



SCUOLA DOTTORALE DI INGEGNERIA
SEZIONE DI INGEGNERIA DELL'ELETTRONICA BIOMEDICA,
DELL'ELETTROMAGNETISMO E DELLE TELECOMUNICAZIONI

XXVI Ciclo

INTERAZIONE NON LINEARE DELLE ONDE
DI LOWER HYBRID CON IL PLASMA DI
BORDO DI UN TOKAMAK

Dottorando:	Dott. Francesco Napoli
Docente guida/Tutor:	Prof. Giuseppe Schettini
Coordinatore:	Prof. Alessandro Salvini
Tutor ENEA:	Dott. Carmine Castaldo
Tutor ENEA:	Dott. Roberto Cesario

Ai miei genitori

INDICE

Introduzione	I
---------------------------	----------

Capitolo 1 – INTRODUZIONE ALLA FUSIONE NUCLEARE

1.1	Le reazioni di fusione nucleare	1
1.2	Le macchine sperimentali per la fusione nucleare	9
1.3	Il reattore a fusione e il progetto ITER	11

Capitolo 2 – ONDE DI LOWER HYBRID

2.1	Onde di lower hybrid	18
2.2	Impiego delle onde di lower hybrid nei tokamak	26
2.3	Instabilità parametriche	31
2.4	Sperimentazione con le onde di lower hybrid	34

Capitolo 3 – MODELLO DI SPECTRAL BROADENING

3.1	Introduzione	41
3.2	Il modello cinetico	45
3.3	Derivazione dell'equazione d'onda non lineare	54
3.4	Validazione del modello cinetico nel limite omogeneo	62
3.5	Derivazione della relazione di dispersione non lineare	65

Capitolo 4 – RISULTATI NUMERICI

4.1	Simulazioni numeriche.....	69
4.2	Conclusioni.....	77

Bibliografia.....	81
--------------------------	-----------

Appendice

A.0	Definizioni.....	84
A.1	Calcolo del limite della funzione di coupling.....	85
A.2	Estensione collisionale del modello cinetico.....	87
A.3	Fluttuazioni di campo elettrico associate a onde ibride inferiori.....	96

INTRODUZIONE

Il presente lavoro di ricerca consiste nello sviluppo di un originale modello fisico-matematico in grado di descrivere nel dettaglio un'interazione elettromagnetica di tipo non lineare, denominata Instabilità Parametrica (IP), che si manifesta al bordo del plasma confinato magneticamente negli esperimenti sulla fusione termonucleare controllata. La modellizzazione dell'IP che è stata sviluppata consente di superare l'impossibilità del modello lineare delle onde nell'interpretare i dati disponibili forniti dagli esperimenti degli ultimi trent'anni riguardanti la propagazione di onde elettromagnetiche di tipo *Lower Hybrid* (LH) in plasmi di alta densità d'interesse per la ricerca sull'energia da fusione termonucleare. Il modello ottenuto consente infatti una convincente interpretazione dei risultati sperimentali che consistono nell'allargamento della riga della frequenza di operazione negli spettri ottenuti con un *probe* a radiofrequenza (RF) affacciato su un *port* della macchina sperimentale. Tale allargamento di riga, prodotto da un fenomeno d'interazione dell'onda col plasma di bordo, è importante per consentire o meno la penetrazione all'interno del plasma della potenza RF accoppiata dall'antenna.

Gli esperimenti ai quali il presente lavoro si riferisce consistono nel generare corrente non induttiva mediante potenza RF lanciata in plasmi d'idrogeno intrappolati magneticamente in macchine a configurazione toroidale, denominate *tokamak*. Nel plasma vengono lanciate onde LH che hanno la caratteristica di essere quasi elettrostatiche (cioè con vettore d'onda e campo elettrico praticamente allineati) e lente (cioè con velocità di fase minore della velocità della luce e, in particolare, pari a circa $c/2$ nella direzione parallela al campo magnetico di confinamento del plasma). Le onde LH sono modi naturali di plasma che possono essere eccitati accoppiando al plasma potenza RF

(dell'ordine del MW alla frequenza delle microonde) con antenne costituite da griglie di guide d'onda rettangolari. Tali guide sono opportunamente sfasate in modo da soddisfare le necessarie condizioni di *matching* del campo elettrico e di onda lenta. Con questo sistema si produce nel plasma il cosiddetto effetto di "corrente guidata da onde di *lower hybrid*" (Lower Hybrid Current Drive, LHCD), che fu previsto teoricamente nel 1978 [1], utilizzando la teoria lineare delle onde di plasma, e verificato sperimentalmente nel 1982 sul Princeton Large Torus [2]. Con l'effetto LHCD si produce una corrente di plasma non induttiva che è assolutamente necessaria per un futuro reattore a fusione basato sul concetto di *tokamak*. Infatti, poiché la corrente di plasma impulsata dal trasformatore è alla base del principio del *tokamak*, questo deve essere necessariamente supportato da strumenti utili per produrre la corrente stazionaria, necessaria per il funzionamento continuo del reattore.

Sfortunatamente gli esperimenti effettuati negli ultimi trent'anni hanno mostrato che le onde LH non penetrano in plasmi con profili radiali di densità della colonna di plasma sufficientemente elevata, come sarebbe richiesto per il futuro reattore ($\langle n_e \rangle = 10^{20} \text{ m}^{-3}$). Incoraggianti prospettive per il metodo LHCD sono state recentemente dischiuse dagli esperimenti sul *tokamak* di Frascati FTU (Frascati Tokamak Upgrade) che hanno messo in luce sia il fatto che l'IP è responsabile per la mancata penetrazione della potenza RF accoppiata dall'antenna quando si opera ad elevate densità di plasma, sia gli opportuni parametri di operazione che è necessario utilizzare per mitigare l'effetto dell'IP e consentire la penetrazione della potenza RF [3].

L'IP è un fenomeno di tipo non lineare che può verificarsi nella regione di bordo del plasma che tipicamente si estende dalla posizione dell'antenna fino ad alcuni centimetri all'interno della colonna di plasma, dove la temperatura elettronica del plasma è sufficientemente bassa (minore di alcune centinaia di eV). Per l'instaurarsi dell'IP, la densità di potenza RF lanciata (pompa) deve essere

sufficientemente alta (frequenza di operazione 8 GHz), così che la densità di energia RF è tale da superare la densità di energia termica del plasma (a basse T_e). In tale condizione vengono ad instaurarsi fenomeni di turbolenza che producono un trasferimento di energia dalle alte alle basse frequenze e viceversa, con la formazione di componenti spettrali RF non presenti nello spettro d'antenna. L'IP ha origine dal battimento della pompa con un modo di bassa frequenza che costituisce il fondo termico delle fluttuazioni di densità elettronica del plasma e si manifesta nell'insorgere di bande laterali situate nella regione di frequenza della potenza RF lanciata. La conoscenza dello spettro RF complessivo (in ω, k), cioè dello spettro d'antenna e dello spettro prodotto per effetto dell'IP, è di fondamentale importanza per determinare le caratteristiche di propagazione, assorbimento e di generazione di corrente all'interno del plasma.

La principale originalità del presente lavoro consiste nel descrivere l'IP nella sua totale evoluzione di fenomeno non lineare, che comprende non solo l'emergere dell'allargamento spettrale dal livello di rumore, ma anche lo svuotamento della potenza dell'onda di pompa e la sua redistribuzione nello spettro delle bande laterali nel regime saturato dell'instabilità.

Il modello di *Spectral Broadening* che è stato sviluppato con il presente lavoro di ricerca è un modello completamente non lineare nel campo elettrico ed è in grado di prevedere i forti svuotamenti osservati sperimentalmente nello spettro della potenza LH accoppiata al plasma. Questo nuovo modello, contrariamente a quelli che hanno preceduto questo lavoro di ricerca, è in grado di trattare accuratamente la complessa fisica non lineare LH del bordo del plasma di un *tokamak* mediante un'analisi *full-wave* e *full-spectrum* e, per spiegare l'allargamento spettrale osservato, invoca un fenomeno di *scattering* non lineare della pompa provocato dalle perturbazioni della densità del plasma, sostenute nel plasma dalla pompa stessa per effetto ponderomotore, collocandosi nel *framework* teorico delle IP.

I risultati raggiunti dimostrano come sia di fondamentale importanza considerare l'interazione non lineare al bordo del plasma per poter interpretare correttamente le sperimentazioni di LHCD ad alta densità, rilevanti per il futuro reattore ITER. Infatti, con le simulazioni effettuate per scenari sperimentali tipici di plasmi ad alta densità di FTU, abbiamo verificato che, operando alle alte densità di potenza dei moderni esperimenti LHCD, la fisica delle instabilità parametriche al bordo del plasma può spiegare un forte trasferimento di potenza LH dalla pompa alle *sideband* inferiori, contestualmente ad un forte allargamento spettrale, in accordo con ciò che è osservato sperimentalmente [3,4]. Quindi questi risultati potrebbero effettivamente contribuire a risolvere l'annoso ma sfuggente problema dello *spectral gap* [5,6].

Tuttavia, questi risultati vanno valutati considerando che, diversamente da quanto fatto in tutti i precedenti lavori, sono stati ottenuti con il contributo del rumore del generatore RF. Infatti nelle simulazioni effettuate abbiamo assunto un rumore complessivo al bordo del plasma con un livello di potenza di -60 dB rispetto alla potenza accoppiata, come suggerito da misure effettuate in prossimità dell'antenna mediante *probe* RF. Utilizzando un modello analitico per il rumore termico del plasma, abbiamo confrontato il contributo di questo rumore con quello del rumore RF ed abbiamo trovato che quest'ultimo costituisce la parte principale del rumore al bordo del plasma. Allo stato attuale, quindi, siamo in grado di spiegare una parte significativa dell'allargamento spettrale in $n_{//}$ con il contributo del rumore di alta frequenza della sorgente RF. Tuttavia riteniamo anche che, per poter arrivare ad una conclusione definitiva su questo punto cruciale, ulteriori simulazioni sono necessarie, estendendo il calcolo numerico anche alle componenti spettrali con $n_{//} > 10$ dove il contributo del rumore termico è maggiore. Se il contributo secondario del rumore termico fosse confermato, si aprirebbe una possibilità del tutto nuova per poter risolvere il problema delle IP al bordo del plasma con una soluzione di tipo ingegneristico,

ovvero filtrando il rumore RF sulla linea di trasmissione di potenza che va dal generatore all'antenna LH.

Il modello di *Spectral Broadening* contenuto nella Tesi ha anche permesso di individuare i parametri del plasma di bordo su cui è possibile agire sperimentalmente per poter limitare l'intensità degli effetti non lineari. Il primo parametro è la temperatura elettronica. Abbiamo dimostrato che un aumento della temperatura del 10% - 50% negli strati più esterni del plasma può attenuare fortemente l'accoppiamento non lineare tra i modi LH e quindi spegnere le IP al bordo [7]. Il secondo parametro è l'utilizzo di ioni pesanti di litio e di boro. In questo secondo caso si sfrutta la maggiore inerzia degli ioni per diminuire l'efficacia del canale di decadimento parametrico alle frequenze dei quasi-modi ionico-acustici. Il litio è risultato l'elemento più interessante ai fini applicativi in quanto ha una seconda ionizzazione molto meno probabile rispetto al boro [8,9]. Infatti, il modello prevede un peggioramento degli effetti non lineari con la carica ionica, oltre alle maggiori perdite che si avrebbero per radiazione. Infine, abbiamo valutato l'efficacia della sinergia dei due metodi, risultando questa la strategia di gran lunga migliore ai fini applicativi, potendo funzionare con più basse temperature elettroniche e più basse concentrazioni di ioni di litio al bordo [8].

Questi risultati originali dimostrano, quindi, che è possibile controllare gli effetti non lineari al bordo del plasma non solo agendo sulla temperatura elettronica [7], confermando peraltro un risultato che era già noto in letteratura [6], ma anche agendo sulla composizione ionica del plasma di fronte all'antenna [8,9]. Questo può essere fatto non solo con una iniezione di gas davanti all'antenna, ma anche con una adeguata scelta dei materiali nel rivestimento del *limiter* del plasma e delle pareti interne della camera da vuoto.

Il codice numerico ALGOR, sviluppato con il presente lavoro di ricerca, può ora essere utilizzato nelle sperimentazioni di FTU per calcolare l'effettivo spettro

allargato che penetra all'interno dell'ultima superficie magnetica chiusa del plasma. La conoscenza accurata di questo spettro è indispensabile poiché, se considerato come input di codici numerici standard di *ray-tracing* opportunamente accoppiati a codici di Fokker-Planck, permette di calcolare con precisione i profili di deposizione della potenza LH nelle sperimentazioni LHCD.

Infine, il codice di calcolo presentato nella Tesi costituisce uno strumento utile per interpretare i risultati degli esperimenti LHCD ad alta densità d'interesse reattoristico e per progettare gli scenari dei futuri reattori sperimentali ITER e DEMO, nei quali il metodo LHCD dovrebbe svolgere un ruolo essenziale per effettuare il controllo attivo del profilo di corrente di plasma.

Riferimenti:

- [1] N. J. Fisch, *Confining a tokamak plasma with RF-driven currents*, Phys. Rev. Lett. **41**,1978.
- [2] S. Bernabei et al, *Lower-hybrid current drive in PLT tokamak*, Phys. Rev. Lett. **49**, 1982.
- [3] R. Cesario et al, *Current drive at plasma densities required for thermonuclear reactors*, Nature Comms **1** 5 55, 2010.
- [4] S. Baek et al, *Observations of spectral broadening of lower hybrid waves in Alcator C-Mod*, Plasma and Fusion Research **7** 2402031, 2012.
- [5] P. Bonoli, *Review of recent experimental and modeling progress in lower hybrid range of frequencies at ITER relevant parameters*, AIP Conf. Proc. **1580** 15, 2014.
- [6] R. Cesario et al, *Spectral broadening of parametric instability in lower hybrid current drive at a high density*, Nucl. Fusion **54** 043002, 2014.
- [7] F. Napoli, C. Castaldo, R. Cesario, G. Schettini, *Modeling of the nonlinear mode coupling of lower hybrid waves in tokamak plasmas*, Plasma Phys. Control. Fusion **55** 095004, 2013.

- [8] F. Napoli, C. Castaldo, R. Cesario, G. Schettini, *Nonlinear lower hybrid modeling in tokamak plasmas*, AIP Conf. Proc. **1580** 450, 2014.
- [9] F. Napoli, C. Castaldo, R. Cesario, G. Schettini, *A parametric analysis of nonlinear lower hybrid effects*, J. Phys. Conf. Ser. **401** 012016, 2012.

Capitolo 1

INTRODUZIONE ALLA FUSIONE NUCLEARE

1.1 Le reazioni di fusione nucleare

L'ultimo rapporto dell' Intergovernmental Panel on Climate Change (IPCC) [1] conferma il continuo aumento in atmosfera dei gas serra dovuto alle attività antropiche e stima come molto probabile un aumento della temperatura media superficiale globale superiore a 2 °C entro il 2100. Il maggior contributo all'effetto serra attualmente in atto è dovuto all'aumento della concentrazione di diossido di carbonio (CO₂) in atmosfera e si ritiene che la principale causa dell'accelerazione di questo fenomeno naturale sia la combustione dei combustibili fossili dovuta all'attività umana.

Urge quindi lo sviluppo di nuove tecnologie a ridotte emissioni di gas serra per la produzione di energia che siano effettivamente in grado di ridurre l'impatto ambientale dell'uomo sulla biosfera. Con una domanda di energia globale destinata a triplicare entro la fine del secolo [2], la ricerca sulla fusione nucleare si propone di dimostrare che questa sorgente di energia può essere usata per produrre elettricità in modo sicuro, rispettoso dell'ambiente e con risorse di combustibile abbondanti.

Infatti, il combustibile di base (deuterio e litio per il ciclo D-T) è praticamente illimitato e omogeneamente diffuso sulla Terra (il deuterio si può ricavare dall'acqua e il litio è relativamente abbondante nella crosta terrestre), quindi non dà luogo a particolari problemi di approvvigionamento. Inoltre le reazioni di fusione non danno luogo a emissioni di gas a effetto serra e non producono scorie radioattive [3]. In aggiunta, le centrali a fusione sono intrinsecamente sicure non essendo possibili reazioni incontrollate,

in quanto ad un aumento della temperatura del plasma si ha anche un aumento delle perdite per trasporto e per radiazione ed il reattore automaticamente si spegne. Infine, mediante l'impiego di materiali a bassa attivazione appositamente sviluppati, la radioattività dei componenti a fine vita del reattore può decadere nell'arco di circa un secolo, evitando quindi la necessità di depositi geologici permanenti in sito profondo e permettendo il riciclo dei materiali.

La moderna ricerca sulla fusione nucleare ha avuto inizio verso la fine degli anni Cinquanta dello scorso secolo con la conferenza di Ginevra nel 1958, con la quale si promosse la collaborazione internazionale per lo sviluppo delle tecnologie per lo sfruttamento pacifico dell'energia da fusione nucleare. Infatti, fino a quel momento la ricerca era rimasta di esclusivo dominio militare e come conseguenza di ciò la configurazione a confinamento magnetico, il *tokamak*, a tutt'oggi considerata come quella più promettente per la fusione termonucleare controllata, rimase completamente sconosciuta in Occidente dai tempi della sua ideazione (1950) ad opera degli scienziati sovietici Sakharov e Tamm fino alla suddetta conferenza del 1958. Da allora la Fisica del Plasma si è sviluppata enormemente, generando una corposa letteratura, tanto da diventare un nuovo e proficuo ramo di ricerca della fisica moderna.

La fusione è una reazione nucleare in cui due nuclei leggeri si fondono in un nucleo più pesante con conseguente rilascio di energia. I nuclei atomici sono composti da neutroni e protoni (nucleoni). La massa totale di un nucleo è minore della somma delle masse dei suoi costituenti perché nella sua formazione, a partire dai singoli nucleoni, si verifica una perdita di massa che è rilasciata sotto forma di energia, in accordo con la celebre equazione di Einstein $E = mc^2$.

L'energia di legame nucleare è l'energia necessaria per rompere il nucleo di un atomo in frammenti di minori dimensioni. Tale energia è responsabile della stabilità del nucleo. Più il nucleo è stabile, maggiore è l'energia che occorre fornire per romperlo o, in modo equivalente, maggiore è l'energia che viene rilasciata quando tale nucleo si forma. La stabilità del nucleo a sua volta dipende dal numero di protoni in relazione al numero di

neutroni: se il numero di neutroni differisce di molto dal numero di protoni il nucleo risulta poco stabile. Nella tavola periodica degli elementi l'energia di legame cresce all'aumentare della massa atomica fino ad arrivare ad una zona di stabilità tra il magnesio e lo xeno: in tale intervallo le dimensioni del nucleo fanno sì che la repulsione elettromagnetica dei protoni eguagli l'attrazione dovuta all'interazione nucleare che ha un raggio d'azione limitato. Con l'ulteriore crescere delle dimensioni nucleari l'energia di legame decresce.

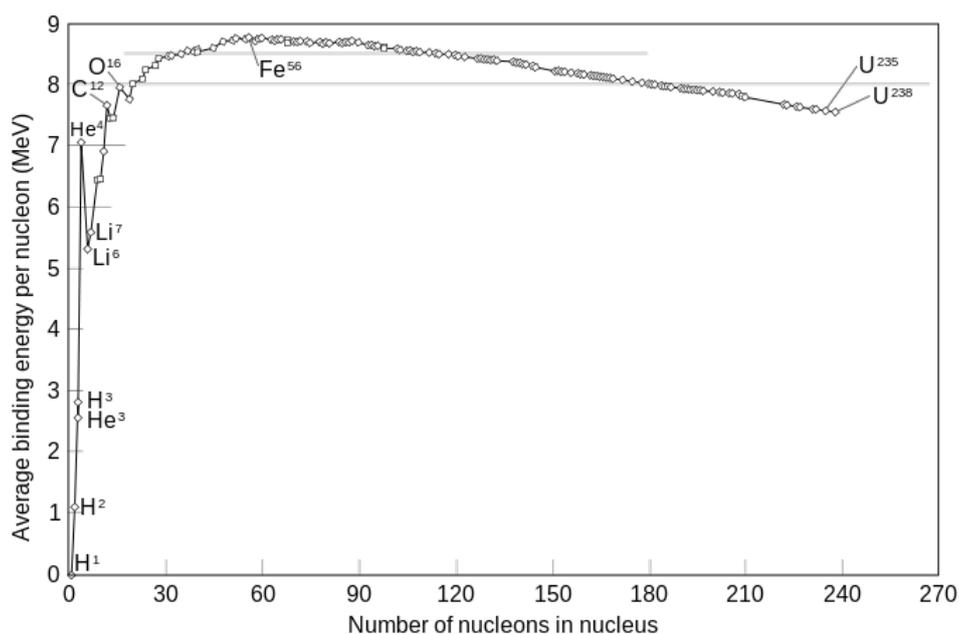


Figura 1

In Figura 1 è mostrata l'energia di legame per nucleone in funzione del numero di massa atomica. Dal grafico si può notare come vi sia un massimo dell'energia di legame in corrispondenza del nucleo di ferro e solo a sinistra di questo massimo, nella zona dei nuclei leggeri, vi sia la massima pendenza della curva. Come conseguenza di ciò si ha un maggiore rilascio di energia per nucleone nella fusione di nuclei leggeri in nuclei più pesanti, fino alla formazione del ferro, rispetto a quello che accade invece nella zona dei nuclei ancora più pesanti, dove l'inversione della curva descrive il rilascio di energia nel processo opposto, quello della fissione nucleare, il quale consiste invece nella rottura di nuclei pesanti in frammenti più piccoli.

Le reazioni nucleari di fusione sono la sorgente d'energia del Sole e delle stelle. Nel Sole, che ha una temperatura interna di 14 milioni di gradi (~ 1 keV), la reazione di fusione di nuclei di idrogeno (reazione protone-protone) è responsabile di gran parte dell'energia che giunge fino a noi sotto forma di radiazione. Inoltre, le reazioni nucleari di fusione rendono possibile nell'universo il processo di nucleosintesi che avviene all'interno delle stelle, cioè la produzione degli elementi naturali più pesanti da quelli più leggeri, a partire dall'idrogeno.

Mentre l'attivazione del processo di fissione richiede poca energia (può avvenire anche spontaneamente in nuclei molto pesanti), la fusione richiede una quantità considerevole di energia per avvicinare i due nuclei, entrambi carichi positivamente, a causa della repulsione elettrostatica e così vincere la barriera coulombiana. Una volta che i due nuclei si trovano a distanze dell'ordine della dimensione dei nuclei stessi, la forza nucleare forte, attrattiva tra nucleoni, rende possibile il processo di fusione. L'entità della repulsione coulombiana tra due nuclei dipende dalla loro carica, cioè dal numero di protoni contenuti. L'intensità della forza nucleare forte attrattiva, invece, dipende dal numero di nucleoni. Dalla combinazione di questi fattori risulta che l'energia da fornire è minima per gli isotopi pesanti dell'idrogeno, il deuterio ${}^2_1\text{H}$ o D, il cui nucleo è formato da un protone e da un neutrone, e il trizio ${}^3_1\text{H}$ o T, il cui nucleo è formato da un protone e da due neutroni (Fig. 2). Il nucleo dell'idrogeno comune ${}^1_1\text{H}$ è formato invece da un solo protone.

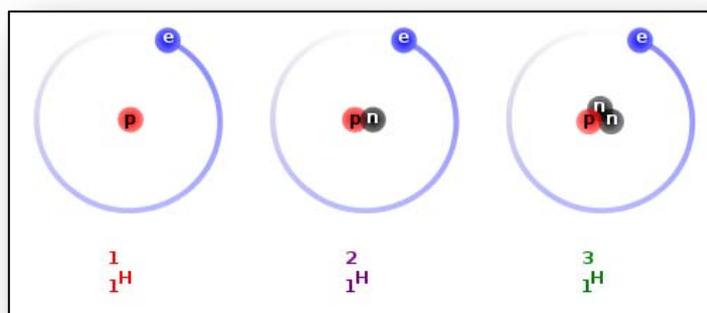


Figura 2

Si potrebbe pensare che il modo più semplice per vincere la barriera coulombiana e avvicinare i nuclei di D e T è quello di accelerare un fascio di particelle di deuterio contro un bersaglio di trizio. In realtà questo è un metodo molto inefficiente per raggiungere la fusione poiché richiederebbe molta più energia per accelerare il fascio di quella che se ne potrebbe ricavare dalle risultanti reazioni di fusione. Questo è dovuto al fatto che la maggior parte dell'energia viene persa in energia termica e di ionizzazione del bersaglio e in collisioni elastiche, poiché in questa situazione la sezione di diffusione delle particelle incidenti è molto maggiore della sezione d'urto. Inoltre un tale processo sarebbe poco interessante poiché le reazioni di fusione non si potrebbero autosostenere.

La soluzione ritenuta più interessante è invece quella di creare un plasma maxwelliano sufficientemente caldo nel quale i nuclei più veloci che si trovano nelle code della funzione di distribuzione abbiano un'energia cinetica tale da vincere la barriera coulombiana e poter quindi innescare le reazioni di fusione. Inoltre, in questo modo, l'energia liberata dalle reazioni di fusione può essere utilizzata per riscaldare il plasma aprendo la possibilità di raggiungere l'autosostentamento delle reazioni. La situazione in cui il plasma si riscalda autonomamente e non ha più bisogno dell'energia fornitagli dall'esterno per rimanere sufficientemente caldo da permettere le reazioni di fusione nucleare è chiamata ignizione. Per questo motivo il raggiungimento della fusione secondo questo processo è anche noto come fusione termonucleare.

Principali reazioni di fusione	
$D + T \rightarrow {}^4\text{He} (3.5 \text{ MeV}) + n (14.1 \text{ MeV})$	$Q = 17.6 \text{ MeV}$
$D + D \rightarrow T (1.01 \text{ MeV}) + p (3.02 \text{ MeV})$	$Q = 4.03 \text{ MeV}$
$D + D \rightarrow {}^3\text{He} (0.82 \text{ MeV}) + n (2.45 \text{ MeV})$	$Q = 3.27 \text{ MeV}$
$T + T \rightarrow {}^4\text{He} + 2 n$	$Q = 11.3 \text{ MeV}$
$D + {}^3\text{He} \rightarrow {}^4\text{He} (3.6 \text{ MeV}) + p (14.7 \text{ MeV})$	$Q = 18.3 \text{ MeV}$

Figura 3

In Figura 3 sono riportate le reazioni di fusione più interessanti ai fini applicativi con la relativa quantità di energia liberata dalla reazione. L'energia è rilasciata sotto forma di energia cinetica ed è distribuita in modo inversamente proporzionale alle masse dei prodotti di reazione. Per questo nelle reazioni qui riportate la maggior parte dell'energia cinetica va nelle particelle più leggere come i protoni e i neutroni. In Figura 4 sono mostrate le relative sezioni d'urto (probabilità di reazione) in funzione dell'energia relativa dei nuclei reagenti. Come si vede, tra queste, la più favorita è la reazione D + T (Fig. 5) che presenta il massimo della sezione d'urto in corrispondenza dell'energia relativa più piccola (100 keV). Inoltre, l'energia termica prodotta dalla reazione D + T è enorme: 1 Kg di miscela D-T a completa fusione produrrebbe l'energia termica equivalente a quella prodotta dalla combustione di 8200 tonnellate di petrolio.

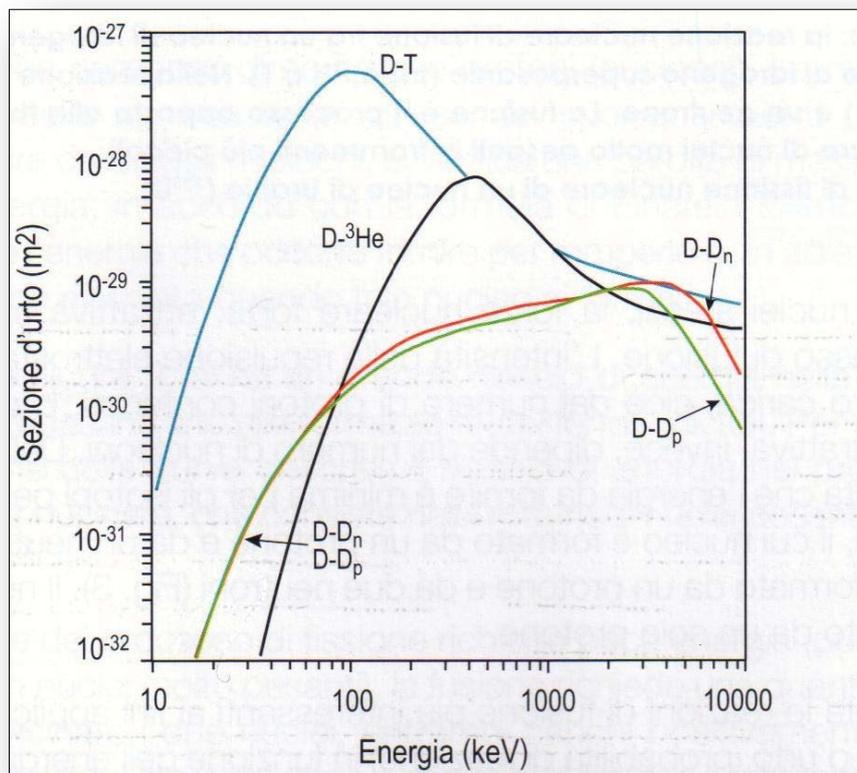


Figura 4

Per questi motivi, il ciclo di D-T è quello su cui si concentrano gli attuali modelli di reattore a fusione [3,4]. Mentre il deuterio è estremamente abbondante in natura (25.5 mg

di deuterio per litro d'acqua), il trizio, materiale radioattivo con un tempo di dimezzamento di 12.36 anni, non esiste in quantità apprezzabili in natura e deve quindi essere prodotto, in un ciclo chiuso all'interno del reattore, a partire dal litio che è invece relativamente abbondante in natura. Negli esperimenti attuali si usano, per convenienza, miscele di solo deuterio (ciclo D-D).

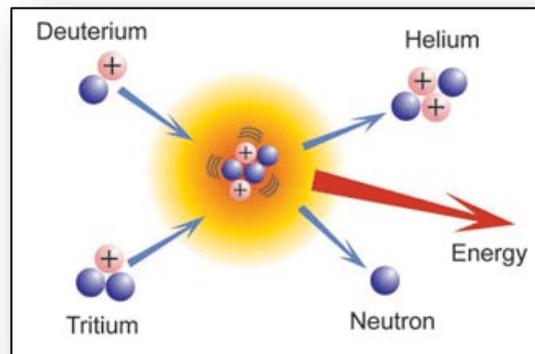


Figura 5

Una reazione interessante è quella che coinvolge un nucleo di deuterio (D) e un nucleo dell'isotopo leggero dell'elio (^3He) in quanto presenta la più alta sezione d'urto dopo la reazione D + T ed ha il vantaggio di essere una reazione aneutronica: la reazione produce solo particelle cariche (^4He e p) e in un ciclo di D- ^3He la produzione di neutroni dalle reazioni tra nuclei di deuterio (D + D) risulterebbe alquanto inferiore a quella che si avrebbe, a parità di energia prodotta, nel ciclo D-T (come si vede dai livelli relativi delle curve mostrati in Figura 4) e quindi risulterebbero di gran lunga ridotti gli effetti negativi dovuti alle interazioni dei neutroni con i materiali del reattore. Inoltre tale reazione permetterebbe di generare direttamente corrente elettrica tramite i protoni prodotti, evitando l'inefficienza del ciclo termodinamico e minimizzando l'inquinamento termico dell'ambiente. Tuttavia, l' ^3He è estremamente raro sulla Terra e, contrariamente al trizio, non producibile. Allo stato attuale delle conoscenze si prevede che possano esistere abbondanti giacimenti di ^3He sulla Luna, ma questo dovrà essere verificato da future missioni spaziali. Inoltre la sezione d'urto D + ^3He ha valori significativi per energie molto

più grandi rispetto a quelle della reazione $D + T$. Per questi motivi, sebbene vi siano studi di reattori basati sul ciclo D - ^3He , questa reazione non è ritenuta al momento utilizzabile.

La sezione d'urto della reazione $D + T$ passa da valori estremamente piccoli fino a valori significativi per energie dei nuclei reagenti dell'ordine dei 10 – 100 keV. Il modo più semplice per fornire questa energia è riscaldare i nuclei. Infatti la temperatura di una sostanza è una misura dell'energia cinetica media delle particelle di cui è costituita. Quindi per ottenere una significativa frequenza delle reazioni $D + T$ occorre raggiungere temperature non inferiori a 10 keV, in corrispondenza delle quali la velocità degli ioni di D e T è dell'ordine di decine di migliaia di chilometri al secondo. Essendo queste temperature ben al di sopra dell'energia di ionizzazione degli atomi (13.6 eV per l'idrogeno), si può ben comprendere perché le reazioni di fusione avvengano in un combustibile allo stato di plasma.

Il plasma è considerato come il quarto stato della materia dopo gli stati di solido, liquido e gassoso. Un plasma è un gas fortemente ionizzato, ovvero un gas con una concentrazione sufficientemente elevata di particelle cariche, i cui atomi hanno perso in parte o completamente i loro elettroni e a cui si può pervenire riscaldando un gas ordinario a temperature tali per cui l'energia media delle particelle sia confrontabile o superiore all'energia di ionizzazione degli atomi che compongono il gas. Tuttavia è un gas ionizzato che risulta globalmente neutro, per cui, su distanze paragonabili alle dimensioni del plasma, le densità di ioni ed elettroni sono circa uguali. Invece si possono avere violazioni della neutralità solo sulle piccole scale spaziali, piccole (dell'ordine della lunghezza di Debye, λ_D) rispetto alla dimensione del plasma, e su tempi molto brevi (dell'ordine dell'inverso della frequenza di plasma, $1/\nu_p$).

Per poter sfruttare l'energia da fusione nucleare in un reattore è necessario ottenere un bilancio energetico positivo tra l'energia prodotta dalle reazioni di fusione e quella immessa nel reattore per riscaldarlo. Per fare ciò è necessario riscaldare un plasma di D - T a temperature molto alte (10 keV, 100 milioni di gradi, circa 10 volte la temperatura interna del Sole) necessarie a produrre reazioni di fusione in misura sufficiente e,

contemporaneamente, mantenerlo confinato ad una densità sufficientemente elevata con un tempo di confinamento dell'energia sufficientemente lungo per compensare le perdite dal plasma per diffusione e per radiazione. La temperatura richiesta può sembrare enorme ma è dello stesso ordine di grandezza delle temperature che si ottengono attualmente nei dispositivi di ricerca sulla fusione nucleare.

Occorre cioè, per avere un bilancio energetico positivo, soddisfare la condizione espressa dal cosiddetto criterio di Lawson [5], condizione che, per un reattore con una efficienza di conversione termica del 30% che utilizza un plasma di D-T, viene espressa dal prodotto triplo di densità n , tempo di confinamento dell'energia τ_E e temperatura del plasma T :

$$n T \tau_E \geq 1.2 \times 10^{21} \text{ s keV m}^{-3}$$

Per un plasma con una temperatura di 10 keV, occorre avere una densità di ameno $1.2 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$ e un tempo di confinamento dell'energia di almeno 1 secondo. Questa relazione è diventata negli anni una relazione fondamentale che dovranno soddisfare i futuri reattori a fusione. Tuttavia, anche se ottenere valori significativi di uno dei tre parametri è abbastanza semplice in laboratorio, ottenere tutti e tre i valori contemporaneamente si è rivelato un compito di difficile attuazione.

1.2 Le macchine sperimentali per la fusione nucleare

Le condizioni per la fusione si verificano naturalmente nei nuclei delle stelle, dove il plasma è confinato ad alta densità sotto l'azione della propria forza gravitazionale (confinamento gravitazionale). In laboratorio, dove è necessario ricorrere ad altri meccanismi, si sono seguite principalmente due linee sperimentali diverse, conosciute come confinamento inerziale (raggiungibile mediante l'utilizzo di potenti raggi laser) e confinamento magnetico del plasma (raggiungibile mediante l'utilizzo di intensi campi magnetici di confinamento). Quest'ultimo è il tipo di reattore che oggi si prevede abbia maggiori possibilità di funzionare [3,4]: un reattore a fusione basato sul principio del

confinamento magnetico che utilizza il ciclo D-T. Questo è il metodo di confinamento che prenderemo ora in esame poiché è quello che interessa il presente lavoro.

