

**Le Grandi Coperture di Legno Massiccio Composte da Piccoli Pezzi.  
Modelli Computazionali per le Gridshell.**

**Dottoranda:  
Fabiana Riparbelli**



CORSO DI DOTTORATO DI RICERCA IN  
ARCHITETTURA: INNOVAZIONE E PATRIMONIO  
XXIX CICLO

Tesi di Dottorato

---

**Le Grandi Coperture di Legno Massiccio Composte da Piccoli Pezzi.  
Modelli Computazionali per le Gridshell.**

Dottoranda:  
*Fabiana Riparbelli*

Tutor:  
Prof. *Camillo Nuti*  
Prof. *Ginevra Salerno*

Co-Tutor:  
Prof. *Massimo Fragiacomò*

Coordinatore:  
Prof. *Elisabetta Pallottino*



## Indice

<b>Introduzione</b> .....	5
<b>Capitolo 01 Il Legno come Materiale da Costruzione</b> .....	9
1. Premessa.....	9
2. Caratteristiche del legno .....	10
2.1 Anisotropia del legno .....	12
2.2 Il comportamento igroscopico del legno .....	14
2.3 I “difetti “ del legno.....	16
2.4 Alterazioni biologiche.....	17
2.5 La resistenza a fuoco del legno .....	18
3. Elementi strutturali in legno massiccio: caratteristiche meccaniche.....	20
3.1 L’ortotropia del legno .....	24
3.2 L’igroscopicità del legno .....	26
3.3 L’incidenza dei difetti sugli elementi strutturali in legno .....	29
3.4 Riferimenti alla normativa.....	30
4. Le connessioni .....	30
5. Legno e derivati per uso strutturale.....	33
5.1 Legno lamellare incollato .....	37
6. Conclusioni.....	39
<b>Capitolo 02 Le Gridshell di Legno Massiccio</b> .....	41
1. Premessa: le strutture spaziali .....	41
1.1 Tipologie strutturali: shell e gridshell.....	41
1.2 La forma resistente .....	45
1.3 Forma e costruibilità.....	49
1.4 Il concetto di curvatura in relazione alla forma resistente .....	52
1.5 Curve sulle superfici e costruibilità.....	58
2. Gridshell in legno massiccio.....	60
2.1 La scelta del materiale .....	61
2.2 Gridshell pre-formate e gridshell post-formate.....	63
3. Casi studio .....	63
3.1 La Mannheim Multihalle .....	64

3.2	La Weald&Downland.....	68
3.3	Il Savill Building.....	71
3.4	Considerazioni e confronti.....	74
<b>Capitolo 03</b> Gli Aspetti Metodologici della Modellazione .....		77
1.	Premessa.....	77
2.	Inquadramento delle problematiche.....	77
3.	Iter procedurale .....	78
4.	Il layout dei prossimi capitoli.....	81
<b>Capitolo 04</b> Il Modello di Trave Omogenea Equivalente.....		85
1.	Premessa.....	85
2.	Risoluzione, con l'equazione differenziale della linea elastica, del problema flessionale.....	89
3.	Risoluzione, con l'equazione differenziale della linea elastica, del problema assiale.....	92
4.	Determinazione della geometria della sezione equivalente.....	94
5.	Modelli teorici relativi alle connessioni interne: determinazione dell'inerzia equivalente .....	95
5.1	Ipotesi 1: Caso flessionale, vincolo delle rotazioni relative.....	96
5.2	Ipotesi 2: Caso flessionale, vincolo di incastro interno .....	98
5.3	Ipotesi 3: Caso flessionale, vincolo degli spostamenti relativi.....	99
6.	Modelli teorici relativi alle connessioni interne: determinazione dell'area equivalente.....	103
6.1	Ipotesi 1: caso assiale (riferimento al par. 5.1).....	103
6.2	Ipotesi 2: caso assiale (riferimento al par. 5.2).....	104
6.3	Ipotesi 3: caso assiale (riferimento al par. 5.3).....	105
7.	Modellazione in SAP2000: confronto tra il modello dettagliato ed il modello equivalente .....	106
7.1	Ipotesi 1: verifica dell'equivalenza per stati di tensione omogenea.....	107
7.2	Ipotesi 2: verifica dell'equivalenza per stati di tensione omogenea.....	110
7.3	Ipotesi 3: verifica dell'equivalenza per stati di tensione omogenea.....	112
8.	Modellazione di un elemento trave composto di più moduli base .....	115
9.	Conclusioni.....	117
<b>Capitolo 05</b> Il Modello di Continuo Bidimensionale .....		119
1.	Introduzione.....	119
2.	Determinazione delle rigidzze equivalenti.....	120
2.1	Determinazione della rigidzza flessionale .....	122

2.2	Determinazione della rigidezza assiale .....	124
2.3	Determinazione della rigidezza tagliante.....	125
3.	Modellazione e verifica in SAP2000 .....	128
3.1	Momento flettente.....	129
3.2	Sforzo assiale.....	136
3.3	Taglio .....	140
4.	Conclusioni.....	143
<b>Capitolo 06</b> La Modellazione Multiscala di Strutture di Interesse Progettuale: Risultati Numerici ed Applicazioni .....		
		145
1.	Introduzione.....	145
2.	Il problema dell'equilibrio elastico di un arco doppiamente incernierato.....	145
3.	Arco semicircolare: soluzione analitica particolare del problema iperstatico .....	149
4.	Confronto tra i risultati analitici ed i risultati del modello numerico .....	151
5.	Il problema elastico degli archi ribassati.....	153
6.	Verifiche conclusive sul modello di arco continuo equivalente.....	156
7.	Esempi di strutture bidimensionali.....	159
7.1	Esempio piano.....	160
7.2	Superficie a singola curvatura spaziale .....	164
7.3	Superficie a doppia curvatura spaziale.....	167
7.4	Struttura dalla geometria complessa .....	170
8.	Commento ai risultati.....	173
9.	L'analisi non lineare per simulare il processo costruttivo .....	174
<b>Conclusioni.....</b>		<b>179</b>
<b>Bibliografia.....</b>		<b>181</b>



## Introduzione

Il tema della mia tesi di dottorato nasce da argomenti sviluppati durante lo svolgimento della tesi di laurea magistrale e maturati in questi ultimi tre anni, anni in cui ho chiarito a me stessa il desiderio di essere una progettista di Architettura che cerchi di far propri alcuni degli strumenti e dei metodi della moderna ingegneria strutturale, alcuni paradigmi della meccanica dei materiali e del *computational design*, per declinare in senso contemporaneo la *firmitas* vetruviana.

Fatta questa premessa, la partecipazione ad un Dottorato di Ricerca che utilizzi, in Architettura, le parole chiave di “Innovazione” e “Patrimonio” con una tesi interamente dedicata alla progettazione computazionale di grandi coperture gridshell di piccoli pezzi di legno massiccio, necessita di un pur sommario inquadramento.

Il tema delle grandi coperture attraversa tutto il XX secolo, adattando alle tecnologie del calcestruzzo armato e dell'acciaio l'eterno tema architettonico del rapporto tra la forma e la struttura.

Il XXI secolo si apre all'insegna delle grandi coperture in legno, per una serie di ragioni che comprendono: il rinnovato interesse verso questo materiale per sensibilità e sostenibilità ambientali; la capacità di adattamento dell'intero sistema produttivo delle costruzioni in legno alle tecnologie del BIM e della cultura digitale che attraversa l'Architettura contemporanea; lo sviluppo crescente di materiali in legno altamente ingegnerizzati, microstrutturati e/o nanostrutturati, sempre più competitivi in leggerezza intrinseca (rapporto resistenza/peso specifico del materiale) rispetto ad altri materiali di uso strutturale.

In particolare, le gridshell sono a forma di guscio per ovvi motivi di ottimizzazione strutturale, che impone per grandi luci un ricorso a morfologie curve per selezionare comportamenti prevalentemente di membrana rispetto a quelli flessionali. In aggiunta a ciò, la scelta di utilizzare il legno massiccio in piccoli pezzi è sostanzialmente finalizzata al recupero di una tradizione costruttiva che ha origini intorno al 1500 ed annovera tra i suoi seguaci personaggi del calibro di Leonardo da Vinci, Sebastiano Serlio e Philibert de L'Orme. Le ragioni costruttive per l'utilizzo dei piccoli pezzi sono, ora come allora, le medesime: la maggiore reperibilità del materiale, un processo costruttivo rapido ed efficiente e l'aumento statistico della resistenza del materiale per la possibilità di scartare a vista o risagomare a mano i pezzi difettosi, mantenendo elevata la leggerezza intrinseca dello stesso, pur non ricorrendo a materiali ingegnerizzati.

In sintesi, l'intera filiera delle specificità meccaniche che caratterizzano questa morfologia strutturale/costruttiva utilizza il linguaggio della leggerezza e della non invasività e, quindi, ben si presta ad essere impiegata in contesti in cui sia necessario coprire luci impegnative nel modo meno invasivo possibile (copertura di un'area archeologica, copertura di un bene del Patrimonio etc.).

Premesso ciò, il lavoro di tesi si concentra sulla modellazione meccanica di una generica gridshell a diverse scale di osservazione; ogni scala, dalla più dettagliata alla più rada, genera un modello meccanico caratterizzato da una sua specificità che, per qualche motivo, è necessario mantenere nella fase progettuale. Questi modelli devono equivalersi meccanicamente, ossia devono fornire spostamenti qualitativamente simili e



quantitativamente vicini quando soggetti a carichi uguali: devono quindi avere pressoché la medesima rigidità.

Questa idea che una stessa struttura possa essere modellata a varie scale, che ognuna delle scale abbia una sua specificità che deve essere mantenuta nel momento progettuale e che i diversi modelli debbano interagire ed essere comunque equivalenti, incontra un moderno paradigma della meccanica dei materiali e delle strutture, quello della “modellazione ed analisi multiscala”; questa, applicata al contesto in esame, può fornire al progettista differenti rappresentazioni dello stesso oggetto materiale e del relativo problema strutturale, ognuna delle quali ha un valore aggiunto da conservare.

Nel caso oggetto di questa tesi, la scala dettagliata presenta l’accuratezza della descrizione di ogni singolo pezzo di cui la struttura è composta e di ogni singolo nodo. A questa scala la modellazione numerica su SAP2000 consente di descrivere le sezioni, le lunghezze dei singoli pezzi di cui la struttura è composta, le caratteristiche meccaniche del materiale e fornisce un’ampia panoramica di vincoli relativi in grado di simulare il comportamento effettivo di diverse tipologie di connessione. Questa scala, a valle di una sperimentazione in laboratorio del sistema di connessione che verifichi la qualità della modellazione del vincolo relativo, è la scala deputata per un’analisi di dettaglio, ossia per il progetto esecutivo della struttura.

Nella scala più rada e sommaria, la gridshell è modellata come un guscio continuo e di piccolo spessore, con una rigidità membranale e flessionale derivanti dalla conoscenza della scala dettagliata e del suo comportamento meccanico. A questa scala più rada, la modellazione geometrica è oltremodo facilitata ed è agevole avere una stima sommaria degli sforzi di membrana in funzione di parametri geometrici globali (come la luce coperta) o locali (come la curvatura gaussiana); il relativo modello consente la gestione di errori progettuali macroscopici ed anche un primo dimensionamento dello spessore.

Alla scala intermedia la struttura è vista come un sistema di travi continue, ognuna delle quali equivalente ad una trave in piccoli pezzi, a sua volta descritta nel modello dettagliato, e tutte assieme equivalenti al modello rado. La necessità di questa scala intermedia nasce a causa delle imprecisioni della scala rada che, per le specificità del modello di guscio, presenta effetti di bordo in corrispondenza dei vincoli o delle singolarità di carico, che sporcano numericamente la soluzione. La scala intermedia è geometricamente facile da costruire, una volta decisa la forma della superficie, e presenta il vantaggio di essere più accurata del modello rado rispetto alla soluzione fornita da quello dettagliato, ma di più agevole soluzione rispetto a quest’ultimo; può essere quindi utilizzata dopo un primo dimensionamento, effettuato al livello della scala del continuo, per verificare che gli spostamenti effettivi siano contenuti.

Le tre scale di dettaglio trovano corrispondenza a tre diverse fasi della progettazione architettonica, rendendosi efficaci in un contesto di ricerca della forma, o *form-finding*. In questo ambito il processo computazionale sperimentato rappresenta non un sistema automatizzato, bensì un *sistema esperto*, il quale non prescinde mai dalle capacità critiche e decisionali del progettista o di chi ne faccia utilizzo.

