

Scuola dottorale di Economia e metodi quantitativi

Dottorato in Metodi statistici per l'economia e l'impresa

TESI DI DOTTORATO DI RICERCA

'Metodi numerici e calcolo stocastico per la valutazione di contratti derivati: un modello strutturale per il rischio di credito'

Candidato: dott. Federico Aluigi

Tutor: proff. Massimiliano Corradini e Andrea Gheno

Anno accademico 2011/2012

Indice

Sunto		4						
Capitolo 1	Contratti derivati e cenni di calcolo stocastico per la loro							
	valutazione6							
	1.1 Introduzione	6						
	1.2 Terminologia	8						
	1.3 Processi stocastici ed evoluzione del valore dell'attività							
	sottostante	.11						
	1.4 Modello di mercato di riferimento	. 15						
Capitolo 2	Un nuovo metodo numerico per la valutazione di contratti							
	derivati	.21						
	2.1 Introduzione	.21						
	2.2 Il metodo	25						
	2.3 Applicazione e discussione	. 31						
	2.3.1 Convergenza							
	2.3.2 Opzioni americane	.34						
	2.3.3 Derivati su tasso di interesse	. 36						
	2.3.4 Derivati path-dependent	.38						
Capitolo 3	Un nuovo modello strutturale per la valutazione del rischio							
	di credito44							
	3.1 Introduzione	. 44						
	3.2 Modelli in forma ridotta e modelli strutturali	47						
	3.2.1 Modello di Merton	.52						
	3.2.2 Modello di Cox	. 54						
	3.3 Il modello	.58						
	3.4 Applicazione e risultati empirici	. 65						
	3.4.1 Calibrazione sui CDS su Morgan Stanley:							
	10 ottobre 2007	68						
	3.4.2 Calibrazione sui CDS su Morgan Stanley:							
	10 ottobre 2008	71						
	3.4.3 Calibrazione sui CDS su Morgan Stanley:							

	10 ottobre 2009	73
3.5	Commenti finali	75
Appendice A	Distribuzione del massimo e del minimo per un moto browniano	76
Appendice B	Legge del first passage time in presenza di parametri non costanti	.82
Riferimenti bibl	liografici	85

Sunto

Nonostante le origini molto antiche dei contratti derivati, solo nella seconda metà dello scorso secolo sono stati pubblicati gli articoli a firma di Black e Scholes (1973) e Merton (1973) che hanno rivoluzionato il mondo della finanza impostando la valutazione su basi scientifiche. Dalla introduzione del modello di Black-Scholes-Merton ad oggi la diffusione dei contratti derivati è cresciuta esponenzialmente, raggiungendo una dimensione ragguardevole rispetto all'economia reale. Per questo motivo la questione dell'utilizzo e dello sviluppo di metodi di valutazione sempre più accurati ed efficienti dei contratti derivati è di fondamentale importanza per l'economia globale.

Dopo aver introdotto il problema ed il modello stocastico di riferimento nel primo capitolo, nel secondo capitolo di questa tesi viene proposto un nuovo metodo di valutazione di contratti derivati estremamente efficiente basato sull'applicazione dell'equazione di Chapman-Kolmogorov. Il metodo ha una intuitiva rappresentazione ad albero, è molto semplice da utilizzare ed ha una velocità di convergenza notevole. Applicazioni alla valutazione di opzioni americane, opzioni su tasso di interesse e opzioni path-dependent unitamente al confronto con alcune tra le più avanzate tecniche di valutazione di opzioni esotiche testimoniano l'estrema validità del metodo introdotto.

Nel terzo capitolo è proposto un modello strutturale per il rischio di credito che mantiene la coerenza sia con le quotazioni di mercato dei credit default swap, anche in situazioni di forte tensione nei mercati finanziari, che con il mercato azionario e delle opzioni su azione. Inoltre l'utilizzo del metodo di valutazione del secondo capitolo basato sull'equazione di Chapman-Kolmogorov consente di ottenere tempi di calcolo estremamente ridotti uniti ad una precisione in termini di calibrazione pressoché assoluta.

Capitolo 1

Contratti derivati e cenni di calcolo stocastico per la loro valutazione

1.1 Introduzione

Il valore dei contratti di opzione, forward, futures e swap, deriva dal valore di una attività sottostante ed è per questo che è stato coniato il termine 'contratti derivati'. Nonostante le origini molto antiche dei primi contratti derivati, solo nella seconda metà dello scorso secolo sono stati pubblicati gli articoli a firma di Black e Scholes (1973) e Merton (1973) che hanno rivoluzionato il mondo della finanza impostando la valutazione su basi scientifiche. Dall'introduzione del modello di Black-Scholes-Merton (BSM) ad oggi la diffusione dei contratti derivati è cresciuta esponenzialmente, fino a raggiungere le proporzioni rappresentate nella Figura 1.1.

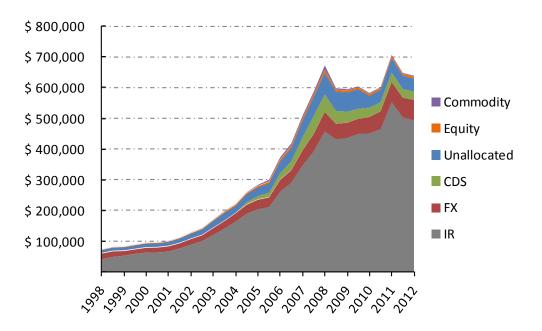


Figura 1.1. Andamento valore capitale nozionale dei contratti derivati suddivisi per tipologia: materie prime, azioni, credit default swap, tasso di cambio e tasso di interesse (Fonte: Bank of International Settlement. Dati in miliardi di dollari).

Dal grafico rappresentato nella Figura 1.1 risulta evidente come la questione dell'utilizzo e dello sviluppo di metodi di valutazione sempre più accurati ed efficienti dei contratti derivati sia di fondamentale importanza per l'economia globale. Inoltre, come si può dedurre dal titolo dell'articolo di Merton (1974), 'On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates', fin dalle origini la teoria della valutazione delle opzioni (option pricing) è stata anche associata alla soluzione di problemi di finanza di impresa. In seguito è stata utilmente impiegata per risolvere problemi riconducibili all'option pricing, come ad esempio quelli che fanno parte della letteratura delle cosiddette opzioni reali (real options, si veda ad esempio Dixit e Pindick (1994) e Trigeorgis (1996)).

In questa tesi viene analizzato il problema della valutazione dei contratti derivati introducendo un nuovo metodo di valutazione estremamente efficiente e proponendo un modello strutturale per il rischio di credito.

Nel presente capitolo viene introdotto il problema della valutazione dei contratti derivati e vengono forniti gli elementi di calcolo stocastico necessari per descrivere il modello di mercato di riferimento.

Nel secondo capitolo è proposto un nuovo metodo di valutazione di contratti derivati estremamente efficiente basato sull'applicazione dell'equazione diChapman-Kolmogorov. T1 metodo ha. una rappresentazione ad albero molto intuitiva ed è in grado di valutare varie tipologie di contratti derivati. Al fine di confermarne la bontà, sono stati effettuati dei confronti con i risultati ottenuti mediante alcuni tra i più avanzati metodi di pricing di opzioni esotiche.

Nel terzo capitolo è proposto un modello strutturale per il rischio di credito che mantiene la coerenza sia con le quotazioni di mercato dei credit default swap, anche in situazioni di forte tensione nei mercati finanziari, che con il mercato azionario e delle opzioni su azione. Inoltre l'utilizzo del metodo di valutazione del secondo capitolo basato sull'equazione di Chapman-Kolmogorov consente di ottenere tempi di calcolo estremamente ridotti uniti ad una precisione in termini di calibrazione pressoché assoluta.

1.2. Terminologia

Il possessore di un contratto di opzione ha il diritto di acquistare (opzione call) o vendere (opzione put) una determinata attività (o bene) sottostante (underlying asset) in una certa data (opzione europea) o entro una certa data di scadenza (opzione americana) ad un prezzo prefissato (prezzo di esercizio o strike price). Una opzione che in caso di esercizio immediato genera un payoff positivo (valore intrinseco positivo) è detta 'in the money', altrimenti è 'out of the money' (valore intrinseco negativo) o 'at the money' (valore intrinseco nullo).

Una posizione lunga (long) in una attività rappresenta una esposizione positiva derivante da un acquisto, mentre una posizione corta (short) rappresenta una esposizione negativa derivante da una vendita allo

scoperto (vendita dell'attività senza esserne in possesso). L'acquirente di una opzione è anche detto 'holder' mentre il venditore 'writer'.

Nel presente lavoro, se non diversamente specificato, il valore del bene sottostante è indicato con V, il prezzo di esercizio con K e la data di scadenza (maturity o expiry date) con T. Le opzioni europee rappresentano il tipo di opzioni più semplice da valutare, il payoff a scadenza per una posizione long su call è $C_T = \max \left(V_T - K; 0\right)$, mentre per una put è $P_T = \max \left(K - V_T; 0\right)$. Una opzione europea non può essere esercitata prima della scadenza T, pertanto il cammino seguito dal valore del bene sottostante tra l'istante 0 e T è irrilevante ai fini della valutazione. I diagrammi dei payoff a scadenza corrispondenti alle quattro posizioni possibili sono rappresentati nella Figura 1.2.

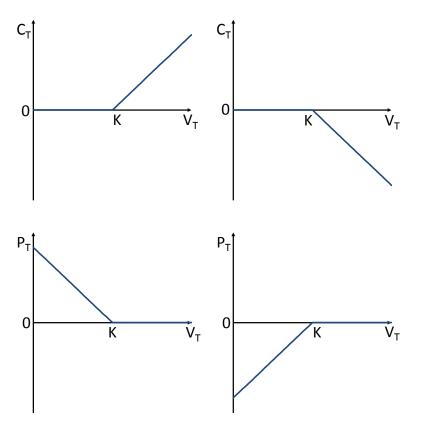


Figura 1.2. Payoff a scadenza per call e put in posizione lunga e corta.

Una importante relazione tra i valori di call e put europee scritte su uno stesso sottostante, con stessa scadenza e stesso prezzo di esercizio, è nota come relazione di parità. In caso di assenza di dividendi tra 0 e T, si consideri il payoff a scadenza di un portafoglio composto da una unità long del sottostante $(+V_T)$, una unità short della call $(-C_T)$, una unità long della put $(+P_T)$:

$$V_T - C_T + P_T = V_T - \max(V_T - K; 0) + \max(K - V_T; 0) = K$$
 (1.1)

Il payoff a scadenza di questo portafoglio è uguale a K indipendentemente dal valore del sottostante. In assenza di rischio di fallimento (default) della controparte (rischio di credito), il valore del portafoglio in T è noto con certezza in 0. Essendo quindi l'investimento privo di rischio, in un mercato in equilibrio nel senso del non arbitraggio¹, il suo rendimento deve essere uguale a quello degli altri investimenti con pari caratteristiche. Indicando con r l'intensità istantanea di rendimento dell'investimento privo di rischio, comunemente nota come tasso privo di rischio (risk-free), il valore del portafoglio in un generico istante $0 \le t \le T$ è pertanto:

¹ Esiste una opportunità di arbitraggio quando è possibile operare sul mercato ottenendo un profitto senza correre il rischio di incorrere in perdite. L'ipotesi di assenza di arbitraggi è ragionevole rispetto alla realtà dei mercati e caratterizza la maggior parte dei modelli di valutazione dei contratti derivati.

$$V_t - C_t + P_t = Ke^{-r\left(T - t\right)} \tag{1.2}$$

Nel caso di opzioni che possono essere esercitate prima della scadenza (Hull, 2003) si ha:

$$V_t - C_t + P_t \ge Ke^{-r\left(T - t\right)}. (1.3)$$

1.3 Processi stocastici ed evoluzione del valore dell'attività sottostante

L'evoluzione del valore del sottostante può essere ben rappresentata da un processo stocastico. In particolare, nello schema base del modello BSM si ipotizza che V_t segua un moto browniano geometrico in accordo con le analisi svolte da Mandelbrot (1963), Fama (1965) e Samuelson (1965, 1973). Per alcune attività sono preferibili altri tipi di processi stocastici, ad esempio nel caso di opzioni su tasso di interesse (Cox et al., 1985) o materie prime (Schwartz, 1997) dove è ragionevole ipotizzare una componente di mean reversion. A seguire c'è una trattazione sintetica, adeguata allo scopo, del caso discreto e la relativa estensione al caso continuo (per maggiori approfondimenti si può fare riferimento, ad esempio, a Øksendal (1992) e Bjork (1998)).

Considerando il caso discreto, se il sottostante assume M valori consecutivi in un intervallo temporale in cui non sono staccati dividendi, il tasso di rendimento periodale J_i dell'attività sull'intervallo $\lceil i,i+1 \rceil$ è:

$$J_{i} = \frac{V_{i+1} - V_{i}}{V_{i}} \tag{1.4}$$

In riferimento al moto browniano geometrico che rappresenta l'evoluzione del valore del sottostante, il rendimento atteso è espresso dal tasso di drift μ che spesso dagli operatori è stimato utilizzando valori storici mediante la seguente relazione:

$$\mu = \frac{1}{M\Delta t} \sum_{i=1}^{M} J_i \tag{1.5}$$

dove Δt è l'ampiezza dell'intervallo temporale tra le osservazioni ipotizzata costante. Il tasso di drift storico tuttavia non è una stima affidabile del tasso di drift futuro. Specialmente in caso di singole attività è preferibile fare ricorso alla determinazione del premio al rischio richiesto, ad esempio nell'ambito del Capital Asset Picing Model (CAPM, Sharpe (1964), Lintner (1965), Mossin (1966)) utilizzando attività simili come benchmark (Duffie, 2001). Comunque, come mostrato nel prossimo paragrafo, il valore di μ è irrilevante ai fini valutativi qualora ci si trovi nelle ipotesi del modello BSM. In caso vengano rimosse alcune ipotesi restrittive del modello, la stima del parametro diventa cruciale per la determinazione valore del contratto derivato.

La stima del tasso di volatilità σ del processo stocastico dell'evoluzione del valore del sottostante è viceversa fondamentale per la determinazione del valore delle opzioni nel modello BSM, i cui output sono strettamente legati alla qualità di questo parametro. Se il sottostante segue una passeggiata aleatoria con drift $\mu\Delta t$ e volatilità $\sigma\sqrt{\Delta t}$, considerando una ampiezza Δt piccola, l'evoluzione del rendimento J_i può essere espressa nella forma:

$$J_i = \mu \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} \phi_i \tag{1.6}$$

dove ϕ_i è una variabile aleatoria normale standard. Dato μ , un metodo comune per la stima del tasso di volatilità storico è:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\left(M-1\right)\Delta t} \sum_{i=1}^{M} \left(J_i - \overline{J}\right)^2}$$
 (1.7)

dove \bar{J} è la media di tutti i J_i . Ovviamente, vista la criticità del parametro, è presente una vasta letteratura in materia (per una introduzione all'argomento si veda ad esempio Alexander (2008) e Brooks (2008)). Se sono quotate sul mercato opzioni sull'attività sottostante è possibile ottenere la volatilità (c.d. volatilità implicita) dai prezzi di scambio dato che tutti gli altri parametri sono noti. Spesso si osserva

empiricamente che la volatilità implicita è funzione delle scadenze e dei prezzi di esercizio delle opzioni, in contrasto con la formulazione base del modello BSM (per approfondimenti si veda Gatheral (2006)). Nel Capitolo 3 verrà proposto un modello di valutazione per il rischio di credito coerente con questa importante peculiarità del mercato delle opzioni.

Nel caso continuo ($\Delta t \to dt \to 0$) il processo evolutivo del valore del bene sottostante può essere rappresentato dalla seguente equazione differenziale stocastica (Merton, 1990):

$$dV_t = \mu V_t dt + \sigma V_t dz_t \tag{1.8}$$

dove dz è un processo di Wiener standard, ovvero una variabile aleatoria normale con media zero e varianza dt. Utilizzando un processo di Itô (Itô, 1951):

$$dV_t = \alpha_t dt + \beta_t dz_t \tag{1.9}$$

con $\alpha_t = \alpha \left(t, V_t \right)$ e $\beta_t = \beta \left(t, V_t \right)$, è possibile aggiungere maggiore flessibilità includendo ad esempio la proprietà di mean reversion o una volatilità non costante (cfr. ad esempio il paragrafo 2.3.3).