Il *tokamak* (Toroidalnaya KAMERA MAgnitnaya Katushka: camera toroidale con bobina magnetica) è una macchina sperimentale per il confinamento magnetico del plasma, dotata di geometria toroidale, originariamente sviluppata negli anni Cinquanta dello scorso secolo nella ex Unione Sovietica. Attualmente è utilizzata per effettuare la maggior parte delle sperimentazioni sulla fusione termonucleare controllata a scopi civili.

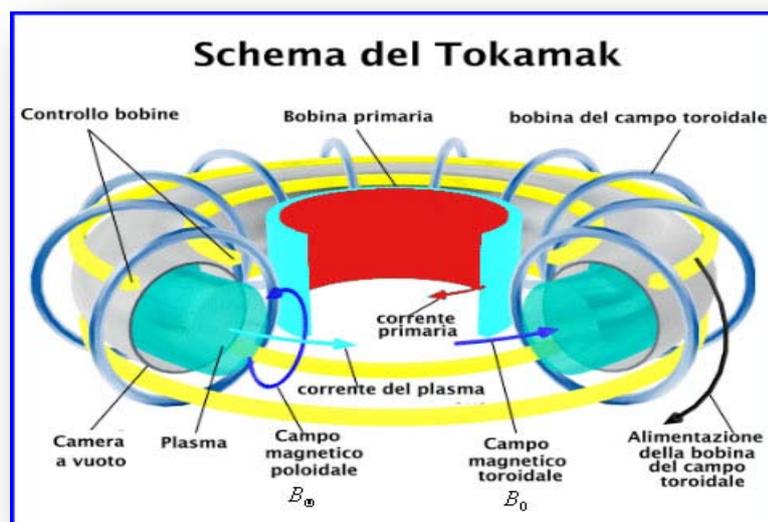


Figura 6

Il *tokamak* è costituito da una camera toroidale entro cui si produce il vuoto spinto per eliminare i gas residui ed entro cui si inietta il combustibile a bassa densità (10^{20} particelle per metro cubo). Le pareti della camera costituiscono un contenitore per il plasma e devono sopportare il flusso di calore emesso dal plasma durante il funzionamento della macchina. Un insieme di bobine, disposte simmetricamente attorno alla camera, genera un campo magnetostatico toroidale finalizzato a guidare il moto delle particelle costituenti il plasma al fine di evitare che le stesse tocchino la parete metallica della camera. Ciò sia per mantenere il plasma confinato all'interno della camera alle densità d'interesse per la fusione, sia per evitare il suo raffreddamento, poiché il plasma, toccando le pareti, perde calore e genera delle impurità che lo raffreddano ulteriormente. Inoltre bisogna evitare il

danneggiamento della struttura poiché attualmente non sono noti materiali che possano resistere alle elevatissime temperature del plasma.

Lo schema degli avvolgimenti principali di un *tokamak* è rappresentato in Figura 6. Il solenoide centrale, colonna verticale al centro dell'anello della camera toroidale, costituisce il primario di un trasformatore che induce nel plasma (secondario) una corrente parallela al campo magnetostatico principale. Questa corrente riscalda il plasma per effetto *joule* e contribuisce alla configurazione magnetica di confinamento del plasma stesso (il riscaldamento e il confinamento nei *tokamak* sono problematiche tra di loro strettamente connesse). Altre bobine esterne sono utilizzate per il confinamento e il controllo della posizione del plasma. Più precisamente, la camera toroidale è circondata da due diversi tipi di avvolgimenti che generano campi magnetici distinti, come mostrato in Figura 6. Gli avvolgimenti a spirale (poloidali) che avvolgono la camera (quelli in blu in Figura 6) quando sono percorsi da corrente generano un campo magnetostatico toroidale B_0 al quale si somma il campo magnetico poloidale B_θ generato dalla corrente toroidale interna al plasma. Le linee di campo magnetico risultanti dalla sovrapposizione di questi due campi magnetici (toroidale e poloidale, $B_0 + B_\theta$) sono quindi elicoidali. Questa configurazione elicoidale del campo magnetostatico di confinamento permette di contrastare i moti di deriva delle particelle cariche dovuti alla non uniformità spaziale del campo magnetostatico toroidale B_0 e quindi permette effettivamente di confinare stabilmente le particelle cariche del plasma all'interno della camera toroidale. Invece gli avvolgimenti (toroidali) disposti lungo la camera toroidale (in giallo in Figura 6) generano un campo magnetico verticale che viene utilizzato per il controllo della posizione e della forma del plasma.

1.3 Il reattore a fusione e il progetto ITER

Il futuro reattore a fusione dovrà essere in grado di produrre energia elettrica in modo continuo. Infatti tale modalità di funzionamento (non pulsato) è assolutamente necessaria,

sia per ottimizzarne l'utilizzazione nel tempo, sia per evitare i processi di degrado delle componenti meccaniche della struttura e gli ingombranti e costosi sistemi per l'immagazzinamento dell'energia [3]. Inoltre, per poter funzionare in modo continuo è importante poter controllare le condizioni di confinamento dell'energia del plasma per tempi più lunghi di quelli tipici delle scariche generate con il trasformatore. Ciò è possibile sperimentalmente mediante la generazione di corrente non induttiva [3,6]. Perciò nel futuro reattore sarà di fondamentale importanza poter disporre di efficienti sistemi di *current drive*.

La macchina sperimentale europea JET (Joint European Torus), situata presso il centro di ricerca di Culham nel Regno Unito, è attualmente l'impianto più importante per le ricerche europee (EURATOM) ed è il *tokamak* più grande finora costruito [7]. Nel 1997, nell'ambito di una sperimentazione con il trizio, il JET ha prodotto una potenza record da fusione di 16 MW con un fattore di guadagno di $Q = 0,65$ (dove il guadagno Q è definito come il rapporto tra la potenza da fusione prodotta nel plasma e la potenza fornita dall'esterno per il riscaldamento ausiliario del plasma).

ITER (International Thermonuclear Experimental Reactor), in via di realizzazione presso Cadarache (Francia), è il *tokamak* sperimentale proposto nell'ambito del progetto internazionale omonimo finalizzato alla dimostrazione della fattibilità scientifica e tecnologica della fusione nucleare basata sul ciclo D-T ai fini della produzione di energia elettrica [8]. L'esperimento internazionale ITER ha come obiettivi quello di dimostrare che un reattore a fusione è capace di superare per più di un'ora la condizione di pareggio dell'energia $Q = 1$, nota come condizione di *breakeven*, e di dimostrare di poter raggiungere dei valori del fattore di guadagno di $Q = 5$ (in regime continuo) e di $Q = 10$ (in regime pulsato). Nel caso di $Q = 5$ la potenza termica sviluppata nel plasma dalle particelle alfa prodotte dalla fusione ha lo stesso valore della potenza termica sviluppata nel plasma dal riscaldamento ausiliario. Mentre i futuri reattori a fusione dovranno raggiungere valori molto superiori di $Q = 40 - 50$. Nel caso di $Q = 50$ la potenza termica sviluppata nel plasma dalle particelle alfa prodotte dalla fusione è 10 volte superiore alla potenza di

riscaldamento ausiliario: in queste condizioni il plasma è dominato dal riscaldamento delle particelle alfa e non dal riscaldamento ausiliario, situazione nota come *burning plasma*. Tuttavia lo studio del plasma in queste condizioni di valori elevati di Q non è ancora stato effettuato e quindi per ora il comportamento del plasma in tali condizioni rimane ancora ignoto.

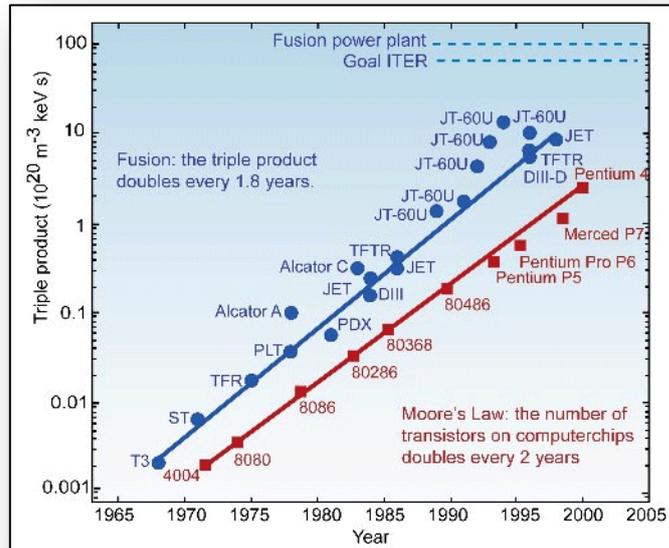


Figura 7

In Figura 7 sono mostrati i progressi ottenuti in termini di prodotto triplo dagli impianti sperimentali per la fusione a confinamento magnetico (*tokamak*). Come si vede l'incremento delle prestazioni sta seguendo una legge esponenziale che cresce anche più velocemente della ben nota legge di Moore per l'integrazione dei transistor su chip.

Invece nel grafico di Figura 8 sono rappresentati i risultati degli esperimenti di fusione nucleare nel piano $\log_{10}(nT\tau_E), T$. In blu vengono indicate le macchine *tokamak*, in verde le macchine di diversa concezione di tipo *Stellarator* [3,4], in rosso i due esperimenti che hanno realizzato la fusione con reazioni D + T. La linea verde rappresenta la curva di *breakeven* e la regione gialla rappresenta la regione dei parametri del reattore.

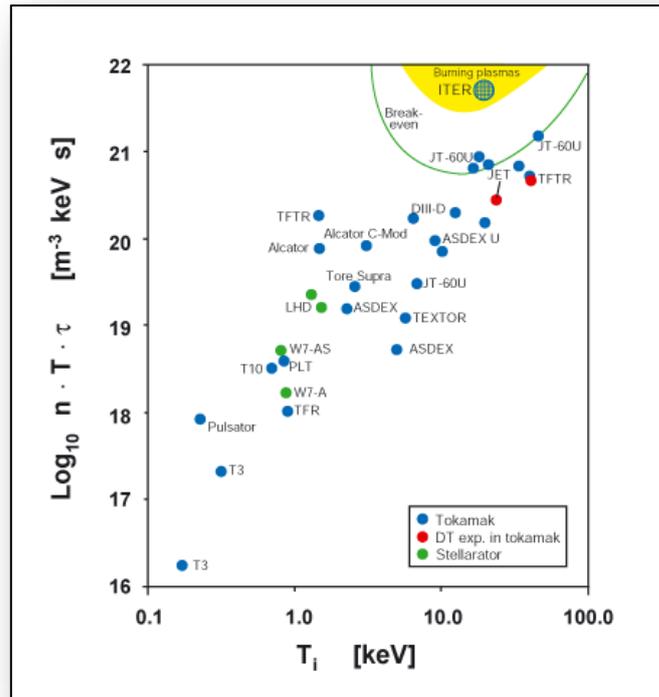


Figura 8

Studi recenti [3] hanno messo in luce che non è più necessario arrivare alla condizione di ignizione in corrispondenza della quale si raggiunge l'autosostentamento delle reazioni di fusione, caratterizzata da un fattore di guadagno $Q = \infty$, in quanto un reattore che idealmente non richiede potenza in ingresso è anche difficilmente controllabile, in quanto non c'è alcun modo di controllare il tasso con cui avvengono le reazioni di fusione al suo interno senza il flusso di potenza di riscaldamento proveniente dall'esterno. Infatti, attualmente si prevede che il funzionamento del futuro reattore per la produzione di energia elettrica avverrà come un amplificatore di energia, con elevati valori di Q , ma sempre con una quantità non nulla di potenza di riscaldamento in ingresso.

Tuttavia è ancora di fondamentale importanza studiare il plasma all'ignizione (studio che attualmente non è stato ancora effettuato, ma per il quale l'Italia sta sviluppando un progetto unico al mondo chiamato IGNITOR [9]) poiché la reazione del futuro reattore dovrà avvicinarsi quanto più possibile alla condizione di autosostentamento.

Come abbiamo già visto, la reazione di fusione $D + T$ è quella attualmente di più facile sfruttamento e quindi gli attuali progetti di reattore a fusione si concentrano sul ciclo D-T. Nel futuro reattore, il cui schema è riportato in Figura 9, le particelle alfa prodotte dalla reazione di fusione $D + T$ rimangono intrappolate nel volume di plasma (tramite il campo magnetico di confinamento) e cedono ad esso la loro energia così da mantenerlo caldo dopo l'iniziale riscaldamento ottenuto con mezzi esterni. Contemporaneamente, i neutroni trasferiscono la loro energia al mantello del reattore, generando il trizio e tramutando la loro energia in calore utilizzabile per produrre energia elettrica.

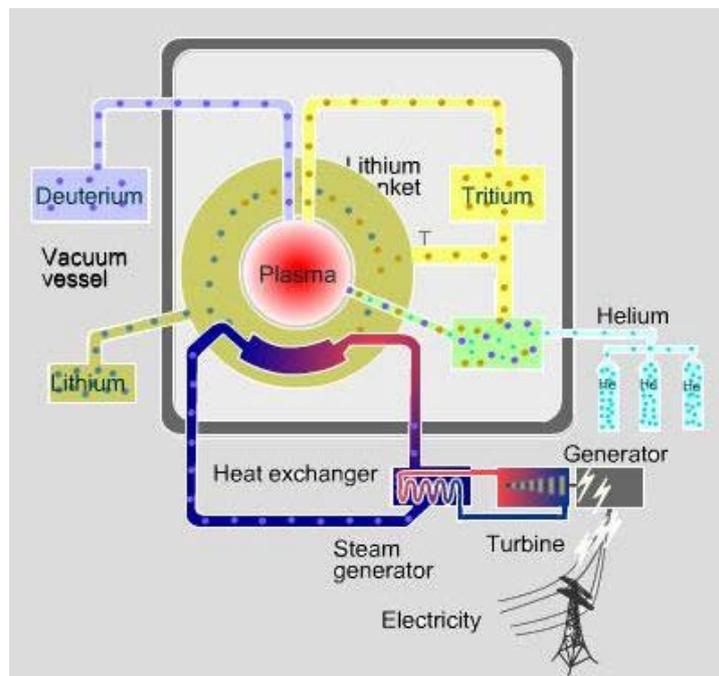


Figura 9

In particolare, l'energia prodotta dalle reazioni di fusione $D + T$ si esplica sotto forma di energia cinetica (calore) dei prodotti della reazione nel seguente modo: i neutroni, che trasportano circa lo 80% dell'energia prodotta, abbandonano il plasma senza interazioni apprezzabili e vengono assorbiti dal mantello di litio, posto intorno al nocciolo del reattore e utilizzato per la rigenerazione del trizio (Fig. 9). Il mantello di litio deve essere sufficientemente spesso (circa 1 m) per assorbire i neutroni di fusione (di 14 MeV). Questi ultimi andranno a riscaldare un fluido che attraverso uno scambiatore di calore permetterà

la produzione di energia elettrica (Fig. 9). I nuclei di elio (particelle alfa), che trasportano circa il 20% dell'energia prodotta da fusione, rimangono invece intrappolati nel plasma poiché elettricamente carichi e trasferiscono ad esso la loro energia riscaldandolo.

ITER sarà il più grande *tokamak* sperimentale mai realizzato e dovrebbe dare l'apporto decisivo per quanto riguarda il raggiungimento di una migliore comprensione sia della fisica del *burning plasma* sia delle problematiche tecnologiche, conoscenze necessarie per poter poi progettare le future centrali a fusione nucleare basate sul confinamento magnetico. ITER sarà operativo tra circa 6 anni e la sperimentazione durerà circa vent'anni. I risultati ottenuti da ITER saranno utilizzati per realizzare DEMO [10], il primo vero reattore a fusione che dovrà dimostrare definitivamente la fattibilità tecnologica della produzione di energia elettrica da fusione nucleare. DEMO dovrà essere realizzato entro la metà del secolo.

La fusione nucleare presenta un'enorme potenzialità come fonte di energia primaria di larga scala [3]. Le sue caratteristiche – come sopra detto – ne determinano l'alto valore strategico dal punto di vista del rispetto dell'ambiente, della disponibilità di combustibile e della sicurezza dell'approvvigionamento. Più precisamente, tali caratteristiche sono: disponibilità praticamente illimitata del combustibile (deuterio e litio per il ciclo D-T) e diffusione quasi omogenea sulla Terra; nessuna emissione di CO₂ né di altri inquinanti atmosferici durante l'esercizio dell'impianto; sicurezza intrinseca in tutte le fasi operative e di arresto della centrale; decadimento della radioattività dei materiali impiegati entro un periodo di 100 anni. Gli inconvenienti sono l'alta complessità tecnologica richiesta e gli alti costi. Ma a queste difficoltà la comunità scientifica ha risposto da tempo avviando un intenso programma internazionale di sperimentazione e di sviluppo tecnologico, il cui massimo sforzo sarà la realizzazione della macchina sperimentale ITER e successivamente del reattore dimostrativo DEMO.

Le attività di ricerca sviluppate negli scorsi decenni hanno consentito di comprendere e risolvere gran parte dei problemi scientifici e tecnologici del confinamento magnetico e del riscaldamento del plasma, determinando un significativo progresso nei risultati ottenuti

con i plasmi sperimentali (a tal proposito si vedano Figura 7 e 8). Allo stato attuale, la dimostrazione della fattibilità scientifica e tecnologica rappresenta una sfida impegnativa che richiede ancora alcuni passi fondamentali.

In questo contesto si colloca il presente lavoro di ricerca che ha come obiettivo primario quello di comprendere maggiormente la complessa fisica non lineare delle onde di *lower hybrid* [11]. Attualmente, alle alte densità di plasma richieste per il futuro reattore, alcune instabilità al bordo del plasma, note come instabilità parametriche [12], limitano l'utilizzo del sistema di riscaldamento e di generazione di corrente non induttiva mediante onde di *lower hybrid*. Urge quindi poter sviluppare accurati modelli elettromagnetici non lineari per la simulazione della propagazione e dell'assorbimento delle onde di *lower hybrid* al bordo del plasma. A questa impellente esigenza ha cercato di rispondere il presente lavoro di ricerca.

Capitolo 2

ONDE DI LOWER HYBRID

2.1 Onde di lower hybrid

Le onde ibride inferiori [11], dette onde di *lower hybrid* (LH), sono modi propri di oscillazione del plasma la cui frequenza di oscillazione è intermedia tra la frequenza di ciclotrone ionica e la frequenza di ciclotrone elettronica, $\omega_{ci} < \omega < \omega_{ce}$, intervallo di frequenze noto come intervallo di *lower hybrid*, che per i *tokamak* moderni corrisponde a frequenze dell'ordine del GHz. Le onde LH sono dei modi quasi elettrostatici con il vettore d'onda quasi completamente allineato con il vettore campo elettrico e sono propaganti solo nel plasma.

Al fine di poter illustrare le caratteristiche di queste onde più nel dettaglio, deriviamo la relazione di dispersione per le onde LH che governa la propagazione di queste onde in un plasma, nell'ipotesi semplificativa di plasma freddo [11].

Partiamo quindi dalle equazioni di Maxwell [11] scritte per il vuoto, nel sistema di unità CGS e con gli effetti del mezzo (plasma) inglobati nella densità di carica $\rho(\mathbf{r}, t)$ e nella densità di corrente $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ che qui riportiamo:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho & \nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} & \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (2.1)$$

Ora, mettendo a sistema le equazioni ai rotori, è possibile ricavare l'equazione d'onda per il campo elettrico $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ che governa la propagazione ondosa in un mezzo generico:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (2.2)$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto.

Ora, per studiare l'equazione d'onda (2.2) ricorriamo ad un'analisi di Fourier nel tempo e nello spazio secondo la quale assumiamo che il campo elettrico vari come la parte reale di $\hat{\mathbf{E}} \exp[j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]$. Affinché, quindi, questa analisi sia valida assumiamo che il plasma sia un mezzo lineare, omogeneo e tempo invariante. Quindi l'equazione d'onda (2.2) diventa:

$$\mathbf{k} \times \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{E}} + \frac{\omega^2}{c^2} \boldsymbol{\varepsilon} : \hat{\mathbf{E}} = 0 \quad (2.3)$$

dove \mathbf{k} è il vettore d'onda, il cui modulo è il numero d'onda $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi f$ è la frequenza angolare e $\boldsymbol{\varepsilon}$ è il tensore dielettrico. Nello scrivere l'equazione (2.3) abbiamo utilizzato la relazione di Ohm $\hat{\mathbf{J}} = \boldsymbol{\sigma} : \hat{\mathbf{E}}$ tra la densità di corrente e il campo elettrico locale, dove $\boldsymbol{\sigma}$ è il tensore conduttività [11]. Nell'approssimazione di plasma freddo, il tensore dielettrico $\boldsymbol{\varepsilon}$ ha la seguente espressione [11]:

$$\boldsymbol{\varepsilon} \equiv \left(\mathbf{I} - j \frac{4\pi\boldsymbol{\sigma}}{\omega} \right) = \begin{pmatrix} S & jD & 0 \\ -jD & S & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

i cui elementi, per un plasma freddo e anisotropo, cioè in presenza di un campo magnetico statico uniforme $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{z}_0$, hanno le seguenti espressioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \equiv 1 - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{p,\alpha}^2}{(\omega^2 - \omega_{c,\alpha}^2)} \\ D \equiv \sum_{\alpha=e,i} s_\alpha \frac{\omega_{c,\alpha}}{\omega} \frac{\omega_{p,\alpha}^2}{(\omega^2 - \omega_{c,\alpha}^2)} \\ P \equiv 1 - \sum_{\alpha=e,i} \frac{\omega_{p,\alpha}^2}{\omega^2} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

dove s_α è il segno della carica della particella di tipo α , $\omega_{c,\alpha} \equiv |q_\alpha| B_0 / m_\alpha c$ è la frequenza di ciclotrone per la particella di tipo α , $\omega_{p,\alpha} \equiv \sqrt{4\pi n_\alpha q_\alpha^2 / m_\alpha}$ è la frequenza di plasma per

la particella di tipo α e $n_\alpha, m_\alpha, q_\alpha$ sono, rispettivamente, la densità imperturbata, la massa e la carica della particella di tipo α .

Per un plasma con una singola specie ionica e per frequenze nell'intervallo di *lower hybrid*, gli elementi del tensore (2.5) assumono la seguente forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} S \cong 1 + \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega_{c,e}^2} - \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega^2} \\ D \cong \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega \omega_{c,e}} \\ P = 1 - \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega^2} \end{array} \right. \quad (2.6)$$

L'equazione d'onda (2.2) ha soluzioni non banali se il determinante del sistema lineare omogeneo associato è nullo. Questa condizione fornisce l'espressione generale della relazione di dispersione, cioè la relazione scalare che permette di ricavare una relazione funzionale tra la pulsazione e il vettore d'onda: $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Per un plasma freddo, omogeneo (o debolmente disomogeneo) la relazione di dispersione per le onde LH assume la seguente espressione:

$$A n_\perp^4 + B n_\perp^2 + C = 0 \quad (2.7)$$

dove $A = S$, $B = (D^2 + (n_\parallel^2 - S)(P + S))$ e $C = P((n_\parallel^2 - S)^2 - D^2)$.

Risolvendo la (2.7) in n_\perp^2 si ottengono le seguenti due soluzioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} n_{\perp s}^2 = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \\ n_{\perp f}^2 = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \end{array} \right. \quad (2.8)$$

dove, poiché nell'intervallo di *lower hybrid* si ha $B < 0$, la prima soluzione $n_{\perp s}^2$, detta onda lenta, è quella corrispondente al segno "+", ovvero quella corrispondente all'indice di rifrazione più grande e quindi alla velocità di fase perpendicolare più piccola, mentre la

seconda soluzione, detta onda veloce, è quella corrispondente al segno “-”, ovvero quella corrispondente all’indice di rifrazione più piccolo e quindi alla velocità di fase perpendicolare più grande. Ciò vuole dire che, per un dato valore dell’indice di rifrazione parallelo $n_{\parallel} \equiv ck_{\parallel}/\omega$ e della frequenza ω , possono propagare nel plasma due tipi di onde: una branca di onde lente ed una branca di onde veloci.

Se il discriminante della (2.7), $\Delta \equiv B^2 - 4AC$, si annulla, le due branche diventano coincidenti e si ha una conversione di modo di onda lenta in onda veloce (o viceversa). Invece quando il discriminante della (2.7) è positivo, $B^2 - 4AC > 0$, le due soluzioni sono distinte e n_{\perp} è reale, essendo quest’ultima la condizione necessaria per avere onde propaganti. Per $B^2 \gg 4AC$, limite generalmente soddisfatto per i parametri tipici di un *tokamak*, le due radici (2.8) sono reali e distinte e possono essere approssimate con le seguenti espressioni:

$$\begin{cases} n_{\perp s}^2 \cong -\frac{B}{A} \cong -\frac{D^2}{S} - \frac{1}{S}(n_{\parallel}^2 - S)(P + S) \\ n_{\perp f}^2 \cong -\frac{C}{B} \cong -\frac{P\left((n_{\parallel}^2 - S)^2 - D^2\right)}{(n_{\parallel}^2 - S)(S + P) + D^2} \end{cases} \quad (2.9)$$

Nel seguito della discussione ci concentreremo solo sulla branca lenta in quanto è quella di interesse per il presente lavoro.

Possiamo notare dall’espressione (2.9) che la branca lenta presenta una risonanza ($n_{\perp} = \infty$) per $S = 0$ in corrispondenza della seguente frequenza di risonanza:

$$\omega_{LH} = \frac{\omega_{ce} \omega_{pi}}{\sqrt{\omega_{ce}^2 + \omega_{pe}^2}} \quad (2.10)$$

nota anche come frequenza di *lower hybrid*. La densità alla quale questa risonanza avviene, per un dato campo magnetico e per una data frequenza operativa, si può ottenere risolvendo l’equazione $\omega = \omega_{LH}$.

Lontano dalla risonanza, è largamente utilizzata l'approssimazione elettrostatica [11-13] che permette di lavorare direttamente con equazioni scalari. Inserendo nella (2.3) l'ipotesi elettrostatica, $\nabla \times \mathbf{E} \approx 0$, e tenendo conto che $\mathbf{E} = -\nabla\phi$, si ottiene la seguente relazione di dispersione scalare:

$$\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{k} = k_{\perp}^2 S + k_{\parallel}^2 P = 0 \quad (2.11)$$

che ha come soluzione:

$$n_{\perp}^2 = -\frac{P}{S} n_{\parallel}^2 \quad (2.12)$$

Confrontando la (2.12) con le (2.9) si riconosce che è la soluzione corrispondente alla branca lenta nel limite di $S \approx 1$, $D^2 \ll 1$, $|P| \gg 1$ e $n_{\parallel}^2 \gg 1$. Nell'approssimazione elettrostatica, il campo elettrico ed il vettore d'onda sono praticamente allineati e questa situazione è ben verificata per modi con un indice di rifrazione sufficientemente grande ($n_{\parallel}^2 \gg 1$).

Notiamo inoltre dall'equazione (2.12) che l'onda lenta presenta un *cut-off* ($n_{\perp} = 0$) per $P \cong 1 - \omega_{p,e}^2/\omega^2 = 0$ ovvero per $\omega = \omega_{p,e}$, che è il *cut-off* di un'onda di plasma elettronica [11]. In particolare, abbiamo che $P > 0 \Leftrightarrow \omega_{pe} < \omega$ e $P < 0 \Leftrightarrow \omega_{pe} > \omega$ e quindi, per la (2.12), si ha che l'onda è, rispettivamente, evanescente e propagante. Considerando ora l'espressione della frequenza di plasma in funzione della densità, $\omega_{p,e}^2 \equiv 4\pi n e^2/m_e$, possiamo individuare una densità di *cut-off* in corrispondenza della quale la frequenza di plasma elettronica eguaglia la frequenza dell'onda lenta:

$$n_{\text{cut-off}} = \frac{m_e \omega^2}{4\pi e^2} \quad (2.13)$$

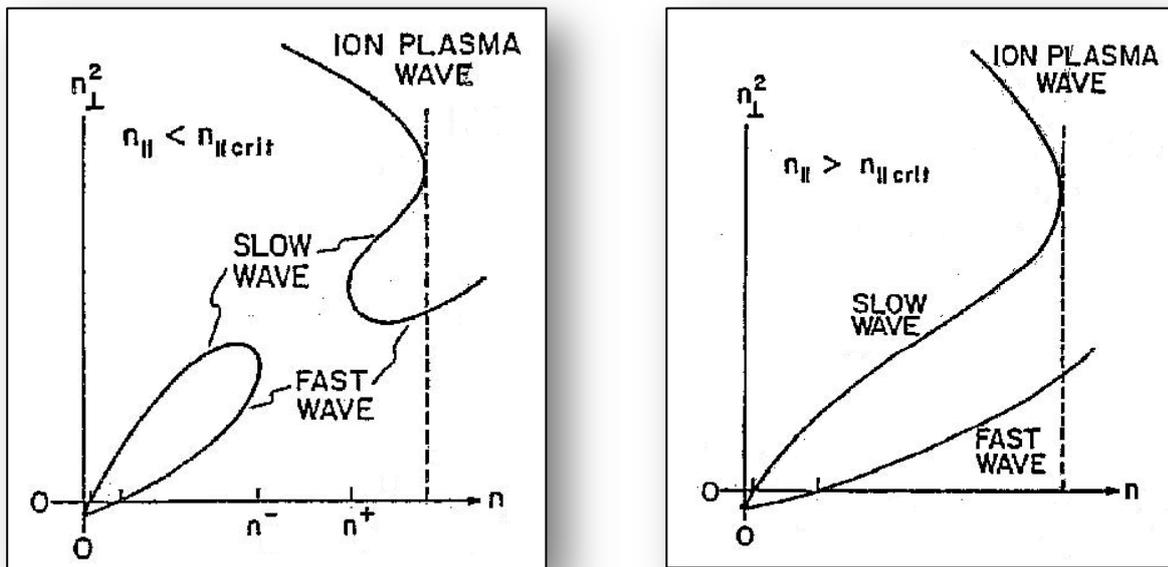
Questa densità, in corrispondenza della quale l'onda viene riflessa, separa le regioni del plasma dove l'onda lenta è evanescente ($n < n_{\text{cut-off}}$) e dove l'onda lenta è propagante ($n > n_{\text{cut-off}}$). Da ciò segue che l'onda lenta è evanescente nel vuoto e nelle regioni di bordo che non hanno una densità sufficientemente elevata. Tuttavia, se il *layer* evanescente è molto stretto, buona parte della potenza dell'onda può ancora raggiungere la regione a più alta densità dove l'onda è propagante. Sperimentalmente si ha che l'accoppiamento

ottimale di potenza che minimizza le riflessioni all'antenna si raggiunge quando la densità al bordo è circa due volte la densità di *cut-off* [13].

Affinché l'onda lenta possa penetrare nelle regioni più interne del plasma senza andare incontro ad una conversione di modo (convertendosi in un'onda veloce) e venire riflessa verso il bordo, bisogna accoppiare al plasma un'onda lenta con un indice di rifrazione parallelo opportuno. Se la frequenza dell'onda è al di sopra della frequenza di risonanza LH ($\omega > \omega_{LH}$), come normalmente si verifica nei *tokamak* moderni, il criterio per l'accessibilità dell'onda è [13]:

$$n_{\parallel} > n_{\parallel crit} = \frac{\omega_{pe,m}}{\omega_{ce}} + \sqrt{S_m} \quad (2.14)$$

dove il pedice "m" indica la valutazione dei corrispondenti termini al *layer* di massima densità che l'onda deve poter raggiungere.



(a)

Figura 1

(b)

In Figura 1 sono rappresentate graficamente le soluzioni (2.9) della relazione di dispersione in funzione della densità di plasma, in una situazione di non accessibilità ($n_{\parallel} < n_{\parallel crit}$) e in una di accessibilità ($n_{\parallel} > n_{\parallel crit}$). Inoltre, in Figura 1, è mostrata un'ulteriore conversione di modo in luogo del *layer* di risonanza LH, non prevista dal

modello di plasma freddo. Infatti, considerando le correzioni termiche all'analisi sopra esposta, si può dedurre matematicamente che, per densità prossime a quelle della risonanza LH, l'onda lenta va incontro ad una conversione di modo, convertendosi in un'onda di plasma ionica [13].

Quando l'onda lenta è eccitata nel plasma da una sorgente, la potenza non è irradiata in tutte le direzioni spaziali ma il campo rimane concentrato in una struttura conica chiamata cono di risonanza [14]. Le traiettorie permesse possono essere derivate dalla relazione di dispersione (2.11) ottenuta nell'ambito dell'approssimazione elettrostatica, da cui segue:

$$\tan^2 \theta = -\frac{P}{S} \cong \frac{\omega_{LH}^2}{\omega^2 - \omega_{LH}^2} \quad (2.15)$$

dove l'angolo θ individua l'angolo che il vettore d'onda ha con il campo magnetostatico e, siccome la velocità di fase \mathbf{v}_f è parallela al vettore d'onda \mathbf{k} , la direzione individuata dall'angolo θ nella (2.15) è anche quella di \mathbf{v}_f rispetto al campo magnetostatico. Inoltre, si può riconoscere che la (2.15) coincide con l'espressione della relazione di dispersione fredda nel limite di onda risonante (nel limite $n \rightarrow \infty$) [11]. Perciò la (2.15) definisce per l'onda lenta una direzione di propagazione limite $\bar{\theta}$ rispetto al campo magnetostatico: per angoli di propagazione $\theta < \bar{\theta}$ l'onda può propagare ma per tutte le altre direzioni di propagazione l'onda è evanescente. Nello spazio, quindi, l'angolo $\bar{\theta}$ individua un vero e proprio cono limite per le direzioni permesse della velocità di fase \mathbf{v}_f che in letteratura è noto come cono della velocità di fase [14]. Ora, poiché per grandi valori dell'indice di rifrazione (nel limite $n \rightarrow \infty$) la velocità di fase e la velocità di gruppo sono perpendicolari tra di loro, l'angolo $\bar{\theta}$ è complementare con l'angolo individuato dalla velocità di gruppo \mathbf{v}_g rispetto al campo magnetostatico, $\bar{\theta} + \bar{\bar{\theta}} = \pi/2$, da cui segue che anche per la velocità di gruppo è definito un cono limite di apertura $\bar{\bar{\theta}}$ ($\tan^2 \bar{\bar{\theta}} = 1/\tan^2 \bar{\theta}$) detto cono della velocità di gruppo o più comunemente cono di risonanza [14]. Questo cono delimita nel plasma le direzioni secondo le quali può fluire l'energia dell'onda lenta e per angoli θ che tendono all'angolo limite $\bar{\theta}$, l'energia dell'onda tende a propagarsi lungo direzioni $\bar{\bar{\theta}}$. Inoltre dalla (2.15) segue che, all'avvicinarsi dell'onda al *layer* di risonanza LH ($\omega = \omega_{LH}$), la direzione

di propagazione \mathbf{k} diventa perpendicolare al campo magnetostatico ($\bar{\theta} \rightarrow \pi/2$) mentre l'energia dell'onda tende a propagarsi nella direzione toroidale ($\bar{\theta} \rightarrow 0$).

Quindi, l'energia dell'onda si propaga dentro una struttura conica con velocità pari alla velocità di gruppo $\mathbf{v}_g \equiv d\omega/d\mathbf{k} = \partial\omega/\partial k_\perp \hat{\mathbf{e}}_\perp + \partial\omega/\partial k_\parallel \hat{\mathbf{e}}_\parallel$ e quest'ultima può essere calcolata a partire dalla relazione di dispersione $\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 0$ ottenuta nel caso elettrostatico (2.11). A tal fine consideriamo come funzione dielettrica l'espressione scalare:

$$\varepsilon(\omega(k_\perp, k_\parallel), k_\perp, k_\parallel) = k_\perp^2 S + k_\parallel^2 P \quad (2.16)$$

Calcolando la derivata totale della (2.16) rispetto a k_\perp e k_\parallel ed uguagliandola a zero, è possibile ottenere le seguenti espressioni per le componenti della velocità di gruppo [15]:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{g,\perp} \equiv \frac{\partial\omega}{\partial k_\perp} = -\frac{\partial\varepsilon/\partial k_\perp}{\partial\varepsilon/\partial\omega} = -\frac{k_\perp S}{k_\parallel^2 \Gamma} \\ v_{g,\parallel} \equiv \frac{\partial\omega}{\partial k_\parallel} = -\frac{\partial\varepsilon/\partial k_\parallel}{\partial\varepsilon/\partial\omega} = -\frac{1 P}{k_\parallel \Gamma} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

dove $\Gamma \equiv \omega \{ (\omega_{pe}^2/\omega^4) - (P/S) [(\omega_{pe}^2/\omega_{ce}^4) + (\omega_{pi}^2/\omega^4)] \}$.