A tal fine la tesi si struttura come segue.

Nel capitolo 1 si tratta il tema del legno come materiale da costruzione, concentrandosi sulle caratteristiche proprie del materiale che ne determinano il comportamento meccanico. Viene inoltre presentata una breve panoramica dei materiali derivanti dal legno e motivata la scelta di lavorare con il legno massiccio.

Nel capitolo 2 si entra nello specifico della tipologia strutturale delle gridshell in legno. Viene affrontato, seppur brevemente, il concetto di forma resistente ed, infine, vengono presentati tre casi studio.

Il capitolo 3 ha come funzione principale quella di introdurre i successivi tre capitoli, nei quali si entra nel vivo dei procedimenti analitici e numerici; in questo capitolo, quindi, viene presentato il metodo che si è scelto di adottare, nonché le varie fasi nelle quali lo stesso è strutturato.

Nel capitolo 4 vengono presentati i necessari procedimenti analitici e numerici su di un modulo base di trave a sezione variabile al fine di modellare una trave a sezione equivalente omogenea, verificandone la validità mediante l'analisi dei rispettivi modelli numerici.

Nel capitolo 5 si affronta invece il tema del passaggio da un sistema piano discreto ad un sistema piano di continuo equivalente. Anche in questo caso, i risultati del procedimento di omogeneizzazione sono supportati dalle verifiche sui modelli numerici.

Nel capitolo 6, infine, si applicano i procedimenti messi a punto nei capitoli precedenti a sistemi strutturali nei quali interviene la curvatura. Il capitolo si conclude con le analisi relative a quattro differenti strutture (una piana, una a singola curvatura spaziale e due a doppia curvatura spaziale), per le quali si mettono a confronto i risultati prodotti dai modelli alle tre scale di osservazione.



## Capitolo 01

### Il Legno come Materiale da Costruzione

#### 1. Premessa

Il legno come materiale da costruzione è stato storicamente impiegato per la realizzazione di molti elementi strutturali quali ad esempio fondazioni, pilastri, travi, pareti, nonché per soluzioni tecnologiche più articolate quali capriate, navi o coperture voltate.

Questo materiale nel passato era particolarmente diffuso per via della sua praticità, della sua lavorabilità e della sua reperibilità; di fatto il limite maggiore era rappresentato dalle sue dimensioni, limitate ovviamente dalle dimensioni della pianta cui apparteneva il tronco.

La sua evoluzione a livello strutturale è partita proprio dalla necessità di superare questo limite, e con esso, superare il limite della luce da coprire.

In aggiunta alle soluzioni tecnologiche basate sulle articolazioni spaziali degli elementi strutturali, nei secoli si sono studiate delle connessioni tra elemento ed elemento atte ad aumentarne le dimensioni senza dover rinunciare all'efficienza.

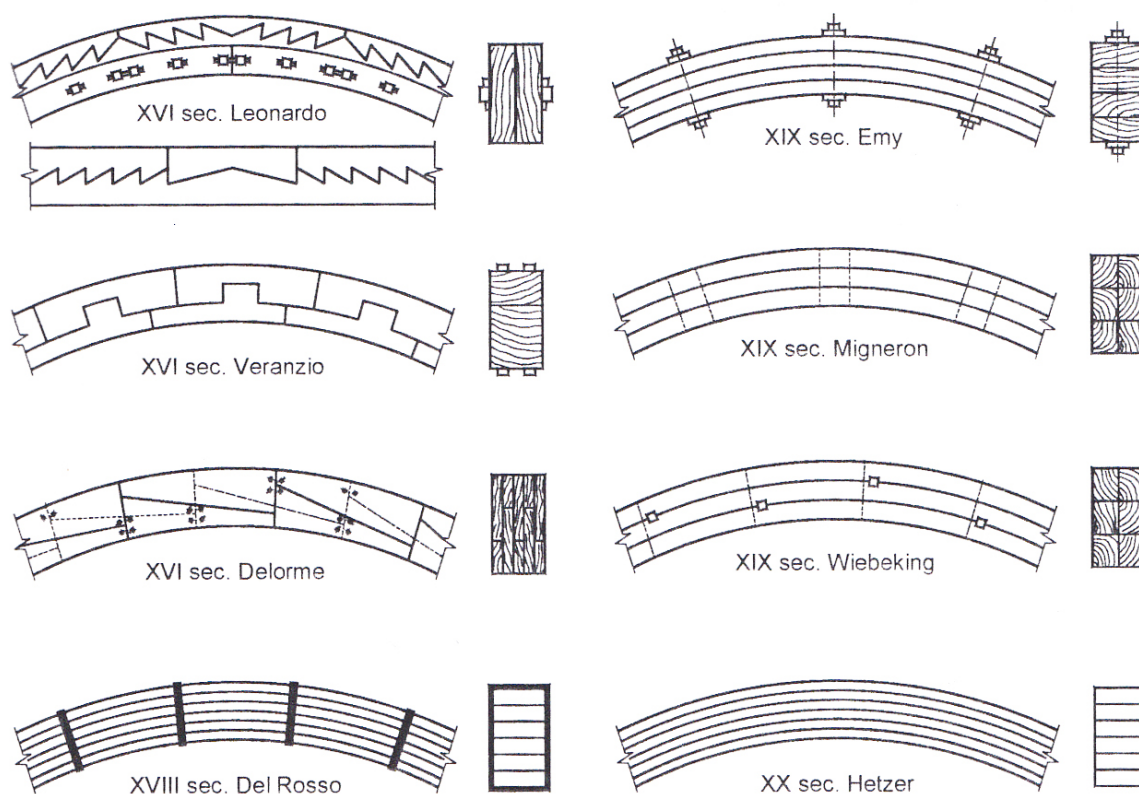


Fig. 1.1 - da M. PIAZZA, Strutture in Legno, Milano 2014

Questo tentativo di superare il limite dimensionale, insieme con il tentativo di ridurre al minimo il numero di difetti naturalmente presenti in ogni elemento, ha avuto la sua ultima evoluzione nel XX secolo con la realizzazione del primo prototipo di legno lamellare, e si è tradotto oggi nella diffusione di quelli che sono comunemente definiti come legni ingegnerizzati.

L'aggiunta di colla tra le lamelle di legno crea di fatto un materiale composito, non dissimile in linea di principio dal cemento armato.

Chiunque decida di interessarsi di progettazione di strutture in legno deve riscoprirne le caratteristiche materiali; l'obiettivo, pertanto, di questo capitolo è quello di fornire le informazioni necessarie a comprendere gli utilizzi e le potenzialità di questo materiale e dei suoi derivati, senza nutrire l'ambizione di fornire un trattato esaustivo dell'argomento. Va inoltre sottolineato che tutte le nozioni che verranno presentate sono mirate alla progettazione del nuovo, e non al collaudo o alla verifica di strutture esistenti. L'approccio al tema dell'esistente per le strutture in legno risulta particolarmente complesso per via dei fenomeni che si innescano nel tempo legati alla viscosità del materiale, come gli stati di coazione o l'incidenza del tempo sullo stato tensionale di un elemento, e che rendono difficile la valutazione delle effettive condizioni di esercizio di un elemento strutturale posto in opera. Di seguito introdurremo quindi l'argomento a partire dalle proprietà fisiche del legno; verranno poi riassunte tutte le nozioni basilari per utilizzare in modo consapevole tali elementi in ambito strutturale.

## 2. Caratteristiche del legno

In natura le piante hanno bisogno, nelle loro parti verdi, della luce solare; l'evoluzione naturale di diverse specie arboree, ha reso necessario portare in alto le parti verdi per poterle esporre alla luce diretta. Il tessuto di sostegno che si è andato sviluppando è il legno.

Gli elementi che si ricavano da esso possono essere utilizzati in forma originaria (ad esempio, per la paleria), o dopo averli sottoposti ad opportune lavorazioni. I legnami vengono identificati in base alla specie legnosa, spesso indicata come essenza, sebbene questo termine non sia stato accettato dagli esperti del settore.

A seconda del gruppo botanico di appartenenza, i legnami si dividono in latifoglie (in inglese *hardwood*) e conifere (in inglese *softwood*). La nomenclatura inglese, traducibile in "legno duro" e "legno tenero", indica una classificazione puramente botanica, e non ha nulla a che vedere con la durezza meccanica.

Sono molti i fattori che fanno del legno un buon materiale da costruzione. I vantaggi potenzialmente reali dell'utilizzo del legno come materiale da costruzione possono essere riassunti in dieci punti<sup>1</sup>:

1. Conservazione dell'ambiente. Contrariamente a quanto si possa pensare, l'utilizzo del legno non determina problemi di deforestazione ma, anzi, se programmato e ben concepito, un disboscamento controllato ha delle ripercussioni positive sull'ambiente;
2. Basse emissioni di anidride carbonica. Nel processo di lavorazione del legno le emissioni di CO<sub>2</sub> nell'aria sono pari a zero, se non negative;
3. Filiera corta. Molti centri produttivi del legno strutturale seguono i criteri della filiera corta, ovvero una circoscrizione dei passaggi produttivi grazie ai quali consumatore e

---

<sup>1</sup>L'elenco di seguito esposto si riferisce ad una lezione del tecnologo Marco Togni, tenuta a maggio del 2016 a Roma, all'interno del corso "Complementi di progettazione strutturale – Strutture in legno" dell'Università degli Studi Roma Tre

produttore sono molto vicini. In molti casi il legno può rappresentare infatti un materiale a chilometro zero.

4. Sink Biosferico, o *carbon sink*. Si intende lo stoccaggio di carbone atmosferico che avviene in modo naturale attraverso l'attività connessa alla fotosintesi. La vegetazione in crescita assorbe infatti l'anidride carbonica, motivo per cui il protocollo di Kyoto ha previsto una sorta di bonus sulle emissioni dei paesi con ampie zone di foresta o altra vegetazione. Questo procedimento ben si sposa con il disboscamento controllato, in quanto esso prevede il taglio di alcuni tronchi in congiunzione con la piantagione di nuove parti di foresta;
5. Semplicità di lavorazione. Più di ogni altro materiale, il legno è altamente lavorabile anche in cantiere con strumenti di facile utilizzo;
6. Smaltimento e riuso. È molto facile sia smaltire sia riutilizzare elementi di legno, grazie al fatto che questi trovano largo impiego non solo nel settore edilizio. I pezzi di risulta possono essere infatti utilizzati sia in forma di lamelle, scaglie, o anche segatura, per la produzione di materiale combustibile, mobilio o diverse pannellature;
7. Prestazioni meccaniche. Il rapporto tra le prestazioni meccaniche del legno e la sua densità è molto alto. Ciò comporta, in ambito strutturale, la possibilità di raggiungere un dato valore di resistenza con un peso strutturale molto basso, a confronto con altri materiali quali ad esempio acciaio o calcestruzzo armato;
8. Sicurezza agli incendi. Contrariamente all'opinione comune, una struttura in legno è molto sicura in caso di incendio. Infatti, nonostante il materiale sia un combustibile naturale, il suo comportamento è altamente prevedibile e le caratteristiche meccaniche del legno non combusto rimangono inalterate a causa delle sue ottime proprietà isolanti.
9. Isolamento termico. Il legno è un materiale isolante termicamente, in particolare il legno massiccio ha la proprietà naturale di impedire l'aumento della temperatura causato dall'irraggiamento solare.
10. Materiale sostenibile. Bisogna precisare che non si può dire che il legno di per sé sia un materiale sostenibile, bensì che se utilizzato con i giusti criteri, esso è l'unico materiale che ha davvero la possibilità di essere considerato tale.

Date queste premesse, se si vuole utilizzare il legno come materiale da costruzione è fondamentale sapere che è un materiale anisotropo, che è molto sensibile all'umidità, e che presenta quelli che sono comunemente definiti "difetti". I successivi paragrafi sono quindi un approfondimento di questi aspetti.

## 2.1 Anisotropia del legno

La struttura microscopica del legno si compone di cellule allungate, che si dispongono in modo variabile a seconda della specie legnosa. L'orientamento di tali cellule è parallelo all'asse del tronco e prende il nome di fibratura.

Per capire bene il concetto di fibratura dobbiamo riferirci all'attività vegetativa che dà origine al tronco degli alberi. Nel corso della crescita di una pianta il tronco si sviluppa principalmente in due direzioni: in altezza ed in diametro.

