

Università degli Studi “Roma Tre”



Scuola Dottorale di Ingegneria
Sezione di Ingegneria Meccanica ed Industriale

XXV Ciclo

Tesi di Dottorato

**Modellazione aeroelastica e progettazione
ottimizzata di rotori di elicottero innovativi a
basso livello vibratorio**

Dottorando
Emanuele Piccione

Docente Guida
Prof. **Massimo Gennaretti**

Coordinatore
Prof. **Edoardo Bemporad**

Aprile 2013

Indice

Sommario	1
1 Introduzione	4
2 Modellazione aeroelastica di rotori con pale ad asse curvo realizzate in materiale composito	9
2.1 Introduzione ai modelli	10
2.1.1 Considerazioni sugli ordini di grandezza	10
2.1.2 Sistemi di riferimento e trasformazioni	10
2.2 Il solutore spettrale	15
2.2.1 Modello strutturale di pala ad asse elastico curvo	15
2.2.2 I carichi inerziali	23
2.2.3 I carichi aerodinamici	24
2.2.4 Implementazione numerica	25
2.3 Il solutore FEM	27
2.3.1 Modello strutturale di pala	28
2.3.2 I carichi aerodinamici	31
2.3.3 Implementazione in COMSOL Multiphysics	31
2.4 Validazione del solutore FEM	32
2.4.1 Risposta statica	32
2.4.2 Analisi in vacuo	34
2.4.3 Analisi aeroelastica in hover	35
2.5 Validazione del solutore spettrale	41
2.5.1 Confronti con il solutore FEM	41
2.5.2 Analisi in vacuo	44
2.5.3 Analisi aeroelastica	45
2.5.4 Analisi di una pala realizzata in materiale composito	50
3 Progettazione preliminare ottimizzata di rotori a basso livello vibratorio	53
3.1 L'algoritmo di ottimizzazione	54
3.2 Definizione del processo di ottimizzazione	55
3.2.1 Le variabili di progetto	55
3.2.2 Vincoli	55
3.2.3 Funzione obiettivo	56
3.3 Definizione del modello surrogato di velocità indotta	57
3.4 Risultati numerici	57
3.4.1 Ottimizzazione single-point	57
3.4.2 Ottimizzazione double-point	63

Sommario

Gli obiettivi del presente lavoro sono lo sviluppo di modelli per l'analisi aeroelastica di rotori di elicottero innovativi, e la definizione di una procedura di ottimizzazione finalizzata alla progettazione preliminare di rotori a basso livello vibratorio. Nello specifico, sono stati sviluppati due diversi solutori aeroelastici per pale dalla geometria avanzata caratterizzate da un asse elastico non rettilineo e realizzate in materiale composito. Tali modelli si differenziano principalmente per la strategia di implementazione numerica adottata. Il primo dei due modelli è stato implementato con il software commerciale basato sul metodo agli elementi finiti *COMSOL Multiphysics*, mentre il secondo è stato modellato con un approccio spettrale alla Galerkin non convenzionale per l'integrazione spaziale. Entrambi i solutori sono basati su modelli di trave rotante biflesso-torsionale non lineare, soggetta a deformazioni moderate. Per quanto riguarda il solutore agli elementi finiti (FEM), esiste una formulazione per pale ad asse elastico rettilineo che è stata estesa per la definizione di uno specifico elemento finito di pala, arbitrariamente orientato nello spazio. Per il solutore spettrale è stato invece necessario sviluppare una formulazione originale di pala ad asse curvilineo; ciò si è reso necessario per avere un modello che si adattasse bene anche all'analisi di pale con discontinuità geometriche come gli angoli di freccia e diedro al tip. Nella fase di validazione dei solutori sono stati eseguiti numerosi confronti con risultati numerici e sperimentali disponibili in letteratura; questi dati sono relativi ad analisi di risposta a carichi stazionari, oltre che di comportamento dinamico ed aeroelastico, per pale ad asse elastico non rettilineo sia in hover che in condizioni di avanzamento.

Successivamente è stata definita una procedura di progettazione ottimizzata di rotori a basso livello vibratorio, in cui le proprietà meccaniche/strutturali e la geometria della pala sono state considerate come variabili di progetto. Durante il processo di ottimizzazione è stato utilizzato un algoritmo di tipo genetico a codifica binaria per l'identificazione della configurazione ottima, mentre per la valutazione della funzione obiettivo è stato utilizzato il solutore spettrale sviluppato nel presente lavoro. Inoltre per la valutazione della velocità indotta, necessaria nel calcolo dei carichi aerodinamici, è stato adottato un approccio non convenzionale che coniuga due esigenze: elevata accuratezza ed efficienza computazionale. Questa metodologia consiste nella definizione di un modello surrogato di velocità indotta basato sull'utilizzo di un solutore aerodinamico BEM ad alta fedeltà. La peculiarità del modello utilizzato è che tiene conto degli effetti aerodinamici dell'interazione pala-scia (BVI).

Verranno esposti diversi risultati numerici per dimostrare l'efficacia della procedura di ottimizzazione proposta, e per verificare la robustezza di questo approccio rispetto a condizioni di volo fuori progetto.

Nomenclatura

A	=	area della sezione della pala
B	=	numero di pale
c	=	corda della pala
c_{d_0}	=	coefficiente di resistenza aerodinamica
c_{l_α}	=	coefficiente angolare della curva di portanza
C_T	=	coefficiente di spinta del rotore, $T/\rho\pi\Omega^2R^4$ (T = spinta)
E	=	modulo di Young
e	=	offset di massa
e_a	=	tensile offset
EA	=	rigidezza assiale
$EI\zeta$	=	rigidezza flessionale di flappeggio
$EI\eta$	=	rigidezza flessionale di lag
EET	=	rigidezza di accoppiamento estensione-torsione
ETC	=	rigidezza di accoppiamento torsione-flessione di lag
ETF	=	rigidezza di accoppiamento torsione-flessione di flap
EES_c	=	rigidezza di accoppiamento estensione-taglio a lag
EES_f	=	rigidezza di accoppiamento estensione-taglio a flap
EFS_c	=	rigidezza di accoppiamento flessione di flap-taglio a lag
ECS_f	=	rigidezza di accoppiamento flessione di lag-taglio a flap
F_x, F_y, F_z	=	componenti delle forze al mozzo
GA_c	=	rigidezza a taglio di lag
GA_f	=	rigidezza a taglio di flap
GJ	=	rigidezza di torsione
J	=	funzione obiettivo

K_a	=	raggio di girazione polare della sezione
k_m	=	raggio di girazione di della sezione
k_{m_1}, k_{m_2}	=	raggi di girazione di flap e lag
m	=	massa di sezione della pala
m_0	=	massa di sezione della pala di riferimento
M_x, M_y, M_z	=	componenti dei momenti al mozzo
R	=	raggio del rotore
v_i	=	velocità indotta
γ	=	numero di Lock ($3\rho c c_{l_\alpha} R/m_0$)
Λ_A	=	angolo di diedro al tip della pala
Λ_s	=	angolo di freccia al tip della pala
ρ	=	densità dell'aria
γ	=	solidità del rotore
Ω	=	velocità angolare del rotore

Capitolo 1

Introduzione

Il rotore principale riveste un ruolo fondamentale nella dinamica di un elicottero poiché svolge funzioni primarie per il velivolo quali la generazione sia della portanza che della spinta, ma al contempo è fonte di effetti indesiderati come le vibrazioni ed il rumore. Ad oggi la riduzione di entrambi è un obiettivo fondamentale per la progettazione dell'intero velivolo, in quanto le vibrazioni influenzano in modo significativo non solo la vita a fatica delle strutture, i costi di manutenzione, l'efficienza e il costo delle strumentazioni di bordo, il comfort di pilota e passeggeri, ma sono anche una delle fonti principali di rumore all'interno della cabina. Il rumore emesso all'esterno da un elicottero è, invece, fonte di inquinamento acustico, poiché arreca notevole fastidio alla popolazione che si viene a trovare nelle vicinanze delle zone in cui opera il mezzo.

Negli ultimi anni molte attività di ricerca, sia da parte dei ricercatori che dell'industria, sono state indirizzate verso l'identificazione di soluzioni progettuali e tecnologiche che riducessero vibrazioni e rumore. Sono state, e sono tutt'ora, considerate ed analizzate sia strategie passive, come la determinazione di forme di pala ottimali e l'utilizzo estensivo di materiali compositi (si vedano ad esempio i Riff. [1, 2, 3]), sia attive, come l'utilizzo di tecniche di controllo innovative quali l'HHC, l'impiego di flap oppure di materiali piezoelettrici (si veda ad esempio il Rif. [4]).

In questo lavoro l'attenzione è stata focalizzata su soluzioni passive quali la progettazione ottimizzata del rotore. Dall'attività di ricerca svolta negli ultimi due decenni è emerso infatti che l'utilizzo di pale di rotore dalla geometria avanzata, caratterizzate da un'asse elastico non rettilineo (con frecce e diedro all'estremità), risultano essere particolarmente efficaci per la riduzione di rumore e vibrazioni prodotti dal rotore (si vedano ad esempio i Riff. [5, 6, 7]). Queste tipologie di pale riducono infatti il numero di Mach normale al bordo d'attacco nella regione d'estremità e, di conseguenza, la resistenza dovuta alla comprimibilità del fluido; inoltre possono alleviare l'interazione che si verifica tra le pale e la scia rilasciata dal rotore (nota come blade-vortex-interaction BVI), che è uno dei meccanismi principali di generazione di rumore e vibrazioni. Quest'ultima risulta essere influenzata principalmente dalla struttura dei vortici d'estremità delle pale, dalle deformazioni aeroelastiche e dalla distanza tra le strutture vorticosi e la pala (si veda ad esempio il Rif. [8]).

Nelle Figure 1.1 e 1.2 sono mostrate le pale innovative sviluppate negli ultimi anni dalle due principali aziende produttrici di elicotteri in Europa, Eurocopter e AgustaWestland. Tali pale sono evidentemente caratterizzate da un asse elastico non rettilineo e sono state progettate principalmente per la riduzione dei carichi vibratorii al mozzo e del rumore prodotto (si vedano ad esempio i Riff. [5, 6]).

Dunque le pale ad asse elastico non rettilineo risultano essere efficaci per la riduzione di rumore e vibrazioni poiché sono caratterizzate da un notevole accoppiamento flesso-torsionale, il quale è in grado di influenzare significativamente il comportamento aeroelastico del roto-



Figura 1.1: Immagine della pala Blue Edge TM in fase di sviluppo da Eurocopter.



Figura 1.2: Immagine della pala BERP TM sviluppata da Agustawestland.

re. Effetti analoghi a quest'ultimo posso essere ottenuti anche mediante l'utilizzo di materiali compositi che, in funzione dell'orientamento delle fibre, possono generare accoppiamenti assiali-flessionali-torsionali.

Gli obiettivi della presente attività di ricerca sono lo sviluppo di modelli per l'analisi aeroelastica di rotori innovativi, e la definizione di una procedura di progettazione ottimizzata mirata all'identificazione di configurazione di pala che portino ad una riduzione dei carichi vibratorii trasmessi al mozzo.

Considerando che i carichi vibratorii sono dovuti all'interazione tra la dinamica strutturale delle pale ed il complesso campo aerodinamico in cui operano, un ruolo fondamentale nel processo di progettazione ottimizzata è svolto dal solutore utilizzato per predire il comportamento aeroelastico del rotore.

Negli anni passati, diversi autori hanno sviluppato modelli matematici per pale ad asse non rettilineo, solitamente basati sul metodo degli elementi finiti per l'integrazione spaziale. Tra i primi lavori indirizzati alla modellazione di pale ad asse elastico non rettilineo c'è quello esposto nel Riferimento [9], nel quale viene presentata una versione modificata di un modello di pala ad asse rettilineo, in cui si tiene conto della presenza della freccia introducendo eccentricità tra asse elastico (rettilineo) e centro di massa. Negli anni successivi è stato dimostrato che tale modello risulta inefficace specialmente ad elevati angoli di freccia (Riff. [10, 11]). Un modello aeroelastico per pale ad asse non rettilineo basato sul metodo agli elementi finiti, è stato sviluppato ed applicato con successo per rotori hingeless con freccia al tip nei Riferimenti [10, 11]. Una

formulazione per pale con freccia, diedro, twist e pianta è presentata nel Riferimento [12], mentre nel Riferimento [1] viene sviluppata una formulazione, basata sul metodo agli elementi finiti, per l'analisi aeroelastica di pale con freccia e diedro al tip, realizzate in materiale composito. Un modello FEM di pala con freccia al tip per grandi deformazioni è stato sviluppato e validato nel Riferimento [13]. Tale modello è basato sulla formulazione per pale ad asse elastico rettilineo soggette a deformazioni moderate descritta nel Riferimento [14], ma viene adottato un approccio di tipo lagrangiano in cui l'origine di ciascun elemento di trave è solidale allo spostamento del nodo d'estremità dell'elemento precedente. In questo modo un numero sufficiente di elementi consente di analizzare pale soggette a grandi spostamenti. Recentemente un modello di pala ad asse non rettilineo è stato applicato anche per l'analisi aeroelastica di aerogeneratori ad asse orizzontale (Rif. [15]).

Nel presente lavoro sono stati sviluppati due diversi solutori per l'analisi aeroelastica di rotori con pale ad asse elastico non rettilineo. L'obiettivo principale è quello di ottenere un solutore dall'elevata efficienza computazionale che ben si adatti ad applicazioni di tipo aeroelastico, anche con un utilizzo accoppiato a solutori aerodinamici esterni, e di progettazione ottimizzata. La scelta del metodo di implementazione numerica del primo solutore è quindi ricaduta su un codice scritto in casa, il quale si basa sull'applicazione non convenzionale del metodo di Galerkin per l'integrazione spaziale. L'utilizzo di tale approccio ha richiesto lo sviluppo di una formulazione originale con un modello di trave rotante, non lineare (per moderati spostamenti), ad asse curvilineo realizzata con materiali compositi. L'originalità della formulazione proposta sta principalmente nell'integrazione diretta delle equazioni di equilibrio di tagli e momenti, che consente di ottenere le equazioni finali della dinamica della pala in una forma molto elegante e compatta; inoltre non risulta necessario utilizzare esplicitamente la matrice della curvatura iniziale della pala che, in caso di discontinuità geometriche come freccia e diedro al tip, presenta delle singolarità difficilmente modellabili numericamente, in particolare con un metodo spettrale come quello di Galerkin. Il sistema finale è stato quindi ottenuto direttamente dalle equazioni di equilibrio dei momenti, diversamente dall'approccio comunemente adottato.

Nel corso di questo lavoro è stato sviluppato un secondo solutore aeroelastico, sempre per pale ad asse elastico non rettilineo soggette a deformazioni moderate. La strategia di implementazione numerica adottata in questo caso è il metodo agli elementi finiti, il quale si presta all'analisi di strutture dalla geometria complessa come quelle oggetto di studio. In particolare il modello di pala ad asse rettilineo sviluppato nel Riferimento [14] è stato adattato per la definizione nel software commerciale FEM (*COMSOL Multiphysics*) di un elemento finito personalizzato, arbitrariamente orientato nello spazio. Tale solutore, vista anche la scarsa disponibilità in letteratura di risultati dettagliati per analisi di pale ad asse elastico non rettilineo, è risultato di fondamentale importanza per la validazione della formulazione sviluppata per il solutore spettrale.

Nello sviluppo della formulazione del solutore spettrale sono stati considerati anche gli effetti dovuti all'anisotropia della pala, i quali generano accoppiamenti strutturali in grado di modificare significativamente il comportamento dinamico. Negli ultimi decenni sono stati sviluppati diverse formulazioni per la modellazione dei materiali compositi come, ad esempio, quelli presentati nei Riferimenti [1, 16, 17]. In questo lavoro ci si è basati su quello descritto nel Riferimento [16], in quanto coniuga una buona accuratezza della soluzione con l'efficienza computazionale, poiché, non richiede l'introduzione dei gradi di libertà di taglio nonostante vengano considerati gli effetti di accoppiamento ad essi associati (come invece fatto ad esempio nel Rif. [1]).

La definizione di una procedura per progettazione ottimizzata di rotori a basso livello vibrazionario presenta molte difficoltà in quanto è un problema di minimizzazione multidisciplinare, multidimensionale, vincolato, caratterizzato da una funzione obiettivo non lineare che presenta diversi minimi locali. Gli algoritmi genetici (GAs) sembrano essere particolarmente adatti per

risolvere questa tipologia di problemi poiché, sono in grado di evitare minimi locali e convergere all'ottimo globale; inoltre sono particolarmente efficienti dal punto di vista computazionale in quanto intrinsecamente paralleli, scalabili quindi su più processori.

Per la riduzione dei carichi vibratorii negli anni passati sono state applicate diverse procedure di ottimizzazione basate principalmente su metodi deterministici (si vedano, ad esempio i Riff. [1, 18, 18, 3]), mentre più recentemente, in un numero limitato di lavori, sono stati adottati metodi di ottimizzazione non-deterministici come i GAs per il perseguimento del medesimo obiettivo (ad esempio quelli descritti nei Riff. [19, 2, 20]). Con l'obiettivo di avere una buona efficienza computazionale, per entrambe le strategie di ottimizzazione, si è ricorso spesso all'utilizzo di un modello surrogato per la valutazione diretta della funzione obiettivo, come nei Riferimenti [18, 2, 20]. Review estensive riguardanti la progettazione ottimizzata di rotori sono disponibili inoltre nei Riferimenti [21, 22]. Da questi lavori, è emerso come un punto estremamente critico nella determinazione dei carichi vibratorii al mozzo di un rotore, sia il modello aerodinamico utilizzato. In particolare, viene sottolineato come in un processo di ottimizzazione non conta tanto il valore della grandezza fisica che si intende minimizzare, quanto la sua sensibilità alle variabili di progetto. Viene anche evidenziato come l'utilizzo di modelli aerodinamici troppo semplificati, seppur siano computazionalmente molto efficienti, possa portare a pessimi risultati in cui i carichi vibratorii generati dalla configurazione ottima trovata, sono in realtà maggiori di quelli della configurazione originaria. Tali riflessioni hanno portato a considerare modelli aerodinamici più accurati nella procedura di ottimizzazione (come ad esempio nei Riff. [18, 2, 20]), i quali hanno però un costo computazionale piuttosto elevato, da cui l'introduzione di modelli surrogati.

In questo lavoro la procedura di progettazione ottimizzata di rotori a basso livello vibratorio è basata sull'utilizzo di un algoritmo genetico a codifica binaria, in cui sono state considerate come variabili di progetto le proprietà meccaniche/strutturali e la geometria della pala; inoltre il processo è soggetto a vincoli di stabilità aeroelastica e di equilibrio del rotore. L'algoritmo genetico impiegato è stato recentemente sviluppato ed applicato con successo nei Riferimenti [23, 24].

Diversamente da quanto presentato in letteratura, ad oggi lo stato dell'arte (Riff. [18, 2, 20]), i modelli surrogati vengono definiti direttamente per la valutazione della funzione obiettivo, richiedendo un elevato numero di punti di campionamento nel dominio delle variabili di progetto, nella presente procedura di ottimizzazione si è voluto definire un modello surrogato basato su un solutore aerodinamico ad alta fedeltà della sola velocità indotta. Esso si basa sull'utilizzo di una formulazione tridimensionale, potenziale, non stazionaria, basata sul metodo BEM (si veda il Rif. [25]). Tale approccio consente di ridurre notevolmente il numero di punti di campionamento per la definizione del surrogato, in quanto la velocità indotta risulta poco influenzata dalle caratteristiche strutturali della pala e molto, invece, dalla geometria e dalla condizione di volo. In questo modo si raggiunge un buon compromesso tra efficienza computazionale ed accuratezza, come dimostrato dai risultati presentati nei capitoli successivi.

I risultati numerici presentati, sono relativi sia alla validazione dei due solutori aeroelastici sviluppati, sia alla dimostrazione dell'efficacia della procedura di progettazione ottimizzata proposta. In particolare, sono stati eseguiti numerosi confronti con risultati numerici e sperimentali disponibili in letteratura; questi dati sono relativi ad analisi di risposta a carichi stazionari, oltre che di comportamento dinamico ed aeroelastico, per pale in composito ad asse elastico non rettilineo sia in hover che in condizioni di avanzamento. Sono stati eseguiti anche ulteriori confronti tra il solutore Galerkin ed il solutore FEM per verificare accuratamente il comportamento del secondo per configurazioni ritenute particolarmente critiche.

Saranno inoltre analizzate le configurazioni ottime di pala identificate con il processo di ottimizzazione sia in condizioni di progetto, per verificare l'effettiva efficacia della metodologia

proposta, sia in condizioni fuori progetto per valutarne la robustezza rispetto alle condizioni di volo considerate.

Capitolo 2

Modellazione aeroelastica di rotori con pale ad asse curvo realizzate in materiale composito

Questa prima parte del lavoro consiste nello sviluppo di modelli teorico/numerici per l'analisi aeroelastica di rotori di elicottero innovativi, caratterizzati da pale ad asse elastico non rettilineo realizzate in materiale composito. Data la complessità di tali elementi strutturali e la limitata disponibilità di risultati in letteratura, sono stati sviluppati due solutori che si differenziano principalmente, per l'approccio utilizzato per l'integrazione spaziale del sistema di equazioni differenziali che ne descrive la dinamica. Nello specifico, uno è basato sul metodo agli elementi finiti (FEM) mentre l'altro su un approccio spettrale alla Galerkin.

Un solutore è basato sull'implementazione in ambiente COMSOL Multiphysics, un software commerciale basato sul metodo FEM, di uno specifico modello di pala di rotore (ad asse elastico rettilineo) arbitrariamente orientabile nello spazio. Questa strategia implementativa presenta alcuni vantaggi tra cui la relativa semplicità della formulazione implementata (è stata utilizzata una formulazione già sviluppata in letteratura, Rif. [14]) e la disponibilità di un solutore FEM altamente affidabile su cui il codice è basato. D'altra parte essa presenta delle limitazioni relative alla rigidità di un solutore commerciale sia in termini di interfaccia con codici esterni che di solutori disponibili (ad esempio non c'è un solutore adatto alla analisi di stabilità di rotori in avanzamento, che implicano un sistema di equazioni con matrici periodiche).

Il solutore spettrale è invece basato sul metodo di Galerkin per l'integrazione spaziale, e richiede lo sviluppo di una formulazione teorica originale per travi ad asse elastico curvo che ben si adattano anche a pale con discontinuità geometriche (come nel caso di angoli di freccia e diedro all'estremità di esse). In tale modello sono stati considerati anche gli effetti di anisotropia dovuti all'utilizzo dei materiali compositi con i quali le moderne pale di rotore sono realizzate. Questi, introducono accoppiamenti strutturali tra i gradi di libertà che sono in grado di modificare il comportamento dinamico della pala. La modellazione dell'anisotropia del materiale è basata sull'approccio descritto nel Riferimento [16]. Esso risulta essere sufficientemente accurato ed, allo stesso tempo, numericamente efficiente in quanto non aggiunge gradi di libertà al problema. I vantaggi di un solutore aeroelastico così definito sono l'estrema flessibilità, tipica di un codice sviluppato in casa, sia in termini di solutori disponibili che di interfaccia con altri codici, come ad esempio il solutore aerodinamico BEM che verrà ampiamente utilizzato nella procedura di ottimizzazione. Inoltre il metodo Galerkin risulta essere particolarmente adatto e computazionalmente efficiente per le applicazioni aeroelastiche e di progettazione ottimizzata.

Per tutta questa serie di ragioni il solutore FEM è stato inizialmente sviluppato e validato e, successivamente utilizzato per la validazione del solutore spettrale. Quest'ultimo, data la sua

estrema versatilità e la sua efficienza computazionale, verrà successivamente utilizzato insieme ad un algoritmo di ottimizzazione per la definizione di una procedura per la progettazione preliminare ottimizzata di rotori, finalizzata alla riduzione dei carichi vibratorii al mozzo.

Nelle sezioni successive, sono presentati i due solutori aeroelastici sviluppati e la validazione degli stessi mediante confronti con dati numerici e sperimentali disponibili in letteratura. Inoltre, vengono confrontati direttamente i risultati ottenuti con entrambi i solutori per validare ulteriormente il solutore spettrale per casi ritenuti per esso maggiormente critici, ovvero in presenza di discontinuità geometrica.

2.1 Introduzione ai modelli

I due modelli aeroelastici sviluppati successivamente, seppur differenti, si basano su una serie di assunzioni e considerazioni comuni che per chiarezza saranno presentate in questa sezione introduttiva. In particolare, saranno descritti i sistemi di riferimento che verranno utilizzati nelle due trattazioni matematiche e le ipotesi che sono alla base di entrambe le formulazioni.

Una delle assunzioni iniziali su cui si basano entrambi i modelli aeroelastici sviluppati, è che la pala sia sottoposta a piccole deformazioni (elasticità lineare) e ad un campo di spostamenti moderati. Questo implica la necessità di utilizzare modelli di trave non lineare, in cui sono considerate le non-linearità geometriche della deformazione. Sfruttando l'ipotesi che tali spostamenti siano moderati (e non arbitrariamente grandi), è possibile semplificare il sistema di equazioni finali eseguendo un troncamento al secondo ordine. Tale assunzione è ancora tutt'oggi ampiamente utilizzata nella modellazione di pale di rotore.

Inoltre si assume che la sezione trasversale della pala sia rigida, quindi le sue deformazioni risultano trascurabili.

2.1.1 Considerazioni sugli ordini di grandezza

Come precedentemente accennato, le formulazioni matematiche utilizzate e sviluppate in questo lavoro, sono basate su uno schema sistematico di troncamento al secondo ordine dovuto all'assunzione iniziale di piccole deformazioni e moderati spostamenti e rotazioni cui tipicamente sono soggette le pale di un rotore di elicottero.

Quantitativamente, tale schema consiste nell'approssimare le equazioni al secondo ordine, ovvero considerando $\epsilon^2 \ll 1$, dove ϵ è il parametro di riferimento adottato, posto di ampiezza pari alle deflessioni adimensionali dell'asse elastico della pala v/R e w/R (che generalmente, per una pala di rotore di elicottero, risultano essere di ampiezza inferiore a 0.20). L'ordine di grandezza di tutte le altre grandezze fisiche adimensionali che appaiono nelle equazioni viene stimato in termini di ϵ .

Il troncamento eseguito ha validità relativa alla singola equazione per cui assumendo che il termine di ordine maggiore in ciascuna equazione sia di ordine uno $O(1)$ verranno considerati i termini al secondo ordine $O(\epsilon)$ e trascurati quelli del terzo, $O(\epsilon^2)$, in quanto trascurabili rispetto a 1. Gli ordini di grandezza dei vari parametri adimensionali assunti in questo lavoro sono quelli tipici in campo elicotteristico e sono riassunti nella Tabella 2.1.1.

2.1.2 Sistemi di riferimento e trasformazioni

Il rotore di un elicottero è un oggetto geometricamente complesso, e per lo sviluppo dei modelli aeroelastici presentati nelle sezioni successive è necessario utilizzare diversi sistemi di riferimento. La maggior parte di essi sono comuni tra le due formulazioni, è quindi opportuno descriverli in

$O(1):$	$\frac{x}{R}, \frac{s}{R}, R\frac{\partial}{\partial s}, R\frac{\partial}{\partial x}, \psi, \frac{\partial}{\Omega\partial t}, \Lambda_A, \Lambda_s, \frac{v_0}{R}, \frac{w_0}{R}, \theta_{tot}, \theta_{tw}$
$O(\epsilon):$	$\frac{\eta}{R}, \frac{\zeta}{R}, \frac{c}{R}, \frac{v}{R}, \frac{w}{R}, \phi, \theta_x, \theta_\eta, \theta_\zeta$
$O(\epsilon^2):$	$\frac{u}{R}, \frac{m\Omega^2 R^2}{EA}, \frac{c_{d0}}{c_{l\alpha}}$

Tabella 2.1: Ordine di grandezza delle variabili fisiche

questo paragrafo introduttivo, insieme alle trasformazioni necessarie per il passaggio dagli uni agli altri.