Inoltre, la velocità di fase nelle direzioni perpendicolare e parallela ha le seguenti espressioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_{f,\perp} \equiv \frac{\omega}{k_\perp} \\ v_{f,\parallel} \equiv \frac{\omega}{k_\parallel} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Confrontando le espressioni (2.17) e (2.18) si riconosce che l'onda lenta è un'onda *backward* nella direzione perpendicolare, cioè la velocità di fase e la velocità di gruppo hanno direzioni opposte nella direzione perpendicolare. Quindi, per avere un'onda che si propaga dal bordo al centro del plasma, cioè per avere $v_{g,\perp} > 0$, bisogna scegliere un numero d'onda perpendicolare di segno negativo, $k_\perp < 0$, quando si risolve la relazione di dispersione fredda (2.11).

2.2 Impiego delle onde di lower hybrid nei tokamak

Il plasma, al crescere della temperatura, si comporta come un mezzo non collisionale e la resistività del plasma diminuisce come $T^{-3/2}$ e con essa, a parità di corrente di plasma, la potenza di riscaldamento, mentre aumentano le perdite per radiazione e per trasporto di calore. Come conseguenza di ciò, in un *tokamak*, il riscaldamento per effetto *joule*, anche detto riscaldamento ohmico, diventa sempre meno efficiente al crescere della temperatura ed è quindi chiaro che non è possibile raggiungere le temperature di fusione solo con questo sistema. Da qui nasce la necessità di sviluppare sistemi per il riscaldamento ausiliario del plasma.

Attualmente, il riscaldamento ausiliario si realizza utilizzando principalmente due sistemi: il primo, mediante sistemi per l'iniezione di fasci di neutri [6] che utilizzano particelle neutre ad alta energia in grado di penetrare il campo magnetostatico di confinamento del plasma e trasferire energia e momento al plasma; il secondo, quello d'interesse per la presente Tesi, mediante sistemi di riscaldamento a radiofrequenza [6] che con apposite antenne poste al bordo del plasma lanciano onde elettromagnetiche ad alta potenza la cui energia è trasferita alle particelle del plasma mediante interazioni risonanti onda-particella.

Per quanto riguarda il riscaldamento basato sull'assorbimento di onde elettromagnetiche sono in uso vari tipi di antenne progettate per differenti tipi di riscaldamento a radiofrequenza: ognuna di esse utilizza una differente frequenza elettromagnetica che corrisponde ad un determinato meccanismo di interazione risonante onda-particella. In corrispondenza di ciascuna di queste frequenze di risonanza si ha un assorbimento non collisionale di energia localizzato in una regione interna del plasma. Quattro sistemi di questo tipo sono stati maggiormente studiati ed utilizzati nei *tokamak*. Il sistema a più bassa frequenza prevede l'utilizzo delle onde di Alfvén [6] e tipicamente richiede frequenze di pochi megahertz. Salendo a frequenze di alcune decine di megahertz, è utilizzabile il sistema che opera alle frequenze ciclotroniche ioniche [6] per le quali si ha una risonanza quando la frequenza dell'onda corrisponde a quella di alcuni multipli della

frequenza di ciclotrone di una o più specie ioniche presenti nel plasma. Aumentando ancora le frequenze impiegate fino ad alcuni gigahertz, è utilizzabile il sistema che funziona alle frequenze delle onde di *lower hybrid* [6]. Infine per frequenze superiori a 30 GHz, esistono i sistemi che funzionano alle frequenze ciclotroniche elettroniche [6] per le quali si ha una risonanza quando la frequenza dell'onda corrisponde alla frequenza di ciclotrone degli elettroni.

Sperimentalmente è possibile utilizzare le onde LH secondo due schemi differenti di assorbimento. Il primo è uno schema finalizzato esclusivamente al riscaldamento del plasma che utilizza le onde lente con frequenza pari alla frequenza di risonanza ω_{LH} . Secondo questo schema, in un plasma non omogeneo di un *tokamak* in cui la densità varia lungo la direzione radiale, si ha la possibilità che in corrispondenza di un *layer* interno al plasma la frequenza di *lower hybrid* eguagli la frequenza dell'onda propagante, cioè $\omega_{LH} = \omega$. In questo caso il modello di plasma freddo prevede che l'onda venga completamente assorbita e si ha la così detta risonanza LH. Le correzioni termiche alla relazione di dispersione fredda modificano questa situazione e si prevede invece che in un plasma caldo, per densità prossime a quelle della risonanza LH, l'onda vada incontro ad una conversione di modo, convertendosi in un'onda di plasma ionica, ottenendo alla fine un riscaldamento stocastico degli ioni [16,17]. Il secondo schema invece ha come target gli elettroni e può funzionare anche se nel plasma non esiste un *layer* risonante. Anzi, normalmente si opera con frequenze ω al di sopra di $2 \omega_{LH}$ [18] per evitare indesiderati decadimenti parametrici in onde ciclotroniche ioniche. Infatti questo schema sfrutta un altro meccanismo risonante per trasferire energia al plasma in modo non collisionale noto come *Landau damping* [4,6,11] che si ha quando la velocità di fase dell'onda LH eguaglia la velocità degli elettroni nella direzione parallela al campo magnetostatico. Il trasferimento di energia alla popolazione elettronica è consistente quando il *Landau damping* coinvolge una porzione rilevante di elettroni veloci localizzati nella coda della funzione di distribuzione termica delle velocità degli elettroni (maxwelliana). Calcoli quasi-lineari [19] mostrano che le onde LH sono fortemente assorbite quando $\omega/k_{\parallel} v_{th,e} = 2.5 - 4$ dove $v_{th,e} = \sqrt{2 T_e / m_e}$ è la velocità termica elettronica.

Inizialmente le onde di *lower hybrid* furono utilizzate secondo il primo schema di riscaldamento (quello che prevede la risonanza LH) al fine di ottenere un riscaldamento della popolazione ionica del plasma. Purtroppo, dopo diversi esperimenti con esito negativo a causa di forti interazioni non lineari al bordo del plasma, si è abbandonato questo schema di riscaldamento ed ora le onde di *lower hybrid* sono impiegate solo con il secondo schema per il riscaldamento degli elettroni e, soprattutto, per guidare corrente non induttiva nel plasma.

Infatti, nei *tokamak* attuali la durata della configurazione di equilibrio è limitata dalla durata della corrente di plasma e quindi dal flusso magnetico disponibile nel solenoide centrale. La corrente di plasma indotta in esso mediante il trasformatore, di cui il plasma costituisce l'avvolgimento secondario, viene generata per induzione elettromagnetica e, quindi, in maniera pulsata. Di conseguenza, attualmente, i *tokamak* non possono funzionare in modo continuo ed il funzionamento in regime stazionario, necessario per il futuro reattore, richiederà l'adozione di diversi meccanismi di generazione di corrente non induttiva nel plasma.

Le onde LH si sono rivelate un ottimo strumento per la generazione di corrente non induttiva, processo noto come *lower hybrid current drive* (LHCD) [6,11,18]. Questo tipo di applicazione riveste particolare importanza nelle macchine a confinamento magnetico (*tokamak*) poiché permette a queste macchine di lavorare in modo stazionario e di migliorare le condizioni di confinamento dell'energia del plasma per tempi più lunghi di quelli tipici delle semplici scariche generate con il trasformatore.

L'accoppiamento di potenza elettromagnetica con questi modi del plasma è realizzato al bordo del plasma mediante l'utilizzo di schiere di guide d'onda rettangolari (*grill*) [20]. Lo spettro dell'onda lanciato dal *grill* è determinato dalle dimensioni, dalla frequenza del lanciatore e dalla differenza di fase tra le guide d'onda. Infatti, mediante un opportuno sfasamento, è possibile accoppiare al plasma uno spettro asimmetrico (Fig. 2) nel numero d'onda parallelo che è in grado di modificare la coda della funzione di distribuzione delle

velocità parallele solo in una direzione. Tale asimmetria indotta nella maxwelliana produce un flusso netto di elettroni nella direzione toroidale del campo magnetostatico.

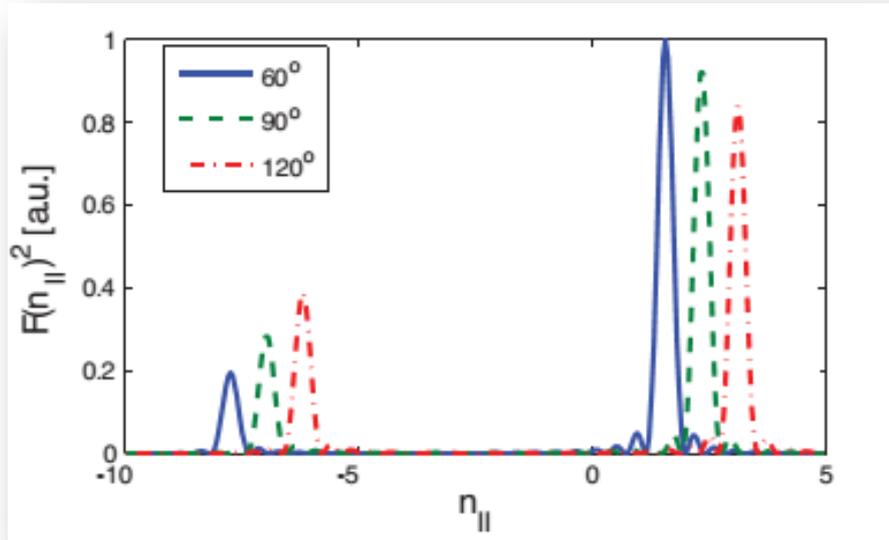


Figura 2

Il picco principale dello spettro che porta la maggior parte della potenza accoppiata si ha in corrispondenza del numero d'onda parallelo dato dalla seguente relazione [13,20]:

$$k_{\parallel o} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta z} \quad (2.19)$$

dove $k_{\parallel o} = (\omega_o/c) n_{\parallel o}$ è il numero d'onda parallelo di picco, $n_{\parallel o}$ è l'indice di rifrazione parallelo corrispondente al picco imposto dal *grill*, $\Delta\varphi$ è la differenza di fase tra due guide d'onda adiacenti, Δz è il periodo spaziale dell'*array*.

Anche la larghezza del picco è determinata dalla geometria del *grill*. Infatti, la larghezza a metà altezza del picco è inversamente proporzionale alla larghezza toroidale del lanciatore ed è data dalla seguente equazione [13]:

$$\Delta k_{\parallel} = \frac{2\pi}{L_z} \quad (2.20)$$

dove $L_z = Nd$ è la larghezza toroidale del *grill*, N è il numero di guide d'onda radianti e d è la distanza tra i punti centrali di due guide d'onda adiacenti (periodo spaziale).

Il numero d'onda parallelo di picco è un parametro importante per l'efficienza di *current drive* in quanto quest'ultima scala come $n_e/n_{||}^2$ e, di conseguenza, è importante avere la potenza accoppiata concentrata il più possibile su un $n_{||0}$ piccolo. Quindi la massima efficienza di *current drive* raggiungibile è fortemente limitata dalla condizione di accessibilità sull'indice di rifrazione parallelo. Inoltre, anche la larghezza del picco è importante per l'efficienza di *current drive* in quanto quest'ultima risulta inversamente proporzionale alla larghezza del picco principale.

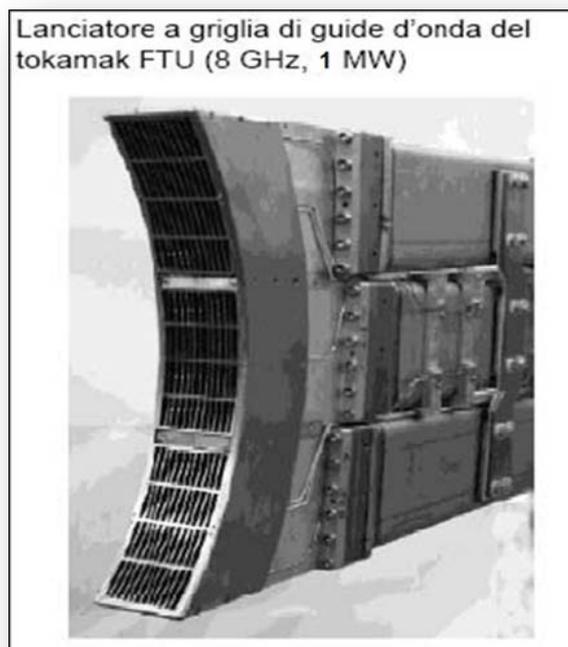


Figura 3

In Figura 3 è mostrato il lanciatore di onde LH operativo su FTU (Frascati Tokamak Upgrade), il *tokamak* che si trova presso i laboratori ENEA di Frascati [20]. Antenne di questo tipo sono poste in prossimità del plasma di *scrape-off*, cioè nella zona più esterna e meno confinata del plasma localizzata oltre l'ultima superficie magnetica chiusa, in modo tale da realizzare un accoppiamento antenna-plasma che massimizzi il trasferimento di potenza.

Recentemente, un grande sforzo di ricerca è stato speso sui così detti scenari avanzati nei quali il profilo radiale di corrente è modificato per ottenere un miglior confinamento del

plasma mediante la formazione di barriere interne al trasporto [21]. La corrente autoprodotta dal plasma, nota come corrente di *bootstrap*, è legata ai gradienti di pressione interni al plasma e ha una grande importanza nella formazione del profilo di corrente. Sono stati sperimentati vari sistemi per guidare corrente fuori asse mediante l'iniezione di atomi neutri e l'impiego di sistemi alla frequenza di ciclotrone elettronica. Tuttavia entrambi i sistemi sono risultati meno efficienti del LHCD che, tra i sistemi di *current drive* attualmente operativi, è il miglior candidato per modificare il profilo fuori asse della corrente di plasma [18]. Questo apre la possibilità di controllare la corrente di plasma nel reattore e contestualmente di poter controllare la formazione di barriere interne al trasporto in scenari avanzati di funzionamento del *tokamak* per regimi di funzionamento stazionari.

2.3 Instabilità parametriche

Il plasma è estremamente ricco di fenomeni ondulatori. In particolare, un plasma magnetizzato, o magnetoplasma, supporta un grande numero di modi elettromagnetici ed elettrostatici [11,15]. A basse densità di potenza, e quindi per piccole ampiezze dei campi, i modi sono mutuamente indipendenti e forniscono una buona descrizione della risposta del plasma a perturbazioni locali e a campi esterni. A più alte densità di potenza, cioè per grandi ampiezze dei campi, i modi del plasma diventano accoppiati e possono scambiarsi energia e momento tra di loro. Queste interazioni non lineari sono importanti in molti esperimenti di laboratorio finalizzati al riscaldamento del plasma e al *current drive* mediante l'impiego di elevate potenze alle frequenze delle microonde. In tali esperimenti, un'onda elettromagnetica di alta potenza è lanciata nel plasma mediante un'antenna localizzata al bordo del plasma. L'onda attraversa il plasma fino a raggiungere un *layer* di risonanza interno al plasma dove una frequenza locale propria del magnetoplasma eguaglia la frequenza dell'onda incidente e l'onda è linearmente convertita in un altro modo o può essere completamente assorbita per *Landau damping*. Tuttavia, in corrispondenza della risonanza, l'ampiezza del campo elettrico dell'onda aumenta e

quindi può decadere parametricamente in altri modi. Questa fenomenologia non lineare può accadere anche nelle regioni più esterne del plasma dove l'onda può eccitare non linearmente altri modi del plasma e perdere la sua energia ben prima di raggiungere la risonanza desiderata. Quest'ultimo caso è quello preso in esame nel presente lavoro.

Secondo la teoria delle instabilità parametriche (IP) [12], per esperimenti ad alte densità di potenza, il plasma è sede di un accoppiamento non lineare tra le onde di *lower hybrid*. In particolare, nell'ambito dell'approssimazione elettrostatica e nel limite di plasma omogeneo ed illimitato, si ha un'interazione a quattro onde per cui l'onda di *lower hybrid* di pompa (con frequenza angolare ω_0 e potenziale $\phi_0 e^{j(\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r})}$), eccitata nel plasma dalla potenza a radiofrequenza accoppiata al bordo mediante l'antenna, è accoppiata con un'onda di *sideband* inferiore (con frequenza angolare $\omega_1 < \omega_0$ e con potenziale $\phi_1 e^{j(\omega_1 t - \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r})}$) e con un'onda di *sideband* superiore (con frequenza angolare $\omega_2 > \omega_0$ e con potenziale $\phi_2 e^{j(\omega_2 t - \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r})}$), generate dalle fluttuazioni termiche del plasma. Questo accoppiamento non lineare tra modi di alta frequenza è mediato da una quarta onda di bassa frequenza (con frequenza angolare $\omega \ll \omega_0$ e potenziale $\phi e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$). Il modo di bassa frequenza, corrispondente al canale di decadimento parametrico più efficiente nel plasma di bordo di un *tokamak* [23], è quello delle onde ionico-acustiche del plasma. Queste onde sono dei quasi-modi poiché, per i parametri di plasma di bordo, sono dei modi evanescenti. Dalla conservazione dell'energia e del momento dei modi accoppiati discendono le relazioni che legano le frequenze angolari e i vettori d'onda dei modi accoppiati, dette regole di selezione: $\omega_{2,1} = \omega \pm \omega_0$, $\mathbf{k}_{2,1} = \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_0$.

L'analisi delle instabilità parametriche si basa sulla soluzione perturbativa fino al secondo ordine del sistema di equazioni Poisson-Vlasov [11] per i modi elettrostatici accoppiati. Generalmente si considera il seguente *ordering*: la funzione di distribuzione di Maxwell corrisponde all'ordine zero, le variazioni prodotte dall'onda di pompa al primo ordine e le perturbazioni dei modi di bassa frequenza al secondo ordine (con $\phi_0 \gg \phi, \phi_{1,2}$). Secondo questa analisi l'onda di pompa batte con le fluttuazioni di densità di bassa frequenza producendo le onde di *sideband*, le quali, a loro volta, battono con la pompa e producono

un contributo di bassa frequenza che rinforza la perturbazione di bassa frequenza (Figura 4). Un aspetto importante del meccanismo delle instabilità parametriche è la forza ponderomotrice [11,15], frutto del battimento di due modi di alta frequenza, la quale rappresenta il canale di trasferimento di energia e momento dai modi di alta frequenza ai quasi-modi di bassa frequenza, i quali, in assenza di questo accoppiamento non lineare con la pompa, non potrebbero propagare essendo evanescenti.

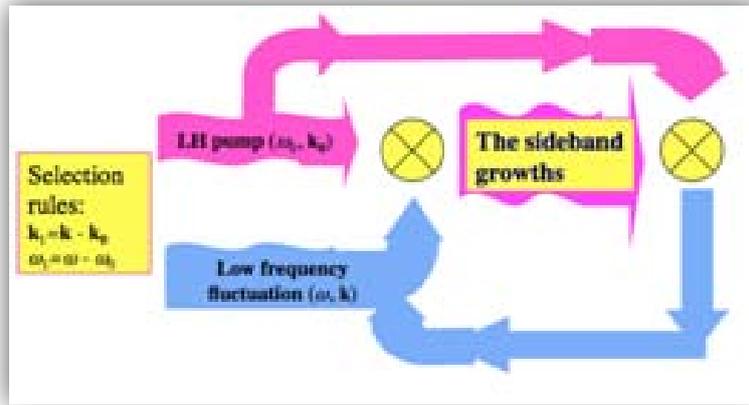


Figura 4

L'accoppiamento non lineare si verifica nelle condizioni determinate dalla soluzione della relazione di dispersione parametrica [12]:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\mu_1(\omega_1, \mathbf{k}_1)}{\varepsilon(\omega_1, \mathbf{k}_1)} + \frac{\mu_2(\omega_2, \mathbf{k}_2)}{\varepsilon(\omega_2, \mathbf{k}_2)} \quad (2.21)$$

e i coefficienti di accoppiamento non lineare sono dati dalla seguente espressione:

$$\mu_{1,2}(\omega, \mathbf{k}) \equiv \frac{\chi_e(\omega) - \varepsilon(\omega)}{\chi_e(\omega)} \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega_0^2} \frac{\omega_{p,i}^2}{4k^2 c_s^2} \left(1 + \frac{\omega}{k_{\parallel} v_{th,e}} Z(\omega/k_{\parallel} v_{th,e}) \right)^2 \sin \delta_{1,2} (1 + \eta_{1,2}^2) \frac{u^2}{c_s^2}$$

dove χ_e è la suscettività elettronica, ε è la funzione dielettrica, u è la velocità di *drift* ExB , c_s è la velocità del suono, Z è la funzione di dispersione del plasma, $\delta_{1,2} \equiv \angle(\mathbf{k}_{1,2,\perp}, \mathbf{k}_{o,\perp})$ sono gli angoli tra i vettori d'onda perpendicolari delle *sideband* superiore e inferiore ed il vettore d'onda perpendicolare della pompa, $\eta_{1,2} \equiv \omega_{c,e} k_{z,0} k_{z,1} / (\omega_0 k_{\perp,0} k_{\perp,1} \sin \delta_{1,2})$.

L'analisi delle IP è condotta risolvendo numericamente la (2.21) nella frequenza complessa del modo di bassa frequenza, ω , e l'instabilità parametrica ha luogo se $\gamma \equiv \text{Im}(\omega) > 0$ e $\text{Re}[\varepsilon(\omega_{1,2}, \mathbf{k}_{1,2})] \approx 0$, il che significa che le *sideband* sono propaganti e crescono superando le perdite dovute al *damping* di Landau implicitamente contenuto nella parte immaginaria della frequenza complessa; γ è il *growth rate* delle *sideband* poiché $\omega_{2,1} = \omega \pm \omega_o$ e la frequenza di pompa ω_o è una quantità reale.

In corrispondenza di IP con forti *shift* in frequenza ($\omega \sim 10\text{MHz}$) la *sideband* superiore è evanescente ($|\text{Re}[\varepsilon(\omega_2, \mathbf{k}_2)]| \gg 0$) e ciò risulta in un allargamento spettrale asimmetrico con le *sideband* inferiori favorite. Questa asimmetria è osservata sperimentalmente nei forti allargamenti spettrali misurati dalle sonde RF nei moderni esperimenti di LHCD ad alta densità. È stato osservato [22] che questa asimmetria dello spettro non può essere spiegata dalla teoria dello *scattering* lineare, mentre il fenomeno delle IP è l'unico in grado di dare una descrizione completa della fenomenologia non lineare osservata sperimentalmente [23,24].

Infine, tenendo conto delle perdite convettive prodotte dalla estensione spaziale finita della regione di plasma illuminata dalla pompa e dalle disomogeneità di plasma [23,24] è possibile calcolare l'effettivo *growth rate* delle *sideband*. Quest'ultima analisi ha evidenziato che solo gli angoli $\delta_{1,2}$ piccoli sono rilevanti per l'analisi delle IP poiché solo questi angoli massimizzano il *growth rate* e, al contempo, minimizzano le perdite convettive.

2.4 Sperimentazione con le onde di lower hybrid

I primi esperimenti con le onde di *lower hybrid*, come già anticipato, erano finalizzati alla verifica della predizione teorica di riscaldamento ionico mediante risonanza LH all'interno del plasma [16,17]. Sfortunatamente questo obiettivo non fu raggiunto a causa della mancata penetrazione nel plasma della potenza RF accoppiata dall'antenna e solo forti instabilità parametriche al bordo del plasma furono osservate [25-28]. La tipica segnatura di questi effetti non lineari, rilevati da sonde RF posizionate dentro e fuori la macchina,

consiste in un marcato allargamento spettrale (fino a circa 40 MHz) intorno alla frequenza operativa (di alcuni GHz). Gli spettri osservati sono asimmetrici con una parte prevalente corrispondente alle componenti spettrali con frequenza inferiore a quella operativa f_0 (*sideband* inferiori). Alle alte densità richieste per il riscaldamento ionico mediante risonanza LH (cioè quando $\omega_o = \omega_{LH}$), lo spettro RF mostra anche *sideband* LH shiftate di alcune armoniche della frequenza di ciclotrone degli ioni, note in gergo come satelliti, con uno *spread* tipico di $\Delta f / f_0 \approx 0.3$ [28]. La teoria delle instabilità parametriche (IP) ha fornito un valido background teorico per l'interpretazione di questi effetti non lineari riuscendo a dare una valida interpretazione degli spettri misurati durante gli esperimenti LH finalizzati al riscaldamento ionico [27,28].

La possibilità di guidare corrente non induttiva mediante onde LH in plasmi di macchine toroidali a confinamento magnetico (*tokamak*) fu prevista teoricamente nel 1978 da Fisch [29,30] e verificata sperimentalmente nel 1982 sul *Princeton Large Torus* da Bernabei [31]. Le onde di *lower hybrid*, come già accennato, hanno la caratteristica molto interessante di essere fortemente assorbite per *Landau damping* [11,30] sulle code veloci della funzione di distribuzione termica degli elettroni in corrispondenza dell'intervallo di velocità $2.5 v_{th,e} - 4 v_{th,e}$ nella direzione parallela al campo magnetostatico. Conseguentemente queste onde sono adatte per il controllo del profilo di corrente di plasma fuori asse ($r/a > 0.6$ dove $r = a$ è il raggio minore del plasma in corrispondenza dell'ultima superficie magnetica chiusa) in plasmi rilevanti per il futuro reattore con alte temperature elettroniche. Purtroppo l'estrapolazione del LHCD alle alte densità di plasma di interesse per il futuro reattore, utile per la generazione di corrente non induttiva nel plasma di un *tokamak*, appare problematica per l'insorgere di effetti non lineari al bordo del plasma che impediscono la penetrazione della potenza RF accoppiata nelle zone più interne del plasma.

Il LHCD sarebbe uno strumento indispensabile per poter raggiungere le condizioni di stabilità e confinamento necessarie in regimi di funzionamento stazionario del futuro reattore a fusione. Tuttavia, due problemi devono essere risolti per poter comprendere gli esperimenti basati sullo schema dello LHCD.

Il primo problema, noto come *spectral gap problem* [18,24], consiste nello spiegare i meccanismi che allargano e up-shiftano lo spettro di potenza lanciato dall'antenna LH (tipicamente piccato a $n_{\parallel} \approx 2$) nell'indice di rifrazione parallelo n_{\parallel} al campo magnetico di confinamento. È necessario invocare questa alterazione dello spettro di potenza accoppiato per poter giustificare la quantità di corrente non induttiva osservata negli esperimenti a bassa densità che altrimenti, secondo la teoria lineare delle onde LH, sarebbe dovuta essere di molto inferiore. La corrente guidata è infatti spiegabile solo con l'eccitazione di onde LH con velocità di fase molto più piccole di quelle previste dalla teoria lineare. Questo significa permettere la risonanza di Landau $n_{\parallel} = v_{\parallel} / c$ (dove c è la velocità della luce nel vuoto) con una frazione significativa di elettroni in accordo con la funzione di distribuzione $f(v_{\parallel})$ nelle velocità parallele al campo magnetostatico. La differenza tra l'indice di rifrazione lanciato dall'antenna e quello invocato per spiegare l'assorbimento anomalo è noto come *spectral gap*.

Il secondo problema, noto come *density limit*, consiste nell'osservazione sperimentale di una soglia nella densità media di linea al di sopra della quale gli effetti di *current drive* diventano molto inferiori a quelli attesi dalla teoria del LHCD e rapidamente scompaiono [32]. Questo limite si presenta anche quando le densità di bordo si avvicinano ai valori previsti per il futuro reattore, rendendo incerto l'utilizzo del sistema LHCD in ITER.

Per poter spiegare lo *spectral gap problem* nelle sperimentazioni finalizzate al LHCD è stato proposto di considerare l'effetto della geometria toroidale della configurazione magnetica del *tokamak* nella propagazione delle onde LH all'interno del plasma. Questa modellizzazione è stata in grado di spiegare un significativo *upshift* in n_{\parallel} dello spettro accoppiato [33-37], anche includendo gli effetti del *ray chaos* [38-43] e del *ripple* del campo magnetostatico [44,45]. Tuttavia, notiamo che è problematico valutare l'effetto della geometria toroidale poiché generalmente produce un significativo allargamento spettrale solo per regimi di multipassaggio radiale dei raggi LH. Questo effetto non è infatti propriamente trattato in molti codici numerici per il LHCD poiché le ipotesi della teoria iconale [11], alla base di questi codici, sono spesso non soddisfatte. L'ottica geometrica,

infatti, non è più corretta in prossimità dei *layer* di *cut-off* localizzati al bordo del plasma e in prossimità dei *layer* di riflessione localizzati più internamente al plasma. In plasmi con temperatura elettronica centrale $T_{eo} < 10$ keV, come nella maggior parte dei plasmi nelle sperimentazioni odierne di LHCD, i profili di temperatura non sono sufficienti per produrre un assorbimento completo dell'onda al primo passaggio e i raggi LH vengono riflessi numerose volte prima di poter essere assorbiti. Quindi, solo codici *full-wave* dovrebbero essere utilizzati per poter trattare correttamente la propagazione e il *damping* delle onde LH nella maggior parte degli esperimenti odierni. Anche la spiegazione del *upshift* in n_{\parallel} mediante il *ripple* del campo magnetostatico [46] è questionabile. Infatti, per poter considerare correttamente questo effetto, la simmetria toroidale usualmente assunta nei calcoli di *ray-tracing* dovrebbe essere rimossa. In conseguenza di ciò la coordinata toroidale nelle equazioni di *ray-tracing* non è più ignorabile ed il momento coniugato non è più costante. Analisi *full-wave* del LHCD [47,48] hanno evidenziato l'importanza degli effetti diffrattivi sull'effettivo spettro in n_{\parallel} che interagisce con gli elettroni del plasma. Tuttavia, l'effettiva validità fisica del regime di multipassaggio rimane ancora incerta poiché potrebbero essere presenti forti effetti non lineari al bordo del plasma in grado di determinare un forte assorbimento su un singolo passaggio, come nel caso delle IP considerate nel presente lavoro. Inoltre, in plasmi ad alta temperatura come quelli di ITER, siamo sicuramente in presenza di regimi di forte assorbimento su singolo passaggio e gli effetti non lineari al bordo avrebbero quindi un ruolo fondamentale.

L'osservazione dell'allargamento spettrale in n_{\parallel} [49], dovuto ad onde LH eccitate parametricamente nel plasma, suggerisce che le IP possano avere un ruolo importante sulla propagazione delle onde LH all'interno del plasma in esperimenti di LHCD. In sperimentazioni al JET, con temperatura elettronica centrale $T_{eo} \sim 8$ keV, finalizzate al miglioramento del confinamento del plasma mediante LHCD [50], è stata dimostrata l'importanza di considerare le IP al bordo del plasma per spiegare i profili di deposizione di potenza osservati [23,24,51]. L'allargamento spettrale in n_{\parallel} indotto da IP è stato riconosciuto sufficiente per avere un completo assorbimento al primo passaggio radiale della potenza LH accoppiata e la stimata densità di corrente guidata dalle onde LH è

risultata in accordo con le misurazioni delle diagnostiche. In questi scenari di singolo passaggio, l'approssimazione iconale è risultata appropriata a patto di prendere in considerazione contestualmente l'allargamento spettrale indotto da IP.

Le interazioni parametriche al bordo del plasma sono state anche considerate come principali candidate per spiegare l'insorgere del *density limit* in esperimenti di LHCD [49]. La scomparsa del *current drive* è infatti accompagnata da un forte aumento dell'attività delle IP [32]. Il *damping* collisionale [37] e lo *scattering* lineare da fluttuazioni di densità [52,53] sono stati proposti come meccanismi alternativi per spiegare l'assorbimento anomalo della potenza LH accoppiata al bordo del plasma in scenari ad alta densità. Tuttavia il meccanismo di *scattering* lineare è stato riconosciuto insufficiente per interpretare gli esperimenti di LHCD in C-Mod [22]. Anche il *damping* collisionale è stato riconosciuto insufficiente per spiegare il *damping* della potenza LH al bordo del plasma nelle sperimentazioni del JET in regimi di assorbimento al primo passaggio [54]. Infatti, il confronto degli effetti LH tra plasmi a bassa triangolarità ($\delta \sim 0.25$) e ad alta triangolarità ($\delta \sim 0.35$) al JET ha confermato il ruolo della fisica del bordo [54]. Sono stati osservati chiari effetti di LHCD nelle configurazioni di basso δ , che sono caratterizzate da profili di densità più piccati con più bassa densità alla periferia del plasma ($\sim 0.2 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ at $r/a \sim 0.8$). Invece, la potenza LH accoppiata non è penetrata nel plasma nelle configurazioni ad alto δ che avevano una densità più alta alla periferia del plasma ($\sim 0.4 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ at $r/a \sim 0.8$).

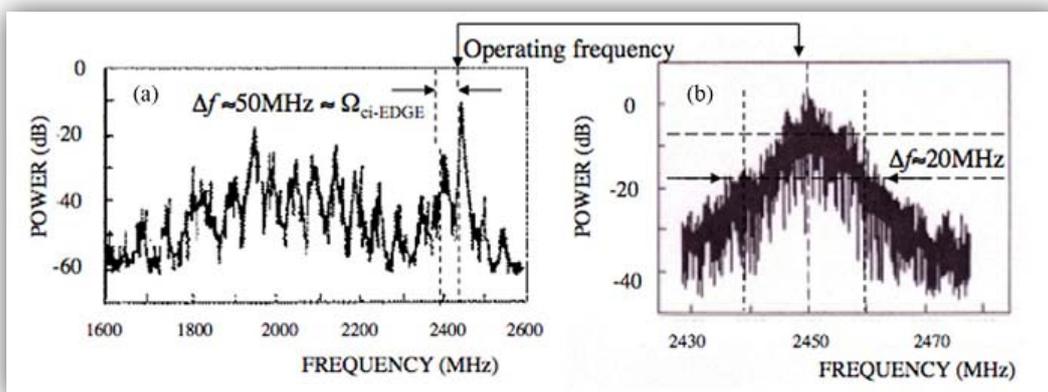
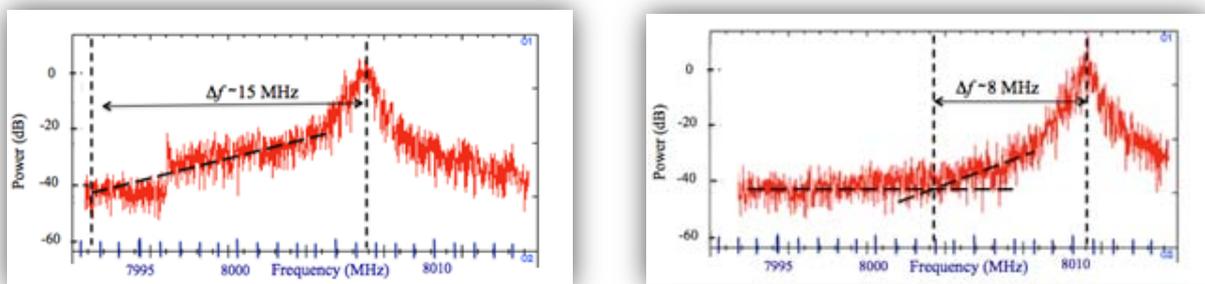


Figura 5

Quindi le IP sembrano onnipresenti negli esperimenti con le onde LH, in entrambi gli scenari di riscaldamento ionico e di *current drive*, e sono essenziali per la corretta interpretazione dei risultati sperimentali, sebbene gli altri fenomeni sopra menzionati possano sempre aver luogo in concomitanza con le IP. In [23,24,51] è stato sviluppato un modello delle onde LH comprensivo della fisica non lineare al bordo del plasma, la quale fisica è risultata indispensabile per interpretare correttamente gli scenari sperimentali di LHCD a densità relativamente basse (densità media di linea $\langle n \rangle \lesssim 3 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$), come appena discusso sopra. Questo modello ha individuato in un forte allargamento spettrale indotto da IP la causa sia della mancata penetrazione nel plasma della potenza LH accoppiata in esperimenti ad alta densità finalizzati al riscaldamento ionico (Fig. 5), sia dell'assorbimento anomalo delle onde LH in esperimenti di LHCD ad alta densità (Fig. 6a) rilevanti per il reattore a fusione. Inoltre, questo modello ha previsto che una temperatura elettronica più alta nella zona periferica del plasma è in grado di attenuare gli effetti non lineari che provocano l'allargamento spettrale (Fig. 6b). Conseguentemente, operando a temperature elettroniche di bordo più alte, sembrerebbe possibile guidare corrente non induttiva mediante onde LH nel plasma anche ad alte densità e, possibilmente, si potrebbe raggiungere anche il riscaldamento ionico tramite la risonanza LH, fenomeno che non è stato ancora provato sperimentalmente.