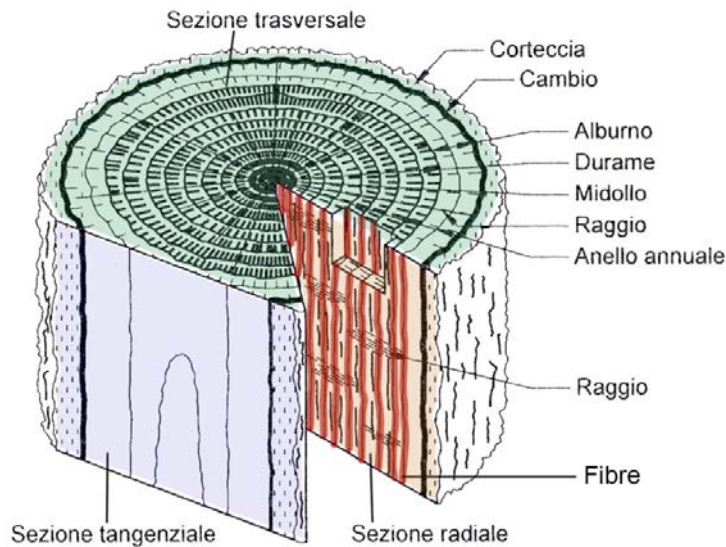


Fig. 1.2 - da M. PIAZZA , Strutture in Legno, Milano 2014

Immaginiamo di sezionare un tronco. La sezione di un tronco ha un nome specifico a seconda degli elementi che andiamo a tagliare (Fig. 1.2). Le direzioni anatomiche principali si classificano come: radiale (R), tangenziale (T), e longitudinale (L).

Osserviamo la sezione trasversale: la crescita in diametro del tronco porta ogni anno alla formazione di una nuova circonferenza, esterna a quelle precedenti. Tale circonferenza prende il nome di anello annuale e si sviluppa a partire dal midollo, ovvero dall'anello più vecchio del tronco.

Nella sezione radiale, invece, sono evidenziate le fibre, la cui lunghezza è data dalla crescita in altezza; le fibre corrono tutte nella stessa direzione, detta di fibratura.

La direzione della fibratura conferisce al materiale una spiccata ortotropia a simmetria cilindrica. Si assume infatti che le proprietà nelle direzioni trasversali (T ed R) siano tra di loro paragonabili; di conseguenza in ambito strutturale si distinguono due sole classi di proprietà fondamentali che differiscono a seconda del loro rapporto con la fibratura:

1. Longitudinali o parallele (//) alla fibratura; spesso si indicano tali proprietà con il pedice 0, stando ad indicare l'angolo tra la direzione che si sta analizzando e quella della fibratura;

2. Trasversali o radiali, genericamente dette perpendicolari ( $\perp$ ) alla fibratura; tali proprietà sono spesso indicate con il pedice 90.

Solitamente è possibile schematizzare la struttura microscopica del legno come un insieme di cannuce, che rappresentano le fibre, parallele tra loro, come riportato nell'immagine sottostante:

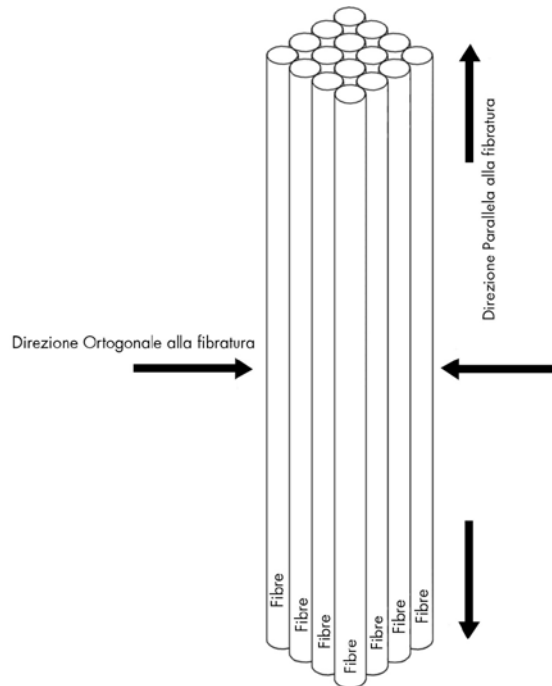


Fig. 1.3 – Schematizzazione dell'andamento della fibratura

A livello microscopico le fibre rappresentano le cellule allungate all'interno delle quali, quando il tronco è in vita, scorrono acqua e linfa. Tali canali prendono il nome di lumi; queste strutture sono tutte connesse tra di loro mediante pareti adiacenti. La loro struttura chimica portante è la cellulosa, un lungo polimero resistente a trazione, unita col beta glucosio. Una volta svuotato dell'acqua, i lumi sono pieni di aria. Dalla composizione microscopica del tronco si evince chiaramente che esso è composto più di aria che di legno, ed è questo il motivo per cui il rapporto tra le prestazioni meccaniche e la densità è tanto elevato.

In termini meccanici la resistenza del legno varia a seconda che questa venga valutata parallelamente od ortogonalmente alla fibratura. In natura le fibre si sviluppano nella direzione dell'altezza poiché è in quella direzione che vengono scaricati tutti i pesi; le fibre sono quindi la parte resistente del legno. Il legame tra una fibra e l'altra tuttavia non è particolarmente forte.

Esistono tronchi la cui fibratura non è composta di fibre parallele tra di loro, bensì di fibre torte, che crescono attorcigliandosi intorno al midollo. Questi tronchi non sono utilizzabili a livello strutturale poiché il loro comportamento non è prevedibile. A tal proposito ricordiamo



che la direzione delle fibre viene dedotta successivamente al taglio, in base alla direzione di fessurazione indotta dal ritiro<sup>2</sup>.

Di seguito tratteremo solo il caso, più diffuso, delle fibre parallele fra loro poiché è di questa tipologia di fibratura che si compongono gli elementi strutturali utilizzabili. Per quanto riguarda le caratteristiche meccaniche, queste verranno descritte nel paragrafo 3.

## 2.2 Il comportamento igroscopico del legno

Essendo un materiale igroscopico, il legno continua ad assorbire e desorbire l'umidità atmosferica, anche dopo essere stato tagliato, in quanto tende ad equilibrarsi con le condizioni termo igrometriche dell'ambiente in cui si trova.

L'umidità del legno si definisce come il rapporto tra il contenuto d'acqua ed il peso anidro del legno, ovvero assolutamente secco, determinabile tramite essiccazione di una provetta in laboratorio. La quantità di acqua che viene trattenuta dalle cellule sottoforma di vapore dipende dall'umidità relativa dell'aria, dalla sua temperatura, dalla specie legnosa, dalla direzione della fibratura, dalla modalità di taglio e dalle dimensioni della sezione.

È bene capire che l'umidità del legno non coincide con l'umidità dell'aria. Ad esempio, in un ambiente in cui si misurano 20°C e la cui umidità relativa dell'aria è del 65%, l'umidità relativa del legno risulta essere 0,12; in questo tecnicamente si dovrebbe affermare che il legno ha un'umidità del 12%.

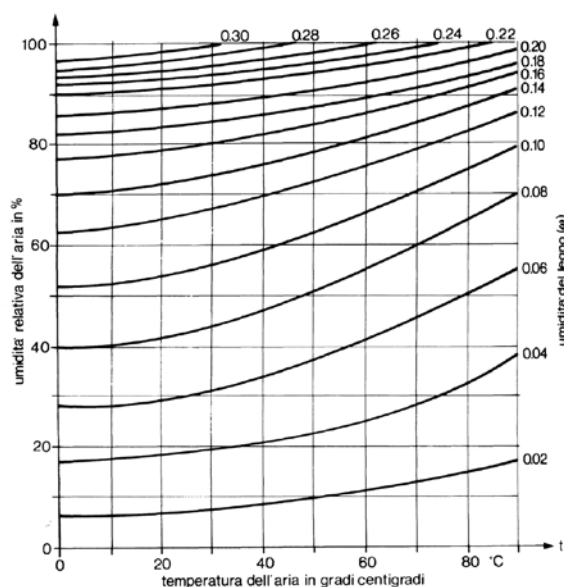


Fig. 1.4 - da A. CECCOTTI, Ingegneria delle Strutture - Le strutture di Legno, capitolo 12, Torino 2002

Nel grafico in figura 1.4 viene riportata la situazione di equilibrio termo igrometrico del legno in condizioni di laboratorio. Nelle condizioni di esercizio tuttavia l'umidità relativa dell'aria varia con continuità nel tempo e con essa variano il contenuto di acqua del legno ed il suo volume, determinando variazioni di inerzia meccanica ed inerzia termica, che sono tanto maggiori quanto più piccole sono le dimensioni iniziali dell'elemento di legno.

<sup>2</sup>Questa affermazione si basa sul comportamento igroscopico del legno e sul conseguente fenomeno del ritiro. La spiegazione di questi fenomeni viene trattata nei paragrafi successivi.

L'umidità del 12% rispetto alla massa secca assume in Italia un significato particolare, essendo questa considerata come condizione "normale" del legno, in cui è raccomandabile porre in opera gli elementi strutturali.

L'assorbimento di umidità da parte del legno può avvenire anche attraverso contatto diretto con l'acqua. In questo caso è anche possibile che l'umidità aumenti tanto da superare il limite di saturazione delle fibre, anche detto PSF. Nel legno vivo l'acqua è presente o come acqua di saturazione, nelle pareti cellulari, o come acqua libera, nei lumi. Nel momento in cui un tronco viene tagliato e messo ad essiccare l'umidità media interna diminuisce; il PSF viene raggiunto mediamente intorno al 30% di umidità, il che vuol dire che tutta l'acqua libera è stata persa ed è rimasta solo l'acqua di saturazione legata alla pareti cellulari. Ciò vuol dire che nel prosieguo del processo di essiccazione le pareti cellulari inizieranno a perdere acqua e di conseguenza a variare il proprio volume, dando luogo al fenomeno della fessurazione. Se un elemento di legno secco è posto in un ambiente ad elevata umidità ma senza il contatto diretto con l'acqua, si raggiungerà la saturazione delle fibre; qualora invece ci fosse il contatto con l'acqua l'umidità del legno potrebbe superare il PSF, riportando l'acqua libera nelle cavità dei tessuti. Questo complesso processo di assorbimento/desorbimento del legno ha implicazioni strutturali importanti: è fondamentale difatti che il processo di essiccazione fino a raggiungimento del valore del 12% sia effettuato prima della messa sotto carico dell'elemento stesso perché in caso contrario le deformazioni sarebbero non prevedibili.

L'inverso del processo di assorbimento è detto processo di desorbimento, ovvero il processo che porta alla perdita dell'acqua; a livello molecolare il comportamento igroscopico del legno può essere schematizzato come in figura 1.5:

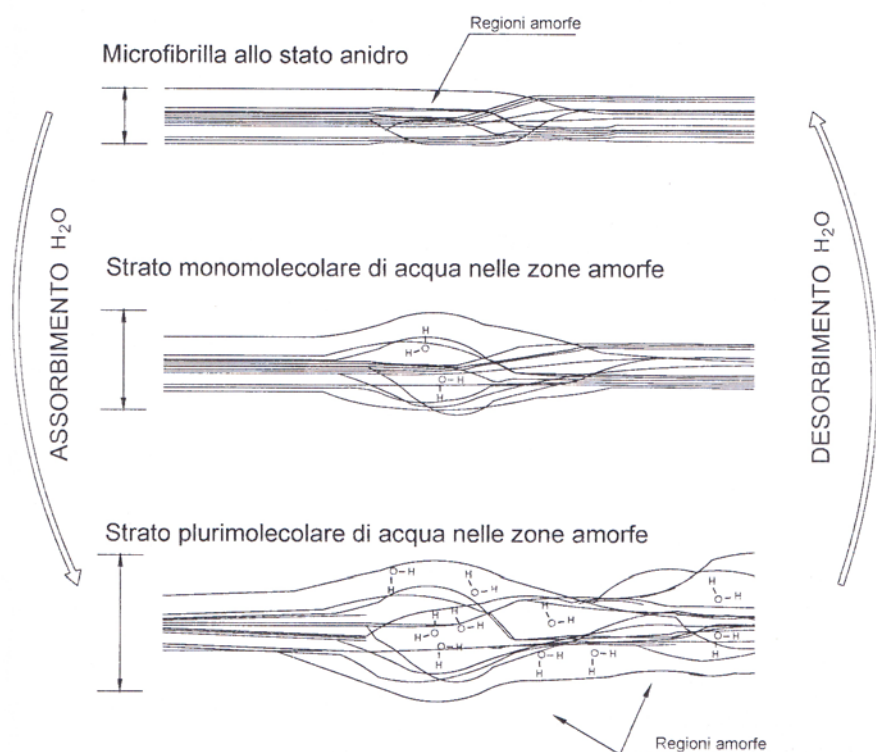


Fig. 1.5 - da M. PIAZZA , Strutture in Legno, Milano 2014

Le zone amorphe sono delle zone la cui composizione molecolare rende più facile l'assorbimento dell'acqua, motivo per cui sono le prime a subire un processo di assorbimento.