Riferimento non rotante solidale al mozzo, \mathcal{R}_{hnr} : il riferimento $(\hat{i}_{hnr}, \hat{j}_{hnr}, \hat{k}_{hnr})$, è un riferimento inerziale solidale al mozzo del rotore, la cui origine coincide con il centro di quest'ultimo. Il versore \hat{i}_{hnr} è orientato in direzione della coda dell'elicottero, mentre \hat{k}_{hnr} è allineato con l'asse di rotazione del rotore. L'asse identificato dal versore \hat{j}_{hnr} , univocamente determinato dal prodotto vettore tra gli altri due versori, punta a destra del pilota. Tale riferimento è rappresentato in Figura 2.1.

Riferimento rotante solidale al mozzo, \mathcal{R}_{hr} : il riferimento $(\hat{i}_{hr}, \hat{j}_{hr}, \hat{k}_{hr})$, mostrato in Fig. 2.1 è un riferimento solidale al mozzo del rotore che ruota con velocità angolare costante $\vec{\Omega} = \Omega\hat{k}_{hnr}$. La sua origine coincide con quella del riferimento \mathcal{R}_{hnr} . I versori \hat{i}_{hr} e \hat{j}_{hr} , sono definiti rispetto a \hat{i}_{hnr} e \hat{j}_{hnr} mediante una rotazione attorno all'asse \hat{k}_{hnr} dell'angolo $\psi = \Omega t$. Il versore \hat{k}_{hr} è invece coincidente con \hat{k}_{hnr} . Tale sistema di riferimento è anche il riferimento globale nel solutore FEM. Il passaggio dal riferimento \mathcal{R}_{hnr} a \mathcal{R}_{hr} è dato dalla relazione

$$\begin{Bmatrix} \hat{i}_{hr} \\ \hat{j}_{hr} \\ \hat{k}_{hr} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_\psi \begin{Bmatrix} \hat{i}_{hnr} \\ \hat{j}_{hnr} \\ \hat{k}_{hnr} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{i}_{hnr} \\ \hat{j}_{hnr} \\ \hat{k}_{hnr} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

Riferimento rotante pala indeformata, \mathcal{R}_{pi} : il riferimento $(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$ è solidale alla pala nella configurazione indeformata. Esso tiene conto di tutte le rotazioni rigide che subisce la pala che sono il precone β_{pc} , gli eventuali modi rigidi attorno alle cerniere di flappeggio, lead-lag e torsione ed anche le variazioni di passo dovute ai comandi. L'origine di questo riferimento è posizionata alla radice della pala ad una distanza $e_h\hat{i}_{hnr}$ dal centro del rotore e il versore \hat{i}_1 è parallelo all'asse elastico della porzione dritta della pala e caratterizzato dalla coordinata x . Esso coincide inoltre con l'asse di pitch (denominato anche asse di variazione del passo o asse di feathering). I versori \hat{i}_2, \hat{i}_3 sono invece in direzione degli assi principali della sezione alla radice e non variano con x . Tale terna $(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$, è ottenuta mediante una serie di rotazioni successive che sono nell'ordine: (i) una rotazione dei versori $(\hat{i}_{hr}, \hat{j}_{hr}, \hat{k}_{hr})$ dell'angolo di precone rispetto all'asse \hat{j}_{hr} , una rotazione composta dalle rotazioni rigide di lag (rotazione di un angolo γ rispetto all'asse \hat{k}_{hr} - ruotato), flappeggio (rotazione di un angolo β rispetto all'asse \hat{j}_{hr} - ruotato) e della variazione totale di passo, data dalla somma del comando di pitch e di un eventuale moto rigido (rotazione di un angolo δ rispetto all'asse \hat{i}_{hr} - ruotato). Tale riferimento coincide con il riferimento globale pala indeformata utilizzato nella descrizione della formulazione spettrale. La trasformazione che porta della terna $(\hat{i}_{hr}, \hat{j}_{hr}, \hat{k}_{hr})$ alla terna $(\hat{i}_1, \hat{i}_2, \hat{i}_3)$ è definita quindi dalle

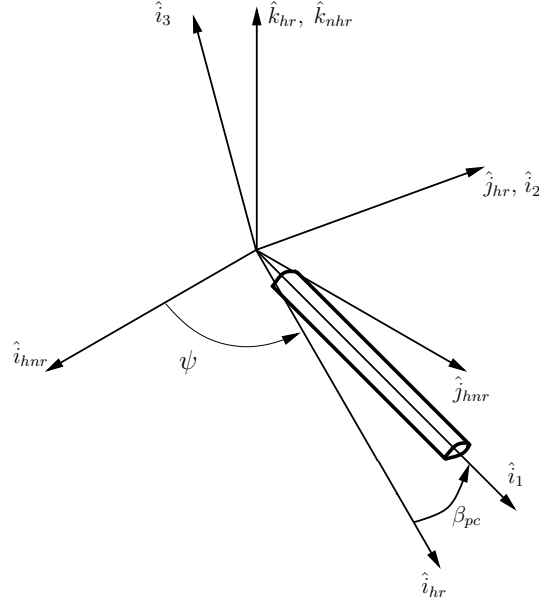


Figura 2.1: Rappresentazione schematica dei sistemi di riferimento \mathcal{R}_{hnr} e \mathcal{R}_{hr}

seguenti relazioni

$$\begin{Bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_{rig} \mathbf{R}_{\beta_{pc}} \begin{Bmatrix} \hat{i}_{hr} \\ \hat{j}_{hr} \\ \hat{k}_{hr} \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

dove $\mathbf{R}_{\beta_{pc}}$ tiene conto dell'eventuale angolo di precone β_{pc}

$$\mathbf{R}_{\beta_{pc}} = \begin{bmatrix} \cos \beta_{pc} & 0 & \sin \beta_{pc} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta_{pc} & 0 & \cos \beta_{pc} \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

mentre \mathbf{R}_{rig} tiene conto delle eventuali ulteriori rotazioni rigide della pala e del comando di variazione del passo

$$\mathbf{R}_{rig} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.4)$$

dove $\delta = \theta_0 + \theta_{rig}$ è la rotazione totale della pala rispetto all'asse di pitch, data dalla somma tra il comando θ_0 ed una eventuale rotazione rigida addizionale attorno allo stesso asse. Il comando θ_0 è espresso come

$$\theta_0 = \theta_{coll} + \theta_{1c} \cos \psi + \theta_{1s} \sin \psi \quad (2.5)$$

dove $\psi = \Omega t$ è la posizione azimutale della pala e $\theta_{coll}, \theta_{1c}, \theta_{1s}$ sono rispettivamente il passo collettivo, il passo ciclico laterale e il passo ciclico longitudinale.

Riferimento locale cartesiano, pala indeformata, $\mathcal{R}_{l_{FEM}}$: questo sistema di riferimento rotante cartesiano è solidale con la pala nella configurazione indeformata, la quale è caratterizzata da un asse elastico non rettilineo. Esso è definito dai versori di base $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ ed è mostrato in Figura 2.3. Nello specifico, \hat{e}_x è localmente tangente all'asse elastico della pala, mentre \hat{e}_y ed \hat{e}_z coincidono con gli assi principali della sezione prima della deformazione. Si noti che tale riferimento è utilizzato solamente nella formulazione FEM dove il pre-twist della pala

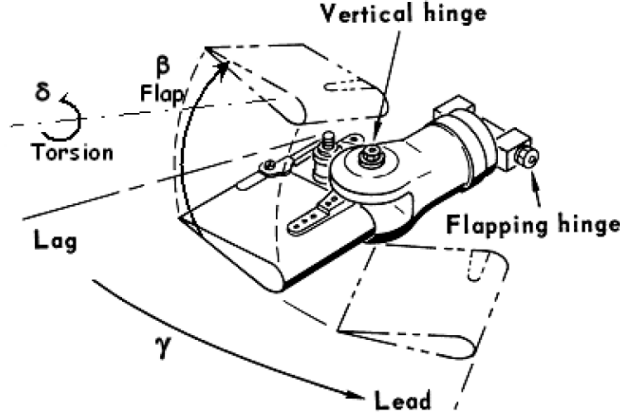


Figura 2.2: Rappresentazione generica delle cerniere di un rotore

è considerato come una deformazione. La trasformazione che porta dal riferimento globale pala indeformata \mathcal{R}_{pi} a quello locale $\mathcal{R}_{l_{FEM}}$ è definita mediante una serie di rotazioni che definiscono l'orientamento della terna locale. Considerando che la posizione dell'asse elastico indeformato \vec{r}_e è definita come:

$$\vec{r}_e = x_e \hat{i}_1 + v_{geom} \hat{i}_2 + w_{geom} \hat{i}_3 \quad (2.6)$$

è possibile ricavare le rotazioni:

$$\theta_{z_{geom}} = \arctan \frac{dw_{geom}}{dx}; \quad \theta_{y_{geom}} = \arctan \left(-\frac{dw_{geom}}{dx} \frac{1}{\cos \theta_{z_{geom}}} \right) \quad (2.7)$$

Il calcolo di tali angoli permette la definizione della matrice di trasformazione dal riferimento \mathcal{R}_{pi} a quello locale $\mathcal{R}_{l_{FEM}}$

$$\mathbf{R}_{geom} = \begin{bmatrix} \cos \theta_{y_{geom}} & 0 & -\sin \theta_{y_{geom}} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_{y_{geom}} & 0 & \cos \theta_{y_{geom}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_{z_{geom}} & \sin \theta_{z_{geom}} & 0 \\ -\sin \theta_{z_{geom}} & \cos \theta_{z_{geom}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\begin{Bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_{geom} \begin{Bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.9)$$

Le variabili del modello FEM sono le componenti dello spostamento in questo sistema di riferimento, denominate rispettivamente u, v e w mentre la torsione ϕ è definita rispetto all'asse elastico deformato descritto in seguito.

Riferimento locale, curvilineo, pala indeformata, \mathcal{R}_l : è un sistema di riferimento rotante, anch'esso solidale con la pala nella configurazione indeformata, ortogonale, definito dei versori base $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$. \mathcal{R}_l è il riferimento locale curvilineo utilizzato nel solutore spettrale che differentemente da $\mathcal{R}_{l_{FEM}}$ tiene in conto anche del pre-twist della pala. Il versore \hat{e}_1 è localmente tangente all'asse elastico mentre \hat{e}_2 ed \hat{e}_3 sono paralleli agli assi principali della sezione della pala η e ζ rispettivamente. L'orientamento dei versori di base è quindi funzione dell'ascissa curvilinea s , coincidente col l'asse elastico della pala indeformata. La trasformazione che porta dal riferimento globale pala indeformata \mathcal{R}_{pi} a quello locale \mathcal{R}_l è definita mediante la matrice $A(s)$ che rispetto alla trasformazione 2.8 tiene conto anche del pre-twist. Essa sarà quindi definita come:

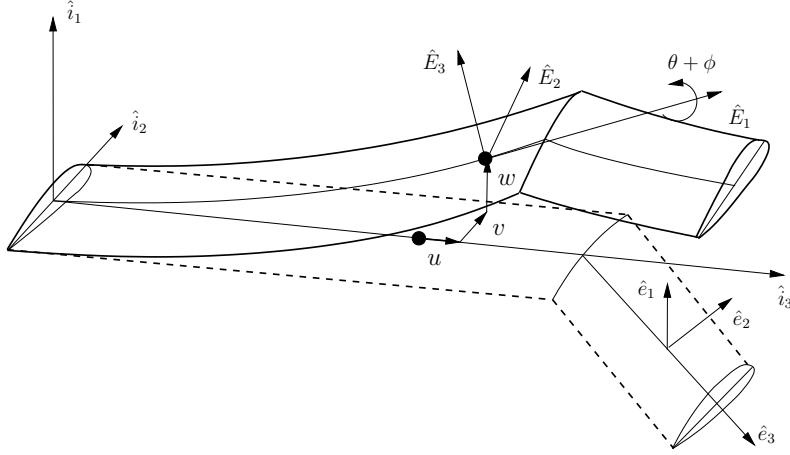


Figura 2.3: Sistemi di riferimento \mathcal{R}_{FEM} e \mathcal{R}_{def}

$$\begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{A}(s) \begin{Bmatrix} \hat{i}_1 \\ \hat{i}_2 \\ \hat{i}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

dove

$$\mathbf{A}(s) = \mathbf{R}_{tw} \mathbf{R}_{geom} \quad (2.11)$$

La matrice \mathbf{R}_{tw} tiene conto del pre-twist della pala definito dall'angolo $\theta_{tw}(s)$ e risulta essere

$$\mathbf{R}_{tw} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_{tw} & \sin \theta_{tw} \\ 0 & -\sin \theta_{tw} & \cos \theta_{tw} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Le componenti dello spostamento in questo riferimento sono (insieme alla torsione ϕ) le variabili del solutore spettrale e sono rispettivamente indicate con u, v e w .

Riferimento pala deformata, \mathcal{R}_{def} : è un sistema di riferimento rotante, ortogonale, curvilineo, solidale con la pala dopo la deformazione, definito dei versori base $(\hat{E}_1, \hat{E}_2, \hat{E}_3)$. Il versore \hat{E}_1 è localmente tangente all'asse elastico deformato mentre \hat{E}_2, \hat{E}_3 sono allineati con gli assi principali della pala deformata. La matrice di trasformazione T assume una forma leggermente diversa tra la formulazione FEM e quella spettrale in quanto vi è un diverso trattamento del pre-twist, che, nel primo caso è considerato insieme alla deformazione di torsione. Essa, per il solutore spettrale identifica la trasformazione

$$\begin{Bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \end{Bmatrix} = T \begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$

La matrice T è definita come

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_x & \sin \theta_x \\ 0 & -\sin \theta_x & \cos \theta_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_\eta & 0 & -\sin \theta_\eta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_\eta & 0 & \cos \theta_\eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_\zeta & \sin \theta_\zeta & 0 \\ -\sin \theta_\zeta & \cos \theta_\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

dove θ_x, θ_η e θ_ζ sono gli angoli di Eulero relativi agli assi \hat{e}_3, \hat{e}_2 - ruotato ed \hat{e}_1 - ruotato rispettivamente. Nel caso del solutore FEM tale trasformazione differisce leggermente per la definizione

dell'ultima rotazione in cui l'angolo di Eulero sarà $\bar{\theta}_x = \theta_x + \theta_{tw}$. In questo caso la matrice T_{FEM} rappresenta la trasformazione tra $\mathcal{R}_{l_{FEM}}$ e \mathcal{R}_{def}

$$\begin{Bmatrix} \hat{E}_1 \\ \hat{E}_2 \\ \hat{E}_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{T}_{FEM} \begin{Bmatrix} \hat{e}_x \\ \hat{e}_y \\ \hat{e}_z \end{Bmatrix} \quad (2.15)$$

2.2 Il solutore spettrale

Per le motivazioni elencate nell'introduzione del capitolo, ed in particolare in nome dell'efficienza e della flessibilità computazionale, in questo lavoro è stato sviluppato un solutore per l'analisi aeroelastica di pale di rotore innovative basate sul metodo di Galerkin per l'integrazione spaziale del sistema di equazioni. Tale modello, è adatto per l'analisi aerelastica di pale caratterizzate da asse elastico non rettilineo realizzate in materiale composito. In particolare considerato l'utilizzo di un metodo spettrale per l'implementazione numerica, è stata sviluppata una formulazione matematica/numerica originale in grado di analizzare con efficienza ed accuratezza, anche pale caratterizzate da angoli di freccia e diedro alla loro estremità, caratterizzate quindi di discontinuità geometriche sulla derivata prima.

2.2.1 Modello strutturale di pala ad asse elastico curvo

La pala è stata modellata come una trave biflesso-torsionale, non lineare (con troncamenti al secondo ordine) ad asse curvo. L'utilizzo di un riferimento curvilineo \mathcal{R}_l rende più complessa la formulazione matematica del modello in quanto, la derivata rispetto all'ascissa curvilinea di un generico vettore dovrà tener conto della curvatura iniziale dell'asse elastico della trave. In questo lavoro è stata utilizzato un approccio non convenzionale per la derivazione delle equazioni della dinamica della pala, basato sull'integrazione diretta dell'equazione d'equilibrio dei momenti. Come si vedrà in seguito, tale approccio risulta essere particolarmente adatto all'analisi di pale dall'asse elastico curvo, oltre che molto compatto ed elegante dal punto di vista matematico.

Inoltre, tale modello è stato sviluppato considerando gli effetti di anisotropia del materiale dovuti all'utilizzo dei materiali compositi seguendo una procedura analoga a quella descritta nel Riferimento [16]. Riguardo a tale approccio, è opportuno anticipare che per poter tenere in conto negli accoppiamenti tra la rigidità assiale e quelle di taglio, l'ipotesi di indeformabilità al taglio della trave viene inizialmente rilassata. I gradi di libertà associati al taglio verranno imposti nulli in un secondo momento. Tale procedura è descritta in maniera dettagliata nei paragrafi seguenti.

Relazioni di equilibrio

Le relazioni di equilibrio per un elemento di trave di lunghezza ds saranno:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial s} + \vec{p} = 0 \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial \vec{m}}{\partial s} + \hat{E}_1 \times \vec{V} + \vec{q} = 0 \quad (2.17)$$

dove \vec{V} e \vec{m} sono le risultanti di forze e momenti interni agenti sulla generica sezione mentre \vec{p} e \vec{q} sono le forze e i momenti distribuiti esterni agenti sulla pala. Per ottenere un'espressione facilmente integrabile delle equazioni 2.16 e 2.17 in termini delle componenti nel riferimento locale occorre proiettare tali equazioni nel riferimento globale pala indeformata \mathcal{R}_{pi} ed esplicitarle in

termini delle componenti nel riferimento locale curvilineo pala indeformata \mathcal{R}_l . Sfruttando la relazione 2.10 si avrà $\mathbf{v}_g = \mathbf{A}^T \mathbf{v}_l, \mathbf{m}_g = \mathbf{A}^T \mathbf{m}_l, \mathbf{p}_g = \mathbf{A}^T \mathbf{p}_l, \mathbf{q}_g = \mathbf{A}^T \mathbf{q}_l$ e le equazioni 2.16 e 2.17 possono essere scritte come

$$\frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{A}^T \mathbf{v}_l) + \mathbf{A}^T \mathbf{p}_l = 0 \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial s} (\mathbf{A}^T \mathbf{m}_l) - \mathbf{A}^T \mathbf{H}_l \mathbf{v}_l + \mathbf{A}^T \mathbf{q}_l = 0 \quad (2.19)$$

dove \mathbf{H}_l è la matrice delle componenti del tensore assiale associato al versore \hat{E}_1 . A questo punto è possibile integrare tali equazioni ed ottenere le seguenti espressioni per i carichi di sezione agenti sulla pala

$$\mathbf{v}_l(s) = \mathbf{A} \int_s^R \mathbf{A}^T \mathbf{p}_l d\tilde{s} = 0 \quad (2.20)$$

$$\mathbf{m}_l(s) = \mathbf{A} \left\{ \int_s^R \mathbf{A}^T \mathbf{q}_l d\tilde{s} - \int_s^R \mathbf{A}^T \mathbf{H}_l \mathbf{v}_l d\tilde{s} \right\} \quad (2.21)$$

avendo sfruttato le condizioni al contorno di estremo libero per cui $\mathbf{v}_l(R) = \mathbf{m}_l(R) = 0$. Le equazioni 2.20 e 2.21 sono le soluzioni generali per le relazioni di equilibrio di una trave ad asse curvo, attraverso le quali è possibile ottenere i tagli e i momenti elastici di sezione cui essa è soggetta. Una volta definite le relazioni sforzi-deformazioni e deformazioni-spostamenti, è possibile ottenere le deformazioni elastiche della pala, ovvero gli spostamenti u, v, w e la torsione ϕ .

Relazioni spostamenti-deformazioni

La relazione tra gli spostamenti e gli allungamenti per una trave soggetta a deformazioni moderate può essere ottenuta mediante la definizione del tensore delle deformazioni di Green-Lagrange, il quale può essere calcolato in funzione del vettore posizione di un generico punto della trave prima e dopo la deformazione. Esso sarà per un punto di coordinate (s, η, ζ) , dove s è l'ascissa curvilinea e η e ζ sono le coordinate rispetto gli assi principali della sezione della trave

$$\vec{r}(s, \eta, \zeta) = \vec{r}_e + \vec{r}_s = \vec{r}_e + \eta \hat{e}_2 + \zeta \hat{e}_3 \quad (2.22)$$

mentre dopo la deformazione esso sarà

$$\vec{R}(s, \eta, \zeta) = \vec{r}_e + \vec{u} + \vec{R}_s = \vec{r}_e + u \hat{e}_1 + v \hat{e}_2 + w \hat{e}_3 + (\psi_{uT} \phi' + v'_s \eta + w'_s \zeta) \hat{E}_1 + \eta \hat{E}_2 + \zeta \hat{E}_3 \quad (2.23)$$

dove \vec{r} e \vec{R} rappresentano rispettivamente il vettore posizione di un generico punto della sezione della pala prima e dopo la deformazione mentre \vec{r}_e è la posizione dell'asse elastico nella configurazione indeformata e \vec{u} è lo spostamento dell'asse elastico. I vettori \vec{r}_s e \vec{R}_s rappresentano invece la distanza tra un generico punto della sezione trasversale della pala e l'asse elastico. Una rappresentazione grafica della deformazione è presentata in Figura 2.4 per maggiore chiarezza.

In maniera analoga a quanto descritto nel Rif. [16] si considerano inoltre lo spostamento dovuto alla funzione di warping associata alla torsione ψ_{uT} e le deformazioni di taglio v'_s e w'_s . Il tensore delle deformazioni di Green-Lagrange in termini di componenti nel riferimento locale indeformato \mathcal{R}_l può essere definito come (con $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \equiv (s, \eta, \zeta)$)

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R_i}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial R_j}{\partial \xi_i} - \frac{\partial r_i}{\partial \xi_j} \cdot \frac{\partial r_j}{\partial \xi_i} \right) \quad (2.24)$$

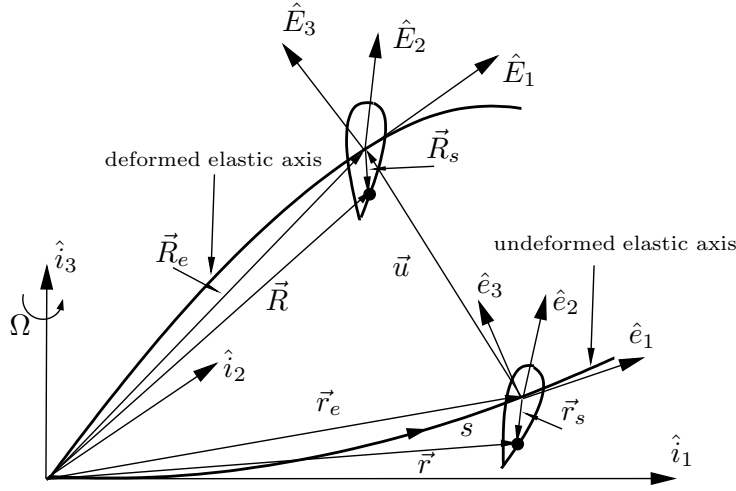


Figura 2.4: Rappresentazione schematica della deformazione della pala.

Inoltre considerando la definizione ingegneristica delle deformazioni

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= e_{11} \\ \gamma_{x\eta} &= 2e_{12} \\ \gamma_{x\zeta} &= 2e_{13}\end{aligned}\tag{2.25}$$

si ottengono le espressioni finali che definiscono il legame tra spostamenti e deformazioni per una trave monodimensionale, che dopo un troncamento al secondo ordine risultano essere

$$\begin{aligned}\epsilon_{xx} &= \tilde{u}' + \frac{\tilde{v}'^2}{2} + \frac{\tilde{w}'^2}{2} - \eta\bar{k}_3 + \zeta\bar{k}_2 + \frac{1}{2}(\eta^2 + \zeta^2)\bar{k}_1^2 + (\psi_{uT}\phi') \\ \gamma_{x\eta} &= v'_s \cos \phi + w'_s \sin \phi + (\psi_{uT,\eta} - \zeta)\phi' \\ \gamma_{x\zeta} &= v'_s \sin \phi - w'_s \cos \phi + (\psi_{uT,\zeta} + \eta)\phi' \\ \epsilon_{\eta\eta} &\approx \epsilon_{\zeta\zeta} \approx \gamma_{\eta\zeta} \approx 0\end{aligned}\tag{2.26}$$

Dove \bar{k}_1 , \bar{k}_2 e \bar{k}_3 sono le curvatures di torsione, flap e lag rispettivamente dell'asse elastico della trave. Esse sono anche le componenti del vettore $\bar{\mathbf{k}} = \bar{k}_1\hat{E}_1 + \bar{k}_2\hat{E}_2 + \bar{k}_3\hat{E}_3$ cui è associata la matrice delle curvatures di deformazione

$$\bar{\mathbf{K}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} 0 & \bar{k}_3 & -\bar{k}_2 \\ -\bar{k}_3 & 0 & \bar{k}_1 \\ \bar{k}_2 & -\bar{k}_1 & 0 \end{bmatrix}\tag{2.27}$$

Inoltre i termini \tilde{u}' , \tilde{v}' , e \tilde{w}' sono le componenti nel riferimento \mathcal{R}_l della derivata prima rispetto all'ascissa curvilinea del vettore spostamento dell'asse elastico $\vec{u} = u\hat{e}_1 + v\hat{e}_2 + w\hat{e}_3$. Nell'operazione di derivazione spaziale rispetto alla variabile s di \vec{u} , occorre tenere conto che anche i versori base sono funzione dell'ascissa curvilinea per cui si avrà:

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial s} = \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} - \mathbf{K}_0 \mathbf{u} \right) \begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{Bmatrix} = \{\tilde{u}', \tilde{v}', \tilde{w}'\} \begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{Bmatrix}\tag{2.28}$$

dove \mathbf{K}_0 è la matrice delle curvature dell'asse elastico indeformato. Derivando infatti i versori di base del riferimento \mathcal{R}_l si ha

$$\begin{Bmatrix} \hat{e}'_1 \\ \hat{e}'_2 \\ \hat{e}'_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{K}_0 \begin{Bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{e}_2 \\ \hat{e}_3 \end{Bmatrix} \quad (2.29)$$

Tale matrice si ottiene a partire dalla matrice \mathbf{A} precedentemente definita mediante la relazione

$$\mathbf{K}_0 = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial s} \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & k_{30} & -k_{20} \\ -k_{30} & 0 & k_{10} \\ k_{20} & -k_{10} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

Le relazioni esplicite tra la curvatura dell'asse elastico dovuta alla sola deformazione \vec{k} e le variabili del problema si ottengono dalla 2.27 una volta trovata l'espressione esplicita della matrice \mathbf{T} . Considerando gli spostamenti e le rotazioni dell'asse elastico dovuti alla deformazione analogamente a quanto fatto nei Riff. [1] e [14], e la definizione della matrice \mathbf{T} data dalla 2.13, questa al secondo ordine sarà

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \tilde{v}' & \tilde{w}' \\ -(\tilde{v}' \cos \phi + \tilde{w}' \sin \phi) & \cos(\hat{\phi} + \tilde{v}' \tilde{w}') & \sin \hat{\phi} \\ \tilde{v}' \sin \phi - \tilde{w}' \cos \phi & -\sin(\hat{\phi} + \tilde{v}' \tilde{w}') & \cos \hat{\phi} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

dove, analogamente a quanto fatto nel Rif. [14]

$$\hat{\phi} = \phi - \int_0^s \tilde{v}'' \tilde{w}' d\hat{s} \quad (2.32)$$

Per cui la relazione tra spostamenti e curvature di deformazione sarà

$$\begin{aligned} \bar{k}_1 &= \tilde{\phi}' \\ \bar{k}_2 &= \tilde{v}'' \sin \phi - \tilde{w}'' \cos \phi \\ \bar{k}_3 &= \tilde{v}'' \cos \phi + \tilde{w}'' \sin \phi \end{aligned} \quad (2.33)$$

Una volta note le curvature di deformazione è possibile ricostruire il campo di spostamenti e rotazioni cui è soggetta la pala, necessarie per il calcolo delle forzanti inerziali ed aerodinamiche. La curvatura di deformazione, riportata nel riferimento pala indeformata, può essere decomposta in un contributo lineare \mathbf{k}_{lin} ed uno non lineare \mathbf{k}_{nlin} :

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_{lin} + \mathbf{k}_{nlin} \quad (2.34)$$

E' interessante osservare che la parte lineare della curvatura può essere associata alla rotazione della sezione rispetto ad assi fissi (ed in particolare alla terna locale indeformata), mentre il contributo non lineare è legato ai termini addizionali che diventano non trascurabili quando le rotazioni della sezione non possono essere considerate piccole e devono quindi essere considerate rispetto agli assi ruotati (si vede ad esempio il Rif. [26]).

