di ampiezza complessa unitaria posto in $\mathbf{x}_s \equiv (-4, 0)$ alla frequenza di 800 Hz ($ka = 2.96$). Anche in questo caso la presenza del mantello acustico annulla quasi completamente gli effetti dovuti al campo di scattering discussi precedentemente. Si noti (cfr. Fig. 4.5(b)) che la diminuzione di intensità del campo a valle dell'oggetto è dovuto unicamente al progressivo aumento della superficie del fronte d'onda nella propagazione.

Ostacolo acusticamente rigido in presenza di due onde piane

Si conclude l'analisi nel caso di ostacolo acusticamente rigido considerando un campo primario dovuto alla presenza contemporanea di due onde piane alla frequenza di ($f = 800 \text{ Hz}$ ($ka = 2.96$)) i cui vettori d'onda sono inclinati rispetto alla direzione orizzontale rispettivamente di 25 e 280 gradi. La Fig. 4.6(a) mostra il campo totale in Ω_c e Ω_h nella configurazione senza mantello acustico mentre la Fig. 4.6(b) mostra il campo totale in Ω_c e Ω_h nella configurazione con il mantello. Anche in questo caso l'effetto mascherante è notevole, come si può osservare confrontando la soluzione nel caso di ostacolo in presenza del mantello acustico con il campo primario mostrato nella Fig. 4.6(c).

Ostacolo acusticamente soffice in presenza di un'onda piana

I risultati per il caso di oggetto acusticamente soffice in presenza di un'onda piana sono mostrati nelle Figg. 4.7, 4.8 e 4.9 rispettivamente per le frequenze 800 Hz ($ka = 2.96$), $f = 1200 \text{ Hz}$ ($ka = 4.44$) e $f = 1600 \text{ Hz}$ ($ka = 5.91$). In questo caso il mantello acustico non è in grado di guidare perfettamente i fronti d'onda del campo primario intorno all'ostacolo e di conseguenza parte della perturbazione incidente raggiunge l'oggetto dando luogo ad un campo di scattering più pronunciato rispetto al caso di oggetto acusticamente rigido. Per tutti e tre i casi considerati si può infatti notare la presenza di zone più chiare

(cfr. Figg. 4.7(b), 4.8(b) e 4.9(b)) in corrispondenza delle zone in cui l'interferenza distruttiva tra il campo primario e il campo di scattering, nelle rispettive configurazioni in assenza di mantello acustico (cfr. Figg.4.7(a), 4.8(a) e 4.9(a)), è più marcato. La riduzione dell'effetto mascherante del mantello acustico per questa configurazione, tuttavia, non deve sorprendere essendo una diretta conseguenza del legame tra la condizione al contorno imposta sulla superficie dell'ostacolo e l'espressione dei parametri caratteristici del mezzo presente nel mantello acustico discussi nel Cap. 1. Infatti, nel problema di *Cummer-Schurig* si assume che il gradiente di pressione sia tangente alla frontiera interna del mantello Γ^i , *i.e.* un ostacolo acusticamente rigido. Nel caso di condizione al contorno di Dirichlet, equivalente al caso di ostacolo acusticamente soffice, la condizione di tangenza del gradiente di pressione su Γ^i non può essere soddisfatta ed il mantello non è quindi in grado di curvare efficientemente i fronti d'onda del campo primario.

4.3 L'efficienza del mantello acustico: la misura del campo secondario in Ω_h

I risultati fin qui ottenuti mostrano come l'efficienza del mantello acustico dipenda da molteplici fattori, in particolare dal tipo di condizione al contorno imposta sulla superficie dell'oggetto e dalla frequenza scelta per l'analisi. Le considerazioni esposte, tuttavia, sono di carattere puramente qualitativo e risultano insufficienti a caratterizzare senza ambiguità tanto l'efficienza dell'effetto di mascheramento del mantello acustico, quanto l'efficienza della metodologia proposta per modellare il fenomeno e della relativa implementazione numerica.

Per superare questa limitazione, è stato introdotto nell'analisi un indicatore del grado di efficienza del mantello acustico basato sulla norma L^2 del campo di secondario nel dominio Ω_h . Come più volte menzionato, infatti, il grado di invisibilità acustica dipende dall'intensità dei fenomeni di scattering dovuti all'interazione tra una perturbazione acustica con gli oggetti scatteranti presenti nel campo acustico. In quest'ottica la perfetta invisibilità

si può dunque ottenere se $\tilde{p}_s(\mathbf{x}, k) = 0, \forall \mathbf{x} \in \Omega_h$. L'indice di intensità dello scattering utilizzato nel presente lavoro di tesi è definito come la norma L^2 del campo di scattering normalizzato con la norma L^2 del campo primario

$$I_{SI} = \frac{\|\tilde{p}_s\|_2}{\|\tilde{p}_p\|_2} = \left(\int_{\hat{\Omega}_h} |\tilde{p}_s|^2 d\Omega \right)^{1/2} \left(\int_{\hat{\Omega}_h} |\tilde{p}_p|^2 d\Omega \right)^{-1/2} \quad (4.2)$$

Dalla definizione discende immediatamente che la condizione di perfetta invisibilità $\tilde{p}_s(\mathbf{x}, k) = 0$ equivale alla condizione $I_{SI} = 0$. Occorre sottolineare, comunque, che l'utilizzo di un indicatore siffatto rappresenta un'approccio standard per la valutazione dell'intensità globale di un campo scalare e, a titolo di esempio, si può citare [23] dove la stessa norma è utilizzata per la valutazione dell'effetto di mascheramento di un mantello acustico basato su una distribuzione di sorgenti attive.

L'indice I_{SI} è stato calcolato per i casi test descritti nella sezione precedente per valori di frequenza compresi nell'intervallo $800 \leq f \leq 1600 \text{ Hz}$ con risoluzione di circa 53 Hz . I risultati sono mostrati nel grafico log-log in Fig. 4.10, dove i cerchietti neri si riferiscono all'oggetto acusticamente rigido mentre i quadratini bianchi all'oggetto acusticamente soffice. Nello steso grafico, per finalità di confronto, sono riportati con linee tratteggiate anche i risultati per gli stessi due casi nella configurazione in assenza di mantello acustico. Nel caso di oggetto acusticamente rigido si può osservare un abbattimento del campo di scattering, rispetto alla configurazione senza mantello acustico, di oltre un ordine di grandezza nell'intervallo di frequenze considerato, con un picco di due ordini di grandezza per la frequenza più bassa. Nel caso di oggetto acusticamente soffice, invece, l'abbattimento risulta meno di un ordine di grandezza confermando le considerazioni espone nella sezione precedente. Inoltre si può notare come nel caso di oggetto acusticamente soffice l'indice di scattering rimanga pressochè costante al variare della frequenza, mentre nel caso di oggetto acusticamente rigido segue un andamento crescente con le frequenze. L'analisi preliminare dei dati disponibili indica un andamento dell'indice di scattering $I_{SI} \approx \mathcal{O}(f^3)$, simile all'andamento osservato da Torrent e Sanchez-Dehesa in [16] per il *Total Scattering Cross Section*, un altro indice diffusamente utilizzato in campo acustico. Nell'articolo citato, Torrent e Sanchez-Dehesa conducono un'analisi del problema di

Cummer-Schurig basata sull'approssimazione del mantello acustico tramite una stratificazione uniforme di gusci concentrici di un materiale a densità *ortotropica*. A conclusione dell'analisi, gli autori suggeriscono che l'andamento da loro ottenuto per il *Total Scattering Cross Section* con il crescere della frequenza nel caso di ostacolo acusticamente rigido sia da attribuirsi agli errori introdotti nell'approssimazione del materiale continuo con una serie discreta di strati. Sebbene anche nel presente metodo la discretizzazione del mantello produca una sequenza discreta di strati, è interessante notare, d'altra parte, il legame esistente tra la diversa struttura della matrice di trasferimento del mantello acustico nel caso di condizione al contorno rigida o soffice e i ripetitivi andamenti dell'indice di scattering al crescere della frequenza. Riportando per semplicità di lettura le espressioni delle matrici Δ , costituenti le matrici trasferimento, nei due casi

Superficie acusticamente rigida

$$\Rightarrow \Delta = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}^{\parallel} & \mathbf{C}^{\text{IO}} - \hat{\rho} \mathbf{B}^{\text{IO}} \mathbf{Z}^{\text{OO}} & -\mathbf{H}^{\text{IO}} \mathbf{S} \\ \mathbf{C}^{\text{OI}} & \mathbf{Y}^{\text{OO}} - \hat{\rho} \mathbf{B}^{\text{OO}} \mathbf{Z}^{\text{OO}} & -\mathbf{H}^{\text{OO}} \mathbf{S} \\ \mathbf{C}^{\text{OI}} & \mathbf{C}^{\text{OO}} - \hat{\rho} \mathbf{B}^{\text{OO}} \mathbf{Z}^{\text{OO}} & \mathbf{I} - \mathbf{H}^{\text{OO}} \mathbf{S} \end{pmatrix}^{-1}$$