Nel caso di precipitazioni atmosferiche l'assorbimento dell'acqua varia a secondo della durata dell'esposizione, della specie legnosa, della direzione dell'infiltrazione rispetto al senso della fibratura; in caso di legno utilizzato in ambito strutturale, particolare rilevanza in questo senso hanno i dettagli costruttivi che riguardano la protezione o meno del legno di testata, o la possibilità di scolo delle acque di infiltrazione. Nel paragrafo 3 verrà affrontato il problema della variazione di umidità relativa del legno in relazione al suo impiego strutturale.

### 2.3 I "difetti" del legno

La presenza dei difetti è un elemento fortemente caratterizzante del legno. Con il termine difetti si intendono degli elementi naturalmente presenti nel tronco che ne peggiorano localmente le prestazioni per determinati impieghi.

In ambito strutturale sono importanti i nodi, le fessurazioni, le deformazioni differite. In particolare con il termine "nodo" si intende il residuo del ramo rimasto inglobato nel tessuto legnoso. Generalmente un ramo si sviluppa a partire dal midollo, il che vuol dire che sezionando tangenzialmente un tronco in corrispondenza del nodo, vedremo la traccia del ramo svilupparsi dal centro fino all'esterno della corteccia (citare la figura 1.6):

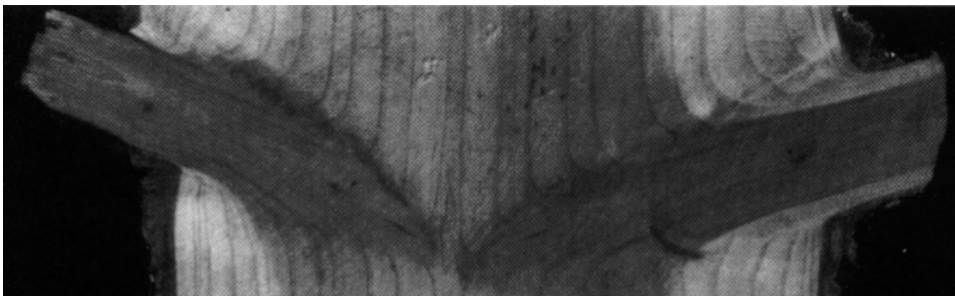


Fig. 1.6 - da A. CECCOTTI, Ingegneria delle Strutture - Le strutture di Legno, capitolo 12, Torino 2002

Il nodo segato trasversalmente alla sua linea d'asse è altrettanto riconoscibile, come si può constatare nella figura 1.7:



Fig. 1.7 - vista di un nodo segato trasversalmente

Il legno privo di difetti viene comunemente indicato come legno *netto*, mentre il legno con presenza di difetti viene definito legno *ad uso strutturale*. Questa distinzione fa ben capire che il legno ad uso strutturale ha dei difetti (vi sono diverse classificazioni a seconda della

quantità di difetti presente in un elemento strutturale); elementi di piccole dimensioni, come ad esempio i provini da laboratorio, possono essere di legno netto. Vista la sua facilità di lavorazione infatti, più un pezzo di legno è piccolo più alta è la possibilità di segarlo in corrispondenza di parti prive di difetti.

I nodi possono essere *vivi* (o aderenti) o *morti* (non aderenti); un nodo vivo è saldamente ancorato al tessuto legnoso. Al contrario, un nodo morto non ha nessuna aderenza col tessuto legnoso che lo circonda (vedi figura 1.8):

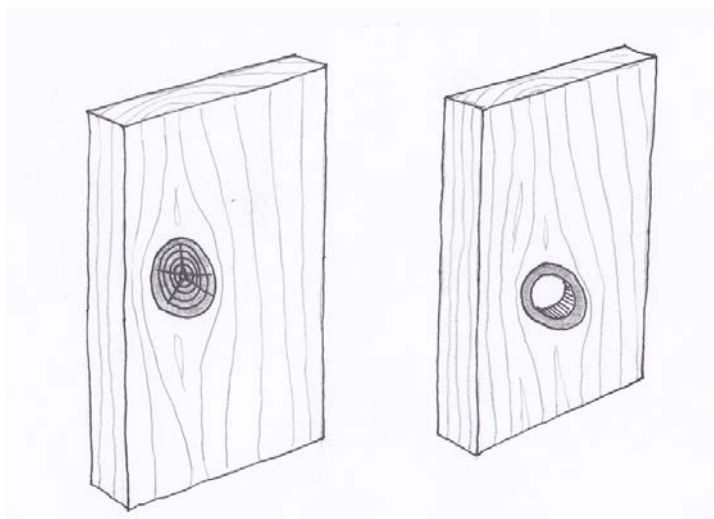


Fig. 1.8 - a sinistra un nodo vivo, a destra un nodo morto

A livello strutturale il nodo rappresenta quindi una mancanza di materia; elementi in cui sono presenti troppi nodi non possono essere utilizzati come materiale da costruzione proprio per questo motivo. Questa considerazione vale sia che si parli di un nodo morto, sia che si parli di un nodo vivo. Sebbene il nodo vivo non sia fisicamente una mancanza di materia, infatti, l'andamento della fibratura nel suo intorno è molto diverso dall'andamento che questa ha nella parti di legno prive di nodi; il suo comportamento non è localmente prevedibile e quindi, per ragioni di sicurezza, a livello di resistenza meccanica deve essere trascurato.

## 2.4 Alterazioni biologiche

Nel paragrafo precedente si è posta particolare attenzione al rapporto che il legno ha con l'umidità dell'ambiente circostante. A seconda della destinazione d'uso del materiale, questo deve essere sottoposto a processi di stagionatura che ne portino l'umidità a valori correlabili alla umidità dell'ambiente in cui andranno ad operare. Una delle ragioni per le quali il processo di stagionatura assume particolare importanza è che il legno, se mantenuto in ambienti caratterizzati da umidità troppo elevate, è soggetto agli attacchi di funghi e muffe.

Gli attacchi ambientali cui è naturalmente soggetto il materiale rischiano di alterare il materiale stesso e le sue funzioni meccaniche, nonché di renderlo distruttivo per gli organismi che lo utilizzano come nutrimento o abitazioni.

È quindi opportuno fare un distinguo tra due diverse tipologie di attacchi biologici: gli attacchi *abiotici* e gli attacchi *biotici*.

Gli attacchi abiotici sono attacchi di tipo ambientale. Le funzioni e le caratteristiche meccaniche del materiale non vengono alterate in modo diretto da questo tipo di azioni, ma è tuttavia possibile che esse inneschino dei meccanismi di degrado potenzialmente dannosi.

Generalmente il legno è molto resistente agli attacchi chimici, motivo per cui per molto tempo è stato utilizzato come contenitore di sostanze aggressive (ad esempio come separatore per batterie ed accumulatori elettrici). È quindi resistente agli acidi, ma molto sensibile agli alcali, che possono portare alla demolizioni della lignina o favorire la degradazione idrolitica del legno.

Il legno è inoltre molto sensibile all'azione dei raggi solari che, insieme con la variazione di temperatura ed umidità, può portare ad un fenomeno noto come *invecchiamento per fotolisi*. La conseguenza di maggiore interesse di questo fenomeno è la demolizione di lignina e cellulosa, le strutture molecolari portanti del materiale. Queste tipologie di degrado si manifestano soprattutto nel legno posto in ambiente esterno senza protezione, e sono visibili a causa del relativo cambiamento di colore del materiale o della formazione di macchie bluastre

Il mancato controllo degli eventuali attacchi abiotici può portare anche ad attacchi di tipo biotico che, invece, sono causati da organismi viventi.

Essendo la struttura chimica del legno essenzialmente formata dalla cellulosa e dal beta glucosio, uno zucchero, questo materiale attrae organismi che per loro natura non sono in grado di sintetizzare zuccheri.

Alcuni di questi organismi, in particolare funghi e batteri, demoliscono la cellulosa mentre altri, ad esempio gli insetti, possono colonizzare intere parti lignee. All'interno del tronco sono presenti dei meccanismi naturali di difesa che proteggono il durame, mentre l'alburno, ovvero lo strato più prossimo alla corteccia, è maggiormente soggetto a tali attacchi.

Alcune tipologie di funghi e muffe si sviluppano solo nello strato superficiale e, benché esteticamente sgradevoli, non influenzano le caratteristiche meccaniche del materiale.

Altre specie di funghi invece, come ad esempio i cosiddetti funghi *perfetti*, sono in grado di demolire le componenti della parete cellulare; in questi casi fin dai primi attacchi è possibile avere diminuzioni delle caratteristiche di resistenza, e si può arrivare ad una perdita di volume anche dell'80%. Le spore tramite cui si riproducono possono attaccare la superficie lignea solo se la sua umidità è superiore al 20%.

Una seconda tipologia di funghi, detti funghi *imperfetti*, può attaccare il legno in condizioni particolari, come ad esempio in ambiente ad alta e costante umidità. Sebbene si presentino come delle muffe, questi funghi possono rivelarsi dannosi per la resistenza del materiale. Ciò nonostante, tali attacchi si sviluppano principalmente nei boschi ed in piante ancora in piedi; l'attacco a materiale già lavorato è molto raro e può verificarsi solo nel caso di conservazione in ambienti in cui l'umidità è molto elevata.

Per quanto riguarda gli insetti, questi possono attaccare il legno per scavare dei condotti in cui deporre le uova o perché ne trovano nutrimento. I più significativi sono quelli che attaccano il legno in opera, ovvero tarli e termiti, che possono portare a danni rilevanti.

## 2.5 La resistenza a fuoco del legno

Come accennato nella premessa di questo capitolo, il legno è un materiale combustibile, ma nonostante questo è considerato, in ambito edilizio, molto sicuro in caso di incendio.

Questa considerazione dipende dal modo in cui si propaga la combustione in un elemento ligneo e da un oculato dimensionamento delle sezioni. La bassa conducibilità del materiale, il basso coefficiente di dilatazione lineare e la bassa velocità di carbonizzazione sono i fattori per cui la resistenza a fuoco del legno è considerata molto alta.

Nel caso di una struttura in acciaio, ad esempio, le alte temperature causate da un incendio incidono sulle caratteristiche meccaniche del materiale riducendone la resistenza; col passare del tempo il calore si propaga all'interno degli elementi strutturali fino a raggiungere il limite di collasso; il collasso in questo caso avviene in modo fragile per sopraggiunta instabilità dell'equilibrio.

Al contrario, il legno non consente la trasmissione di calore, per cui le caratteristiche meccaniche del materiale rimangono invariate; quello che varia è la sezione resistente e, di conseguenza, tutte le caratteristiche legate alla geometria della sezione.

In caso di incendio un elemento ligneo viene attaccato solo nel suo strato superficiale, mentre quello interno rimane intatto; essendo la combustione molto lenta, il processo che porterebbe alla carbonizzazione dello strato superficiale, consentendo al calore di penetrare al suo interno, può essere molto lungo.

Facciamo un esempio: supponiamo di avere una trave di legno massiccio la cui sezione trasversale sia 20x20 cm; a seguito di un'esposizione uniforme e prolungata al fuoco possiamo ipotizzare che uno strato superficiale, ad esempio di 1,5 cm su ogni lato, sia stato carbonizzato. Rimuovendo tale strato rimarrebbe una sezione di 17x17 cm. Le caratteristiche di resistenza ed il modulo elastico di tale sezione sarebbero le medesime di quelle della sezione iniziale; il materiale risulterebbe intatto poiché protetto dal fenomeno di carbonizzazione dello strato superficiale.