Viene ora introdotto $\vec{\theta}$, lo pseudovettore le cui componenti nel riferimento locale indeformato sono proprio le rotazioni della sezione, legato alla parte lineare della curvatura mediante la relazione

$$\mathbf{k}_{lin} = \left. \frac{\partial \vec{\theta}}{\partial s} \right|_{l-ind} \quad (2.35)$$

osservando che la derivata di $\vec{\theta}$ per $\theta = \vec{\theta}|_{l-ind}$ è

$$\frac{\partial \theta}{\partial s} \Big|_{l-ind} = \frac{\partial \theta}{\partial s} - \mathbf{K}_0 \theta = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{A}^T \theta}{\partial s} \quad (2.36)$$

la rotazione della sezione della trave sarà

$$\theta = \mathbf{A} \int_0^s \mathbf{A}^T \mathbf{k}_{lin} d\hat{s} \quad (2.37)$$

dove $\theta_1 = \phi$ e θ_2, θ_3 sono rotazioni della sezione associate alla flessione dell'asse elastico. Richiamando ora la 2.28 e la definizione di ϵ_{xx} si ha

$$\tilde{\mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial s} - \mathbf{K}_0 \mathbf{u} = \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{A}^T \mathbf{u}}{\partial s} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} - \epsilon_{xx}^{n-lin} \\ \tilde{v}' \\ \tilde{w}' \end{Bmatrix} \quad (2.38)$$

Sotto l'ipotesi di indeformabilità a taglio, secondo un'approssimazione al secondo ordine, i termini la flessione dell'asse elastico è legata alle rotazioni della sezione mediante la seguente espressione (vedi Rif. [26])

$$\begin{Bmatrix} \tilde{v}' \\ \tilde{w}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \theta_1 \\ -\theta_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \{\theta_3 - \theta_1 \theta_2 / 2 - \theta_2 - \theta_1 \theta_3 / 2\} \quad (2.39)$$

Relazioni carichi-deformazioni

Il modello utilizzato per definire i legami tra carichi e deformazioni utilizzato in questo lavoro è basato su quanto descritto nei Riferimenti [16] e [17]. Esso include gli effetti dovuti all'anisotropia del materiale introdotti dall'utilizzo dei materiali compositi oggi largamente utilizzati per la realizzazione di pale elicoteristiche. Per ottenere la relazione esplicita tra i carichi elastici di sezione e le variabili del problema per una trave monodimensionale occorre integrare sulla sezione trasversale gli sforzi agenti su di essa. Il legame tra tali sforzi e le deformazioni elastiche per una pala realizzata in materiale composito è dato dalla seguente relazione

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{x\zeta} \\ \sigma_{x\eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{15} & Q_{16} \\ Q_{15} & Q_{55} & Q_{56} \\ Q_{16} & Q_{56} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{x\zeta} \\ \epsilon_{x\eta} \end{Bmatrix} \quad (2.40)$$

dove Q_{ij} sono le rigidezze puntuali del materiale. Tali grandezze sono generalmente calcolate con modelli FEM per l'analisi della sezione della pala. Le pale elicoteristiche di ultima generazione sono realizzate generalmente in laminati di fibra di carbonio e resine epossidiche per cui tali valori di rigidezza dipenderanno dal numero di strati utilizzati e dall'orientamento delle fibre. Il calcolo di tali coefficienti non è parte di questo lavoro e si considera come dato di input al modello.

Si noti come nell'equazione precedente sia stato adottato un ordine delle variabili e una numerazione che a prima vista risulta essere insolita. Tale ordine è comunemente utilizzato nei modelli di trave (inclusi i riferimenti [16] e [17]) ed è conseguenza del fatto che la 2.40 deriva dalla semplificazione delle relazioni sforzi-deformazioni complete, valide per un solido tridimensionale (in cui la matrice Q_{ij} è una 6x6).

Per ottenere le relazioni tra carichi di sezione e deformazioni occorre sostituire le relazioni 2.26 nella 2.40 ed integrare lungo la sezione trasversale della pala. Per i tagli si avrà:

$$\begin{aligned} V_{\bar{x}} &= \iint_A \sigma_{xx} d\eta d\zeta \\ V_{\eta} &= \iint_A \sigma_{x\eta} d\eta d\zeta \\ V_{\zeta} &= \iint_A \sigma_{x\zeta} d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (2.41)$$

mentre la definizione dei momenti risultanti di sezione

$$\begin{aligned} M_{\bar{x}} &= \iint_A (\eta\sigma_{x\zeta} - \zeta\sigma_{x\eta}) d\eta d\zeta + \iint_A \bar{k}_1 \sigma_{xx} (\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta \\ M_{\eta} &= \iint_A \zeta \sigma_{xx} d\eta d\zeta \\ M_{\zeta} &= - \iint_A \eta \sigma_{xx} d\eta d\zeta \end{aligned} \quad (2.42)$$

Le relazioni che si ottengono tra carichi di sezione e le variabili del problema, incluse le deformazioni di taglio risultano essere

$$\left\{ \begin{aligned} V_x &= EAu'_e + EAK_a^2 \frac{\phi'^2}{2} - (EA_c \tilde{v}'' \cos \phi + \tilde{w}'' \sin \phi) + EES_c (v'_s \cos \phi + w'_s \sin \phi) + \\ &EES_f (w'_s \cos \phi - v'_s \sin \phi) + EET\tilde{\phi}' \\ V_y &= EES_c u'_e + GA_c (v'_s \cos \phi + w'_s \sin \phi) - ECS_f (\tilde{v}'' \cos \phi + \tilde{w}'' \sin \phi) \\ V_z &= EES_f u'_e + GA_f (w'_s \cos \phi - v'_s \sin \phi) - EFS_c (\tilde{w}'' \cos \phi - \tilde{v}'' \sin \phi) \\ M_x &= GJ\tilde{\phi}' + EETu'_e + EAK_a^2 u'_e \tilde{\phi}' - ETC(\tilde{v}'' \cos \phi + \tilde{w}'' \sin \phi) + ETF(\tilde{v}'' \sin \phi - \tilde{w}'' \cos \phi) \\ M_y &= EI_f (\tilde{v}'' \sin \phi - \tilde{w}'' \cos \phi) + EFS_c (w'_s \cos \phi - v'_s \sin \phi) + ETF\tilde{\phi}' \\ M_z &= -EA_c u'_e + EI_c (\tilde{v}'' \cos \phi + \tilde{w}'' \sin \phi) + EFS_f (w'_s \sin \phi + v'_s \cos \phi) - ETC\tilde{\phi}' \end{aligned} \right. \quad (2.43)$$

avendo posto

$$u'_e = \tilde{u}' + \frac{\tilde{v}'^2}{2} + \frac{\tilde{w}'^2}{2} \quad (2.44)$$

Tali relazioni possono essere scritte in forma compatta come

$$\left\{ \begin{array}{c} V_{\bar{x}} \\ V_{\eta} \\ V_{\zeta} \\ M_{\bar{x}} \\ M_{\eta} \\ M_{\zeta} \end{array} \right\} = [K_{ij}] \left\{ \begin{array}{c} u'_e \\ v'_s \\ w'_s \\ \tilde{\phi}' \\ \tilde{w}'' \\ \tilde{v}'' \end{array} \right\} \quad (2.45)$$

Gli integrali di sezione che appaiono nelle relazioni carichi-deformazioni (Eq. 2.52) sono definiti come segue:

i) le classiche caratteristiche di sezione,

$$EA = \iint_A Q_{11} d\eta d\zeta$$

$$EA_c = \iint_A Q_{11} \eta d\eta d\zeta$$

$$EAk_A^2 = \iint_A Q_{11} (\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta$$

$$EI_c = \iint_A Q_{11} \eta^2 d\eta d\zeta$$

$$EI_f = \iint_A Q_{11} \zeta^2 d\eta d\zeta$$

$$GJ = \iint_A \left[Q_{55} (\psi_{uT,\zeta} + \eta)^2 + Q_{66} (\psi_{uT,\eta} - \zeta)^2 + 2Q_{56} (\psi_{uT,\eta} - \zeta) (\psi_{uT,\zeta} + \eta) d\eta d\zeta \right] d\eta d\zeta \quad (2.46)$$

ii) le rigidzze legate al taglio

$$GA_c = \iint_A Q_{55} d\eta d\zeta$$

$$GA_f = \iint_A Q_{66} d\eta d\zeta \quad (2.47)$$

iii) le rigidzze di accoppiamento legate all'anisotropia del materiale

$$EES_c = \iint_A Q_{15} d\eta d\zeta$$

$$EES_f = \iint_A Q_{16} d\eta d\zeta$$

$$ECS_f = \iint_A Q_{16} \eta d\eta d\zeta$$

$$EFS_c = \iint_A Q_{15} \zeta d\eta d\zeta \quad (2.48)$$

$$EET = \iint_A Q_{15} (\psi_{uT,\zeta} + \eta) + Q_{16} (\psi_{uT,\zeta} - \zeta) d\eta d\zeta$$

$$ETC = \iint_A Q_{15} (\psi_{uT,\zeta} + \eta) + Q_{16} (\psi_{uT,\zeta} - \zeta) \eta d\eta d\zeta$$

$$ETF = \iint_A Q_{15} (\psi_{uT,\zeta} + \eta) + Q_{16} (\psi_{uT,\zeta} - \zeta) \zeta d\eta d\zeta$$

A questo punto si utilizza il metodo di condensazione statica descritto nel Rif. [16] per eliminare i gradi di libertà al taglio pur tenendo implicitamente conto degli effetti di accoppiamento tra le rigidzze relative a queste variabili e quelle effettive del problema. Esso consiste, di fatto, nel risolvere il sistema di equazioni definito dalla 2.51 ponendo nulli i tagli, V_η e V_ζ , piuttosto che eliminare direttamente le deformazioni ad essi associate, e successivamente trovare una nuova matrice di rigidzza modificata.

$$\begin{Bmatrix} u'_e \\ v'_s \\ w'_s \\ \tilde{\phi}' \\ \tilde{w}'' \\ \tilde{v}'' \end{Bmatrix} = [K_{ij}]^{-1} \begin{Bmatrix} V_{\bar{x}} \\ V_\eta \\ V_\zeta \\ M_{\bar{x}} \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{Bmatrix} \quad (2.49)$$

eliminando quindi le righe relative a V_η e V_ζ il sistema diventa

$$\begin{Bmatrix} u'_e \\ \tilde{\phi}' \\ \tilde{w}'' \\ \tilde{v}'' \end{Bmatrix} = [K'_{ij}]^{-1} \begin{Bmatrix} V_{\bar{x}} \\ M_{\bar{x}} \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

La matrice K'_{ij} è la matrice ridotta delle rigidzze che include anche gli effetti dati dall'accoppiamento tra le rigidzze di taglio e le altre rimaste. Per cui il legame finale sforzi deformazioni sarà dato dalla 2.51 ridotta

$$\begin{Bmatrix} V_{\bar{x}} \\ M_{\bar{x}} \\ M_\eta \\ M_\zeta \end{Bmatrix} = [K'_{ij}] \begin{Bmatrix} u'_e \\ \tilde{\phi}' \\ \tilde{w}'' \\ \tilde{v}'' \end{Bmatrix} \quad (2.51)$$

Dalla procedura di condensazione statica, si ottengono le seguenti espressioni finali dei carichi di sezione

$$\begin{cases} V_x = \bar{E}A u'_e + EA k_a^2 \frac{\phi'^2}{2} - (\bar{E}A_c \tilde{v}'' \cos \phi + \tilde{w}'' \sin \phi) + EET \tilde{\phi}' \\ M_x = \bar{G}J \tilde{\phi}' + EET u'_e + EA k_a^2 u'_e \tilde{\phi}' - ETC(\tilde{v}'' \cos \phi + \tilde{w}'' \sin \phi) + ETF(\tilde{v}'' \sin \phi - \tilde{w}'' \cos \phi) \\ M_y = \bar{E}I_f(\tilde{v}'' \sin \phi - \tilde{w}'' \cos \phi) + EFS_c(w'_s \cos \phi - v'_s \sin \phi) + ETF \tilde{\phi}' \\ M_z = -\bar{E}A_c u'_e + \bar{E}I_c(\tilde{v}'' \cos \phi + \tilde{w}'' \sin \phi) + EFS_f(w'_s \sin \phi + v'_s \cos \phi) - ETC \tilde{\phi}' \end{cases} \quad (2.52)$$

Si noti come le sole rigidzze modificate dalla condensazione statica risultano essere solamente quelle classiche mentre quelle di accoppiamento dovute all'anisotropia non vengono alterate da tale processo.

2.2.2 I carichi inerziali

Le forze inerziali agenti sulla sezione della pala, \vec{p}^{in} , secondo un approccio Newtoniano, saranno:

$$\vec{p}^{in} = - \int_A \rho \vec{a} d\eta d\zeta \quad (2.53)$$

dove \vec{a} è l'accelerazione di un punto generico sulla pala

$$\vec{a} = \vec{a}_r + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \vec{R} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_r \quad (2.54)$$

dove $\vec{\Omega}$ è il vettore velocità angolare del rotore, \vec{R} è il vettore che rappresenta la distanza di un punto generico dal centro del mozzo nella configurazione pala deformata, mentre \vec{v}_r e \vec{a}_r sono rispettivamente la velocità e l'accelerazione del medesimo relative nel riferimento rotante pala indeformata \mathcal{R}_l . Per ottenere le espressioni esplicite delle forze inerziali in funzione delle variabili del problema, occorre esprimere l'accelerazione in funzione delle stesse. Il vettore posizione \vec{R} sarà:

$$\vec{R} = \vec{R}_e + \vec{R}_s = (x_l + u) \hat{e}_1 + (y_l + v) \hat{e}_2 + (z_l + w) \hat{e}_3 + \eta \hat{E}_\eta + \zeta \hat{E}_\zeta \quad (2.55)$$

dove \vec{R}_e è il vettore posizione dell'asse elastico deformato e \vec{R}_s il vettore che denota la distanza tra l'asse elastico e un punto generico della sezione. x_l, y_l, z_l , sono le componenti nel riferimento \mathcal{R}_l del vettore posizione dell'asse elastico nella configurazione indeformata

$$\begin{Bmatrix} x_l \\ y_l \\ z_l \end{Bmatrix} = R_{geom} \begin{Bmatrix} x \\ v_{geom} \\ w_{geom} \end{Bmatrix} \quad (2.56)$$

Le componenti del vettore \vec{R} nel riferimento \mathcal{R}_l , denominate rispettivamente R_x, R_y e R_z saranno quindi (portando le componenti di \vec{R}_s nel riferimento \mathcal{R}_l attraverso la matrice \mathbf{T})

$$\begin{aligned} R_x &= x_l + u - \tilde{v}' (\eta \cos \phi - \zeta \sin \phi) - \tilde{w}' (\eta \sin \phi - \zeta \cos \phi) \\ R_y &= y_l + v + \eta \cos \phi - \zeta \sin \phi \\ R_z &= z_l + w + \eta \sin \phi + \zeta \cos \phi \end{aligned} \quad (2.57)$$

Facendo la derivata temporale del vettore \vec{R} è possibile ottenere le espressioni esplicite di velocità ed accelerazione del generico punto della pala nella configurazione deformata. A questo punto, sostituendo l'equazione 2.57 e le sue derivate temporali nella 2.54 e poi il tutto nella 2.53, si ottengono le espressioni delle forze inerziali di sezione in termini delle variabili del problema u, v, w e ϕ .

$$\begin{aligned} p_x^{in} &= - \iint_A \rho a_x d\eta d\zeta = m [-\ddot{u} + \Omega_x \Omega_y (y_l + v) + (\Omega_y^2 + \Omega_z^2) (x_l + u) - \Omega_z \Omega_x (z_l + w)] \\ &\quad - 2m (\Omega_y \dot{w} + \Omega_z \dot{v}) \\ p_y^{in} &= - \iint_A \rho a_y d\eta d\zeta = m [-\ddot{v} + e \ddot{\phi} \sin \phi - \Omega_y \Omega_z (z_l + w + e \sin \phi) + (\Omega_x^2 + \Omega_z^2) (y_l + v + e \cos \phi) \\ &\quad - \Omega_x \Omega_y (x_l + u)] + 2m [\Omega_z (\dot{v}' e \cos \phi + \dot{w}' e \sin \phi - \dot{u}) + \Omega_x (\dot{w} + \dot{\phi} e \cos \phi)] \\ p_z^{in} &= - \iint_A \rho a_z d\eta d\zeta = m [-\ddot{w} - m e \ddot{\phi} \cos \phi - \Omega_x \Omega_z (x_l + u) + (\Omega_y^2 + \Omega_z^2) (z_l + w) - \Omega_y \Omega_z (y_l + v)] \\ &\quad + 2m (\Omega_y \dot{u} - \Omega_x \dot{v}) \end{aligned} \quad (2.58)$$

dove

$$m = \iint_A \rho d\eta d\zeta \quad m e = \iint_A \rho \eta d\eta d\zeta \quad (2.59)$$

Per il calcolo dei momenti inerziali risultanti di sezione cui è soggetta la pala \vec{q}^{in} si considera la legge di conservazione del momento della quantità di moto per cui varrà la relazione:

$$\vec{q}^{in} = \frac{\partial \vec{h}_g}{\partial t} + \vec{e} \times \vec{p}^{in} \quad (2.60)$$

dove \vec{e} è il vettore eccentricità tra centro elastico e centro di massa. Considerando l'espressione delle componenti del momento della quantità di moto \mathbf{h}_g nel riferimento pala deformata \mathcal{R}_{def}

$$\mathbf{h}_g = \mathbf{J}\omega^{def} \quad (2.61)$$

per cui la 2.60 può essere riscritta in termini di componenti nel riferimento \mathcal{R}_l come

$$\mathbf{q}^{in} = \mathbf{T}^T \left(\mathbf{J}\dot{\omega}^{def} + \omega^{def} \times \mathbf{h}_g \right) + (\mathbf{T}^T \mathbf{e}) \times \mathbf{p}^{in} \quad (2.62)$$

dove \mathbf{J} è la matrice di inerzia della sezione della pala rispetto al riferimento principale baricentrico, definita come

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} mk_m^2 & -J_{x\eta} & -J_{x\zeta} \\ -J_{x\eta} & mk_{m1}^2 & -J_{\eta\zeta} \\ -J_{x\zeta} & -J_{\eta\zeta} & mk_{m2}^2 \end{bmatrix} \quad (2.63)$$

mentre ω^{def} e $\dot{\omega}^{def}$ sono rispettivamente la velocità e l'accelerazione angolare della generica sezione della pala nella configurazione deformata, che conterrà quindi sia il contributo di trascinamento dovuto al moto rigido del rotore sia il contributo dato dalle deformazioni elastiche della pala. La ω^{def} risulta essere

$$\vec{\omega}^{def} = \vec{\Omega} + \vec{\omega}_{com} + \vec{\omega}_{el} \quad (2.64)$$

dove il contributo del moto dovuto ai comandi avrà nel riferimento \mathcal{R}_{pi} le componenti

$$\omega_{com} = \begin{Bmatrix} \dot{\delta} \\ -\dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (2.65)$$

mentre il contributo della deformazione elastica sarà, in termini delle variabili del problema (per maggiori dettagli vedi Rif. [14] e [27])

$$\omega_{el} = \begin{Bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{v}' \sin \phi - \dot{w}' \cos \phi \\ \dot{v}' \cos \phi + \dot{w}' \sin \phi \end{Bmatrix} \quad (2.66)$$

2.2.3 I carichi aerodinamici

Per applicazioni aeroelastiche sono stati introdotti nel modello i carichi aerodinamici. Sebbene esistano e siano disponibili modelli aerodinamici decisamente accurati per questo applicazioni elicotteristiche (si veda Rif.[25]) in questo lavoro sono stati utilizzati modelli semplificati in quanto caratterizzati da una elevata efficienza computazionale (fondamentale nella procedura di ottimizzazione). Forze e momenti risultanti di sezione sono stati ottenuti partendo un approssimazione quasi stazionaria ($c(k)=1$) del modello non stazionario di Greenberg (Rif. [28]) per profili bidimensionali, con l'introduzione di diversi modelli di velocità indotta per tenere conto

degli effetti tridimensionali. Le componenti di forze e momenti nel riferimento locale pala indeformata \mathcal{R}_l denominate rispettivamente \mathbf{p}^{aero} e \mathbf{m}^{aero} sono ottenute a partire dalle componenti di tali carichi nel riferimento pala deformata

$$\mathbf{p}^{aero} = \begin{Bmatrix} L_u \\ L_v \\ L_w \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{Bmatrix} 0 \\ T \\ S \end{Bmatrix} \quad (2.67)$$

e analogamente per il momento aerodinamico

$$\mathbf{q}^{aero} = \begin{Bmatrix} q_x^{aero} \\ q_y^{aero} \\ q_z^{aero} \end{Bmatrix} = \mathbf{T}^T \begin{Bmatrix} M_\phi \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (2.68)$$

Dalla teoria di Greenberg [28] e analogamente a quanto riportato nei Riff. [27, 1] si ha per le forze aerodinamiche:

$$T = \frac{\rho C_{l_\alpha} c}{2} \left[-U_P U_T + \frac{c}{2} \omega U_T - \frac{c}{4} \dot{U}_P + \left(\frac{c}{4}\right)^2 \dot{\omega} \right] \quad (2.69)$$

$$S = \frac{\rho C_{l_\alpha} c}{2} \left[U_P^2 - \frac{c}{2} \omega U_P - \frac{C_{d_0}}{C_{l_\alpha}} U_T^2 \right]$$

mentre per il momento aerodinamico rispetto al quarto di corda si ha

$$M_\phi = -\frac{\rho C_{l_\alpha} c^3}{32} \left(\omega U_T - \dot{U}_P + \frac{3c}{8} \dot{\omega} \right) \quad (2.70)$$

Nelle equazioni precedenti U_P e U_T sono rispettivamente le componenti della velocità al quarto di corda del profilo in direzione perpendicolare e tangenziale alla stessa nella configurazione deformata, mentre ω e $\dot{\omega}$ sono le velocità angolari di sezione sempre nella configurazione pala deformata, già definite nel paragrafo 2.2.2. Le componenti della velocità relativa tra profilo ed aria nel riferimento deformato, U_P e U_T , saranno date da:

$$\vec{v}_{aero} = \vec{V}_{ava} + \vec{v} + \vec{v}_i \quad (2.71)$$

dove \vec{V}_{ava} è la velocità di avanzamento e \vec{v}_i è il termine di velocità indotta che tiene conto degli effetti tridimensionali. Per la determinazione di quest'ultima sono stati utilizzati sia modelli analitici semplificati (descritti nei Riff. [29, 1]) che modelli di scia libera basati su formulazioni BEM (si veda il Rif. [25]).

2.2.4 Implementazione numerica

Nella procedura numerica utilizzata per il solutore spettrale viene adottata una procedura detta di eliminazione in cui assume l'inesstensibilità assiale della pala. Matematicamente questo equivale ad imporre $\epsilon_{xx} = 0$ e a ricavare il grado di libertà assiale u a partire dalle altre variabili del problema come mostrato nel Rif. [27]. Questa procedura è piuttosto diffusa in campo elicotteristico in quanto non si perde nell'accuratezza della soluzione e si elimina un grado di libertà dal problema. Il corrispondente sistema di equazioni è quello nell'equazione 2.21 le cui incognite sono quindi v , w e ϕ .

Per descrivere la procedura di soluzione è conveniente riscrivere il problema nella forma

$$\mathbf{m}_l = \mathbf{m}_{in} + \mathbf{m}_{aer} \quad (2.72)$$

dove \mathbf{m}_{in} e \mathbf{m}_{aer} rappresentano i contributi inerziali e aerodinamici che compongono il RHS dell'equazione 2.21. Il sistema di equazioni viene integrato spazialmente mediante un approccio spettrale. Il primo passo consiste nella seguente rappresentazione della parte lineare delle curvature di deformazione nel riferimento locale indeformato:

$$k_{lin_1}(s, t) = \sum_{n=1}^{N_1} \alpha_n^\phi(t) \psi_n^{\phi'}(s) \quad (2.73)$$

$$k_{lin_2}(s, t) = \sum_{n=1}^{N_2} \alpha_n^w(t) \psi_n^{w''}(s) \quad (2.74)$$

$$k_{lin_3}(s, t) = \sum_{n=1}^{N_3} \alpha_n^v(t) \psi_n^{v''}(s) \quad (2.75)$$

dove $\psi_n^\phi, \psi_n^v, \psi_n^w$ sono le funzioni di forma modali, le quali debbono essere scelte in maniera tale che i corrispondenti spostamenti dell'asse elastico e la torsione (vedi la Sezione 2.2.1) soddisfino le condizioni al contorno geometriche omogenee del problema specifico in esame (si veda il Rif. [27]). Si noti come nell'equazione 2.73 è stata utilizzata la derivata prima della ψ_n^ϕ in quanto direttamente legata alla curvatura di torsione, k_1 , mentre nelle equazioni 2.74 e 2.75 sono state utilizzate le derivate seconde delle ψ_n^v, ψ_n^w in quanto direttamente legate alle curvature di flessione dell'asse elastico k_2 e k_3 . Il sistema di equazioni 2.72 viene successivamente proiettato sulle stesse funzioni di forma utilizzate precedentemente per la rappresentazione spettrale

$$\int_0^R \mathbf{m}_l \Psi^T ds = \int_0^R (\mathbf{m}_{in} + \mathbf{m}_{aero}) \Psi^T ds \quad (2.76)$$

dove

$$\Psi = \left\{ \begin{array}{c} \psi_n^{\phi'} \\ \psi_n^{w''} \\ \psi_n^{v''} \end{array} \right\}$$

La scelta di utilizzare come funzioni test le derivate prime e seconde delle funzioni di forma deriva dall'equivalenza tra il sistema di equazioni si ottiene e quello che si otterrebbe dall'applicazione di un approccio alla Rayleigh-Ritz.

L'equazione 2.76 può essere riscritta come

$$\mathbf{f}_{el}(t, \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{f}_{in}(t, \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{f}_{aero}(t, \boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0} \quad (2.77)$$

dove $\mathbf{f}_{el}, \mathbf{f}_{in}$ e \mathbf{f}_{aero} sono rispettivamente le forze elastiche, inerziali e aerodinamiche generalizzate e $\boldsymbol{\alpha}$ è il vettore in cui sono raccolte tutte le variabili Lagrangiane del problema, $\alpha_n^v, \alpha_n^w, \alpha_n^\phi$. Il problema è un sistema di $(N_v + N_w + N_\phi)$ equazioni non lineari, dipendenti dal tempo le cui incognite sono le ampiezze modali $\boldsymbol{\alpha}$ che può essere applicato sia per analisi di risposta aeroelastica sia per analisi di stabilità.