Superficie acusticamente soffice

$$\Rightarrow \Delta = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^{\parallel} & \mathbf{C}^{\text{IO}} - \hat{\rho} \mathbf{B}^{\text{IO}} \mathbf{Z}^{\text{OO}} & -\mathbf{H}^{\text{IO}} \mathbf{S} \\ \mathbf{B}^{\text{OI}} & \mathbf{Y}^{\text{OO}} - \hat{\rho} \mathbf{B}^{\text{OO}} \mathbf{Z}^{\text{OO}} & -\mathbf{H}^{\text{OO}} \mathbf{S} \\ \mathbf{B}^{\text{OI}} & \mathbf{B}^{\text{OO}} - \hat{\rho} \mathbf{B}^{\text{OO}} \mathbf{Z}^{\text{OO}} & \mathbf{I} - \mathbf{H}^{\text{OO}} \mathbf{S} \end{pmatrix}^{-1}$$

si può osservare come nel caso di superficie acusticamente rigida, Γ^{\parallel} contribuisca alla matrice Δ con singolarità legate allo strato di doppiette di intensità

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \nabla G \cdot \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{i} k_0}{4 R} \mathcal{H}_1^{(2)}(k_0 R) \mathbf{R} \cdot \mathbf{n}$$

mentre nel caso di superficie acusticamente soffice, il contributo di Γ^{\parallel} alla matrice Δ è rappresentato da singolarità legate allo strato di sorgenti di intensità

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{\mathbf{i}}{4} \mathcal{H}_0^{(2)}(k_0 R), \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

Come si può osservare, nell'espressione dello strato di doppiette il numero d'onda k_0 compare come fattore moltiplicativo della funzione di Hankel $\mathcal{H}_1^{(2)}(k_0 R)$, mentre lo strato di sorgenti dipende dal numero d'onda solo attraverso l'argomento di $\mathcal{H}_0^{(2)}(k_0 R)$. Sebbene non sia ancora chiara la dipendenza tra le espressioni di G e di $\frac{\partial G}{\partial n}$ e l'andamento in frequenza dell'indice di scattering nei due casi considerati, una relazione analitica che possa giustificare i risultati ottenuti è attualmente in fase di sviluppo.

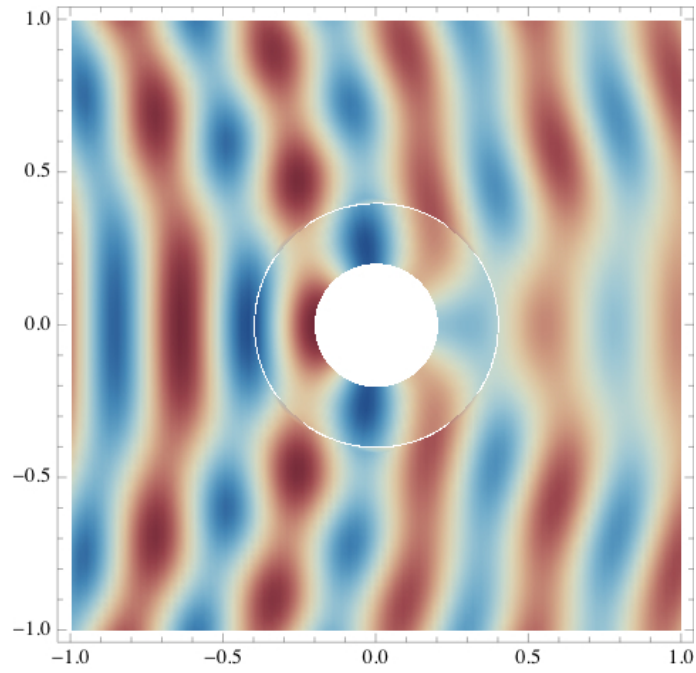
4.4 Risultati numerici nel caso di due oggetti acusticamente rigidi

La formulazione estesa al caso multicorpo è stata testata nel caso di due corpi acusticamente rigidi aventi le stesse dimensioni ed entrambi provvisti dello stesso mantello acustico. Le simulazioni sono state condotte fissando la posizione del primo corpo e variando la posizione del secondo corpo per tre configurazioni differenti. In tutti e tre i test il campo primario è dovuto ad un'onda piana proveniente da sinistra e diretta orizzontalmente alla frequenza $f = 600 \text{ Hz}$ (corrispondente ad una frequenza ridotta $ka = 2.22$). Le Figg. 4.11(a), 4.12(a) e 4.13(a) mostrano il campo di pressione totale in entrambi i domini Ω_c e Ω_h rispettivamente per i casi:

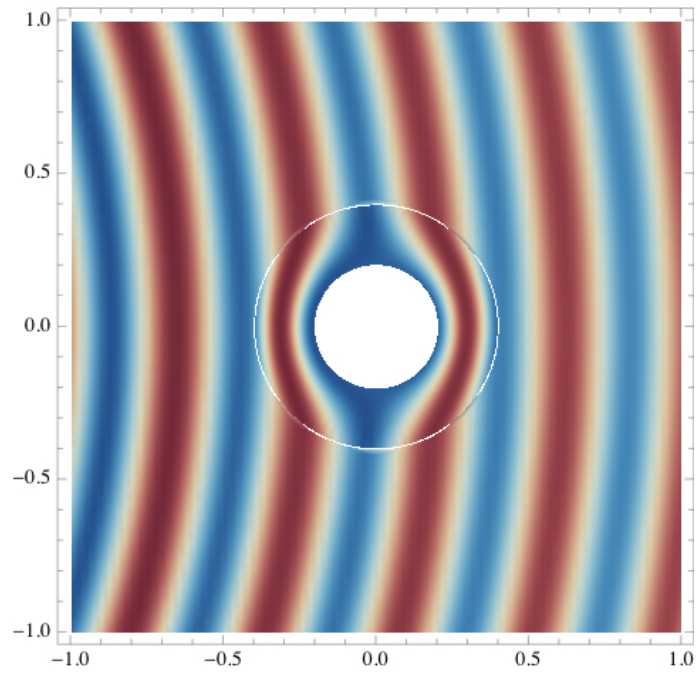
- Posizione corpo 1 $\mathbf{x}_1 \equiv (0, 0)$ – Posizione corpo 2 $\mathbf{x}_2 \equiv (2, 0)$;
- Posizione corpo 1 $\mathbf{x}_1 \equiv (0, 0)$ – Posizione corpo 2 $\mathbf{x}_2 \equiv (2, 2)$;
- Posizione corpo 1 $\mathbf{x}_1 \equiv (0, 0)$ – Posizione corpo 2 $\mathbf{x}_2 \equiv (0, 2)$.

mentre le Figg. 4.11(b), 4.12(b) e 4.13(b) si riferiscono ai corrispondenti campi di scattering. Sebbene dalle figure si evinca come anche per questi casi i mantelli acustici riescano a mascherare entrambi gli oggetti, si possono notare alcune differenze tra i risultati ottenuti variando la loro posizione relativa. In particolare per la prima configurazione (cfr. Fig. 4.11(a) e 4.11(b)) si nota come il campo totale nel dominio Ω_h coincida con il campo

primario senza apprezzabili effetti di scattering, impressione confermata dalla figura relativa al corrispondente campo secondario. Nella seconda configurazione (cfr. Fig. 4.12(a) e 4.12(b)) si possono invece notare sia delle piccole distorsioni dei fronti d'onda nel campo totale sia delle zone in cui gli effetti di interferenza tra il campo primario e il campo secondario sono presenti ma non particolarmente pronunciati. Tali effetti diventano decisamente più evidenti nell'ultimo caso (cfr. Fig. 4.13(a) e 4.13(b)) dove, nonostante l'effetto mascherante sia ancora particolarmente apprezzabile, si possono notare ampie zone di interferenza nel campo totale. Inoltre i fronti d'onda appaiono distorti nella regione compresa tra i due oggetti e nelle due regioni situate rispettivamente al di sopra del primo oggetto e al di sotto del secondo oggetto, laddove l'intensità del campo secondario è maggiore (cfr. Fig. 4.13(b)).