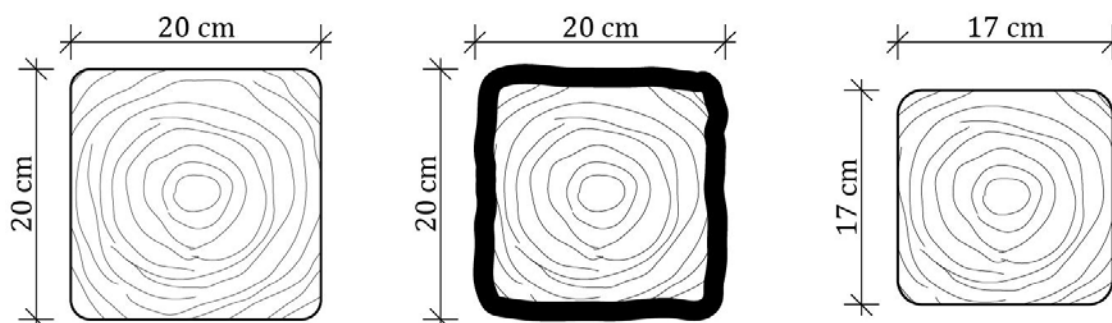


Fig. 1.9 - esempio di variazione di sezione resistente in legno massiccio in seguito ad un fenomeno di combustione

Ricordiamo che quando si parla di resistenza al fuoco ci si riferisce al tempo, espresso in minuti, che intercorre tra l'accensione del fuoco e il crollo della struttura, ovvero fino alla perdita della sua capacità portante. Per ogni tipologia di costruzione, a seconda della sua funzione, le normative antincendio prescrivono un tempo minimo entro il quale bisogna garantire che la struttura non arrivi a collasso. Nel caso del legno è possibile calcolare il tempo che impiega il fuoco a bruciare un determinato strato; per mettersi in sicurezza nel caso di incendio, quindi, sarebbe sufficiente sovradimensionare la sezione resistente di quel tanto che basta per proteggerla da un'esposizione al fuoco di data durata.

In conclusione, riportiamo in figura 1.10 un'immagine emblematica di una struttura mista acciaio/legno a seguito di un incendio. Come è possibile constatare, le travi in acciaio hanno

perso completamente equilibrio, mentre la trave in legno risulta carbonizzata ma comunque in funzione:

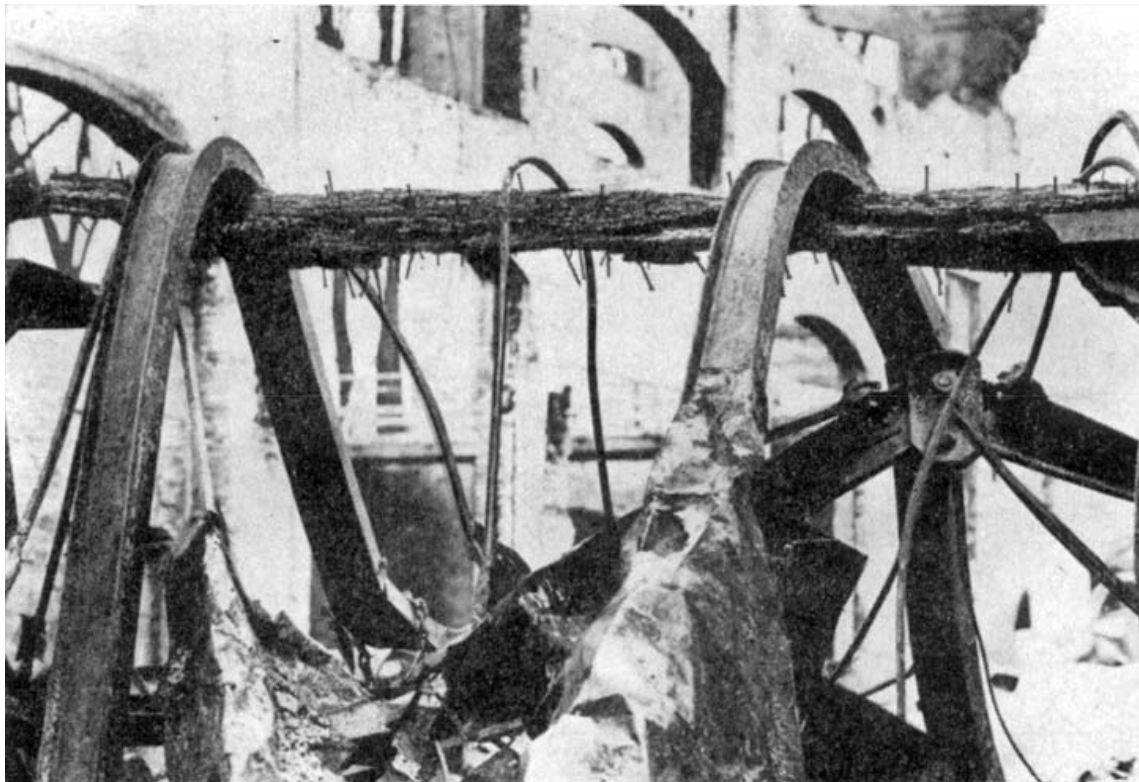


Fig. 1.10 – struttura mista acciaio/legno collassata a seguito di un incendio

### 3. Elementi strutturali in legno massiccio: caratteristiche meccaniche

Le argomentazioni fin qui trattate hanno un particolare significato quando si considerano elementi strutturali in legno massiccio.

Prima di esporre quelle che sono le implicazioni delle caratteristiche, proprie del materiale, in ambito strutturale, è bene fare una premessa circa la classificazione del legno e la determinazione della sua classe di resistenza.

Come abbiamo detto, il legno è un materiale che, vista la sua natura biologica, presenta una elevata variabilità di tutte le sue caratteristiche, dipendendo queste ultime non solo dalla specie legnosa e dalla difettosità, ma anche dalla provenienza geografica del materiale. D'ora in avanti focalizzeremo la nostra attenzione sulla resistenza meccanica.

La variabilità della resistenza meccanica è illustrata nel grafico della figura 1.11, che riporta i risultati delle prove effettuate su un pino svizzero dall'istituto IBIOS nel 1989<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup> L'immagine in figura 1.11 riporta i risultati di test effettuati su tronchi appartenenti alla stessa specie legnosa e con la medesima provenienza, atti a determinarne modulo elastico e resistenza a flessione. Senza ulteriori specifiche riguardo la scelta dei tronchi i risultati sono incredibilmente distanti fra loro. In termini di modulo elastico si va da un minimo di 7 kN/mm<sup>2</sup> ad un massimo di 19 kN/mm<sup>2</sup>, mentre la resistenza a flessione varia da un minimo di 17 MPa circa a quasi 100 MPa.

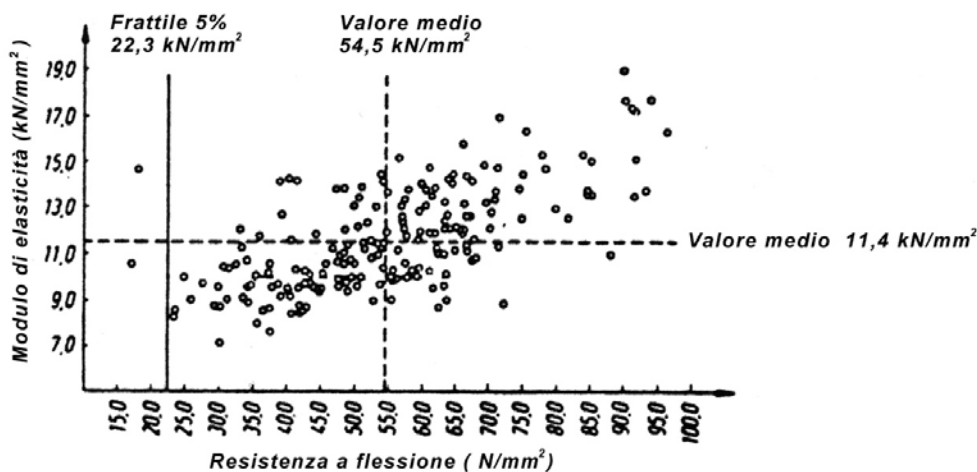


Fig.1.11 - da A. CECCOTTI, Ingegneria delle Strutture - Le strutture di Legno, capitolo 12, Torino 2002

Una tale varietà di risultati ha portato alla necessità di classificare gli elementi strutturali separando i migliori, con meno difetti o con la fibratura non torta, dai peggiori. I criteri per la classificazione secondo la qualità resistente sono stati inizialmente visivi, ma nel corso degli anni si sono affinati sviluppando anche criteri differenti.

Uno dei metodi introdotti più di recente è un metodo meccanico che consiste nel sottoporre dei segati a delle prove di laboratorio al fine di individuarne il modulo elastico minimo. Metodi come questo, insieme con il metodo visivo, hanno contribuito ad una classificazione più rigorosa, seppure ancora suscettibile di errori. I fattori che vengono analizzati al fine della classificazione sono i nodi, l'inclinazione della fibratura, la massa volumica, lo spessore degli anelli, il modulo di elasticità, e l'accoppiamento di questi parametri tra loro.

In relazione a tali classificazioni, viene anzitutto introdotto il concetto di categoria di resistenza. A livello generale, si distinguono tre categorie<sup>4</sup>:

- **Categoria I:** *Legname sano privo di alterazioni o guasti provocate da insetti o funghi. La fibratura è regolare con una deviazione massima di 1/15 rispetto all'asse longitudinale; nodi aderenti con diametro non superiore a 1/5 della dimensione della faccia relativa ed in ogni caso non superiore a 5 cm; frequenza dei nodi tale che in 15 cm di lunghezza dell'elemento nella zona più nodosa la somma dei diametri dei vari nodi, per ogni faccia, non oltrepassi 1/3 della larghezza della faccia stessa. Non sono ammesse tavole con il midollo.*
- **Categoria II:** *Legname sano, immune da perforazioni e guasti provocati da insetti o funghi, con tolleranza di lievi alterazioni cromatiche. Esclusione di canastro esteso, di cipollature e altre lesioni, con tolleranza di tasche di resina di spessore non superante i 3 mm. Andamento delle fibre avente deviazione massima di 1/8 rispetto all'asse longitudinale del pezzo: nodi aderenti aventi diametro non superiore ad 1/3 della dimensione della faccia relativa ed in ogni caso non superiore a 7 cm; frequenza dei nodi tale che in 15 cm di lunghezza dell'elemento nella zona più nodosa la somma dei diametri dei vari nodi, per ogni faccia, non oltrepassi 1/2 della larghezza della faccia*

<sup>4</sup>Da A. CECCOTTI, Ingegneria delle Strutture - Le strutture di Legno , capitolo 12, Torino 2002. La classificazione delle tre categorie è ripresa anche a livello normativo.



stessa. Tolleranza di lievi fessurazioni alle estremità e, nel caso di segati a spigolo vivo, di smussi non superanti 1/20 della dimensione che ne è affetta.

- **Categoria III:** Legname sano, immune da perforazioni o guasti causati da insetti o funghi, con tolleranza di alterazioni cromatiche. Esclusione di cipollature e altre lesioni estese. Andamento delle fibre avente deviazione massima di non oltre 1/5 rispetto all'asse longitudinale del pezzo: nodi aderenti per almeno 2/3 del totale, con diametro non superiore ad 1/2 della dimensione della faccia relativa: frequenza dei nodi tale che in 15 cm di lunghezza dell'elemento nella zona più nodosa la somma dei diametri dei vari nodi, per ogni faccia, non oltrepassi i 2/3 della larghezza della faccia stessa. Tolleranza di fessurazioni alle estremità e, nel caso di segati a spigolo vivo, di smussi non superanti 1/10 della dimensione che ne è affetta.

Oltre a queste caratteristiche generali ve ne sono altre particolari, riportate nella tabella sottostante:

SPECIE	CATEGORIA I	CATEGORIA II	CATEGORIA III
Abete rosso e Abete bianco, Larice, Pini e Douglasia	Numero anelli non inferiore a 2,5 per cm, cioè anelli di spessore non superiore a 4 mm (6 mm, douglasia)	Numero anelli non inferiore a 1,67 per cm, cioè anelli di spessore non superiore a 6 mm (8 mm, douglasia)	Numero anelli inferiore a 1,67 per cm di raggio, cioè anelli di spessore superiore a 6 mm
Quercia, Faggio e Robinia	Numero anelli non superiore a 1,4 per cm, cioè anelli di spessore non inferiore a 7 mm	Numero anelli non superiore a 2,5 per cm, cioè anelli di spessore non inferiore a 4 mm	Numero anelli superiore a 2,5 per cm di raggio, cioè anelli di spessore inferiore a 4 mm
Pioppo, Castagno	Numero anelli non superiore a 1,2 per cm, cioè anelli di spessore non inferiore a 8 mm	Numero anelli non superiore a 3 per cm, cioè anelli di spessore non inferiore a 3,3 mm	Numero anelli superiore a 3 per cm di raggio, cioè anelli di spessore inferiore a 3,3 mm

Fig. 1. 12 - da A. CECCOTTI, Ingegneria delle Strutture - Le strutture di Legno, capitolo 12, Torino 2002

Perché un legname sia considerato appartenente ad una precisa categoria, questo deve soddisfare sia i requisiti di carattere generale che i requisiti di carattere particolare.