(a)

Figura 6

(b)

Più precisamente, seguendo le predizioni di modello di [23,24,51], un nuovo metodo operativo [55] è stato sviluppato su FTU [20]. Questo modello ha permesso di produrre effetti di LHCD a densità di plasma anche superiori a quelle previste in ITER ($n_0 \sim 5 \cdot 10^{14}$

cm^{-3}), a patto di mantenere relativamente alta la temperatura operativa elettronica al bordo. Questo risultato è stato raggiunto per mezzo di un ricoprimento delle pareti interne della camera da vuoto con il litio, mediante iniezione veloce di *pellet* nel plasma e utilizzando metodi per ridurre il *recycling* di particelle dalle pareti della camera da vuoto. Invece, nel caso di condizioni operative standard, con più basse temperature al bordo, non è stato osservato alcun effetto di LHCD nel plasma, sebbene la densità di plasma fosse marcatamente più bassa. In questi ultimi esperimenti l'allargamento spettrale misurato dai *probe* RF era molto più grande (Fig. 6a) rispetto al caso di alte temperature elettroniche al bordo (Fig. 6b), consistentemente con quello previsto dal modello.

Capitolo 3

MODELLO DI SPECTRAL BROADENING

3.1 Introduzione

In questo studio, basato su precedenti lavori [56-58] sugli effetti ponderomotori che guidano la fenomenologia delle instabilità parametriche (IP), presentiamo nuovi risultati che estendono il precedente *modeling* del meccanismo non lineare dell'allargamento spettrale indotto da IP, fornendone una descrizione più accurata. Questo risultato è stato raggiunto mediante un approccio *full-wave* e *full-spectrum* nella descrizione fisico-matematica non lineare della propagazione delle onde LH nella direzione radiale delle disomogeneità del plasma.

Lavori precedenti [23,24,51,54,55] hanno prodotto un'importante descrizione dell'allargamento spettrale indotto da IP basandosi sulle soluzioni numeriche della relazione di dispersione parametrica (2.21), derivata nel contesto della teoria cinetica dei plasmi, la quale ha permesso di identificare i tassi di crescita (*growth rates*) e le frequenze dei modi accoppiati. In [23,24] è stato calcolato l'effettivo fattore di amplificazione delle *sideband* LH nel *framework* dell'approssimazione iconale, tenendo conto delle perdite convettive dovute alle disomogeneità del plasma e alla dimensione finita della regione di plasma illuminata dall'antenna. Conseguentemente, per i parametri operativi standard di sperimentazioni di LHCD, i quasi-modi ionico-acustici di bassa frequenza sono stati identificati come il canale di decadimento parametrico più importante in grado di accoppiare non linearmente i modi quasi elettrostatici LH di alta frequenza [23,24], in corrispondenza dello *scrape-off layer* (SOL) e nella zona più esterna della colonna di

plasma. Tuttavia, in tutti i precedenti lavori, la potenza LH accoppiata dall'antenna ai valori nominali di frequenza e di indice di rifrazione parallelo (pompa) è stata mantenuta costante, cioè non si è potuto tener conto della perdita di potenza (svuotamento) della pompa, dovuta al fenomeno delle IP, a causa dell'analisi perturbativa impiegata. Questa approssimazione è giustificata solo se la potenza totale nelle *sideband* è trascurabile rispetto a quella della pompa e, quindi, ciò ne costituisce la maggiore limitazione come strumento di *modeling* nella interpretazione delle misure di allargamento spettrale in situazioni sperimentali realistiche.

Nel presente lavoro, collocandosi sempre nel *framework* teorico delle IP [12], assumiamo che l'accoppiamento modale tra differenti componenti spettrali LH è indotto da fluttuazioni di densità di bassa frequenza che hanno una frequenza angolare molto più piccola della frequenza angolare del moto ciclotronico ionico, $\omega' \ll \omega_{ci}$. Queste fluttuazioni sono eccitate dal battimento dell'onda di pompa, con frequenza angolare operativa ω_0 , con le componenti spettrali di alta frequenza del rumore di plasma. Queste ultime sono shiftate dalla frequenza d'onda di pompa di una quantità ω' in modo tale che il battimento tra l'onda di pompa e le perturbazioni di densità produca delle *sideband* LH con frequenza angolare $\omega = \omega_0 \pm \omega'$. Queste perturbazioni di densità di bassa frequenza, indotte dal battimento delle onde LH, permettono l'accoppiamento modale non lineare delle onde LH. Questo accoppiamento non lineare può quindi tradursi nell'amplificazione delle *sideband* e nello svuotamento della pompa. Tale processo corrisponde ad uno schema di decadimento parametrico, ben noto in letteratura [12], di un'onda quasi elettrostatica LH di alta frequenza in un'altra onda quasi elettrostatica LH di alta frequenza e in un'onda quasi elettrostatica di bassa frequenza corrispondente ai modi ionico-acustici.

In generale, per studiare le interazioni non lineari delle onde in un plasma, due differenti approssimazioni sono utilizzate in letteratura: l'approssimazione a fase aleatoria [59-61], utile per trattare fenomeni turbolenti e l'approssimazione a onda coerente [12,61,62], nella quale le fasi dei modi interagenti sono ben determinate. In questo studio noi adottiamo

quest'ultima approssimazione poiché le IP sono un particolare tipo di interazione coerente non lineare tra i modi di un plasma magnetizzato.

Con il presente lavoro abbiamo esteso i risultati raggiunti in [58] dove l'allargamento spettrale in n_{\parallel} era stato descritto, nel *framework* teorico della descrizione fluida del plasma [4,6,11], mediante un'analisi nel dominio del tempo per impulsi transienti di potenza LH. Qui invece, nell'ambito di un'analisi stazionaria, abbiamo utilizzato la più accurata teoria cinetica del plasma [4,6,11] per valutare le perturbazioni di densità di bassa e di alta frequenza indotte dal battimento, rispettivamente, delle onde LH di alta frequenza e di onde di bassa frequenza con onde di alta frequenza. Inoltre, nella descrizione della propagazione delle onde LH nella direzione radiale, raggiungiamo una descrizione più accurata della fisica LH al bordo del plasma, vicino all'interfaccia antenna-plasma, utilizzando un approccio *full-wave*. Infatti, questo approccio evita di utilizzare l'approssimazione iconale [11,15], utilizzata nella maggior parte dei modelli di IP [57], la cui validità viene meno per lunghezze d'onda radiali confrontabili con le lunghezze caratteristiche nella direzione radiale delle disomogeneità del plasma e delle amplificazioni spaziali dei campi elettrici. Invero, queste condizioni si presentano normalmente nella regione del plasma di bordo vicino all'antenna, zona oggetto della presente analisi.

Le ampiezze dei campi dei modi di bassa e di alta frequenza nel dominio spettrale della frequenza e del numero d'onda (parallelo e poloidale) sono state calcolate, seguendo un metodo perturbativo, risolvendo al secondo ordine il sistema differenziale Maxwell-Vlasov. A tal fine è stato sviluppato uno specifico modello cinetico che ha permesso di calcolare le perturbazioni di densità lineari e non lineari nel campo elettrico dell'onda nella valutazione della densità di carica in alta e in bassa frequenza. Si sono quindi ricavate due equazioni d'onda, una di alta frequenza ed una di bassa frequenza, accoppiate non linearmente tra di loro, che descrivono, rispettivamente, la propagazione delle onde LH e dei quasi-modi ionico-acustici nel plasma di bordo di un *tokamak*. In

questa analisi è compreso anche l'effetto di svuotamento della potenza LH della pompa, calcolato in modo consistente con l'amplificazione delle *sideband* LH.

Il presente modello è in grado di descrivere l'amplificazione delle *sideband* LH che emergono dal rumore termico delle fluttuazioni di densità del plasma, come è usualmente fatto nella descrizione standard delle IP [12,23,24,51,54,55,57,58]. Tuttavia, in tutti i precedenti lavori, il rumore termico non è mai stato correttamente valutato secondo la teoria cinetica delle fluttuazioni di campo elettrostatico LH in un plasma non in equilibrio termodinamico. Perciò, per la prima volta, nel presente lavoro è stato sviluppato un modello analitico del rumore termico LH al fine di una più accurata valutazione del suo contributo al fenomeno delle IP. Inoltre, il presente modello è anche in grado di considerare una nuova sorgente di rumore che non è mai stata considerata in precedenza nella letteratura, ovvero è in grado di descrivere l'amplificazione delle *sideband* LH che emergono dal rumore della sorgente di potenza RF. Questo rumore, intrinseco al sistema di potenza RF e visibile in tutte le misure di allargamento spettrale di sperimentazioni LHCD, è accoppiato al plasma dal lanciatore LH stesso, mantenendo in questo modo lo stesso spettro della pompa. Quindi, l'originalità del presente studio sta proprio nella valutazione *full-wave* e *full-spectrum* del contributo di questi due tipi di rumore alla fenomenologia delle IP presente nel plasma di bordo di un *tokamak*.

Il modello cinetico è presentato nel prossimo paragrafo. Nei paragrafi successivi, invece, si riportano i calcoli relativi alla derivazione del sistema accoppiato di equazioni d'onda per le onde LH e per i modi di bassa frequenza. Inoltre, nel limite di plasma omogeneo, viene data una validazione analitica del presente modello e ricavata la relazione di dispersione non lineare per i modi di bassa frequenza. Nel prossimo capitolo, come casi applicativi, sono presentate delle soluzioni numeriche del modello per scenari sperimentali rilevanti per FTU e ITER, dove valutiamo l'allargamento spettrale dello spettro LH accoppiato, sia in frequenza sia nell'indice di rifrazione parallelo, ed il relativo svuotamento della pompa.

3.2 Il modello cinetico

In questo paragrafo, nel *framework* della teoria cinetica, valutiamo le fluttuazioni di densità associate ai modi ionico-acustici di bassa frequenza, eccitati nel plasma dal battimento delle onde LH, e le fluttuazioni di densità associate ai modi LH di alta frequenza, eccitati nel plasma dal battimento dei modi LH di alta frequenza con i modi ionico-acustici di bassa frequenza. I modi ionico-acustici coinvolti sono in realtà dei quasi-modi poiché nelle condizioni di plasma considerate sono dei modi evanescenti che possono esistere solo in presenza del flusso di energia e momento proveniente dalla pompa.

Assumiamo una semplice geometria a *slab*, dove \hat{x} , \hat{y} e \hat{z} sono rispettivamente le direzioni radiale (entrante), poloidale e toroidale della regione esterna del plasma di un *tokamak*, affacciata alla bocca del lanciatore delle onde LH. Assumiamo inoltre una simmetria dei parametri di plasma nella direzione poloidale e toroidale, con i gradienti di densità e temperatura nella sola direzione radiale. Il campo magnetostatico \mathbf{B}_0 è diretto lungo la direzione \hat{z} , cioè è assunto puramente toroidale. Questa descrizione geometrica semplificata è stata riconosciuta adeguata [23,24] nel descrivere la fisica non lineare del bordo del plasma nel *framework* della teoria delle IP basata sulla ipotesi iconale. Gli effetti dello *shear* magnetico sarebbero rilevanti per il calcolo dello spettro in $n_{||}$ e per l'assorbimento di potenza e per il *current drive*. Tuttavia questi effetti diventano importanti solo se si estende l'integrazione dell'equazione d'onda LH all'intera colonna di plasma, ben oltre l'ultima superficie magnetica chiusa. In un *layer* di pochi centimetri di fronte all'antenna (SOL), dove gli effetti non lineari di nostro interesse sono localizzati, l'approssimazione a *slab* è sufficiente.

Lo spettro in $n_{||}$ calcolato da codici non lineari (come il codice che implementa il presente modello) può essere utilizzato come condizione iniziale per codici di *ray-tracing* per lo studio della propagazione delle onde LH nei *layer* più interni del plasma. Come è stato precedentemente dimostrato in [23,24,51], uno spettro allargato in $n_{||}$ all'ultima superficie magnetica chiusa è sufficiente per spiegare il profilo di deposizione di potenza e il *current drive* calcolati con codici di *ray-tracing* e Fokker-Plank.

Il modello che qui proponiamo generalizza l'analisi basata sulla relazione di dispersione parametrica non lineare ottenuta nel limite omogeneo [12] e con estensioni basate sulla assunzione iconale [23,24]. Come già accennato, l'approccio *full-wave* nella direzione radiale che qui noi perseguiamo è necessario poiché le lunghezze caratteristiche spaziali nella direzione radiale, dovute alla disomogeneità del plasma e alla amplificazione spaziale (radiale) delle *sideband* LH, sono comparabili con la lunghezza d'onda delle onde LH o, in alcuni casi, anche più piccole.

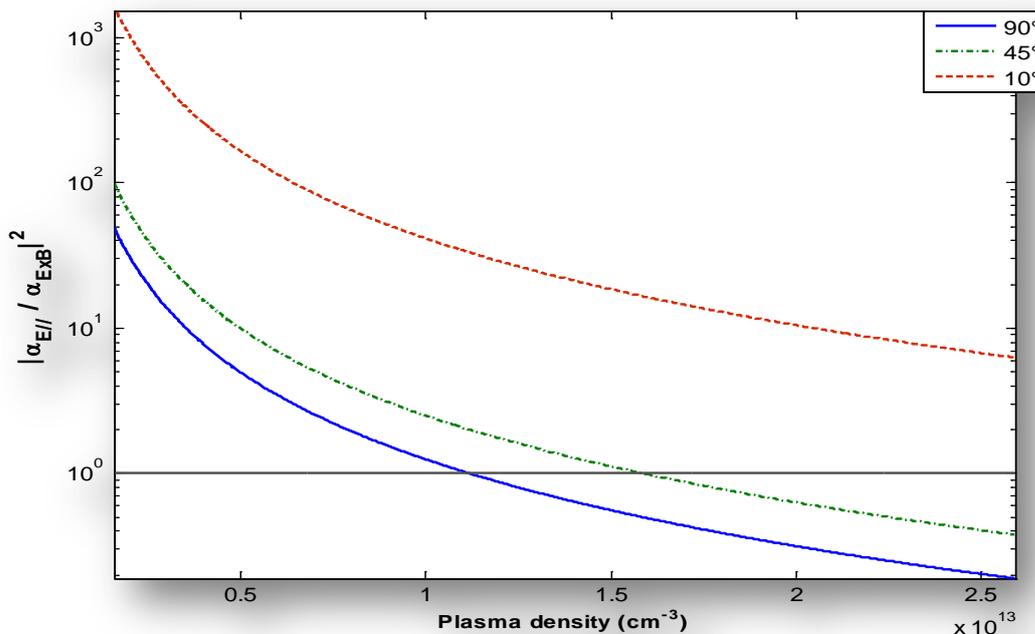


Figura 1

Le soluzioni della relazione di dispersione parametrica non lineare (2.21), in un ampio *range* di densità di bordo tipiche per esperimenti LHCD, mostrano che è dominante il termine dovuto al moto delle particelle cariche del plasma parallelo al campo magnetostatico di confinamento [63,64]. Mostriamo ciò per i parametri tipici di FTU (8 GHz, 6 T, $n_{//} = 1.85$) per sperimentazioni di LHCD. In Figura 1 è graficato il modulo quadro del rapporto tra il termine dovuto al campo elettrico parallelo $E_{//}$ e il termine dovuto al termine di *drift* ExB , entrambi presenti nella relazione di dispersione parametrica, in funzione della densità di plasma e per differenti angoli tra i vettori d'onda della pompa e delle *sideband* LH.

È stato dimostrato in [23] che, a causa delle perdite convettive, sono importanti solo i piccoli angoli per l'amplificazione delle *sideband* LH. Come si evince dal grafico di Figura 1, alle basse densità del bordo, per i piccoli angoli è sempre dominante il termine parallelo e, solo in corrispondenza di *layer* ad alta densità, i due termini possono diventare confrontabili, ma a quel punto la non linearità si è oramai estinta a causa dell'aumento della temperatura del plasma. Quindi, nel presente modello, assumiamo che l'interazione non lineare è dovuta solo alla dinamica parallela al campo magnetostatico.

Trascurare gli effetti del termine di *drift* $E \times B$ nella fenomenologia non lineare delle IP significa non poter trattare con il presente modello gli effetti del campo magnetostatico nell'allargamento spettrale. Tuttavia, negli esperimenti LHCD, rispetto agli esperimenti LH finalizzati al riscaldamento ionico, la presenza di *sideband* shiftate della frequenza di ciclotrone ionica (o di sue armoniche) rispetto alla frequenza della pompa, dette in gergo satelliti, è meno importante in termini di potenza sottratta alla pompa e spesso questa fenomenologia non è osservata.

Al fine di ottenere una descrizione cinetica delle fluttuazioni di bassa e di alta frequenza indotte dal battimento di componenti spettrali differenti, calcoliamo quindi, mediante un approccio perturbativo, una soluzione al secondo ordine dell'equazione di Vlasov [11] per la funzione di distribuzione delle particelle $f(\mathbf{v})$. In questo calcolo l'equazione di Vlasov è ridotta ad un'equazione monodimensionale nello spazio delle velocità per tenere conto solo della dinamica non lineare parallela al campo magnetostatico di confinamento. Formalmente, l'equazione di Vlasov presa in considerazione, detta anche equazione di Vlasov 3D1D (3D nello spazio delle configurazioni, 1D nello spazio delle velocità), è ottenuta integrando l'equazione generale di Vlasov nello spazio delle velocità perpendicolari al campo magnetico di confinamento assumendo che, per entrambe le popolazioni ionica ed elettronica, la funzione di distribuzione delle velocità sia isotropa nella direzione perpendicolare, cioè $f(\mathbf{v}) = f(v_{\parallel}, v_{\perp})$. Conseguentemente, con questa assunzione, limitiamo la nostra analisi alle fluttuazioni con frequenza molto inferiore a

quella di ciclotrone ionica ($\omega' \ll \omega_{ci}$) e alle lunghezze caratteristiche nella direzione perpendicolare molto maggiori al raggio di Larmor ionico ($k_{\perp} \rho_i \ll 1$).

Partiamo quindi dall'espressione generale dell'equazione di Vlasov scritta per la funzione di distribuzione delle velocità f_{α} per la specie α -esima di un generico magnetoplasma:

$$\partial_t f_{\alpha} + \mathbf{v} \cdot \nabla f_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\mathbf{B}_o + \mathbf{B}) \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_{\alpha} = 0 \quad (3.1)$$

dove $f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ è la funzione di distribuzione delle particelle, \mathbf{r} è il vettore posizione dello spazio, t è la variabile temporale, \mathbf{B}_o è il campo magnetostatico diretto lungo la direzione $\hat{\mathbf{z}}$, \mathbf{E} e \mathbf{B} sono il campo elettrico ed il campo magnetico delle onde di plasma.

Assumiamo maxwelliana la funzione di distribuzione di equilibrio locale:

$$f_{\alpha}^{(0)}(\mathbf{v}) = \frac{n_{\alpha}^{(0)}}{\pi^{3/2} v_{th,\alpha}^3} e^{-(v^2/v_{th,\alpha}^2)} \quad (3.2)$$

dove \mathbf{v} è il vettore della velocità delle particelle, $n_{\alpha}^{(0)}$ è la densità imperturbata per la specie α -esima del plasma con massa m_{α} , carica q_{α} e velocità termica $v_{th,\alpha} \equiv \sqrt{2 T_{\alpha}/m_{\alpha}}$. Le temperature T_{α} sono misurate in unità energetiche (eV). Sia le densità sia le temperature sono funzioni crescenti con la coordinata radiale x (l'interfaccia antenna-plasma si trova in $x = 0$).

Integriamo quindi la (3.2) nello spazio delle velocità perpendicolari, assumendo l'isotropia della funzione di distribuzione nello spazio delle velocità perpendicolari, per ottenere la seguente espressione per l'equazione di Vlasov 3D1D:

$$\partial_t g_{\alpha} + v_z \partial_z g_{\alpha} + \frac{q_{\alpha}}{m_{\alpha}} E_z \partial_{v_z} g_{\alpha} = 0 \quad (3.3)$$

dove $g_{\alpha}(\mathbf{r}, v_z, t)$ è la funzione di distribuzione delle velocità nella direzione parallela al campo magnetostatico di confinamento \mathbf{B}_o e $E_z(\mathbf{r}, t)$ è la componente parallela del campo elettrico.

Cerchiamo quindi una soluzione perturbativa della (3.3) assumendo la seguente espansione per $g_{\alpha}(\mathbf{r}, v_z, t)$:

$$g_\alpha = g_\alpha^{(0)} + g_\alpha^{(1)} + g_\alpha^{(2)} = g_\alpha^{(0)} + \varepsilon_\alpha h_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 h_\alpha^{(2)} \quad (3.4)$$

dove ε_α è il parametro di espansione (adimensionale), $g_\alpha^{(0)} \equiv n_\alpha^{(0)} e^{-(v_z^2/v_{th,\alpha}^2)}/\sqrt{\pi} v_{th,\alpha}$ è la funzione di distribuzione di equilibrio locale, v_z è la velocità della particella α -esima del plasma nella direzione parallela al campo magnetostatico di confinamento \mathbf{B}_o , $g_\alpha^{(1)} \equiv \varepsilon_\alpha h_\alpha^{(1)}$ e $g_\alpha^{(2)} \equiv \varepsilon_\alpha^2 h_\alpha^{(2)}$ sono, rispettivamente, le perturbazioni del primo e del secondo ordine della funzione di distribuzione di equilibrio locale $g_\alpha^{(0)}$.

Inserendo quindi l'espansione (3.4) nella (3.3) otteniamo:

$$\partial_t(\varepsilon_\alpha h_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 h_\alpha^{(2)}) + v_z \partial_z(\varepsilon_\alpha h_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 h_\alpha^{(2)}) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_z \partial_{v_z}(g_\alpha^{(0)} + \varepsilon_\alpha h_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 h_\alpha^{(2)}) = 0 \quad (3.5)$$

dove abbiamo considerato che $\partial_t g_\alpha^{(0)} = 0$ e $\partial_z g_\alpha^{(0)} = 0$.

Consideriamo ora solo soluzioni stazionarie e assumiamo una simmetria spaziale nelle direzioni toroidale e poloidale. Sotto queste ipotesi, nel risolvere l'equazione (3.5), possiamo passare al dominio trasformato nelle variabili coniugate k_y, k_z, ω tramite trasformata di Fourier nelle coordinate spaziali y e z e nel tempo t . Otteniamo quindi:

$$j(\omega - k_z v_z) (\varepsilon_\alpha \tilde{h}_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 \tilde{h}_\alpha^{(2)}) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\tilde{E}_z \partial_{v_z} g_\alpha^{(0)} + \varepsilon_\alpha C[\tilde{E}_z, \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(1)}] + \varepsilon_\alpha^2 C[\tilde{E}_z, \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(2)}]) = 0 \quad (3.6)$$

dove con il segno *tilde* abbiamo indicato le grandezze trasformate e con il simbolo $C[\cdot]$ intendiamo l'operatore di convoluzione così definito:

$$C[f_1(k_y, k_z, \omega), f_2(k_y, k_z, \omega)] \equiv \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk'_y dk'_z d\omega' f_1(k_y - k'_y, k_z - k'_z, \omega - \omega') f_2(k'_y, k'_z, \omega') \quad (3.7)$$

Ora nella (3.6) normalizziamo le ampiezze dei campi elettrici al valore massimo del campo E_o , le frequenze angolari alla frequenza angolare di pompa ω_o e le velocità delle particelle alla velocità termica $v_{th,\alpha}$:

$$j(\dot{\omega} - \dot{\gamma}) (\varepsilon_\alpha \tilde{h}_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 \tilde{h}_\alpha^{(2)}) + \left(\frac{q_\alpha E_o}{m_\alpha \omega_o v_{th,\alpha}} \right) \cdot \left(\dot{\tilde{E}}_z v_{th,\alpha} \partial_{v_z} g_\alpha^{(0)} + \varepsilon_\alpha C[\dot{\tilde{E}}_z, v_{th,\alpha} \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(1)}] + \varepsilon_\alpha^2 C[\dot{\tilde{E}}_z, v_{th,\alpha} \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(2)}] \right) = 0 \quad (3.8)$$

dove con il segno punto abbiamo indicato le grandezze normalizzate e $\dot{\omega} \equiv \omega/\omega_o$, $\dot{\gamma} \equiv k_z v_z/\omega_o$ e $\dot{\tilde{E}}_z \equiv \tilde{E}_z/E_o$.

Quindi, se identifichiamo nella (3.8) il parametro di espansione ε_α con la seguente espressione adimensionale:

$$\varepsilon_\alpha \equiv \frac{q_\alpha E_o}{m_\alpha \omega_o v_{th,\alpha}} \quad (3.9)$$

otteniamo la seguente gerarchia di equazioni (estesa qui per chiarezza fino al terzo ordine):

$$\begin{aligned} j(\dot{\omega} - \dot{\gamma})\tilde{h}_\alpha^{(1)} + \dot{\tilde{E}}_z v_{th,\alpha} \partial_{v_z} g_\alpha^{(0)} &= 0 \\ j(\dot{\omega} - \dot{\gamma})\tilde{h}_\alpha^{(2)} + C \left[\dot{\tilde{E}}_z, v_{th,\alpha} \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(1)} \right] &= 0 \\ j(\dot{\omega} - \dot{\gamma})\tilde{h}_\alpha^{(3)} + C \left[\dot{\tilde{E}}_z, v_{th,\alpha} \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(2)} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Quindi, arrestando l'espansione perturbativa al secondo ordine, abbiamo le seguenti espressioni per i coefficienti dell'espansione:

$$\begin{aligned} \tilde{h}_\alpha^{(1)} &= \frac{j v_{th,\alpha} \partial_{v_z} g_\alpha^{(0)}}{(\dot{\omega} - \dot{\gamma})} \dot{\tilde{E}}_z \\ \tilde{h}_\alpha^{(2)} &= \frac{j C \left[\dot{\tilde{E}}_z, v_{th,\alpha} \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(1)} \right]}{(\dot{\omega} - \dot{\gamma})} \end{aligned} \quad (3.11)$$

dalle quali seguono immediatamente le espressioni nel dominio trasformato per le perturbazioni al primo e al secondo ordine della funzione di distribuzione di equilibrio:

$$\tilde{g}_\alpha^{(1)}(x, k_y, k_z, \omega, v_z) \equiv \varepsilon_\alpha \tilde{h}_\alpha^{(1)} = \frac{j q_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial_{v_z} g_\alpha^{(0)}}{(\omega - k_z v_z)} \tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega) \quad (3.12)$$

$$\tilde{g}_\alpha^{(2)}(x, k_y, k_z, \omega, v_z) \equiv \varepsilon_\alpha^2 \tilde{h}_\alpha^{(2)} = \frac{j q_\alpha}{m_\alpha} \frac{C \left[\tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega), \partial_{v_z} \tilde{g}_\alpha^{(1)}(x, k_y, k_z, \omega, v_z) \right]}{(\omega - k_z v_z)} \quad (3.13)$$

Osserviamo che il parametro di espansione (3.9) permette inoltre di determinare i limiti di validità della presente teoria perturbativa che rimane valida fintantoché è soddisfatta la condizione di validità per l'espansione perturbativa: $\varepsilon_\alpha < 1$.

Inserendo nella (3.13) l'espressione al primo ordine (3.12), è quindi possibile ottenere la seguente espressione per la perturbazione al secondo ordine:

$$\tilde{g}_\alpha^{(2)}(x, k_y, k_z, \omega, v_z) = -\frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{\partial_{v_z}^2 g_\alpha^{(0)}}{(\omega - k_z v_z)} \mathcal{H}_\alpha(x, k_y, k_z, \omega, v_z) - \frac{q_\alpha^2}{m_\alpha^2} \frac{\partial_{v_z} g_\alpha^{(0)}}{(\omega - k_z v_z)} \mathcal{K}_\alpha(x, k_y, k_z, \omega, v_z) \quad (3.14)$$

dove $\mathcal{H}_\alpha(x, k_y, k_z, \omega, v_z)$ e $\mathcal{K}_\alpha(x, k_y, k_z, \omega, v_z)$ sono due termini convolutivi nei campi elettrici delle onde coinvolte nel battimento, definiti come segue:

$$\mathcal{H}_\alpha(x, k_y, k_z, \omega, v_z) \equiv \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk'_y dk'_z d\omega' \frac{\tilde{E}_z(x, k_y - k'_y, k_z - k'_z, \omega - \omega') \tilde{E}_z(x, k'_y, k'_z, \omega')}{(\omega' - k'_z v_z)} \quad (3.15)$$

$$\mathcal{K}_\alpha(x, k_y, k_z, \omega, v_z) \equiv \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk'_y dk'_z d\omega' \frac{\tilde{E}_z(x, k_y - k'_y, k_z - k'_z, \omega - \omega') k'_z \tilde{E}_z(x, k'_y, k'_z, \omega')}{(\omega' - k'_z v_z)^2} \quad (3.16)$$

Quindi integrando le equazioni (3.12) e (3.14) nello spazio delle velocità v_z è possibile ottenere, rispettivamente, l'espressione nel dominio trasformato della perturbazione al primo e al secondo ordine della densità imperturbata $n_\alpha^{(0)}$ della specie α -esima del plasma:

$$\tilde{n}_\alpha^{(1)}(x, k_y, k_z, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \tilde{g}_\alpha^{(1)} = \left(\frac{j 2 q_\alpha n_\alpha^{(0)}(x)}{k_z m_\alpha v_{th,\alpha}^2(x)} \right) C_2(u_{o,\alpha}) \tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega) \quad (3.17)$$

$$\tilde{n}_\alpha^{(2)}(x, k_y, k_z, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \tilde{g}_\alpha^{(2)} = \left(\frac{\omega_{p,\alpha}^2(x)}{2 \pi k_z m_\alpha v_{th,\alpha}^4(x)} \right) \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk'_y dk'_z d\omega' \tilde{E}_z(x, k_y - k'_y, k_z - k'_z, \omega - \omega') \tilde{E}_z(x, k'_y, k'_z, \omega') F_\alpha(u_{o,\alpha}(x), u'_{o,\alpha}(x)) / k'_z \quad (3.18)$$

dove $F_\alpha(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha})$ è la cosiddetta funzione di *coupling* definita come segue:

$$F_\alpha(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) \equiv \frac{C_1(u_{o,\alpha}) - C_1(u'_{o,\alpha})}{(u_{o,\alpha} - u'_{o,\alpha})} - \frac{u_{o,\alpha} (C_1(u'_{o,\alpha}) + Z(u_{o,\alpha})) - 2 u_{o,\alpha}'^2 C_2(u'_{o,\alpha})}{(u_{o,\alpha} - u'_{o,\alpha})^2} \quad (3.19)$$

dove nelle precedenti espressioni $\omega_{p,\alpha}$ è la frequenza di plasma per la specie α -esima del plasma, $u_{o,\alpha}(x) \equiv \omega / k_z v_{th,\alpha}(x)$, $u'_{o,\alpha}(x) \equiv \omega' / k'_z v_{th,\alpha}(x)$, sono i rapporti tra la velocità di fase dell'onda e la velocità termica della particella α -esima, $C_1(u_{o,\alpha}) \equiv [2 u_{o,\alpha} + 2 u_{o,\alpha}'^2 Z(u_{o,\alpha}) - Z(u_{o,\alpha})]$ e $C_2(u_{o,\alpha}) \equiv [1 + u_{o,\alpha} Z(u_{o,\alpha})]$ sono due funzioni a valori

complessi e $\mathcal{Z}(u_{o,\alpha})$ è la funzione di dispersione del plasma [11] definita (con $\text{Im}(u_{o,\alpha}) > 0$) come segue:

$$\mathcal{Z}(u_{o,\alpha}) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du_{\alpha} \frac{e^{-u_{\alpha}^2}}{(u_{\alpha} - u_{o,\alpha})} \quad (3.20)$$

dove $u_{\alpha} \equiv v_z/v_{th,\alpha}$.

Gli integrali (3.17), (3.18) e (3.20) si intendono eseguiti lungo il cosiddetto cammino di Landau che permette di trattare correttamente, ossia in accordo con il principio di causalità, il polo presente nell'integrando [11].

Per quanto riguarda il polo della (3.19), è possibile dimostrare che è una singolarità eliminabile e che la funzione di *coupling* assume valori finiti per $u_{o,\alpha} \rightarrow u'_{o,\alpha}$. Si riporta il calcolo del limite della funzione di *coupling* per $u_{o,\alpha} \rightarrow u'_{o,\alpha}$ in Appendice A1.

Finora abbiamo seguito una trattazione generale per la generica specie α -esima del plasma. Ora specializziamo le precedenti derivazioni per le singole specie considerate nel modello. In questo modello consideriamo gli elettroni fortemente magnetizzati sia in bassa sia in alta frequenza. Questo poiché, per intensi campi magnetostatici come quelli utilizzati nei *tokamak*, la frequenza con cui rispondono al campo elettrico dell'onda è sempre molto minore della frequenza di ciclotrone elettronica ($\omega \ll \omega_{ce}$) e il raggio di Larmor elettronico è molto minore delle lunghezze caratteristiche nella direzione perpendicolare al campo magnetostatico ($k_{\perp}\rho_e \ll 1$), perciò la loro dinamica è ben approssimata dal moto del centro guida lungo la direzione del campo magnetostatico di confinamento. Quindi, le precedenti espressioni (3.12), (3.13), (3.17) e (3.18) rimangono valide per descrivere la risposta elettronica ($\alpha = e$) sia in alta sia in bassa frequenza.

Invece, per quanto riguarda il comportamento degli ioni, abbiamo una trattazione differente tra la bassa e l'alta frequenza. Infatti, in alta frequenza, gli ioni non riescono a seguire le oscillazioni del campo elettrico per via della loro elevata inerzia e poiché le frequenze considerate nel presente modello sono molto maggiori della frequenza di ciclotrone ionica ($\omega \gg \omega_{ci}$), di fatto non risentono della presenza del campo magnetico.

Quindi in alta frequenza gli ioni sono fermi ed agiscono come un *background* di neutralizzazione della carica. La risposta del plasma in alta frequenza è quindi solo di tipo elettronico.

In bassa frequenza, invece, gli ioni sono considerati magnetizzati poiché, per poter essere soddisfatta l'ipotesi di isotropia della funzione di distribuzione nello spazio delle velocità perpendicolari al campo magnetico di confinamento, la nostra analisi deve essere limitata alle fluttuazioni di densità con frequenza molto inferiore a quella di ciclotrone ionica ($\omega' \ll \omega_{ci}$) e alle lunghezze caratteristiche nella direzione perpendicolare molto maggiori del raggio di Larmor ionico ($k_{\perp} \rho_i \ll 1$). Perciò anche per gli ioni, in bassa frequenza, la loro dinamica è ben approssimata dal moto del centro guida lungo la direzione del campo magnetostatico di confinamento. Quindi, le precedenti espressioni (3.12) e (3.17) rimangono valide per descrivere la risposta lineare ionica ($\alpha = i$) di bassa frequenza. Tuttavia, le espressioni non lineari (3.13) e (3.18), quando sono dovute al battimento di due modi di bassa frequenza, possono essere trascurate poiché di fatto corrispondono ad una correzione di ordine successivo al secondo, precisamente al quarto ordine nel parametro di espansione, mentre la nostra analisi è limitata al secondo ordine. Questo perché i campi di bassa frequenza – escludendo i casi estremi non realistici di completo svuotamento della pompa – sono di fatto del secondo ordine poiché, essendo dei quasi-modi, possono esistere solo per un precedente battimento di due campi di alta frequenza. Inoltre, quando andiamo a considerare la generazione della bassa frequenza dal battimento di due modi di alta frequenza, non può esserci nessun termine perturbativo del secondo ordine poiché gli ioni in alta frequenza sono fermi. Perciò, in bassa frequenza, gli ioni hanno la sola risposta lineare (3.12) e (3.17).