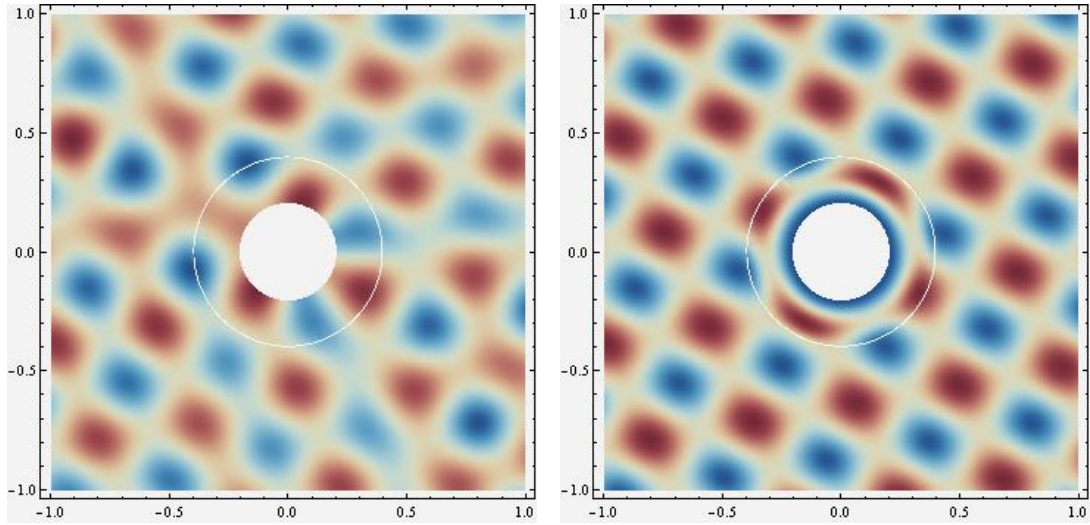


(a) Ostacolo privo di mantello



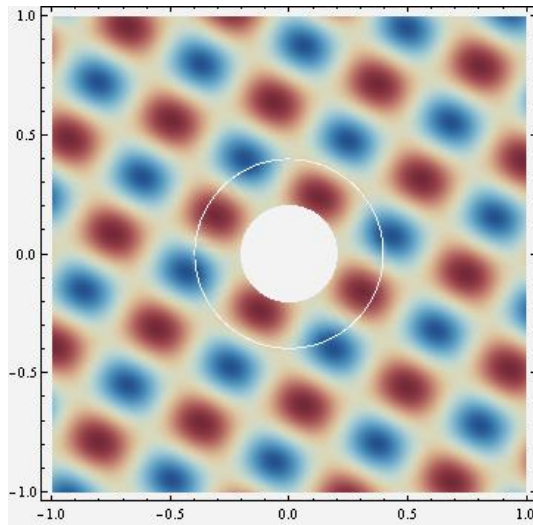
(b) Ostacolo provvisto di mantello

Figura 4.5: Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 2.96$ ($f = 800$ Hz). Ostacolo acusticamente rigido nel caso di monopolo posto $\mathbf{x} \equiv (-4, 0)$.



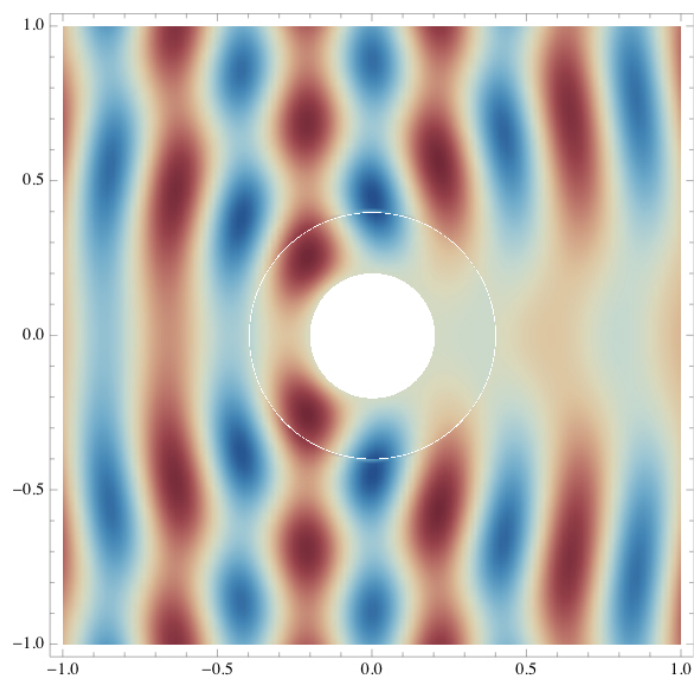
(a) Ostacolo privo di mantello

(b) Ostacolo provvisto di mantello

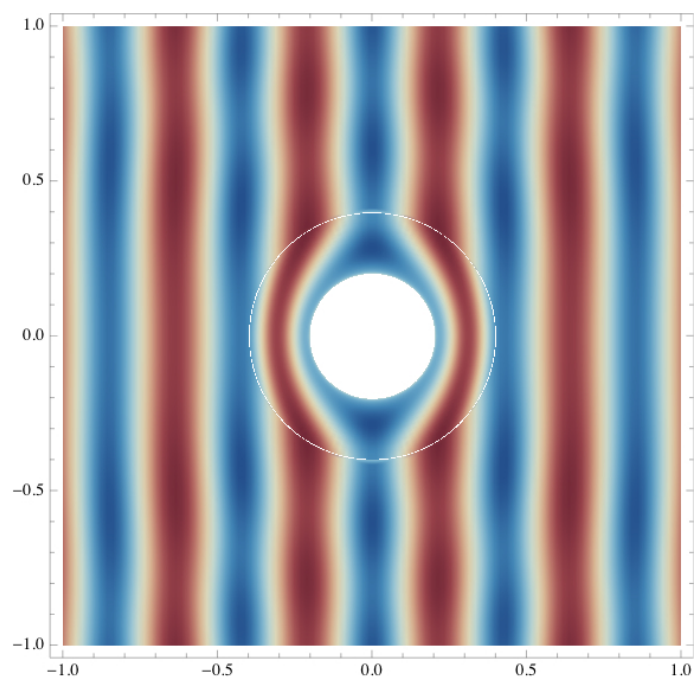


(c) Campo primario

Figura 4.6: Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 2.96$ ($f = 800$ Hz). Ostacolo acusticamente rigido nel caso di due onde piane ortogonali.

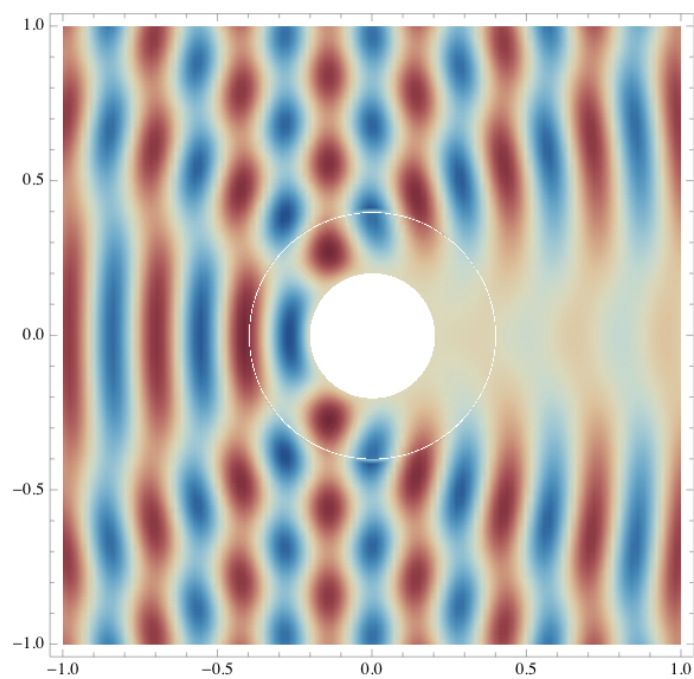


(a) Ostacolo privo di mantello

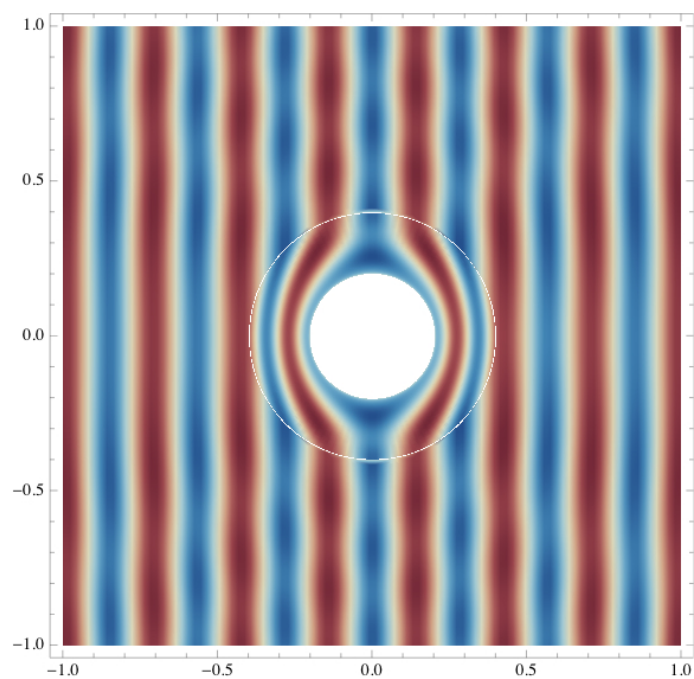


(b) Ostacolo provvisto di mantello

Figura 4.7: Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 2.96$ ($f = 800$ Hz). Ostacolo acusticamente soffice nel caso di onda piana proveniente da sinistra.