I valori caratteristici di resistenza del materiale sono classificati a partire ai seguenti tre parametri:

specie legnosa + zona di provenienza + categoria

e vengono denominati *resistenze caratteristiche per tipo di legno*.

Dal punto di vista della progettazione strutturale, esiste una classificazione per classi di resistenza che non prescinde dalla classificazione precedente, ma è basata unicamente su prove di laboratorio<sup>5</sup>. La UNI EN 338 del 2009 sul *Legno Strutturale, Classi di Resistenza*, stabilisce un sistema di classi di resistenza utilizzabili dai progettisti strutturali, fornendo inoltre valori caratteristici e regole di assegnazione delle specie legnose alle varie classi.

<sup>5</sup>Per limitare la variabilità di risultati, i legnami sui quali si effettuano le prove in laboratorio oltre a dover avere in comune specie legnosa e zona di provenienza, devono anche appartenere alla stessa categoria.

Qualunque elemento strutturale in legno che arriva in cantiere deve essere segnato da un marchio che ne certifichi la classe di resistenza cui appartiene<sup>6</sup>. Questa classificazione tiene conto unicamente delle caratteristiche meccaniche, per cui se ad esempio si utilizza un legno certificato C24, le sue caratteristiche meccaniche restano invariate a prescindere dalla specie legnosa.

Per quanto riguarda la classificazione delle classi di resistenza per il legno massiccio, si fa riferimento alla seguente tabella nella quale viene fatta un'unica distinzione, quella cioè tra legni di latifolia e legni di conifera:

**Table 1 — Strength classes - Characteristic values**

		Softwood species										Hardwood species									
		C14	C16	C18	C20	C22	C24	C27	C30	C35	C40	C45	C50	D18	D24	D30	D35	D40	D50	D60	D70
<b>Strength properties (in N/mm<sup>2</sup>)</b>																					
Bending	$f_{mk}$	14	16	18	20	22	24	27	30	35	40	45	50	18	24	30	35	40	50	60	70
Tension parallel	$f_{t0,k}$	8	10	11	12	13	14	16	18	21	24	27	30	11	14	18	21	24	30	36	42
Tension perpendicular	$f_{t90,k}$	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,4	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6	0,6
Compression parallel	$f_{c0,k}$	16	17	18	19	20	21	22	23	25	26	27	29	18	21	23	25	26	29	32	34
Compression perpendicular	$f_{c90,k}$	2,0	2,2	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9	3,1	3,2	7,5	7,8	8,0	8,1	8,3	9,3	10,5	13,5
Shear	$f_{vk}$	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	3,4	4,0	4,0	4,0	4,0	4,0	4,5	5,0
<b>Stiffness properties (in kN/mm<sup>2</sup>)</b>																					
Mean modulus of elasticity parallel	$E_{0,mean}$	7	8	9	9,5	10	11	11,5	12	13	14	15	16	9,5	10	11	12	13	14	17	20
5 % modulus of elasticity parallel	$E_{0,05}$	4,7	5,4	6,0	6,4	6,7	7,4	7,7	8,0	8,7	9,4	10,0	10,7	8	8,5	9,2	10,1	10,9	11,8	14,3	16,8
Mean modulus of elasticity perpendicular	$E_{90,mean}$	0,23	0,27	0,30	0,32	0,33	0,37	0,38	0,40	0,43	0,47	0,50	0,53	0,63	0,67	0,73	0,80	0,86	0,93	1,13	1,33
Mean shear modulus	$G_{mean}$	0,44	0,5	0,56	0,59	0,63	0,69	0,72	0,75	0,81	0,88	0,94	1,00	0,59	0,62	0,69	0,75	0,81	0,88	1,06	1,25
<b>Density (in kg/m<sup>3</sup>)</b>																					
Density	$\rho_k$	290	310	320	330	340	350	370	380	400	420	440	460	475	485	530	540	550	620	700	900
Mean density	$\rho_{mean}$	350	370	380	390	410	420	450	460	480	500	520	550	570	580	640	650	660	750	840	1080
NOTE 1 Values given above for tension strength, compression strength, shear strength, 5 % modulus of elasticity, mean modulus of elasticity perpendicular to grain and mean shear modulus, have been calculated using the equations given in Annex A. NOTE 2 The tabulated properties are compatible with timber at a moisture content consistent with a temperature of 20 °C and a relative humidity of 65 %. NOTE 3 Timber conforming to classes C45 and C50 may not be readily available. NOTE 4 Characteristic values for shear strength are given for timber without fissures, according to EN 408. The effect of fissures should be covered in design codes.																					

Fig. 1.13- da UNI EN 338 del 2009, Norma Europea

Il legno più diffuso in ambito strutturale è quello di conifera. Come possiamo notare dalla tabella riportata in figura 1.13, ogni classe di resistenza è descritta da sei diverse resistenze caratteristiche e quattro diversi valori di moduli di elasticità. Questo a causa della forte anisotropia del materiale. In particolare avremo, per quanto riguarda le resistenze:

$f_{m,k}$  = resistenza caratteristica a flessione, considerata sempre // alla fibratura

$f_{t,0,k}$  = resistenza caratteristica a trazione // alla fibratura

$f_{t,90,k}$  = resistenza caratteristica a trazione ⊥ alla fibratura

$f_{c,0,k}$  = resistenza caratteristica a compressione // alla fibratura

$f_{c,90,k}$  = resistenza caratteristica a compressione ⊥ alla fibratura

$f_{v,k}$  = resistenza caratteristica a taglio

mentre per i moduli di elasticità:

$E_{0,mean}$  = valore medio del modulo di elasticità // alla fibratura

$E_{90,mean}$  = valore medio del modulo di elasticità ⊥ alla fibratura

<sup>6</sup>Per uso strutturale ordinario le classi di resistenza più utilizzate sono la C16 o la C20.

$E_{0,05}$  = valore al 5 percentile del modulo di elasticità // alla fibratura

$G_{mean}$  = valore medio del modulo di taglio

Un'osservazione riguardo i valori del modulo elastico. Il progetto di un elemento in legno, secondo normativa, si effettua agli stati limite ultimo e di esercizio. I parametri  $E_{0,mean}$  ed  $E_{90,mean}$  sono i valori del modulo di elasticità da utilizzarsi nel calcolo degli stati limite ultimi; il parametro  $E_{0,05}$  viene invece utilizzato per gli stati limite di esercizio, in particolare per il calcolo delle frecce. Le uniche verifiche nella quali viene impiegato questo parametro anche per lo SLU sono quelle relative alla stabilità.

### 3.1 L'ortotropia del legno

A livello meccanico il fatto che il legno abbia un comportamento ortotropo ha una forte incidenza sui valori di resistenza del materiale nelle diverse direzioni. Vista la scarsa aderenza tra le pareti delle strutture cellulari, ad esempio, il valore di resistenza a trazione ortogonale alla fibratura è molto basso, tanto che in sede di progetto è possibile considerarlo pari a zero.

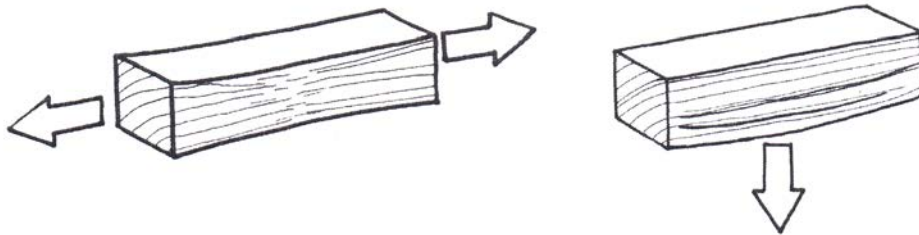


Fig. 1.14 - da M. PIAZZA , Strutture in Legno, Milano 2014 - trazione // ed  $\perp$  alla fibratura

Prendiamo ad esempio un legno di classe C24. Nel caso della trazione avremo i seguenti valori di resistenza nelle due direzioni:

resistenza caratteristica a trazione // alle fibre:

$$f_{t,0,k} = 14 \text{ MPa}$$

resistenza caratteristica a trazione  $\perp$  alle fibre:

$$f_{t,90,k} = 0,4 \text{ MPa}$$

La sollecitazione tagliante può portare a rottura secondo tre modalità: per taglio ortogonale alle fibre, per taglio parallelo alle fibre e per *rolling-shear*.

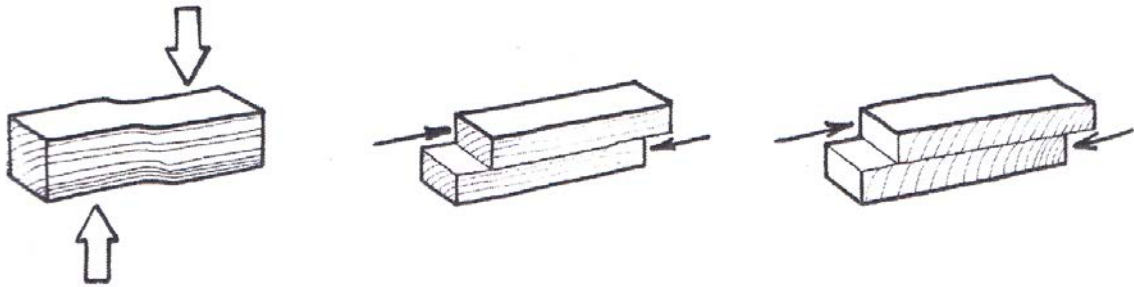


Fig. 1.15 - da M. PIAZZA , Strutture in Legno, Milano 2014 – sollecitazioni di taglio  $\perp$  alle fibre (sinistra),  $//$  alle fibre (centro) e di *rolling-shear* (destra)

Il fenomeno del *rolling-shear* può innescare un meccanismo di rottura fragile che porta alla disconnessione di alcune pareti cellulari adiacenti per rotolamento di una sull'altra; ciò può avvenire quando la sollecitazione tagliante agisce ortogonalmente alla direzione della fibratura, ma in un piano parallelo ad essa. Il valore di resistenza caratteristica a taglio vale per un legno di classe C24:

resistenza caratteristica a taglio:

$$f_{v,k} = 4 \text{ MPa}$$

La resistenza a taglio per rotolamento delle fibre invece, si può assumere non maggiore a due volte la resistenza caratteristica a trazione ortogonale alle fibre. Nel caso del legno C24 sarebbe quindi pari a:

resistenza caratteristica massima per rotolamento delle fibre:

$$f_{rs,k,max} = 0,8 \text{ MPa}$$

In ultimo, nella figura 1.16 si riportano le deformazioni relative ad elementi lignei soggetti a sforzi di compressione paralleli, inclinati e perpendicolari alle fibre:

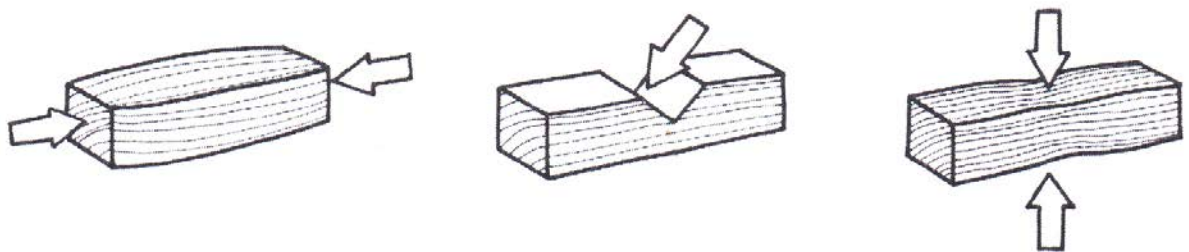


Fig. 1.16 - da M. PIAZZA , Strutture in Legno, Milano 2014 – compressione  $//$  alla fibratura (sinistra), compressione inclinata rispetto alla fibratura (centro), compressione  $\perp$  alla fibratura (destra)

Anche in questo caso facciamo un esempio numerico considerando il legno di classe di resistenza C24. Avremo come valori caratteristici:

resistenza caratteristica a compressione // alle fibre:

$$f_{c,0,k} = 21 \text{ MPa}$$

resistenza caratteristica a compressione  $\perp$  alle fibre:

$$f_{c,90,k} = 2,5 \text{ MPa}$$

La resistenza caratteristica a compressione maggiore è quella parallela alla fibratura; si ottengono valori di resistenza inferiori nel caso di compressione ortogonale alla fibratura e valori intermedi in caso di compressione inclinata, a seconda dell'angolo di incidenza.