Un processo di Markov è un particolare processo stocastico in cui solo il valore corrente della variabile è rilevante per prevedere le sue

determinazioni future (cfr. ad esempio il processo nell'equazione (1.8)). Le realizzazioni passate risultano quindi irrilevanti per predire le realizzazioni future della variabile aleatoria e tutta l'informazione utile è presente nel valore corrente. L'utilizzo dei processi di Markov in finanza riflette una ipotesi riguardo l'efficienza dei mercati finanziari (per approfondimenti si vedano ad esempio Fama (1965), Malkiel (1996), Lo e MacKinlay (1999)). In particolare ipotizzare che il prezzo del sottostante segua un processo di Markov equivale ad ipotizzare che il mercato sia efficiente almeno in forma semi-forte, ovvero che il prezzo contenga tutte le informazioni pubbliche che possano concorrere alla sua formazione.

1.4 Modello di mercato di riferimento

Il nuovo metodo di pricing dei contratti derivati introdotto in questa tesi fa riferimento allo schema di valutazione BSM. Il lemma di Itô (1951) costituisce un elemento fondamentale per determinare l'equazione di BSM. Sia p_t una funzione di due variabili non correlate t e V (variabili non correlate). La sua espansione in serie di Taylor è:

$$\Delta p_t = \frac{\partial p_t}{\partial t} \Delta t + \frac{\partial p_t}{\partial V_t} \Delta V + \frac{\partial^2 p_t}{\partial t^2} \Delta t^2 + \frac{\partial^2 p_t}{\partial V_t^2} \Delta V_t^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p_t}{\partial t \partial V_t} \Delta t \Delta V_t + \dots \quad (1.10)$$

Se dV_t segue un processo di Itô (1.9), ignorando i termini di ordine superiore a Δt , si ha:

$$dp_t = \left(\frac{\partial p_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\beta_t^2 \frac{\partial^2 p_t}{\partial V_t^2}\right) dt + \frac{\partial p_t}{\partial V_t} dV_t \tag{1.11}$$

che è il lemma di Itô. Sostituendo nell'equazione (1.9) si ottiene:

$$dp_t = \left(\frac{\partial p_t}{\partial t} + \alpha_t \frac{\partial p_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2} \beta_t^2 \frac{\partial^2 p_t}{\partial V_t^2}\right) dt + \frac{\partial p_t}{\partial V_t} dz_t \tag{1.12}$$

Se $p_t = \ln V_t$ con V_t che segue il moto browniano geometrico dell'equazione (1.8), allora in riferimento all'equazione (1.9) si ha che $\alpha_t = \mu V_t$ e $\beta_t = \sigma V_t \ \text{e le derivate parziali sono} \ \frac{\partial p_t}{\partial V_t} = \frac{1}{V_t} \,, \ \frac{\partial^2 p_t}{\partial V_t^2} = -\frac{1}{V_t^2} \ \text{e} \ \frac{\partial p_t}{\partial t} = 0 \,.$

Sostituendo nell'equazione (1.12) si ha:

$$dp_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dz_t \tag{1.13}$$

che non dipende da V_t . La variazione di $\ln V_t$ tra t e T ha distribuzione normale con media $\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)\!\!\left(T-t\right)$ e deviazione standard $\sigma\sqrt{T-t}$ e V_t

ha distribuzione lognormale.

Nel modello di BSM si ipotizza che:

- Il mercato sia non frizionale (assenza di costi di transazione e gravami fiscali, titoli infinitamente divisibili, possibilità di vendite allo scoperto, assenza di rischio di insolvenza)
- Il mercato sia privo di opportunità di arbitraggio
- Il mercato sia competitivo (agenti massimizzatori di profitto e price taker)
- L'evoluzione del valore dell'attività sottostante che non paga dividendi sia descritta dall'equazione (1.8)
- Il tasso privo di rischio sia costante ad un livello r
- Il mercato sia aperto in ogni istante

Al fine di ottenere l'equazione di BSM si consideri un portafoglio composto da un derivato in posizione long e Δ unità del sottostante in posizione short. In termini di valore:

$$\Pi_t = p_t - \Delta V_t \tag{1.14}$$

Dopo un istante infinitesimo dt in cui la composizione del portafoglio rimane invariata, la variazione del suo valore risulta:

$$d\Pi_t = dp_t - \Delta dV_t \tag{1.15}$$

Sostituendo le equazioni (1.8) e (1.11) nell'equazione (1.15) si ha:

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial p_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_t^2 \frac{\partial^2 p_t}{\partial V_t^2}\right) dt + \left(\frac{\partial p_t}{\partial V_t} - \Delta\right) dV_t \tag{1.16}$$

Nella costruzione del portafoglio è possibile effettuare una operazione di copertura (hedging) perfetta ponendo:

$$\Delta = \frac{\partial p_t}{\partial V_t} \tag{1.17}$$

In questo modo l'equazione (1.16) risulta deterministica (si ottiene perciò un portafoglio localmente privo di rischio):

$$d\Pi_t = \left(\frac{\partial p_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_t^2 \frac{\partial^2 p_t}{\partial V_t^2}\right) dt \tag{1.18}$$

Data l'ipotesi di assenza di arbitraggi deve anche essere:

$$d\Pi_t = r\Pi_t dt \tag{1.19}$$

pertanto sostituendo le equazioni (1.14), (1.17) e (1.19) nella equazione (1.18) si ottiene l'equazione di BSM:

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 V_t^2 \frac{\partial^2 p_t}{\partial V_t^2} + rV_t \frac{\partial p_t}{\partial V_t} - rV_t = 0 \tag{1.20}$$

L'equazione (1.20) è una equazione alle derivate parziali parabolica che nelle ipotesi del modello di BSM deve essere soddisfatta dalla funzione valore p_t di ogni contratto derivato presente sul mercato, date le opportune condizioni al contorno. Per alcuni tipi di contratti derivati è possibile determinare soluzioni in forma chiusa che tipicamente si ottengono trasformando l'equazione (1.20) nell'equazione del calore che ha soluzione analitica nota (si veda ad esempio Wilmott et al., 1993).

E' interessante osservare che nelle equazioni (1.18) e (1.20) il parametro μ che rappresenta il rendimento atteso dell'attività sottostante non compare mentre è presente il tasso privo di rischio r, motivo per cui la valutazione dei contratti derivati nel modello di BSM è di tipo neutrale al rischio (riskneutral). La possibilità di costruire un portafoglio istantaneamente privo di rischio mediante il contratto derivato da valutare permette di ignorare le caratteristiche di percezione del rischio degli agenti. L'ipotesi di assenza arbitraggi garantisce che il portafoglio privo di rischio debba offrire un rendimento uguale al tasso privo di rischio r e indipendente dal rendimento atteso dell'attività sottostante μ .

E' interessante osservare che il concetto della valutazione risk-neutral di fatto presente in Black e Scholes (1973) e Merton (1973) è stato formalmente introdotto in Black e Cox (1976). I fondamenti teorici sono stati sviluppati e presentati successivamente in Harrison e Kreps (1979) e Harrison e Pliska (1981).

Capitolo 2

Un nuovo metodo numerico per la valutazione di contratti derivati

2.1 Introduzione

In questo capitolo è proposto un nuovo metodo di valutazione di contratti derivati estremamente efficiente basato sull'applicazione dell'equazione di Chapman-Kolmogorov. Il metodo ha una rappresentazione ad albero molto intuitiva ed è in grado di valutare in t=0 varie tipologie di contratti derivati con scadenza T>0 scritti su una data attività sottostante la cui dinamica del valore V_t soddisfi la seguente equazione differenziale stocastica:

$$dV_t = \mu_t dt + \sigma_t dz_t \tag{2.1}$$

dove $\mu_t = \mu \left(t, V_t \right)$ e $\sigma_t = \sigma \left(t, V_t \right)$ sono rispettivamente i coefficientidi drift e di diffusione e dz_t è un processo di Wiener standard con $t \in \left[0, T \right]$. E' opportuno specificare che il processo stocastico nell'equazione (2.1) è caratterizzato dalla cosiddetta misura di probabilità reale $\mathbb P$. Nell'ipotesi di assenza di arbitraggi, coerentemente con l'analisi svolta nel Capitolo 1, il prezzo del contratto derivato $p_t = p \left(t, V_t \right)$ deve soddisfare la seguente equazione alle derivate parziali parabolica:

$$\frac{\partial p_t}{\partial t} + \left(\mu_t - q_t \sigma_t\right) \frac{\partial p_t}{\partial V_t} + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial^2 p_t}{\partial V_t^2} = r_t p_t \tag{2.2}$$

dove $r_t = r(t)$ è il tasso privo di rischio e q_t il cosiddetto prezzo di mercato del rischio (market price of risk), ovvero il rendimento in eccesso rispetto al tasso privo di rischio per unità di rischio che il mercato richiede per investire in attività rischiose (per approfondimenti si veda, ad esempio, Björk, 1998).

L'equazione (2.2) può essere risolta mediante il teorema di Feynman-Kac. Considerando una generica funzione $h_t = h(t, x_t)$, il teorema di Feynman-Kac stabilisce che data una equazione alle derivate parziali parabolica:

$$\frac{\partial h_t}{\partial t} + \alpha_t \frac{\partial h_t}{\partial x_t} + \frac{1}{2} \beta_t^2 \frac{\partial^2 h_t}{\partial x_t^2} = r_t h_t \tag{2.3}$$

con $\alpha_t = \alpha(t, x_t)$, $\beta_t = \beta(t, x_t)$, $t \in [0, T]$, condizione al contorno $h_T = g(x_T)$, e data l'equazione differenziale stocastica:

$$dx_t = \alpha_t dt + \beta_t dz_t \tag{2.4}$$

con $t\in \left[0,T\right]$ e condizione al contorno $x_{0}=x\,,$ vale la seguente uguaglianza:

$$h_t = E_t^{\mathbb{R}} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} h_T \right] \tag{2.5}$$

dove $E_t^{\mathbb{R}}$ è l'aspettativa all'istante t sotto la misura di probabilità \mathbb{R} corrispondente al processo stocastico nell'equazione (2.4). Applicando il teorema di Feynman-Kac all'equazione (2.2) si ottiene:

$$p_0 = E_0^{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_0^T r_s ds} p_T \right]. \tag{2.6}$$

Ovvero, data l'informazione disponibile nell'istante t=0 il valore del contratto derivato è uguale al valore scontato del suo payoff finale atteso sotto la misura risk-neutral $\mathbb Q$. Sotto questa misura di probabilità, il processo stocastico dell'evoluzione del valore V_t è descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$dV_t = \overline{\mu}_t dt + \sigma_t d\overline{z}_t \tag{2.7}$$

dove $\overline{\mu}_t = \mu_t - q_t \sigma_t$ and $d\overline{z}_t$ è un processo di Wiener standard sotto la misura \mathbb{Q} . Confrontando le equazioni (2.1) e (2.7) si evidenzia che la differenza tra il cosidetto mondo reale e quello risk neutral (rispettivamente caratterizzati dalle misure di probabilità \mathbb{P} e \mathbb{Q}) si

sostanzia nel termine di drift mentre il termine della volatilità rimane invariato.

Per alcuni contratti derivati 'plain vanilla' e per contratti derivati esotici relativamente semplici esistono formule analitiche di valutazione (cfr. ad esempio equazioni (1.33) e (1.34) per opzioni call e put europee scritte su attività che non pagano dividendi e Geske (1979) e Rubinstein (1991) per opzioni composte). Per la maggior parte dei derivati esotici così come per la maggior parte delle opzioni con clausole di tipo americano sono necessarie procedure numeriche per la valutazione. I metodi numerici per il pricing di contratti derivati sono tradizionalmente divisi in tre famiglie: metodi alle differenze finite, metodi Monte Carlo e metodi ad albero (noti anche come metodi a reticolo (lattice)).

I metodi alle differenze finite operano sulla equazione alle derivati parziali (2.2) e sono stati applicati per la prima volta per la soluzione di problemi di valutazione di contratti derivati da Schwartz (1977) e Brennan e Schwartz (1978). Studi sulla convergenza sono stati effettuati da Jaillet et al. (1990) e Zhang (1997), mentre una trattazione completa sul loro utilizzo è stata estesa da Tavella e Randall (2000).

I metodi di simulazione Monte Carlo sono stati introdotti per la valutazione di contratti derivati da Boyle (1977), mentre Cox et al. (1979) e Rendleman e Bartter (1979) sono stati i primi a proporre il metodo degli

alberi binomiali (che per i prezzi di opzioni europee fornisce prezzi convergenti a quelli delle formule di BSM).

Il metodo Monte Carlo è di semplice implementazione ed è molto flessibile rispetto alla scelta del tipo di distribuzione dei rendimenti dell'attività sottostante. Punti deboli sono invece la velocità di convergenza e la difficoltà nella valutazione di derivati di tipo americano (Broadie e Glasserman, 1997).

Il metodo ad albero, data la sua semplicità nella forma binomiale standard, in seguito alla sua presentazione ha avuto un successo immediato nell'ambito operativo dove una maggiore flessibilità rispetto alla formula di BSM è essenziale. Utilizzando i reticoli è possibile effettuare valutazioni di derivati di tipo americano senza particolari difficoltà mentre la velocità di convergenza rimane una criticità (si veda Leisen e Reimer (1996) per opzioni europee e Amin e Khanna (1994) per opzioni americane).

Il nuovo metodo proposto in questa tesi può essere classificato come metodo ad albero e presenta i vantaggi sopra descritti dei metodi ad albero e dei metodi Monte Carlo senza avere le corrispondenti criticità.

2.2 Il metodo

La prima operazione che di solito si effettua nell'applicazione di un metodo a reticolo è la divisione dell'intervallo temporale $\begin{bmatrix} 0,T \end{bmatrix}$ in M sottointervalli (step) di ampiezza costante $\Delta t = T/M$. In questo modo una

versione discreta dell'equazione (2.7) come funzione della variabile temporale i è:

$$V_{i+1} = V_i + \overline{\mu}_i \Delta t + \sigma_i \sqrt{\Delta t} \,\phi_i \tag{2.8}$$

con i = 0, 1, 2, ..., M - 1 e dove ϕ_i è una variabile normale standard.

Reticoli binomiali e trinomiali approssimano l'evoluzione del valore dell'attività sottostante nell'equazione (2.8) ipotizzando, per esempio, che all'istante i+1 il sottostante possa assumere i seguenti valori:

$$\begin{cases} V_{i+1} = \lambda V_i \\ \lambda = \left\{d, m, u\right\} \end{cases} \tag{2.9}$$

dove la variabile aleatoria λ è caratterizzata dalla probabilità $\mathbb{Q}(\lambda=d)=p^{down},\ \mathbb{Q}(\lambda=m)=0,\ \mathbb{Q}(\lambda=u)=p^{up}$ per alberi binomiali standard e $\mathbb{Q}(\lambda=d)=p^{down},\ \mathbb{Q}(\lambda=m)=p^{mid},\ \mathbb{Q}(\lambda=u)=p^{up}$ per alberi trinomiali standard. Il valore del contratto derivato si può ottenere mediante l'utilizzo dell'equazione (2.6) congiuntamente con l'albero (per maggiori dettagli si veda, ad esempio, Cox e Rubinstein (1985)).

Il metodo introdotto in questa tesi ipotizza che l'attività sottostante possa assumere valori in intervallo di ampiezza arbitraria $I = \begin{bmatrix} V^{\min}, V^{\max} \end{bmatrix}$ che è scelto in accordo con le caratteristiche del sottostante. In particolare si

ipotizza che il processo stocastico dell'equazione (2.8) possa assumere i seguenti N valori:

$$\left\{V^{\min},V^{\min}+\Delta V,V^{\min}+2\Delta V,...,V^{\min}+\left(N-2\right)\Delta V,V^{\min}+\left(N-1\right)\Delta V=V^{\max}\right\} \tag{2.10}$$

dove $\Delta V = \left(V^{\max} - V^{\min}\right) / (N-1)$. Nella Figura 2.1 è rappresentato un reticolo con N=5 e M=3.