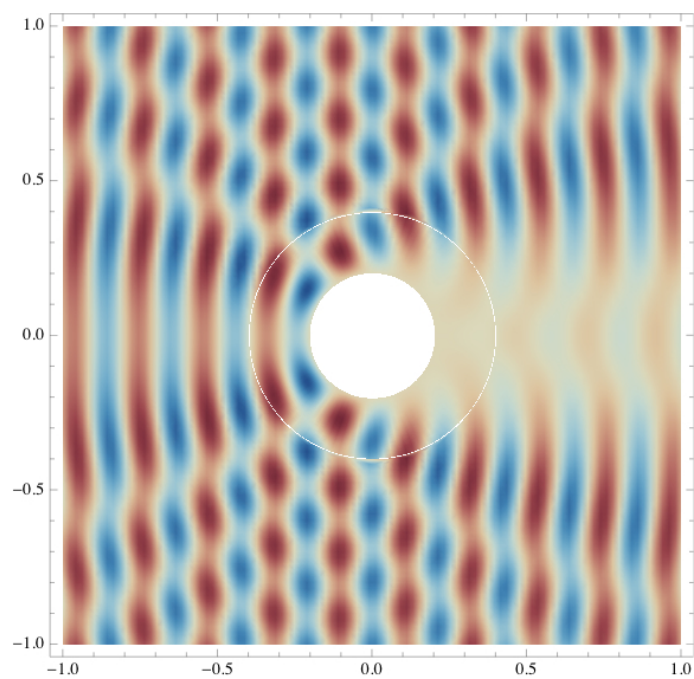


(a) Ostacolo privo di mantello

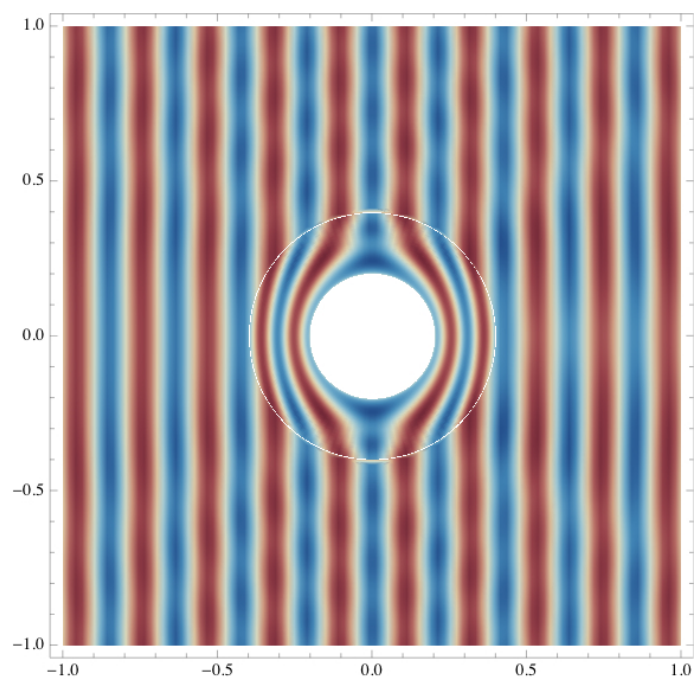


(b) Ostacolo provvisto di mantello

Figura 4.8: Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 4.44$ ($f = 1200$ Hz). Ostacolo acusticamente soffice nel caso di onda piana proveniente da sinistra.



(a) Ostacolo privo di mantello



(b) Ostacolo provvisto di mantello

Figura 4.9: Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 5.91$ ($f = 1600$ Hz). Ostacolo acusticamente soffice nel caso di onda piana proveniente da sinistra.

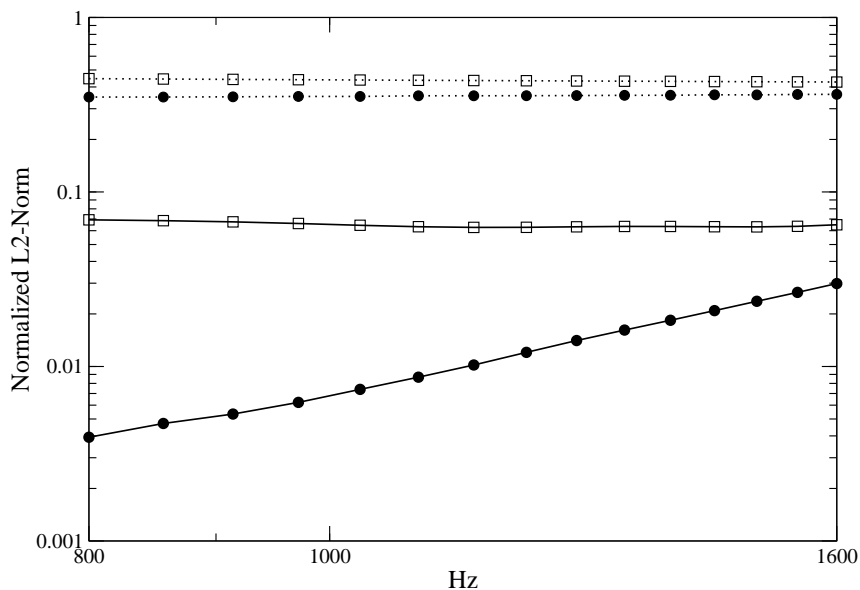
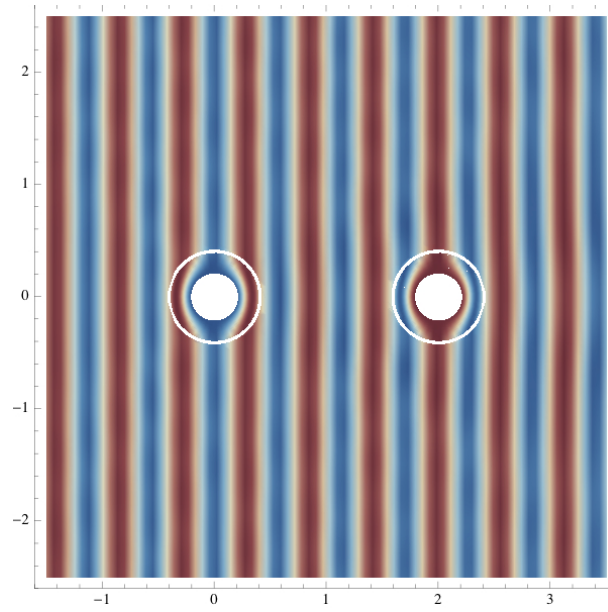
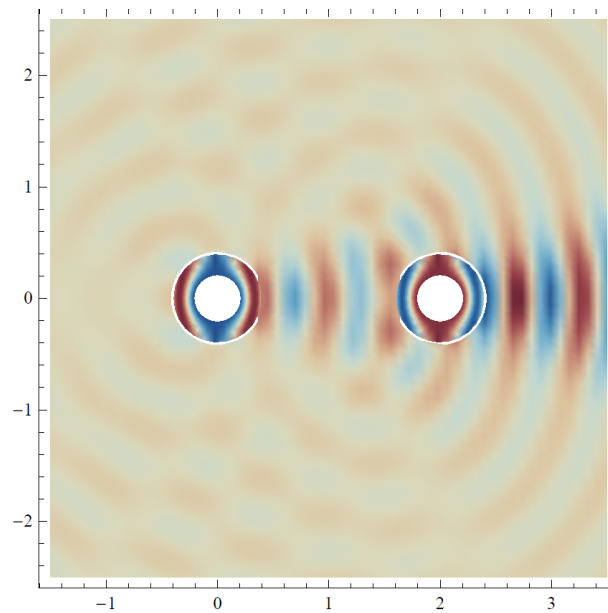


Figura 4.10: Norma L^2 del campo di scattering in $\Omega = \Omega_c \cup \Omega_h$ per un ostacolo acusticamente rigido (\bullet) e acusticamente soffice (\square). Le linee tratteggiate (\cdots) si riferiscono al campo prodotto dall'ostacolo in assenza di mantello acustico, mentre le linee continue (---) in presenza di mantello acustico. Tutti i valori sono normalizzati rispetto alla norma L^2 del campo incidente in Ω .