Infine è possibile generalizzare il modello cinetico qui esposto considerando anche l'effetto delle collisioni. Si riporta questa generalizzazione in Appendice A2.

3.3 Derivazione dell'equazione d'onda non lineare

In questo paragrafo deriviamo l'equazione d'onda non lineare che governa la propagazione dei modi accoppiati tramite le perturbazioni di densità calcolate secondo la teoria cinetica nel precedente paragrafo.

Iniziamo quindi dalle equazioni di Maxwell scritte per il vuoto, nel sistema di unità CGS e con gli effetti del mezzo (plasma) inglobati nella densità di carica e nella densità di corrente [11]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \mathbf{E} = 4 \pi \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = \mathbf{0} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} = \frac{4 \pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \end{array} \right. \quad (3.21)$$

dove $\rho(x, y, z, t)$ è la densità di carica del plasma definita come:

$$\rho(x, y, z, t) \equiv \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}(x, y, z, t) \quad (3.22)$$

e $\mathbf{J}(x, y, z, t)$ è la densità di corrente legata alla densità di carica tramite l'equazione di continuità:

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (3.23)$$

Ora, considerando un'espansione perturbativa della densità $n_{\alpha}(x, y, z, t)$ arrestata al secondo ordine, la densità di carica assume conseguentemente la seguente espressione:

$$\rho(x, y, z, t) = \rho^{(0)}(x) + \rho^{(1)}(x, y, z, t) + \rho^{(2)}(x, y, z, t) \quad (3.24)$$

con:

$$\rho^{(0)}(x) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}^{(0)}(x)$$

$$\rho^{(1)}(x, y, z, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}^{(1)}(x, y, z, t)$$

$$\rho^{(2)}(x, y, z, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} n_{\alpha}^{(2)}(x, y, z, t)$$

dove il primo termine $\rho^{(0)}$ rappresenta la densità di carica di equilibrio e, per l'ipotesi di quasi neutralità del plasma [4,11], deve essere nulla ($\rho^{(0)} = 0$).

Allo stesso modo, l'espansione perturbativa della densità n_{α} si ripercuote sulla densità di corrente tramite l'equazione di continuità (3.23) per cui si ha:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}^{(m)} + \frac{\partial \rho^{(m)}}{\partial t} = 0 \quad (3.25)$$

con $m = 0, 1, 2$ e, per l'ipotesi di quasi neutralità del plasma [4,11], si ha per la densità di corrente imperturbata $\mathbf{J}^{(0)} = 0$.

Ora, per l'ipotesi iniziale di simmetria cilindrica delle funzioni di distribuzione, le componenti perpendicolari della densità di corrente sono nulle ($J_x^{(m)} = J_y^{(m)} = 0$) e quindi l'equazione di continuità (3.25) diventa:

$$\frac{\partial J_z^{(m)}}{\partial z} + \frac{\partial \rho^{(m)}}{\partial t} = 0 \quad (3.26)$$

Quindi, calcolando il rotore dell'equazione (3.21) per il rotore del campo elettrico $\nabla \times \mathbf{E}$, si ottiene:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \nabla \times \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.27)$$

Ora ricordando la seguente identità vettoriale:

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} \quad (3.28)$$

e considerando l'espressione (3.21) per il $\nabla \times \mathbf{B}$, otteniamo la seguente espressione per l'equazione (3.27):

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (3.29)$$

e, considerando l'espressione (3.21) per la divergenza del campo elettrico $\nabla \cdot \mathbf{E}$, otteniamo la seguente espressione finale per l'equazione d'onda:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 4 \pi \nabla \rho + \frac{4 \pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} \quad (3.30)$$

Ora, per risolvere la precedente equazione (3.30), possiamo passare al dominio trasformato nelle variabili coniugate k_y, k_z, ω tramite trasformata di Fourier nelle coordinate spaziali y e z e nel tempo t . Quindi otteniamo il seguente sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x^2 \tilde{E}_x - \left(k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{E}_x = 4 \pi \partial_x \tilde{\rho} \\ \partial_x^2 \tilde{E}_y - \left(k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{E}_y = -4 \pi j k_y \tilde{\rho} \\ \partial_x^2 \tilde{E}_z - \left(k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{E}_z = -4 \pi j k_z \tilde{\rho} + \frac{4 \pi j \omega}{c^2} \tilde{J}_z \end{array} \right. \quad (3.31)$$

dove, per l'ipotesi iniziale di simmetria cilindrica delle funzioni di distribuzione, abbiamo considerato le componenti perpendicolari della densità di corrente nulle e con il segno *tilde* abbiamo indicato le grandezze trasformate.

Inoltre, per l'equazione di continuità (3.26), abbiamo che $j k_z \tilde{J}_z^{(m)} = j \omega \tilde{\rho}^{(m)}$ e, sommando il contributo dei termini perturbativi fino al secondo ordine, risulta:

$$\tilde{J}_z = \frac{\omega}{k_z} \tilde{\rho} \quad (3.32)$$

e quindi l'equazione d'onda (3.31) per $\tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega)$ diventa:

$$\partial_x^2 \tilde{E}_z - \left(k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{E}_z = -\frac{4 \pi j}{k_z} \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{\rho} \quad (3.33)$$

Poiché per il modello cinetico sopra sviluppato la densità di carica $\tilde{\rho}$ è funzione del solo campo elettrico parallelo \tilde{E}_z , l'equazione (3.33) è un'equazione omogenea in \tilde{E}_z mentre le altre due equazioni (3.31) per \tilde{E}_x e \tilde{E}_y risultano non omogenee e accoppiate alla (3.33)

mediante la densità di carica. Perciò l'equazione risolvente del sistema (3.31) è l'equazione d'onda non lineare (3.33) ed è quella che nel seguito andremo a risolvere specializzandola per le componenti spettrali (nella frequenza angolare) di alta frequenza (HF) e di bassa frequenza (LF).

Iniziamo quindi dall'analisi di alta frequenza. Il modello cinetico sopra esposto prevede che la risposta del plasma in alta frequenza sia dovuta solo agli elettroni che nella loro dinamica sono fortemente magnetizzati lungo le linee del campo magnetostatico. Perciò la densità di carica $\tilde{\rho}$ in HF può essere espressa in funzione della sola specie elettronica:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(1)} + \tilde{\rho}^{(2)} = q_e \tilde{n}_e^{(1)} + q_e \tilde{n}_e^{(2)} \quad (3.34)$$

dove $q_e = -e$.

Inserendo la (3.34) nella (3.33) e tenendo conto delle espressioni (3.17) e (3.18) per le perturbazioni della densità elettronica, otteniamo la seguente scrittura per l'equazione d'onda di HF:

$$\partial_x^2 \tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega) = \beta_L^{HF}(x, k_y, k_z, \omega) \tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega) + \beta_{NL}^{HF}(x, k_y, k_z, \omega) \quad (3.35)$$

dove:

$$\beta_L^{HF}(x, k_y, k_z, \omega) = \left(\frac{2 \omega_{p,e}^2(x)}{k_z^2 v_{th,e}^2(x)} \right) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) C_2(u_{o,e}(x)) + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.36)$$

$$\beta_{NL}^{HF}(x, k_y, k_z, \omega) = \left(\frac{j \omega_{p,e}^2(x)}{k_z^2 v_{th,e}^2(x)} \right) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{e \mathfrak{S}_e(x, k_y, k_z, \omega)}{T_e} \quad (3.37)$$

dove il termine $\mathfrak{S}_e(x, k_y, k_z, \omega)$, che qui rappresenta il battimento di un campo di alta frequenza con un campo di bassa frequenza, è definito nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_e(x, k_y, k_z, \omega) \equiv & \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk'_y dk'_z d\omega' \tilde{E}_z(x, k_y - k'_y, k_z - k'_z, \omega - \omega') \cdot \\ & \cdot \tilde{E}_z(x, k'_y, k'_z, \omega') F_e(u_{o,e}(x), u'_{o,e}(x)) / k'_z \end{aligned} \quad (3.38)$$

Quindi passiamo all'analisi di bassa frequenza. Il modello cinetico sopra esposto prevede che la risposta del plasma in bassa frequenza sia dovuta sia agli elettroni sia agli ioni, dove questi ultimi hanno una risposta solo lineare. Perciò la densità di carica $\tilde{\rho}$ in LF può essere espressa nel seguente modo:

$$\tilde{\rho} = \tilde{\rho}^{(1)} + \tilde{\rho}^{(2)} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \tilde{n}_{\alpha}^{(1)} + q_e \tilde{n}_e^{(2)} \quad (3.39)$$

dove la sommatoria è estesa a tutte le specie del plasma e la carica elettronica è $q_e = -e$ e la carica della generica specie ionica è $q_i = Z_i e$, con Z_i pari al numero di ionizzazioni elementari del generico ione.

Inserendo la (3.39) nella (3.33) e tenendo conto delle espressioni (3.17) e (3.18) per le perturbazioni della densità elettronica e della (3.17) per la perturbazione della densità ionica, otteniamo la seguente scrittura per l'equazione d'onda di LF:

$$\partial_x^2 \tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega) = \beta_L^{LF}(x, k_y, k_z, \omega) \tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega) + \beta_{NL}^{LF}(x, k_y, k_z, \omega) \quad (3.40)$$

dove:

$$\beta_L^{LF}(x, k_y, k_z, \omega) = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \sum_{\alpha} \left(\frac{2 \omega_{p,\alpha}^2(x)}{k_z^2 v_{th,\alpha}^2(x)} \right) C_2(u_{o,\alpha}(x)) + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.41)$$

$$\beta_{NL}^{LF}(x, k_y, k_z, \omega) = \left(\frac{j \omega_{p,e}^2(x)}{k_z^2 v_{th,e}^2(x)} \right) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{e \mathfrak{S}_e(x, k_y, k_z, \omega)}{T_e} \quad (3.42)$$

dove il termine $\mathfrak{S}_e(x, k_y, k_z, \omega)$, che qui rappresenta il battimento di due campi di alta frequenza, è definito come in (3.38).

Quindi, dalle espressioni (3.37) e (3.42) è chiaro che la risposta non lineare è dovuta alla sola popolazione elettronica del plasma e che l'intensità di questo contributo è inversamente proporzionale alla temperatura elettronica, in accordo con precedenti lavori sulle IP [23,24]. Inoltre, osserviamo che la funzione di *coupling* in (3.38) ha l'effetto di modulare l'accoppiamento non lineare tra i campi elettrici paralleli coinvolti nel battimento. Invece, per quanto riguarda il contributo della popolazione ionica,

comparendo solo nella (3.41), ciò implica che gli ioni hanno il solo effetto di modulare la risposta lineare del plasma in bassa frequenza.

Infine, verifichiamo che nel limite lineare ($\beta_{NL}^{LF, HF} \rightarrow 0$) le equazioni d'onda di HF (3.35) e LF (3.40) coincidono, rispettivamente, con le equazioni d'onda lineari per i modi LH e i quasi-modi ionico-acustici, in accordo con il meccanismo delle IP che vogliamo catturare con il presente modello.

Iniziamo quindi dall'equazione d'onda di HF (3.35) nel limite lineare che qui riportiamo:

$$\partial_x^2 \tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega) = \beta_L^{HF}(x, k_y, k_z, \omega) \tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega) \quad (3.43)$$

Nell'intervallo di frequenze di *lower hybrid* e nel limite di plasma freddo $u_{o,e} \gg 1$ possiamo sostituire alla funzione di dispersione del plasma $Z(u_{o,e})$ il suo sviluppo asintotico [65]:

$$Z(u_{o,e}) \approx -\frac{1}{u_{o,e}} - \frac{1}{2 u_{o,e}^3} \quad (3.44)$$

e alla funzione $C_2(u_{o,e}) \equiv [1 + u_{o,e} Z(u_{o,e})]$ possiamo sostituire il corrispondente sviluppo asintotico:

$$C_2(u_{o,e}) \approx -\frac{1}{2 u_{o,e}^2} \quad (3.45)$$

Quindi, ricordando che $u_{o,e} \equiv \omega/k_z v_{th,e}$, l'espressione (3.36) ora diventa:

$$\beta_L^{HF}(x, k_y, k_z, \omega) = -\left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \frac{\omega_{p,e}^2(x)}{\omega^2} + k_y^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (3.46)$$

Inserendo la nuova espressione del coefficiente lineare (3.46) nell'equazione (3.43) otteniamo:

$$\partial_x^2 \tilde{E}_z - k_y^2 \tilde{E}_z = P(x, \omega) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{E}_z \quad (3.47)$$

dove $P(x, \omega) = \left(1 - \frac{\omega_{p,e}^2(x)}{\omega^2}\right)$ è l'elemento P (2.6) del tensore di Stix (2.4) quando $\omega_{p,i}^2 \ll \omega^2$ (situazione che normalmente si verifica per il plasma di un *tokamak* nell'intervallo di *lower hybrid*). Nel limite di plasma omogeneo ($\partial_x \rightarrow -jk_x$), l'equazione d'onda (3.47) diventa:

$$k_{\perp}^2 \tilde{E}_z = -P(x, \omega) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{E}_z \quad (3.48)$$

da cui segue la relazione di dispersione:

$$k_{\perp}^2 = -P(x, \omega) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \quad (3.49)$$

dove $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$.

La (3.49) coincide con la relazione di dispersione fredda LH (2.9) per la branca lenta quando $D^2 \ll 1$, $S \approx 1$ e $P \gg 1$, relazioni sempre valide per il plasma di bordo di un *tokamak*. Quando anche $k_z^2 \gg \frac{\omega^2}{c^2}$ la (3.49) diventa la relazione di dispersione per le onde LH (2.12) ottenuta nel limite elettrostatico:

$$k_{\perp}^2 = -P(x, \omega) k_z^2 \quad (3.50)$$

Quindi, con le (3.49) e (3.50), abbiamo dimostrato che l'equazione d'onda (3.43) governa correttamente la propagazione dei modi LH nel plasma di bordo di un *tokamak*.

Passiamo quindi all'equazione d'onda di LF (3.40) nel limite lineare che qui riportiamo:

$$\partial_x^2 \tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega) = \beta_L^{LF}(x, k_y, k_z, \omega) \tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega) \quad (3.51)$$

In questo caso, nel limite di plasma omogeneo ($\partial_x \rightarrow -jk_x$), deriviamo direttamente la relazione di dispersione associata alla (3.51):

$$1 + \sum_{\alpha} \frac{k_{D,\alpha}^2}{k^2} C_2(u_{o,\alpha}) = 0 \quad (3.52)$$

dove $k^2 = k_{\perp}^2 + k_z^2$, $k_{D,\alpha}^2 = 1/\lambda_{\alpha}^2$ e $\lambda_{\alpha}^2 = T_{\alpha}/4\pi n_{\alpha}^{(0)} e^2$. Nel ricavare la precedente espressione abbiamo inoltre considerato che per le basse frequenze $\omega^2/c^2 \approx 0$.

Ora, per semplicità, consideriamo un plasma con una singola specie ionica ed un intervallo ragionevole di basse frequenze $|k_z|v_{th,i} < \omega < |k_z|v_{th,e}$ per cui si ha [66]:

$$u_{o,e} \equiv \omega/|k_z|v_{th,e} < 1 \quad (3.53)$$

$$u_{o,i} \equiv \omega/|k_z|v_{th,i} > 1 \quad (3.54)$$

Abbiamo quindi per gli elettroni e per gli ioni due espansioni differenti per la funzione di dispersione del plasma $Z(u_{o,\alpha})$, rispettivamente, una per argomenti piccoli ed una per argomenti grandi [65]:

$$Z(u_{o,e}) \approx j\sqrt{\pi} e^{-u_{o,e}^2} - 2u_{o,e} \quad (3.55)$$

$$Z(u_{o,i}) \approx j\sqrt{\pi} e^{-u_{o,i}^2} - \frac{1}{u_{o,i}} - \frac{1}{2u_{o,i}^3} - \frac{3}{4u_{o,i}^5} \quad (3.56)$$

Di conseguenza abbiamo le seguenti espressioni approssimate per la funzione $C_2(u_{o,\alpha})$:

$$C_2(u_{o,e}) \approx 1 + j\sqrt{\pi} u_{o,e} e^{-u_{o,e}^2} - 2u_{o,e}^2 \quad (3.57)$$

$$C_2(u_{o,i}) \approx j\sqrt{\pi} u_{o,i} e^{-u_{o,i}^2} - \frac{1}{2u_{o,i}^2} - \frac{3}{4u_{o,i}^4} \quad (3.58)$$

Quindi, inserendo le precedenti (3.57) e (3.58) nella relazione di dispersione (3.52), otteniamo la seguente espressione per un plasma magnetizzato con una singola specie ionica:

$$1 = \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega^2} \frac{k_z^2}{k^2} - \frac{k_{D,e}^2}{k^2} - j\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\omega}{|k_z|\sqrt{T_e/m_e}} \frac{k_{D,e}^2}{k^2} + \frac{\omega}{|k_z|\sqrt{T_i/m_i}} \frac{k_{D,i}^2}{k^2} e^{-\omega^2/k_z^2 v_{th,i}^2} \right) \quad (3.59)$$

dove nel derivare la (3.59) abbiamo considerato per gli elettroni $u_{o,e} \ll 1$ e quindi $u_{o,e}^2 \approx 0$ e $e^{-u_{o,e}^2} \approx 1$.

L'equazione (3.59) è la relazione di dispersione dei modi ionico-acustici [66] scritta per un plasma con una singola specie ionica ed in presenza di un intenso campo magnetico che ne vincola la propagazione nella direzione parallela. Questi modi sono propaganti quando $T_i/T_e \ll 1$ ma, nel plasma di bordo di un *tokamak*, risultano fortemente smorzati poiché si

ha $T_i/T_e \cong 1$. Ciò dimostra che l'equazione d'onda (3.51) descrive proprio la propagazione dei quasi-modi ionico-acustici, in accordo con il meccanismo delle IP.

3.4 Validazione del modello cinetico nel limite omogeneo

In questo paragrafo diamo una validazione analitica del modello cinetico sopra esposto controllando, nel limite di plasma omogeneo, la consistenza dell'espressione per la perturbazione di densità elettronica sopra ottenuta con quella derivata nel *framework* della teoria standard delle IP [12,23,24,62].

Seguendo la teoria standard [12], nell'ambito dell'approssimazione elettrostatica e nel limite di plasma omogeneo e spazialmente illimitato, l'analisi delle IP di onde LH è condotta analizzando un'interazione a quattro onde tra un'onda LH di pompa (con frequenza angolare reale ω_o e vettore d'onda \mathbf{k}_o), un'onda LH di *sideband* inferiore (con frequenza angolare $|\text{Re}[\omega_1]| < \omega_o$ e vettore d'onda \mathbf{k}_1), un'onda LH di *sideband* superiore (con frequenza angolare $|\text{Re}[\omega_2]| > \omega_o$ e vettore d'onda \mathbf{k}_2) ed un'onda di bassa frequenza (con frequenza angolare $|\text{Re}[\omega]| \ll \omega_o$ e vettore d'onda \mathbf{k}) corrispondente ai quasi-modi ionico-acustici del plasma. L'onda di bassa frequenza è generata mediante il battimento tra un'onda di pompa $\tilde{E}_{z,o} = jk_{z,o}\tilde{\phi}_o$ e un'onda di *sideband* inferiore o superiore $\tilde{E}_{z,1,2} = jk_{z,1,2}\tilde{\phi}_{1,2}$ dove i potenziali elettrostatici hanno la forma $\tilde{\phi}_i = \phi_i/\sqrt{2} e^{j(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})}$ con $i = 0, 1, 2$. Per la conservazione dell'energia e del momento devono essere soddisfatte le seguenti regole di selezione: $\omega_{2,1} = \omega \pm \omega_o$, $\mathbf{k}_{2,1} = \mathbf{k} \pm \mathbf{k}_o$.

Nella presente analisi, non essendo interessati al calcolo del *growth rate*, assumiamo che le frequenze siano tutte reali e che, affinché siano soddisfatte le regole di selezione, si abbia $\omega > 0$, $\omega_1 < 0$ e $\omega_2 > 0$. Inoltre, ci vogliamo confrontare con l'espressione standard della perturbazione della densità elettronica di bassa frequenza [12], quindi nel seguito consideriamo la sola specie elettronica.

Partiamo quindi dal termine lineare (3.17) per la perturbazione di densità elettronica che qui di seguito riscriviamo per un campo elettrostatico di bassa frequenza $\tilde{E}_z = jk_z \tilde{\phi}$:

$$\tilde{n}_e^{(1)} = \left(\frac{j 2 q_e n_e^{(0)}}{k_z m_e v_{th,e}^2} \right) C_2(u_{0,e}) \tilde{E}_z = \left(\frac{2 q_e n_e^{(0)}}{m_e v_{th,e}^2} \right) C_2(u_{0,e}) \tilde{\phi} \quad (3.60)$$

Ora, moltiplicando e dividendo la precedente espressione per $4\pi e k^2$, è possibile ottenere la seguente espressione:

$$\tilde{n}_e^{(1)} = \frac{k^2}{4\pi e} \chi_e \tilde{\phi} \quad (3.61)$$

dove χ_e è la suscettività elettronica del plasma così definita:

$$\chi_e \equiv \left(\frac{2 \omega_{p,e}^2}{k^2 v_{th,e}^2} \right) C_2(u_{0,e}) = \left(\frac{2 \omega_{p,e}^2}{k^2 v_{th,e}^2} \right) [1 + u_{0,e} Z(u_{0,e})] \quad (3.62)$$

Si riconosce infatti nella (3.62) l'espressione della suscettività elettrica per elettroni fortemente magnetizzati [12]. Inoltre, la (3.61) coincide esattamente con l'espressione della perturbazione lineare della densità elettronica nota in letteratura [12]. Ciò completa la dimostrazione per la parte lineare del nostro modello.

Passiamo quindi ad analizzare il termine non lineare (3.18) per la perturbazione di densità elettronica che qui di seguito riscriviamo nel limite di plasma omogeneo:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_e^{(2)} = & \left(\frac{\omega_{p,e}^2}{2 \pi k_z m_e v_{th,e}^4} \right) \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk'_y dk'_z d\omega' \tilde{E}_z(k_x - k'_x, k_y - k'_y, k_z - k'_z, \omega - \omega') \cdot \\ & \cdot \tilde{E}_z(k'_x, k'_y, k'_z, \omega') F_e(u_{0,e}, u'_{0,e}) / k'_z \end{aligned} \quad (3.63)$$

Consideriamo ora la seguente rappresentazione equivalente per i campi:

$$\tilde{E}_{z,i}(k_x, k_y, k_z, \omega) = \tilde{E}_{z,i} \delta(\omega - \omega_i) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_i) + \tilde{E}_{z,i}^* \delta(\omega + \omega_i) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_i) \quad (3.64)$$

con $i = 0$ per la pompa e $i = 1, 2$ per le *sideband* inferiore e superiore, rispettivamente, e dove $\delta(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_i) \equiv \delta(k_x \pm k_{x,i}) \delta(k_y \pm k_{y,i}) \delta(k_z \pm k_{z,i})$.

Quando nella (3.63) si ha un battimento tra un campo di pompa ed uno di *sideband* inferiore, è possibile avere una perturbazione di bassa frequenza con $\omega > 0$ quando $\omega' = \omega_o > 0$ e $\omega - \omega' = \omega_1 < 0$ e quando $\omega' = \omega_1 < 0$ e $\omega - \omega' = \omega_o > 0$. Inserendo l'espressione dei campi (3.64) in (3.63), trascurando i termini che non soddisfano le regole di selezione ed integrando nel dominio spettrale le funzioni delta, otteniamo:

$$\tilde{n}_e^{(2)} = \left(\frac{\omega_{p,e}^2}{2 \pi k_z m_e v_{th,e}^4} \right) \left(F_e(u_e, u_{e,o}) + F_e(u_e, u_{e,1}) \right) \tilde{E}_{z,o} \tilde{E}_{z,1} \quad (3.65)$$

dove $u_e \equiv \omega/k_z v_{th,e}$, $u_{e,o} \equiv \omega_o/k_{z,o} v_{th,e}$ e $u_{e,1} \equiv \omega_1/k_{z,1} v_{th,e}$.

Ora, considerando l'espressione (3.19) per la funzione di *coupling* e considerando i campi elettrostatici ($\tilde{E}_{z,o} = j k_{z,o} \tilde{\phi}_o$, $\tilde{E}_{z,1} = j k_{z,1} \tilde{\phi}_1$) otteniamo:

$$\tilde{n}_e^{(2)} = \frac{n_e e^2}{m_e^2 v_{th,e}^3} \alpha_1 \phi_o \phi_1 \quad (3.66)$$

dove nella derivazione abbiamo anche considerato che per la bassa frequenza $u_e \ll 1$ e dove:

$$\alpha_1 = k_z k_{z,o} k_{z,1} \left(\omega \mathcal{Z}(u_e) - \omega_o \mathcal{Z}(u_{e,o}) - \omega_1 \mathcal{Z}(u_{e,1}) \right) / (\omega k_{z,o} - \omega_o k_z)^2 \quad (3.67)$$

Quando invece nella (3.63) si ha un battimento tra un campo di pompa ed uno di *sideband* superiore, è possibile avere una perturbazione di bassa frequenza con $\omega > 0$ quando $\omega' = -\omega_o < 0$ e $\omega - \omega' = \omega_2 > 0$ e quando $\omega' = \omega_2 > 0$ e $\omega - \omega' = -\omega_o < 0$. Ripetendo ora i precedente calcoli per la *sideband* superiore si ottiene:

$$\tilde{n}_e^{(2)} = \left(\frac{\omega_{p,e}^2}{2 \pi k_z m_e v_{th,e}^4} \right) \left(F_e(u_e, u_{e,o}) + F_e(u_e, u_{e,2}) \right) \tilde{E}_{z,o}^* \tilde{E}_{z,2} \quad (3.68)$$

dove $u_{e,2} \equiv \omega_2/k_{z,2} v_{th,e}$ e, procedendo analogamente al caso precedente, otteniamo:

$$\tilde{n}_e^{(2)} = \frac{n_e e^2}{m_e^2 v_{th,e}^3} \alpha_2 \phi_o^* \phi_2 \quad (3.69)$$

Infine, sommando i contributi (3.66) e (3.69), otteniamo l'espressione finale per la perturbazione del secondo ordine della densità elettronica:

$$\tilde{n}_e^{(2)} = \frac{n_e e^2}{m_e^2 v_{th,e}^3} [\alpha_1 \phi_0 \phi_1 + \alpha_2 \phi_0^* \phi_2] \quad (3.70)$$

Si può dimostrare che la (3.70) rimane valida anche quando si ammette che le frequenze angolari abbiano una parte immaginaria. Le regole di selezione relative alle frequenze angolari sopra indicate vanno allora intese in termini delle sole parti reali.

L'equazione (3.70) ha esattamente la stessa espressione derivata nel *framework* della teoria cinetica omogenea [12] quando si considera per gli elettroni la sola dinamica parallela al campo magnetico di confinamento [63,64]. Come precedentemente discusso, questa è esattamente la fisica che vogliamo catturare con il presente modello e ciò conclude la dimostrazione della consistenza del nostro modello con la teoria standard [12].

3.5 Derivazione della relazione di dispersione non lineare

In questo paragrafo, nel limite di plasma omogeneo, deriviamo la relazione di dispersione non lineare per i modi di bassa frequenza associata all'equazione d'onda (3.40). A tal fine, partiamo dall'equazione d'onda di HF (3.35) che qui di seguito riscriviamo per un plasma omogeneo:

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right) \tilde{E}_z(k_x, k_y, k_z, \omega) = \beta_{LO}^{HF}(k_z, \omega) \tilde{E}_z(k_x, k_y, k_z, \omega) + \beta_{NLO}^{HF}(k_x, k_y, k_z, \omega) \quad (3.71)$$

dove $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ e dove:

$$\beta_{LO}^{HF}(k_z, \omega) = \left(\frac{2 \omega_{p,e}^2}{k_z^2 v_{th,e}^2}\right) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) C_2(u_e) \quad (3.72)$$

$$\beta_{NLO}^{HF}(k_x, k_y, k_z, \omega) = \left(\frac{j \omega_{p,e}^2}{k_z^2 v_{th,e}^2}\right) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \frac{e \mathfrak{S}_e(k_x, k_y, k_z, \omega)}{T_e} \quad (3.73)$$

dove il termine $\mathfrak{S}_e(k_x, k_y, k_z, \omega)$, che qui rappresenta il battimento di un campo di bassa frequenza con un campo di alta frequenza, è definito nel seguente modo:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_e(k_x, k_y, k_z, \omega) \equiv & \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk'_y dk'_z d\omega' \tilde{E}_z(k_x - k'_x, k_y - k'_y, k_z - k'_z, \omega - \omega') \cdot \\ & \cdot \tilde{E}_z(k'_x, k'_y, k'_z, \omega') F_e(u_e, u'_e) / k'_z \end{aligned} \quad (3.74)$$

Quindi, risolvendo la (3.71) per il campo elettrico \tilde{E}_z , otteniamo la generica espressione per il campo di HF:

$$\tilde{E}_z^{HF} = j \gamma (1 - \alpha u_e^2) \frac{\mathfrak{S}_e(k_x, k_y, k_z, \omega)}{\left[\frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \left(\frac{2 \omega_{p,e}^2}{k_z^2 v_{th,e}^2} \right) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) C_2(u_e) \right]} \quad (3.75)$$

dove $\gamma \equiv 2 e \omega_{p,e}^2 / m_e v_{th,e}^4$, $\alpha \equiv v_{th,e}^2 / c^2$ e $u_e \equiv \omega / k_z v_{th,e}$.

Se nella (3.74) facciamo battere un campo di bassa frequenza \tilde{E}_z con uno di pompa $\tilde{E}_{z,0}$, tenendo conto delle regole di selezione, $\omega_{2,1} = \omega_0 \pm \omega$ e $\mathbf{k}_{2,1} = \mathbf{k}_0 \pm \mathbf{k}$, otteniamo per la (3.75) la seguente espressione:

$$\begin{aligned} \tilde{E}_z^{HF} = j \gamma (1 - \alpha u_{e,2}^2) & \frac{[\tilde{E}_z \tilde{E}_{z,0} \delta(\omega - \omega_2) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2) - \tilde{E}_z^* \tilde{E}_{z,0}^* \delta(\omega + \omega_2) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_2)] F_e(u_{e,2}, u_{e,0})}{\left[\frac{\omega_2^2}{c^2} - k_2^2 - \left(\frac{2 \omega_{p,e}^2}{k_{z,2}^2 v_{th,e}^2} \right) \left(k_{z,2}^2 - \frac{\omega_2^2}{c^2} \right) C_2(u_{e,2}) \right]} \frac{1}{k_{z,0}} + \\ + j \gamma (1 - \alpha u_{e,1}^2) & \frac{[\tilde{E}_z^* \tilde{E}_{z,0} \delta(\omega - \omega_1) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) - \tilde{E}_z \tilde{E}_{z,0}^* \delta(\omega + \omega_1) \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_1)] F_e(u_{e,1}, u_{e,0})}{\left[\frac{\omega_1^2}{c^2} - k_1^2 - \left(\frac{2 \omega_{p,e}^2}{k_{z,1}^2 v_{th,e}^2} \right) \left(k_{z,1}^2 - \frac{\omega_1^2}{c^2} \right) C_2(u_{e,1}) \right]} \frac{1}{k_{z,0}} \end{aligned} \quad (3.76)$$

dove $k_i^2 \equiv k_{x,i}^2 + k_{y,i}^2 + k_{z,i}^2$, $u_e \equiv \omega / k_z v_{th,e}$, $u_{e,i} \equiv \omega_i / k_{z,i} v_{th,e}$ con $i = 0$ per la pompa e $i = 1, 2$ per le *sideband* inferiore e superiore, rispettivamente, e dove $\delta(\mathbf{k} \pm \mathbf{k}_i) \equiv \delta(k_x \pm k_{x,i}) \delta(k_y \pm k_{y,i}) \delta(k_z \pm k_{z,i})$.

Quindi passiamo all'equazione di bassa frequenza (3.40) che qui di seguito riscriviamo per un plasma omogeneo:

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \tilde{E}_z(k_x, k_y, k_z, \omega) = \beta_{LO}^{LF}(k_z, \omega) \tilde{E}_z(k_x, k_y, k_z, \omega) + \beta_{NLO}^{LF}(k_x, k_y, k_z, \omega) \quad (3.77)$$

dove $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ e dove:

$$\beta_{LO}^{LF}(k_z, \omega) = \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \sum_{\alpha} \left(\frac{2 \omega_{p,\alpha}^2}{k_z^2 v_{th,\alpha}^2} \right) C_2(u_{\alpha}) \quad (3.78)$$

$$\beta_{NLO}^{LF}(k_x, k_y, k_z, \omega) = \left(\frac{j \omega_{p,e}^2}{k_z^2 v_{th,e}^2} \right) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \frac{e \mathfrak{S}_e(k_x, k_y, k_z, \omega)}{T_e} \quad (3.79)$$

dove il termine $\mathfrak{S}_e(k_x, k_y, k_z, \omega)$, che qui rappresenta il battimento di due campi di alta frequenza, è definito come in (3.74).

Quindi, risolvendo la (3.77) per il campo elettrico \tilde{E}_z , otteniamo la generica espressione per il campo di LF:

$$\tilde{E}_z^{LF} = j \gamma (1 - \alpha u_e^2) \frac{\mathfrak{S}_e(k_x, k_y, k_z, \omega)}{\left\{ \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \left(\frac{2 \omega_{p,e}^2}{k_z^2 v_{th,e}^2} \right) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left[C_2(u_e) + \sum_i \frac{Z_i^2}{\tau_i} C_2(u_i) \right] \right\}} \quad (3.80)$$

dove la sommatoria è estesa alle specie ioniche del plasma e dove $\gamma \equiv 2 e \omega_{p,e}^2 / m_e v_{th,e}^4$, $\alpha \equiv v_{th,e}^2 / c^2$, $\tau_i \equiv T_i / T_e$, $u_i \equiv \omega / k_z v_{th,i}$ e Z_i è la carica ionica.