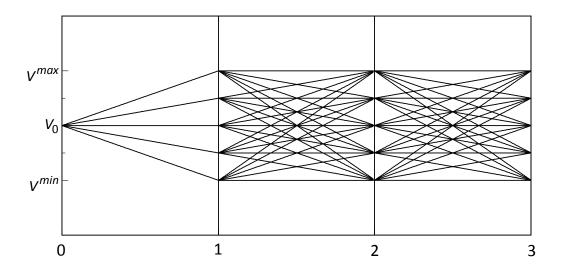


Figura 2.1. Reticolo con N = 5 e M = 3.

Come specificato nell'equazione (2.6) il prezzo del contratto derivato nell'istante t=0 è uguale al suo payoff finale scontato atteso sotto la probabilità risk-neutral Q corrispondente al processo stocastico nell'equazione (2.7). Sotto l'ipotesi di tasso di interesse costante e pari a r

questo valore atteso scontato si può calcolare mediante la seguente espressione:

$$p_{0} = e^{-rT} \int_{0}^{+\infty} dV_{T} p_{T} f\left(T, V_{T}; 0, V_{0}\right) \tag{2.11}$$

dove $f\left(T,V_T;0,V_0\right)$ è la densità di probabilità corrispondente all'evento che il valore dell'attività sottostante all'istante T sia V_T dato che il suo valore all'istante 0 sia V_0 .

Dato che il valore dell'attività sottostante segue un processo di Markov, si può applicare l'equazione di Chapman-Kolmogorov per determinare la funzione di densità di probabilità $f\left(T,V_T;0,V_0\right)$ dell'equazione (2.11).

Nell'ipotesi di evoluzione discreta che caratterizza il metodo qui introdotto, ad esempio, la densità di probabilità corrispondente all'evento che il valore dell'attività sottostante all'istante 2 sia V_2 dato che il suo valore all'istante 0 sia V_0 può essere espresso in termini di equazione di Chapman-Kolmogorov come:

$$f\Big(2,V_{2};0,V_{0}\Big) = \sum\nolimits_{V_{1}} f\Big(2,V_{2};1,V_{1}\Big) f\Big(1,V_{1};0,V_{0}\Big) \Delta V \tag{2.12}$$

 $\mbox{con } V_1 = V^{\min} + k \Delta \, V \hspace{5mm} k = 0, \dots, N-1 \, . \label{eq:V1}$

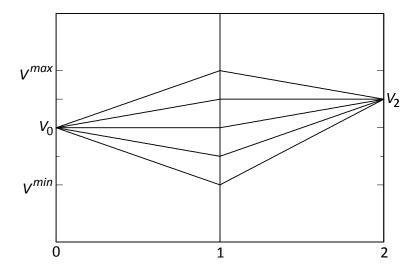


Figura 2.2. Possibili cammini da $V_0\,$ a $\,V_2\,$ con $\,N=5\,.$

Nella Figura 2.2 sono rappresentati i possibili cammini da V_0 a V_2 ipotizzando N=5. L'equazione (2.12) specifica che è possibile calcolare la densità di probabilità corrispondente all'evento che il valore dell'attività sottostante nell'istante 2 sia V_2 , dato che il suo valore nell'istante 0 sia V_0 , moltiplicando la probabilità che il valore dell'attività sottostante nell'istante 1 sia V_1 e la probabilità che il valore dell'attività sottostante nell'istante 2 sia V_2 dato che il suo valore nell'istante 1 sia V_1 e sommando per tutti i possibili valori di V_1 . Generalizzando l'equazione (2.12) al caso di M sottointervalli si ottiene:

$$\begin{split} f\Big(T,V_T;0,V_0\Big) &= \sum\nolimits_{V_{M-1},...,V_1} f\Big(T,V_T;M-1,V_{M-1}\Big) f\Big(M-1,V_{M-1};M-2,V_{M-2}\Big)...\\ &\qquadf\Big(2,V_2;1,V_1\Big) f\Big(1,V_1;0,V_0\Big) \Delta \, V^{M-1} \end{split} \eqno(2.13)$$

che può essere riscritta come:

$$f(T, V_T; 0, V_0) = \frac{1}{\Delta V} \sum_{V_{M-1} \dots V_1} \prod_{i=0}^{M-1} f(i+1, V_{i+1}; i, V_i) \Delta V \qquad (2.14)$$

dove $V_M = V_T$. Dato che V_{i+1} ha distribuzione normale con media $V_i + \overline{\mu}_i \Delta t \quad \text{e varianza} \quad \sigma_i^2 \Delta t \quad \text{(cfr. equazione (2.8)), ponendo} \quad M$ sufficientemente elevato così che $\Delta t = T/M \to 0$ e ignorando gli infinitesimi di ordine superiore a Δt si ha:

$$f\left(i+1, V_{i+1}; i, V_i\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2 \Delta t}} \exp\left(-\frac{\left(V_{i+1} - V_i - \overline{\mu}_i \Delta t\right)^2}{2\sigma_i^2 \Delta t}\right) \tag{2.15}$$

Dalle equazioni (2.14) e (2.11) segue che:

$$\begin{split} p_0 &= e^{-rT} \int_0^{+\infty} dV_T p_T f \left(T, V_T; 0, V_0 \right) \\ &\simeq e^{-rT} \sum_{V_M} p_T \sum_{V_{M-1} \dots V_1} \prod_{i=0}^{M-1} f \left(i + 1, V_{i+1}; i, V_i \right) \Delta V \end{split} \tag{2.16}$$

dove $f(i+1,V_{i+1};i,V_i)$ è espresso nell'equazione (2.15). L'equazione (2.16) rappresenta il nucleo fondamentale del metodo a reticolo di Chapman-Kolmogorov (Chapman-Kolmogorov lattice, CKL) presentato in questa

tesi che consiste nel determinare il valore del contratto derivato calcolando $N\times M \mbox{ sommatorie}.$

2.3 Applicazione e discussione

In questo paragrafo al fine di confermare la bontà del metodo CKL, ne sono stati confrontati i risultati con quelli di alcuni tra i più avanzati metodi di pricing di opzioni esotiche e ne è stata verificata la velocità di convergenza e l'efficacia nella valutazione di opzioni di tipo americano e su tasso di interesse.

2.3.1 Convergenza

In Horasanlı (2007) è proposto uno studio completo sulla velocità di convergenza di metodi a reticolo standard per la valutazione di contratti derivati. Utilizzando gli stessi parametri di Horasanlı (2007) in questo sottoparagrafo viene effettuato un confronto sulle proprietà di convergenza del metodo CKL rispetto agli alberi binomiali e trinomiali facendo variare il numero di sottointervalli e il valore iniziale dell'attività sottostante. Viene presa in considerazione una opzione call europea scritta su una attività sottostante che non paga dividendi caratterizzata dal seguente payoff esigibile nell'istante T:

$$C_T = \max(V_T - K; 0) \tag{2.17}$$

dove K è il prezzo di esercizio. I parametri della valutazione sono riportati nella Tabella 2.1.

Parametri	
Valore iniziale dell'attività sottostante	120
Prezzo di esercizio	100
Volatilità dell'attività sottostante	$0,\!25$
Tasso di interesse privo di rischio	0,1
Vita a scadenza	0,5

Tabella 2.1. Opzione call europea: parametri di valutazione.

Nella Figura 2.3 sono rappresentati i valori in t=0 di una opzione call europea in funzione del numero dei passi per il metodo binomiale, trinomiale e CKL. I risultati numerici sono stati ottenuti utilizzando Matlab R2010a su un PC Intel Core i5-2520M 2.50 GHz. Come evidenziato in Horasanli (2007) il metodo trinomiale e ancor di più quello binomiale non offrono valutazioni affidabili utilizzando un numero ridotto di passi. Viceversa il metodo CKL converge al valore teorico della formula di BSM in meno di 500 passi mentre utilizzando il metodo binomiale o trinomiale ne servono oltre 5000 per raggiungere la stesso livello di approssimazione (10^{-4} rispetto alla soluzione in forma chiusa della formula di BSM).

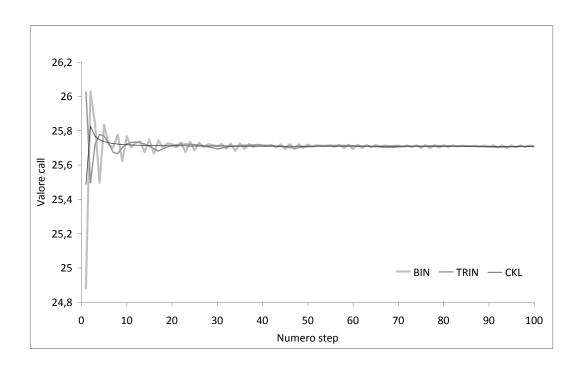


Figura 2.3. Valore della call europea in funzione del numero degli step: metodo binomiale vs trinomiale vs CKL.

Nella Tabella 2.2 è mostrata la convergenza dei tre metodi al tendere del valore iniziale dell'attività sottostante al prezzo di esercizio. I risultati confermano che il metodo trinomiale converge più rapidamente rispetto al binomiale e che il metodo CKL è considerevolmente superiore ad entrambi.

			Numero step						
V_0	Metodo		10	100	250	500	1000	5000	9999
120	BIN		25,7693	25,7071	25,7083	25,7102	25,7094	25,7091	25,7090
	TRIN		25,7222	25,7105	25,7102	25,7094	25,7087	25,7091	25,7090
	CKL		25,7184	25,7093	25,7091	25,7090	25,7090	25,7090	25,7090
	BSM	25,7090							
115	BIN		21,2313	21,2026	21,2117	21,2103	21,2113	21,2102	21,2103
	TRIN		21,2316	21,2146	21,2103	21,2113	21,2107	21,2105	21,2104
	CKL		21,2197	21,2107	21,2105	21,2104	21,2104	21,2104	21,2104
	BSM	21,2104							

			Numero step						
V_0	Metodo		10	100	250	500	1000	5000	9999
110	BIN		16,97	16,9712	16,9651	16,9606	16,964	16,9627	16,963
	TRIN		16,9718	16,964	16,9606	16,964	16,9624	16,9628	16,9628
	CKL		16,9709	16,9631	16,9629	16,9629	16,9629	16,9629	16,9629
	BSM	16,9629							
105	BIN		13,1883	13,0671	13,0556	13,0536	13,0561	13,055	13,055
	TRIN		13,1205	13,0498	13,0536	13,0561	13,055	13,0549	13,055
	CKL		13,0603	13,0551	13,0549	13,0549	13,0549	13,0549	13,0549
	BSM	13,0549							
100	BIN		9,4066	9,5644	9,5751	9,5787	9,5805	9,5819	9,5824
	TRIN		9,4937	9,5733	9,5787	9,5805	9,5813	9,5821	9,5821
	CKL		9,584	9,5823	9,5823	9,5822	9,5822	9,5822	9,5822
	BSM	9,5822							

Tabella 2.2. Valori dell'opzione in funzione del valore iniziale dell'attività sottostante e del numero di step: Binomiale (BIN) vs Trinomiale (TRIN) vs CKL. I valori ottenuti con la formula di BSM sono riportati come benchmark.

2.3.2 Opzioni americane

Una delle caratteristiche che ha reso i metodi a reticolo un successo tra gli operatori è la loro abilità di valutare le opzioni americane, per le quali non esiste una formula chiusa. Per evidenziare la bontà del metodo CKL a riguardo, viene presa in considerazione la valutazione di una opzione call americana scritta su una attività sottostante che paga un dividendo noto. I parametri della valutazione sono riportati nella Tabella 2.3 e il payoff della call all'istante ottimale di esercizio \overline{t} è:

$$C_{\overline{t}} = \max(V_{\overline{t}} - K; 0) \tag{2.18}$$

con $\bar{t} \in [0,T]$. I risultati rappresentati nella Figura 2.4 mostrano l'andamento regolare della soluzione del metodo CKL e il piccolo numero di passi richiesto, rispetto al metodo binomiale e trinomiale, per raggiungere una soluzione stabile.

Parametri	
Valore iniziale dell'attività sottostante	120
Prezzo di esercizio	100
Volatilità dell'attività sottostante	$0,\!25$
Tasso di interesse privo di rischio	0,1
Vita a scadenza	0,5
Dividendo	10
Istante di pagamento del dividendo	0,25

Tabella 2.3. Opzione call americana: parametri di valutazione.

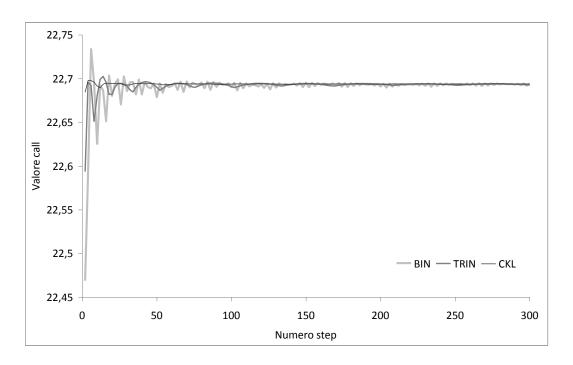


Figura 2.4. Valore call americana in funzione del numero di step: metodo binomiale vs trinomiale vs CKL.

2.3.3. Contratti derivati su tasso di interesse

Come è stato sottolineato, il metodo CKL è in grado di valutare anche contratti derivati il cui valore dell'attività sottostante segua un processo stocastico diverso dal moto browniano geometrico, come nel caso di contratti derivati su tasso di interesse.

Uno zero-coupon bond è un contratto finanziario che paga nell'istante di scadenza un importo corrispondente al suo valore nominale. Può essere considerato un contratto derivato su tasso di interesse in quanto il suo valore dipende dalla struttura dei tassi di interesse prevalente sul mercato. Un noto modello che consente di valutare mediante formule analitiche zero-coupon bond, opzioni call e put europee scritte su zero-coupon bond è

il modello di Cox-Ingersoll-Ross (1985, CIR). Viene ipotizzato che il processo risk-neutral per r_t sia:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dz_t$$
 (2.19)

dove a, b e σ sono costanti positive. Secondo il modello CIR il tasso r_t è sempre non-negativo, tende verso un livello di equilibrio di lungo periodo b con una intensità di richiamo a, con volatilità crescente al crescere del suo valore.

Nelson e Ramaswamy (1990) hanno proposto un albero binomiale per il modello CIR, mentre in questo paragrafo viene utilizzato un metodo trinomiale equivalente ma più efficiente che considera il processo per $\sqrt{r_t}$ (per maggiori dettagli si veda l'Appendice F in Brigo e Mercurio (2006)). Nella Figura 2.5 sono rappresentati i risultati del confronto in termini di convergenza tra il metodo trinomiale e il CKL relativamente alla valutazione di una opzione call europea con i parametri sintetizzati nella Tabella 2.4.

Parametri	
Intensità di richiamo	0,3
Livello di equilibrio di lungo periodo	0,05
Sigma	0,1

Tasso di interesse iniziale	0,02
Vita a scadenza dello zeb	10
Valore nominale dello zcb	100
Vita a scadenza dell'opzione call	5
Strike price	80

Tabella 2.4. Modello CIR applicato a una opzione call europea su zero-coupon bond (zcb): parametri di valutazione.

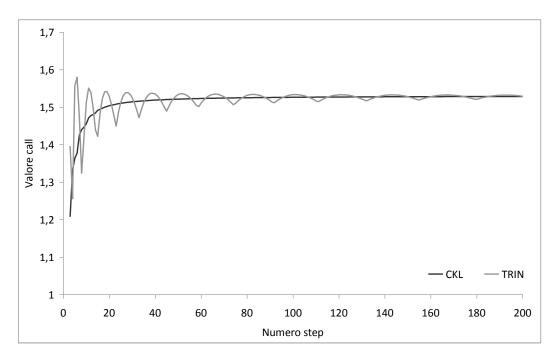


Figura 2.5. Valore opzione call europea su zero-coupon bond values in funzione del numero dei passi: metodo CKL vs trinomiale.