Risposta aeroelastica

La risposta aeroelastica periodica viene calcolata mediante un approccio di tipo Harmonic-Balance. Questa è una tecnica adatta per l'analisi della soluzione asintotica (tempo che tende all'infinito) di equazioni differenziali forzate da carichi periodici, cosa che generalmente accade in campo elicotteristico. L'Harmonic-Balance consiste in: (i) esprimere i termini che contribuiscono all'equazione 2.77 in serie di Fourier, (ii) uguagliare tutti i coefficienti armonici corrispondenti

e (iii) risolvere il sistema di equazioni che ne deriva, ora divenuto algebrico, in termini degli incogniti coefficienti di Fourier delle variabili Lagrangiane del problema. In particolare, esprimendo $\boldsymbol{\alpha}$ e $\mathbf{f} = \mathbf{f}_{el} + \mathbf{f}_{in} + \mathbf{f}_{aero}$ in termini delle seguenti serie di Fourier

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{\alpha}_0 + \sum_{k=1}^K [\boldsymbol{\alpha}_k^c \cos(\Omega_k t) + \boldsymbol{\alpha}_k^s \sin(\Omega_k t)]$$

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{f}_0 + \sum_{k=1}^K [\mathbf{f}_k^c \cos(\Omega_k t) + \mathbf{f}_k^s \sin(\Omega_k t)]$$

dove $\boldsymbol{\alpha}_k^c$, $\boldsymbol{\alpha}_k^s$, \mathbf{f}_k^c e \mathbf{f}_k^s denotano le componenti coseno e seno della k-esima armonica di $\boldsymbol{\alpha}$ e \mathbf{f} , mentre $\Omega_k = k\Omega$ con Ω che rappresenta la frequenza fondamentale (la velocità angolare del rotore ad esempio) l'equazione 2.77 diventa

$$\hat{\mathbf{f}}(\hat{\boldsymbol{\alpha}}) = \mathbf{0} \quad (2.78)$$

con $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^T = \{\boldsymbol{\alpha}_0 \boldsymbol{\alpha}_1^c \boldsymbol{\alpha}_1^s \boldsymbol{\alpha}_2^c \boldsymbol{\alpha}_2^s \cdot \cdot \cdot\}$ e $\hat{\mathbf{f}}^T = \{\mathbf{f}_0 \mathbf{f}_1^c \mathbf{f}_1^s \mathbf{f}_2^c \mathbf{f}_2^s \cdot \cdot \cdot\}$. A causa della presenza di termini non lineari, l'equazione 2.78 deve essere risolta utilizzando una procedura iterativa, ed in particolare viene utilizzato il metodo di Newton-Raphson. La soluzione del problema viene ottenuta dalla convergenza della seguente procedura iterativa

$$\hat{\boldsymbol{\alpha}}_m = \hat{\mathbf{f}}_{m-1} - \hat{\mathbf{J}}_{m-1}^{-1} \hat{\boldsymbol{\alpha}}_{m-1} \quad (2.79)$$

dove m è il passo dell'iterazione e $\hat{\mathbf{J}}$ è la matrice Jacobiana del sistema, che in questo lavoro viene calcolata numericamente come

$$\hat{J}_{ij} = \frac{\partial \hat{f}_i}{\partial \hat{\alpha}_j}$$

Stabilità aeroelastica

La stabilità aeroelastica viene calcolata mediante l'analisi agli autovalori del seguente sistema di equazioni linearizzate

$$\mathbf{M}(\boldsymbol{\alpha}_0, t) \ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{C}(\boldsymbol{\alpha}_0, t) \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{K}(\boldsymbol{\alpha}_0, t) \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$$

dove $\boldsymbol{\alpha}_0$ è la configurazione di riferimento (o di equilibrio) ottenuta dalla soluzione della 2.79. Inoltre, \mathbf{M} , \mathbf{C} e \mathbf{K} sono rispettivamente le matrici di massa, smorzamento e rigidità, determinate numericamente come

$$M_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial \ddot{\alpha}_j} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0}; \quad C_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial \dot{\alpha}_j} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0}; \quad K_{ij} = \left. \frac{\partial f_i}{\partial \alpha_j} \right|_{\boldsymbol{\alpha}_0}$$

dove $(\cdot)|_{\boldsymbol{\alpha}_0}$ sta ad indicare $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_0$.

2.3 Il solutore FEM

In questa sezione sono descritte la modellazione teorica/matematica e l'implementazione numerica del solutore FEM per l'analisi strutturale ed aeroelastica di pale di rotore dalla geometria complessa, caratterizzate da un asse elastico non rettilineo.

La formulazione utilizzata è basata su quella per pale ad asse elastico rettilineo presentata nei Riferimenti [14] e [27], il cui modello strutturale è di trave non lineare (con approssimazione

al secondo ordine), biflesso-torsionale soggetta ai carichi inerziali dovuti al moto rotatorio della pala. Le forzanti aerodinamiche sono ottenute da una approssimazione quasi-stazionaria di un modello bidimensionale per profili sottili (Riferimenti [28] e [27]) con l'introduzione di un termine di velocità indotta per tenere conto degli effetti tridimensionali. Tale modello è stato adatto alla modellazione di pale dall'asse elastico non rettilineo mediante l'implementazione all'interno del software commerciale, basato sul metodo agli elementi finiti, COMSOL Multiphysics, di un elemento di trave locale arbitrariamente orientabile nello spazio, oltre alla opportuna definizione dei carichi inerziali e aerodinamici di sezione.

Nei paragrafi seguenti vengono descritte sia la formulazione matematica alla base del modello che la strategia con cui questo è stato implementato numericamente.

2.3.1 Modello strutturale di pala

Le equazioni della dinamica strutturale della pala sono state ottenute in forma variazionale, quindi debole (tipicamente utilizzata per applicazioni agli elementi finiti) a partire dal principio di Hamilton che può essere enunciato come: il moto tra due istanti di tempo arbitrari t_1 e t_2 è tale da rendere stazionario \mathcal{H} rispetto ad una variazione arbitraria del moto che sia nulla in t_1 e t_2 con \mathcal{H} definito come:

$$\mathcal{H} = \int_{t_1}^{t_2} [(\mathcal{U} - \mathcal{T}) - \mathcal{W}] dt \quad (2.80)$$

la cui variazione prima è:

$$\delta\mathcal{H} = \int_{t_1}^{t_2} [(\delta\mathcal{U} - \delta\mathcal{T}) - \delta\mathcal{W}] dt \quad (2.81)$$

dove \mathcal{U} è l'energia elastica di deformazione, \mathcal{T} è l'energia cinetica e \mathcal{W} è il lavoro virtuale associato alle forze esterne. Si andrà ora a definire in dettaglio ciascun termine delle equazioni 2.80 e 2.81. La formulazione di seguito presentata è valida per travi snelle, omogenee ed isotrope. Si considera che le caratteristiche di massa e rigidità siano variabili lungo l'apertura, come anche la distanza tra centro di massa e centro elastico (offset di massa) e quella tra centro di figura e centro elastico (tensile offset). Inoltre si ass

Energia elastica di deformazione

L'energia elastica di deformazione introdotta nell'equazione 2.80 può essere espressa in funzione della definizione ingegneristica di sforzi e deformazioni come:

$$\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^R \iint_A (\sigma_{xx}\epsilon_{xx} + \sigma_{x\eta}\epsilon_{x\eta} + \sigma_{x\zeta}\epsilon_{x\zeta}) d\eta d\zeta dx \quad (2.82)$$

dove R è la lunghezza dell'asse elastico curvilineo della pala e A la l'area delle sezioni. Le espressioni delle componenti del tensore delle deformazioni in funzione delle variabili del problema u, v, w e ϕ , sviluppate nel Riferimento [14], approssimate al secondo ordine e considerando

warping nullo, risultano essere:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{xx} &= u' + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + (\eta^2 + \zeta^2) \left(\theta'_{tw} \phi' + \frac{\phi'^2}{2} \right) \\
&\quad - v'' [\eta \cos(\theta_{tw} + \phi) - \zeta \sin(\theta_{tw} + \phi)] - w'' [\eta \sin(\theta_{tw} + \phi) - \zeta \cos(\theta_{tw} + \phi)] \\
\epsilon_{x\eta} &= -\frac{1}{2} \zeta \phi' \\
\epsilon_{x\zeta} &= \frac{1}{2} \eta \phi'
\end{aligned} \tag{2.83}$$

La prima variazione di \mathcal{U} sarà quindi:

$$\delta\mathcal{U} = \frac{1}{2} \int_0^R \iint_A (\sigma_{xx} \delta\epsilon_{xx} + \sigma_{x\eta} \delta\epsilon_{x\eta} + \sigma_{x\zeta} \delta\epsilon_{x\zeta}) d\eta d\zeta dx \tag{2.84}$$

I legami costitutivi sforzi-deformazioni per travi snelle sotto le ipotesi di elasticità lineare e materiale isotropo è rappresentato dalla legge di *Hooke*

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= E \epsilon_{xx} \\
\sigma_{x\eta} &= G \epsilon_{x\eta} \\
\sigma_{x\zeta} &= G \epsilon_{x\zeta}
\end{aligned} \tag{2.85}$$

Dove E e G sono rispettivamente il modulo di Young ed il modulo di elasticità tangenziale. Sostituendo nell'equazione l'espressione esplicita delle deformazioni e le relazioni costitutive (Eq. 2.83 e ??) e considerando la pala come una serie di N elementi rettilinei si ottiene la seguente espressione per la variazione dell'energia elastica di deformazione

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{U} &= \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} \{ V_{\bar{x}} (\delta u' + v' \delta v' + w' \delta w') + (S_{\bar{x}} + T_{\bar{x}}) \delta \phi' \\
&\quad + [M_{\bar{z}} \cos(\theta_{tw} + \phi) + M_{\bar{y}} \sin(\theta_{tw} + \phi)] (\delta v'' + w'' \delta \phi) \\
&\quad + [M_{\bar{y}} \cos(\theta_{tw} + \phi) + M_{\bar{z}} \sin(\theta_{tw} + \phi)] (\delta w'' - v'' \delta \phi) \} dx
\end{aligned} \tag{2.86}$$

Nell'equazione precedente è stato effettuato un raggruppamento tale da evidenziare le risultanti degli sforzi e dei momenti di sezione nel sistema di riferimento solidale con la pala deformata, \mathcal{R}_{def} le cui espressioni esplicite in funzione delle variabili del problema, dopo un'approssimazione

al secondo ordine, sono le seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{\bar{x}} = \iint_A \sigma_{xx} d\eta d\zeta = EA \left\{ u' + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} + k_A^2 \theta'_{tw} \phi' - e_A [v'' \cos(\theta_{tw} + \phi) + w'' \sin(\theta_{tw} + \phi)] \right\} \\ S_{\bar{x}} = \iint_A (\eta \sigma_{x\zeta} - \zeta \sigma_{x\eta}) d\eta d\zeta = GJ \phi' \\ T_{\bar{x}} = \iint_A (\theta_{tw} + \phi)' \sigma_{xx} (\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta = EA k_A^2 (\theta_{tw} + \phi)' \left(u' + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} \right) \\ M_{\bar{y}} = \iint_A \zeta \sigma_{xx} d\eta d\zeta = EI_{\bar{y}} [v'' \sin(\theta_{tw} + \phi) - w'' \cos(\theta_{tw} + \phi)] \\ M_{\bar{z}} = - \iint_A \eta \sigma_{xx} d\eta d\zeta = EI_{\bar{z}} [v'' \cos(\theta_{tw} + \phi) + w'' \sin(\theta_{tw} + \phi)] - EA e_A \left(u' + \frac{v'^2}{2} + \frac{w'^2}{2} \right) \end{array} \right. \quad (2.87)$$

Gli integrali di sezione non nulli che appaiono nell'equazione 2.87 sono definiti come

$$\left\{ \begin{array}{ll} A = \iint_A d\eta d\zeta & Ae_A = \iint_A \eta d\eta d\zeta \\ Ak_A^2 = \iint_A (\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta & J = \iint_A (\eta^2 + \zeta^2) d\eta d\zeta \\ I_{\bar{y}} = \iint_A \zeta^2 d\eta d\zeta & I_{\bar{z}} = \iint_A \eta^2 d\eta d\zeta \end{array} \right. \quad (2.88)$$

Gli altri integrali di sezione risultano essere nulli a causa dell'assunzione che la sezione sia simmetrica rispetto all'asse η .

Energia cinetica

La variazione dell'energia cinetica che appare nell'equazione 2.81 può essere scritta come:

$$\delta\mathcal{T} = \int_0^R \iint_A \rho \vec{v} \cdot \delta\vec{v} d\eta d\zeta dx \quad (2.89)$$

dove ρ è la densità del materiale e \vec{v} è la velocità di un punto arbitrario della trave rispetto ad un sistema di riferimento inerziale che per una trave rotante sarà:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \vec{\Omega} \times \vec{r} \quad (2.90)$$

Nell'equazione precedente $\vec{\Omega}$ è la velocità angolare della pala e \vec{r} è il vettore posizione di un punto generico della pala deformata. Esprimendo \vec{v} in funzione delle variabili del sistema, integrando per parti nel tempo e lungo la sezione della pala la $\delta\mathcal{T}$ può essere scritta come

$$\delta\mathcal{T} = \sum_{i=1}^N \int_{x_{i-1}}^{x_i} [\bar{Z}_u \delta u + \bar{Z}_v \delta v + \bar{Z}_w \delta w + \bar{Z}_\phi \delta \phi] dx \quad (2.91)$$

Le espressioni esplicite di \bar{Z}_u , \bar{Z}_v , \bar{Z}_w e \bar{Z}_ϕ in funzione delle variabili del problema, come anche i passaggi per giungere ad esse, risultano essere decisamente lunghi. Questa procedura è stata

presentata per completezza e correttezza teorica del *principio di Hamilton*. Tali espressioni possono essere ricavate anche a partire dal calcolo forze e momenti inerziali (\vec{p}^{in} \vec{q}^{in}) seguendo un approccio Newtoniano, considerando la seguente equivalenza (si veda il Rif. [14]):

$$\begin{cases} \bar{Z}_u = p_x^{in} \\ \bar{Z}_v = p_y^{in} - q_z^{in'} \\ \bar{Z}_w = p_z^{in} + q_y^{in'} \\ \bar{Z}_\phi = q_x^{in} + v'q_y^{in} + w'q_z^{in} \end{cases} \quad (2.92)$$

dove $p_x^{in}, p_y^{in}, p_z^{in}$ e $q_x^{in}, q_y^{in}, q_z^{in}$ sono le componenti dei vettori \vec{p}^{in} e \vec{q}^{in} (forze e momenti inerziali) nel riferimento \mathcal{R}_{FEM} . Tale approccio risulta essere più conveniente, in quanto consente di non dover calcolare tutti i termini esplicitamente ma di ottenerli come prodotti tra matrici e vettori. Esso è stato descritto in maniera esaustiva nella sezione 2.2.2.

Rispetto ai carichi inerziali sviluppati per il solutore spettrale, quelli utilizzati nel solutore FEM differiscono per *i)* l'utilizzo della matrice \mathbf{T}_{FEM} al posto della matrice \mathbf{T} , e *ii)* per le componenti delle derivate spaziali delle variabili del problema. Nel solutore spettrale, infatti, le componenti nel riferimento locale pala indeformata curvilineo \mathcal{R}_l delle derivate rispetto all'ascissa curvilinea s sono denominate come $\tilde{u}', \tilde{v}', \tilde{w}'$ e $\tilde{\phi}'$ in quanto contengono anche il contributo della curvatura dell'asse elastico (vedi il solutore spettrale per maggiori dettagli 2.2), cosa che invece non accade per le componenti nel riferimento $\mathcal{R}_{l_{FEM}}$ che è cartesiano ortogonale.

2.3.2 I carichi aerodinamici

Il lavoro virtuale compiuto da forze e momenti aerodinamici può essere ottenuto come

$$\delta W = \int_0^R (L_u \delta u + L_v \delta v + L_w \delta w + M_\phi \delta \phi) dx \quad (2.93)$$

dove L_u, L_v, L_w sono i carichi risultanti di sezione agenti rispettivamente lungo x, y e z e M_ϕ il momento torcente rispetto all'asse elastico. Per le espressioni esplicite delle forzanti aerodinamiche si rimanda al paragrafo 2.2.3. Le differenze tra i due solutori sono le medesime descritte nel precedente paragrafo relativo ai carichi inerziali.

2.3.3 Implementazione in COMSOL Multiphysics

COMSOL Multiphysics è un software commerciale per l'analisi FEM di un vasto range di problemi riguardanti l'ingegneria e la fisica (come ad esempio la meccanica strutturale, l'acustica, la fluidodinamica, il trasferimento di calore e altri). Una delle caratteristiche più interessanti di questo software è che esso consente una interazione profonda con l'utente. In particolare, risulta utile ai fini del presente lavoro la possibilità di creare modelli di elemento-finito basati su equazioni definite dall'utente oppure di modificare le equazioni di un modello predefinito. Il modello strutturale ed aeroelastico di pala di rotore descritto nelle sezioni precedenti, è stato implementato in COMSOL Multiphysics, modificando il modello di trave di Eulero-Bernoulli 3D disponibile nel modulo della Meccanica Strutturale principalmente per due ragioni: *(i)* il l'elemento di trave Eulero-Bernoulli 3D ha gli stessi gradi di libertà del modello di pala che vuole implementare e, *(ii)* le trasformazioni tra riferimento globale e riferimenti locali sono disponibili automaticamente in quanto intrinseci al metodo FEM.

Le funzioni di forma utilizzate sono quelle tipiche per una trave, ovvero dei polinomi di Hermite del terzo ordine per i gradi di libertà a flessione, e polinomi del primo ordine per i gradi libertà assiale di torsione.

Il modello di pala di rotore è stato implementato per analisi transitorie così da consentire, sia l'analisi statica che quella dinamica come anche l'analisi agli autovalori. I termini dell'equazione 2.86 come anche i carichi inerziali, sono stati sostituiti alle espressioni predefinite del modello Eulero-Bernoulli 3D (denominate rispettivamente *weak*, termini tempo-costanti, e *dweak*, termini tempo-varianti), mentre i carichi aerodinamici sono stati introdotti come forzanti esterne. Nel seguire questa strategia implementativa è stato sfruttato il fatto che, essendo le matrici assemblate con metodi perturbativi, anche le forzanti esterne, se funzione dei gdl del problema, contribuiscono alle matrici stesse (si veda il Rif.[30] per ulteriori dettagli).

Dato che il problema in oggetto è non lineare per l'analisi agli autovalori è stata utilizzata la seguente procedura di soluzione: viene prima calcolata la soluzione all'equilibrio e successivamente viene imposto al solutore agli autovalori di utilizzare la soluzione di equilibrio precedentemente calcolata come punto di linearizzazione per le equazioni perturbate.

2.4 Validazione del solutore FEM

In questa sezione vengono presentate diverse analisi eseguite con il solutore FEM per riprodurre risultati numerici e sperimentali disponibili in letteratura con l'obiettivo di validare il solutore sviluppato. La validazione è stata eseguita mediante analisi di risposta a carichi stazionari, analisi delle frequenze naturali della pala in vacuo e analisi di stabilità aeroelastica per un rotore in condizioni di hover.

2.4.1 Risposta statica

Per prima cosa è stata eseguita un'analisi di risposta ad un carico stazionario per la pala incastrata alla radice, non rotante, descritta nel Riferimento [31]. Nello specifico questa è una lamina realizzata in alluminio 7075 con sezione rettangolare di lunghezza $R = 20\text{ in}$, corda e spessore uniformi pari a $c = 0.5\text{ in}$ e spessore $t = 0.125\text{ in}$ rispettivamente. Le analisi eseguite sono relative alla determinazione della deformazione della pala sotto l'azione combinata del proprio peso e di un carico d'estremità P che viene fatto variare da 1 a 3 *lbs*. Nelle figure 2.5-2.7 sono mostrati i confronti tra i risultati ottenuti con il solutore FEM ed i dati numerici e sperimentali presentati nel Riferimento [31] considerando una variazione dell'angolo di pitch della lamina $\theta \in [0^\circ, 90^\circ]$ (si noti che in questo caso per $\theta = 0$ la corda è allineata con la verticale). In particolare, nelle Figure 2.5 e 2.6, sono mostrati gli spostamenti flessionali all'estremità della pala, v e w , in direzione degli assi principali della sezione (con v che identifica lo spostamento nella direzione parallela alla corda), mentre, in Figura 2.7 è mostrata la torsione geometrica della sezione d'estremità, definita come $\hat{\phi} = \phi + \int_0^x v' w'' dx$ (si vedano in Riff. [31, 14] per maggiori dettagli). Dalle Figure 2.5-2.7 si può osservare come vi sia una buona correlazione tra i risultati ottenuti con il solutore FEM e dati di riferimento (e in particolare con quelli sperimentali), per quasi tutte le combinazioni di carico e angolo di pitch esaminate. Coerentemente con le approssimazioni adottate nel modello (campo delle moderate deformazioni) la correlazione tra i risultati tende a degradare quando le deformazioni diventano grandi (in particolare si osservi Fig.2.5 per $w_{tip} > 4\text{ in}$, che corrisponde ad uno spostamento adimensionale pari a $w_{tip}/R > 0.2$). Inoltre si può osservare come nelle Figure 2.6-2.7 i risultati ottenuti con il solutore FEM siano più vicini a quelli sperimentali di quelli numerici presentati in [31], e questo è particolare evidente per l'analisi della torsione di Figura 2.7. Si noti che nelle Figg. 2.6-2.7 i segmenti verticali indicano l'intervallo di incertezza delle misure sperimentali.

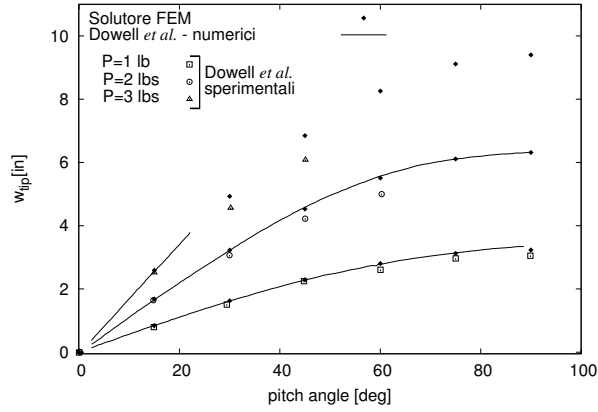


Figura 2.5: Deflessione stazionaria di flap al tip rispetto all'angolo di pitch - analisi parametrica rispetto al carico P

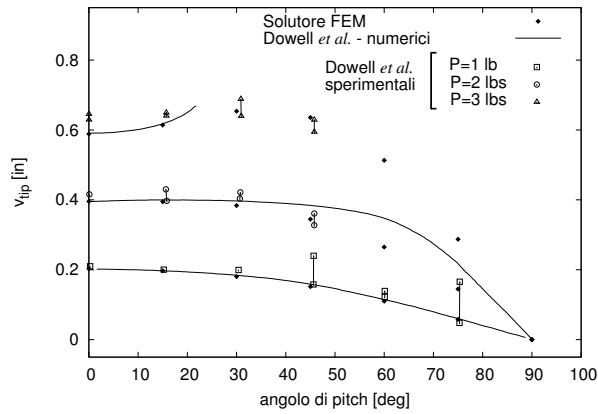


Figura 2.6: Deflessione stazionaria di lag al tip rispetto all'angolo di pitch - analisi parametrica rispetto al carico P

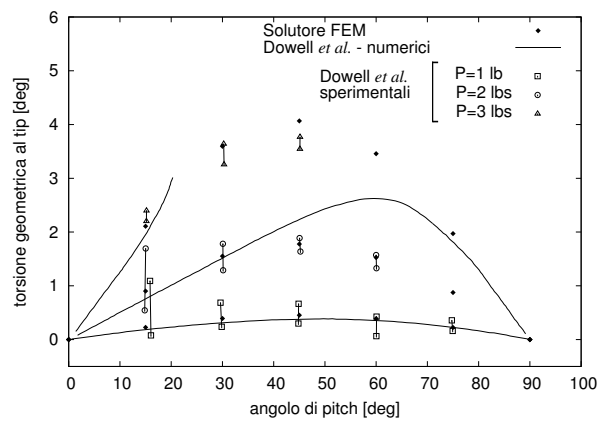


Figura 2.7: Torsione geometrica al tip rispetto all'angolo di pitch - analisi parametrica rispetto al carico P

2.4.2 Analisi in vacuo

Successivamente è stata eseguita un'analisi delle frequenze proprie in vacuo per la pala, caratterizzata da un angolo di freccia alla sua estremità, descritta nel Rif. [13]. La pala è realizzata in alluminio 7075 e presenta un raggio totale di $R = 40 \text{ in}$, incluso un tratto di $r_{hub} = 2.5 \text{ in}$ corrispondente alla lunghezza del mozzo. La parte rettilinea della pala ha una lunghezza di 31.5 in mentre il restante tratto di lunghezza 6 in è caratterizzato da angolo di freccia (tratto pari al 15% del raggio totale). La sezione è rettangolare, caratterizzata da corda e spessore uniformi pari rispettivamente a $c = 10 \text{ in}$ e $t = 0.063 \text{ in}$.

Nelle Figure 2.8-2.10 sono mostrati i confronti tra i risultati ottenuti con il solutore FEM, i risultati numerici presentati nel Riferimento [13] e quelli sperimentali descritti nel Riferimento [32]. Nel dettaglio, in Figura 2.8 sono rappresentate le frequenze fondamentali di vibrazione adimensionali della pala rotante in funzione della velocità di rotazione, in Figura 2.9 sono presentate le frequenze naturali di vibrazione per il caso di pala non rotante al variare dell'angolo di freccia, mentre in Fig. 2.10 è analizzato l'effetto dell'angolo di freccia sulle frequenze proprie della pala rotante (si noti che sia le frequenze che la velocità di rotazione sono adimensionalizzate rispetto alla velocità di rotazione nominale del rotore $\Omega = 750 \text{ rpm}$). Dalle figure presentate si può osservare come ci sia un ottimo accordo tra i risultati ottenuti con il solutore FEM e quelli numerici e sperimentali dei Riferimenti [13, 32]. Ciò dimostra la capacità del solutore sviluppato di predire correttamente sia gli effetti dovuti alla rotazione che quelli dovuti alla presenza della freccia al tip sulle frequenze di vibrazione della pala, ed in particolare l'accoppiamento che quest'ultima induce tra i modi di flapaggio e quelli di torsione.

Infine è interessante osservare come l'elevata influenza dell'angolo di freccia sulla frequenza del modo di torsione sia ben catturata dal solutore FEM come mostrato in Figura 2.10. Quell'andamento è dato dalla combinazione tra l'effetto irrigidente dato dal campo centrifugo denominato tennis-racket effect e dall'aumento dell'inerzia a torsione, entrambi dovuti alla presenza del tratto a freccia.