Se nella (3.74) facciamo battere il campo di alta frequenza \tilde{E}_z^{HF} (3.76) con il campo di pompa $\tilde{E}_{z,o}$, tenendo sempre conto delle regole di selezione, $\omega_{2,1} = \omega_o \pm \omega$ e $\mathbf{k}_{2,1} = \mathbf{k}_o \pm \mathbf{k}$, otteniamo per la (3.80) la seguente espressione:

$$\tilde{E}_z^{LF} = \gamma^2 A (A_1 F_1 + A_2 F_2) |\tilde{E}_{z,o}|^2 F \tilde{E}_z^{LF} \quad (3.81)$$

dove $A \equiv (1 - \alpha u_e^2)$, $A_1 \equiv (1 - \alpha u_{e,1}^2)$, $A_2 \equiv (1 - \alpha u_{e,2}^2)$ e dove:

$$F \equiv \frac{F_e(u_e, u_{e,o})}{\left\{ \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \left(\frac{2 \omega_{p,e}^2}{k_z^2 v_{th,e}^2} \right) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left[C_2(u_e) + \sum_i \frac{Z_i^2}{\tau_i} C_2(u_i) \right] \right\}}$$

$$F_1 \equiv \frac{F_e(u_{e,1}, u_{e,o})}{k_{z,o} \left[\frac{\omega_1^2}{c^2} - k_1^2 - \left(\frac{2 \omega_{p,e}^2}{k_{z,1}^2 v_{th,e}^2} \right) \left(k_{z,1}^2 - \frac{\omega_1^2}{c^2} \right) C_2(u_{e,1}) \right]}$$

$$F_2 \equiv \frac{F_e(u_{e,2}, u_{e,o})}{k_{z,o} \left[\frac{\omega_2^2}{c^2} - k_2^2 - \left(\frac{2 \omega_{p,e}^2}{k_{z,2}^2 v_{th,e}^2} \right) \left(k_{z,2}^2 - \frac{\omega_2^2}{c^2} \right) C_2(u_{e,2}) \right]}$$

Quindi dalla (3.81) discende immediatamente la seguente equazione:

$$\left[1 - \gamma^2 A (A_1 F_1 + A_2 F_2) |\tilde{E}_{z,o}|^2 F \right] \tilde{E}_z^{LF} = 0 \quad (3.82)$$

da cui discende la relazione di dispersione cercata:

$$1 - \gamma^2 A (A_1 F_1 + A_2 F_2) |\tilde{E}_{z,o}|^2 F = 0 \quad (3.83)$$

Ora riconoscendo che i denominatori delle (3.75) e (3.80) sono le funzioni dielettriche di bassa e alta frequenza nel limite lineare, rispettivamente, si ha [11]:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \equiv \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 - \left(\frac{2 \omega_{p,e}^2}{k_z^2 v_{th,e}^2} \right) \left(k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left[C_2(u_e) + \sum_i \frac{Z_i^2}{\tau_i} C_2(u_i) \right] \quad (3.84)$$

$$\varepsilon_{1,2}(\omega_{1,2}, \mathbf{k}_{1,2}) \equiv \frac{\omega_{1,2}^2}{c^2} - k_{1,2}^2 - \left(\frac{2 \omega_{p,e}^2}{k_{z,1,2}^2 v_{th,e}^2} \right) \left(k_{z,1,2}^2 - \frac{\omega_{1,2}^2}{c^2} \right) C_2(u_{e,1,2}) \quad (3.85)$$

e la relazione di dispersione (3.83) assume la seguente forma compatta:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\mu_1}{\varepsilon_1(\omega_1, \mathbf{k}_1)} + \frac{\mu_2}{\varepsilon_2(\omega_2, \mathbf{k}_2)} \quad (3.86)$$

dove:

$$\mu_1 \equiv \frac{\gamma^2 A A_1 |\tilde{E}_{z,o}|^2}{k_{z,o}^2} F_e(u_e, u_{e,o}) F_e(u_{e,1}, u_{e,o}) \quad (3.87)$$

$$\mu_2 \equiv \frac{\gamma^2 A A_2 |\tilde{E}_{z,o}|^2}{k_{z,o}^2} F_e(u_e, u_{e,o}) F_e(u_{e,2}, u_{e,o}) \quad (3.88)$$

La relazione di dispersione non lineare (3.86) ha esattamente la stessa forma della relazione di dispersione parametrica (2.21) per i modi di bassa frequenza ottenuta nel *framework* della teoria standard delle IP [12,23,24,62]. Si può dimostrare che la (3.86) e la (2.21) coincidono quando è dominante la dinamica delle particelle nella direzione parallela al campo magnetico di confinamento. Come precedentemente discusso, questa è esattamente la fisica che vogliamo catturare con il presente modello e ciò costituisce una ulteriore dimostrazione della consistenza del nostro modello con la teoria standard [12].

Capitolo 4

RISULTATI NUMERICI

4.1 Simulazioni numeriche

In questo quarto capitolo riassumiamo i principali risultati raggiunti nello studio delle instabilità parametriche (IP) con il modello fisico-matematico, denominato modello di *Spectral Broadening*, sviluppato con il presente lavoro di ricerca.

È stato sviluppato un codice di calcolo numerico in MATLAB che implementa il modello di *Spectral Broadening*. Poiché questo codice va a modellizzare il comportamento elettromagnetico della parte più esterna e quindi più fredda del plasma (SOL), il codice è stato chiamato ALGOR, dal termine latino *algor* che significa freddo. Il codice è stato configurato per simulare il comportamento non lineare di un plasma di deuterio per il *tokamak* FTU dell'ENEA di Frascati [20]. Le caratteristiche principali della macchina FTU sono riassunti in Tabella 1, mentre i parametri principali di cui si è tenuto conto nelle simulazioni sono riassunti in Tabella 2.

Nel seguito riassumiamo i principali risultati raggiunti nella valutazione numerica del modello di *Spectral Broadening*. Con le seguenti simulazioni diamo una valutazione dell'allargamento spettrale, in frequenza e in indice di rifrazione parallelo al campo magnetico di confinamento, dovuto all'amplificazione del rumore termico del plasma presente al bordo della colonna principale di plasma e del rumore prodotto dalla sorgente di potenza a radiofrequenza (RF).

Nelle simulazioni abbiamo considerato scenari sperimentali tipici per sperimentazioni LHCD in plasmi ad alta densità di FTU, rilevanti per il futuro reattore sperimentale ITER. La frequenza nominale della sorgente RF è $f_0 = 8$ GHz e il valore di picco dello spettro in $n_{//}$ accoppiato dall'antenna LH è $n_{//0} = 1.85$, corrispondente ad uno sfasamento tra due guide d'onda adiacenti dell'antenna pari a 90° . Assumiamo una potenza totale LH accoppiata di 300 kW pari a quella iniettata da un singolo modulo LH dell'antenna di FTU con una superficie radiante pari a circa 100 cm^2 [20]. I dati principali del sistema LHCD di FTU sono riassunti in Tabella 3.

Parametri di FTU	Valore	Dimensione fisica
Raggio maggiore del plasma	0.935	m
Raggio minore del plasma	0.31	m
Corrente di plasma massima	1.6	MA
Campo magnetico toroidale	8	T
Durata del massimo del campo toroidale	1.5	s
Peso dell'insieme macchina	90	t
Energia di campo toroidale	160	MJ
Energia di campo poloidale	200	MJ
Tasso di ripetizione di impulso	un impulso ogni 20 minuti	

Tabella 1

Parametri codice ALGOR per FTU	Valore	Dimensione fisica
Raggio maggiore R	93.5	cm
Raggio minore r	31	cm
Frequenza pompa $f_0 = \omega_0/2\pi$	8	GHz
Valore di $n_{//}$ del picco dello spettro lanciato	1.85	u.a.
Larghezza di banda generatore	200	kHz
Densità all'antenna	$2 \cdot 10^{12}$	cm^{-3}
Temperatura all'antenna T_0	10-15	eV
Campo magnetico toroidale B_0 (SOL)	4.5	T
Carica ionica Z (Deuterio)	1	u.a.
Rapporto $\tau = T_i / T_e$	1	u.a.
Rapporto $\mu = m_i / m_e$ (Deuterio)	3671	u.a.

Tabella 2

Sistema LHCD di FTU	
Frequenza nominale	8 GHz
Generatore RF	Gyrotron
Potenza RF specifica	1 MW
Numero di generatori	6
Potenza RF totale	6 MW
Lunghezza di impulso massima	1 s
Minimo Duty Cycle	1/600

Tabella 3

Nel seguito abbiamo considerato un plasma con una sola specie ionica di deuterio con un profilo lineare della densità e della temperatura nella direzione radiale. Il plasma è invece assunto omogeneo nella direzione toroidale e poloidale. La densità all'antenna è pari a $2.0 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$, circa due volte la densità di *cut-off*, con un gradiente radiale pari a $8.0 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-4}$. Assumiamo un equilibrio termodinamico tra la popolazione elettronica e quella ionica, cioè $\tau \equiv T_i/T_e \approx 1$. Assumiamo inoltre un campo magnetostatico uniforme di 4.5 T nella regione di plasma di fronte all'antenna, corrispondente ad un campo magnetostatico centrale di 6 T.

Nelle simulazioni consideriamo due scenari sperimentali: il primo in cui la temperatura elettronica all'antenna è $T_{eo} = 10 \text{ eV}$ e il gradiente radiale è 20 eV/cm , corrispondente ad un caso di bordo freddo (nei grafici indicato come *cold SOL*); il secondo in cui la temperatura elettronica all'antenna è $T_{eo} = 15 \text{ eV}$ e il gradiente radiale è 30 eV/cm , corrispondente ad un caso di bordo caldo (nei grafici indicato come *hot SOL*).

Come condizioni iniziali, per l'equazione d'onda di HF (3.35) scritta per le componenti spettrali di pompa abbiamo considerato l'ampiezza e la derivata della soluzione standard del problema di *coupling* della potenza LH con il plasma di bordo per un profilo di densità lineare [13]. Numericamente è stato calcolato lo spettro di potenza accoppiato considerando le guide d'onda rettangolari alimentate con il modo fondamentale TE₁₀. In

Figura 1 è mostrato lo spettro di ampiezza accoppiato per il campo elettrico parallelo di pompa calcolato con il codice ALGOR.

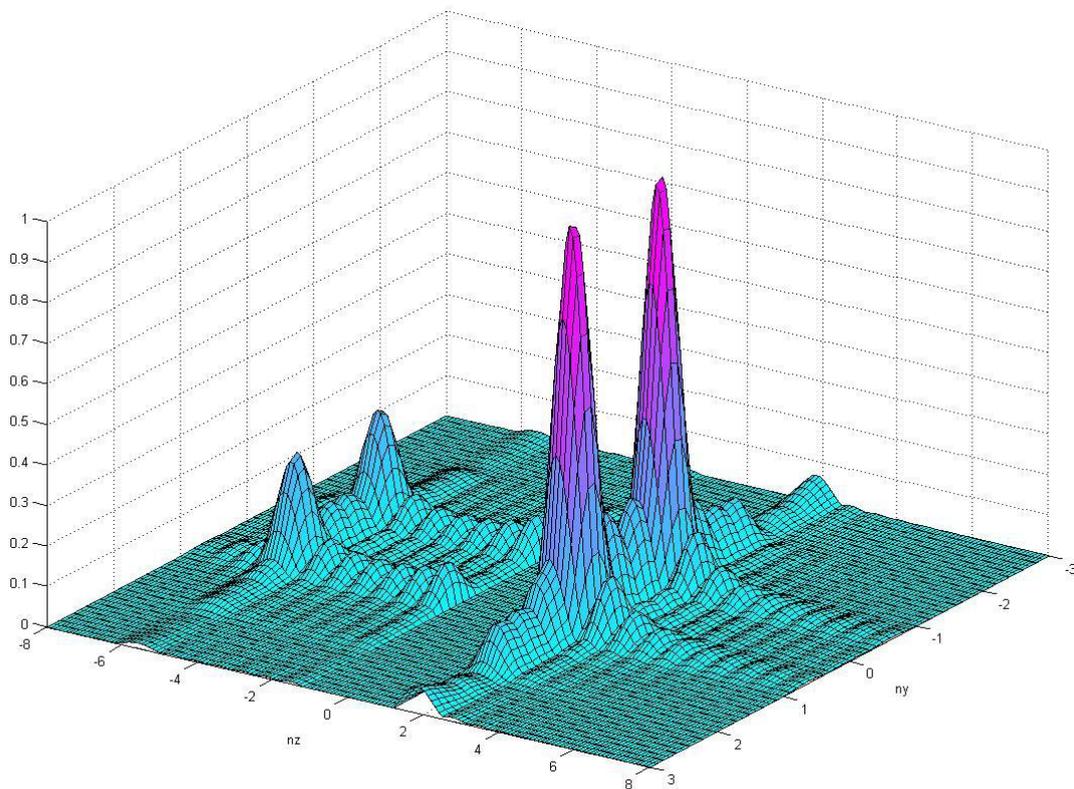


Figura 1 – Spettro dell’ampiezza del campo elettrico parallelo accoppiato al plasma dall’antenna LH di FTU

Per l’equazione d’onda di HF (3.35) scritta per le componenti spettrali di *sideband* LH abbiamo considerato, per la scelta delle ampiezze iniziali, un rumore termico con uno spettro calcolato secondo il modello cinetico esposto in Appendice A3 ed un rumore bianco (in frequenza) prodotto dalla sorgente di potenza RF. Quest’ultimo rumore, intrinseco al sistema di potenza RF, è accoppiato al plasma dal lanciatore LH, mantenendo in questo modo lo stesso spettro della pompa mostrato in Figura 1. Quindi, assumiamo complessivamente per il rumore un livello di potenza di -60 dB rispetto alla potenza accoppiata di pompa, come suggerito da misure effettuate in prossimità dell’antenna mediante *probe* RF (a tal proposito si veda lo spettro di potenza di colore nero mostrato in Figura 2). Per i gradienti iniziali dei campi di *sideband* abbiamo utilizzato la relazione di dispersione fredda LH (2.12) nel caso del rumore termico del plasma – il cui spettro è stato calcolato nel limite di plasma omogeneo e di onde LH elettrostatiche – mentre nel caso del

rumore RF abbiamo considerato gli stessi gradienti delle componenti spettrali di pompa. Invece per i quasi-modi ionico-acustici di bassa frequenza, descritti dall'equazione d'onda (3.40), siccome non potrebbero esistere senza il flusso di energia e momento proveniente dalla pompa, abbiamo considerato un'ampiezza iniziale nulla ed un gradiente iniziale nullo.

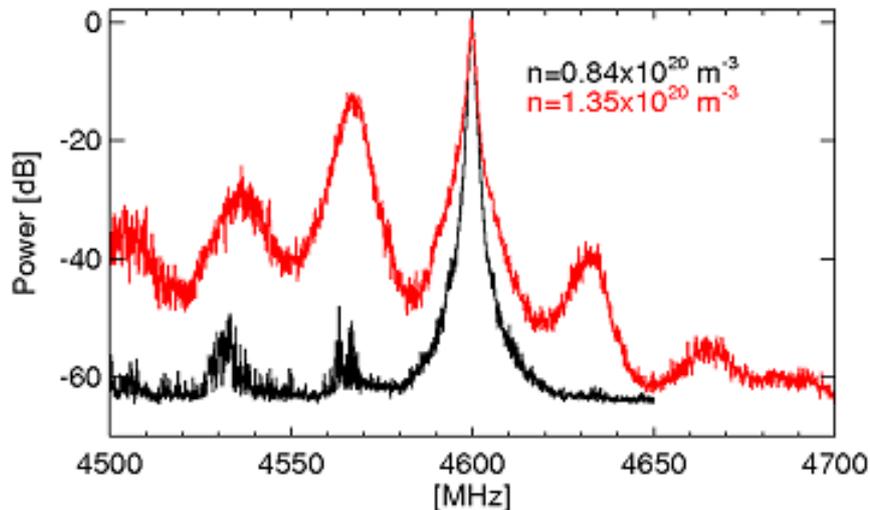


Figura 2 – Misure di allargamento spettrale effettuate sul tokamak Alcator C-Mod [67]

Il sistema di equazioni d'onda (3.35) e (3.40), accoppiate non linearmente tra di loro, è stato risolto numericamente per mezzo di un metodo iterativo, utilizzando come *guess* per l'iterazione iniziale le componenti spettrali di pompa, soluzioni della corrispondente equazione d'onda di alta frequenza linearizzata (3.43). Abbiamo quindi integrato numericamente le equazioni d'onda fino ad una distanza radiale di 5 cm dalla bocca dell'antenna, corrispondente alla posizione dell'ultima superficie magnetica chiusa. Per l'integrazione numerica abbiamo utilizzato un metodo di Runge-Kutta implicito del secondo ordine (adatto per problemi di tipo *stiff*) [68].

Il metodo iterativo ha raggiunto la convergenza dopo 3 iterazioni per lo scenario freddo e dopo 2 iterazioni nello scenario caldo. Come risultati delle simulazioni, abbiamo ottenuto un allargamento spettrale molto più marcato, sia in frequenza sia in n_{\parallel} , nello scenario freddo, rispetto a quello caldo (vedere Figura 3 e 4). Per quanto riguarda lo svuotamento

della pompa, esso è di circa il 30% nello scenario freddo, mentre è trascurabile nello scenario caldo (vedere Figura 5).

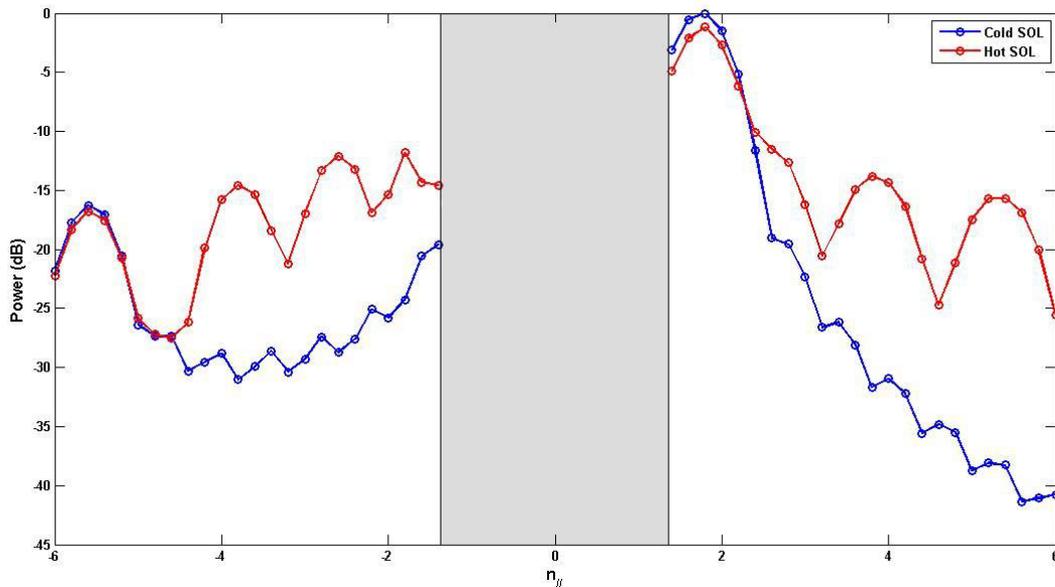


Figura 3 – Allargamento spettrale in $n_{//}$ nel caso di bordo freddo (Cold SOL) e nel caso di bordo caldo (Hot SOL). La banda in colore grigio indica la zona dello spettro che è stata ignorata nelle simulazioni poiché corrisponde alle onde lente che non soddisfano la condizione di accessibilità

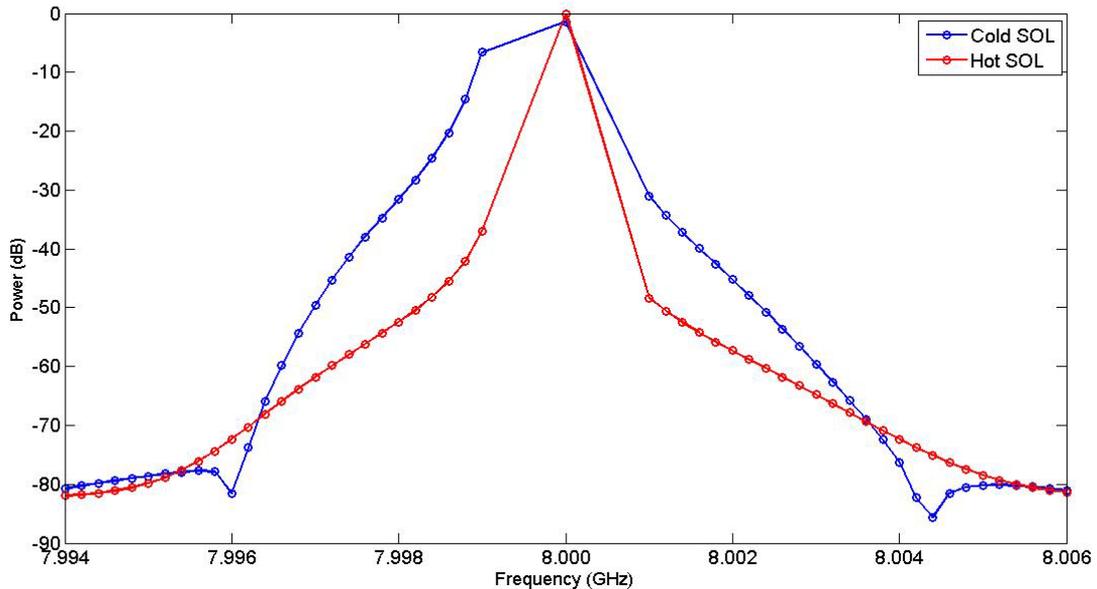


Figura 4 – Allargamento spettrale in frequenza nel caso di bordo freddo (Cold SOL) e nel caso di bordo caldo (Hot SOL)

In Figura 4, nello scenario freddo, può essere osservato un allargamento spettrale con una evidente asimmetria. Infatti, per questo scenario, il modello prevede un allargamento spettrale di circa 1 MHz a -10 dB sotto la pompa, risultato dello stesso ordine di grandezza

di quello misurato su FTU [55]. Inoltre, l'asimmetria dello spettro è dovuta alla prevalenza delle *sideband* LH inferiori alla frequenza nominale della pompa f_0 . Anche questo comportamento è in perfetto accordo con gli spettri misurati [55].

L'allargamento spettrale in $n_{//}$ (Fig. 3) è molto interessante poiché testimonia un importante trasferimento di potenza sugli $n_{//}$ più grandi, con livelli di potenza di -15 dB su $n_{//} \approx 6$. È stato calcolato in un precedente studio [51] che un allargamento in $n_{//}$ di questa entità potrebbe essere sufficiente per spiegare una significativa deposizione di potenza nella regione più periferica del plasma, spiegando in questo modo la mancata penetrazione della potenza LH nelle regioni più interne del plasma. Quindi questo risultato potrebbe effettivamente contribuire a risolvere lo *spectral gap problem*.

Questo risultato però va valutato considerando che, diversamente da quanto fatto finora in letteratura, è stato ottenuto con il contributo del rumore RF. Infatti nelle simulazioni effettuate abbiamo assunto un rumore complessivo al bordo del plasma con un livello di potenza di -60 dB rispetto alla potenza accoppiata, come suggerito da misure effettuate in prossimità dell'antenna mediante *probe* RF. Poiché, confrontando quest'ultimo con il rumore termico del plasma (ottenuto mediante il modello analitico esposto in Appendice A3) sembra che il rumore RF sia la parte predominante del rumore al bordo del plasma, attualmente siamo in grado di spiegare la parte significativa dell'allargamento spettrale in $n_{//}$ con il contributo del rumore di alta frequenza della sorgente RF. Infatti, ripetendo le simulazioni senza il contributo termico si ottengono praticamente gli stessi spettri mostrati in Figura 3 e 4. Tuttavia crediamo che, per poter arrivare ad una conclusione definitiva su questo punto cruciale, ulteriori simulazioni sono necessarie, estendendo il calcolo anche alle componenti spettrali con $n_{//} > 10$ dove il contributo del rumore termico è maggiore.

Il modello di *Spectral Broadening* ha permesso inoltre di valutare l'effetto di una seconda specie ionica, oltre a quella principale di deuterio. Abbiamo quindi effettuato ulteriori simulazioni dove si è considerata la presenza di impurerezze al bordo del plasma sotto forma di ioni pesanti di litio e di boro. Abbiamo quindi valutato gli effetti degli ioni pesanti sull'allargamento spettrale e sullo svuotamento della pompa.

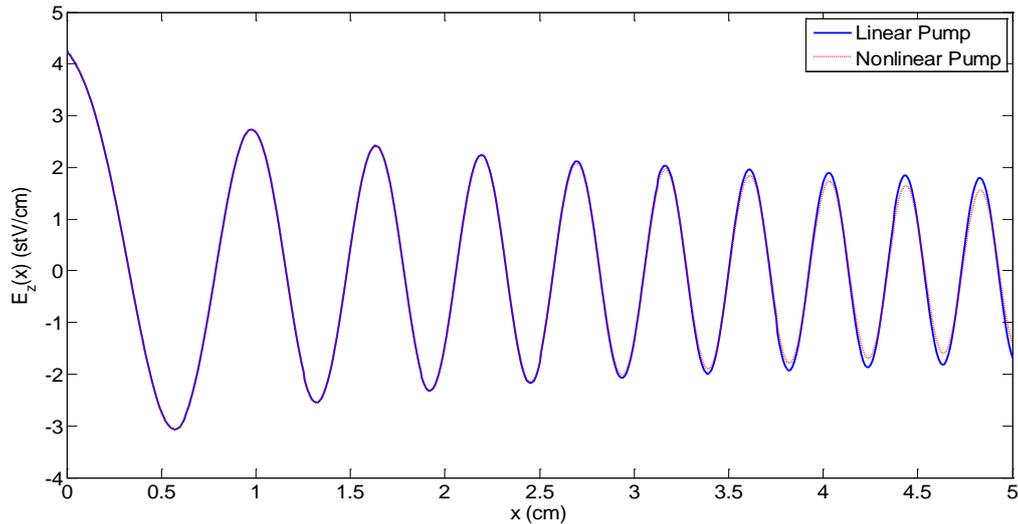


Figura 5 – Attenuazione spaziale della componente spettrale di picco della pompa, nel caso lineare e non lineare

Più precisamente, nella regione di fronte all'antenna LH, abbiamo considerato un plasma di deuterio con una seconda specie ionica (litio e boro) con una concentrazione del 20%. I risultati numerici sono mostrati in Figura 6. Quando consideriamo un plasma di solo deuterio, si ha un forte allargamento spettrale e uno svuotamento della pompa del 42%. Invece, quando consideriamo una seconda specie ionica, gli effetti non lineari sono significativamente ridotti. Con il litio abbiamo uno svuotamento della pompa del 7% e con il boro uno svuotamento della pompa del 4% quando è ionizzato una sola volta (B^+), e del 10% quando è ionizzato due volte (B^{++}).

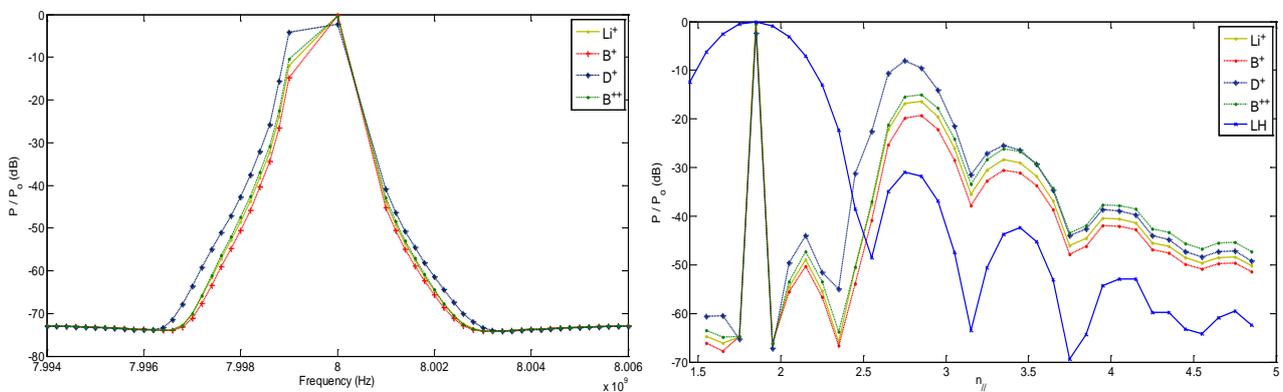


Figura 6 – Valutazione dell'allargamento spettrale in presenza di una seconda specie ionica

Inoltre, abbiamo confrontato gli effetti della temperatura elettronica con quelli degli ioni pesanti nella mitigazione degli effetti non lineari, come mostrato in Figura 7, e abbiamo

scoperto che, per via della natura non lineare delle IP, un aumento del 10% della temperatura di bordo ha gli stessi effetti della concentrazione di litio al 20%. Infine, abbiamo valutato l'efficacia della sinergia dell'aumento della temperatura elettronica con l'utilizzo del litio scoprendo che è possibile mitigare quasi completamente (svuotamento solo del 2%) gli effetti non lineari con un aumento di solo il 10% della temperatura elettronica e con solo il 10% di concentrazione di litio. Quest'ultimo risultato è molto importante in quanto permetterebbe di raggiungere un risultato che sarebbe altrimenti ottenibile, agendo solo sulla temperatura elettronica, a fronte di un aumento di ben il 50% della temperatura elettronica di bordo, come mostrato nelle precedenti simulazioni di Figura 3, 4 e 5.

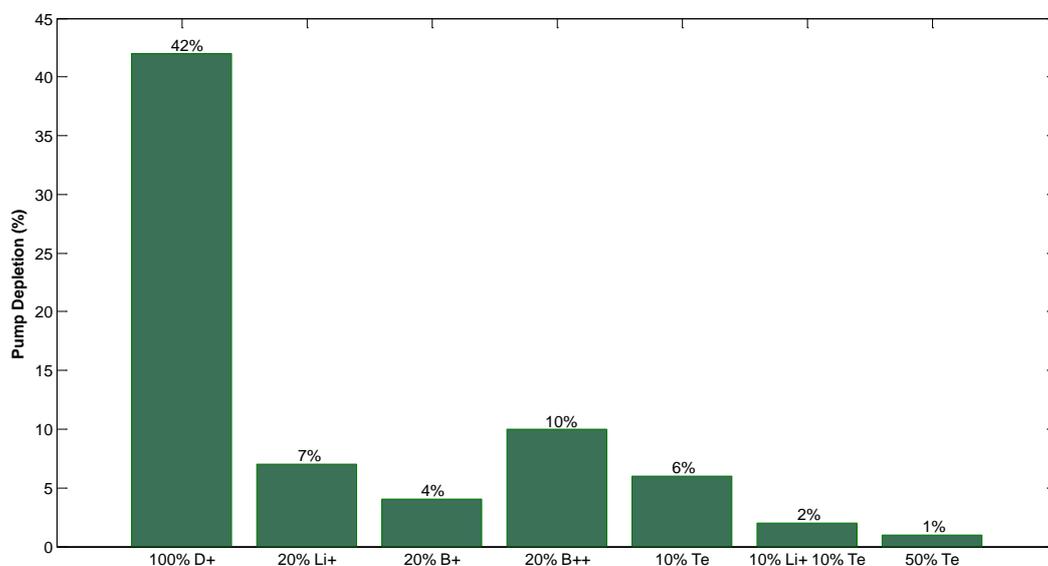


Figura 7 – Confronto dello svuotamento della pompa per diversi scenari di plasma di bordo

4.2 Conclusioni

Il modello di *Spectral Broadening* che è stato sviluppato con il presente lavoro di ricerca è un modello completamente non lineare nel campo elettrico ed è in grado di prevedere i forti svuotamenti osservati sperimentalmente nello spettro della potenza LH accoppiata al plasma. Questo nuovo modello, contrariamente a quelli che hanno preceduto questo lavoro di ricerca, è in grado di trattare accuratamente la complessa fisica non lineare LH del bordo del plasma di un *tokamak* mediante un'analisi *full-wave* e *full-spectrum* e, per

spiegare l'allargamento spettrale osservato, invoca un fenomeno di *scattering* non lineare della pompa provocato dalle perturbazioni della densità del plasma, sostenute nel plasma dalla pompa stessa per effetto ponderomotore, collocandosi nel *framework* teorico delle instabilità parametriche (IP).

I risultati raggiunti dimostrano come sia di fondamentale importanza considerare l'interazione non lineare al bordo del plasma per poter interpretare correttamente le sperimentazioni di *lower hybrid current drive* (LHCD) ad alta densità, rilevanti per il futuro reattore ITER. Infatti, con le simulazioni effettuate per scenari sperimentali tipici di plasmi ad alta densità di FTU, abbiamo verificato che, operando alle alte densità di potenza dei moderni esperimenti di LHCD, la fisica delle instabilità parametriche al bordo del plasma può spiegare un forte trasferimento di potenza LH dalla pompa alle *sideband* inferiori, contestualmente ad un forte allargamento spettrale, in accordo con ciò che è osservato sperimentalmente [55,67]. Quindi questi risultati potrebbero effettivamente contribuire a risolvere l'annoso ma sfuggente problema dello *spectral gap* [18,24].

Tuttavia, questi risultati vanno valutati considerando che, diversamente da quanto fatto in tutti i precedenti lavori, sono stati ottenuti con il contributo del rumore del generatore RF. Infatti nelle simulazioni effettuate abbiamo assunto un rumore complessivo al bordo del plasma con un livello di potenza di -60 dB rispetto alla potenza accoppiata, come suggerito da misure effettuate in prossimità dell'antenna mediante *probe* RF. Utilizzando un modello analitico per il rumore termico del plasma, abbiamo confrontato il contributo di questo rumore con quello del rumore RF ed abbiamo trovato che quest'ultimo costituisce la parte principale del rumore al bordo del plasma. Allo stato attuale, quindi, siamo in grado di spiegare una parte significativa dell'allargamento spettrale in $n_{//}$ con il contributo del rumore di alta frequenza della sorgente RF. Tuttavia riteniamo anche che, per poter arrivare ad una conclusione definitiva su questo punto cruciale, ulteriori simulazioni sono necessarie, estendendo il calcolo numerico anche alle componenti spettrali con $n_{//} > 10$ dove il contributo del rumore termico è maggiore. Se il contributo secondario del rumore termico fosse confermato, si aprirebbe una possibilità del tutto nuova per poter risolvere il

problema delle IP al bordo del plasma con una soluzione di tipo ingegneristico, ovvero filtrando il rumore RF sulla linea di trasmissione di potenza che va dal generatore all'antenna LH.

Il modello di *Spectral Broadening* ha anche permesso di individuare i parametri del plasma di bordo su cui è possibile agire sperimentalmente per poter limitare l'intensità degli effetti non lineari. Il primo parametro è la temperatura elettronica. Abbiamo dimostrato che un aumento della temperatura del 10% - 50% negli strati più esterni del plasma può attenuare fortemente l'accoppiamento non lineare tra i modi LH e quindi spegnere le IP al bordo. Il secondo parametro è l'utilizzo di ioni pesanti di litio e di boro. In questo secondo caso si sfrutta la maggiore inerzia degli ioni per diminuire l'efficacia del canale di decadimento parametrico alle frequenze dei quasi-modi ionico-acustici. Il litio è risultato l'elemento più interessante ai fini applicativi in quanto ha una seconda ionizzazione molto meno probabile rispetto al boro. Infatti, il modello prevede un peggioramento degli effetti non lineari con la carica ionica, oltre alle maggiori perdite che si avrebbero per radiazione. Infine, abbiamo valutato l'efficacia della sinergia dei due metodi, risultando questa la strategia di gran lunga migliore ai fini applicativi, potendo funzionare con più basse temperature elettroniche e più basse concentrazioni di ioni di litio al bordo.

Questi risultati originali dimostrano, quindi, che è possibile controllare gli effetti non lineari al bordo del plasma non solo agendo sulla temperatura elettronica, confermando peraltro un risultato che era già noto in letteratura [23,24,54,55], ma anche agendo sulla composizione ionica del plasma di fronte all'antenna. Questo può essere fatto non solo con una iniezione di gas davanti all'antenna, ma anche con una adeguata scelta dei materiali nel rivestimento del *limiter* del plasma e delle pareti interne della camera da vuoto.