2.3.4. Derivati path-dependent

Il payoff dei derivati path-dependent dipende dal cammino seguito dal valore dell'attività sottostante. In questo paragrafo vengono prese in considerazione opzioni discrete lookback e con barriera in quanto, come riportato in Kou (2008), sono i contratti derivati path-dependent più

diffusi e a causa del monitoraggio discreto la loro valutazione è molto complessa. Sono state proposte soluzioni in forma chiusa per la loro valutazione che prevedono l'utilizzo di distribuzioni normali a n dimensioni (dove n è il numero degli istanti di monitoraggio) e che sono computazionalmente difficili da trattare nel caso frequente in cui n > 5 (Kou, 2008). Alternativamente, in Broadie et al. (1999), è riportato che i metodi Monte Carlo e i metodi binomiali standard possono impiegare molte ore per ottenere risultati accurati.

Le opzioni lookback possono essere di due tipi: fixed strike e floating strike. Per una call, il payoff finale di una opzione lookback fixed strike è:

$$C_T = \max \left({^*V - K; 0} \right) \tag{2.20}$$

dove *V è il valore massimo raggiunto dal valore dell'attività sottostante nell'intervallo temporale $\left[0,T\right]$; il payoff finale di una opzione put lookback floating strike è:

$$P_T = \max \left({^*V - V_T; 0} \right) \tag{2.21}$$

Nel caso di monitoraggio continuo Goldman et al. (1979a, 1979b), Conze e Viswanathan (1991), Heynen e Kat (1994) hanno proposto soluzioni in forma chiusa. Considerando il caso con monitoraggio discreto, Aktinson e Fusai (2007) (AF) hanno ridotto il problema ad una equazione integrale di Wiener-Hopf ed hanno applicato il risultato per valutare in forma chiusa opzioni lookback e con barriera nelle ipotesi di BSM. Petrella e Kou (2004) (PK) hanno proposto un metodo basato sulla trasformata di Laplace mentre Broadie et al. (1999) (BGK) un albero trinomiale. Nella Tabella 2.5 c'è il confronto tra questi metodi, il Monte Carlo (MC) e il CKL utilizzando i dati presenti in Petrella e Kou (2004).

n	Ultimo Max	MC	PK	BGK	AF	Tempo AF	CKL	Tempo CKL
5	110	13,294	13,3	13,3	13,3001	0,641	13,3001	0,0085
10	110	14,12	$14,\!123$	14,123	14,1227	0,875	14,1227	0,0032
20	110	14,802	14,806	14,806	14,8059	1,672	14,8059	0,0059
40	110	15,342	$15,\!345$	$15,\!345$	15,3447	3,766	15,3447	0,0385
80	110	15,76	15,754	15,755	15,7545	7,921	15,7545	0,0913
160	110	16,061	16,059	16,059	16,0591	15,875	16,0591	0,206
5	120	18,827	18,837	18,837	18,8373	$0,\!593$	18,8373	0,0093
10	120	19,316	19,32	19,323	19,3229	0,960	19,3229	0,0045
20	120	19,74	19,743	19,743	19,7433	1,687	19,7433	0,0158
40	120	20,081	20,083	30,083	20,083	3,688	20,083	0,0196
80	120	20,353	20,346	20,346	20,346	7,875	20,346	0,0558
160	120	20,548	20,544	20,544	20,5439	15,578	20,5439	0,0971

Tabella 2.5. Opzione put lookback floating strike. Valore in funzione del numero di istanti di monitoraggio n e del valore massimo precedente raggiunto: MC vs PK vs BGK vs AF vs CKL. Valore iniziale dell'attività sottostante = 100, volatilità dell'attività sottostante = 0,3, tasso di interesse = 0,1, vita a scadenza = 0,5. I tempi di esecuzione del metodo CKL e della formula di AF sono espressi in secondi e sono stati ottenuti usando rispettivamente un PC Intel Core i5-2520M 2.50 GHz e un PC Intel PentiumM 2.00 GHz. Il tempo di esecuzione del

metodo CKL è riferito ad una soluzione stabile con un livello di approssimazione di 10^{-4} .

Le opzioni con barriera possono essere di due tipi: knock-in e knock-out. Una opzione con barriera knock-in è un contratto che viene attivato quando il valore dell'attività sottostante oltrepassa un predeterminato livello di barriera mentre una opzione con barriera knock-out cessa di esistere se la barriera è colpita. Per esempio, una opzione call down-and-out garantisce al detentore il payoff di una call europea se il valore dell'attività sottostante non raggiunge un livello di barriera inferiore prima della scadenza. Per questo tipo di opzione Merton (1973) è stato il primo a proporre una formula analitica per la valutazione, mentre soluzioni in forma chiusa per altre opzioni con barriera sono state proposte, tra gli altri, da Rubinstein e Reiner (1991).

Nel caso di monitoraggio discreto, oltre ai metodi sopramenzionati di Atkinson e Fusai (2007), Broadie et al. (1999) (1997) (BGK) e Kou (2003) hanno proposto approssimazioni basate sulla formula di valutazione con monitoraggio continuo. Altri hanno presentato approcci numerici alternativi: Aitsahlia e Lai (1998) (AL) hanno proposto una procedura ricorsiva di integrazione numerica, Tse et al. (2001) (TLN) un algoritmo per valutare opzioni con barriera a monitoraggio discreto e opzioni lookback, Fusai e Recchioni (2007) (FR) un metodo di quadratura combinato con una procedura di interpolazione per la valutazione di

opzioni con barriera a monitoraggio discreto. Utilizzando i dati presenti in Atkinson e Fusai (2007) nella Tabella 2.6 sono rappresentati i risultati del confronto di tutte queste procedure con il metodo CKL. Come si può notare, il metodo CKL si contraddistingue per la sua accuratezza e velocità di esecuzione anche nella valutazione di opzioni con barriera a monitoraggio discreto, uno dei contratti derivati esotici più complessi da valutare.

B	n	T	CKL	Tempo CKL	AF	Tempo AF	AL	TLN	BGK	TRIN	FR
89	5	0,2	6,2808	0,0123	6,2808	0,7970	6,2763	-	6,2844	6,281	6,2809
95	5	0,2	5,6711	0,0033	5,6711	6,3910	5,6667	5,6711	5,6456	5,671	5,6712
97	5	0,2	5,1673	0,0045	5,1673	$64,\!5160$	5,1628	5,1673	5,0275	5,167	$5,\!1675$
99	5	0,2	4,4892	0,0063	4,4892	3703,0000	4,4848	4,4892	4,0495	4,489	4,4894
89	25	0,2	6,2100	0,0821	6,2100	1,3440	6,2003	-	6,2103	6,21	6,2101
95	25	0,2	5,0814	0,0220	5,0814	3,2030	5,0719	5,0814	5,0838	5,081	5,0815
97	25	0,2	4,1158	0,0164	4,1158	10,3120	4,1064	4,1158	4,1128	4,115	4,11598
99	25	0,2	2,8124	0,0520	2,8124	263,1720	2,8036	2,8124	2,6729	2,812	2,8128
91	50	0,2	5,9771	0,0506	5,9771	2,7970	-	5,9771	5,9773	-	-
93	50	0,2	5,5843	0,0216	5,5843	2,7810	-	5,5843	5,5846	-	-
95	50	0,2	4,9068	0,0499	4,9068	2,7350	-	4,9068	4,9071	-	-
97	50	0,2	3,8340	0,0718	3,8340	8,3590	-	3,8340	3,8362	-	-
99	50	0,2	2,3364	0,0340	2,3364	88,6720	-	2,3364	2,2713	-	-
91	252	1	11,3121	0,5000	11,3122	9,2810	-	11,3122	11,3123	-	-
93	252	1	9,7292	0,8395	9,7293	9,2810	-	9,7293	9,7294	-	-
95	252	1	7,8439	1,6770	7,8439	15,0470	-	7,8439	7,8439	-	-
97	252	1	5,6306	0,8530	5,6307	$34,\!5000$	-	5,6307	5,6336	-	-
99	252	1	3,1674	$0,\!2475$	3,1674	847,2820		3,1674	3,0795	-	

Tabella 2.6. Opzione call con barriera down-and-out. Valori in funzione del livello di barriera B, del numero di istanti di monitoraggio n e di vita a

scadenza T: CKL vs AF vs AL vs TLN vs BGK vs TRIN vs FR. TRIN è l'albero trinomiale di Broadie et al (1997). Valore iniziale dell'attività sottostante = 100, prezzo di esercizio = 100, volatilità dell'attività sottostante = 0,3, tasso di interesse iniziale = 0,1. I tempi di esecuzione del metodo CKL e della formula di AF sono espressi in secondi e sono stati ottenuti usando rispettivamente un PC Intel Core i5-2520M 2.50 GHz e un PC Intel PentiumM 2.00 GHz. Il tempo di esecuzione del metodo CKL è riferito ad una soluzione stabile con un livello di approssimazione di 10^{-4} .

Capitolo 3

Un nuovo modello strutturale per la valutazione del rischio di credito

3.1 Introduzione

Nell'ultimo decennio l'interesse verso i modelli per la valutazione del rischio di credito ha avuto una crescita impressionante, soprattutto in seguito alla crisi finanziaria iniziata nel 2007 che ha condotto e sta conducendo alla bancarotta molte società in tutto il mondo. Data la centralità del tema, istituzioni e organismi internazionali hanno ravvisato la necessità di includere questo tipo di rischio nei paradigmi di valutazione degli strumenti finanziari, ad esempio nel framework di Basilea e nei principi contabili internazionali.

Il rischio di credito può essere definito come il rischio che la controparte di un contratto fallisca prima di onorare i propri impegni contrattuali. I Credit Default Swap (CDS) sono stati introdotti come contratti di protezione contro il rischio di credito e sono diventati molto liquidi negli ultimi anni. I CDS sono attivamente scambiati nei mercati finanziari e possono essere considerati una sorta di contratti base nell'area dei derivati creditizi, alla stessa stregua degli Interest Rate Swap (IRS) e dei Forward Rate Agreement (FRA) nel mondo dei derivati su tasso di interesse.

Data la forte presenza sul mercato, la necessità non è più quella di avere un modello per la valutazione dei CDS ma piuttosto quella di considerare

modelli da calibrare sulla base delle quotazioni dei CDS ed essere utilizzati per valutare derivati più complessi.

Un CDS è un contratto che assicura protezione in caso di fallimento (default) di una determinata società per un periodo pari a T. Due parti, il protection buyer "A" e il protection seller "B", stipulano un contratto con le seguenti condizioni: se la società "C" oggetto del contratto fallisce al tempo $\tau = \tau_C$, con $t_0 < \tau < t_N = T$, "B" paga ad "A" un certo ammontare di denaro LGD (loss given default, perdita in caso di fallimento della società "C"). In cambio, la parte "A" paga a "B" un tasso R alle date prestabilite t_1, \ldots, t_N o fino al tempo τ_C . I due flussi, qui sotto schematizzati, sono rispettivamente noti come protection leg e premium leg:

L'ammontare in denaro LGD è una protezione per "A" in caso di fallimento di "C". Tipicamente $LGD = Noz \times (1 - Rec)$, dove Noz è il capitale nozionale di riferimento dell'operazione e Rec è il tasso di recupero (recovery rate).

Formalmente, si può scrivere il payoff del CDS dalla prospettiva di "B" come:

$$\begin{split} \Pi_{CDS_{T}}(t_{0}) &= \left(\tau - t_{\beta(\tau)-1}\right) R \, \mathbf{1}_{\left\{t_{0} < \tau < t_{N}\right\}} + \\ &+ \sum_{i=1}^{N} \alpha_{i} R \mathbf{1}_{\left\{\tau \geq t_{i}\right\}} - \mathbf{1}_{\left\{t_{0} < \tau < t_{N}\right\}} LGD \end{split} \tag{3.1}$$

dove $t_{\beta(\tau)}$ è la prima data fra le varie t_i successiva a τ , α_i è la frazione di anno che intercorre tra t_{i-1} e t_i .

In generale, qualunque sia il modello scelto per il tempo di default, si può calcolare il prezzo di un CDS utilizzando i paradigmi tradizionali della valutazione risk-neutral (Bielecki e Rutkowski, 2001)

$$CDS_T(t_0,R,LGD) = E_{t_0}^{\mathbb{Q}} \left\{ \Pi_{CDS_T}(t_0) \right\} \tag{3.2}$$

dove $E_{t_0}^{\mathbb{Q}}$ è l'aspettativa al tempo t_0 sotto la misura di probabilità riskneutral \mathbb{Q} . Un CDS è quotato attraverso il suo tasso equo R, tale per cui al momento di stipula del contratto si ha $CDS_T(t_0,R,LGD)=0$. Ponendo $t_0=0$ e assumendo per semplicità tassi di interesse deterministici si ottiene facilmente:

$$\begin{split} CDS_T(0,R,LGD) &= -R \int_{t_0}^T v(0,u) \Big(u - t_{\beta(u)-1} \Big) d\mathbb{Q}_C(\tau > u) + \\ &+ \sum_{i=1}^N v(0,t_i) \alpha_i \mathbb{Q}_C(\tau > t_i) + LGD \int_{t_0}^T v(0,u) d\mathbb{Q}_C(\tau > u) \end{split} \tag{3.3}$$

dove v(t,T) è il fattore di sconto risk free al tempo t per la scadenza T e $\mathbb{Q}_C(\tau > t)$ è la probabilità risk-neutral di sopravvivenza della società "C". Gli integrali nelle probabilità di sopravvivenza $d\mathbb{Q}(\tau > t)$ possono essere approssimati numericamente nel senso di integrali di Riemann-Stieltjes nelle probabilità di sopravvivenza stesse, considerando un passo temporale sufficientemente piccolo (O'Kane e Turnbull, 2003).

Il tasso equo R di un CDS è strettamente dipendente dalla probabilità di default. L'idea è perciò quella di utilizzare le quotazioni di mercato R per ricavare delle probabilità di fallimento implicite e calibrare i modelli per il tempo di default sulla base dell'equazione (3.3).

3.2 Modelli in forma ridotta e modelli strutturali

Nel corso degli anni sono emersi sostanzialmente due paradigmi fondamentali per trattare il rischio di credito: i modelli in forma ridotta (intensity models) ed i modelli strutturali.

I modelli in forma ridotta descrivono l'insolvenza mediante l'utilizzo di un processo di salto esogeno: precisamente, il tempo di default τ è il primo tempo di salto di un processo stocastico di Poisson. I processi di Poisson non omogenei sono fra i più utilizzati perché molto flessibili e adattabili ai dati di mercato. Considerando un'intensità deterministica $\lambda(t)$, strettamente positiva e continua a destra, si definisce come l'intensità cumulata o hazard function come:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u) du \tag{3.4}$$

Dato un processo di Poisson standard M_t (con intensità uguale a 1), un processo di Poisson non-omogeneo N_t (con intensità uguale a $\lambda(t)$) si definisce come:

$$N_t = M_{\Lambda(t)}. \tag{3.5}$$

 N_t è un processo crescente con salto di ampiezza uguale a 1, i cui incrementi sono indipendenti ma, a differenza del processo standard, non sono identicamente distribuiti data la distorsione temporale introdotta da $\Lambda(t)$.

Dalla relazione $N_t=M_{\Lambda(t)}$ si ottiene che il primo tempo di salto di N_t è uguale a τ se e solo se il primo tempo di salto di M_t è uguale a $\Lambda(\tau)$.

Dato che il primo tempo di salto di un processo di Poisson standard è distribuito come una variabile esponenziale, $\Lambda(t)=\xi\sim Esponenziale\left(1\right)$, si ha $\tau=\Lambda^{-1}(\xi)$.