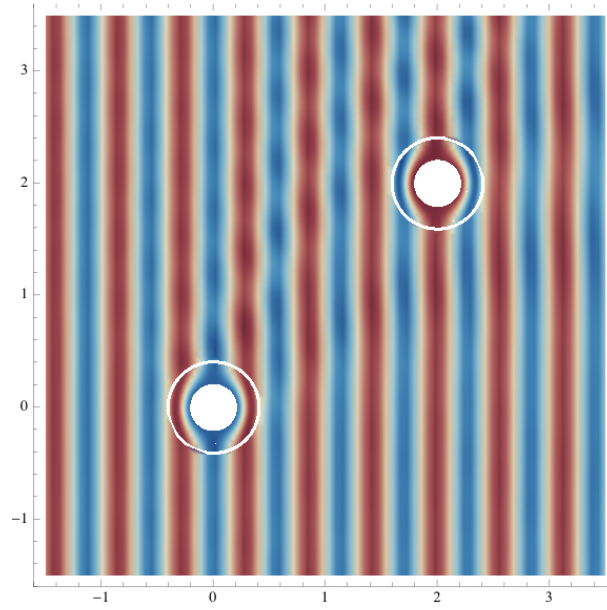


(a) Campo totale

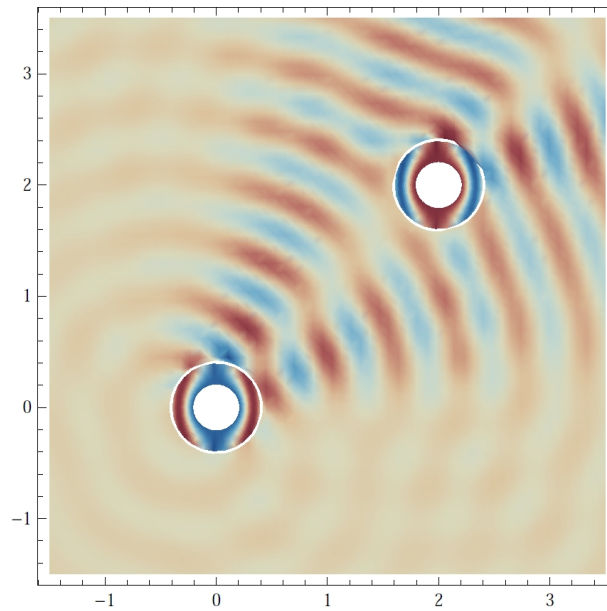


(b) Campo di scattering

Figura 4.11: Soluzione in Ω_c e Ω_h a $ka = 2.22$ ($f = 600$ Hz), per un'onda piana che si propaghi da sinistra verso destra in presenza di due ostacoli acusticamente rigidi. Posizione corpo 1 $\mathbf{x}_1 \equiv (0, 0)$ – Posizione corpo 2 $\mathbf{x}_2 \equiv (2, 0)$.

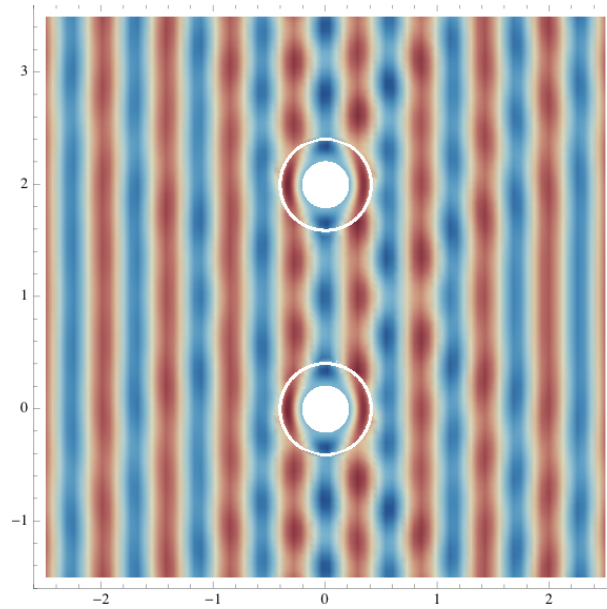


(a) Campo totale

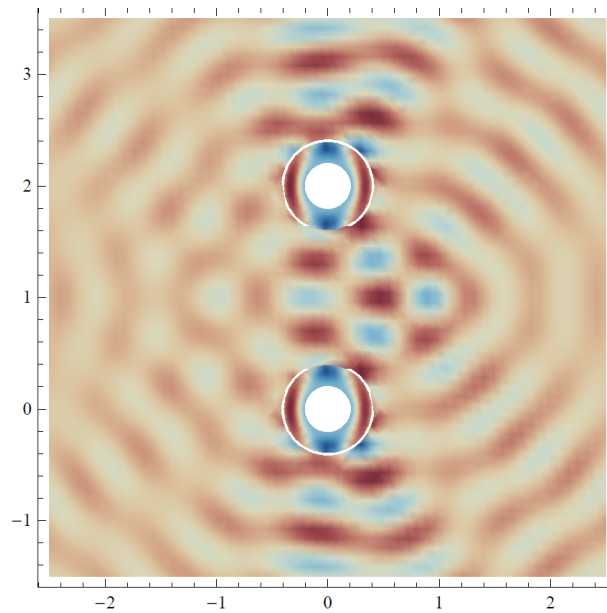


(b) Campo di scattering

Figura 4.12: Soluzione in Ω_c e Ω_h a $ka = 2.22$ ($f = 600$ Hz), per un'onda piana che si propaghi da sinistra verso destra in presenza di due ostacoli acusticamente rigidi. Posizione corpo 1 $\mathbf{x}_1 \equiv (0, 0)$ – Posizione corpo 2 $\mathbf{x}_2 \equiv (2, 2)$.



(a) Campo totale



(b) Campo di scattering

Figura 4.13: Soluzione in Ω_c e Ω_h a $ka = 2.22$ ($f = 600$ Hz), per un'onda piana che si propaghi da sinistra verso destra in presenza di due ostacoli acusticamente rigidi. 1 $\mathbf{x}_1 \equiv (0, 0)$ – Posizione corpo 2 $\mathbf{x}_2 \equiv (0, 2)$.

Capitolo 5

Conclusioni

Nel presente lavoro di tesi è stato analizzato il *cloaking* acustico di *Cummer-Schurig* mediante un approccio integrale innovativo. L'equazione di governo delle piccole perturbazioni di pressione nel mantello acustico è stata riscritta nella forma di un'equazione di Helmholtz non omogenea, trattando i termini dipendenti dalle caratteristiche non convenzionali del mezzo contenuto nel mantello come una sorgente di campo distribuita. L'equazione riformulata valida nel mantello acustico è stata accoppiata all'equazione omogenea di Helmholtz valida nel dominio esterno al mantello tramite le condizioni di continuità imposte all'interfaccia dei due domini. La soluzione del sistema di equazioni è stata ottenuta analiticamente utilizzando per entrambe il metodo della Soluzione Fondamentale imponendo condizioni al contorno di Neumann e di Dirichlet sulla frontiera dell'oggetto da mascherare. Il metodo è stato opportunamente esteso per includere il caso di un numero arbitrario di oggetti presenti nel campo. A livello numerico la soluzione è stata calcolata utilizzando una versione originale del Metodo degli Elementi di Contorno esteso agli elementi di campo per tenere conto della sorgente distribuita nel mantello acustico, sia nel caso di singolo corpo che nel caso multicorpo. È stata inoltre derivata la matrice di trasferimento che lega il valore del campo primario sulla frontiera esterna del mantello acustico con un punto arbitrario del campo esterno. Sono state condotte simulazioni numeriche nel caso di singolo oggetto acusticamente rigido e soffice in presenza di un campo

primario generato da un'onda piana e da un monopolo nell'intervallo di frequenze da 800 Hz a 1600 Hz (corrispondenti all'intervallo di frequenze ridotte da 2.96 a 5.92), nel caso di singolo oggetto acusticamente rigido in presenza di un campo primario ottenuto come somma di due onde piane provenienti da direzioni arbitrarie e nel caso di due oggetti acusticamente rigidi in diverse posizioni relative in presenza di un'onda piana. L'analisi di efficienza del mantello acustico è stata affrontata mediante la misura della norma L_2 del campo di scattering per l'intervallo di frequenze considerato. I risultati hanno mostrato l'effettivo potere mascherante del mantello acustico per tutte le frequenze di analisi e per entrambe le tipologie di condizioni al contorno nel caso di singolo ostacolo e di doppio oggetto.

L'analisi di efficienza del mantello acustico è stata affrontata mediante la misura della norma L_2 del campo di scattering per l'intervallo di frequenze considerato. Nel caso di oggetto acusticamente rigido l'analisi di efficienza ha mostrato un andamento crescente con la frequenza in linea con gli andamenti osservati da altri autori. Nel caso di oggetto acusticamente soffice si è riscontrato un andamento dell'efficienza costante con la frequenza ed in generale peggiore rispetto al caso rigido. Allo stato attuale è in fase di sviluppo l'estensione al caso tridimensionale per oggetti di forma arbitraria in moto uniforme nel campo esterno. Parallelamente è in corso lo studio del comportamento asintotico in frequenza dell'efficienza del mantello acustico.