Infine, il codice numerico ALGOR, sviluppato con il presente lavoro di ricerca, può ora essere utilizzato nelle sperimentazioni di FTU per calcolare l'effettivo spettro allargato che penetra all'interno dell'ultima superficie magnetica chiusa del plasma. La conoscenza accurata di questo spettro è indispensabile poiché, se considerato come input di codici numerici standard di *ray-tracing* opportunamente accoppiati a codici di Fokker-Planck,

permette di calcolare con precisione i profili di deposizione della potenza LH nelle sperimentazioni LHCD. Questo codice sarà quindi uno strumento di grande utilità per poter interpretare correttamente i risultati dei futuri esperimenti LHCD ad alta densità e, auspicabilmente, per poter superare i problemi che attualmente limitano l'impiego della frequenza ibrida inferiore in ITER.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Working Group I Contribution to the Fifth Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change (<http://www.climatechange2013.org/>)
- [2] World Energy Outlook 2013 – International Energy Agency
- [3] Chen F, *An Indispensable Truth: How Fusion Power Can Save the Planet*, Springer, 2011
- [4] Chen F, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, Springer, 2006
- [5] Lawson J D 1957 *Some criteria for a power producing thermonuclear reactor*, *Proc. Phys. Soc. B* **70**
- [6] Dendy R, *Plasma Physics*, Cambridge University Press, 1993
- [7] <http://www.efda.org/jet/>
- [8] <http://www.iter.org/>
- [9] <http://www.ignitor.it/>
- [10] <http://fusionforenergy.europa.eu/understandingfusion/demo.aspx>
- [11] Stix T H, *Waves in Plasmas*, Springer, 1992
- [12] Liu C S and Tripathi V K 1986 *Physics Reports* **130** 3 143
- [13] England A C, Eldridge O C, Knowlton S F, Porkolab M and Wilson J R 1989 *Nucl. Fusion* **29** 9
- [14] Fisher R K and Gould R W 1969 *Phase and group velocity in an anisotropic plasma* 9th Int. Conf. on Phenomena in Ionized Gases
- [15] Swanson D G, *Plasma Waves*, IOP Publishing, 2003
- [16] Stix T H 1965 *Phys. Rev. Lett.* **15** 878
- [17] Karney C F 1979 *Phys. Fluids* **22** 2188
- [18] Bonoli P 2014 *AIP Conf. Proc* **1580** 15
- [19] Bonoli P 1984 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **12** 95
- [20] Gormezano C *et al* 2004 *Fusion Science and Technology* **45** 3
- [21] Connor J W *et al* 2004 *Nucl. Fusion* **44**
- [22] Bertelli N *et al* 2012 *Plasma Phys. Control. Fusion* **55**
- [23] Cesario R *et al* 2006 *Nucl. Fusion* **46** 462
- [24] Cesario R *et al* 2014 *Nucl. Fusion* **54**
- [25] Porkolab M, Bernabei S, Hooke W M, Motley R W and Nagashima T 1977 *Phys. Rev. Lett.* **31** 230
- [26] Takase Y *et al* 1985 *Phys. Fluids* **26** 2992
- [27] Cesario R and Pericoli R 1987 *Nucl. Fusion* **27** 435
- [28] Cesario R and Cardinali A 1989 *Nucl. Fusion* **29** 1709
- [29] Fisch N J 1978 *Phys. Rev. Letters* **41** 873-876
- [30] Fisch N J 1987 *Rev. Mod. Physics* **59** 175-234

- [31] Bernabei S *et al* 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 1255
- [32] De Marco F 1985 in *Course and Workshop on Applications of RF waves to Tokamak Plasmas*
Varenna Bernabei S, Gasparino U and Sindoni E, International School of Plasma Physics 316
- [33] Bonoli P T and Ott E 1982 *Phys. Fluids* **25** 359
- [34] Bonoli P T *et al* 1988 *Nucl. Fusion* **28** 991
- [35] Ignat D W 1981 *Phys. Fluids* **24** 1110
- [36] Takahashi T 1994 *Phys. Plasmas* **1** 2254
- [37] Bonoli P T and Englade R C 1986 *Phys. Fluids* **29** 2937
- [38] Esterkin A R and Piliya A D 1992 *Nucl. Fusion* **32** 927
- [39] Esterkin A R and Piliya A D 1992 *Plasma Phys. Contr. Fusion* **34** 1957
- [40] Bizarro J P and Moreau D 1993 *Phys. Fluids B* **5** 1227
- [41] Bizarro J P 1993 *Nucl. Fusion* **33** 831
- [42] Kupfer K and Moreau D 1992 *Nucl. Fusion* **32** 1845
- [43] Kupfer K *et al* 1993 *Phys. Fluids B* **5** 4391
- [44] Peysson Y *et al* 1996 *Phys. Plasmas* **3** 3668
- [45] Bizarro J P *et al* 1999 *Phys. Plasmas* **6** 1131
- [46] Bizarro J P 1995 *Phys Rev Lett* **75** 1308
- [47] Pereverzev G 1992 *Nucl. Fusion* **32** 1091
- [48] Wright J C *et al* 2005 *Nucl. Fusion* **45** 1411–1418
- [49] Takase Y *et al* 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 274; Takase Y *et al* 1985 *Phys. Fluids* **28** 983
- [50] Castaldo C *et al* 2002 *Phys. Plasmas* **9** 3205
- [51] Cesario R, Cardinali A, Castaldo C, Paoletti F and D. Mazon 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 175002
- [52] Ott E 1979 *Phys. Fluids* **22** 1732
- [53] Andrews P L and Perkins F W 1983 *Phys. Fluids* **26** 2546
- [54] Cesario R *et al* 2004 *Plasma Phys. Contr. Fusion* **53** 085011
- [55] Cesario R *et al* 2010 *Nature Comms* **1** 5 55
- [56] Markov G A, Mironov V A and Sergeev A M 1979 *JETP Lett.* **29** 617
- [57] Chen L and Berger R L 1977 *Nucl. Fusion* **17** 779
- [58] Castaldo C, Lazzaro E, Lontano M and Sergeev A M 1997 *Phys. Lett. A* **230** 336
- [59] Kadomtsev B, *Plasma Turbulence*, Academic Press, 1965
- [60] Tsytovich V, *Theory of Plasma Turbulence*, Studies in Soviet Science, 1977
- [61] Sagdeev R and Galeev A, *Nonlinear Plasma Theory*, Benjamin Inc., 1969
- [62] Chen H and Liu C 1976 *Phys. Rev. Lett.* **37** 693
- [63] Napoli F *et al* 2013 *Plasma Phys Control Fusion* **55**
- [64] Zaho A and Gao Z 2013 *Nucl. Fusion* **53** 083015
- [65] Huba J, *NRL Plasma Formulary*, Naval Research Laboratory, 2011
- [66] Ichimaru S, *Basic Principles of Plasma Physics: A Statistical Approach*, W. A. Benjamin Inc, 1973

- [67] Baek S *et al* 2012 *Plasma and Fusion Research* **7** 2402031
- [68] Shampine L and Reichelt M 1997 *SIAM Journal on Scientific Computing* **18** 1–22
- [69] Greene J 1973 *Phys Fluids* **16** 2022
- [70] Opher M, Morales G and Leboeuf J 2002 *Phys Rev E* **66** 016407
- [71] Trubnikov B 1965 *Reviews of Plasma Physics* **1** 105
- [72] Klimontovich Yu L, *Kinetic Theory of Nonideal Gases and Nonideal Plasmas*, Pergamon Press, 1982

APPENDICE

A.0 Definizioni

In questo lavoro si è fatto un ampio utilizzo dell'analisi di Fourier per la valutazione analitica dei campi elettrici e delle funzioni di distribuzione delle particelle del plasma. Al fine di dare una maggiore chiarezza a tutte le derivazioni analitiche esposte in questo lavoro, si riporta qui di seguito la definizione di trasformata 3D di Fourier utilizzata:

$$\tilde{\psi}(x, k_y, k_z, \omega; \xi) \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{+\infty} dt dy dz \psi(\mathbf{r}, t; \xi) e^{-j(\omega t - k_y y - k_z z)} \quad (\text{A0.1})$$

$$\psi(\mathbf{r}, t; \xi) \equiv \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\omega dk_x dk_y dk_z \tilde{\psi}(x, k_y, k_z, \omega; \xi) e^{j(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} \quad (\text{A0.2})$$

dove si è assunto che il sistema fisico è tempo invariante ed è dotato di simmetria spaziale nelle direzioni toroidale e poloidale; $\mathbf{r} = (x, y, z)$ è il vettore posizione, t è il tempo e ξ sta ad indicare la presenza di eventuali variabili addizionali. La quantità ψ rappresenta la generica componente del campo elettrico o la funzione di distribuzione f_α per la generica specie α del plasma.

Inoltre, quando si assume anche una simmetria spaziale nella direzione radiale, nel limite di plasma omogeneo, si ha la seguente definizione di trasformata 4D di Fourier:

$$\tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega; \xi) \equiv \frac{1}{(2\pi)^4} \iint \iiint_{-\infty}^{+\infty} dt dx dy dz \psi(\mathbf{r}, t; \xi) e^{-j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (\text{A0.3})$$

$$\psi(\mathbf{r}, t; \xi) \equiv \iint \iiint_{-\infty}^{+\infty} d\omega dk_x dk_y dk_z \tilde{\psi}(\mathbf{k}, \omega; \xi) e^{j(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (\text{A0.4})$$

dove $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ è il vettore d'onda.

A.1 Calcolo del limite della funzione di coupling

In questa appendice si riporta il calcolo del limite della funzione di *coupling* (3.19) per $u_{o,\alpha} \rightarrow u'_{o,\alpha}$ e si dimostra che è un valore finito.

Calcoliamo quindi il seguente limite:

$$\begin{aligned} & \lim_{u_{o,\alpha} \rightarrow u'_{o,\alpha}} F_\alpha(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) = \\ & = \lim_{u_{o,\alpha} \rightarrow u'_{o,\alpha}} \frac{C_1(u_{o,\alpha}) - C_1(u'_{o,\alpha})}{(u_{o,\alpha} - u'_{o,\alpha})} - \lim_{u_{o,\alpha} \rightarrow u'_{o,\alpha}} \frac{u_{o,\alpha} (C_1(u'_{o,\alpha}) + Z(u_{o,\alpha})) - 2 u_{o,\alpha}^2 C_2(u'_{o,\alpha})}{(u'_{o,\alpha} - u_{o,\alpha})^2} \end{aligned} \quad (\text{A1.1})$$

Calcoliamo quindi il primo limite in (A1.1):

$$\lim_{u_{o,\alpha} \rightarrow u'_{o,\alpha}} \frac{C_1(u_{o,\alpha}) - C_1(u'_{o,\alpha})}{(u_{o,\alpha} - u'_{o,\alpha})} = - \lim_{u_{o,\alpha} \rightarrow u'_{o,\alpha}} \frac{C_1(u'_{o,\alpha}) - C_1(u_{o,\alpha})}{(u_{o,\alpha} - u'_{o,\alpha})} = - \left(\frac{dC_1(u_{o,\alpha})}{du_{o,\alpha}} \right)_{u_{o,\alpha}} \quad (\text{A1.2})$$

Ora ricordando che $C_1(u_{o,\alpha}) \equiv [2 u_{o,\alpha} + 2 u_{o,\alpha}^2 Z(u_{o,\alpha}) - Z(u_{o,\alpha})]$ possiamo calcolare la derivata di $C_1(u_{o,\alpha})$:

$$\frac{dC_1(u_{o,\alpha})}{du_{o,\alpha}} = 2 + 4 u_{o,\alpha} Z(u_{o,\alpha}) + (2 u_{o,\alpha}^2 - 1) \dot{Z}(u_{o,\alpha}) \quad (\text{A1.3})$$

dove con il segno punto abbiamo indicato i termini derivati.

Ora poiché $\dot{Z}(u_{o,\alpha}) = -2(1 + u_{o,\alpha} Z(u_{o,\alpha}))$ [65] la precedente espressione (A1.3) diventa:

$$\frac{dC_1(u_{o,\alpha})}{du_{o,\alpha}} = 4(1 - u_{o,\alpha}^2) + 2 u_{o,\alpha} (3 - 2 u_{o,\alpha}^2) Z(u_{o,\alpha}) \quad (\text{A1.4})$$

e quindi per il limite (A1.2) abbiamo la seguente espressione:

$$\lim_{u_{o,\alpha} \rightarrow u'_{o,\alpha}} \frac{C_1(u_{o,\alpha}) - C_1(u'_{o,\alpha})}{(u'_{o,\alpha} - u_{o,\alpha})} = 4(u_{o,\alpha}^2 - 1) + 2 u'_{o,\alpha} (2 u_{o,\alpha}^2 - 3) Z(u'_{o,\alpha}) \quad (\text{A1.5})$$

Calcoliamo ora il secondo limite in (A1.1):

$$\lim_{u_{o,\alpha} \rightarrow u'_{o,\alpha}} \frac{u_{o,\alpha} (C_1(u'_{o,\alpha}) + Z(u_{o,\alpha})) - 2 u_{o,\alpha}^2 C_2(u'_{o,\alpha})}{(u'_{o,\alpha} - u_{o,\alpha})^2} \quad (\text{A1.6})$$

Consideriamo lo sviluppo in serie di Taylor del numeratore $N(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) \equiv u_{o,\alpha} (C_1(u'_{o,\alpha}) + Z(u_{o,\alpha})) - 2 u_{o,\alpha}^2 C_2(u'_{o,\alpha})$ della (A1.6) calcolato nell'intorno di $u'_{o,\alpha}$ ed arrestato al secondo ordine:

$$N(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) = N(u'_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) + \dot{N}(u'_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) (u_{o,\alpha} - u'_{o,\alpha}) + \frac{1}{2} \ddot{N}(u'_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) (u_{o,\alpha} - u'_{o,\alpha})^2 \quad (\text{A1.7})$$

Abbiamo:

$$N(u'_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) = 0 \quad (\text{A1.8})$$

$$\begin{aligned} \dot{N}(u'_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) &= \frac{d}{du_{o,\alpha}} \left(N(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) \right)_{u'_{o,\alpha}} = \left(C_1(u'_{o,\alpha}) + Z(u_{o,\alpha}) + u_{o,\alpha} \dot{Z}(u_{o,\alpha}) \right)_{u'_{o,\alpha}} = \\ &= 2 u'_{o,\alpha} \left(1 + u'_{o,\alpha} Z(u'_{o,\alpha}) \right) - 2 u'_{o,\alpha} \left(1 + u'_{o,\alpha} Z(u'_{o,\alpha}) \right) = 0 \end{aligned} \quad (\text{A1.9})$$

$$\begin{aligned} \ddot{N}(u'_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) &= \frac{d^2}{du_{o,\alpha}^2} \left(N(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) \right)_{u'_{o,\alpha}} = \frac{d}{du_{o,\alpha}} \left(\dot{N}(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) \right)_{u'_{o,\alpha}} = \\ &= \left(2 \dot{Z}(u_{o,\alpha}) + u_{o,\alpha} \ddot{Z}(u_{o,\alpha}) \right)_{u'_{o,\alpha}} = 4 (u_{o,\alpha}'^2 - 1) + 2 u'_{o,\alpha} (2 u_{o,\alpha}'^2 - 3) Z(u'_{o,\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{A1.10})$$

Quindi:

$$N(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) = \left(2 (u_{o,\alpha}'^2 - 1) + u'_{o,\alpha} (2 u_{o,\alpha}'^2 - 3) Z(u'_{o,\alpha}) \right) (u_{o,\alpha} - u'_{o,\alpha})^2 \quad (\text{A1.11})$$

A questo punto il limite (A1.6) diventa:

$$\begin{aligned} \lim_{u_{o,\alpha} \rightarrow u'_{o,\alpha}} \frac{\left(2 (u_{o,\alpha}'^2 - 1) + u'_{o,\alpha} (2 u_{o,\alpha}'^2 - 3) Z(u'_{o,\alpha}) \right) (u_{o,\alpha} - u'_{o,\alpha})^2}{(u_{o,\alpha} - u'_{o,\alpha})^2} &= \\ &= 2 (u_{o,\alpha}'^2 - 1) + u'_{o,\alpha} (2 u_{o,\alpha}'^2 - 3) Z(u'_{o,\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{A1.12})$$

Infine, mettendo insieme i limiti (A1.5) e (A1.12), possiamo calcolare il limite della funzione di *coupling* (A1.1):

$$\begin{aligned} \lim_{u_{o,\alpha} \rightarrow u'_{o,\alpha}} F_\alpha(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) &= 4 (u_{o,\alpha}'^2 - 1) + 2 u'_{o,\alpha} (2 u_{o,\alpha}'^2 - 3) Z(u'_{o,\alpha}) - 2 (u_{o,\alpha}'^2 - 1) \\ &\quad - u'_{o,\alpha} (2 u_{o,\alpha}'^2 - 3) Z(u'_{o,\alpha}) = 2 (u_{o,\alpha}'^2 - 1) + u'_{o,\alpha} (2 u_{o,\alpha}'^2 - 3) Z(u'_{o,\alpha}) \end{aligned} \quad (\text{A1.13})$$

e, poiché la funzione Z è finita per ogni valore del suo argomento, l'espressione ottenuta (A1.13) dimostra che il limite è finito.

A.2 Estensione collisionale del modello cinetico

In questa appendice si riporta la generalizzazione del modello cinetico ottenuta considerando l'effetto delle collisioni. Questa è la versione del modello cinetico che è stata implementata nel codice ALGOR.

Nell'analisi perturbativa di alta frequenza (HF), poiché le frequenze di collisione degli elettroni sono molto più piccole delle frequenze dei modi collettivi di HF (onde LH), è lecito trascurare le collisioni e quindi ciò giustifica l'utilizzo delle equazioni cinetiche senza collisioni (equazione di Vlasov). Tuttavia, nell'analisi di HF, il ruolo delle collisioni rimane essenziale, sebbene è implicito nello schema di Vlasov, poiché le collisioni mantengono le funzioni di distribuzione delle particelle del plasma vicine all'equilibrio.

Invece, nell'analisi di bassa frequenza (LF), poiché nel plasma di bordo di un *tokamak* le frequenze di collisione elettrone-elettrone sono dell'ordine di 0.5-1 MHz e le frequenze di collisione ione-elettrone per un plasma di deuterio sono dell'ordine di 5-20 kHz, cioè dello stesso ordine di grandezza delle frequenze dei modi di bassa frequenza, l'effetto delle collisioni è quindi importante e le equazioni cinetiche devono includere il termine collisionale (equazione di Boltzmann).

Quindi, per avere un'analisi accurata delle IP nel plasma di bordo di un *tokamak*, il ruolo delle collisioni non può essere trascurato. Di conseguenza, l'equazione di partenza per la derivazione del modello cinetico deve essere l'equazione di Boltzmann:

$$\partial_t f_\alpha + \mathbf{v} \cdot \nabla f_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times (\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}) \right] \cdot \nabla_{\mathbf{v}} f_\alpha = (\partial_t f_\alpha)_{\text{coll}} \quad (\text{A2.1})$$

dove $(\partial_t f_\alpha)_{\text{coll}}$ è il così detto integrale collisionale [4,11].

Come modello approssimato dell'integrale collisionale utilizziamo nel seguito un operatore collisionale BGK che conserva il numero delle particelle [69] così definito:

$$(\partial_t f_\alpha)_{\text{coll}} \cong -\nu_\alpha \left[f_\alpha - f_\alpha^{(0)} \left(n_\alpha / n_\alpha^{(0)} \right) \right] \quad (\text{A2.2})$$

dove $f_\alpha^{(0)}$ è la funzione di distribuzione imperturbata di equilibrio locale per la generica specie α del plasma e ν_α è il relativo tasso caratteristico di rilassamento. Questo modello è stato riconosciuto adeguato per predire gli effetti collisionali sulla propagazione delle onde nell'ambito della teoria cinetica delle onde di un plasma [70].

Quando $T_e \approx T_i$ e quando si considerano ioni con una singola ionizzazione, i tassi di rilassamento possono essere approssimati dalle seguenti espressioni [71]:

$$\nu_e \cong \nu_{e-e}(\text{Hz}) = 2.9 \cdot 10^{-6} n_e^{(0)} (\text{cm}^{-3}) \Lambda_C T_e^{-\frac{3}{2}} (\text{eV}) \quad (\text{A2.3})$$

$$\nu_i \cong \nu_{i-e}(\text{Hz}) = 4.8 \cdot 10^{-8} n_e^{(0)} (\text{cm}^{-3}) \Lambda_C T_i^{-\frac{3}{2}} (\text{eV}) \sqrt{m_p/m_i} \quad (\text{A2.4})$$

dove ν_{e-e} è la frequenza di collisione elettrone-elettrone, ν_{i-e} è la frequenza di collisione ione-elettrone, Λ_C è il logaritmo di Coulomb e m_p è la massa del protone.

Seguendo lo stesso filo logico della derivazione del modello cinetico senza collisioni del Capitolo 3, integriamo la (A2.1) nello spazio delle velocità perpendicolari, assumendo l'isotropia della funzione di distribuzione nello spazio delle velocità perpendicolari, per ottenere la seguente espressione per l'equazione di Boltzmann 3D1D:

$$\partial_t g_\alpha + v_z \partial_z g_\alpha + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_z \partial_{v_z} g_\alpha = -\nu_\alpha \left[g_\alpha - g_\alpha^{(0)} \left(n_\alpha / n_\alpha^{(0)} \right) \right] \quad (\text{A2.5})$$

dove $g_\alpha(\mathbf{r}, v_z, t)$ è la funzione di distribuzione delle velocità nella direzione parallela al campo magnetostatico di confinamento \mathbf{B}_0 e $E_z(\mathbf{r}, t)$ è la componente parallela del campo elettrico.

Cerchiamo quindi una soluzione perturbativa della (A2.5) assumendo la seguente espansione per $g_\alpha(\mathbf{r}, v_z, t)$:

$$g_\alpha = g_\alpha^{(0)} + g_\alpha^{(1)} + g_\alpha^{(2)} = g_\alpha^{(0)} + \varepsilon_\alpha h_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 h_\alpha^{(2)} \quad (\text{A2.6})$$

dove $g_\alpha^{(0)} \equiv n_\alpha^{(0)} e^{-(v_z^2/v_{th,\alpha}^2)}/\sqrt{\pi} v_{th,\alpha}$ è la funzione di distribuzione di equilibrio locale, v_z è la velocità della particella α -esima del plasma nella direzione parallela al campo magnetostatico di confinamento \mathbf{B}_o , $g_\alpha^{(1)} \equiv \varepsilon_\alpha h_\alpha^{(1)}$ e $g_\alpha^{(2)} \equiv \varepsilon_\alpha^2 h_\alpha^{(2)}$ sono, rispettivamente, le perturbazioni del primo e del secondo ordine della funzione di distribuzione di equilibrio locale $g_\alpha^{(0)}$.

Inserendo quindi l'espansione (A2.6) nella (A2.5) otteniamo:

$$\begin{aligned} \partial_t (\varepsilon_\alpha h_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 h_\alpha^{(2)}) + v_z \partial_z (\varepsilon_\alpha h_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 h_\alpha^{(2)}) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} E_z \partial_{v_z} (g_\alpha^{(0)} + \varepsilon_\alpha h_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 h_\alpha^{(2)}) = \\ = -v_\alpha \left\{ \varepsilon_\alpha h_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 h_\alpha^{(2)} - g_\alpha^{(0)} \left[(\varepsilon_\alpha \delta_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 \delta_\alpha^{(2)}) / n_\alpha^{(0)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2.7})$$

dove abbiamo considerato che $\partial_t g_\alpha^{(0)} = 0$ e $\partial_z g_\alpha^{(0)} = 0$ e che l'espansione perturbativa (A2.6) induce la seguente espansione $n_\alpha = n_\alpha^{(0)} + n_\alpha^{(1)} + n_\alpha^{(2)} = n_\alpha^{(0)} + \varepsilon_\alpha \delta_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 \delta_\alpha^{(2)}$.

Consideriamo ora solo soluzioni stazionarie e assumiamo una simmetria spaziale nelle direzioni toroidale e poloidale. Sotto queste ipotesi, nel risolvere l'equazione (A2.7), possiamo passare al dominio trasformato nelle variabili coniugate k_y, k_z, ω tramite trasformata di Fourier nelle coordinate spaziali y e z e nel tempo t . Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} j(\omega - k_z v_z) (\varepsilon_\alpha \tilde{h}_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 \tilde{h}_\alpha^{(2)}) + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} (\tilde{E}_z \partial_{v_z} g_\alpha^{(0)} + \varepsilon_\alpha C[\tilde{E}_z, \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(1)}] + \varepsilon_\alpha^2 C[\tilde{E}_z, \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(2)}]) = \\ = -v_\alpha \left\{ \varepsilon_\alpha \tilde{h}_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 \tilde{h}_\alpha^{(2)} - g_\alpha^{(0)} \left[(\tilde{\delta}_\alpha^{(1)} + \tilde{\delta}_\alpha^{(2)}) / n_\alpha^{(0)} \right] \right\} \end{aligned} \quad (\text{A2.8})$$

dove con il segno *tilda* abbiamo indicato le grandezze trasformate e con il simbolo $C[\cdot]$ intendiamo l'operatore di convoluzione come in (3.7).

Ora nella (A2.8) normalizziamo le ampiezze dei campi elettrici al valore massimo del campo E_o , le frequenze alla frequenza angolare di pompa ω_o , le velocità delle particelle alla velocità termica $v_{th,\alpha}$ e le densità alla densità imperturbata $n_\alpha^{(0)}$:

$$\begin{aligned}
& j(\dot{\omega} - \dot{\gamma}) \left(\varepsilon_\alpha \tilde{h}_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 \tilde{h}_\alpha^{(2)} \right) + \left(\frac{q_\alpha E_o}{m_\alpha \omega_o v_{th,\alpha}} \right) \cdot \left(\dot{\tilde{E}}_z v_{th,\alpha} \partial_{v_z} g_\alpha^{(0)} + \right. \\
& \left. + \varepsilon_\alpha C \left[\dot{\tilde{E}}_z, v_{th,\alpha} \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(1)} \right] + \varepsilon_\alpha^2 C \left[\dot{\tilde{E}}_z, v_{th,\alpha} \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(2)} \right] \right) = \dot{v}_\alpha g_\alpha^{(0)} \left(\varepsilon_\alpha \dot{\delta}_\alpha^{(1)} + \varepsilon_\alpha^2 \dot{\delta}_\alpha^{(2)} \right) \quad (A2.9)
\end{aligned}$$

dove con il segno punto abbiamo indicato le grandezze normalizzate e $\dot{\omega} \equiv (\omega - j\nu_\alpha)/\omega_o$, $\dot{\gamma} \equiv k_z v_z/\omega_o$, $\dot{v}_\alpha \equiv v_\alpha/\omega_o$, $\dot{\tilde{E}}_z \equiv \tilde{E}_z/E_o$ e $\dot{\delta}_\alpha^{(1,2)} \equiv \delta_\alpha^{(1,2)}/n_\alpha^{(0)}$.

Quindi, se identifichiamo nella (A2.9) il parametro di espansione ε_α con la seguente espressione adimensionale:

$$\varepsilon_\alpha \equiv \frac{q_\alpha E_o}{m_\alpha \omega_o v_{th,\alpha}} \quad (A2.10)$$

otteniamo la seguente gerarchia di equazioni (estesa qui per chiarezza fino al terzo ordine):

$$\begin{aligned}
& j(\dot{\omega} - \dot{\gamma}) \tilde{h}_\alpha^{(1)} + \dot{\tilde{E}}_z v_{th,\alpha} \partial_{v_z} g_\alpha^{(0)} = \dot{v}_\alpha g_\alpha^{(0)} \dot{\delta}_\alpha^{(1)} \\
& j(\dot{\omega} - \dot{\gamma}) \tilde{h}_\alpha^{(2)} + C \left[\dot{\tilde{E}}_z, v_{th,\alpha} \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(1)} \right] = \dot{v}_\alpha g_\alpha^{(0)} \dot{\delta}_\alpha^{(2)} \\
& j(\dot{\omega} - \dot{\gamma}) \tilde{h}_\alpha^{(3)} + C \left[\dot{\tilde{E}}_z, v_{th,\alpha} \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(2)} \right] = \dot{v}_\alpha g_\alpha^{(0)} \dot{\delta}_\alpha^{(3)} \quad (A2.11)
\end{aligned}$$

Quindi, arrestando l'espansione perturbativa al secondo ordine, abbiamo le seguenti espressioni per i coefficienti dell'espansione:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}_\alpha^{(1)} &= \frac{j \left(v_{th,\alpha} \partial_{v_z} g_\alpha^{(0)} \dot{\tilde{E}}_z - \dot{v}_\alpha g_\alpha^{(0)} \dot{\delta}_\alpha^{(1)} \right)}{(\dot{\omega} - \dot{\gamma})} \\
\tilde{h}_\alpha^{(2)} &= \frac{j \left\{ C \left[\dot{\tilde{E}}_z, v_{th,\alpha} \partial_{v_z} \tilde{h}_\alpha^{(1)} \right] - \dot{v}_\alpha g_\alpha^{(0)} \dot{\delta}_\alpha^{(2)} \right\}}{(\dot{\omega} - \dot{\gamma})} \quad (A2.12)
\end{aligned}$$

dalle quali seguono immediatamente le espressioni nel dominio trasformato per le perturbazioni al primo e al secondo ordine della funzione di distribuzione di equilibrio:

$$\begin{aligned}
& \tilde{g}_\alpha^{(1)}(x, k_y, k_z, \omega, v_z) \equiv \varepsilon_\alpha \tilde{h}_\alpha^{(1)} = \\
& \frac{j}{(\tilde{\omega} - k_z v_z)} \left[\frac{q_\alpha}{m_\alpha} \partial_{v_z} g_\alpha^{(0)} \tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega) - \frac{v_\alpha g_\alpha^{(0)}}{n_\alpha^{(0)}} \tilde{n}_\alpha^{(1)}(x, k_y, k_z, \omega) \right] \quad (A2.13)
\end{aligned}$$

$$\tilde{g}_\alpha^{(2)}(x, k_y, k_z, \omega, v_z) \equiv \varepsilon_\alpha^2 \tilde{h}_\alpha^{(2)} =$$

$$\frac{j}{(\tilde{\omega} - k_z v_z)} \left\{ \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathcal{C} \left[\tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega), \partial_{v_z} \tilde{g}_\alpha^{(1)}(x, k_y, k_z, \omega, v_z) \right] - \frac{v_\alpha g_\alpha^{(0)}}{n_\alpha^{(0)}} \tilde{n}_\alpha^{(2)}(x, k_y, k_z, \omega) \right\} \quad (\text{A2.14})$$

dove $\tilde{\omega} \equiv \omega - jv_\alpha$ è la frequenza angolare complessa.

Osserviamo che il parametro di espansione (A2.10) permette inoltre di determinare i limiti di validità della presente teoria perturbativa che rimane valida fintantoché è soddisfatta la condizione di validità per l'espansione perturbativa: $\varepsilon_\alpha < 1$.

Quindi, integrando l'equazione (A2.13) nello spazio delle velocità v_z , è possibile ottenere l'equazione risolvente per $\tilde{n}_\alpha^{(1)}$. Quindi abbiamo la seguente equazione:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_\alpha^{(1)}(x, k_y, k_z, \omega) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \tilde{g}_\alpha^{(1)}(x, k_y, k_z, \omega, v_z) = \\ &= \frac{j q_\alpha}{m_\alpha} \tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega) I_1(x, k_z, \omega) - \frac{j v_\alpha(x)}{n_\alpha^{(0)}(x)} \tilde{n}_\alpha^{(1)}(x, k_y, k_z, \omega) I_2(x, k_z, \omega) \end{aligned} \quad (\text{A2.15})$$

dove:

$$I_1(x, k_z, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \frac{\partial_{v_z} g_\alpha^{(0)}(x, v_z)}{(\tilde{\omega} - k_z v_z)} = \frac{2 n_\alpha^{(0)}(x)}{k_z v_{th,\alpha}^2(x)} C_2(u_{o,\alpha}) \quad (\text{A2.16})$$

$$I_2(x, k_z, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \frac{g_\alpha^{(0)}(x, v_z)}{(\tilde{\omega} - k_z v_z)} = -\frac{n_\alpha^{(0)}(x)}{k_z v_{th,\alpha}(x)} S(u_{o,\alpha}) \quad (\text{A2.17})$$

dove ora $C_2(u_{o,\alpha}) \equiv [1 + u_{o,\alpha} S(u_{o,\alpha})]$ e $u_{o,\alpha}(x, k_z, \omega) \equiv \tilde{\omega}(x) / k_z v_{th,\alpha}(x) \equiv (\omega - jv_\alpha(x)) / k_z v_{th,\alpha}(x)$; la funzione $S(u_{o,\alpha})$ è così definita:

$$S(u_{o,\alpha}) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du_\alpha \frac{e^{-u_\alpha^2}}{(u_\alpha - u_{o,\alpha})} \quad (\text{A2.18})$$

dove $u_\alpha \equiv v_z / v_{th,\alpha}$.

L'integrale (A2.18) si intende eseguito lungo il cosiddetto cammino di Landau che permette di trattare correttamente, ossia in accordo con il principio di causalità, il polo

presente nell'integrando [11]. Più precisamente, quando $Im(\tilde{\omega}) < 0$ l'integrazione deve essere eseguita lungo l'asse reale. Invece, quando $Im(\tilde{\omega}) \geq 0$ il percorso di integrazione deve essere deformato in modo tale da preservare l'analiticità della funzione (A2.18). In questi calcoli assumiamo che k_z è reale e che $k_z \neq 0$. Quindi, quando $k_z < 0$, l'integrale (A2.18) è eseguito tenendo il polo al di sopra del percorso di integrazione e quindi otteniamo $S(u_{o,\alpha}) = Z(u_{o,\alpha})$, dove $Z(u_{o,\alpha})$ è la funzione di dispersione del plasma che è definita come la continuazione analitica dell'integrale:

$$Z(u_{o,\alpha}) \equiv \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} du_{\alpha} \frac{e^{-u_{\alpha}^2}}{(u_{\alpha} - u_{o,\alpha})} \quad (Im(u_{o,\alpha}) > 0) \quad (A2.19)$$

Quando invece $k_z > 0$, l'integrale (A2.18) è eseguito tenendo il polo al di sotto del percorso di integrazione e perciò $S(u_{o,\alpha}) \neq Z(u_{o,\alpha})$. Tuttavia, effettuando il cambio di variabile di integrazione $w = -u_{\alpha}$, il polo nell'integrando torna al di sopra dell'asse reale per $k_z > 0$ e la continuazione analitica per $Im(\tilde{\omega}) \geq 0$ è ottenuta tenendo il polo al di sopra del percorso di integrazione. Quindi per $k_z > 0$ otteniamo $S(u_{o,\alpha}) = -Z(-u_{o,\alpha})$. Riassumendo, la funzione $S(u_{o,\alpha})$ risulta così definita:

$$S(u_{o,\alpha}) = \begin{cases} -Z(-u_{o,\alpha}) & k_z > 0 \\ Z(u_{o,\alpha}) & k_z < 0 \end{cases} \quad (A2.20)$$

Quindi, dalla (A2.15), otteniamo la seguente equazione risolvente per $\tilde{n}_{\alpha}^{(1)}$:

$$\tilde{n}_{\alpha}^{(1)} = \frac{j q_{\alpha}}{m_{\alpha}} \tilde{E}_z I_1 - \frac{j v_{\alpha}}{n_{\alpha}^{(0)}} \tilde{n}_{\alpha}^{(1)} I_2 \quad (A2.21)$$

dalla quale, tenendo conto delle espressioni (A2.16) e (A2.17), è possibile ottenere direttamente la perturbazione di densità del primo ordine:

$$\tilde{n}_{\alpha}^{(1)}(x, k_y, k_z, \omega) = \left(\frac{2 j n_{\alpha}^{(0)}(x) q_{\alpha}}{m_{\alpha} k_z v_{th,\alpha}^2(x)} \right) \frac{C_2(u_{o,\alpha})}{\left[1 - \frac{j v_{\alpha}(x)}{k_z v_{th,\alpha}(x)} S(u_{o,\alpha}) \right]} \tilde{E}_z(x, k_y, k_z, \omega) \quad (A2.22)$$

con $u_{o,\alpha}(x, k_z, \omega) \equiv \tilde{\omega}(x) / k_z v_{th,\alpha}(x) \equiv (\omega - j v_{\alpha}(x)) / k_z v_{th,\alpha}(x)$.

Passiamo ora al calcolo della perturbazione di densità del secondo ordine. Integrando l'equazione (A2.14) nello spazio delle velocità v_z è possibile ottenere l'equazione risolvente per $\tilde{n}_\alpha^{(2)}$. Quindi abbiamo la seguente equazione:

$$\begin{aligned} \tilde{n}_\alpha^{(2)}(x, k_y, k_z, \omega) &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \tilde{g}_\alpha^{(2)}(x, k_y, k_z, \omega, v_z) = \\ &= \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk'_y dk'_z d\omega' \tilde{E}_z(x, k_y - k'_y, k_z - k'_z, \omega - \omega') \cdot L_1(x, k_y, k'_y, k_z, k'_z, \omega, \omega') - \\ &\quad - \frac{v_\alpha(x)}{n_\alpha^{(0)}(x)} \tilde{n}_\alpha^{(2)}(x, k_y, k_z, \omega) L_2(x, k_y, k_z, \omega) \end{aligned} \quad (\text{A2.23})$$

dove:

$$L_1(x, k_y, k'_y, k_z, k'_z, \omega, \omega') \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \frac{j \partial_{v_z} g_\alpha^{(1)}(x, k'_y, k'_z, \omega', v_z)}{(\tilde{\omega} - k_z v_z)} \quad (\text{A2.24})$$

$$L_2(x, k_y, k_z, \omega) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \frac{j g_\alpha^{(0)}(x, v_z)}{(\tilde{\omega} - k_z v_z)} = - \frac{j n_\alpha^{(0)}(x)}{k_z v_{th,\alpha}(x)} S(u_{o,\alpha}) \quad (\text{A2.25})$$

con $u_{o,\alpha}(x, k_z, \omega) \equiv \tilde{\omega}(x) / k_z v_{th,\alpha}(x) \equiv (\omega - j v_\alpha(x)) / k_z v_{th,\alpha}(x)$.