La probabilità che il primo salto di $\,N_t\,$ sia compreso tra se t, con $\,s < t\,,$ è:

$$\mathbb{Q}\left\{s < \tau < t\right\} = \mathbb{Q}\left\{\Lambda(s) < \Lambda(\tau) < \Lambda(t)\right\} = \mathbb{Q}\left\{\Lambda(s) < \xi < \Lambda(t)\right\}
= \mathbb{Q}\left\{\xi > \Lambda(s)\right\} - \mathbb{Q}\left\{\xi > \Lambda(t)\right\} = \exp\left[-\Lambda(s)\right] - \exp\left[-\Lambda(t)\right]
= e^{-\int_0^s \lambda(u)du} - e^{-\int_0^t \lambda(u)du} = e^{-\int_0^s \lambda(u)du} \left(1 - e^{-\int_s^t \lambda(u)du}\right)
\approx e^{-\int_0^s \lambda(u)du} \int_s^t \lambda(u)du$$
(3.6)

dove l'ultima approssimazione è valida per piccoli esponenti. La probabilità che il primo tempo di salto τ avvenga in un istante infinitesimo:

$$\mathbb{Q}\left\{\tau \in \left[t, t + dt\right]\right\} = \mathbb{Q}\left\{\tau \ge t\right\} - \mathbb{Q}\left\{\tau \ge t + dt\right\} = e^{-\int_0^t \lambda(u)du} \lambda(t)dt \qquad (3.7)$$

e condizionando rispetto all'evento che non vi siano stati salti fino al tempo t si ottiene:

$$\mathbb{Q}\left\{\tau \in \left[t, t + dt\right) \mid \tau > t\right\} = \lambda(t)dt. \tag{3.8}$$

Dato che τ è il tempo di default, la probabilità che il fallimento di una determinata società avvenga in un arco temporale dt (arbitrariamente piccolo) dato che questo non si sia già verificato è uguale a $\lambda(t)dt$. In particolare, la relazione

$$\mathbb{Q}\left\{\tau > t\right\} = \exp\left[-\Lambda(t)\right] = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u)du\right) \tag{3.9}$$

permette di interpretare la probabilità di default $\mathbb{Q}\left\{\tau>t\right\}$ come un fattore di sconto e conseguentemente l'intensità di default $\lambda(t)$ come un tasso di spread creditizio istantaneo.

Il modello di Jarrow e Turnbull (1995) è il capostipite dei modelli in forma ridotta che offrono un interessante parallelo con i modelli per i tassi d'interesse e perciò sono particolarmente adatti per trattare gli spread creditizi. Tipicamente sono molto facili da calibrare sulla base delle informazioni presenti nei mercati obbligazionari e dei CDS e sono molto utilizzati per definire la valutazione "relativa" di contratti come le opzioni su CDS. Maggiori difficoltà per questi modelli si presentano nei casi di estensione a problemi di valutazione con più sottostanti (First to Default Basket, Credit Default Obbligation, etc...). Inoltre, calibrare le correlazioni fra i tempi di default di società differenti non è banale e coinvolge connessioni molto dibattute con il mercato azionario (si vedano, ad esempio, Madan e Unal (1998), Lando (1998) e Duffie e Singleton (1999)).

I modelli strutturali si basano sul lavoro fondamentale di Merton (1974), nel quale la vita di una società è strettamente legata alla sua capacità di onorare le proprie obbligazioni.

Nei modelli strutturali classici l'ipotesi di base è che il processo che descrive l'andamento dell'attivo aziendale, sotto la misura di probabilità risk-neutral \mathbb{Q} , è dato dalla seguente equazione differenziale stocastica

$$dV_t = (r - k)V_t dt + \sigma_V V_t d\overline{z}_t, \quad V_0 > 0, \tag{3.10}$$

dove r e k (costanti) sono rispettivamente il tasso d'interesse risk-free e il tasso di dividendo, σ_V (costante) è il tasso di volatilità e \overline{z}_t è un processo di Wiener sotto la misura di probabilità risk-neutral $\mathbb Q$.

In questi modelli il valore dell'attivo aziendale V_t è dato dalla somma del valore del capitale sociale S_t e del debito D_t . Il valore del capitale sociale S_t , in particolare, può essere visto come un'opzione che ha come sottostante il valore dell'attivo aziendale V_t .

Modelli più realistici, come Black e Cox (1976) o Cenci e Gheno (2005), hanno introdotto la possibilità di fallimento anche prima della scadenza T; i primi mediante una barriera idealmente connessa alla presenza di safety covenant (first passage time), i secondi mediante una barriera discreta connessa ai vari rimborsi di debito nel tempo. Briys e de Varenne (1997) hanno considerato un modello first passage time con possibilità di tassi d'interesse stocastici, mentre Hsu et al. (2010) oltre al rischio tasso hanno anche considerato una barriera stocastica. Brigo e Tarenghi (2004) e Brigo et al. (2009) hanno proposto due modelli in grado di calibrare

perfettamente le quotazioni dei CDS attraverso una funzione di volatilità dell'attivo aziendale non costante.

3.2.1 Modello di Merton

Nella forma più semplice del modello di Merton (1974) l'assunzione di base è che tutto il passivo della società è rappresentato da uno zero coupon con valore nominale L e scadenza T. La capacità della società di ripagare il suo debito è determinata dal valore del suo attivo V_T al tempo T. In questo contesto il fallimento può avvenire solo in T e corrisponde all'evento $\{V_T < L\}$. Quindi il tempo di default può essere scritto come

$$\tau = T1_{\{V_T < L\}} + \infty 1_{\{V_T \ge L\}}. \tag{3.11}$$

Il valore del debito D_t in ogni istante t < T è dato da

$$\begin{split} D_t &= e^{-r(T-t)} E_t^{\mathbb{Q}} \left[\min(V_T, L) \right] = e^{-r(T-t)} E_t^{\mathbb{Q}} \left[V_T - \left(V_T - L \right)^+ \right] \\ &= e^{-r(T-t)} E_t^{\mathbb{Q}} \left[L - \left(L - V_T \right)^+ \right] = e^{-r(T-t)} L - P_t \end{split} \tag{3.12}$$

dove P_t è il valore, al tempo t, di un'opzione put con scadenza T, scritta su V_t con strike price pari a L. Il valore del capitale sociale S_t può essere ottenuto come differenza fra il valore dell'attivo e quello del debito:

$$S_t = V_t - D_t = V_t - e^{-r(T-t)}L + P_t = C_t$$
 (3.13)

dove ${\cal C}_t$ è il valore in t della corrispondente opzione call.

Nell'ottica di Merton (1974) gli azionisti della società detengono un'opzione call sul valore dell'attivo aziendale, mentre gli obbligazionisti detengono uno zero coupon bond non rischioso e hanno venduto un'opzione put sempre sullo stesso sottostante.

Utilizzando i paradigmi tradizionali della valutazione di opzioni plain vanilla si può ottenere il valore del debito della società:

$$D_t = V_t e^{-k(T-t)} N \left(-d_+(V_t, T-t) \right) + L e^{-r(T-t)} N \left(-d_-(V_t, T-t) \right) \quad (3.14)$$

dove

$$d_{\pm}(V_t, T-t) = \frac{\ln\left(V_t/L\right) + \left(r - k \pm \frac{1}{2}\sigma_V^2\right)\left(T - t\right)}{\sigma_V\sqrt{T - t}}. \tag{3.15}$$

La probabilità di sopravvivenza della società è data dalla probabilità associata all'evento $\left\{V_T \geq L\right\}$:

$$\mathbb{Q}(\tau \ge T) = N\left(d_{-}(V_t, T - t)\right). \tag{3.16}$$

3.2.2 Modello di Black e Cox

Uno dei principali problemi del modello di Merton nella sua forma standard è che il fallimento della società possa avvenire solamente alla data di scadenza T dell'unico debito zero coupon. Vari autori hanno perciò considerato modelli strutturali nei quali questa caratteristica poco realistica viene superata. Nella maggior parte di questi modelli il tempo di default τ è dato dal tempo in cui il processo V_t taglia dall'alto una certa barriera per la prima volta (first passage time).

I primi ad estendere il modello di Merton in questo senso sono stati Black e Cox (1976) tenendo conto di specifiche caratteristiche dei contratti di debito come i safety covenant. Queste clausole forniscono ai detentori del debito il diritto di forzare il fallimento di una società o una sua riorganizzazione nel caso in cui l'azienda non riesca a sostenere particolari standard di redditività. Black e Cox (1976) hanno considerato la presenza di queste clausole in termini di una barriera H_t deterministica e dipendente dal tempo:

$$H_t = \begin{cases} Ke^{-\gamma(T-t)} & se & t < T \\ L & se & t = T \end{cases}, \quad 0 < K < L, \tag{3.17}$$

dove γ è costante ed L è il valore nominale di uno zero coupon bond con scadenza T.

Prima della naturale scadenza del debito il default avviene nel caso in cui il valore dell'attivo aziendale V_t scende al di sotto della barriera H_t , altrimenti alla scadenza del debito se $\left\{V_T < L\right\}$. Il tempo di default τ può perciò essere espresso come:

$$\tau = \inf \left\{ t \in \left[0, T \right] \colon V_t < H_t \right\} \tag{3.18}$$

In particolare,

$$\begin{split} \tau &= \min(\overline{\tau}, \hat{\tau}) \\ \overline{\tau} &= \inf\left\{t \in \left[0, T\right) \colon V_t < H_t\right\}, \\ \hat{\tau} &= T \mathbf{1}_{\left\{V_T < L\right\}} + \infty \mathbf{1}_{\left\{V_T \ge L\right\}}. \end{split} \tag{3.19}$$

Dato il processo (3.10) e la barriera (3.17), si può ottenere la probabilità di default $\mathbb{Q}(\tau < t)$ dal first passage time a zero di un moto browniano aritmetico.

Si definisca $Y_t=\ln \begin{pmatrix} V_t \\ H_t \end{pmatrix}$ in modo tale che il tempo di default $\tau=\inf \left\{t\in \left[0,T\right]\colon Y_t<0\right\}.$ Applicando il lemma di Itô si può facilmente ricavare la dinamica di Y_t :

$$dY_t = \varphi dt + \sigma_V d\overline{Z}_t, \quad \varphi = r - k - \gamma - \frac{1}{2}\sigma_V^2, \quad (3.20)$$

quindi

$$Y_t = y_0 + \varphi t + \sigma_V \overline{z}_t \tag{3.21}$$

Dato che il processo Y_t è un moto browniano aritmetico allora la variabile aleatoria $\overline{\tau}=\inf\left\{t\in \left[0,T\right)\colon V_t< H_t\right\}$ (first passage time a zero) si distribuisce come una normale inversa. Precisamente,

$$\mathbb{Q}(\overline{\tau} < t) = \mathbb{Q}\left(\inf_{0 < u < t} Y_u < 0\right) = N(h_1) + e^{-2\varphi\sigma_V^{-2}y_0} N(h_2) \tag{3.22}$$

dove N(x) è la distribuzione cumulata normale standard, $t \in [0,T)$ e

$$h_1 = \frac{-y_0 - \gamma t}{\sigma_V \sqrt{t}}, \quad h_2 = \frac{-y_0 + \gamma t}{\sigma_V \sqrt{t}}.$$
 (3.23)

(si veda il corollario A.4). Quindi in termini di V_t e H_t :

$$\mathbb{Q}(\overline{\tau} < t) = N \left(\frac{\ln \left(\frac{H_0}{V_0} \right) - \varphi t}{\sigma_V \sqrt{t}} \right) + \left(\frac{H_0}{V_0} \right)^{2\varphi \sigma_V^{-2}} N \left(\frac{\ln \left(\frac{H_0}{V_0} \right) + \varphi t}{\sigma_V \sqrt{t}} \right). \tag{3.24}$$

Passando al tempo di default $\tau=\min(\overline{\tau},\hat{\tau})$ bisogna prendere in considerazione la distribuzione congiunta di V_T e $\overline{\tau}$. In particolare,

$$\mathbb{Q}\left\{V_{T}\geq L, \overline{\tau}\geq T\right\} = N \left(\frac{\ln\left(\frac{V_{0}}{L}\right) + \varphi t}{\sigma_{V}\sqrt{t}}\right) - \left(\frac{H_{0}}{V_{0}}\right)^{2\varphi\sigma_{V}^{-2}} N \left(\frac{\ln\left(\frac{H_{0}^{2}}{L}V_{0}\right) + \varphi t}{\sigma_{V}\sqrt{t}}\right)$$

$$(3.25)$$

(si veda il corollario A.3) quindi:

$$\begin{split} \mathbb{Q}(\tau < T) &= 1 - \mathbb{Q}\left\{V_T \geq L, \overline{\tau} \geq T\right\} \\ &= N \left(\frac{\ln\left(\frac{L}{V_0}\right) - \varphi t}{\sigma_V \sqrt{t}}\right) + \left(\frac{H_0}{V_0}\right)^{2\varphi \sigma_V^{-2}} N \left(\frac{\ln\left(\frac{H_0^2}{LV_0}\right) + \varphi t}{\sigma_V \sqrt{t}}\right). \end{split} \tag{3.26}$$

Uno dei principali vantaggi dei modelli strutturali riguarda lo stretto collegamento tra il default e la capacità della società di onorare le proprie obbligazioni. A differenza dei modelli in forma ridotta il fallimento della società è perciò un evento endogeno.

Questi modelli offrono anche un'estensione naturale ai problemi di valutazione in cui vi sono più sottostanti. Oltretutto la stima delle

correlazioni fra i tempi di default ha uno stretto collegamento con la stima delle correlazioni nel mondo azionario.

Gli svantaggi, soprattutto nei modelli classici, riguardano la difficoltà nel calibrare con precisione i dati su CDS e obbligazioni e la stima della volatilità dell'attivo aziendale σ_V .

3.3 Il modello

In questa sezione è presentato un nuovo modello strutturale che mantiene i principali vantaggi dei modelli classici ma che è in grado di calibrare i dati dei CDS quotati e di mantenere uno stretto collegamento con il mercato delle opzioni su azioni.

Una delle ipotesi più restrittive del modello di Black e Cox (1976) è che i parametri r, k e σ_V del processo stocastico (3.10) sono assunti come costanti. Questa ipotesi è necessaria per determinare un'espressione in forma chiusa della legge del first passage time per V_T . Inoltre i quattro parametri del loro modello, σ_V , L, K e γ , non sono sufficientemente flessibili per calibrare tutte le quotazioni di mercato dei CDS.

Lo et al. (2003) e Rapisarda (2003) hanno mostrato come, scegliendo una particolare forma funzionale della barriera, sia possibile ottenere soluzioni analitiche per la valutazione di opzioni con barriera nel caso di un moto browniano geometrico con parametri non costanti. Questa tipologia di opzioni ha uno stretto collegamento con i modelli strutturali del first

passage time. Brigo e Tarenghi (2004) hanno proposto un modello strutturale in grado di calibrare perfettamente i dati dei CDS, considerando una barriera deterministica del tipo

$$H_t = H \exp\left\{ \int_0^t \left(r_u - k_u - \frac{\left(1 + 2\beta\right)}{2} \sigma_{V_u}^2 \right) du \right\},\tag{3.27}$$

con $H>0\,,$ e un processo per l'attivo, definito sotto la misura di probabilità $\mathbb{Q},$

$$dV_t = (r_t - k_t)V_t dt + \sigma_{V_t} V_t d\overline{z}_t, \quad V_0 > 0, \tag{3.28}$$

dove r_t , k_t e σ_{Vt} sono funzioni deterministiche in t. La probabilità di sopravvivenza della società è perciò ottenuta analiticamente (si veda il lemma B.1):

$$\mathbb{Q}\left(\tau > T\right) = N \left(\frac{\ln \frac{V_0}{H} + \beta \int_{0}^{T} \sigma_{V_u}^2 du}{\sqrt{\int_{0}^{T} \sigma_{V_u}^2 du}}\right) - \left(\frac{H}{V_0}\right)^{2\beta} N \left(\frac{\ln \frac{H}{V_0} + \beta \int_{0}^{T} \sigma_{V_u}^2 du}{\sqrt{\int_{0}^{T} \sigma_{V_u}^2 du}}\right). \quad (3.29)$$

La strategia è quella di calibrare la volatilità dell'attivo σ_{V_t} , in modo tale da ottenere un perfetto adattamento ai dati del mercato dei CDS. In particolare fissando in modo esogeno i parametri H e β e calibrando tante volatilità quante sono le quotazioni di mercato prese in considerazione

$$\hat{R}_{1Y}, \hat{R}_{2Y}, ..., \hat{R}_{10Y} \rightarrow \hat{\sigma}_{V1Y}, \hat{\sigma}_{V2Y}, ..., \hat{\sigma}_{V10Y} \tag{3.30}$$

dove \hat{R}_i è il tasso del CDS che scade l'i-esimo anno e $\sigma_{Vt}=\hat{\sigma}_i$ per $T_{i-1} \leq t < T_i \ (\, T_0=0 \,).$

Il modello di Brigo e Tarenghi (2004) ottiene ottimi risultati in termini di adattamento ai dati di mercato, ma il principale problema è la sua disconnessione con il mercato azionario. Come commentano gli autori, il loro modello non ha lo scopo di stimare il reale processo del valore aziendale ma solamente quello di riprodurre le probabilità di default risk neutral con un modello che abbia una chiara interpretazione economica del default.