Il legno è un materiale che si definisce elasto-fragile; il calcolo strutturale infatti si limita al campo elastico, ed il suo meccanismo di rottura è un meccanismo fragile. L'unica riserva di plasticità del materiale si attiva con la compressione ortogonale alle fibre in quanto sollecitazioni di questo tipo non portano mai il legno a rottura; questo tuttavia continua a schiacciarsi diventando troppo denso per essere considerato utilizzabile.

Una piccola riserva di plasticità è data anche dalla compressione parallela alla fibratura. In questo caso, come teorizzato da Bazan nel 1980, il legame costitutivo del legno può essere graficizzato come in figura 1.17:

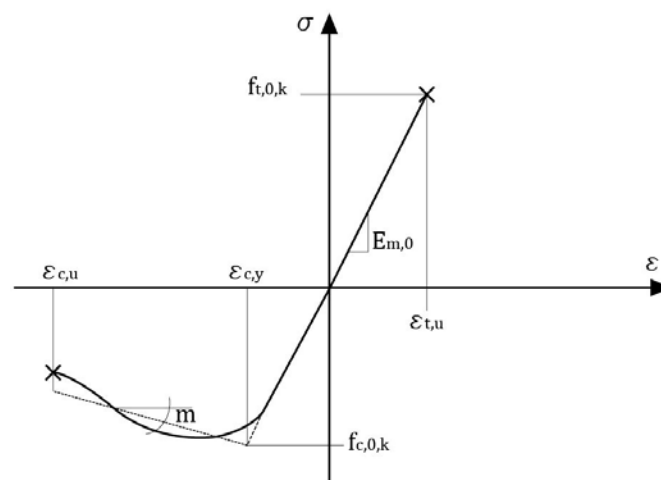


Fig. 1.17 - da M. PIAZZA, Strutture in Legno, Milano 2014 - grafico  $\sigma/\epsilon$ , Bazan 1980

In generale, nella maggior parte delle realizzazioni la duttilità di una struttura in legno è affidata totalmente alle connessioni, le quali si realizzano principalmente in acciaio. Esistono casi di connessione legno-legno, il cui comportamento in caso di sisma è però ancora oggetto di ricerca.

### 3.2 L'igroscopicità del legno

Come premesso nel paragrafo 2.2 i fenomeni di assorbimento e desorbimento dell'acqua perdurano anche una volta che il tronco è stato abbattuto. I fenomeni maggiormente associati

al comportamento igroscopico, nel caso di elementi di legno derivanti dal tronco, sono il ritiro e la fessurazione.

Al momento dell'abbattimento un albero può contenere fino al 300% del peso proprio in acqua; va da sé che il desorbimento di una tale quantità d'acqua, dovuto alla stagionatura del legno, comporta inevitabilmente delle variazioni dimensionali. Questi fenomeni continuano fino a che il legno non si trova in equilibrio con l'ambiente esterno. Per elementi strutturali in condizioni d'uso infatti, la normativa indica come umidità relativa ottimale del legno il 12%, e pone come limite superiore quello del 20% (entro il quale il materiale non può subire attacchi di funghi).

Il fenomeno del ritiro mette in luce anche difetti della fibratura, altrimenti non individuabili. Nel caso in cui la fibratura non fosse dritta infatti, l'elemento di legno potrebbe imbarcarsi o torcersi, non essendo più adatto all'uso strutturale.

Il ritiro avviene in tutte le direzioni: radiale, longitudinale e trasversale. Trattandosi di un materiale anisotropo, tale anisotropia si ritrova anche nei meccanismi di ritiro. Quando la deformazione viene in qualche modo impedita si creano delle fessure. Si osservi la figura 1.18:

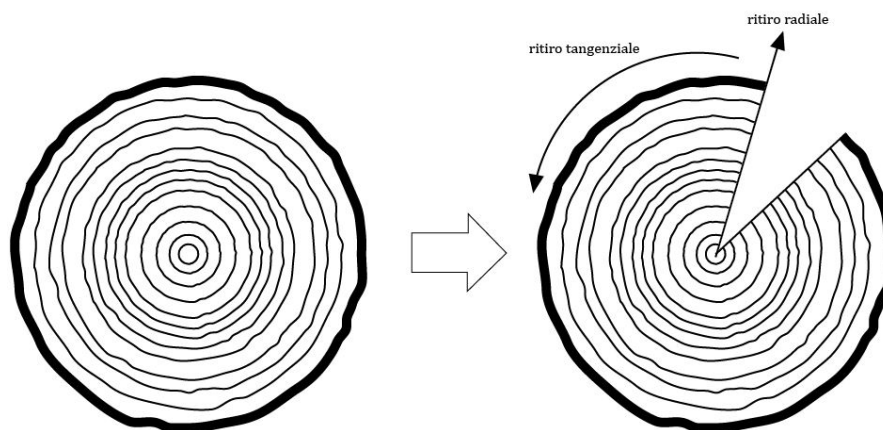


Fig. 1.18 – sezione trasversale di un tronco con indicazione della direzione del ritiro

Quando è presente il midollo la fessura da ritiro è praticamente inevitabile. In figura è schematizzata la fessurazione più comune di una sezione trasversale; in generale il ritiro tangenziale è circa il doppio del ritiro radiale per cui gli anelli, non riuscendo a ridurre il proprio raggio con la stessa velocità con cui dovrebbero ridurre la propria circonferenza, si spezzano dando luogo ad una fessura. Questa particolare fessura corre parallelamente alle fibre poiché quella è la direzione più debole:



Fig. 1.19 – trave di legno fessurata posta in opera

Le fessurazioni di questo tipo comportano problematiche puramente estetiche, ma non incidono sulle prestazioni del materiale.

Nel caso in cui l'elemento ligneo non contenga il midollo, le deformazioni saranno di natura diversa a seconda della parte di tronco da cui derivano. Anche in questo caso, se le naturali deformazioni da ritiro vengono impedito, il legno tenderà a fessurarsi poiché la costrizione avrà generato degli stati di coazione che generalmente si traducono in sforzi di trazione ortogonali alle fibre:

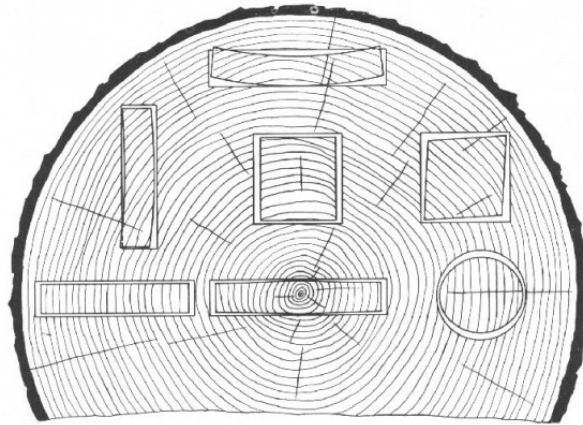


Fig. 1.20 - anisotropia del ritiro, deformazioni naturali delle parti del tronco con o senza midollo

In ambito strutturale è quindi importante rispettare il fenomeni di ritiro per non subirne le conseguenze, sia a livello deformativo sia in termini di corretto funzionamento delle unioni. Gli effetti del ritiro sulla planarità del legno possono essere di *arcatura*, *falcatura*, *svergolamento* e *imbarcamento*:

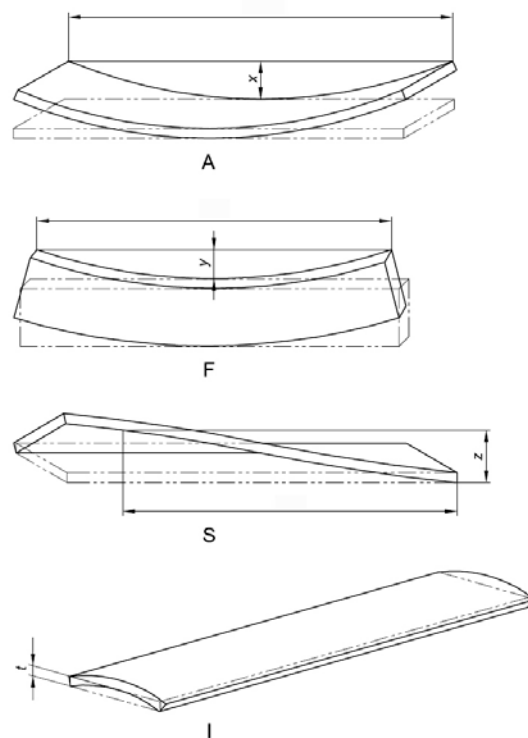


Fig. 1.21 - effetti del ritiro sulla planarità del legno, in ordine: arcatura (A), falcatura (F), svergolamento (S) e imbarcamento (I)

Il ritiro in direzione longitudinale è di gran lunga inferiore al ritiro radiale e tangenziale e per strutture isostatiche è considerato trascurabile.

Altro fenomeno legato al comportamento igroscopico del materiale è la variazione del modulo elastico. Il legno umido è maggiormente deformabile rispetto al legno secco ed il modulo di elasticità istantaneo è inversamente proporzionale all'umidità: più aumenta l'umidità più diminuisce il valore del modulo. Tuttavia a livello strutturale è bene sottolineare che la diminuzione del modulo di elasticità non comporta un aumento della deformabilità proporzionale; questo perché con l'aumentare dell'umidità il legno assorbe acqua aumentando la sua sezione e quindi la sua inerzia.

Per elementi strutturali in legno posti in opera in un ambiente ad umidità costante, le deformazioni differite dovute da un carico permanente e costante non danno luogo ad un significativo fenomeno di *creep*. Viceversa, se le condizioni di umidità ambientale cambiano nel tempo, gli elementi strutturali posti in opera tenderanno a variare il proprio volume gonfiandosi o sgonfiandosi per via dei fenomeni igroscopici precedentemente descritti. Tale variazione incide in primo luogo sulle fibre più esterne, generando delle coazioni interne che, a loro volta, incidono sulle deformazioni dell'elemento.

La variazione di deformabilità dovuta a questo fenomeno, che prende il nome di viscosità meccanico-sorbitiva (*mechano-sorptifcreep*), non può essere spiegato con semplicità a livello macroscopico. Ciò che deve essere chiaro è che se si utilizzano elementi strutturali troppo umidi e li si lascia essiccare sotto carico, le deformazioni che ne deriveranno non saranno né prevedibili né controllabili.

### 3.3 L'incidenza dei difetti sugli elementi strutturali in legno

La presenza o meno di nodi determina una variazione delle caratteristiche meccaniche a rottura del materiale che, nel caso di legno ad uso strutturale, vengono ridotte in diversa misura. Non solo. La presenza di nodi può incidere anche sulle modalità in cui avviene la rottura.

Poniamoci ad esempio nel caso di una trave soggetta a flessione in cui è presente un solo nodo nella zona tesa, come in figura 1.22:

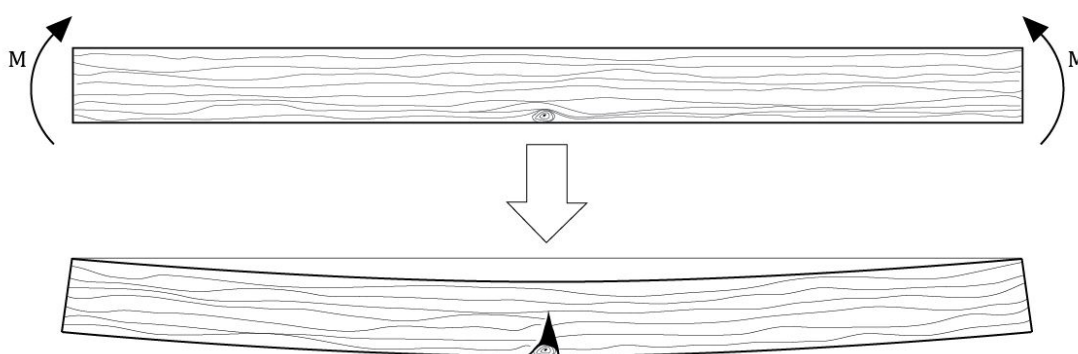


Fig. 1.22 – esempio schematico di trave soggetta a flessione con un difetto nella zona tesa

La rottura avviene dalla parte delle fibre tese in corrispondenza del nodo, prima che si possano raggiungere le dilatazioni di plasticizzazione nella zona compressa.