Bibliografia

- [1] S. A. Cummer, D. Schurig, *One path to acoustic cloaking. New Journal of Physics* **9** 45 (2007). DOI:10.1088/1367-2630/9/3/045.
- [2] J. B. Pendry, D. Schurig, D. R. Smith, *Controlling Electromagnetic Field. Science* **312** 5781 (2006) 1780. DOI: 10.1126/science.1125907.
- [3] A. Greenleaf, M. Lassas, G. Uhlmann, *On nonuniqueness for Calderon's inverse problem, Maths. Res. Lett.* 10, 685-693 (2003).
- [4] U. Leonhardt, *Optical conformal mapping. Science* 312, 1777–1780 (2006).doi:10.1126/science.1126493.
- [5] G. W. Milton, M. Briane, J. R. Willis, *On cloaking for elasticity and physical equations with transformation invariant form. New Journal of Physics* **8** 248 (2006). DOI:10.1088/1367-2630/8/10/248.
- [6] H. Chen, C. T. Chan, *Acoustic cloaking in three dimensions using acoustic metamaterials, Appl. Phys. Lett.* 91, 183518 (2007), DOI: 10.1063/1.2803315.
- [7] S. S. Cummer, B.-I. Popa, D. Schurig, D. Smith, J. Pendry, M. Rahm, A. Starr, *Scattering Theory Derivation of a 3D Acoustic Cloaking Shell, Phys. Rev. Lett.* 100, 024301 (2008), DOI: 10.1103/PhysRevLett.100.024301
- [8] S. A. Cummer, M. Rahm, D. Schurig, *Material parameters and vector scaling in transformation acoustics. New Journal of Physics* **10** 115025 (2008). DOI:10.1088/1367-2630/10/11/115025.

- [9] D. Torrent, J. Sanchez-Dehesa, *Acoustic cloaking in two dimensions: a feasible approach*. *New Journal of Physics* **10** (2008). DOI:10.1088/1367-2630/10/6/063015.
- [10] A. N. Norris, *Acoustic cloaking theory*. *Proc. R. Soc. A* **464** (2008) 2411-2434. DOI: 10.1098/rspa.2008.0076.
- [11] G. W. Milton, A. V. Cherkaev, *Which elasticity tensors are realizable?*, *J. Eng. Mater. Technol.* 117, 483–493 (1995) DOI:10.1115/1.2804743.
- [12] J. B. Pendry, J. Li, *An acoustic metafluid: realizing a broadband acoustic cloak*, *New Journal of Physics* 10 (2008) 115032 (9pp), DOI: 10.1088/1367-2630/10/11/115032
- [13] J. Hu, X. Zhou, G. Hu, *A numerical method for designing acoustic cloak with arbitrary shapes*, *Computational Materials Science*, Volume 46, Issue 3, September 2009, Pages 708–712, Proceedings of the 18th International Workshop on Computational Mechanics of Materials — IWCMM-18.
- [14] J. Hu, X. Zhou, G. Hu, *Design Arbitrary Shaped 2D Acoustic Cloak without Singularity*, ASME International Mechanical Engineering Congress and Exposition, Proceedings, v15, p97-102, (2010), DOI: 10.1115/IMECE2009-10727.
- [15] B.-I. Popa, L. Zigoneanu, S. A. Cummer, *Experimental Acoustic Ground Cloak in Air*, *Phys. Rev. Lett.* 106, 253901 (2011). DOI: 10.1103/PhysRevLett.106.253901.
- [16] L. W. Cai, J. Sanchez-Dehesa, *Analysis of Cummer-Shurig acoustic cloaking*. *New Journal of Physics* **9** 450 (2007). DOI:10.1088/1367-2630/9/12/450.
- [17] E. Kreyzig, *Advanced Engineering Mathematics*, New York: John Wiley & Sons, 1999.
- [18] S. W. Rienstra, A. Hirschberg, *An Introduction To Acoustics (corrections)*, Further updated version (Jan 2012) of Report IWDE 01-03 May 2001, with A. Hirschberg (extended and revised version of IWDE 92-06).

- [19] A. D. Pierce, *Acoustics. An Introduction to Its Physical Principles and Applications*, New York: Acoustical Society of America, 1991.
- [20] D. Colton, R. Kress, *Integral Equation Methods in Scattering Theory, Pure and Applied Mathematics*, New York: John Wiley & Sons, 1983.
- [21] D. G. Crighton, A. P. Dowling, J. E. Williams, *Modern Methods in Analytical Acoustics: Lecture Notes*, Berlin: Springer, 1994.
- [22] H. L. Royden, *Real Analysis - second edition*, New York: The MacMillan Company, 1969.
- [23] H. H. Zheng, J. J. Xiao, Y. Lai, C. T. Chan, *Exterior optical cloaking and illusion by using active sources: a boundary element perspective. Physical Review B* **81** (2010) 195116. DOI:10.1103/PhysRevB.81.195116.
- [24] N. Morita, N. Kagumai, J. R. Mautz, *Integral equation methods for electromagnetics*, Boston: Artech House, 1990.
- [25] W. D. D'haeseleer, W. N. G. Hitchon, J. D. Callen, J. L. Shohet, *Flux Coordinates and Magnetic Field Structure*, Copyrighted by Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.
- [26] U. Iemma, L. Morino, *Steady Two-Dimensional Analysis Using a Boundary Integral Equation Method*, Journal of Fluids and Structures, Vol. 11, 1997.

Appendice A

Invarianza delle equazioni di governo delle piccole perturbazioni acustiche in una trasformazione di coordinate

Sia $\mathbf{R}(u^1, u^2, u^3)$ una trasformazione arbitraria di coordinate che associ la posizione di un punto nello spazio tridimensionale, individuato dal vettore posizione \mathbf{R} , a una terna di coordinate curvilinee u^1, u^2, u^3 . In un sistema di riferimento ortogonale cartesiano le componenti del vettore \mathbf{R} si possono scrivere

$$\begin{cases} x = \hat{x}(u^1, u^2, u^3) \\ y = \hat{y}(u^1, u^2, u^3) \\ z = \hat{z}(u^1, u^2, u^3) \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Se la trasformazione è biunivoca, ossia se le derivate parziali delle funzioni $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ rispetto alle coordinate curvilinee u^1, u^2, u^3 sono continue e lo Jacobiano $J \equiv \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u^1, u^2, u^3)}$ è diverso da zero, può essere invertita e si possono scrivere le

$$\begin{cases} u^1 = \hat{u}^1(x, y, z) \\ u^2 = \hat{u}^2(x, y, z) \\ u^3 = \hat{u}^3(x, y, z) \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

Nel sistema di coordinate generalizzate u^1, u^2, u^3 , l'operatore divergenza $\nabla \cdot []$ e l'operatore gradiente $\nabla[]$ applicati rispettivamente al vettore velocità \mathbf{v} e alla pressione scalare \tilde{p} hanno la forma¹

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{J} \frac{\partial (Jv^i)}{\partial u^i} \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \tilde{p} = \frac{\partial p}{\partial u^i} \mathbf{g}^i \quad (\text{A.4})$$

dove v^i sono le componenti controvarianti del vettore velocità e \mathbf{g}^i sono i vettori di base controvarianti locali nel sistema curvilineo (cfr., e.g., [25]).

Come è stato osservato da Cummer *et al.* in [8] il modo corretto in cui il vettore velocità \mathbf{v} si trasforma in un cambiamento di coordinate è l'elemento chiave per dimostrare l'invarianza del fenomeno di propagazione delle onde di pressione acustica a partire da principi primi, ossia dalle equazioni di conservazione della massa, Eq. 1.3, e di bilancio della quantità di moto, Eq. 1.4. Per comprendere come si trasforma il vettore di velocità \mathbf{v} si consideri l'espressione della divergenza in coordinate generalizzate, Eq. A.3, riscritta nella forma estesa

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) h_1 h_2 h_3 |\hat{\mathbf{g}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{g}}_2 \times \hat{\mathbf{g}}_3)| = \frac{\partial}{\partial u^1} [h_2 h_3 \mathbf{v} \cdot (\hat{\mathbf{g}}_2 \times \hat{\mathbf{g}}_3)] + \frac{\partial}{\partial u^2} [h_1 h_3 \mathbf{v} \cdot (\hat{\mathbf{g}}_1 \times \hat{\mathbf{g}}_3)] \quad (\text{A.5})$$

$$+ \frac{\partial}{\partial u^3} [h_1 h_2 \mathbf{v} \cdot (\hat{\mathbf{g}}_1 \times \hat{\mathbf{g}}_2)] \quad (\text{A.6})$$

dove gli scalari h_i con $i = 1..3$ sono i coefficienti metrici, definiti come $h_i = |\mathbf{g}_i|$, e avendo fatto uso dell'espressione dello Jacobiano J in termini dei vettori di base covarianti $J = h_1 h_2 h_3 |\hat{\mathbf{g}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{g}}_2 \times \hat{\mathbf{g}}_3)|$ del sistema curvilineo generalizzato. Definendo con il simbolo \hat{v}^i le componenti fisiche controvarianti del vettore \mathbf{v} tali che $\hat{v}^i = h_i v^i$, l'equazione A.5 si può riscrivere nella forma

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) V = \frac{\partial}{\partial u^1} (h_2 h_3 V \hat{v}^1) + \frac{\partial}{\partial u^2} (h_1 h_3 V \hat{v}^2) + \frac{\partial}{\partial u^3} (h_1 h_2 V \hat{v}^3) \quad (\text{A.7})$$

¹Se non specificato diversamente nel presente lavoro di tesi viene utilizzata la notazione di Einstein, ossia un indice ripetuto sottointende l'operazione di sommatoria rispetto a quell'indice.

avendo posto $V \equiv |\hat{\mathbf{g}}_1 \cdot (\hat{\mathbf{g}}_2 \times \hat{\mathbf{g}}_3)|$. Definendo inoltre $\nabla_u \cdot \mathbf{v} \equiv \frac{\partial \hat{v}^1}{\partial u^1} + \frac{\partial \hat{v}^2}{\partial u^2} + \frac{\partial \hat{v}^3}{\partial u^3}$ si ottiene l'espressione finale della divergenza

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) h_1 h_2 h_3 V = \nabla_u \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (\text{A.8})$$

dove

$$\tilde{\mathbf{v}} \equiv V \overline{\overline{\mathbf{Q}}}_\perp [\hat{v}^1 \hat{v}^2 \hat{v}^3] \quad (\text{A.9})$$

e

$$\overline{\overline{\mathbf{Q}}}_\perp = \left\{ \begin{array}{ccc} h_2 h_3 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 h_3 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 h_3 \end{array} \right\} \quad (\text{A.10})$$

L'espressione A.9 indica come si trasforma il vettore velocità in una trasformazione generica di coordinate e in particolare gli elementi del vettore $\tilde{\mathbf{v}}$ rappresentano le componenti del vettore trasformato nel sistema cartesiano ortogonale originario.