In tutti i modelli strutturali per il rischio di credito il valore del capitale sociale S_t è un derivato cha ha come sottostante il valore dell'attivo aziendale V_t . In termini matematici il valore a scadenza del capitale sociale è una funzione del valore dell'attivo aziendale $S_t = g(V_t)$. Dato il processo (3.10) ed applicando quindi il lemma di Itô si può facilmente ottenere la dinamica del processo stocastico di S_t :

$$\begin{split} dS_t &= \left((r_t - k_t) V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t} + \frac{\partial S_t}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_{Vt}^2 V_t^2 \frac{\partial^2 S_t}{\partial V_t^2} \right) dt + \sigma_{Vt} V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t} d\overline{z}_t \\ &= r_t S_t dt + \sigma_{Vt} V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t} d\overline{z}_t \,. \end{split} \tag{3.31}$$

La dinamica di S_t può essere altresì dedotta dal mercato delle opzioni su azione:

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma(t, S_t) d\overline{z}_t, \qquad (3.32)$$

dove la forma parametrica del coefficiente di diffusione $\sigma(t,S_t)$ viene scelta in base alle volatilità implicite nelle quotazioni delle opzioni su azione (superficie delle volatilità).

E' evidente quindi la relazione fra i coefficienti di diffusione dell'attivo aziendale V_t e del capitale sociale S_t :

$$\sigma(t, S_t) = \sigma_{V_t} V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t}$$
 (3.33)

Un modello strutturale per il rischio di credito deve perciò prendere in considerazione le informazioni presenti sul mercato delle opzioni su azioni e mantenere la coerenza fra i coefficienti di diffusione fra i processi stocastici.

A differenza di Brigo e Tarenghi (2004) in questa tesi si è quindi scelto di stimare la volatilità dell'attivo aziendale σ_{V_t} dalla relazione (3.33) e di calibrare le probabilità di default implicite nel mercato dei CDS utilizzando una particolare forma della barriera deterministica H_t :

$$H_t = H \exp\left\{ \int_0^t \left(r_u - k_u - \frac{\left(1 + 2\beta_t\right)}{2} \sigma_{V_u}^2 \right) du \right\}, \tag{3.34}$$

dove H>0 e β_t è una funzione deterministica del tempo. In particolare, per ottenere una perfetto adattamento al mercato dei CDS è sufficiente una funzione per β_t costante a tratti con tanti valori quante sono le quotazioni che si intendono calibrare

$$\hat{R}_{1V}, \hat{R}_{2V}, ..., \hat{R}_{10V} \to \hat{\beta}_{1V}, \hat{\beta}_{2V}, ..., \hat{\beta}_{10V}$$
 (3.35)

dove $\beta_t = \hat{\beta}_i$ per $T_{i-1} \le t < T_i, i=1,...,M$ $(T_0=0)$. La barriera H_t presenta una forma molto più flessibile rispetto a quella di Brigo e Tarenghi (2004) e permette di cogliere al meglio strutture di debito e covenant anche molto complesse.

Chiaramente con questa tipologia di barriera non si ha una soluzione analitica per la probabilità di sopravvivenza $\mathbb{Q}(\tau > t)$ ma esse possono essere dedotte numericamente.

Grazie alla velocità di convergenza del metodo CKL presentato nel secondo capitolo è possibile ottenere una soluzione numerica per la probabilità di sopravvivenza in pochi centesimi di secondo, rendendo estremamente efficiente l'utilizzo di questo nuovo modello strutturale. In particolare, dato che la funzione β_t è costante a tratti, la legge del first passage time, per ogni $T_{i-1} \leq t < T_i$, è nota analiticamente. Questo permette di suddividere l'arco temporale preso in considerazione in M intervalli ed applicare l'equazione di Chapman-Kolmogorov utilizzando la distribuzione congiunta del first passage time e di V_t

$$\mathbb{Q}(\tau > t) = \sum_{V_{T_{M-1}, \dots, V_{T_1}}} \frac{\partial \mathbb{Q}\left(V_{T_M} \ge H_{T_M}, \tau > T_M \middle| V_{T_{M-1}}, \tau > T_{M-1}\right)}{\partial V_{T_M}} \Delta V_{T_M} \times \dots$$

$$\dots \times \frac{\partial \mathbb{Q}\left(V_{T_1} \ge H_{T_1}, \tau > T_1 \middle| V_0\right)}{\partial V_{T_1}} \Delta V_{T_1},$$

$$(3.36)$$

dove (si veda il corollario B.1):

$$\begin{split} \mathbb{Q}\Big(\,V_{T_{i}} \geq x, \tau > T_{i}\Big) &= N \Bigg(\frac{\ln\Big(H_{T_{i}}\big/x\Big) + \ln\Big(V_{0}\big/H\Big) + \beta_{i} \int_{T_{i-1}}^{T_{i}} \sigma_{V_{u}}^{2} du}{\sqrt{\int_{T_{i-1}}^{T_{i}} \sigma_{V_{u}}^{2} du}} \Bigg) \\ &- \bigg(\frac{H}{V_{0}}\bigg)^{2\beta_{i}} \, N \Bigg(\frac{\ln\Big(H_{T_{i}}\big/x\Big) + \ln\Big(H\big/V_{0}\Big) + \beta_{i} \int_{T_{i-1}}^{T_{i}} \sigma_{V_{u}}^{2} du}{\sqrt{\int_{T_{i-1}}^{T_{i}} \sigma_{V_{u}}^{2} du}} \Bigg), \end{split} \tag{3.37}$$

$$\mathrm{con}\ x \geq H_{T_i}\ \mathrm{e}\ V_0 \geq H\,.$$

La possibilità di ottenere una espressione delle probabilità risk neutral permette di calibrare il modello in base alle quotazioni di mercato dei CDS attraverso l'equazione (3.1).

In particolare, il parametro β_i , responsabile della forma della barriera, è determinato in base ai CDS quotati alle varie scadenze $CDS_{T_i}(0,R_{T_i},LGD)$. La volatilità dell'attivo σ_{V_t} è stimata a partire dalla relazione (3.33) data σ_{S_t} mentre $V_{\scriptscriptstyle \theta}$ è stimato in base all'equazione che lega il valore del capitale sociale con il valore dell'attivo aziendale

$$S_{0} = e^{-\int_{t}^{T_{M}} r_{u} du} E_{0}^{\mathbb{Q}} \left[g(V_{T_{M}}) \right] = e^{-\int_{t}^{T_{M}} r_{u} du} E_{0}^{\mathbb{Q}} \left[V_{T_{M}} - H_{T_{M}} \middle| \tau > T_{M} \right]. \tag{3.38}$$

Si ha perciò un sistema di M+2 equazioni in M+2 incognite:

$$CDS_{0,i}(0, R_i, LGD) = 0 i = 1, ..., M$$

$$e^{-\int_t^{T_M} r_u du} E_0^{\mathbb{Q}} \left[V_{T_M} - H_{T_M} \middle| \tau > T_M \right] = S_0$$

$$\sigma_{Vt} V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t} = \sigma(t, S_t)$$

$$(3.39)$$

3.4 Applicazione e risultati empirici

È noto che il moto browniano geometrico del modello BSM non è sufficientemente elastico per calibrare le opzioni quotate in uno specifico mercato (si veda ad esempio Hagan et al. (2002) o Brigo e Mercurio (2002)). In particolare, l'ipotesi di una volatilità costante da utilizzare per valutare le opzioni con uno stesso sottostante nella maggior parte dei casi è fallimentare. Infatti nei mercati reali si osservano particolari forme per la superficie di volatilità delle opzioni, spesso denominate con i termini "skew" o "smile". Il termine skew (Figura 3.1) è usato per indicare una struttura per la quale le volatilità implicite per opzioni con bassi strike sono più alte di quelle con strike alti e tale effetto è molto comune nei mercati delle opzioni su azioni. Il termine smile (Figura 3.2) è invece usato per indicare quelle strutture per le quali la volatilità implicita ha valore minimo intorno al prezzo forward del sottostante ed molto comune nei mercati delle opzioni su tassi di cambio e di interesse.

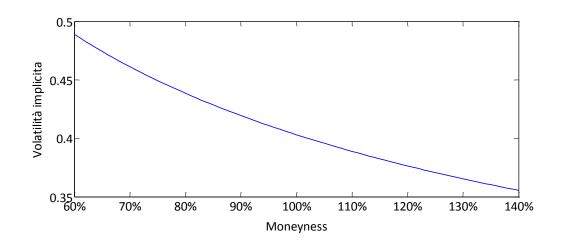


Figura 3.1. Volatility skew.

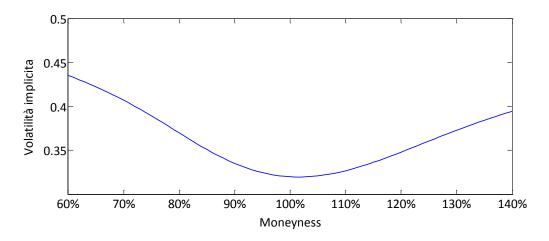


Figura 3.2. Volatility smile.

Nel contesto dei modelli strutturali in generale le scadenze prese in considerazione sono generalmente superiori all'anno. Per queste scadenze le superfici di volatilità delle opzioni su azione mostrano quasi sempre una struttura del tipo skew. Per cogliere tale effetto e calibrare i prezzi di opzioni con scadenza compresa fra l'anno e i due anni (eventualmente si può facilmente considerare la scadenza 6 mesi nel caso volessimo includere anche il CDS alla stessa scadenza) si è scelto il displaced diffusion model introdotto da Brigo e Mercurio (2000). Gli autori considerano un particolare processo stocastico per il sottostante azionario S_i :

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma_{S_t} (S_t - \alpha e^{r_t t}) d\overline{z}_t \qquad (3.40)$$

per il quale la distribuzione a scadenza di S_T , condizionatamente a S_t , è una lognormale asimmetrica. Per questa tipologia di modello è possibile ottenere un'espressione in forma chiusa per il prezzo O_t di opzioni di tipo europeo, con scadenza T e strike price $K > \alpha e^{r_t t}$

$$\begin{split} O_t &= \omega \Bigg[(S_t - \alpha e^{r_t t}) N \Bigg[\omega \frac{\ln \frac{S_t - \alpha e^{r_t t}}{K - \alpha e^{r_t t}} + \int_t^T \bigg(r_u + \frac{1}{2} \sigma_{S_u} \bigg) du}{\sqrt{\int_t^T \sigma_{S_u}^2 du}} \Bigg] \\ &- (K - \alpha e^{r_t T}) e^{r_t (T - t)} N \Bigg[\omega \frac{\ln \frac{S_t - \alpha e^{r_t t}}{K - \alpha e^{r_t t}} + \int_t^T \bigg(r_u - \frac{1}{2} \sigma_{S_u} \bigg) du}{\sqrt{\int_t^T \sigma_{S_u}^2 du}} \Bigg] \Bigg], \end{split} \tag{3.41}$$

dove $\omega=1$ è per un'opzione call e $\omega=-1$ è per una put. I parametri σ_{S_t} e α possono essere perciò ricavati calibrando le opzioni di tipo europeo con scadenza superiore all'anno, ad esempio minimizzando la somma degli errori percentuali al quadrato:

$$\hat{\alpha}, \hat{\sigma}_{S_t} \quad \leftrightarrow \quad \min_{\alpha, \sigma_{S_t}} \sum \left(\frac{O_0(S_0, \alpha, \sigma_{S_t}) - O_0^{MKT}}{O_0^{MKT}} \right)^2 \tag{3.42}$$

dove ${\cal O}_0^{MKT}$ è il prezzo di mercato dell'opzione.

Uno volta identificata la corretta specificazione del processo stocastico (3.40) è possibile procedere con l'ottimizzazione per ricavare i parametri $V_0\,,\;\sigma_{V_t}\,\in\,\beta_i$

$$\begin{split} \hat{V_0}, \hat{\sigma}_{V_t}, \hat{\beta}_i \quad & \longleftrightarrow \quad \begin{cases} CDS_{0,i}(0, R_i, LGD) = 0 & i = 1, \dots, M \\ e^{-\int_t^{T_M} r_u du} E_0^{\mathbb{Q}} \left[V_{T_M} - H_{T_M} \left| \tau > T_M \right. \right] = S_0 \,. \\ \sigma_{V_t} V_t \frac{\partial S_t}{\partial V_t} = \sigma_{S_t} (S_t - \alpha e^{r_t t}) \end{cases} \tag{3.43} \end{split}$$

Per valutare la bontà di questo nuovo modello strutturale è stata condotta un'analisi sulla banca d'investimento Morgan Stanley durante il periodo della crisi finanziaria iniziata nel 2007.

La prima data analizzata è quella del 10 ottobre 2007, quasi un anno prima del fallimento della banca Lehman Brothers, la seconda è il 10 ottobre 2008, un mese successivo al fallimento, la terza è il 10 ottobre 2009.

3.4.1 Calibrazione sui CDS su Morgan Stanley: 10 ottobre 2007

In questa data, nonostante fosse scoppiata la bolla dei sub-prime, la situazione nei mercati finanziari era relativamente tranquilla. Il titolo Morgan Stanley quotava sul NYSE a \$67.53 per azione, la superficie di volatilità delle opzioni europee quotate mostrava valori compresi nel range

28%-40% (vedi Figura 3.3) e la struttura a termine dei CDS spread presentava valori relativamente bassi.

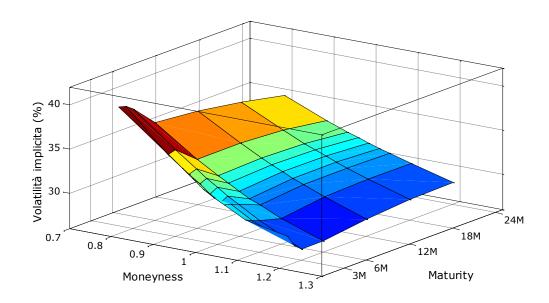


Figura 3.3. Superficie di volatilità al 10 ottobre 2007 per opzioni call e put di tipo europeo quotate scritte sul titolo Morgan Stanley (Fonte: Bloomberg).

Calibrando il processo (3.40) sui prezzi delle opzioni su azione quotate per le scadenze 1 anno e 2 anni si ottengono i parametri riportati nella Tabella 3.1, dove per semplicità σ_{S_t} è una funzione che si assume costante dopo il secondo anno.

Parametri stimati	1 anno	2 anni
σ_{S_t}	5.04%	4.86%
α	-5	
RMSE	1.22%	
Tempo di calcolo	$0.5 \sec$	
	·	<u> </u>

Tabella 3.1. Parametri σ_{S_t} e α stimati al 10 ottobre 2007.

Individuata la parametrizzazione del processo stocastico di S_t si può procedere con quella relativa ai processi V_t e H_t prendendo in considerazione la struttura a termine dei CDS quotati. Durante la calibrazione si è tenuto conto di un recovery rate pari a Rec = 40% ed un valore iniziale di H_t pari a $H = \operatorname{Rec} V_0$, in accordo con lo standard del mercato dei CDS. Come confronto si riportano nella Tabella 3.2 le probabilità di sopravvivenza ottenute calibrando un modello in forma ridotta con intensità deterministica costante a tratti $\mathbb{Q}(\tau > t) = \exp\left(-\int_0^t \lambda(u) du\right).$

T_{i}	R_i (bp)	$\lambda_{\scriptscriptstyle t}$	\mathbb{Q}^{λ}	H_t	\mathbb{Q}^{MOD}	Err CDS
1Y	30.36	0.5%	99.5%	47.1	99.49%	-1.8E-15
3Y	26.8	0.41%	98.68%	25.46	98.69%	-1.7E-14
5Y	42.57	1.16%	96.42%	34.14	96.38%	-2.2E-14
7Y	40.88	0.59%	95.29%	24.6	95.27%	-2.6E-14
10Y	43.27	0.84%	92.91%	29.16	92.85%	-2.3E-14

Tabella 3.2. Risultati calibrazione del 10 ottobre 2007 (tempo di calcolo: 8.5 sec) per le scadenze 1, 3, 5, 7 e 10 anni. \mathbb{Q}^{λ} è la probabilità di default del modello in forma ridotta, \mathbb{Q}^{MOD} è la probabilità di default del modello strutturale ed "Err CDS" è l'errore di valutazione dei CDS nel modello strutturale.