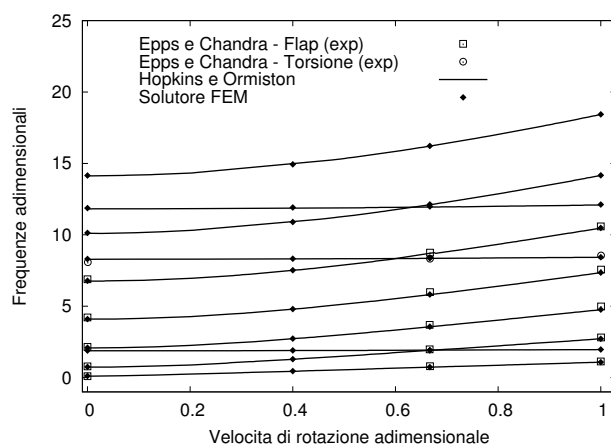


Figura 2.8: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto alla velocità di rotazione - pala dritta

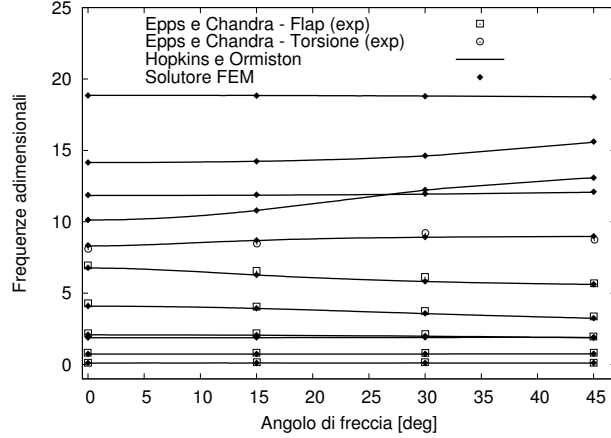


Figura 2.9: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto all'angolo di freccia - pala non rotante

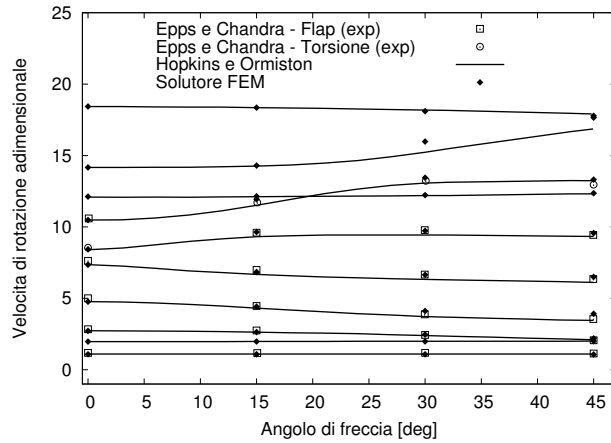


Figura 2.10: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto all'angolo di freccia - pala rotante

2.4.3 Analisi aeroelastica in hover

In questo paragrafo vengono presentati risultati relativi ad analisi di tipo aeroelastico per diverse configurazioni di rotori. Tali analisi riguardano sia la determinazione della risposta stazionaria e l'analisi di stabilità di un rotore hingeless con asse elastico rettilineo sia un'analisi di stabilità per la caratterizzazione aeroelastica di una pala con angoli di freccia e diedro alla sua estremità. Inizialmente è stato analizzato il rotore stiff-in-plane con asse elastico rettilineo descritto nel Riferimento [27]. Esso è caratterizzato da una pala senza offset e con angolo di precone nullo, le cui caratteristiche sono riassunte nella tabella 2.2, dove per i parametri adimensionali di rigidità si ha

$$\frac{EI_{z'}}{m\Omega^2 R^4} = \frac{\omega_{vNR}}{\beta_1^4}, \quad \frac{EI_{y'}}{m\Omega^2 R^4} = \frac{\omega_{wNR}}{\beta_1^4}, \quad \frac{GJ}{m\Omega^2 R^2 k_m^2} = \frac{\omega_{\phi NR}}{\gamma_1^2}$$

dove β_1 e γ_1 sono gli autovalori del primo modo a flessione e a torsione di una trave incastrata/libera non rotante e pari rispettivamente a 1.875 e $\pi/2$. Tra le frequenze adimensionali non rotanti (caratterizzate dal pedice NR) e quelle rotanti esiste una relazione riportata, per trave non svergolata uniforme ed incastrata, riferimento [27]. In Figura 2.11 è presentata la risposta

ω_v	1.5	γ	5.0
ω_w	1.15	σ	0.10
ω_ϕ	5.0	c/R	$\pi/40$
$(k_A/k_m)^2$	1.5	c_{l_α}	6.283
k_m/R	0.025	c_{d_0}/c_{l_α}	0.01/6.283
k_{m_1}/k_{m_2}	0.0		

Tabella 2.2: Dati del rotore hingeless utilizzato per confronto con i Riff. [27] e [1]. Pala ad asse rettilineo.

stazionaria in termini di spostamenti di flap, lag e torsione della sezione d'estremità della pala per diversi valori dell'angolo di collettivo. Nelle successive Figure 2.12 e 2.13 sono presentati i risultati dell'analisi agli autovalori eseguita attorno alla configurazione di equilibrio di Fig.2.11, in termini di frequenze proprie e smorzamenti modali rispettivamente.

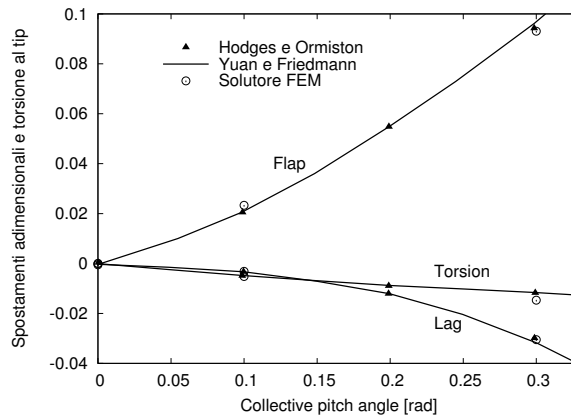


Figura 2.11: Risposta aeroelastica stazionaria di flap, lag e torsione al variare dell'angolo di collettivo

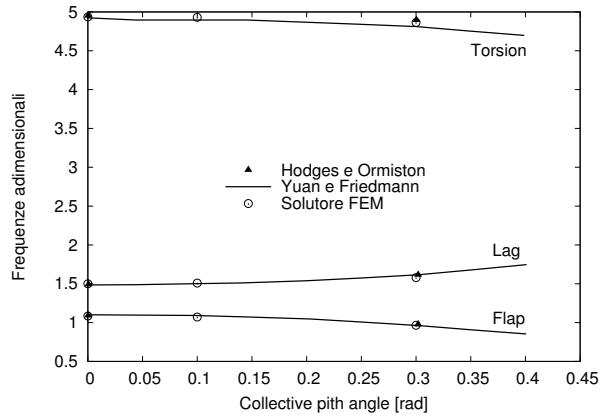


Figura 2.12: Andamento delle frequenze adimensionali al variare dell'angolo di collettivo

Dall'osservazione delle Figure 2.11-2.13 si evince un'ottima correlazione tra i risultati ottenuti con il solutore FEM e quelli presentanti nei riferimenti [1, 27] relativi alla stessa pala. I risultati mostrati mettono in evidenza come l'inclusione dell'aerodinamica nel sistema introduce

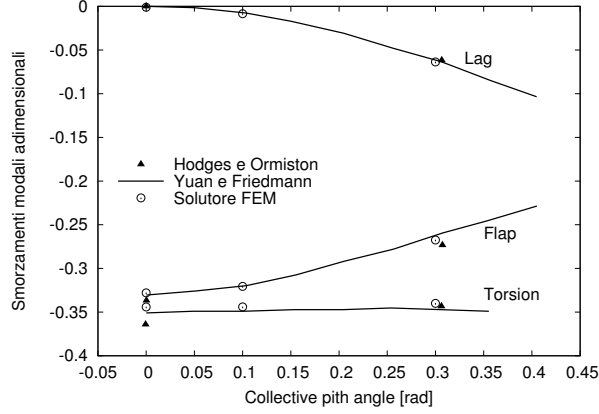


Figura 2.13: Andamento degli smorzamenti modali al variare dell'angolo di collettivo

ω_f	1.12/rev	c_{l_α}	2π
ω_l	0.731/rev	c_{d_0}	0.01
ω_t	3.875/rev	C_T	0.005
$(k_A/k_m)^2$	0.5259	σ	0.07
k_{m_1}/R	0.0	γ	5.5
k_{m_2}/R	0.02	N_{pale}	4
c/R	0.055		

Tabella 2.3: Caratteristiche adimensionali del rotore utilizzato per il confronto con il Rif. [1]. Configurazione di riferimento

dello smorzamento nella dinamica della pala e come questo dipenda sensibilmente dall'angolo di collettivo.

Viene ora presa in esame la pala descritta nel Riferimento [1] caratterizzata dalla presenza di angoli di freccia e di diedro alla sua estremità. Questa è caratterizzata da offset e angolo di precone nulli ed il tratto d'estremità cui sono applicati gli angoli di freccia e diedro è pari al 10% del raggio.

Le caratteristiche del rotore in esame, descritte nel Riferimento [1], sono riportate nella Tabella 2.3. Le proprietà strutturali della pala sono fornite in termini di frequenze adimensionali della pala rettilinea rotante. Nelle Figure 2.14 e 2.14, sono presentati i risultati dell'analisi di stabilità aeroelastica in funzione dell'angolo di freccia Λ_s . In particolare le Figure 2.14 e 2.14 riguardano il confronto tra le frequenze proprie e gli smorzamenti modali ottenuti con il solutore FEM ed i dati numerici del Riferimento [1], rispettivamente. Viene ora considerata una pala caratterizzata dalle caratteristiche strutturali modificate, tali per cui, la frequenza adimensionale associata primo modo di torsione sia prossima alla frequenza del secondo modo flessionale (questa viene posta pari a $\omega_{t1} = 3.263/rev$ come indicato nel Rif.[1]). Nelle Figure 2.16 e 2.17 sono presentati, rispettivamente, i confronti tra i risultati in termini di frequenze proprie e gli smorzamenti modali ottenuti con il solutore FEM e quelli del Riferimento [1] al variare dell'angolo di freccia per la configurazione modificata.

Dai confronti presentati nelle Figure 2.14-2.17 si può osservare un ottimo accordo tra i risultati ottenuti con il solutore FEM e i dati numerici del Riferimento [1]. In particolare il solutore sviluppato è in grado di analizzare correttamente gli effetti sulla stabilità aeroelastica della pala dovuti alla presenza della freccia all'estremità, i quali sono stati particolarmente

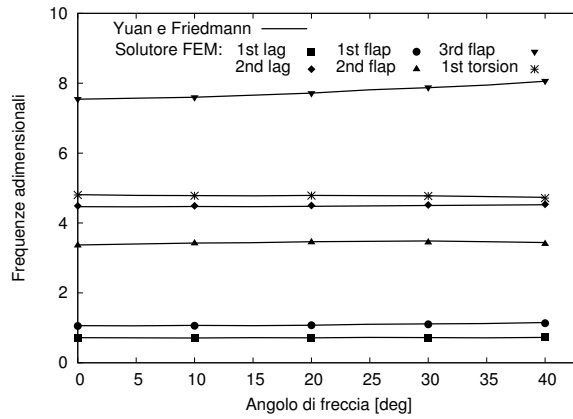


Figura 2.14: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto all'angolo di freccia. Confronto con il Rif.[1]

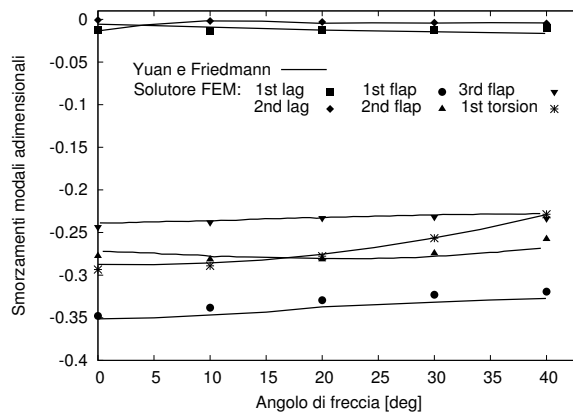


Figura 2.15: Andamento degli smorzamenti modal adimensionali rispetto all'angolo di freccia. Confronto con il Rif.[1]

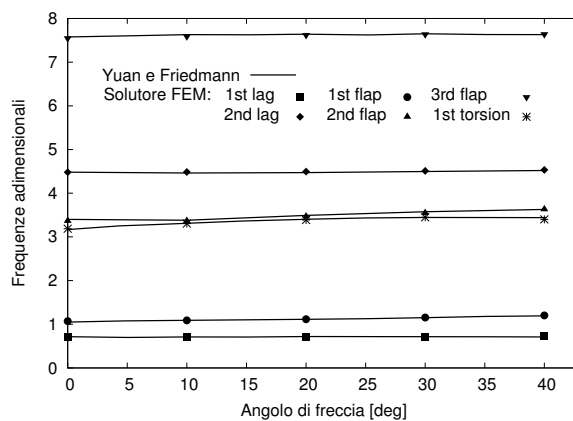


Figura 2.16: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto all'angolo di freccia - configurazione modificata. Confronto con il Rif.[1]

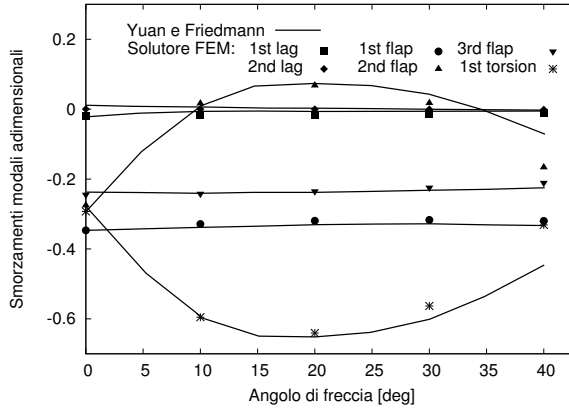


Figura 2.17: Andamento degli smorzamenti modali adimensionali rispetto all'angolo di freccia - configurazione modificata. Confronto con il Rif.[1]

enfaticizzati dall'analisi presentata nelle Figure 2.16 e 2.17 in cui le proprietà modificate della pala hanno avuto un effetto destabilizzante causato da una coalescenza di frequenze.

Infine, è stato analizzato l'effetto dell'angolo di diedro Λ_A all'estremità della pala. Anche in questo caso la lunghezza del tratto che viene ruotato è pari al 10% del raggio. Nelle Figure 2.18-2.19 sono presentati, rispettivamente, i risultati dell'analisi di stabilità aeroelastica in termini le frequenze proprie e gli smorzamenti modali al variare dell'angolo di diedro, mentre nelle successive Figure 2.20 e 2.21 sono mostrati i risultati della medesima analisi per una configurazione di pala modificata, caratterizzata da una frequenza torsionale adimensionale pari a $\omega_{t1} = 4.34/rev$ (come indicato nel Rif.[1]), prossima alla frequenza propria del secondo modo di flessionale di lag e tale da indurre anche in questo caso coalescenza di frequenze tra i due modi accoppiati. Anche in questo caso i risultati ottenuti con il solutore FEM sono in buon accordo con quelli presentati nel Rif. [1], dimostrando la capacità del solutore sviluppato di catturare correttamente gli effetti dovuti alla presenza dell'angolo di diedro all'estremità della pala.

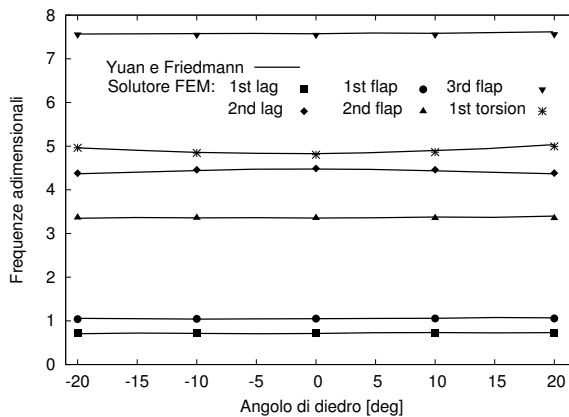


Figura 2.18: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto all'angolo di freccia. Confronto con il Rif.[1]

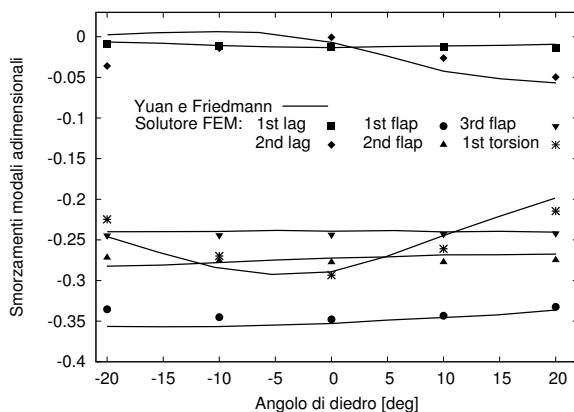


Figura 2.19: Andamento degli smorzamenti modali adimensionali rispetto all'angolo di diedro. Confronto con il Rif.[1]

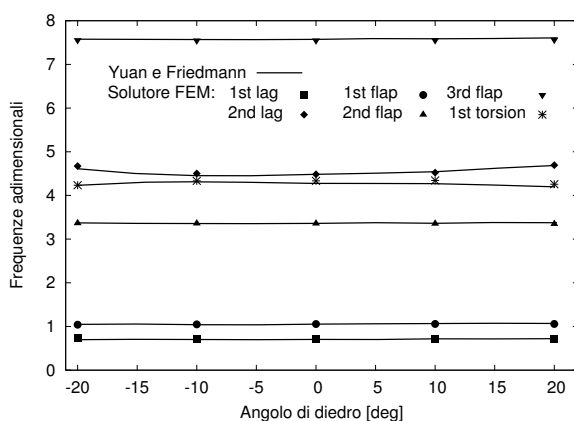


Figura 2.20: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto all'angolo di diedro - configurazione modificata. Confronto con il Rif.[1]

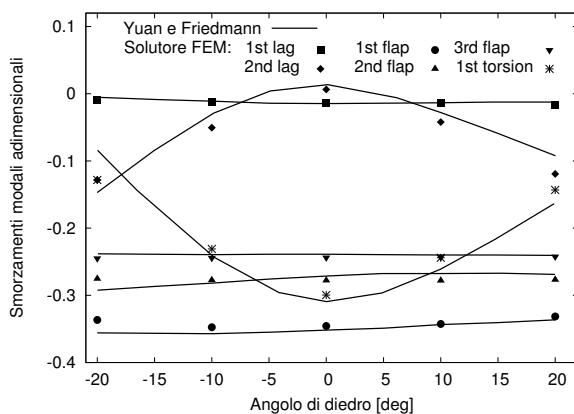


Figura 2.21: Andamento degli smorzamenti modali adimensionali rispetto all'angolo di diedro - configurazione modificata. Confronto con il Rif.[1]

2.5 Validazione del solutore spettrale

La validazione del solutore spettrale è stata eseguita mediante confronti sia con il solutore FEM sviluppato nel presente lavoro (la cui validazione è presentata nella Sezione 2.4), che con dati numerici e sperimentali disponibili in letteratura. Questi sono relativi ad analisi di tipo stazionario, analisi di dinamica libera ed analisi di risposta e stabilità aeroelastica (sia in hover che in volo avanzato) di rotori caratterizzati da un asse elastico non rettilineo. Si noti che nelle figure di questa sezione, il solutore spettrale è etichettato come Galerkin.

In tutte le analisi eseguite in questa sezione (eccetto i casi in cui diversamente indicato) sono state utilizzate nove funzioni di forma per ciascun grado di libertà del problema.

2.5.1 Confronti con il solutore FEM

Inizialmente, il presente solutore spettrale è stato validato rispetto al solutore FEM. La prima analisi consiste nella determinazione della risposta stazionaria di una pala non rotante con freccia le cui caratteristiche sono riportate in Tabella 2.4. Tale pala è soggetta ad una freccia pari a

R	4.741 m	GJ	13913Nm ²
c	0.395 m	m	6.46kg/m
EI_η	51600Nm ²	mk_{m_1}	0.0157kgm
EI_ζ	143441Nm ²	mk_{m_2}	0.063kgm

Tabella 2.4: Caratteristiche del rotore per il confronto con il solutore FEM

$\Lambda_s = 11.3deg$ per un tratto all'estremità di lunghezza pari al 50% del raggio totale. I carichi esterni applicati sono forze e momenti distribuiti, stazionari le cui componenti nel riferimento locale indeformato sono

$$p_1 = p_2 = p_3 = 150N/m; \quad q_1 = q_2 = q_3 = 100N$$

Nelle Figure 2.22-2.23 è riportato il confronto tra le soluzioni stazionarie ottenute con il solutore spettrale e quelle ottenute con il solutore FEM. In particolare in Fig. 2.22 sono mostrate le deflessioni (discontinue) di flap e lag mentre in Fig. 2.23 la torsione (discontinua), in termini di componenti nel riferimento locale indeformato \mathcal{R}_l .

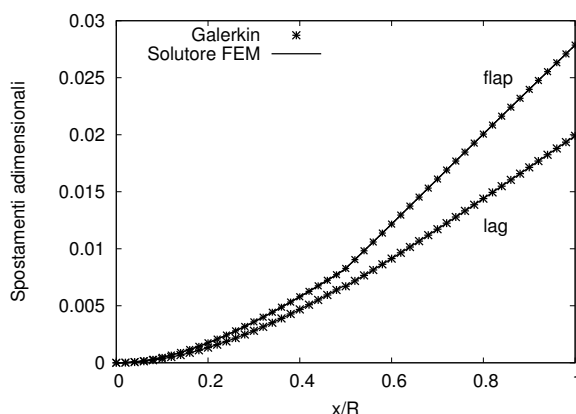


Figura 2.22: Pala non rotante, con freccia, soggetta a carico stazionario: deformazioni di flap e lag

Nonostante le deformate presentate nelle Figure 2.22-2.23 presentino delle discontinuità geometriche i risultati ottenuti con i due solutori sono praticamente coincidenti, dimostrando così la capacità del solutore spettrale sviluppato di modellare discontinuità geometriche in maniera analoga ad un solutore FEM. E' opportuno osservare come, sebbene siano state utilizzate funzioni di forma continue per le rappresentazione spettrale delle curvature di deformazione dell'asse elastico, si è riusciti a catturare correttamente le discontinuità delle corrispondenti deformazioni, grazie alla presenza della matrice \mathbf{A} nelle espressioni che legano la curvatura alle deformazioni descritte nella Sezione 2.2.1. Nella presente analisi con il solutore spettrale, sono state utilizzate 9 funzioni di forma per ogni grado di libertà.

Inoltre, a dimostrazione delle ottime capacità di convergenza del solutore spettrale anche in presenza di discontinuità geometriche della soluzione è stata eseguita un'analisi di convergenza rispetto al numero di funzioni di forma modali utilizzate. In Figura 2.24 è presentata tale analisi per la deformata di torsione, quella in cui la discontinuità è più evidente. Dalla Figura 2.24 si può osservare come le due soluzioni presentate siano quasi indistinguibili. Si noti che sono stati riportate solo le configurazioni estremali con 3 e 14 funzioni di forma per ragioni di chiarezza dell'immagine.

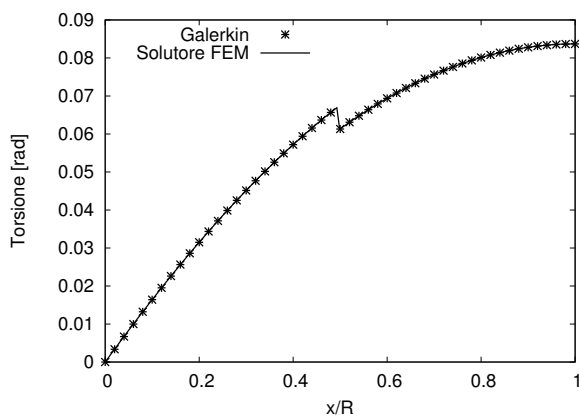


Figura 2.23: Pala con freccia, soggetta a carico stazionario: deformazione di torsione. $\Omega = 0$

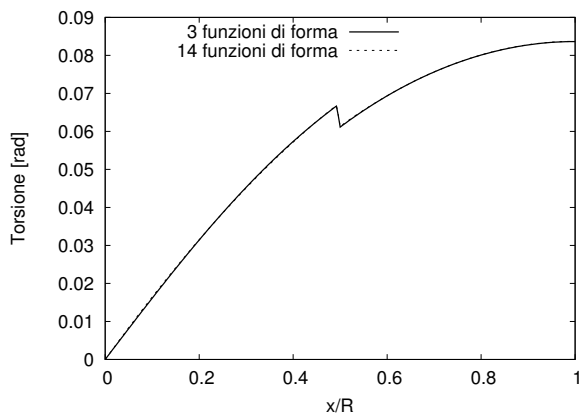


Figura 2.24: Convergenza della deformata di torsione rispetto al numero di funzioni di forma. $\Omega = 0$

Sulla medesima pala fin'ora considerata per il confronto con il solutore FEM, viene ora eseguita un'analisi sulle frequenze proprie di vibrazione in vacuo. Nella Figura 2.25 sono presentante le frequenze proprie (adimensionalizzate rispetto a Ω del caso rotante) per la pala non rotante, mentre nelle Figure 2.26 e 2.27 sono riportati, rispettivamente, i risultati relativi alla risposta all'equilibrio e all'analisi agli autovalori considerando una velocità di rotazione pari a $\Omega = 40.123 \text{ rad/s}$.

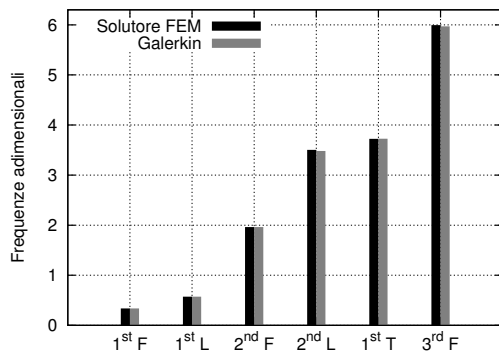


Figura 2.25: Frequenze naturali per pala con freccia. Confronto con il solutore FEM. $\Omega = 0$

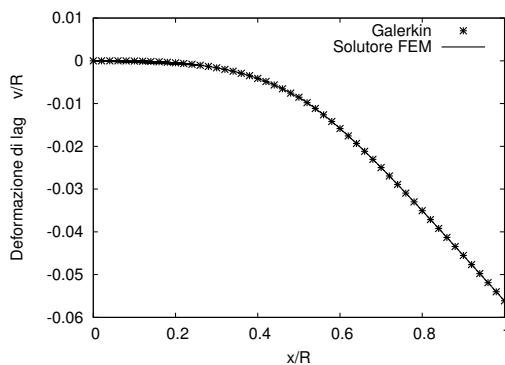


Figura 2.26: Risposta all'equilibrio per pala, con freccia. Confronto con il solutore FEM. $\Omega = 0$

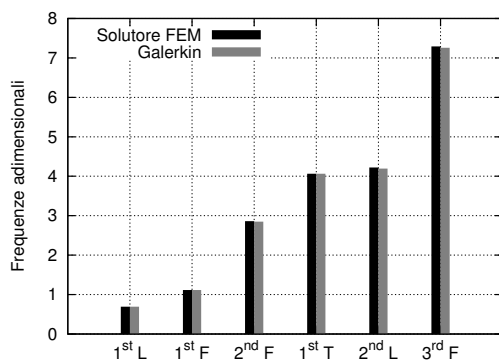


Figura 2.27: Frequenze naturali per pala, con freccia. Confronto con il solutore FEM. $\Omega = 40.123 \text{ rad/s}$

I confronti presentati nelle Figure 2.25-2.27, mostrano come ci sia ottima correlazione tra risultati ottenuti con il solutore spettrale e quelli ottenuti con il solutore FEM, sia per la risposta all'equilibrio che per le frequenze proprie di vibrazione.

2.5.2 Analisi in vacuo

Viene ora analizzata l'influenza dell'angolo di freccia al tip, Λ_s , e della rotazione sulle frequenze proprie di vibrazione in-vacuo, per la pala descritta nei Riferimenti [32, 13]. Tale confronto è già stato eseguito per la validazione del solutore FEM nella sezione 2.4, dove sono riportate le caratteristiche della pala in esame.

Nella Figura 2.28 è presentato l'andamento delle frequenze proprie in funzione della velocità di rotazione del rotore, mentre, in Figura 2.29 è mostrato l'andamento delle stesse al variare dell'angolo di freccia a $\Omega = 0$. Nella Figura 2.30, è stato invece considerato l'effetto della freccia per una pala rotante (ad una velocità di rotazione pari a $\Omega = 750 \text{ rpm}$ come indicato nei Riff. [32, 13]), in-vacuo, sempre rispetto alle frequenze proprie di vibrazione.