Sostituendo la relazione A.9 nell'Eq. 1.3, ove si è posto per semplicità $\mathcal{K}(\mathbf{r}) = 1$, si ottiene l'equazione

$$i\omega \tilde{p} = \mathcal{K}(\mathbf{u}) \mathcal{K}_0 \nabla_u \cdot \tilde{\mathbf{v}} \quad (\text{A.11})$$

dove

$$\mathcal{K}(\mathbf{u}) = (h_1 h_2 h_3 V)^{-1} \quad (\text{A.12})$$

Pertanto introducendo l'espressione generalizzata del coefficiente di compressibilità A.12, la forma dell'Eq. A.11 risulta invariata rispetto all'Eq. 1.3.

In modo analogo si può dimostrare l'invarianza dell'Eq. 1.4 partendo dall'espressione del gradiente della pressione scalare in un riferimento curvilineo generico, Eq. A.4. Dopo semplici passaggi si giunge alla forma del gradiente in funzione delle coordinate curvilinee

$$\nabla_u \tilde{p} = \overline{\overline{\mathbf{Q}}}_\parallel \overline{\overline{\hat{g}}}^{-1} (\nabla \tilde{p}) \quad (\text{A.13})$$

avendo posto

$$\overline{\overline{\mathbf{Q}}}_\parallel = \left\{ \begin{array}{ccc} h_1 & 0 & 0 \\ 0 & h_2 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 \end{array} \right\} \quad (\text{A.14})$$

e

$$\overline{\hat{g}}^{-1} = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 & \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 & \hat{\mathbf{u}}_1 \cdot \hat{\mathbf{u}}_3 \\ \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 & \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 & \hat{\mathbf{u}}_2 \cdot \hat{\mathbf{u}}_3 \\ \hat{\mathbf{u}}_3 \cdot \hat{\mathbf{u}}_1 & \hat{\mathbf{u}}_3 \cdot \hat{\mathbf{u}}_2 & \hat{\mathbf{u}}_3 \cdot \hat{\mathbf{u}}_3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$

Posto per semplicità $\varrho(\mathbf{r}) = 1$ si ha

$$\nabla_u \tilde{p} = i\omega \overline{\varrho} \tilde{\mathbf{v}} \quad (\text{A.16})$$

Anche in questo caso la forma dell'equazione di bilancio della quantità di moto a seguito della trasformazione di coordinate non è variata rispetto all'Eq. 1.4 ricavata in un sistema ortogonale cartesiano, a patto di introdurre il *tensore di densità*

$$\overline{\varrho} = \overline{\overline{Q}} \overline{\hat{g}}^{-1} \overline{\overline{Q}}_{\perp} V^{-1} \quad (\text{A.17})$$

Appendice B

L'Equazione di Kirchhoff-Helmholtz

In questa sezione si vuole derivare l'Equazione integrale di Kirchhoff-Helmholtz per la pressione acustica esterna in un dominio $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ di contorno $\partial\Omega = \Gamma \cup \Gamma_\infty$, con Γ coincidente con il contorno di un corpo presente nel campo. A tal proposito si consideri il seguente BVP (**B**oundary **V**alue **P**roblem) definito in Ω

$$\begin{cases} \nabla^2 \tilde{p} + k_0^2 \tilde{p} = \tilde{\sigma}, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \alpha(\mathbf{x})\tilde{p} + \beta(\mathbf{x})\tilde{\chi} = f(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \Gamma \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

dove $k_0 = \omega/c_0 = \omega\sqrt{\rho_0/\mathcal{K}_0}$, i coefficienti α , β e f sono funzioni complesse dipendenti dalla natura acustica del contorno del corpo e $\tilde{\chi}$ è la derivata normale della pressione complessa $\partial\tilde{p}/\partial n$. Nel sistema B.1 la prima equazione è l'operatore delle onde nel dominio della frequenza, o Equazione di Helmholtz, mentre la seconda espressione rappresenta le condizioni al contorno per il problema nella forma di condizioni di *Robin*, ossia come combinazione lineare di condizioni al contorno di *Dirichlet* e di *Neumann*. A questo sistema va aggiunta la condizione di radiazione di Sommerfeld

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial \tilde{p}}{\partial r} - ik_0 r \tilde{p} \right) = 0 \quad (\text{B.2})$$

che assicura l'unicità della soluzione eliminando le soluzioni corrispondenti ad onde che si propagano dall'infinito.

Si consideri ora il seguente problema ausiliario

$$\begin{cases} \nabla^2 G + k_0^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \\ + \text{condizione di radiazione di Sommerfeld} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

la cui soluzione è la Funzione di Green di spazio libero in $2D$. Adottando la convenzione $e^{i\omega t}$ per il tempo, la funzione di Green nel piano ha la seguente forma

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{i}{4} \mathcal{H}_0^{(2)}(k_0 R), \quad R = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \quad (\text{B.4})$$

dove $\mathcal{H}_0^{(2)}(k_0 R)$ è la funzione di Hankel di seconda specie di ordine zero.

Moltiplicando la prima equazione del sistema B.1 per G e la prima equazione del sistema B.3 per \tilde{p} si ottiene

$$G \nabla^2 \tilde{p} + G k_0^2 \tilde{p} = G \tilde{\sigma} \quad (\text{B.5})$$

$$\tilde{p} \nabla^2 G + \tilde{p} k_0^2 G = \tilde{p} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (\text{B.6})$$

Sottraendo l'Eq.B.6 dall'Eq.B.5 si ottiene

$$\tilde{p} \nabla^2 G - G \nabla^2 \tilde{p} + \tilde{p} k_0^2 G - G k_0^2 \tilde{p} = \tilde{p} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - G \tilde{\sigma} \quad (\text{B.7})$$

Integrando quest'ultima su Ω , applicando la seconda identità di Green¹, sfruttando la proprietà "selettiva" del delta di *Dirac*² e applicando la condizione di radiazione di *Sommerfeld* si ottiene la RIC (**R**appresentazione **I**ntegrale di **C**ontorno) per la pressione \tilde{p} valida in $\bar{\Omega}$ (chiusura di Ω)

$$\tilde{p}(\mathbf{y}) = \oint_{\Gamma} \left[G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{x})}{\partial n} - \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n} \right] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega} G(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \tilde{\sigma}(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (\text{B.10})$$

¹Se g e f sono due campi scalari sufficientemente derivabili la seconda identità di Green implica che

$$\oint_{S=\partial V} \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) dS = \int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \quad (\text{B.8})$$

²Per definizione di delta di *Dirac* per ogni funzione f a supporto compatto si ha

$$\int_{\Omega} f(x) \delta(x - x_0) = f(x_0) \quad (\text{B.9})$$

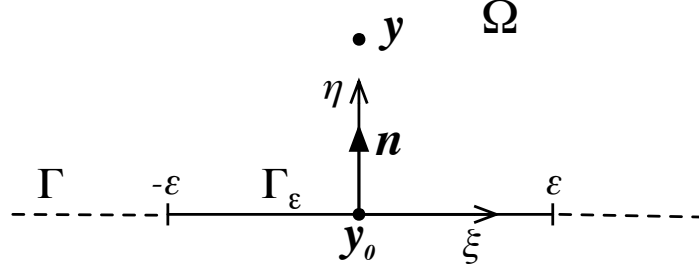


Figura B.1: Punto d'osservazione che approccia al contorno.