Ora, tenendo conto dell'espressione (A2.13) per $\tilde{g}_\alpha^{(1)}$, otteniamo la seguente espressione per L_1 :

$$\begin{aligned} L_1(x, k_y, k'_y, k_z, k'_z, \omega, \omega') &= - \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \tilde{E}_z(x, k'_y, k'_z, \omega') [M_1(x, k_z, k'_z, \omega, \omega') + k'_z M_3(x, k_z, k'_z, \omega, \omega')] + \\ &\quad + \frac{v_\alpha(x) \tilde{n}_\alpha^{(1)}(x, k'_y, k'_z, \omega')}{n_\alpha^{(0)}(x)} [M_2(x, k_z, k'_z, \omega, \omega') + k'_z M_4(x, k_z, k'_z, \omega, \omega')] \end{aligned} \quad (\text{A2.26})$$

dove M_1, M_2, M_3, M_4 sono i seguenti integrali:

$$M_1(x, k_z, k'_z, \omega, \omega') \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \frac{\partial_{v_z}^2 g_\alpha^{(0)}(x, v_z)}{(\tilde{\omega} - k_z v_z)(\tilde{\omega}' - k'_z v_z)}$$

$$\begin{aligned}
M_2(x, k_z, k'_z, \omega, \omega') &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \frac{\partial_{v_z} g_\alpha^{(0)}(x, v_z)}{(\tilde{\omega} - k_z v_z)(\tilde{\omega}' - k'_z v_z)} \\
M_3(x, k_z, k'_z, \omega, \omega') &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \frac{\partial_{v_z} g_\alpha^{(0)}(x, v_z)}{(\tilde{\omega} - k_z v_z)(\tilde{\omega}' - k'_z v_z)^2} \\
M_4(x, k_z, k'_z, \omega, \omega') &\equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dv_z \frac{g_\alpha^{(0)}(x, v_z)}{(\tilde{\omega} - k_z v_z)(\tilde{\omega}' - k'_z v_z)^2} \tag{A2.27}
\end{aligned}$$

Quindi, effettuando le integrazioni, otteniamo le seguenti espressioni:

$$\begin{aligned}
M_1(x, k_z, k'_z, \omega, \omega') &= \left(\frac{2 n_\alpha^{(0)}(x)}{v_{th,\alpha}^3(x)} \right) \frac{C_1(u'_{o,\alpha}) - C_1(u_{o,\alpha})}{(\tilde{\omega}' k_z - \tilde{\omega} k'_z)} \\
M_2(x, k_z, k'_z, \omega, \omega') &= \left(\frac{2 n_\alpha^{(0)}(x)}{v_{th,\alpha}^2(x)} \right) \frac{u_{o,\alpha} S(u_{o,\alpha}) - u'_{o,\alpha} S(u'_{o,\alpha})}{(\tilde{\omega}' k_z - \tilde{\omega} k'_z)} \\
M_3(x, k_z, k'_z, \omega, \omega') &= \left(\frac{2 n_\alpha^{(0)}(x)}{v_{th,\alpha}^3(x)} \right) \frac{\tilde{\omega} k'_z (C_1(u'_{o,\alpha}) + S(u_{o,\alpha})) - 2 \tilde{\omega}' k_z (u'_{o,\alpha} C_2(u'_{o,\alpha}))}{k'_z (\tilde{\omega}' k_z - \tilde{\omega} k'_z)^2} \\
M_4(x, k_z, k'_z, \omega, \omega') &= \left(\frac{n_\alpha^{(0)}(x)}{v_{th,\alpha}(x)} \right) \left[\frac{k_z (S(u'_{o,\alpha}) - S(u_{o,\alpha}))}{(\tilde{\omega}' k_z - \tilde{\omega} k'_z)^2} + \frac{2 C_2(u'_{o,\alpha})}{k'_z v_{th,\alpha}(x) (\tilde{\omega}' k_z - \tilde{\omega} k'_z)} \right] \tag{A2.28}
\end{aligned}$$

dove $u'_{o,\alpha} \equiv \tilde{\omega}' / k'_z v_{th,\alpha}$ e $C_1(u_{o,\alpha}) \equiv [2 u_{o,\alpha} + 2 u_{o,\alpha}^2 S(u_{o,\alpha}) - S(u_{o,\alpha})]$.

Quindi, tenendo conto delle espressioni (A2.28) in (A2.26), otteniamo la seguente espressione per L_1 :

$$\begin{aligned}
L_1(x, k_y, k'_y, k_z, k'_z, \omega, \omega') &= \left(\frac{2 q_\alpha n_\alpha^{(0)}(x)}{m_\alpha v_{th,\alpha}^3(x)} \right) \mathcal{F}(x, k_z, k'_z, \omega, \omega') \tilde{E}_z(x, k'_y, k'_z, \omega') + \\
&+ \left(\frac{2 v_\alpha(x) \tilde{n}_\alpha^{(1)}(x, k'_y, k'_z, \omega')}{v_{th,\alpha}^2(x)} \right) \frac{C_2(u'_{o,\alpha}) + u_{o,\alpha} S(u_{o,\alpha}) - u'_{o,\alpha} S(u'_{o,\alpha})}{(\tilde{\omega}' k_z - \tilde{\omega} k'_z)} + \\
&+ \left(\frac{v_\alpha(x) \tilde{n}_\alpha^{(1)}(x, k'_y, k'_z, \omega')}{v_{th,\alpha}(x)} \right) \frac{k_z k'_z (S(u'_{o,\alpha}) - S(u_{o,\alpha}))}{(\tilde{\omega}' k_z - \tilde{\omega} k'_z)^2} \tag{A2.29}
\end{aligned}$$

dove:

$$\mathcal{F}(x, k_z, k'_z, \omega, \omega') \equiv \frac{C_1(u_{o,\alpha}) - C_1(u'_{o,\alpha})}{(\tilde{\omega}' k_z - \tilde{\omega} k'_z)} - \frac{\tilde{\omega} k'_z (C_1(u'_{o,\alpha}) + S(u_{o,\alpha})) - 2 \tilde{\omega}' k_z (u'_{o,\alpha} C_2(u'_{o,\alpha}))}{(\tilde{\omega}' k_z - \tilde{\omega} k'_z)^2} \quad (\text{A2.30})$$

Ora, tenendo conto nella (A2.23) delle espressioni (A2.25) e (A2.29) e dell'espressione per $\tilde{n}_\alpha^{(1)}$ (A2.22), possiamo ricavare la seguente espressione finale per $\tilde{n}_\alpha^{(2)}$:

$$\tilde{n}_\alpha^{(2)}(x, k_y, k_z, \omega) = \left(\frac{\omega_{p,\alpha}^2(x)}{2 \pi k_z m_\alpha v_{th,\alpha}^4(x)} \right) \iiint_{-\infty}^{+\infty} dk'_y dk'_z d\omega' \tilde{E}_z(x, k_y - k'_y, k_z - k'_z, \omega - \omega') \cdot \tilde{E}_z(x, k'_y, k'_z, \omega') F_\alpha(u_{o,\alpha}(x), u'_{o,\alpha}(x)) / k'_z \quad (\text{A2.31})$$

dove $F_\alpha(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha})$ è la cosiddetta funzione di *coupling*, comprensiva dell'effetto delle collisioni, definita come segue:

$$F_\alpha(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) \equiv \frac{F_a(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha})}{(1 - j \gamma_\alpha S(u_{o,\alpha}))} + \frac{2 j \gamma'_\alpha C_2(u'_{o,\alpha}) F_b(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha})}{(1 - j \gamma_\alpha S(u_{o,\alpha}))(1 - j \gamma'_\alpha S(u'_{o,\alpha}))} \quad (\text{A2.32})$$

dove:

$$F_a(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) \equiv \frac{C_1(u_{o,\alpha}) - C_1(u'_{o,\alpha})}{(u'_{o,\alpha} - u_{o,\alpha})} - \frac{u_{o,\alpha} (C_1(u'_{o,\alpha}) + S(u_{o,\alpha})) - 2 u_{o,\alpha}^2 C_2(u'_{o,\alpha})}{(u'_{o,\alpha} - u_{o,\alpha})^2} \quad (\text{A2.33})$$

$$F_b(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) \equiv \frac{C_2(u_{o,\alpha})}{(u'_{o,\alpha} - u_{o,\alpha})} + \frac{1 S(u'_{o,\alpha}) - S(u_{o,\alpha})}{2 (u'_{o,\alpha} - u_{o,\alpha})^2} \quad (\text{A2.34})$$

e dove $\gamma_\alpha(x, k_z) \equiv v_\alpha(x)/k_z v_{th,\alpha}(x)$, $\gamma'_\alpha(x, k'_z) \equiv v_\alpha(x)/k'_z v_{th,\alpha}(x)$, $u_{o,\alpha}(x, k_z, \omega) \equiv \tilde{\omega}(x)/k_z v_{th,\alpha}(x) \equiv (\omega - j v_\alpha(x))/k_z v_{th,\alpha}(x)$, $u'_{o,\alpha}(x, k'_z, \omega') \equiv \tilde{\omega}'(x)/k'_z v_{th,\alpha}(x) \equiv (\omega' - j v_\alpha(x))/k'_z v_{th,\alpha}(x)$.

Infine osserviamo che, nel limite di assenza di collisioni ($\gamma_\alpha \rightarrow 0$ e $\gamma'_\alpha \rightarrow 0$), l'espressione della funzione di *coupling* (A2.32) coincide con $F_a(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha})$:

$$F_\alpha(u_{o,\alpha}, u'_{o,\alpha}) = \frac{C_1(u_{o,\alpha}) - C_1(u'_{o,\alpha})}{(u'_{o,\alpha} - u_{o,\alpha})} - \frac{u_{o,\alpha} (C_1(u'_{o,\alpha}) + S(u_{o,\alpha})) - 2 u_{o,\alpha}^2 C_2(u'_{o,\alpha})}{(u'_{o,\alpha} - u_{o,\alpha})^2} \quad (\text{A2.35})$$

L'espressione (A2.35) è esattamente l'espressione (3.19) ottenuta trascurando le collisioni. Ciò prova la perfetta consistenza del modello cinetico collisionale qui esposto con il più semplice modello cinetico derivato nel Capitolo 3, costituendone una generalizzazione.

A.3 Fluttuazioni di campo elettrico associate a onde ibride inferiori

In questa appendice si riporta la derivazione dello spettro delle fluttuazioni termiche del plasma, spettro che è stato utilizzato come input per il codice numerico ALGOR.

Il modello d'interazione non lineare onda-plasma, illustrato nel Capitolo 3, ha come "seme" per lo sviluppo della non linearità i modi propri di plasma prodotti dal rumore che ha origine nel plasma stesso per effetto di fluttuazioni termiche. Tali modi, nel *range* di frequenza LH, emergono come perturbazioni o fluttuazioni dello stato di equilibrio locale del plasma. L'origine di queste fluttuazioni si deve ricercare nella natura discreta del plasma, composto da elettroni e ioni positivi con densità tipiche dell'ordine di 10^{12} particelle per centimetro cubo nella regione dell'interfaccia con l'antenna LH. Per valutare il campo elettrico associato a tali fluttuazioni, nell'ambito della teoria cinetica, è possibile utilizzare l'approccio di Klimontovich [72]. Tale approccio rende evidente che l'origine delle fluttuazioni è nella natura discreta del sistema, perché le funzioni di distribuzione di singola particella e il campo elettromagnetico stesso vengono calcolati a partire dalle funzioni di distribuzione e dai campi microscopici. Inoltre il metodo di Klimontovich consente di trattare in modo trasparente i casi più complessi in cui vengono introdotti ulteriori gradi di libertà nella dinamica microscopica, come nei *dusty plasmas* in cui occorre introdurre come variabile dinamica la carica elettrica fluttuante delle particelle di polvere, o in plasmi disomogenei, o in presenza di effetti non lineari. Questi due ultimi casi sembrano particolarmente importanti per lo studio delle instabilità parametriche delle onde LH e potranno essere trattati come un ulteriore sviluppo del presente lavoro di Tesi. Qui invece ci siamo limitati al calcolo dello spettro in frequenza e numero d'onda dei campi elettrici LH generati dalle fluttuazioni termiche in un plasma omogeneo

magnetizzato, in approssimazione elettrostatica. Sebbene suscettibile di generalizzazioni, utili come già detto per una maggiore accuratezza, tale calcolo introduce già degli elementi di novità nella teoria delle instabilità parametriche delle onde LH in plasmi di *tokamak*, in quanto lo spettro completo delle fluttuazioni termiche LH non è mai stato finora introdotto nel contesto della teoria standard.

Da un punto di vista microscopico un plasma è descritto dalle seguenti funzioni di distribuzione nello spazio 6D delle coordinate \mathbf{r} e dei momenti cinetici \mathbf{p} , per ogni specie α , con massa m_α e carica elettrica $q_\alpha = Z_\alpha e$:

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \sum_{i=1}^{i=N_\alpha} \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{i\alpha}(t)] \delta[\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i\alpha}(t)] \quad (\text{A3.1})$$

N_α indica il numero totale di particelle della specie α e coincide con l'integrale di $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ nello spazio delle coordinate e dei momenti cinetici; la grandezza $n_\alpha = N_\alpha/V$ è la concentrazione media delle particelle della specie α , dove V è il volume del plasma.

La condizione di elettro-neutralità del sistema si può scrivere nella forma:

$$\sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} = 0 \quad (\text{A3.2})$$

L'evoluzione delle funzioni di distribuzione microscopiche si ottiene derivando la (A3.1) rispetto al tempo t . Considerando l'equazione del moto delle particelle si ottiene così l'equazione di Liouville:

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \mathbf{F}_\alpha^M(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{p}} = 0 \quad (\text{A3.3})$$

La forza \mathbf{F}_α^M è definita come segue:

$$\mathbf{F}_\alpha^M = \mathbf{F}_{\alpha,0} + q_\alpha \left[\mathbf{E}^M + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}^M \right] \quad (\text{A3.4})$$

dove $\mathbf{F}_{\alpha,0}$ è la forza esterna che agisce sulle particelle della specie α , e $\mathbf{E}^M, \mathbf{B}^M$ sono, rispettivamente, il campo elettrico e magnetico microscopici. Questi ultimi obbediscono

alle equazioni di Maxwell avendo come sorgenti la densità di carica ρ^M e la densità di corrente \mathbf{j}^M espresse come segue in termini delle funzioni di distribuzione:

$$\rho^M(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3\mathbf{p} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (\text{A3.5})$$

$$\mathbf{j}^M(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3\mathbf{p} \mathbf{v} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (\text{A3.6})$$

Occorre precisare che le equazioni qui indicate per il comportamento microscopico del plasma sono valide anche in regime relativistico, purché si consideri la relazione relativistica $\mathbf{p} = m_{\alpha}\mathbf{v} (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ tra momento cinetico e velocità \mathbf{v} . Si noti che l'indipendenza dal sistema di riferimento del numero di particelle in un elemento di volume $d^3\mathbf{r} d^3\mathbf{p}$ e l'invarianza relativistica di tale volume garantiscono l'invarianza della funzione di distribuzione $f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. In seguito sarà tuttavia usata l'approssimazione non relativistica $\mathbf{p} \cong m_{\alpha}\mathbf{v}$ che è ragionevolmente valida nella regione d'interfaccia tra l'antenna LH e il plasma di un *tokamak*. Inoltre, come si è detto, si farà uso dell'approssimazione elettrostatica, si trascura cioè il campo elettromagnetico trasversale creato dalle particelle di plasma, ponendo $\mathbf{B}^M = 0$, $\mathbf{E}^M = -\nabla\varphi^M$. Infine la forza esterna agente sulle particelle si assume dovuta ad un campo magnetico esterno \mathbf{B}_o .

Accoppiando alle equazioni di Liouville per ogni specie le equazioni di Maxwell per i campi microscopici si ottiene un sistema chiuso, la cui evidente complessità non consente però di determinarne le soluzioni. La soluzione della (A3.3), anche per assegnati campi microscopici, equivale infatti all'integrazione di tutte le equazioni del moto delle particelle del sistema. L'approccio statistico di Klimontovich suggerisce, in primo luogo, di decomporre le funzioni di distribuzione nella somma di una parte *regolare*, ottenuta con una *media d'ensemble* $\Phi_{\alpha} = \langle f_{\alpha} \rangle$ e di una parte fluttuante $\delta f_{\alpha} \equiv f_{\alpha} - \Phi_{\alpha}$. La parte fluttuante si decompone, a sua volta, nella somma di una fluttuazione *naturale* δf_{α}^o , connessa direttamente alla natura discreta del sistema, e di una fluttuazione *indotta* δf_{α}^{ind} dai campi fluttuanti autoconsistenti, ad essi proporzionale. Dall'equazione di Liouville, in

approssimazione elettrostatica ed in presenza del campo magnetico esterno \mathbf{B}_o , si ottengono le equazioni seguenti per Φ_α e δf_α :

$$L_\alpha \Phi_\alpha = -q_\alpha \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \cdot \langle \delta \mathbf{E} \delta f_\alpha \rangle \quad (\text{A3.7})$$

$$L_\alpha^o \delta f_\alpha = -q_\alpha \delta \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial \mathbf{p}} \quad (\text{A3.8})$$

dove si introducono gli operatori lineari:

$$L_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + q_\alpha \left[\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_o \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$$

$$L_\alpha^o \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + q_\alpha \frac{\mathbf{v}}{c} \times \mathbf{B}_o \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}}$$

Alle equazioni (A3.7) e (A3.8) occorre affiancare le equazioni del campo elettrico medio $\mathbf{E} \equiv \langle \mathbf{E}^M \rangle$ e della fluttuazione di campo elettrico $\delta \mathbf{E} \equiv \mathbf{E}^M - \mathbf{E}$, ossia, rispettivamente:

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int d^3 \mathbf{p} \Phi_\alpha \quad (\text{A3.9})$$

$$\nabla \times \delta \mathbf{E} = 0, \quad \nabla \cdot \delta \mathbf{E} = 4\pi \sum_\alpha q_\alpha \int d^3 \mathbf{p} \delta f_\alpha \quad (\text{A3.10})$$

Le fluttuazioni naturali sono soluzioni dell'equazione omogenea associata alla (A3.8), ossia $L_\alpha^o \delta f_\alpha^o = 0$, mentre le fluttuazioni indotte ne sono una soluzione particolare.

Occorre notare che nella derivazione della (A3.8) sono stati trascurati i termini corrispondenti ai prodotti di termini fluttuanti e alle loro medie. Questa approssimazione consente di troncata la serie gerarchica di equazioni cinetiche che si può derivare a partire dall'equazione di Liouville. Essa è equivalente ad eliminare termini del secondo ordine nel parametro di plasma, dato dal volume specifico diviso per il cubo del raggio di Debye: si noti che nell'interfaccia antenna-plasma tale parametro è dell'ordine di 10^{-3} . Si deve anche notare che nella (A3.7) il termine $c^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{B}_o \cdot \partial \Phi_\alpha / \partial \mathbf{p}$ è stato omissso perché si assume che Φ_α abbia simmetria cilindrica attorno ad un asse parallelo alla direzione del campo magnetico \mathbf{B}_o . Per ottenere la soluzione particolare della (A3.7) si può usare il metodo

delle caratteristiche, che in questo caso sono le equazioni della dinamica di particelle in un campo magnetico uniforme. Nel dominio trasformato secondo Fourier si ottiene allora dalla (A3.10) la fluttuazione del campo elettrico in termini delle fluttuazioni naturali di plasma:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) = -\frac{i\mathbf{k}}{k^2} 4\pi \sum_{\alpha} q_{\alpha} \int d^3\mathbf{p} \delta f_{\alpha}^o(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) \quad (\text{A3.11})$$

dove $\varepsilon(\omega, \mathbf{k})$ e' la funzione dielettrica in un plasma magnetizzato.

Si noti che in questi calcoli viene adottata una convenzione diversa da quella precedentemente usata, ossia le trasformate di Fourier sono definite come segue:

$$\tilde{\psi}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int d^3\mathbf{r} dt \psi(\mathbf{r}, t) e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

Il carattere stocastico delle fluttuazioni di plasma impone di limitarsi allo studio di *medie d'ensemble* per il momento del secondo ordine (la media al primo ordine è nulla), il cosiddetto correlatore naturale statistico $\langle \delta f_{\alpha}^o(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \delta f_{\beta}^o(\mathbf{r}', \mathbf{p}', t') \rangle$. Per un plasma omogeneo e stazionario esso si può scrivere come funzione dell'intervallo di tempo $t - t'$ e dello spostamento $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$. La trasformata di Fourier del correlatore nello spazio 8D $(\mathbf{r}, \mathbf{r}', t, t')$ dà quindi la relazione:

$$\langle \delta f_{\alpha}^o(\mathbf{p}, \mathbf{k}, \omega) \delta f_{\beta}^o(\mathbf{p}', \mathbf{k}', \omega') \rangle = \langle \delta f_{\alpha}^o \delta f_{\beta}^o \rangle_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (\text{A3.12})$$

Dalla (A3.11) si ottiene quindi la densità spettrale delle fluttuazioni di campo:

$$\langle \delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k}) \cdot \delta \mathbf{E}(\omega', \mathbf{k}') \rangle = \langle |\delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})|^2 \rangle \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \quad (\text{A3.13})$$

$$\langle |\delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})|^2 \rangle = \frac{1}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \sum_{\alpha, \beta} \frac{4\pi^2 q_{\alpha} q_{\beta}}{k^2} \int d^3\mathbf{p} d^3\mathbf{p}' \langle \delta f_{\alpha}^o \delta f_{\beta}^o \rangle_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} \quad (\text{A3.14})$$

Per eseguire il calcolo in modo accurato occorre definire esplicitamente il concetto di *media d'ensemble*. Si indica con $(\mathbf{r}_i^{\alpha o}, \mathbf{p}_i^{\alpha o})$ il set di variabili dinamiche della particella i -esima della specie α allo stato iniziale $t = 0$. Si definisce una funzione $F(x_1^{\alpha o}, \dots, x_{N_{\alpha}}^{\alpha o}; x_1^{\beta o}, \dots, x_{N_{\beta}}^{\beta o}; \dots; x_1^{\omega o}, \dots, x_{N_{\omega}}^{\omega o})$ che esprime la probabilità che lo stato

microscopico del sistema sia caratterizzato da un set di variabili dinamiche allo stato iniziale per le ω specie presenti. Una forma esplicita di questa funzione, assumendo che il sistema sia spazialmente omogeneo, è data da:

$$F = \prod_{s=1}^{s=\omega} \prod_{i=1}^{i=N_s} f_{os}(\mathbf{p}_i^{so}) V^{-1} \quad (\text{A3.15})$$

con la normalizzazione $\int d^3\mathbf{p}_i^{so} f_{os}(\mathbf{p}_i^{so}) = 1$. Si ottiene quindi, ad esempio:

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha = \langle f_\alpha \rangle &= \sum_{i=1}^{N_\alpha} \int d^3\mathbf{p}_1^{1o} \dots d^3\mathbf{p}_{N_1}^{1o} \dots d^3\mathbf{p}_1^{\omega o} \dots d^3\mathbf{p}_{N_\omega}^{\omega o} F \delta[\mathbf{r} - \mathbf{r}_{i\alpha}(t)] \delta[\mathbf{p} - \mathbf{p}_{i\alpha}(t)] = \\ &= \left(\frac{N_\alpha}{V} \right) f_{o\alpha}(\mathbf{p}) = n_\alpha f_{o\alpha}(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (\text{A3.16})$$

La trasformata di Fourier del correlatore statistico è allora definita da:

$$\begin{aligned} &\langle \delta f_\alpha^o(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) \delta f_\beta^o(\omega', \mathbf{k}', \mathbf{p}') \rangle = \\ &= (2\pi)^{-4} \int d\Gamma F(\Gamma) \int d^3\mathbf{r}' \int dt' e^{i(\omega' t' - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}')} \int d^3\mathbf{r} \int dt e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} [f_\alpha - \Phi_\alpha] \\ &\quad \times [f_\beta - \Phi_\beta] \end{aligned} \quad (\text{A3.17})$$

Il calcolo degli integrali va eseguito considerando le traiettorie delle particelle $\mathbf{r}_{i\alpha}(t)$, $\mathbf{p}_{i\alpha}(t)$ in moto sotto la sola azione del campo magnetico esterno. Infatti le fluttuazioni naturali ed il loro correlatore statistico non contengono gli effetti del campo generato dalle particelle stesse. Il risultato è il seguente:

$$\langle \delta f_\alpha^o(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}) \delta f_\beta^o(\omega', \mathbf{k}', \mathbf{p}') \rangle = \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \langle \delta f_\alpha^o \delta f_\beta^o \rangle_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'}$$

dove

$$\begin{aligned} \langle \delta f_\alpha^o \delta f_\beta^o \rangle_{\omega, \mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'} &= \delta_{\alpha, \beta} \Phi_\alpha(\mathbf{p}) \delta(p_\parallel - p'_\parallel) \delta(p_\perp - p'_\perp) \\ &\quad \times \int d\tau e^{i(\omega - k_\parallel v_\parallel)\tau} e^{i\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega_\alpha}\right)[\sin(\varphi - \Omega_\alpha \tau) - \sin(\varphi)]} \delta(\varphi - \varphi' - \Omega_\alpha \tau) \end{aligned} \quad (\text{A3.18})$$

Inserendo la (A3.18) nella (A3.14) si ottiene in definitiva:

$$\begin{aligned} \langle |\delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})|^2 \rangle &= \frac{1}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \sum_{\alpha} \frac{4\pi^2 q_{\alpha}^2}{k^2} \sum_m \int dp_{\perp} 2\pi p_{\perp} \int dp_{\parallel} 2\pi \delta(\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}) \\ &\quad \times J_m^2 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}} \right) \Phi_{\alpha}(p_{\parallel}, p_{\perp}) \end{aligned} \quad (\text{A3.19})$$

dove le funzioni J_m sono le funzioni di Bessel di prima specie di ordine m .

Per un plasma caratterizzato da distribuzioni Φ_{α} di tipo Maxwelliano si può ottenere così un'espressione analitica per la distribuzione spettrale dei campi.

Ora, poiché nel modello di *Spectral Broadening* gli ioni sono considerati fermi in HF, nel seguito consideriamo solo le perturbazioni dovute al moto degli elettroni. Perciò eseguendo gli integrali nella (A3.19) nel limite di elevato campo magnetico e trascurando il contributo ionico si ottiene la seguente distribuzione spettrale delle fluttuazioni di campo elettrico:

$$\langle |\delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})|^2 \rangle = \frac{1}{|\varepsilon(\omega, \mathbf{k})|^2} \frac{4\pi k_D^2}{|k_{\parallel}| k^2} \sqrt{2\pi m_e T_e} e^{-\frac{(m_e \omega/k_{\parallel})^2}{2 m_e T_e}} \quad (\text{A3.20})$$

dove $k_D^2 \equiv 4\pi n_e e^2 / T_e \equiv 1/\lambda_{D,e}^2$, $\lambda_{D,e}$ è il raggio di Debye elettronico.

La funzione dielettrica, consistentemente con le ipotesi del modello cinetico d'interazione onda-plasma che è stato sviluppato, deve essere intesa nel limite di elevato campo magnetico, tale cioè che il raggio di Larmor elettronico alle velocità termiche sia molto piccolo rispetto alle lunghezze d'onda perpendicolari al campo magnetico; inoltre, nel *range* di alta frequenza che qui si considera, è possibile trascurare il contributo dovuto agli ioni di plasma nella funzione dielettrica. Si ottiene quindi dalla relazione di dispersione lineare (3.85) per i modi di alta frequenza, per distribuzioni Φ_{α} di tipo Maxwelliano, la seguente relazione di dispersione:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) \cong 1 + \frac{C_2(u_e)}{k^2 \lambda_{D,e}^2} \quad (\text{A3.21})$$

dove $u_{o,e} = \omega/k_z v_{th,e}$.

Quindi abbiamo:

$$\langle |\delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})|^2 \rangle = \frac{4 \pi k_D^2 \sqrt{2 \pi m_e T_e} e^{-\frac{v_{\parallel}^2}{v_{th,e}^2}}}{|k_{\parallel}| k^2 \left| 1 + \frac{k_D^2}{k^2} C_2(u_e) \right|^2} \quad (\text{A3.22})$$

Nel limite di alta frequenza (intervallo di *lower hybrid*) e lontano dalla risonanza di Landau ($u_{o,e} \gg 1$) consideriamo il seguente sviluppo asintotico:

$$C_2(u_e) \approx -\frac{1}{2 u_{o,e}^2} + j\sqrt{\pi} u_e e^{-u_e^2} \quad (\text{A3.23})$$

Inserendo l'espressione (A3.23) nella (A3.21) otteniamo la seguente espressione per la relazione di dispersione:

$$\varepsilon(\omega, \mathbf{k}) = 1 - \frac{\omega_{p,e}^2 k_{\parallel}^2}{\omega^2 k^2} + j \frac{2 \sqrt{\pi} \omega \omega_{p,e}^2}{|k_{\parallel}| k^2 v_{th,e}^3} e^{-\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{th,e}^2}} \quad (\text{A3.24})$$

Quindi la (A3.22) diventa:

$$\langle |\delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})|^2 \rangle = \frac{\alpha (k_{\perp}^2 + k_{\parallel}^2)}{\left[k_{\perp}^2 + \left(1 - \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega^2} \right) k_{\parallel}^2 \right]^2 + \left[\frac{2 \sqrt{\pi} \omega \omega_{p,e}^2}{|k_{\parallel}| v_{th,e}^3} e^{-\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{th,e}^2}} \right]^2} \quad (\text{A3.25})$$

dove:

$$\alpha \equiv \frac{4 \pi k_D^2 \sqrt{2 \pi m_e T_e} e^{-\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{th,e}^2}}}{|k_{\parallel}|} \quad (\text{A3.26})$$

La (A3.25) è lo spettro di densità di energia delle fluttuazioni elettrostatiche che abbiamo considerato nel presente lavoro.

Ora proseguiamo fornendo una validazione analitica della (A3.25). A tal fine riscriviamo la (A3.25) nel seguente modo:

$$\langle |\delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})|^2 \rangle = \gamma \frac{c(\omega)}{f(\omega)^2 + c(\omega)^2} \quad (\text{A3.27})$$

dove:

$$c(\omega) \equiv \frac{\sqrt{\pi} \omega k_D^2}{|k_{\parallel}| v_{th,e}} e^{-\frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 v_{th,e}^2}} \quad (\text{A3.28})$$

$$f(\omega) \equiv k_{\perp}^2 + \left(1 - \frac{\omega_{p,e}^2}{\omega^2}\right) k_{\parallel}^2 \quad (\text{A3.29})$$

$$\gamma \equiv \frac{4 \pi \sqrt{2 m_e T_e} k^2 v_{th,e}}{\omega_k} \quad (\text{A3.30})$$

Ora notiamo che la funzione $f(\omega)$ ha uno zero quando il k_{\perp}^2 soddisfa la relazione di dispersione elettrostatica LH (2.11). Consideriamo quindi lo sviluppo in serie di Taylor della (A3.29) nell'intorno della frequenza ω_k del generico modo LH:

$$f(\omega) = f(\omega_k) + \left(\frac{df}{d\omega}\right)_{\omega_k} (\omega - \omega_k) = \frac{2 \omega_{p,e}^2}{\omega_k^3} k_{\parallel}^2 (\omega - \omega_k) \quad (\text{A3.31})$$

dove abbiamo considerato $f(\omega_k) = 0$.

Quindi la (A3.27) assume la seguente espressione:

$$\langle |\delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})|^2 \rangle = \gamma \frac{c(\omega)}{a^2 (\omega - \omega_k)^2 + c(\omega)^2} \quad (\text{A3.32})$$

dove $a \equiv 2 \omega_{p,e}^2 k_{\parallel}^2 / \omega_k^3$.

Possiamo ora notare come, nell'intorno della frequenza del generico modo LH, l'espressione (A3.32) ha la forma tipica di una Lorentziana, considerando che, nell'intorno di ω_k , $c \approx c(\omega_k)$, cioè non ha variazioni apprezzabili ed è considerata una costante. Quindi, nell'intorno della frequenza del modo LH, abbiamo la seguente espressione risonante:

$$\langle |\delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})|^2 \rangle^{RES} = \gamma \frac{c(\omega_k)}{a^2 (\omega - \omega_k)^2 + c(\omega_k)^2} \quad (\text{A3.33})$$

Ora, per calcolare l'energia delle fluttuazioni associate al generico modo collettivo LH, integriamo la (A3.33) nell'intorno della frequenza ω_k del generico modo LH:

$$\mathcal{E} = \int_{\omega_k - \Delta}^{\omega_k + \Delta} d\omega \langle |\delta \mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})|^2 \rangle^{RES} = \gamma \int_{\omega_k - \Delta}^{\omega_k + \Delta} d\omega \frac{\hat{c}}{a^2 (\omega - \omega_k)^2 + \hat{c}^2} \quad (\text{A3.34})$$

dove abbiamo indicato per brevità $\hat{c} \equiv c(\omega_k)$.

Se ora nella (A3.34) effettuiamo un cambiamento di variabile nella nuova variabile di integrazione $x = a(\omega - \omega_k)/\hat{c}$ otteniamo:

$$\mathcal{E} = \frac{\gamma}{a} \int_{-\frac{a\Delta}{\hat{c}}}^{\frac{a\Delta}{\hat{c}}} dx \frac{1}{x^2 + 1} = \frac{\gamma}{a} \pi \quad (\text{A3.35})$$

dove per ottenere una buona convergenza dell'integrale (A3.35) basta considerare $\Delta \approx 2 \div 3 (\hat{c}/a)$.

Quindi, considerando l'espressione di γ (A3.30) e $a \equiv 2 \omega_{p,e}^2 k_{\parallel}^2 / \omega_k^3$, otteniamo la seguente espressione:

$$\mathcal{E} = \frac{2 \pi^2 \omega_k^2 \sqrt{2 m_e T_e} k^2 v_{th,e}}{\omega_{p,e}^2 k_{\parallel}^2} \quad (\text{A3.36})$$

Quest'ultima espressione è lo spettro di densità di energia per unità di k_{\perp} e k_{\parallel} .

Ora, se consideriamo l'invarianza per rotazione nell'angolo ϕ della (A3.36), basta dividere la (A3.36) per 2π per ottenere l'espressione generale dello spettro di densità di energia delle fluttuazioni associate al generico modo collettivo LH per unità di angolo ϕ e per unità di k_{\perp} e k_{\parallel} :

$$\mathcal{E} = \frac{\pi \omega_k^2 \sqrt{2 m_e T_e} k^2 v_{th,e}}{\omega_{p,e}^2 k_{\parallel}^2} \quad (\text{A3.37})$$

Infine, inserendo nella (A3.37) l'espressione di k^2 per il generico modo collettivo LH:

$$k^2 = (\omega_{p,e}^2 / \omega_k^2) k_{\parallel}^2 \quad (\text{A3.38})$$

otteniamo la seguente espressione finale per lo spettro di densità di energia delle fluttuazioni associate al generico modo collettivo LH:

$$\varepsilon = \frac{8 \pi^2 n_e e^2}{k_D^2} \quad (\text{A3.39})$$

È possibile riconoscere nella (A3.39) l'espressione dello spettro di densità di energia calcolata nell'ambito della teoria generale delle fluttuazioni elettrostatiche [66] e ciò conclude la dimostrazione della consistenza dell'espressione generale (A3.25) con la teoria standard delle fluttuazioni elettrostatiche LH.