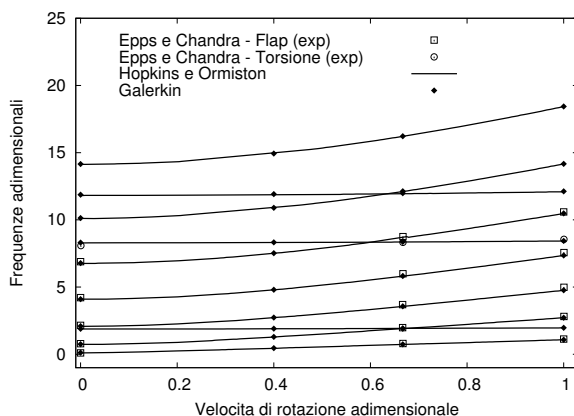


Figura 2.28: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto alla velocità di rotazione. $\Lambda_s = 0$

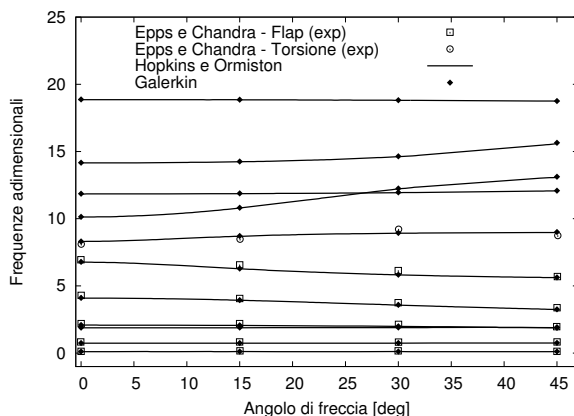


Figura 2.29: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto all'angolo di freccia. $\Omega = 0$

Dalle Figure 2.28-2.30 si può osservare come ci sia un'ottima correlazione tra i risultati ottenuti con il presente solutore ed i dati sia numerici che sperimentali riportati rispettivamente

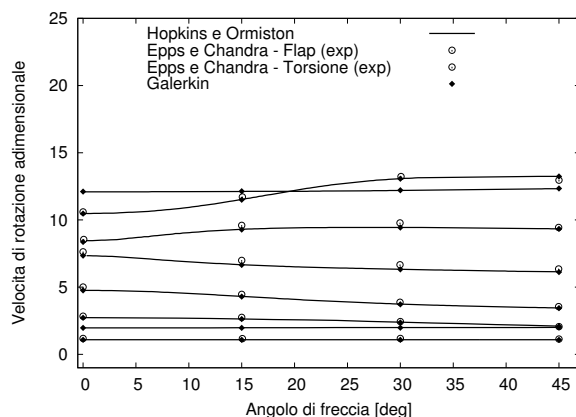


Figura 2.30: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto all'angolo di freccia. $\Omega = 750rpm$

nei Riferimenti [32] e [13], dimostrando, quindi, come il solutore spettrale sia in grado di predire correttamente gli effetti dovuti alla presenza di freccia al tip per una pala rotante, in vacuo, sulle frequenze proprie di vibrazione.

2.5.3 Analisi aeroelastica

Dopo aver validato con successo il solutore spettrale in assenza di aerodinamica, viene infine eseguita una serie di analisi aeroelastiche sia in hover che in volo avanzato.

Analisi in hover

La prima analisi presentata, consiste nel ripetere il confronto già eseguito per la validazione del solutore FEM, con i risultati numerici presentati nel Rif. [1], relativo alla valutazione dell'influenza degli angoli di freccia e diedro al tip sulla stabilità aeroelastica della pala. Il rotore utilizzato in questa analisi è quello già descritto nella Sezione 2.4.3 le cui caratteristiche sono riportate nella Tabella 2.3. Il tratto d'estremità di tale pala lunghezza pari al 10% del raggio è soggetto a freccia e diedro. Nelle Figure 2.31 e 2.32, sono presentati i risultati relativi all'andamento delle frequenze proprie e degli smorzamenti modali adimensionali rispetto all'angolo di freccia per la configurazione di riferimento, mentre nelle successive Figure 2.33 e 2.34 viene investigata l'influenza, sempre dell'angolo di freccia, sulla parte reale e immaginaria degli autovalori, considerando però una pala con rigidità di torsione modificata. In particolare, la configurazione analizzata è caratterizzata da una frequenza adimensionale del primo modo di torsione pari a $\omega_{t1} = 3.263/rev$, come indicato nel Riferimento [1]. Tale valore induce, instabilità aeroelastica dovuta alla coalescenza tra le frequenze del primo modo di torsione del secondo modo di flap.

Viene ora considerata l'influenza dell'angolo di diedro sugli autovalori della pala sia per la configurazione di riferimento che per una con la rigidità di torsione modificata (con una corrispondente frequenza pari a $\omega_{t1} = 4.34/rev$, come indicato nel Rif.[1]. In particolare, nelle Figure 2.35-2.36 e 2.37-2.38, sono presentati rispettivamente, gli andamenti delle frequenze proprie e degli smorzamenti modali adimensionali per la configurazioni di base e modificata. Anche in questo caso la rigidità di torsione è stata modificata per rendere la relativa ω_{t1} prossima alla frequenza propria del secondo modo di lag, così da indurre coalescenza di frequenze tra i due modi che risultano essere fortemente accoppiati.

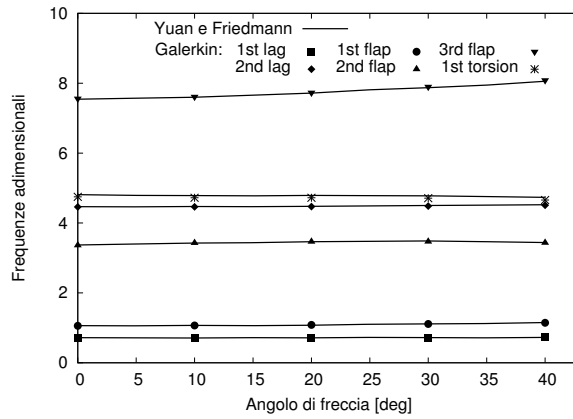


Figura 2.31: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto all'angolo di freccia. Confronto il Rif. [1] - Configurazione di riferimento

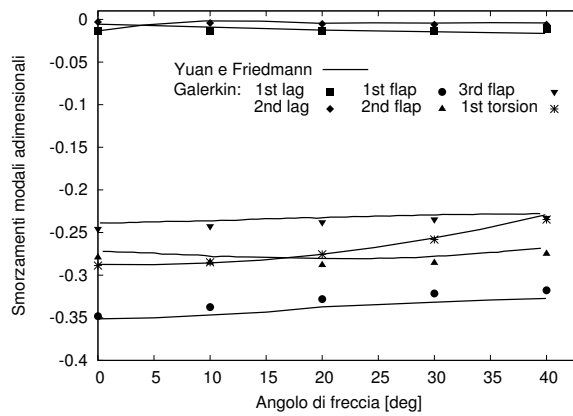


Figura 2.32: Andamento degli smorzamenti modali adimensionali rispetto all'angolo di freccia. Confronto il Rif. [1] - Configurazione di riferimento

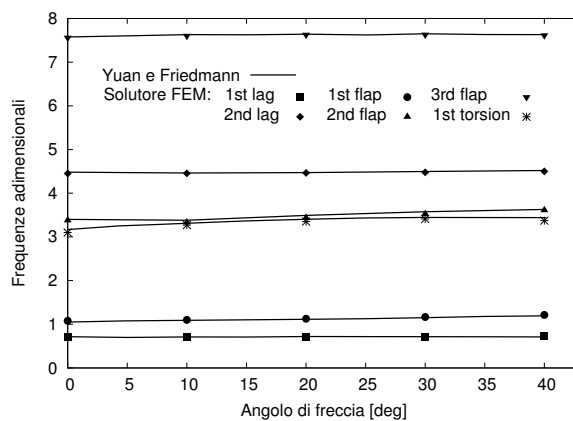


Figura 2.33: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto all'angolo di freccia. Confronto il Rif. [1] - Configurazione modificata ($\omega_{t1} = 3.263/rev$)

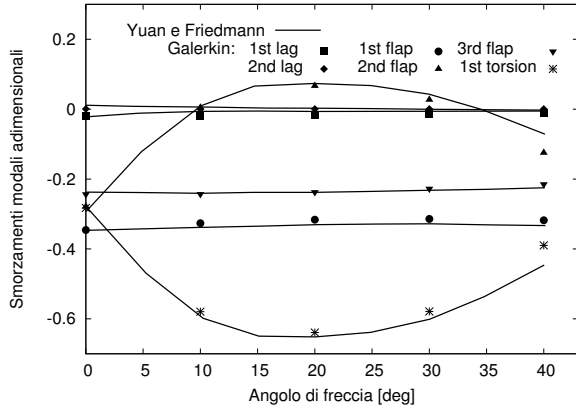


Figura 2.34: Andamento degli smorzamenti modali adimensionali rispetto all'angolo di freccia. Confronto il Rif. [1] - Configurazione modificata ($\omega_{t1} = 3.263/rev$)

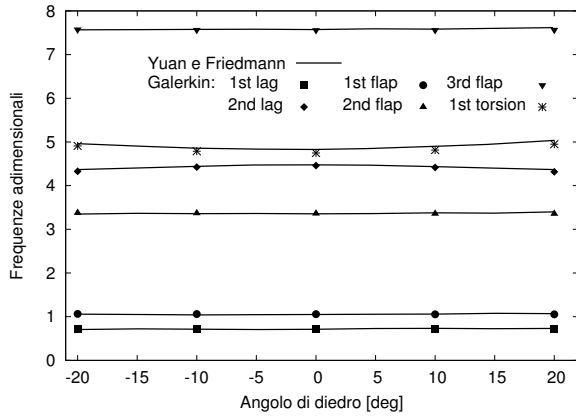


Figura 2.35: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto all'angolo di diedro. Confronto il Rif. [1] - Configurazione di riferimento

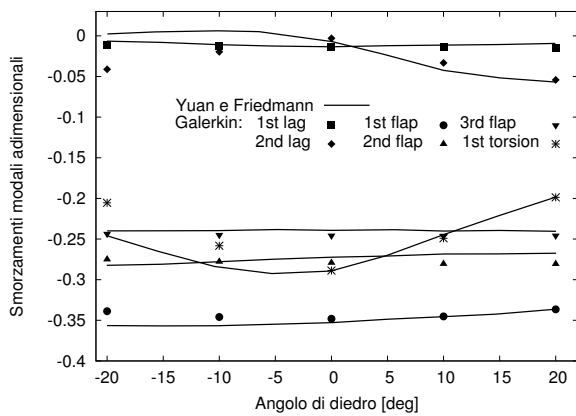


Figura 2.36: Andamento degli smorzamenti modali adimensionali rispetto all'angolo di diedro. Confronto il Rif. [1] - Configurazione di riferimento

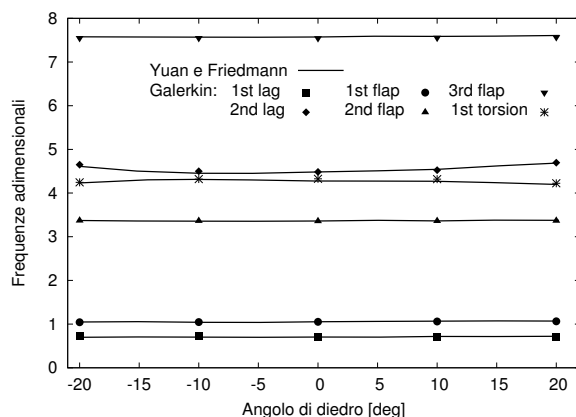


Figura 2.37: Andamento delle frequenze proprie adimensionali rispetto all'angolo di diedro. Confronto il Rif. [1] - Configurazione modificata ($\omega_{t1} = 4.34/rev$)

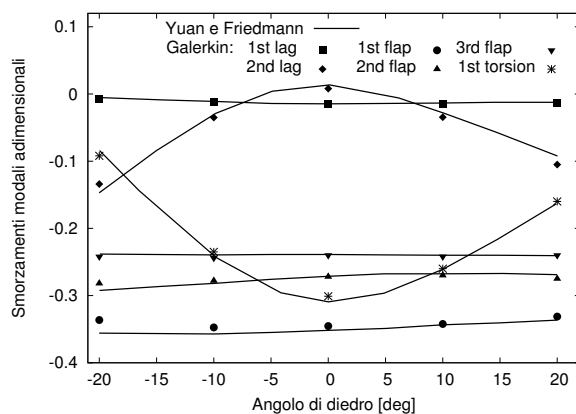


Figura 2.38: Andamento degli smorzamenti modali adimensionali rispetto all'angolo di diedro. Confronto il Rif. [1] - Configurazione modificata ($\omega_{t1} = 4.34/rev$)

Dalle Figure 2.31-2.38 si può osservare come ci sia una correlazione molto buona tra i risultati ottenuti con il solutore spettrale e quelli presentati nel Riferimento [1] per tutte le configurazioni esaminate. Qualche piccola discrepanza si riscontra su alcuni smorzamenti modali, che non inficia comunque la qualità complessiva dei risultati. Considerando che la valutazione di questi ultimi è molto sensibile ai modelli strutturali ed aerodinamici utilizzati come anche alle condizioni di trim considerate, tali differenze possono essere attribuite a piccole differenze tra i due modelli aeroelastici; queste poi, possono essere state amplificate dal forte accoppiamento tra i gradi di libertà in presenza di freccia e diedro al tip.

In generale, comunque, il solutore spettrale dimostra di essere in grado di predire con accuratezza l'influenza di freccia e diedro sulla stabilità aeroelastica anche nei casi con rigidità torsionale modificata, in cui si manifesta un'instabilità aeroelastica dovuta a coalescenza di frequenze.

Analisi in avanzamento

Viene infine eseguita la validazione del solutore spettrale per un rotore in volo di avanzamento. In particolare, in questa sezione viene presentata un'analisi aeroelastica, in termini di determina-

zione della risposta all'equilibrio e di calcolo dei carichi vibratori trasmessi al mozzo, del rotore soft-inplane descritto nel Rif. [1], in volo di avanzamento a $\mu = V_{ava}/\Omega R = 0.30$. Si tratta di un rotore quadripala con pale ad asse elastico rettilineo, le cui caratteristiche, similari a quelle del rotore di un Bo-105, sono riassunte nella Tabella 2.5. Questa è anche la configurazione di riferimento utilizzata nel processo di progettazione ottimizzata illustrato nella sezione successiva.

$EI_\eta/m_0\Omega^2 R^4$	0.0106	γ	5.5
$GJ/m_0\Omega^2 R^4$	0.001473	c/R	0.055
$EI_\zeta/m_0\Omega^2 R^4$	0.0301	$C_{l\alpha}$	6.25
$(k_A/k_m)^2$	0.5259	C_{D0}	0.01
k_{m1}/R	0.02	σ	0.07
k_{m2}/R	0.0	C_T	0.005

Tabella 2.5: Caratteristiche del rotore soft-inplane utilizzato per l'analisi aeroelastica in avanzamento

Non avendo a disposizione una procedura per la determinazione delle condizioni di trim del velivolo come quella utilizzata nel Rif. [1], per le analisi presentate successivamente, queste sono estrapolate da quelle riportate nel Rif. [1] per le condizioni di volo in esame. Inoltre, per uniformarsi al modello aeroelastico utilizzato nel [1], è stato utilizzato il medesimo approccio per l'inclusione del reverse flow. Questo, consiste nel considerare nulli portanza e momento aerodinamico e ad invertire il segno della resistenza nella regione soggetta ad esso.

Nella Figura 2.39 è riportata la risposta stazionaria, in termini di deflessioni di flap e lag e la torsione per la sezione all'estremità della pala, per la condizione di volo precedentemente descritta ($\mu = 0.30$). I risultati ottenuti con il solutore spettrale sono stati confrontati con quelli numerici presentati nei Riferimenti [1] e [33]. Tale confronto mostra come ci sia globalmente un buon accordo con i Riferimenti [1] e [33] anche se si riscontra qualche piccola differenza per il grado di libertà di torsione. Relativamente a tale grado di libertà, si nota comunque come discrepanze simili si hanno anche tra i Riferimenti [1] e [33]. La torsione è una variabile particolarmente sensibile ai termini non lineari per cui è del tutto accettabile che tra modelli simili, ma non identici, si riscontrino differenze di questo ordine di grandezza.

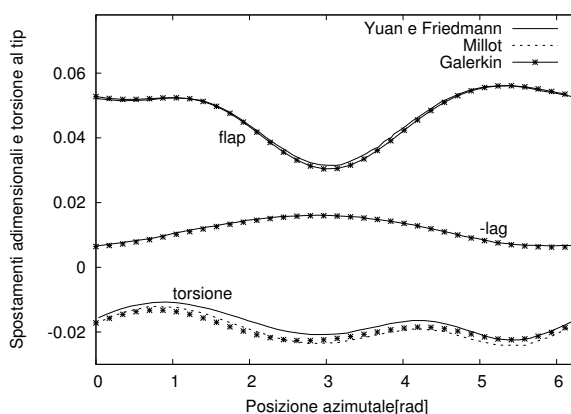


Figura 2.39: Deflessioni e torsione al tip. Rotore in avanzamento a $\mu = 0.30$ Confronto con i riferimenti [1] e [33]

Per la stessa configurazione, sono stati calcolati anche i carichi vibratori trasmessi dal rotore principale al mozzo. In particolare in Figura 2.40 sono presentate le ampiezze delle componenti

armoniche 4/rev dei carichi al mozzo nel riferimento hub non rotante. Dai confronti di Figura 2.40 con i Riferimenti [1] e [33], emergono differenze non trascurabili tra i tre modelli aeroelastici. Tali differenze sono presenti sia tra il solutore spettrale e i Riferimenti [1] e [33] che tra i Riferimenti stessi. Questa, è probabilmente dovuta alla elevata sensibilità dei carichi vibratori alla condizione di equilibrio del rotore rispetto alla quale essi sono calcolati. In generale comunque i risultati in termini di carichi vibratori ottenuti con il presente solutore possono essere ritenuti accettabili, almeno tanto quanto quelli dei Riferimenti [1] e [33].

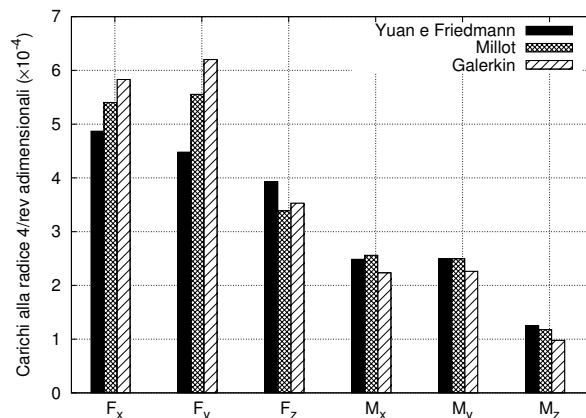


Figura 2.40: Carichi al mozzo nel riferimento hub non rotante. Ampiezza della componente armonica 4/rev

2.5.4 Analisi di una pala realizzata in materiale composito

Infine, per validare l'introduzione degli effetti di anisotropia dovuti all'utilizzo dei materiali compositi, è stata eseguita un'analisi delle frequenze proprie di vibrazione per la pala descritta nei Riferimenti [16] e [17]. Questa è una pala hingeless caratterizzata da un asse elastico rettilineo. Nelle analisi seguenti sono state considerate tre diverse configurazioni, corrispondenti a tre differenti layup denominati rispettivamente Baseline, Caso Simmetrico e Caso Antisimmetrico. In particolare, la pala Baseline è caratterizzata dall'assenza di accoppiamenti tra i gradi di libertà, mentre quella Simmetrica presenta principalmente un accoppiamento tra torsione e flessione avente fibre orientate nella stessa direzione per le superfici superiore ed inferiore. La terza, denominata antisimmetrica in quanto caratterizzata da fibre dirette in direzioni opposte tra superficie superiore ed inferiore, presenta un accoppiamento tra torsione ed estensione. Le caratteristiche generali del rotore e quelle strutturali specifiche per ciascuna configurazione sono riportate nelle Tabelle 2.6 e 2.7, rispettivamente.

R	4.9377 m	c	0.395 m
e_h/R	0.04	m	6.46 kg/m
k_{m_1}/R	0.001	k_{m_2}/R	0.004

Tabella 2.6: Caratteristiche generali della pala in composito

Le frequenze naturali di vibrazione per la pala rotante ($\Omega = 40.123 \text{ rad/s}$), in vacuo, calcolate con il solutore spettrale per le configurazioni Baseline, Simmetrica ed Antisimmetrica sono riportate, rispettivamente, nella Tabelle 2.8-2.10. Nelle stesse, sono riportati sotto la voce

	Baseline	Caso simmetrico (A)	Caso antisimmetrico
$EA/m\Omega^2 R^2$	378.1	378.1	378.1
$GA_y/m\Omega^2 R^2$	50.77	50.43	50.43
$GA_y/m\Omega^2 R^2$	25.85	25.85	25.85
$EI_\eta/m\Omega^2 R^4$	0.008345	0.008345	0.008345
$EI_\zeta/m\Omega^2 R^4$	0.023198	0.023198	0.023198
$EES_c/m\Omega^2 R^2$	0	-33.67	0
$EES_f/m\Omega^2 R^2$	0	0	0
$EET/m\Omega^2 R^3$	0	0	0-3589
$ELS_f/m\Omega^2 R^3$	0	0	-0.1794
$ELS_c/m\Omega^2 R^3$	0	0	0.1796
$ETF/m\Omega^2 R^4$	0	0	0
$ETC/m\Omega^2 R^4$	0	-0.01311	0

Tabella 2.7: Caratteristiche strutturali della pala in composito

UMARC (il nome del codice con cui sono stati ottenuti) anche i dati numerici riportati nei riferimenti [17, 16].

I risultati ottenuti con il solutore spettrale sono in ottimo accordo con i valori riportati nei riferimenti [16] e [17] per tutti i casi analizzati. Dunque, il presente solutore risulta essere in grado di predire con accuratezza gli effetti dovuti all'anisotropia del materiale sulle frequenze naturali di vibrazione della pala.

Modo	Galerkin	UMARC
lag 1	0.749	0.747
flap 1	1.146	1.146
flap 2	3.396	3.389
lag 2	4.338	4.315
torsion 1	4.590	4.590
flap 3	7.455	7.416
torsion 2	13.59	13.60

Tabella 2.8: Frequenze naturali adimensionali per il caso Baseline

Modo	Galerkin	UMARC
lag 1	0.749	0.747
flap 1	1.142	1.142
flap 2	3.352	3.346
lag 2	4.338	4.314
torsion 1	4.590	4.590
flap 3	7.230	7.265
torsion 2	13.61	13.62

Tabella 2.9: Frequenze naturali adimensionali per il caso Simmetrico

Modo	Galerkin	UMARC
lag 1	0.736	0.735
flap 1	1.141	1.141
flap 2	3.370	3.389
lag 2	4.255	4.244
torsion 1	4.370	4.367

Tabella 2.10: Frequenze naturali adimensionali per il caso Antisimmetrico

Capitolo 3

Progettazione preliminare ottimizzata di rotori a basso livello vibratorio

In questa sezione, viene descritta la procedura di progettazione preliminare ottimizzata di rotori di elicottero innovativi a basso livello vibratorio definita nel lavoro. Le variabili di progetto considerate nel processo di ottimizzazione sono le proprietà meccaniche/strutturali e la forma dell'asse elastico della pala, in quanto essendo questi in grado di influenzare sensibilmente il comportamento aeroelastico del rotore, risultano essere particolarmente efficaci per la minimizzazione dei carichi vibratorii trasmessi al mozzo.

La procedura di ottimizzazione è basata sull'utilizzo un algoritmo genetico a codifica binaria già sviluppato e recentemente applicato con successo nei Riferimenti [23] e [24]. La scelta di utilizzare tale metodo di ottimizzazione, deriva dal fatto che esso risulta particolarmente adatto per l'applicazione considerata, in quanto in grado di convergere ad un ottimo globale, anche in problemi multidisciplinari, non lineari, caratterizzati dalla presenza di diversi minimi locali. Inoltre gli algoritmi genetici garantiscono una buona efficienza computazionale in quanto intrinsecamente scalabili su più processori (la funzione obiettivo può essere calcolata contemporaneamente per diversi individui ad ogni iterazione in quanto ognuna è indipendente dall'altra), consentendo di sfruttare al meglio le caratteristiche tecnologiche dei computer di ultima generazione.

Per la determinazione dei carichi vibratorii trasmessi al mozzo del rotore necessari per il calcolo della funzione obiettivo, è stato utilizzato il solutore aeroelastico spettrale sviluppato nel presente lavoro e descritto nella Sezione 2.2. Esso risulta, infatti, essere particolarmente efficiente dal punto di vista computazionale e facilmente integrabile sia con il codice per l'ottimizzazione che con il solutore aerodinamico ad alta fedeltà successivamente utilizzato.

Come già anticipato nell'introduzione, la procedura di ottimizzazione sviluppata nel presente lavoro si distingue dalle altre presentate in letteratura, per l'utilizzo nella procedura di ottimizzazione, di un modello surrogato di velocità indotta. Esso risulta necessario per tener conto, in maniera accurata ma allo stesso tempo computazionalmente efficiente, dei complessi fenomeni interazionali, non stazionari, tra la scia del rotore e le pale, che influenzano fortemente (come si vedrà in seguito) i carichi vibratorii al mozzo. Lo stato dell'arte in letteratura (Riferimenti [2], [20],[18] consiste nell'utilizzo nel processo di ottimizzazione di modelli surrogati dell'intero solutore aeroelastico (che forniscono in funzione delle variabili di progetto direttamente i carichi vibratorii approssimati); tale approccio necessita, di numerosi punti di campionamento nel dominio delle variabili di progetto per la definizione di un buon surrogato. Tali punti, sono ottenuti utilizzando un solutore aerodinamico ad alta fedeltà che richiede un notevole costo computazionale.

L'approccio adottato nel presente lavoro consente, invece, di utilizzare un numero piuttosto ridotto di punti di campionamento nel dominio delle variabili di progetto rispetto a quan-

to convenzionalmente fatto, aumentando l'efficienza computazionale dell'intera procedura di ottimizzazione, pur portando a risultati piuttosto soddisfacenti.

3.1 L'algoritmo di ottimizzazione

Come accennato in precedenza, lo sviluppo dell'ottimizzatore non è parte del presente lavoro in quanto ne è stato utilizzato uno già esistente, il cui algoritmo è di tipo genetico a codifica binaria, ed è stato recentemente applicato con successo nei Riferimenti [23] e [24].

Gli algoritmi genetici, sono basati su tecniche di programmazione di tipo probabilistico che simulano il processo di evoluzione naturale per trovare la soluzione ottima di un dato problema (Rif. [34]). In questo processo, le potenziali soluzioni sono denominate individui e l'insieme degli individui è chiamato popolazione. Ciascun individuo è identificato da cromosomi che sono rappresentati attraverso una stringa composta da numeri binari, denominati geni, ordinati in un'opportuna sequenza. La procedura di ottimizzazione inizia da una popolazione interamente generata in maniera randomica e, ad ogni step del processo di evoluzione, per ogni individuo viene valutato il valore della funzione obiettivo scelta. La scelta delle dimensioni della popolazione in un algoritmo genetico è un punto cruciale in quanto può influenzarne sensibilmente l'efficienza. Una popolazione troppo piccola (composta da pochi individui) può infatti causare una scarsa copertura del dominio del problema, come anche a problemi di campionamento (si veda il Rif. [35]), mentre una popolazione troppo numerosa, comporta tempi di calcolo maggiori (talvolta eccessivi) a causa dell'elevato numero di valutazioni della funzione obiettivo necessarie. Nell'algoritmo utilizzato nel presente lavoro, seguendo quanto descritto nel Rif. [36] la stima delle dimensioni della popolazione è basata sulla variabilità delle funzioni obiettivo.

Nel processo di ottimizzazione i vincoli sono inclusi mediante l'utilizzo di una funzione di penalità quadratica interna, che incrementa la possibilità di considerare individui potenzialmente in grado di portare a buoni risultati nelle generazioni successive (si veda il Rif. [37]). In tal modo i vincoli sono imposti in maniera indiretta, trasformando un processo di ottimizzazione vincolato, in uno non vincolato.

Per la definizione di una nuova generazione, gli individui migliori selezionati in base ad un indice di prestazione valutato in base al valore della funzione obiettivo e dei vincoli. Nell'ottimizzatore utilizzato nel presente lavoro viene adottato un operatore di selezione a torneo. Esso è basato su una selezione randomica di quattro genitori, i quali sono comparati a coppie e successivamente gli individui vincitori di questa comparazione vengono selezionati come genitori di due figli mediante due operazioni indipendenti di crossover. Inoltre viene applicato un ulteriore crossover random di un singolo gene.

Una volta che l'accoppiamento è stato eseguito, viene applicata un'operazione di mutazione binaria uniforme per evitare una convergenza prematura verso un minimo locale. Tale operatore modifica uno o più caratteri binari (detti geni) nel cromosoma, invertendoli con una determinata probabilità. Il numero delle variazioni di geni e cromosomi durante il processo di evoluzione viene controllato mediante un fattore di probabilità di mutazione definito dall'utente, che viene diminuito durante il processo di ottimizzazione per ridurre le mutazioni casuali di geni quando la soluzione inizia a convergere verso l'ottimo.