I parametri V_0 e σ_{V_t} associati al processo dell'attivo aziendale ottenuti dalla procedura di calibrazione sono riportati nella Tabella 3.3.

Parametri stimati	1Y	2Y
σ_{V_t}	22.72%	21.94%
V_0	85.63	

Tabella 3.3. Parametri σ_{V_t} e V_0 stimati al 10 ottobre 2007.

3.4.2 Calibrazione sui CDS su Morgan Stanley: 10 ottobre 2008

In questa data, circa un mese dopo il fallimento della banca d'affari Lehman Brothers, la situazione dei mercati finanziari mostrava forti segnali di tensione. Il titolo di Morgan Stanley era crollato a \$9.68 per azione, la superficie di volatilità mostrava valori nel range 156%-440% (Figura 3.4) e la struttura a termine dei CDS valori molto elevati.

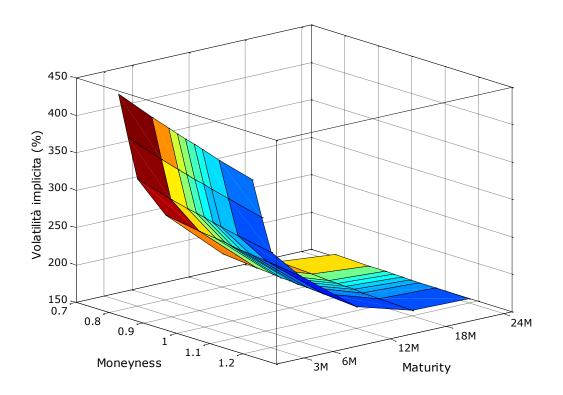


Figura 3.4. Superficie di volatilità al 10 ottobre 2008 per opzioni call e put di tipo europeo scritte sul titolo Morgan Stanley (Fonte: Bloomberg).

Analogamente alla data precedente si riportano i risultati nella Tabella 3.4 e nella Tabella 3.5.

Parametri stimati	1Y	2Y
σ_{St}	142.6%	92.07%
α	-0.24	
RMSE	0.5%	
Tempo di calcolo	$0.2~{ m sec}$	

Tabella 3.4. Parametri σ_{S_t} e α stimati al 10 ottobre 2008.

T_{i}	R_i (bp)	λ_t	\mathbb{Q}^{λ}	H_t	\mathbb{Q}^{MOD}	Err CDS
1Y	2221	37.0%	69.08%	0.51	70.1%	1.42E-14
3Y	1498	16.1%	50.10%	0.64	49.9%	0.00E+00
5Y	1240	10.1%	40.93%	0.23	41.1%	-7.11E-15
7Y	1114	8.9%	34.26%	0.17	34.3%	-1.42E-14
10Y	983	5.5%	29.05%	0.04	29.2%	-7.11E-15

Tabella 3.5. Risultati calibrazione del 10 ottobre 2008 (tempo di calcolo: 18 secondi) per le scadenze 1, 3, 5, 7 e 10 anni. \mathbb{Q}^{λ} è la probabilità di default del modello in forma ridotta, \mathbb{Q}^{MOD} è la probabilità di default del modello strutturale ed"Err CDS" è l'errore di valutazione dei CDS nel modello strutturale.

I parametri V_0 e σ_{V_t} associati al processo dell'attivo aziendale ottenuti dalla procedura di calibrazione sono riportati nella Tabella 3.6.

Parametri stimati	1Y	2Y
σ_{V_t}	144.97%	93.59%
V_{0}	10.01	

Tabella 3.6. Parametri $\,\sigma_{V_t}\,$ e $\,V_0\,$ stimati al 10 ottobre 2008.

3.5.3 Calibrazione sui CDS su Morgan Stanley: 10 ottobre 2009

Un anno dopo il default di Lehman Brothers la situazione nei mercati finanziari ha visto rientrare gran parte della tensione che si era vista nei mesi più critici della crisi finanziaria. Il titolo Morgan Stanley aveva recuperato gran parte del valore e quotava \$32.09 per azione. La superficie di volatilità delle opzioni su azione mostrava valori nel range 45%-51% e la struttura a termine dei CDS aveva valori molto più contenuti rispetto al precedente anno.

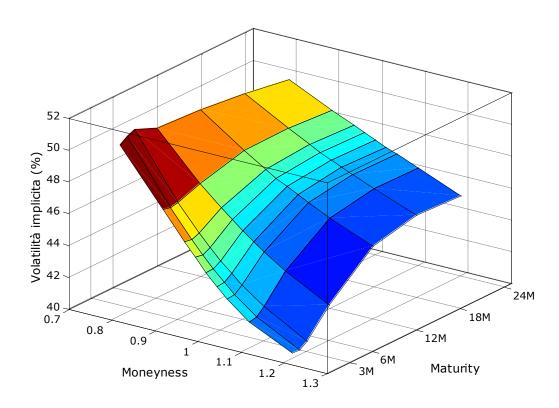


Figura 3.5. Superficie di volatilità al 10 ottobre 2009 per opzioni call e put di tipo europeo scritte sul titolo Morgan Stanley (Fonte: Bloomberg).

Analogamente alla data precedente si riportano i risultati nella Tabella 3.7 e nella Tabella 3.8.

Parametri stimati	1Y	2Y
$\sigma_{S_{t}}$	21.68%	21.42%
α	-1.15	
RMSE	0.25%	
Tempo di calcolo	$0.12 \sec$	

Tabella 3.7. Parametri σ_{S_t} e α stimati al 10 ottobre 2009.

T_i	R_i (bp)	$\lambda_{\scriptscriptstyle t}$	\mathbb{Q}^{λ}	H_t	\mathbb{Q}^{MOD}	Err CDS
1Y	130.83	2.2%	97.84%	14.96	97.83%	-5.3E-15
3Y	138.9	2.4%	93.29%	7.42	93.33%	-4.9E-15
5Y	150	2.8%	88.20%	7.63	88.19%	-7.1E-15
7Y	151.69	2.6%	83.72%	6.23	83.73%	-1.1E-14
10Y	154.4	2.7%	77.18%	6.04	77.18%	-1.1E-14

Tabella 3.8. Risultati calibrazione del 10 ottobre 2009 (tempo di calcolo: 5,5 secondi) per le scadenze 1, 3, 5, 7 e 10 anni. \mathbb{Q}^{λ} è la probabilità di default del modello in forma ridotta, \mathbb{Q}^{MOD} è la probabilità di default del modello strutturale ed "Err CDS" è l'errore di valutazione dei CDS nel modello strutturale.

I parametri V_0 e σ_{V_t} associati al processo dell'attivo aziendale ottenuti dalla procedura di calibrazione sono riportati nella Tabella 3.8.

Parametri stimati	1Y	2Y
σ_{V_t}	37.2%	36.75.32%
V_0	37.15	

Tabella 3.9. Parametri σ_{V_t} e V_0 stimati al 10 ottobre 2009.

3.5. Commenti finali

Il modello strutturale proposto in questo capitolo, a differenza degli altri modelli presenti in letteratura, è contemporaneamente coerente con il mercato delle opzioni e quello dei credit default swap, anche in situazioni di forte tensione nei mercati finanziari.

Tipicamente i modelli strutturali sono stati criticati perché non in grado di calibrare gli spread creditizi per le scadenze più brevi. L'introduzione di una barriera deterministica non costante ha permesso di superare questo problema senza perdere di vista il significato economico del default.

Inoltre l'utilizzo del metodo CKL proposto nel secondo capitolo consente di ottenere tempi di calcolo estremamente ridotti uniti ad una precisione in termini di calibrazione pressoché assoluta, come testimoniato da una applicazione su Morgan Stanley in un intervallo temporale relativo al fallimento di Lehman Brothers.

Appendice A

Distribuzione del massimo e del minimo per un moto browniano

Dato il processo di Wiener W_t , definito nello spazio di probabilità $(\Omega,\mathbb{F},\mathbb{P})\,,\ \mathrm{sia}\ M_t^W = \max_{u\in \left[0,t\right]} W_u \ \mathrm{e}\ m_t^W = \min_{u\in \left[0,t\right]} W_u\,.\ \mathrm{Il}\ \mathrm{seguente}\ \mathrm{risultato},$

noto anche come principio di riflessione, è una conseguenza della proprietà forte di Markov (Harrison (1985) o Karatzas e Shreve (1991)).

Lemma A.1. La relazione

$$\mathbb{P}\left\{W_t \leq x, M_t^W \geq y\right\} = \mathbb{P}\left\{W_t \geq 2y - x\right\} = \mathbb{P}\left\{W_t \leq x - 2y\right\},$$

 $\grave{e}\ valida\ per\ ogni\ t>0, y\geq 0\ \ e\ \ x\leq y\,.$

Si consideri adesso il seguente moto browniano aritmetico

$$X_t = \nu t + \sigma W_t$$

dove $\sigma > 0$ e ν sono costanti reali. Sia $M_t^X = \max_{u \in \left[0,t\right]} X_u$ e $m_t^X = \min_{u \in \left[0,t\right]} X_u$.

Lemma A.2. Per ogni t > 0, la distribuzione congiunta di X_t e M_t^X è

$$\mathbb{P}\left\{X_t \leq x, M_t^X \geq y\right\} = e^{2\nu y \sigma^{-2}} \mathbb{P}\left\{X_t \geq 2y - x + 2\nu t\right\},$$

 $per\ ogni\ x,y\in\mathbb{R}\ tali\ che\ y\geq 0\ e\ x\leq y\,.$

Dimostrazione. Dato che

$$I := \mathbb{P} \Big\{ X_t \leq x, M_t^X \geq y \Big\} = \mathbb{P} \Big\{ X_t^{\sigma} \leq x \; / \; \sigma, M_t^{X^{\sigma}} \geq y \; / \; \sigma \Big\},$$

dove $X_t^{\sigma} = \nu t / \sigma + W_t$, quindi senza perdita di generalità si può assumere che $\sigma = 1$. Applicando il teorema di Girsanov si ha che X_t è un processo di Wiener sotto la misura di probabilità $\hat{\mathbb{P}}$ definita su (Ω, \mathcal{F}_T) definendo $(\sigma = 1)$

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = e^{-\nu W_T - \nu^2 T/2} .$$

Si ha perciò

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}} = e^{\nu W_T + \nu^2 T/2} = e^{\nu X_T - \nu^2 T/2},$$

e quindi

$$I = E^{\hat{\mathbb{P}}}\Bigg(e^{\nu X_T - \nu^2 T/2} \mathbf{1}_{\left\{X_t \leq x, M_t^X \geq y\right\}}\Bigg).$$

Dato che X_t è un processo di Wiener sotto la misura di probabilità $\hat{\mathbb{P}}$, applicanco il lemma A.1 si ottiene

$$\begin{split} I &= E^{\hat{\mathbb{P}}} \Bigg(e^{\nu(2y - X_T) - \nu^2 T/2} \mathbf{1}_{\Big\{2y - X_t \leq x, M_t^X \geq y\Big\}} \Bigg) \\ &= E^{\hat{\mathbb{P}}} \Bigg(e^{\nu(2y - X_T) - \nu^2 T/2} \mathbf{1}_{\Big\{X_t \geq 2y - x\Big\}} \Bigg) \\ &= e^{2\nu y} E^{\hat{\mathbb{P}}} \Bigg(e^{\nu(2y - X_T) - \nu^2 T/2} \mathbf{1}_{\Big\{X_t \geq 2y - x\Big\}} \Bigg), \end{split}$$

dato che $2y-x\geq y$. Defiendo un'altra misura di probabilità equivalente $\tilde{\mathbb{P}}$ con

$$\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\hat{\mathbb{P}}} = e^{-\nu X_T - \nu^2 T/2} \,,$$

risulta

$$\begin{split} I &= e^{2\nu y} E^{\hat{\mathbb{P}}} \bigg(e^{\nu (2y - X_T) - \nu^2 T/2} \mathbf{1}_{\left\{X_t \geq 2y - x\right\}} \bigg) \\ &= e^{2\nu y} E^{\tilde{\mathbb{P}}} \bigg(\mathbf{1}_{\left\{X_t \geq 2y - x\right\}} \bigg) = e^{2\nu y} \tilde{\mathbb{P}} \left\{X_t \geq 2y - x\right\}. \end{split}$$

Inoltre, il processo $\tilde{W_t} = X_t + \nu t$ è un processo di Wiener sotto la misura di probabilità $\tilde{\mathbb{P}}$ e così si ha

$$\begin{split} I &= e^{2\nu y} \tilde{\mathbb{P}} \left\{ \tilde{W_t} + \nu t \geq 2y - x + 2\nu t \right\} \\ &= e^{2\nu y} \mathbb{P} \left\{ X_t \geq 2y - x + 2\nu t \right\}. \end{split}$$

Il seguente corollario è una conseguenza del lemma A.2.

Corollario A.1. Per ogni $x,y\in\mathbb{R}$, tali che $y\geq 0~e~x\leq y$, si ha

$$\mathbb{P}\left\{X_t \leq x, M_t^X \geq y\right\} = e^{2\nu y \sigma^{-2}} N\bigg(\frac{x-2y-\nu t}{\sigma \sqrt{t}}\bigg).$$

Quindi,

$$\mathbb{P}\Big\{X_t \leq x, M_t^X \leq y\Big\} = N\Bigg(\frac{x - \nu t}{\sigma \sqrt{t}}\Bigg) - e^{2\nu y \sigma^{-2}} N\Bigg(\frac{x - 2y - \nu t}{\sigma \sqrt{t}}\Bigg).$$

Dimostrazione. Per la prima relazione, si può notare

$$\mathbb{P}\left\{X_t \geq 2y - x + 2\nu t\right\} = \mathbb{P}\left\{-\sigma W_t \geq x - 2y - \nu t\right\} = N\bigg(\frac{x - 2y - \nu t}{\sigma\sqrt{t}}\bigg),$$

dato che $-\sigma W_t$ è distribuito secondo una normale con media zero e varianza $\sigma^2 t$. Per il lemma A.2 è sufficiente osservare che

$$\mathbb{P}\left\{X_{t} \leq x, M_{t}^{X} \leq y\right\} + \mathbb{P}\left\{X_{t} \leq x, M_{t}^{X} \geq y\right\} = \mathbb{P}\left\{X_{t} \leq x\right\}$$

e applicare il lemma A.1.

Dato che

$$\mathbb{P}\left\{\boldsymbol{M}_{t}^{X} \geq \boldsymbol{y}\right\} = \mathbb{P}\left\{\boldsymbol{X}_{t} \geq \boldsymbol{y}\right\} + \mathbb{P}\left\{\boldsymbol{X}_{t} \leq \boldsymbol{y}, \boldsymbol{M}_{t}^{X} \geq \boldsymbol{y}\right\}$$

per ogni $y \ge 0$, quindi

$$\mathbb{P}\left\{M_t^X \geq y\right\} = \mathbb{P}\left\{X_t \geq y\right\} + e^{2\nu y \sigma^{-2}} \mathbb{P}\left\{X_t \geq y + 2\nu t\right\}.$$

Conseguentemente,

$$\mathbb{P}\left\{M_t^X \leq y\right\} = 1 - \mathbb{P}\left\{M_t^X \geq y\right\} = \mathbb{P}\left\{X_t \leq y\right\} - e^{2\nu y \sigma^{-2}} \mathbb{P}\left\{X_t \geq y + 2\nu t\right\}.$$

Si è ottenuto, quindi, il seguente corollario.