Noti i valori di \tilde{p} e $\partial\tilde{p}/\partial n$ su Γ , l'Eq. B.10 consente di valutare \tilde{p} in ogni punto del campo; se invece solo il valore della pressione o della derivata normale della pressione è noto dalle condizioni al contorno, occorre risolvere l'equazione integrale che si ricava dall'Eq. B.10 facendo approssciare il punto d'osservazione y al contorno Γ . Successivamente, una volta noto il set completo di dati di Cauchy su Γ , è possibile utilizzare la rappresentazione integrale per risolvere il campo acustico. Per determinare l'espressione dell'equazione integrale ottenuta con il processo a limite appena menzionato occorre fare preventivamente alcune considerazioni sul comportamento asintotico degli integrali che compaiono nell'Eq. B.10. Prendendo la derivata normale della funzione di Green si ottiene

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \nabla G \cdot \mathbf{n} = -\frac{\mathbf{i} k_0}{4R} \mathcal{H}_1^{(2)}(k_0 R) \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} \quad (\text{B.11})$$

Al limite per $k_0 R \rightarrow 0$ le funzioni di Hankel $\mathcal{H}_0^{(2)}$ e $\mathcal{H}_1^{(2)}$ possono essere approssimate (si veda, e.g. [24]) con le

$$\mathcal{H}_0^{(2)}(k_0 R) \simeq 1 - \mathbf{i} \frac{2}{\pi} \left[\ln \left(\frac{k_0 R}{2} \right) + \gamma \right], \quad \mathcal{H}_1^{(2)}(k_0 R) \simeq \frac{k_0 R}{4} + \mathbf{i} \frac{2}{\pi k_0 R} \quad (\text{B.12})$$

dove γ è la costante di Eulero-Mascheroni.

Facendo riferimento alla Fig.B.1, si consideri il caso in cui il punto d'osservazione y approcci al contorno Γ da Ω . L'integrale dello strato di doppiette, *i.e.* il contributo integrale dovuto alla derivata normale di G , può essere decomposto in due contributi: l'integrale

sul segmento di retta Γ_ϵ centrato in \mathbf{y}_0 di lunghezza 2ϵ , più l'integrale sul resto di Γ

$$\mathcal{C}(\mathbf{y}) = \int_{\Gamma_\epsilon} \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\epsilon} \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (\text{B.13})$$

Se ϵ è sufficientemente piccolo, \mathcal{C} può essere approssimato come

$$\mathcal{C}(\mathbf{y}) \simeq \tilde{p}(\mathbf{y}_0) \mathcal{I}_\epsilon + \int_{\Gamma \setminus \Gamma_\epsilon} \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (\text{B.14})$$

dove

$$\mathcal{I}_\epsilon = \int_{\Gamma_\epsilon} \frac{\partial G(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma(\mathbf{x}) = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left[\frac{-\eta}{2\pi(\xi^2 + \eta^2)} + i\eta \frac{k_0^2}{16} \right] d\xi \quad (\text{B.15})$$

avendo introdotto il sistema di coordinate locali (ξ, η) , tali che $\mathbf{y} \equiv (0, \eta)$ and $\mathbf{x} \equiv (\xi, 0)$ e tenendo presente il comportamento asintotico di $\mathcal{H}_1^{(2)}(k_0 R)$. Svolgendo l'integrale B.15 si perviene alla

$$\mathcal{I}_\epsilon = -\frac{1}{\pi} \arctan \frac{\epsilon}{\eta} + i \frac{\epsilon k_0^2}{8} \eta \quad (\text{B.16})$$

Al limite per $\mathbf{y} \rightarrow \mathbf{y}_0$ si ottiene

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \mathcal{I}_\epsilon = -\frac{1}{2} \quad (\text{B.17})$$

Sostituendo questo risultato in B.14 e prendendo il limite per $\epsilon \rightarrow 0$ si può scrivere

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \mathcal{C}(\mathbf{y}_0) = -\frac{1}{2} \tilde{p}(\mathbf{y}_0) + \int_{\Gamma} \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{y}, \mathbf{x})}{\partial n} d\Gamma(\mathbf{x}) \quad (\text{B.18})$$

dove il secondo integrale a secondo membro è un integrale improprio convergente. Infine, sostituendo B.18 nella B.10, segue che

$$\frac{1}{2} \tilde{p}(\mathbf{y}_0) = \oint_{\Gamma} \left[G(\mathbf{y}_0, \mathbf{x}) \frac{\partial \tilde{p}(\mathbf{x})}{\partial n} - \tilde{p}(\mathbf{x}) \frac{\partial G(\mathbf{y}_0, \mathbf{x})}{\partial n} \right] d\Gamma(\mathbf{x}) + \int_{\Omega_c} G(\mathbf{y}_0, \mathbf{x}) \tilde{\sigma}(\mathbf{x}) d\Omega(\mathbf{x}) \quad (\text{B.19})$$

che rappresenta l'EIC (Equazione Integrale di Contorno) cercata.

Elenco delle figure

1	Il <i>cloaking</i> elettromagnetico teorizzato da J. B. Pendry (Tratta da [2]).	7
2	La regione esterna Ω_h e la regione deformata Ω_c	8
3	Confronto tra campo totale (immagine al centro) dovuto all'interazione tra un fascio gaussiano (immagine a sinistra) con un ostacolo cilindrico e lo stesso campo (immagine a destra) in presenza del mantello acustico di <i>Cummer-Schurig</i> (Tratta da [1]).	9
4	La trasformazione dei vettori nel caso elettromagnetico (sinistra) e acustico (destra) (Tratta da [8]). La regione con lo sfondo bianco è lo spazio indeformato mentre la regione con lo sfondo grigio è lo spazio deformato a seguito di uno "stiramento" dell'asse delle x	10
5	Vista schematica del mantello acustico proposto da Torrent e Sánchez-Dehesa (Tratta da [9]).	11
6	La struttura costituita da piastre di massa infinita proposta da Pendry e Li (Tratta da [12]).	12
7	Il mantello acustico realizzato da Popa <i>et al.</i> (Tratta da [15]).	14
1.1	La trasformazione di coordinate per il problema di <i>Cummer-Schurig</i>	18
1.2	Il cilindro circondato dal <i>mantello acustico</i> di <i>Cummer-Schurig</i>	19
1.3	Il dominio nel problema di <i>Cummer-Schurig</i>	22
3.1	Il dominio di calcolo.	36
4.1	Il mantello acustico di <i>Cummer-Schurig</i>	43

4.2	Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 2.96$ ($f = 800$ Hz). Ostacolo acusticamente rigido nel caso di onda piana proveniente da sinistra.	46
4.3	Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 4.44$ ($f = 1200$ Hz). Ostacolo acusticamente rigido nel caso di onda piana proveniente da sinistra.	47
4.4	Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 5.91$ ($f = 1600$ Hz). Ostacolo acusticamente rigido nel caso di onda piana proveniente da sinistra.	48
4.5	Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 2.96$ ($f = 800$ Hz). Ostacolo acusticamente rigido nel caso di monopolo posto $\mathbf{x} \equiv (-4, 0)$	55
4.6	Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 2.96$ ($f = 800$ Hz). Ostacolo acusticamente rigido nel caso di due onde piane ortogonali.	56
4.7	Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 2.96$ ($f = 800$ Hz). Ostacolo acusticamente soffice nel caso di onda piana proveniente da sinistra.	57
4.8	Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 4.44$ ($f = 1200$ Hz). Ostacolo acusticamente soffice nel caso di onda piana proveniente da sinistra.	58
4.9	Soluzione in Ω_c e Ω_h con $ka = 5.91$ ($f = 1600$ Hz). Ostacolo acusticamente soffice nel caso di onda piana proveniente da sinistra.	59
4.10	Norma L^2 del campo di scattering in $\Omega = \Omega_c \cup \Omega_h$ per un ostacolo acusticamente rigido (\bullet) e acusticamente soffice (\square). Le linee tratteggiate (\cdots) si riferiscono al campo prodotto dall'ostacolo in assenza di mantello acustico, mentre le linee continue (---) in presenza di mantello acustico. Tutti i valori sono normalizzati rispetto alla norma L^2 del campo incidente in Ω	60
4.11	Soluzione in Ω_c e Ω_h a $ka = 2.22$ ($f = 600$ Hz), per un'onda piana che si propaghi da sinistra verso destra in presenza di due ostacoli acusticamente rigidi. Posizione corpo 1 $\mathbf{x}_1 \equiv (0, 0)$ – Posizione corpo 2 $\mathbf{x}_2 \equiv (2, 0)$. . .	61
4.12	Soluzione in Ω_c e Ω_h a $ka = 2.22$ ($f = 600$ Hz), per un'onda piana che si propaghi da sinistra verso destra in presenza di due ostacoli acusticamente rigidi. Posizione corpo 1 $\mathbf{x}_1 \equiv (0, 0)$ – Posizione corpo 2 $\mathbf{x}_2 \equiv (2, 2)$. . .	62

4.13	Soluzione in Ω_c e Ω_h a $ka = 2.22$ ($f = 600$ Hz), per un'onda piana che si propaghi da sinistra verso destra in presenza di due ostacoli acusticamente rigidi. 1 $\mathbf{x}_1 \equiv (0, 0)$ – Posizione corpo 2 $\mathbf{x}_2 \equiv (0, 2)$	63
B.1	Punto d'osservazione che si avvicina al contorno.	75

Elenco delle tabelle

3.1	La convenzione dei nomi delle matrici nel Metodo degli Elementi di Contorno esteso agli Elementi di Campo.	38
-----	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----