Per prevenire possibili effetti negativi del processo di evoluzione e convergere, quindi, verso l'ottimo, ad ogni passo (generazione di una nuova popolazione) i migliori individui (in numero definito dall'utente in percentuale rispetto alla dimensione della popolazione) vengono selezionati per entrare a far parte di un gruppo elitario che rimane invariato nella generazione successiva. Tale tecnica migliora le proprietà di convergenza del processo di ottimizzazione (si vedano i Riferimenti [38] e [39]). Il processo di ottimizzazione viene iterato finché la similarità tra i cromosomi non raggiunge un valore definito dall'utente (si veda il Rif. [40]).

Tutti risultati numerici presentati nella sezione 3.4 sono stati ottenuti rappresentando ogni individuo della popolazione, mediante una stringa di cromosomi costituita da 24 cifre, consentendo una risoluzione piuttosto accurata del dominio delle variabili di progetto. Inoltre, il processo di ottimizzazione viene iterato finché non vi è un'affinità dell'85% tra i cromosomi degli individui di una popolazione, oppure, se viene raggiunto il numero massimo di popolazioni che è fissato a 50.

3.2 Definizione del processo di ottimizzazione

Viene ora descritto in dettaglio il processo di ottimizzazione, ovvero la scelta delle variabili di progetto, dei vincoli e della funzione obiettivo.

3.2.1 Le variabili di progetto

Come accennato in precedenza, nel presente processo di ottimizzazione, l'obiettivo di riduzione dei carichi vibratorii trasmessi al mozzo del rotore è perseguito utilizzando come variabili di progetto le proprietà meccaniche/strutturali, inerziali come anche la geometria dell'asse elastico della pala, in quanto efficaci al raggiungimento dell'obiettivo preposto come dimostrato da numerosi lavori disponibili in letteratura (si vedano ad esempio i Riferimenti [1], [18] e [3]). In particolare, le variabili di progetto considerate sono le seguenti: le rigidità flessionali e torsionali, la massa di sezione e gli angoli di freccia e di diedro applicati al tratto estremo della pala di lunghezza pari al 15% del raggio totale del rotore.

Inoltre, è stato imposto per ciascuna variabile un intervallo di variazione rispetto al valore assunto nella configurazione di riferimento. I limiti superiori ed inferiori di ciascuna variabile sono riportati nella Tabella 3.1 in cui con Λ_S si indica l'angolo di freccia, positivo in senso orario (la freccia per la pala avanzante è rivolta indietro), e con Λ_A l'angolo di diedro, positivo in senso orario (il diedro per la pala avanzante è rivolto in basso). La configurazione di riferimento considerata nel presente processo di ottimizzazione è quella precedentemente descritta durante la validazione del solutore spettrale per un rotore in avanzamento e riportata in Tabella 2.5.

limite inferiore	variabile	limite superiore
-30%	EI_η, EI_ζ, GJ	+30%
-20%	m	+20%
-20 deg	Λ_S	+30 deg
-10 deg	Λ_A	+15 deg

Tabella 3.1: Intervallo di variazione delle variabili di progetto

3.2.2 Vincoli

La variazione delle caratteristiche inerziali, strutturali e geometriche della pala per la riduzione delle vibrazioni al mozzo del rotore, influenza anche la stabilità aeroelastica e le condizioni di trim dello stesso. Sono quindi stati imposti nel processo di ottimizzazione dei vincoli riguardanti, appunto, la stabilità aeroelastica e il trim del rotore. In particolare l'equilibrio del rotore è stato imposto calcolando, ad ogni valutazione della funzione obiettivo, i parametri di trim (i passi ciclici e il collettivo) mediante l'implementazione di un solutore accoppiato a quello per l'analisi aeroelastica del rotore. La condizione di equilibrio adottata è solitamente denominata momentum trim e corrisponde all'imporre l'equilibrio del solo rotore, ovvero a un bilanciamento tra spinta verticale e peso del velivolo e ad imporre nulle le componenti nel piano del rotore del

momento risultante al mozzo. La stabilità aeroelastica, viene invece garantita imponendo un valore minimo dello smorzamento di ciascun autovalore. Per il rotore in esame si è osservato che una condizione critica per la stabilità è il volo in hover, per cui i vincoli sulla stabilità imposti sono relativi sia alle condizioni di progetto che alla condizione di hover.

3.2.3 Funzione obiettivo

La minimizzazione dei carichi vibratori al mozzo di un rotore è un problema di ottimizzazione multi-obiettivo.

Un rotore con N_b pale trasmette al mozzo principalmente forze e momenti con pulsazione $N_b\Omega$, dove Ω è la velocità angolare del rotore. Quindi per la riduzione delle vibrazioni di un rotore quadripala (come quello oggetto della presente procedura di ottimizzazione), l'obiettivo è quello di minimizzare le componenti armoniche di pulsazione 4Ω (che adimensionalizzate verranno in seguito indicate come $4/rev$) trasmesse al mozzo del rotore. Un generico problema di ottimizzazione multi-obiettivo non vincolata può essere scritto come

$$Min : F(x) = [F_1(\mathbf{x}), \dots, F_i(\mathbf{x}), \dots, F_N(\mathbf{x})]$$

con

$$\mathbf{x}^I \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x}^S$$

dove \mathbf{x} è il vettore che racchiude le variabili di progetto, e gli apici I e S, sono riferiti ai relativi limiti inferiori e superiori rispettivamente.

Il problema in esame in questo lavoro, relativo alla riduzione delle vibrazioni trasmesse al mozzo del rotore, consiste in un problema con sei funzioni obiettivo che può essere formalmente scritto come

$$Min : J(x) = [F_x(\mathbf{x}), F_y(\mathbf{x}), F_z(\mathbf{x}), M_x(\mathbf{x}), M_y(\mathbf{x}), M_z(\mathbf{x})]$$

Un metodo per risolvere problemi di ottimizzazione multi-obiettivo, è quello di minimizzare la distanza tra il potenziale punto di ottimo e un punto detto punto ideale ([41]). La distanza Euclidea $N(x)$ tra il valore attuale della funzione obiettivo e il punto ideale è

$$N(\mathbf{x}) = |F(\mathbf{x}) - J^0|$$

dove J^0 è il vettore contenente i punti ideali per il vettore $J(\mathbf{x})$. Nel problema in oggetto, la distanza Euclidea $N(\mathbf{x})$ per forze e momenti sarà

$$N_1 = \sqrt{(F_x - F_x^0)^2 + (F_y - F_y^0)^2 + (F_z - F_z^0)^2}$$

$$N_2 = \sqrt{(M_x - M_x^0)^2 + (M_y - M_y^0)^2 + (M_z - M_z^0)^2}$$

Le norme di forze e momenti vengono poi sommate con pesi η_1 e η_2 per essere condensate in un'unica funzione obiettivo J

$$J = \eta_1 N_1 + \eta_2 N_2$$

Solitamente, il punto ideale di forze e momenti viene posto a zero per procedure di ottimizzazione finalizzate alla riduzione delle vibrazioni, ed i pesi η_1 e η_2 sono uguali per forze e momenti. La funzione obiettivo sarà quindi

$$J = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} + \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad (3.1)$$

Tale funzione obiettivo è quella comunemente utilizzata in letteratura per questo tipo di applicazioni.

3.3 Definizione del modello surrogato di velocità indotta

Anticipando il risultato che i modelli di velocità indotta analitici (Drees) sono risultati del tutto inadeguati per il calcolo dei carichi vibratori nel processo di ottimizzazione, in questo lavoro si è scelto di basare il calcolo della velocità indotta su un solutore che implementa una formulazione tridimensionale potenziale, non stazionaria, con scia libera risolta con metodo agli elementi di contorno (BEM), particolarmente adatta per applicazioni elicotteristiche in presenza di BVI (si veda il Rif. [25]). L'utilizzo di tale solutore, consente di considerare con accuratezza fenomeni come l'interazione pala-scia (meglio nota come blade-vortex-interaction o BVI) che ha ruolo fondamentale nella generazione dei carichi vibratori. Tali fenomeni, vengono completamente trascurati quando si utilizzano modelli analitici di velocità indotta. D'altra parte, l'utilizzo diretto del solutore BEM nel processo di ottimizzazione, porterebbe ad un aumento eccessivo dei tempi di calcolo. Si è scelto, quindi, di utilizzare nel processo di ottimizzazione un modello surrogato della velocità indotta esatta calcolata con il solutore aerodinamico ad alta fedeltà. Tale approccio consente di coniugare l'esigenza di un solutore aerodinamico accurato con l'elevata efficienza computazionale richiesta dal processo di ottimizzazione.

Tale modello surrogato, è basato su un'interpolazione lineare di un database di velocità indotte calcolate con il solutore BEM, per un numero limitato di configurazioni ricadenti nel dominio di definizione del problema di ottimizzazione. In particolare è stato adottato un set di 9 punti di campionamento che differiscono per i valori degli angoli di freccia e diedro (da analisi preliminari si è notato come la velocità indotta sia scarsamente influenzata dalle proprietà meccaniche strutturali della pala).

3.4 Risultati numerici

In questa sezione, sono presentate le strategie adottate e la loro relativa efficacia, la progettazione ottimizzata di rotori innovati a basso livello vibratorio. In particolare, sono state analizzati i seguenti tre aspetti: (i) l'efficacia della procedura di ottimizzazione considerando sia un solo punto che più punti di progetto (single-point e multi-point), (ii) l'efficacia dell'introduzione del modello surrogato di velocità indotta precedentemente descritto per il calcolo delle forzanti aerodinamiche nel processo di ottimizzazione, e (iii) una valutazione della robustezza della progettazione ottimizzata rispetto a condizioni di volo fuori progetto.

In tutte le analisi presentate in questa sezione, sono state eseguite considerando nove funzioni di forma per la rappresentazione modale di ciascun grado di libertà, e 5 armoniche per la descrizione in frequenza di ciascuna variabile (necessaria per l'harmonic balance). Tali parametri garantiscono che i risultati ottenuti siano praticamente a convergenza.

3.4.1 Ottimizzazione single-point

Inizialmente è stata adottata una strategia di ottimizzazione single-point, in cui viene considerato un singolo punto di progetto corrispondente ad un rapporto di avanzamento $\mu = 0.30$. Inoltre, il modello di Drees (Rif. [29]) è stato considerato come primo candidato per il calcolo della velocità indotta nel solutore aeroelastico spettrale, grazie alla sua elevata efficienza computazionale, necessaria nella procedura di ottimizzazione. Tale modello è stato ampiamente utilizzato in passato (Rif. [1] e Rif. [3]) anche se negli ultimi anni è emerso che esso risulti inadeguato per questo tipo di applicazioni (come verrà riscontrato anche nel presente lavoro).

Il processo di ottimizzazione così definito, porta ad una riduzione della funzione obiettivo pari a circa l'84% rispetto al suo valore per la configurazione baseline. Le caratteristiche della pala corrispondente al design ottimo sono riportate in Tabella 3.2. Rispetto alla configurazione

baseline, questa pala è caratterizzata da un incremento della massa e delle rigidzze flessionali, da rigidzza torsionale inferiore, da un angolo di freccia (indietro) di $19.3\ deg$ e da un angolo di diedro (in basso) di $4.2\ deg$.

Tabella 3.2: Variabili di progetto delle configurazioni ottime

	Baseline	Single-point (Drees)	Single-point (surrogato)	Double-point (surrogato)
$EI_\eta/m_0\Omega^2R^4$	0.01060	0.01283	0.0085738	0.00898
$EI_\zeta/m_0\Omega^2R^4$	0.03010	0.03514	0.02948	0.02570
$GJ/m_0\Omega^2R^4$	0.00147	0.00104	0.00113	0.00188
m/m_0	1.0	1.053	1.188	1.033
$\Lambda_S\ (deg)$	0.0	19.29	23.7	18.2
$\Lambda_A\ (deg)$	0.0	4.24	-4.4	-4.1

In Figura 3.1, è riportato un confronto tra le singole componenti dei carichi vibratori relativi alle configurazione baseline e a quella ottima, valutate con il medesimo solutore aeroelastico utilizzato nel processo di ottimizzazione (modello di velocità indotta di Drees). Da Figura 3.1 si può osservare come sia stata ottenuta una significativa riduzione di tutti i carichi vibratori che variano tra il 60% e l'85%.

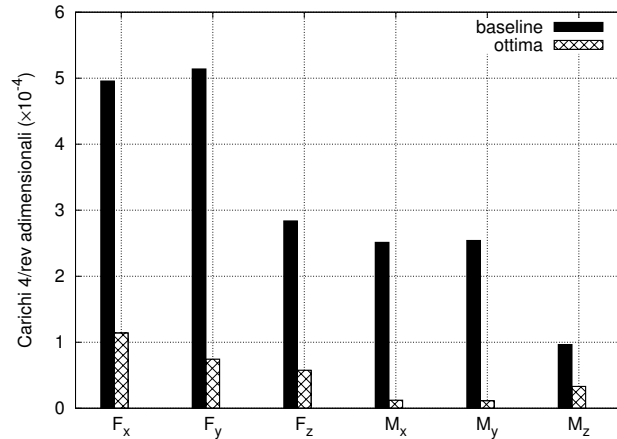


Figura 3.1: Carichi vibratori 4/rev: configurazione ottima vs baseline a $\mu = 0.30$. Velocità indotta Drees

La configurazione ottimale viene ora verificata utilizzando un modello aerodinamico più accurato di quello utilizzato nella fase di sintesi. In particolare, per la verifica viene stato utilizzato il solutore BEM con scia libera precedentemente menzionato. Tale analisi conferma che la configurazione ottima rispetta il vincolo di stabilità aeroelastica, ma la riduzione della funzione obiettivo risulta essere decisamente inferiore rispetto a quanto predetto nella fase di progettazione, e pari a circa il 5%. Per comprendere meglio le cause di tale deterioramento dei risultati, in Figura 3.2 vengono presentate le singole componenti dei carichi vibratori ottenuti con il modello aerodinamico ad alta fedeltà per le configurazioni baseline ed ottima. Da tali risultati, si evince chiaramente che i carichi vibratori sono estremamente sensibili al modello aerodinamico utilizzato nella loro valutazione ed inoltre, che quelli ottenuti con il solutore BEM risultano essere di ampiezze decisamente maggiori. In particolare l'ampiezza della componente verticale della risultante delle forze 4/rev risulta essere aumentata significativamente rispetto al

suo valore per la configurazione di riferimento, mentre quelle delle componenti della forza nel piano del rotore F_x e del momento torcente M_z rimangono praticamente invariate.

Dall'analisi di questi risultati si evince che la sensibilità dei carichi vibratori rispetto alle variabili di progetto considerando i due modelli di velocità indotta è molto diversa, se non addirittura opposta in qualche caso. Questo dimostra che il modello di velocità indotta analitico di Drees risulta essere inadeguato per applicazioni di progettazione ottimizzata, la quale richiede di utilizzare modelli aerodinamici più accurati per il calcolo dei carichi vibratori.

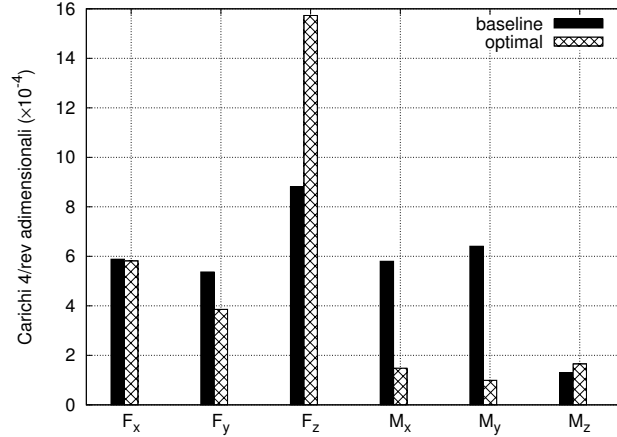


Figura 3.2: Carichi vibratori 4/rev: configurazione ottima *vs* baseline a $\mu = 0.30 = 0.3$. Verifica con velocità indotta BEM

La procedura di progettazione ottimizzata è stata ripetuta per la medesima condizione di progetto, utilizzando per il calcolo dei carichi vibratori, il modello surrogato di velocità indotta descritto nella sezione 3.3.

Usando tale modello surrogato di velocità indotta nel processo di ottimizzazione, è stata ottenuta la configurazione ottima riportata in Tabella 3.2, caratterizzata da un decremento della massa e delle rigidzze flessionali, rispetto alla configurazione di riferimento e da un angolo di diedro che porta il tip della pala ad ruotare verso l'alto (diversamente da quanto accadeva con il modello di velocità indotta di Drees). In questo caso, nel processo di sintesi (progettazione) è stata predetta una riduzione della funzione obiettivo del 74%. Nella verifica della configurazione ottima individuata, eseguita utilizzando il modello aerodinamico ad alta fedeltà BEM, sono stati ottenuti risultati soddisfacenti, a pari ad riduzione significativa della funzione obiettivo di circa il 63% rispetto al valore della configurazione baseline.

In Figura 3.3, sono presentati i confronti tra i carichi vibratori relativi a (i) il rotore baseline (calcolati utilizzando il solutore BEM), (ii) la configurazione ottimizzata calcolati durante il processo di ottimizzazione (sintesi), quindi utilizzando il modello surrogato di velocità indotta, e (iii) la configurazione ottimizzata durante la fase di verifica (calcolati utilizzando il solutore BEM). I risultati presentati, dimostrano la validità della strategia implementata: i carichi vibratori ottenuti nella fasi di sintesi e verifica sono abbastanza simili, presentando modeste differenze solo per la predizione della forza nel piano F_y , della forza fuori dal piano, F_z , e per il momento torcente M_z .

Cosa ancora più importante della correlazione tra i valori dei singoli carichi, tali risultati dimostrano come la sensibilità rispetto alle variabili di progetto del solutore aeroelastico utilizzando il modello surrogato di velocità indotta, sia molto simile a quella che si ha utilizzando il solutore aerodinamico ad alta fedeltà, rendendolo così adatto per applicazioni di progettazione aeroelastica ottimizzata di rotori.

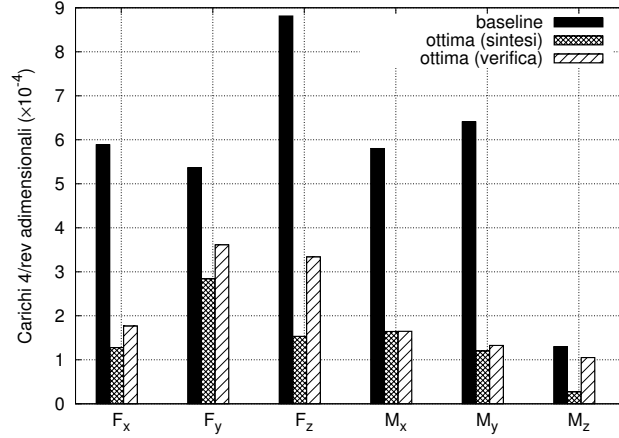


Figura 3.3: Carichi vibratori 4/rev: configurazione ottima *vs* baseline a $\mu = 0.30 = 0.3$. Ottimizzazione con modello surrogato di velocità indotta

Nella fase di verifica, viene inoltre confermato il rispetto dei vincoli di stabilità aeroelastica imposti nel processo di ottimizzazione.

Nella Figura 3.4 è riportata la rappresentazione nel piano complesso dei primi autovalori sia della pala baseline che della pala ottimizzata. Tale rappresentazione è mostrata solamente per questa configurazione (per la condizione di progetto $\mu = 0.30$), in quanto sono tutte molto simili tra loro e riportarne altre non aggiunge informazioni al lavoro. In questa Figura si può notare come vi siano due autovalori a frequenze molto vicine tra loro, che subiscono un forte spostamento del valore degli smorzamenti: uno diviene estremamente stabile mentre l'altro si avvicina pericolosamente al limite di stabilità. I due autovalori sono relativi al primo modo di torsione e al secondo modo di flap rispettivamente, ed essendo tali modi fortemente accoppiati tra loro a causa della presenza della freccia al tip, si verifica la coalescenza di frequenze già osservata nelle Figure 2.17 e 2.34.

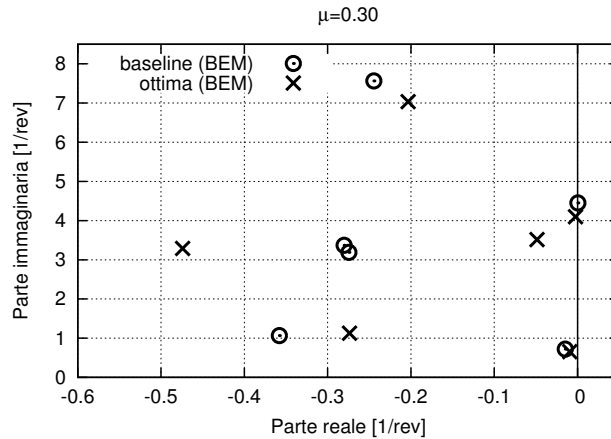


Figura 3.4: Rappresentazione nel piano complesso degli autovalori nella condizione di progetto

Inoltre, sono stati monitorati i carichi armonici 1/rev e 2/rev alla radice della pala nel riferimento rotante solidale con la pala, in quanto, essi non contribuiscono ai carichi al mozzo e quindi alla funzione obiettivo. Tali carichi sono importanti in quanto, strettamente legati alla

resistenza a fatica della pala stessa. Quelli calcolati nella fase di verifica sia per la configurazione baseline che per quella ottimizzata, sono riportati in Figura 3.5. Si può osservare come tali carichi risultino scarsamente influenzati, se non addirittura ridotti, dalla procedura di ottimizzazione, ad eccezione della forza verticale 2/rev che subisce un incremento di circa il 25%. Tale effetto, seppur indesiderato, può essere considerato accettabile.

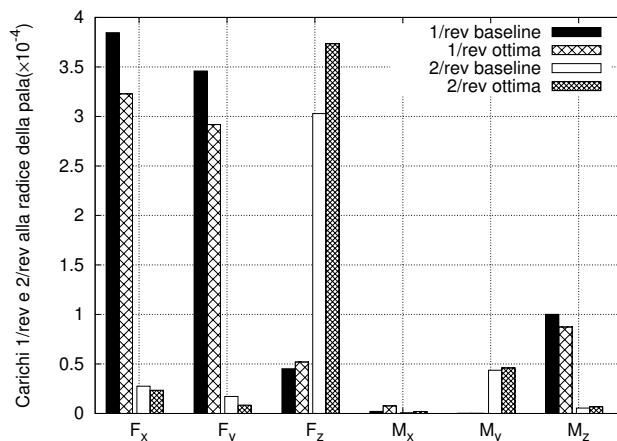


Figura 3.5: Carichi adimensionali alla radice della pala di armonica 1/rev e 2/rev. Condizione di progetto $\mu = 0.30$

Viene ora valutata la robustezza della procedura di progettazione ottimizzata rispetto alle condizioni di volo fuori progetto. In particolare, vengono valutati i carichi vibratori e la stabilità aeroelastica della pala ottimizzata single-point per un rapporto di avanzamento $\mu = 0.15$. Anche per questa condizione di volo la stabilità aeroelastica è garantita, mentre relativamente ai carichi vibratori 4/rev trasmessi al mozzo, sebbene si riscontri una riduzione del 32% circa della funzione obiettivo, la forza laterale F_y ed il momento torcente M_z 4/rev risultano aumentate significativamente rispetto a quelli della configurazione baseline, come mostrato in Figura 3.6. Inoltre, è interessante notare come per questa condizione di volo, le ampiezze dei carichi vibratori siano sensibilmente maggiori rispetto a quelle che si hanno a $\mu = 0.30$. La motivazione di

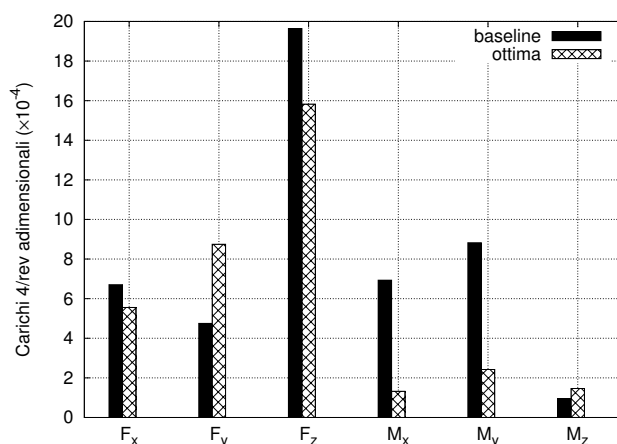


Figura 3.6: Carichi vibratori 4/rev adimensionali in condizioni fuori progetto, $\mu = 0.15$. Configurazione baseline vs ottima

questo, è rappresentata nelle Figure 3.7(a)-3.7(b). In esse, è mostrato l'andamento sul giro della distribuzione di portanza sul disco rotorico per la configurazione baseline, sia nella condizione di progetto che in quella fuori progetto esaminate, rispettivamente. Tali figure, mostrano una distribuzione più irregolare, sia nello spazio che nel tempo, della portanza di sezione per la condizione di volo fuori progetto a causa della presenza di una forte interazione pala-scia. Questo effetto, è confermato anche dalle Figure 3.8(a)-3.8(b), in cui è presentata una rappresentazione isometrica della geometria della scia ottenuta con il solutore BEM per le due condizioni di volo in esame. In particolare, in Figura 3.8(b) si vede chiaramente come nel volo a bassa velocità ($\mu = 0.15$), la scia rimanga molto prossima al rotore causando una forte interazione scia-pala sia per il lato avanzante che retrocedente del rotore.

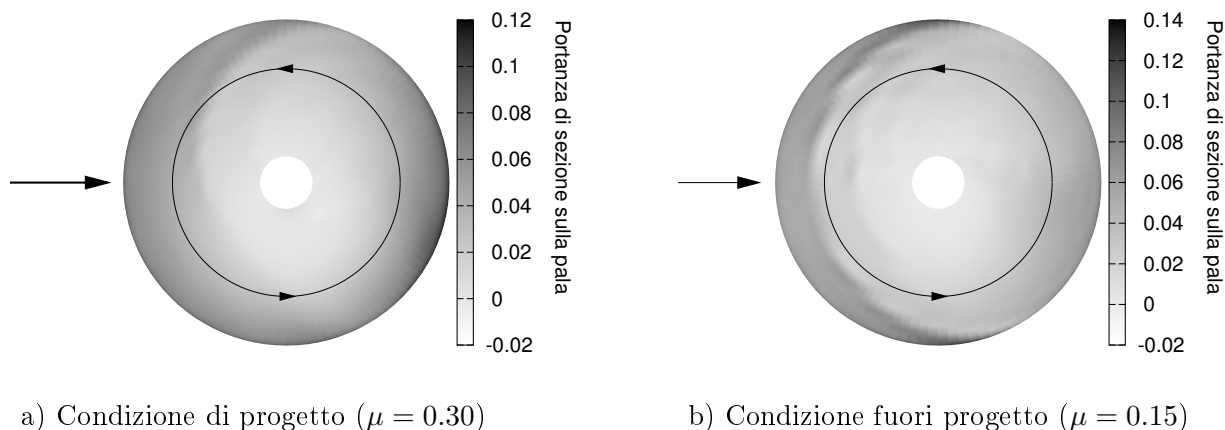


Figura 3.7: Andamento sul giro della portanza di sezione

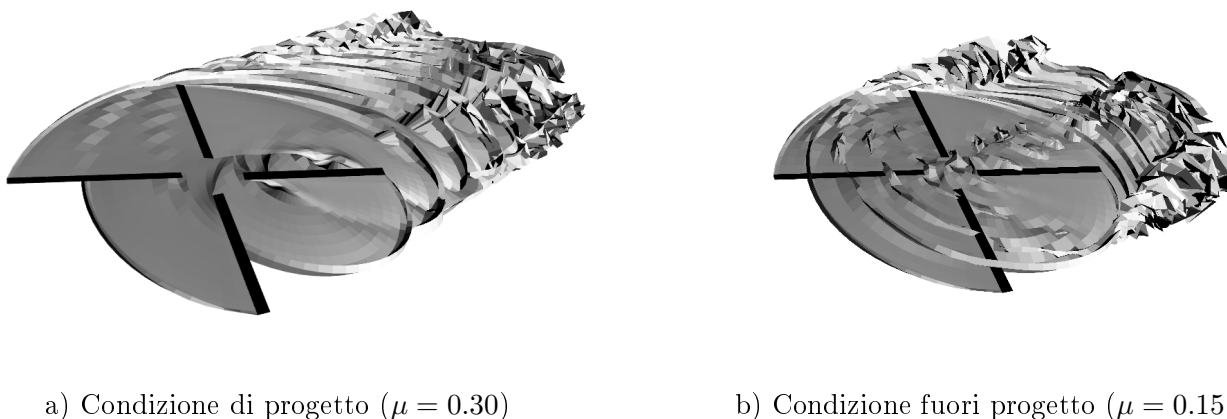


Figura 3.8: Rappresentazione isometrica della geometria della scia libera del rotore

La constatazione che a basse velocità di avanzamento ($\mu = 0.15$) vi sono dei carichi vibratori sensibilmente maggiori rispetto al configurazione di progetto, combinata con il fatto che, per la condizione di volo fuori progetto esaminata, la configurazione ottima di pala ottenuta è caratterizzata livelli vibratori non soddisfacenti, porta all'applicazione di una strategia di ottimizzazione a più punti di progetto. L'obiettivo di tale approccio, che consiste nell'includere più condizioni di volo nel processo di ottimizzazione, è quello di ampliare la porzione dell'involuppo

di volo in cui la progettazione ottimizzata risulta essere efficace in termini di riduzione delle vibrazioni.