Corollario A.2. La seguente relazione è valida per ogni $y \ge 0$

$$\mathbb{P}\left\{M_t^X \leq y\right\} = N\bigg(\frac{y - \nu t}{\sigma \sqrt{t}}\bigg) - e^{2\nu y \sigma^{-2}} N\bigg(\frac{-y - \nu t}{\sigma \sqrt{t}}\bigg).$$

Passando alla distribuzione del valore minimo di X_t , si può osservare che per ogni $y \leq 0$ si ha

$$\mathbb{P}\left\{\max_{u\in[0,t]} \left(\sigma W_u - \nu u\right) \geq -y\right\} = \mathbb{P}\left\{\min_{u\in[0,t]} \left(-\sigma W_u + \nu u\right) \leq y\right\} = \mathbb{P}\left\{\min_{u\in[0,t]} X_u \leq y\right\}.$$

Conseguentemente, per ogni $y\leq 0$ si ha
 $\mathbb{P}\Big\{m_t^X\leq y\Big\}=\mathbb{P}\Big\{M_t^{\overline{X}}\geq -y\Big\},$ dove $\overline{X}_t=\sigma W_t-vt\,.$

Corollario A.3. La distribuzione congiunta di (X_t, m_t^X) soddisfa la seguente relazione

$$\mathbb{P}\left\{X_t \geq x, m_t^X \geq y\right\} = N \left(\frac{-x + \nu t}{\sigma \sqrt{t}}\right) - e^{2\nu y \sigma^{-2}} N \left(\frac{2y - x + \nu t}{\sigma \sqrt{t}}\right)$$

per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, tali che $y \le 0$ e $y \le x$.

Corollario A.4. Per ogni $y \le 0$, la seguente relazione è valida

$$\mathbb{P}\Big\{m_t^X \geq y\Big\} = N\Bigg(\frac{-y + \nu t}{\sigma\sqrt{t}}\Bigg) - e^{2\nu y\sigma^{-2}}N\Bigg(\frac{y + \nu t}{\sigma\sqrt{t}}\Bigg).$$

Appendice B

Legge del first passage time in presenza di parametri non costanti

Lemma B.1. Dato il geometrico processo di Ito, definito su $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$,

$$dX_t = \mu_t X_t dt + \sigma_t X_t dW_t, \quad X_0 > 0$$

ed il processo deterministico

$$dH_t = \left(\mu_t - \frac{(1+2\beta)}{2}\sigma_t^2\right)H_t dt, \quad H_0 > 0 \,,$$

si definisce il first passage time τ di X_t ad H_t come $\tau = \inf \left\{ t \geq 0 : X_t \leq H_t \right\} \ e \ la \ sua \ distribuzione \ \grave{e}$

$$\mathbb{P}\left\{\tau > t\right\} = N \left(\frac{\ln \frac{X_0}{H_0} + \beta \int\limits_0^t \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int\limits_0^t \sigma_u^2 du}}\right) - \left(\frac{H_0}{X_0}\right)^{2\beta} N \left(\frac{\ln \frac{H_0}{X_0} + \beta \int\limits_0^t \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int\limits_0^t \sigma_u^2 du}}\right).$$

 $Dimostrazione. \text{ Si consideri } Y_t = \ln \frac{X_t}{H_t} \text{ tale per cui } \tau = \inf \left\{ t \geq 0 : Y_t \leq 0 \right\}.$

Applicando il lemma di Itô si ottiene

$$dY_t = \beta \sigma_t^2 dt + \sigma_t dW_t.$$

Il processo di Y_t è ancora un aritmetico processo di Ito con parametri non costanti. Per ovviare a questo problema è possibile considerare il seguente cambiamento di tempo deterministico $A_t:[0,T]\to\mathbb{R}_+$ associato ad Y_t

$$A_t = \int_0^t \sigma_u^2 du, \qquad \forall t \in [0, T].$$

Sia $A_t^{-1}:[0,A_T]\to[0,T]$, allora il processo $\tilde{Y_t}=Y_{A_t^{-1}}$ è uno moto browniano aritmetico con drift pari a β e coefficiente di diffusione unitario

$$\label{eq:distance_to the formula} d\tilde{Y_t} = \beta dt + dW_t, \qquad \forall t \in [0, A_T],$$

e valore iniziale \tilde{Y}_0 . A questo punto è possibile ricavare la legge di τ dalla distribuzione del minimo di Y_t (si veda il corollario A.4)

$$\begin{split} \mathbb{P}\left\{\tau > t\right\} &= N \Bigg(\frac{Y_0 + \beta t}{\sqrt{t}}\Bigg) - e^{2\beta Y_0} N \Bigg(\frac{-Y_0 + \beta t}{\sqrt{t}}\Bigg) \\ &= N \Bigg(\frac{\ln \frac{X_0}{H_0} + \beta \int\limits_0^t \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int\limits_0^t \sigma_u^2 du}}\Bigg) - \left(\frac{H_0}{X_0}\right)^{2\beta} N \Bigg(\frac{\ln \frac{H_0}{X_0} + \beta \int\limits_0^t \sigma_u^2 du}{\sqrt{\int\limits_0^t \sigma_u^2 du}}\Bigg). \end{split}$$

Corrollario B.1. La distribuzione congiunta di X_t e τ è (si veda il corollario A.3)

$$\begin{split} \mathbb{P}\left\{Y_{t}>y,\tau>t\right\} &= N\bigg(\frac{-y+Y_{0}+\beta t}{\sqrt{t}}\bigg) - e^{2\beta Y_{0}} N\bigg(\frac{-y-Y_{0}+\beta t}{\sqrt{t}}\bigg) \\ &= N \left(\frac{\ln\frac{H_{t}}{x} + \ln\frac{X_{0}}{H_{0}} + \beta\int\limits_{0}^{t}\sigma_{u}^{2}du}{\sqrt{\int\limits_{0}^{t}\sigma_{u}^{2}du}}\right) - \bigg(\frac{H_{0}}{X_{0}}\bigg)^{2\beta} N \left(\frac{\ln\frac{H_{t}}{x} + \ln\frac{H_{0}}{X_{0}} + \beta\int\limits_{0}^{t}\sigma_{u}^{2}du}{\sqrt{\int\limits_{0}^{t}\sigma_{u}^{2}du}}\right). \end{split}$$

Riferimenti bibliografici

- Aitsahlia, F., Lai, T. (1998) 'Random walk duality and the valuation of discrete lookback options', Applied Mathematical Finance 5, 227-240.
- Alexander, C. (2008) 'Market Risk Analysis: Volume II Practical Financial Econometrics', John Wiley & Sons, Chichester.
- Amin, K., Khanna, A. (1994) 'Convergence of American Option Values from Discrete to Continuous-Time Financial Models', Mathematical Finance 4, 289-304.
- Atkinson, C., Fusai, G. (2007) 'Discrete extrema of Brownian motion and pricing of exotic options', Journal of Computational Finance 10, 1-43.
- Bielecki, T., Rutkowski, M. (2001) 'Credit risk: Modeling, Valuation and Hedging', Springer Verlag, Berlin.
- Björk, T. (1998) 'Arbitrage Theory in Continuous Time', Oxford University Press, New York.
- Black, F., Cox, J. (1976) 'Valuing corporate securities: Some effects of bond indenture provisions', Journal of Finance 31, 351-376.
- Black, F., Scholes, M. (1973) 'The Pricing of Options and Corporate Liabilities', Journal of Political Economy 81, 637–654.
- Boyle, P. (1977) 'A Lattice Framework for Option Pricing with Two State Variables', Journal of Financial and Quantitative Analysis 35, 1–12.

- Brennan, M., Schwartz, E. (1978) 'Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Contingent Claims: A Synthesis', Journal of Financial and Quantitative Analysis 13, 461-474.
- Brigo, D., Mercurio, F. (2000) 'Fitting volatility skews and smiles with analytical stock-price models', Working Paper.
- Brigo, D., Mercurio, F. (2002) 'Lognormal-Mixture Dynamics and Calibration to Market Volatility Smiles', International Journal of Theoretical & Applied Finance 5, 427-446.
- Brigo, D., Mercurio, F. (2006) 'Interest Rate Models: Theory and Practice- with Smile, Inflation and Credit', Springer Verlag, Heidelberg.
- Brigo, D., Tarenghi, M. (2004) 'Credit Default Swap Calibration and Equity Swap Valuation under Counterparty Risk with a Tractable Structural Model', Proceedings of the FEA 2004 Conference at MIT.
- Brigo, D., Morini, M., Tarenghi, M. (2009) 'Credit Calibration with Structural Models: The Lehman Case and Equity Swaps under Counterparty Risk', Working Paper.
- Briys, E., de Varenne, F. (1997) 'Valuing risky fixed rate debt: An extension', Journal of Financial and Quantitative Analysis 32, 239-248.
- Broadie, M., Glasserman, P., (1997) 'Pricing American-style securities using simulation', Journal of Economic Dynamics and Control 21, 1323-1352.

- Broadie, M., Glasserman, P., Kou, S. (1997) 'A continuity correction for discrete barrier options', Mathematical Finance 7, 325–349.
- Broadie, M., Glasserman, P., Kou, S. (1999) 'Connecting discrete and continuous path-dependent options', Finance and Stochastics 3, 55-82.
- Brooks, C. (2008) 'Introductory Econometrics for Finance', Cambridge University Press, Cambridge.
- Cenci, M., Gheno, A. (2005) 'Equity and debt valuation with default risk: a discrete structural model', Applied Financial Economics 15, 875-881.
- Conze, R., Viswanathan, A., (1991) 'Path Dependent Options: The Case of Lookback Options', Journal of Finance 46, 1893-1907.
- Cox, J., Ingersoll, J., Ross, S. (1985) 'A Theory of the Term Structure of Interest Rates', Econometrica 53, 385-408.
- Cox, J., Ross, S., Rubinstein, M. (1979) 'Option Pricing: a Simplified Approach', Journal of Financial Economics 7, 229–264.
- Cox, J., Rubinstein, M. (1985) 'Options Markets', Prentice Hall, Englewoods Cliffs N.J..
- Dixit, A., Pindyck, R. (1994) 'Investment Under Uncertainty', Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Duffie, D. (2001) 'Dynamic Asset Pricing Theory', Princeton University Press, Princeton, NJ.

- Duffie, D., Singleton, K. (1999) 'Modeling term structures of defaultable bonds', Review of Financial Studies 12, 687-720.
- Fama, E. (1965) 'The Behavior of Stock Prices', Journal of Business 38, 34-105.
- Fusai, G., Recchioni, M.C. (2007) 'Analysis of quadrature methods for pricing discrete barrier options', Journal of Economic Dynamics and Control 31, 826-860.
- Gatheral, J. (2006) 'The Volatility Surface: A Practitioner's Guide', John Wiley & Sons, New York?
- Geske, R. (1979) 'The Valuation of Compound Options', Journal of Financial Economics 7, 63-81.
- Goldman, H., Sosin, H., Gatto, M., (1979a) 'Path Dependent Options: Buy at the Low, Sell at the High', Journal of Finance 34, 1111-1127.
- Goldman, M., Sosin, H., Shepp, L. (1979b) 'On contingent claims that insure ex-post optimal stock market timing', Journal of Finance 34, 401-414.
- Hagan, P., Kumar, D., Lesniewski, A., Woodward, D. (2002) 'Managing smile risk', Wilmott Magazine, 84–108.
- Harrison, J. (1985) 'Brownian Motion and Stochastic Flow Systems', John Wiley & Sons, New York.
- Harrison, M., Kreps, D. (1979) 'Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets', Journal of Economic Theory 20, 381-408.

- Harrison, M., Pliska, S. (1981) 'Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading', Stochastic Processes and Their Application 11, 215-260.
- Heynen, R., Kat, H. (1994) 'Crossing barriers', Risk 7, 46-51.
- Horasanli, M. (2007) 'A comparison of lattice based option pricing models on the rate of convergence', Applied Mathematics and Computation 184, 649-658.
- Hsu, J., Saa-Requejo, J., Santa-Clara, P. (2010) 'A Structural Model of Default Risk', Journal of Fixed Income 19, 77-94.
- Hull, J. (2003) 'Options, Futures and Other Derivatives', Prentice-Hall, Upple Saddle River, NJ.
- Itô, K. (1951) 'On Stochastic Differential Equations", Memoirs, American Mathematical Society 4, 1-51.
- Jaillet, P., Lamberton, D., Lapeyre, B. (1990) 'Variational Inequalities and the Pricing of American Options', Acta Applicandae Mathematicae 21, 263-289.
- Jarrow, R., Turnbull, S. (1995) 'Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk', Journal of Finance 50, 53-85.
- Karatzas, I., Shreve, S. (1991) 'Brownian Motion and Stochastic Calculus', Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York.
- Kou, S. (2003) 'On pricing of discrete barrier options', Statistica sinica 13, 955-964.

- Kou, S. (2008) 'Discrete Barrier and Lookback Options', in: J. Birge, V. Linetsky (Eds.), Handbooks in OR & MS 15, Elsevier B. V., Amsterdam, 343-373.
- Lando, D. (1998) 'On Cox processes and credit risky securities', Review of Derivatives Research 2, 99-120.
- Leisen, D., Reimer, M. (1996) 'Binomial models for option valuation examining and improving convergence', Applied Mathematical Finance 3, 319-346.
- Lintner, J. (1965) 'Security Prices, Risk and Maximal Gains From Diversification', Journal of Finance 20, 587-615.
- Lo, A., MacKinlay, A. (1999) 'A Non-Random Walk Down Wall Street',
 Princeton University Press.
- Lo, C., Lee, H., Hui, C. (2003) 'A Simple Approach for Pricing Barrier Options with Time-dependent Parameters', Quantitative Finance 3, 98-107.
- Madan, D., Unal, H. (1998) 'Pricing the risks of default', Review of Derivatives Research 2, 121-160.
- Malkiel, B. (1996) 'A Random Walk Down Wall Street', Norton, New York.
- Mandelbrot, B. (1963) 'The Variation of Certain Speculative Prices', Journal of Business 36, 394-414.

- Merton, R. (1973) 'Theory of Rational Option Pricing', Bell Journal of Economics and Management Science 4, 141–183.
- Merton, R. (1974) 'On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates', Journal of Finance, 29, 449–70.
- Merton, R. (1990) 'Continuous Time Finance', Blackwell, Oxford.
- Mossin, J. (1966) 'Equilibrium in a Capital Asset Market', Econometrica 35, 368-383.
- Nelson, D., Ramaswamy, K. (1990) 'Simple binomial processes as diffusion approximations in financial models', Review of Financial Studies 3, 393-430.
- O'Kane, K., Turnbull, S. (2003) 'Valuation of Credit Default Swaps',
 Working Paper, Fixed Income Quantitative Credit Research, Lehman
 Brothers
- Øksendal, B. (1992) 'Stochastic Differential Equations', Springer-Verlag, Berlin.
- Petrella, G., Kou, S. (2004) 'Numerical pricing of discrete barrier and lookback options via Laplace transforms', Journal of Computational Finance 8, 1-37.
- Rapisarda, F. (2003) 'Pricing Barriers on Underlyings with Timedependent Parameters', Working Paper.
- Rendleman, R., Bartter, B. (1979) 'Two-state option pricing', Journal of Finance 19, 1093-1109.

- Rubinstein, M. (1991) 'Double Trouble', Risk 5, 53-56.
- Rubinstein, M., Reiner, E. (1991) 'Breaking down the barriers', Risk 4, 28-35.
- Samuelson, P. (1965) 'Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly', Industrial Management Review 6, 13-31.
- Samuelson, P. (1973) 'Proof that Properly Discounted Present Values of Assets Vibrate Randomly', Bell Journal of Economics and Management Science 4, 369-374.
- Schwartz, E. (1977) 'The Valuation of Warrants: Implementing a New Approach', Journal of Financial Economics 4, 79-93.
- Schwartz, E. (1997) 'The Stochastic Behavior of Commodity Prices: Implications for Valuation and Hedging', Journal of Finance 52, 922-973.
- Sharpe, W. (1964) 'Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk', Journal of Finance 19, 425-442.
- Tavella, D., Randall, C. (2000) 'Pricing Financial Instruments The Finite Difference Method', John Wiley and Sons, New York.
- Trigeorgis, L. (1996). Real Options, MIT Press, Cambridge, Massachusetts
- Tse, W., Li, L., Ng, K. (2001) 'Pricing discrete barrier and hindsight options with the tridiagonal probability algorithm', Management Science 47, 383-393.

- Wilmott, P., Howison, S., Dewynne, J. (1993) 'The Mathematics of Financial Derivatives', Cambridge University Press, Cambridge.
- Zhang, X. (1997) 'Valuation of American Options in a Jump-Diffusion Model', Numerical Methods in Finance, Cambridge University Press, Cambridge, 93-114.