3.4.2 Ottimizzazione double-point

Considerando i risultati ottenuti nel caso single-point, viene ora eseguita un'ottimizzazione double-point, in cui la funzione obiettivo è ottenuta dalla combinazione dei carichi vibratori relativi a due differenti condizioni di volo di progetto, corrispondenti rispettivamente a $\mu = 0.15$ e $\mu = 0.30$. In particolare, essa è ottenuta come combinazione lineare pesata (in realtà i pesi sono stati messi uguali e pari a 0.5) delle funzioni obiettivo delle due singole condizioni di volo considerate, definite nella 3.2.3 ed indicate con J_i .

$$\hat{J} = w_1 J_1 + w_2 J_2 = \sum_{i=1}^2 w_i \left[(F_x^2 + F_y^2 + F_z^2)_i^{1/2} + (M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)_i^{1/2} \right] \quad (3.2)$$

Le variabili di progetto considerate in questo caso sono le medesime dell'approccio single-point, come anche la configurazione di riferimento.

Anche in questo caso nella fase di progettazione (sintesi) è stato utilizzato il modello surrogato di velocità indotta, costruito utilizzando un database di 9 configurazioni per ciascuna condizione di volo.

La procedura di ottimizzazione così definita ha portato ad una riduzione della funzione obiettivo \hat{J} di circa il 64%. Le variabili di progetto della nuova configurazione ottima trovata che sono riportate in Tabella 3.2. Essa è caratterizzata da una riduzione delle rigidità flessionali rispetto al valore di riferimento, e da un aumento di quella torsionale e della massa di sezione. Inoltre pala ottimizzata presenta angolo di freccia (all'indietro) di circa 18 *deg* ed un angolo di diedro (in alto) di circa 4 *deg*.

Nelle Figure 3.9-3.10 sono presentati i carichi vibratori 4/rev al mozzo del rotore per le due condizioni di volo di progetto, $\mu = 0.15$ e $\mu = 0.30$ rispettivamente.

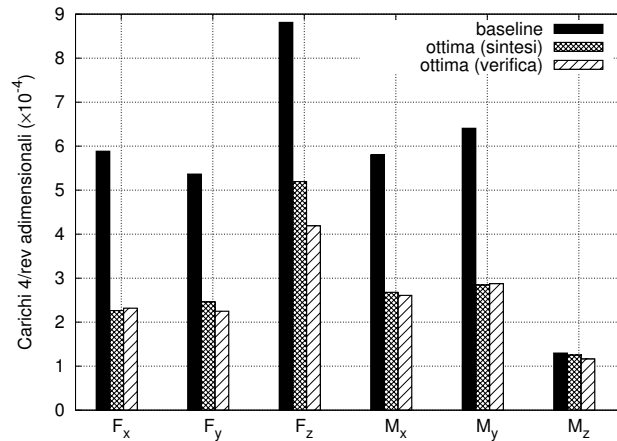


Figura 3.9: Carichi vibratori 4/rev adimensionali in condizioni di progetto, $\mu = 0.30$. Configurazione baseline *vs* ottima

I carichi vibratori, nel complesso risultano significativamente ridotti (come dimostrato dalla riduzione della funzione obiettivo), sebbene la forza nel piano F_y ed il momento torcete M_z risultino leggermente aumentati rispetto al loro valore per la configurazione di riferimento a

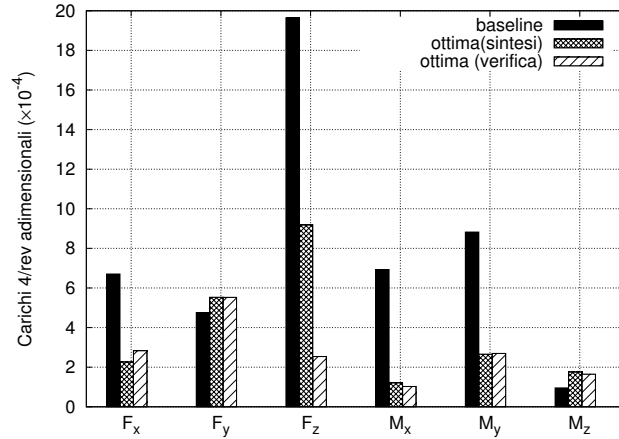


Figura 3.10: Carichi vibratori 4/rev adimensionali in condizioni di progetto, $\mu = 0.15$. Configurazione baseline *vs* ottima

$\mu = 0.15$ (Fig. 3.10). Considerando, comunque, che questi carichi sono di ampiezza modesta, la qualità complessiva dei risultati ottenuti può essere considerata soddisfacente.

Nelle figure presentate, viene inoltre mostrata la verifica dei risultati ottenuti nella fase di progettazione (o sintesi, in cui viene utilizzato il modello surrogato di velocità indotta) mediante l'utilizzo del modello aerodinamico ad alta fedeltà. I carichi vibratori ottenuti nella fase di sintesi, risultano essere simili a quelli calcolati in fase di verifica ad eccezione della forza fuori dal piano F_z per il caso a $\mu = 0.15$ che risulta essere eccessivamente sovrastimata. Comunque, il parametro principale della procedura di ottimizzazione, cioè la sensibilità rispetto alle variabili di progetto, sembra essere correttamente predetta anche per tale componente. L'ottimizzazione double-point a portato a riduzioni distribuite uniformemente tra le due condizioni di progetto, sebbene queste per la condizione di volo a $\mu = 0.30$ risultino inferiori rispetto a quelle ottenute per la l'ottimizzazione single-point (risultato in linea con quanto ci si attendeva). Nelle Figure 3.11 e

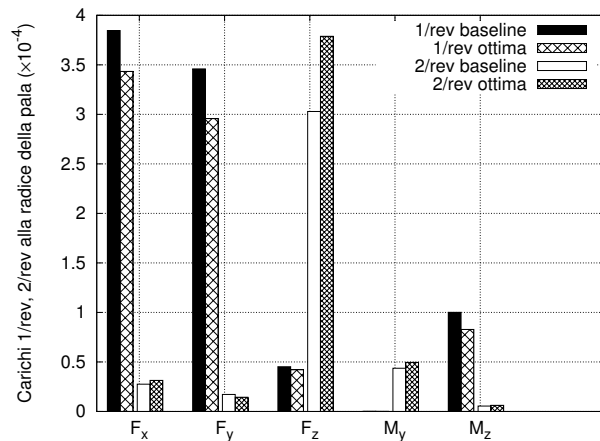


Figura 3.11: Carichi adimensionali alla radice della pala di armonica 1/rev e 2/rev. Condizione di progetto $\mu = 0.30$

3.12, sono riportati, invece, i carichi vibratori 1/rev e 2/rev alla radice della pala nel riferimento rotante. Per tali carichi le conclusioni sono analoghe a quelle fatte per il caso single-point. Dalle

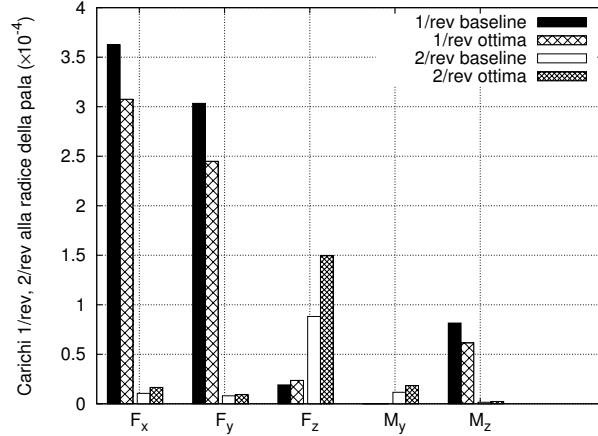


Figura 3.12: Carichi adimensionali alla radice della pala di armonica 1/rev e 2/rev. Condizione di progetto $\mu = 0.15$

figure presentate infatti, si osserva che, sebbene non considerati nella funzione obiettivo, tali carichi risultano ridotti ad eccezione della forza verticale 2/rev che viene, invece, amplificata per entrambe le condizioni di progetto. Anche in questo caso tale incremento può essere ritenuto un aspetto negativo accettabile della progettazione ottimizzata del rotore.

Viene infine valutata la robustezza della configurazione ottima trovata rispetto alle condizioni di volo fuori progetto per rapporti di avanzamento pari a $\mu = 0.1, 0.2$ e 0.25 . La stabilità aeroelastica è garantita per $\mu = 0.2$ e 0.25 , mentre a $\mu = 0.10$ un autovalore risulta essere leggermente instabile. Tale instabilità, non è comunque un elemento di criticità, in quanto sarebbe sufficiente introdurre uno smorzamento strutturale realistico per ovviare ad essa. Inoltre, instabilità di modesta entità come questa vengono comunque eliminate dagli smorzatori solitamente presenti in un rotore.

Per considerare l'effetto del design ottimo sui carichi vibratori, viene calcolato un indice del livello vibratorio per ciascuna condizione di volo definito come la funzione obiettivo nel paragrafo 3.2.3 per il caso di ottimizzazione single-point. L'andamento di tale indice, per diverse condizioni di volo incluse quelle di progetto, è riportato in Fig. 3.13. La figura mostra chiaramente come, seppur tale indice non risulta mai aumentato rispetto al corrispondente relativo alla configurazione di riferimento, per i casi a $\mu = 0.10$ e $\mu = 0.25$ le riduzioni sono di entità decisamente modesta. Questo è dovuto essenzialmente ad effetti di spill-over che si presentano tipicamente in condizioni fuori progetto, che a $\mu = 0.10$ e $\mu = 0.25$ sono particolarmente significativi, come si può osservare dalle Figure 3.14 e 3.15 in cui sono riportati a carichi vibratori per le condizioni di volo in esame sia per la configurazione ottima che per quella baseline.

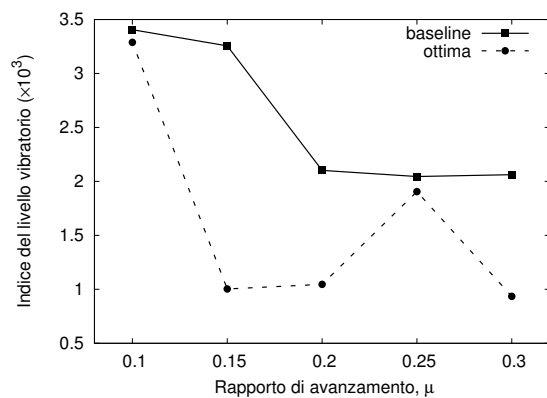


Figura 3.13: Indice del livello vibratorio, condizioni di volo fuori progetto. Configurazione baseline *vs* ottima

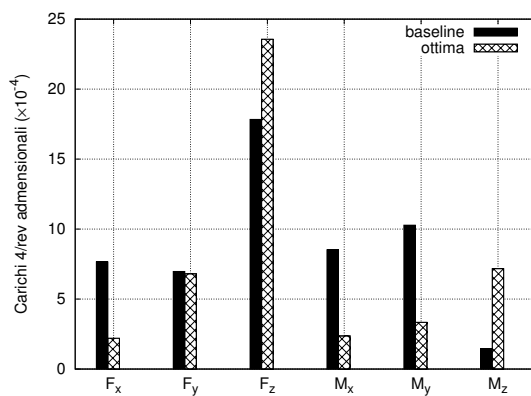


Figura 3.14: Carichi vibratori 4/rev adimensionali, condizioni di volo fuori progetto a $\mu = 0.10$. Configurazione baseline *vs* ottima

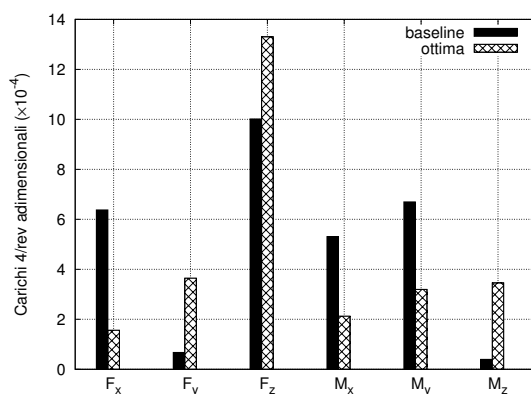


Figura 3.15: Carichi vibratori 4/rev adimensionali, condizioni di volo fuori progetto a $\mu = 0.25$. Configurazione baseline *vs* ottima

Conclusioni

La prima parte dell'attività di ricerca è stata dedicata allo sviluppo di due differenti solutori per l'analisi aeroelastica di rotori di nuova generazione, caratterizzati da pale ad asse elastico non rettilineo realizzate in materiale composito. Entrambi i solutori sono basati su modelli di trave rotante, biflesso-torsionale, non lineare soggetta a deformazioni moderate, i quali si differenziano tra loro principalmente per il metodo adottato per l'integrazione spaziale.

Il primo dei due solutori aeroelastici è caratterizzato da un'elevata efficienza computazionale e da un'elevata flessibilità, queste caratteristiche ne consentono l'accoppiamento sia con l'algoritmo di ottimizzazione che con solutori aerodinamici esterni. Tale modello è stato implementato numericamente utilizzando un approccio alla Galerkin non convenzionale per l'integrazione spaziale, questo metodo si adatta bene all'analisi aeroelastica di pale ad asse elastico non rettilineo, anche in presenza di discontinuità geometriche come quella introdotta dalla presenza di freccia e diedro all'estremità della pala. Lo sviluppo del solutore in questione ha richiesto la definizione di una formulazione matematica originale, basata un modello di trave non lineare, ad asse curvilineo, in cui sono stati considerati gli effetti di anisotropia dovuti all'utilizzo dei materiali compositi.

Nel presente lavoro è stato sviluppato anche un secondo solutore aeroelastico, anch'esso non lineare ed adatto all'analisi di pale ad asse elastico non rettilineo, basato però sul metodo agli elementi finiti per l'integrazione spaziale. Tale modello è stato implementato numericamente mediante la definizione di uno specifico elemento di trave all'interno del software commerciale FEM *COMSOL Multiphysics*. La formulazione matematica su cui è basato è una versione modificata del modello non lineare di pala presentato nel Riferimento [14].

Entrambi i solutori sviluppati sono stati validati sia per il calcolo della risposta stazionaria e delle frequenze naturali di vibrazione in vacuo, sia in termini di risposta e analisi di stabilità aeroelastica in hover di pale incastrate, sia ad asse elastico rettilineo che con angoli di freccia e diedro al tip. Tale validazione è stata eseguita mediante confronti con risultati numerici e sperimentali disponibili in letteratura. Il solutore spettrale è stato validato anche per analisi di risposta aeroelastica, per il calcolo dei carichi vibratorii al mozzo di rotori in avanzamento, e per il calcolo delle frequenze naturali di vibrazione di pale realizzate in materiale composito. La validazione del solutore spettrale è stata perfezionata mediante confronti con i risultati ottenuti con il solutore FEM, tali risultati sono relativi ad analisi in-vacuo per pale ad asse elastico non rettilineo. Le analisi eseguite dimostrano la capacità di entrambi i solutori di predire correttamente il comportamento statico, dinamico, ed aeroelastico di pale di rotore con freccia al tip; inoltre si sottolineano le ottime proprietà di convergenza della formulazione spettrale sviluppata in presenza di discontinuità geometriche.

Dalle analisi eseguite è risultato evidente come la presenza di freccia e diedro all'estremità della pala introduca degli accoppiamenti flesso-torsionali, i quali ne modificano il comportamento aeroelastico sia in termini di frequenze che di smorzamenti. In particolare, per pale con determinate caratteristiche, è stato riscontrato un significativo effetto destabilizzante dovuto proprio all'asse elastico non rettilineo.

Nella seconda parte del presente lavoro il solutore spettrale è stato utilizzato per la valutazione della funzione obiettivo in una procedura di progettazione ottimizzata di rotori a basso livello vibratorio, basata su un algoritmo generico a codifica binaria sviluppato ed applicato nei Riferimenti [23] e [24]. Nel processo di ottimizzazione sono stati imposti vincoli di stabilità aeroelastica e di equilibrio del rotore, mentre come variabili di progetto sono state scelte le proprietà meccaniche/strutturali della pala e gli angoli di freccia e diedro al tip. Al fine di garantire accuratezza ed efficienza computazionale nell'identificazione della configurazione ottima di pala, è stato definito un modello surrogato di velocità indotta basato sull'utilizzo di un solutore aerodinamico BEM. Con l'obiettivo di ottenere una riduzione dei carichi vibratori in un ampio range dell'involuppo di volo, oltre ad una procedura di ottimizzazione single-point, in cui viene considerato un solo punto di progetto, è stata adottata anche una strategia multi-point.

Dalle analisi eseguite nel presente lavoro possono essere tratte le seguenti conclusioni:

- sia la strategia di ottimizzazione single-point che quella double-point hanno portato all'identificazione di configurazioni di pala che generano carichi vibratori significativamente ridotti per le rispettive condizioni di progetto considerate;
- aumentando il numero delle condizioni di volo di progetto si ottengono riduzioni dei carichi vibratori inferiori a quelle ottenibili considerando una singola condizione di volo, ma più uniformemente distribuite nell'involuppo di volo;
- il modello di velocità analitico di Drees risulta essere inadeguato per la riduzione dei carichi vibratori mediante procedure di minimizzazione;
- in seguito a verifiche dei carichi vibratori, ottenuti utilizzando un solutore aerodinamico BEM con scia libera per il calcolo della velocità indotta, il modello surrogato di velocità indotta introdotto nel presente lavoro ed utilizzato nella procedura di ottimizzazione si è dimostrato adatto per questo tipo di applicazioni;
- in condizioni di volo fuori progetto, le configurazioni di pala ottima identificate portano comunque a riduzioni, seppur di modesta entità, del livello vibratorio complessivo, tuttavia sono stati riscontrati effetti di spill-over. L'entità di tali effetti è strettamente legata alla sensibilità dei fenomeni aerodinamici, in particolare quelli di interazione pala-scia, rispetto la configurazione di volo;
- la stabilità aeroelastica del rotore, imposta per le condizioni di progetto, è mantenuta anche fuori progetto.

Considerando infine, che anche l'utilizzo della strategia di ottimizzazione double-point si è dimostrata incapace di garantire riduzioni significative dei carichi vibratori in condizioni di volo fuori progetto, per ottenere riduzioni dei carichi vibratori distribuiti uniformemente nell'involuppo di volo, potrebbero essere adottate le seguenti due strategie:

- considerare un numero maggiore di condizioni di volo nel calcolo della funzione obiettivo;
- considerare un numero limitato di condizioni di volo nel calcolo della funzione obiettivo (ad esempio quelle più importanti nel profilo di missione), ed introdurre controlli attivi per la riduzione dei carichi vibrazioni per quelle fuori progetto.

La prima strategia considerata, è sicuramente più semplice da implementare ma, probabilmente porterebbe a modeste riduzioni dei carichi vibratori (come già accaduto passando dalla strategia single-point a quella double-point), di contro la seconda è più complessa poiché richiede l'applicazione di controlli attivi, tuttavia porterebbe a risultati più soddisfacenti.

Bibliografia

- [1] K.A. Yuan and P.P. Friedmann. Aeroelasticity and structural optimization of composite helicopter rotor blade with swept tips. *NASA CR 4665*, (May), 1995.
- [2] L. Liu P.P. Friedmann B. Glaz, T. Goel and R.T. Haftka. Multiple-Surrogate Approach to Helicopter Rotor Blade Vibration Reduction. *AIAA Journal*, 47(1):271–282, January 2009.
- [3] R. Ganguli and I. Chopra. Aeroelastic Optimization of an Advanced Geometry Helicopter Rotor. *Journal of the American Helicopter Society*, 41(1):18–29, 1996.
- [4] L. Liu D. Patt and P.P. Friedmann. Rotorcraft Vibration Reduction and Noise Predictions Using a Unified Aeroelastic Response Simulation. *Journal of the American Helicopter Society*, 50(1):95–106, 2005.
- [5] P. Cranga P. Rauch, M. Gervais and A. Baud. Blue Edge: the Design, Development and testing of a New Blade Concept. *vtol.org*, 2011.
- [6] R.J. Harrison and S.A. Stacey. BERP IV: The Design, Development and Testing of an Advanced Rotor Blade. In *64th American Helicopter Society Forum*, pages 2524–2544, Montreal, Canada.
- [7] Y. H. Yu. Rotor blade–vortex interaction noise. *Progress in Aerospace Sciences*, 36(2):97–115, February 2000.
- [8] Y.H. Yu C. Tung and S.L. Low. Aerodynamic Aspects of Blade-Vortex Interaction (BVI). In *27th AIAA Fluid Dynamics Conference*, pages AIAA Paper 96–2010, New Orleans, USA, 1996.
- [9] F.J. Tarzanin and R.R. Vlamink. Investigation of the effect of blade sweep on rotor vibratory loads. *NASA*, CR-166526, 1983.
- [10] R. Celi. *Aeroelasticity and Structural Optimization of Helicopter Rotor Blades with Swept Tips*. Ph.d. thesis, Mechanical, Aerospace and Nuclear Engineering Department, University of California, 1987.
- [11] R. Celi and P.P. Friedmann. Aeroelastic Modeling of Swept Tip Rotor Blades Using Finite Elements. *Journal of the American Helicopter Society*, 33(2):43–52, 1988.
- [12] G.S. Bir and I. Chopra. Aeromechanical stability of rotorcraft with advanced geometry blades. *Mathematical and computer modelling*, 19(314):159–191, 1994.
- [13] A.S. Hopkins and R.A. Ormiston. An examination of selected problems in rotor blade structural mechanics and dynamics. In *American Helicopter Society 59th Annual Forum*, Phoenix, Arizona, 2003.

- [14] D.H. Hodges and E.H. Dowell. Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades. *NASA TN D-7818*, 1974.
- [15] V.A. Riziotis and S.G. Voutsinas. Aeroelastic analysis of pre-curved rotor blades. *EWEC'10, Scientific Track Proceedings*, Warsaw, Poland, April 2010.
- [16] M.W. Nixon. *Aeroelastic Response and Stability of Tiltrotors with Elastically-Coupled Composite Rotor Blades*. Ph.d. thesis, University of Maryland, 1993.
- [17] E.C. Smith and I. Chopra. Aeroelastic response and blade loads of a composite rotor in forward flight. *AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural . . .*, 1992.
- [18] R. Ganguli. Optimum design of a helicopter rotor for low vibration using aeroelastic analysis and response surface methods. *Journal of Sound and Vibration*, 258:327–344, 2002.
- [19] Senthil Murugan, R. Chowdhury, S. Adhikari, and M.I. Friswell. Helicopter aeroelastic analysis with spatially uncertain rotor blade properties. *Aerospace Science and Technology*, 16(1):29–39, January 2012.
- [20] B. Glaz, P.P. Friedmann and L. Liu. Helicopter Vibration Reduction Throughout the Entire Flight Envelope using Surrogate-Based Optimization. *Journal of the American Helicopter Society*, 54(1):1–15, 2009.
- [21] R. Celi. Recent Applications of Design Optimization to Rotorcraft - A Survey. *Journal of Aircraft*, 36(1):176–189, 2004.
- [22] R. Ganguli. A Survey of Recent Developments in Rotorcraft Design Optimization. *Journal of Aircraft*, 41(3):493–510, 2004.
- [23] G. Bernardini, C. Testa and M. Gennaretti. Optimal Design of Tonal Noise Control Inside Smart-Stiffened Cylindrical Shells. *Journal of Vibration and Control*, 18(8):1233–1246, 2012.
- [24] D. Calcagni, G. Bernardini and F. Salvatore. Automated Marine Propeller Optimal Design Combining Hydrodynamics Models and Neural Networks. In *International Conference on Computer Applications and Information Technology in the Maritime Industries*, Liege, Belgium, 2011.
- [25] M.Gennaretti and G. Bernardini. Novel Boundary Integral Formulation for Blade-Vortex Interaction Aerodynamics of Helicopter Rotors. *AIAA Journal*, 45(6):1169–1176, 2007.
- [26] R. Kouhia. On kinematical relations of spatial framed structures. *Computers & Structures*, 4(5), 1991.
- [27] D.H. Hodges and R.A. Ormiston. Stability of elastic bending and torsion of uniform cantilever rotor blades in hover with variable structural coupling. *NASA TN D-8192*, 1976.
- [28] J. M. Greenberg. Airfoil in Sinusoidal Motion in Pulsating Stream. *NACA TN-1326*, 1947.
- [29] M. Arra. *L'elicottero*. Biblioteca tecnica Hoepli. Hoepli, 2001.
- [30] Comsol multiphysics user's guide, version 3.5a. 2008.
- [31] J. Traybar E.H. Dowell and D.H. Hodges. An experimental-theoretical correlation study of non-linear bending and torsion deformations of a cantilever beam. *Journal of Sound and Vibration*, 50:533–544, 1977.

- [32] J.J. Epps and R. Chandra. The Natural Frequencies of Rotating Composite Beams With Tip Sweep. *Journal of the American Helicopter Society*, 41(1):29–36, 1996.
- [33] T.A. Millott and P.P. Friedmann. Vibration reduction in helicopter rotors using an actively controlled partial span trailing edge flap located on the blade. *NASA CR 4611*, (June), 1994.
- [34] J.H. Holland. *Adaptation in Nature and Artificial Systems*. University of Michigan Press, 1975.
- [35] E. Muda R.E. Smith. Adaptively Resizing Populations: Algorithm, Analysis, and First Results. *Complex Systems*, 9(1):47–72, 1995.
- [36] D.E. Goldberg. Optimal Initial Population Size for Binary-Coded Genetic Algorithms. *University of Alabama*, TCGA Repor, 1985.
- [37] R.T. Haftka and Z. Gurdal. *Element of Structural Optimization*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- [38] E. Zitzler, K. Deb and L. Thiele. Comparison of Multiobjective Evolutionary Algorithms: Empirical Results. *Kluwer Academic Publishers*, 8(2):173–195, 2000.
- [39] G. Rudolph. Evolutionary Search under Partially Ordered Fitness Sets. In *International Symposium on Information Science Innovations in Engineering of Natural and Artificial Intelligent Systems (ISI 2001)*, pages 818–822, ICSC Academic Press, 2001.
- [40] D.P. Raymer. *Enhancing Aircraft Conceptual Design Using Multidisciplinary Optimization*. Ph.d. thesis, Royal Institute of Technology, Stockholm, 2002.
- [41] R.T. Marler and J.S. Arora. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 26(6):369–395, April 2004.