Viceversa, supponiamo di esercitare il medesimo sforzo flessionale sul medesimo elemento trave, ruotando quest'ultimo di 180° rispetto al caso precedente:



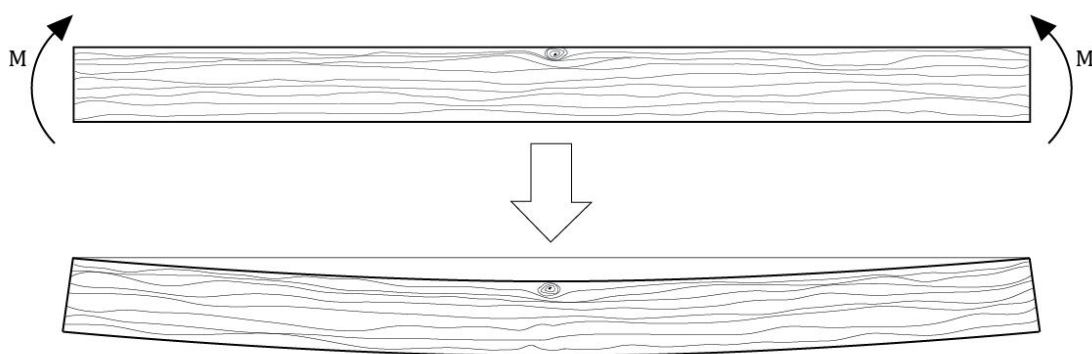


Fig. 1.23 - esempio schematico di trave soggetta a flessione con un difetto nella zona compressa

In questo caso il nodo non induce una rottura fragile. Questo esempio è significativo del fatto che ad assumere importanza nel legno ad uso strutturale non è soltanto la quantità di nodi presenti nell'elemento, ma anche la loro posizione in relazione alla funzione che tale elemento è chiamato a svolgere.

### 3.4 Riferimenti alla normativa

Tutte le caratteristiche descritte in questo capitolo vengono tenute in considerazione in caso di progetto e verifica degli elementi strutturali in legno.

Le normative, sia italiane che internazionali, riguardanti le strutture in legno introducono dei coefficienti che tengono conto della perdita di resistenza del materiale nel tempo.

Tali coefficienti sono valutati a partire dal tipo di carico applicato, dall'umidità del legno, dal suo stato di messa in opera, dal numero e dalla distribuzione di difetti, etc..

Si tratta di coefficienti minorativi che si aggiungono a quelli solitamente utilizzati per strutture in acciaio e calcestruzzo armato, per una progettazione in favore di sicurezza.

Le normative cui si fa riferimento in Italia per la progettazione del legno sono principalmente:

- Norme Tecniche delle Costruzioni, 2008
- Eurocodice 5, UNI EN 1995-1-1, 2005

## 4. Le connessioni

Nelle strutture in legno la connessione assume una particolare importanza per due motivi fondamentali; anzitutto le strutture in legno si prestano ad un certo grado di prefabbricazione, il che implica la necessità di sviluppare dei sistemi di connessione rapidi e veloci. In secondo luogo, il legno è considerato un materiale elasto-fragile con bassissima capacità dissipativa; è importante quindi che la connessione abbia un comportamento dissipativo, soprattutto quando si parla di costruzioni in zona sismica.

Si possono distinguere due tipologie di connessioni: gli assemblaggi tradizionali e gli assemblaggi moderni.

Per assemblaggi tradizionali si intendono le connessioni realizzate legno-legno, in cui la trasmissione degli sforzi è assicurata dalle azioni di contatto. Questa tipologia di assemblaggio richiede una grande precisione di lavorazione ed è adatta ad assorbire degli sforzi di compressione, più limitatamente sforzi di scorrimento e di trazione. La realizzazione dei giunti legno-legno è complicata anche dal fatto che è necessario controllare le deformazioni dovute all'effetto cumulato degli scorrimenti locali, che potrebbero risultare troppo elevate.

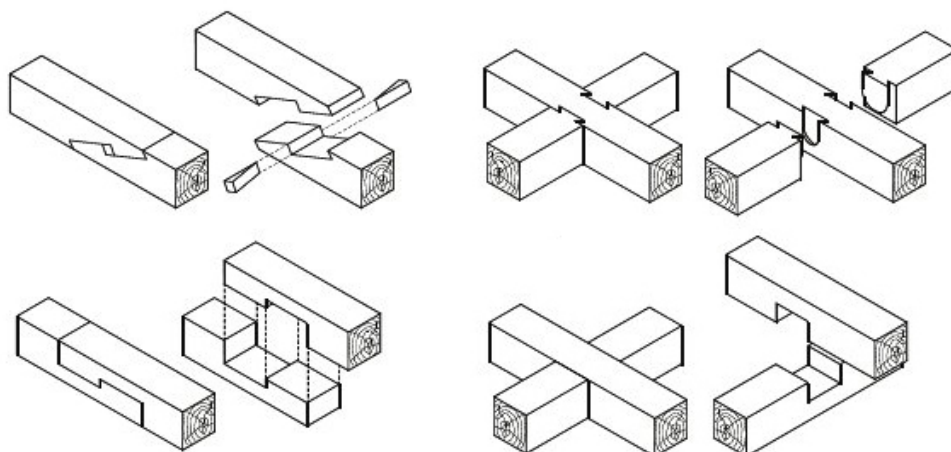


Fig. 1.24 - Esempi di giunzioni legno-legno

Negli assemblaggi moderni invece gli sforzi sono trasmessi attraverso l'interposizione di elementi di diverso materiale, come ad esempio metallo o colla. Il vantaggio di queste connessioni è che tendono a non indebolire gli elementi che connettono, sono di più facile realizzazione e generalmente garantiscono prestazioni più elevate. In particolare, i sistemi di collegamento realizzati mediante l'impiego di connettori metallici a gambo cilindrico vengono detti giunti meccanici, e sono tra i principali motivi di sviluppo delle moderne costruzioni in legno.

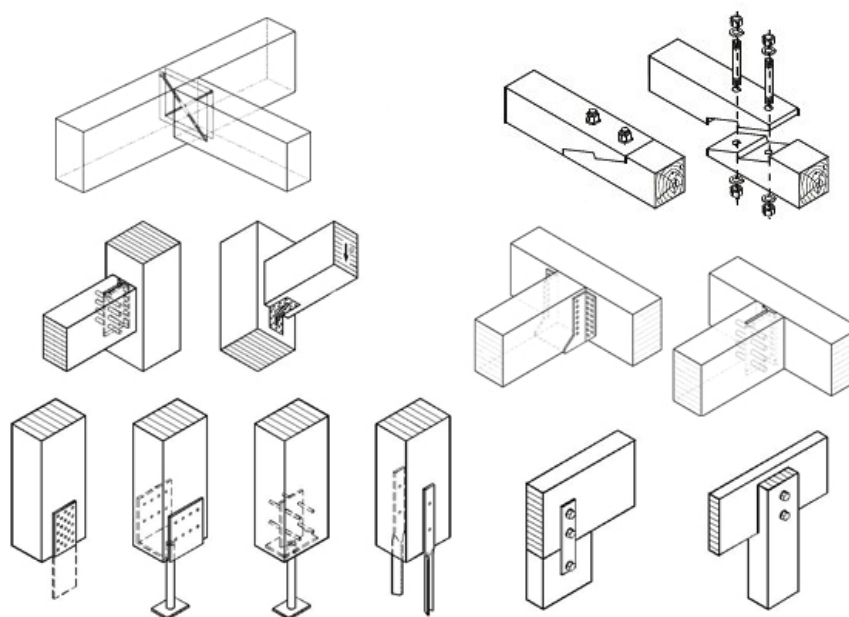


Fig. 1.25 - Esempi di connessione tra elementi lignei mediante giunti metallici

I connettori metallici possono essere chiodi, viti, viti auto perforanti, spinotti, bulloni, piastre d'acciaio, o barre incollate.

Quando si progetta una connessione bisogna tenere sempre presente l'anisotropia del legno; fatta eccezione per i chiodi, quasi tutti i connettori hanno bisogno di una preforatura, onde evitare una divaricazione forzata delle fibre. La disposizione dei connettori tiene conto della direzione della fibratura, dell'esposizione degli elementi connessi, dei fenomeni viscosi e delle sollecitazioni che deve essere in grado di trasmettere.

Le connessioni possono essere realizzate a vista o nascoste nell'elemento ligneo; vista la vastità e la varietà delle possibili soluzioni tecnologiche non è pensabile di fornire una classificazione esaustiva all'interno di questo paragrafo. Tuttavia la conoscenza di questi argomenti è fondamentale per chi vuole progettare struttura in legno.

Per adesso ci limiteremo a dire che la resistenza dei connettori differisce da quella del legno, motivo per cui esistono diverse modalità di collasso. Per progettare una connessione secondo i criteri della normativa ci si rifà alla teoria di Johansen del 1949, secondo cui è necessario che il collasso di una connessione sia dovuto al rifollamento del legno.

Tutto quello che si progetta secondo normativa quindi non tiene conto delle possibili rotture fragili:

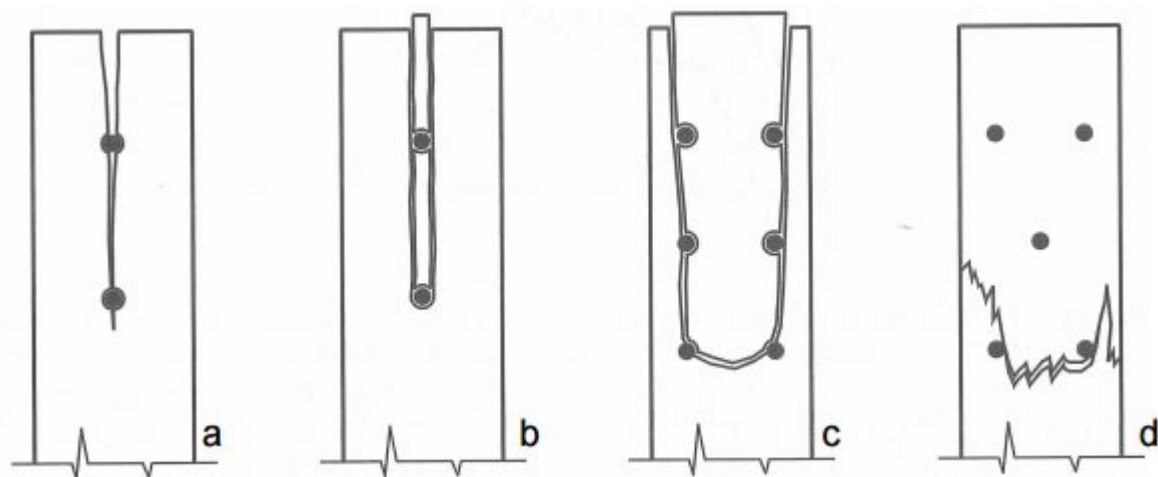


Fig. 1.26 - modalità di rottura fragili per connessioni realizzate mediante connettori a gambo cilindrico; a) fenditura, o *splitting*; b) estrazioni di tasselli di legno, o *plug shear*; c) strappo in corrispondenza di un gruppo di connettori, o *group tear out*; d) rottura per trazione, o *tension*

Per assicurarsi che non si verifichino rotture fragili la normativa impone dei limiti geometrici per la disposizione dei connettori; in particolare:

- Per evitare le rotture di tipo a) e b) vengono indicate le distanze minime dai bordi e tra i connettori stessi;
- Per evitare la rottura di tipo c) si considera che la resistenza complessiva della connessione sia inferiore alla somma delle resistenze dei singoli connettori;
- Per evitare la rottura di tipo d) si impone la verifica della sezione netta dell'elemento ligneo.

Tutti i calcoli applicati alle connessioni quindi, si basano sul fatto che la rottura avvenga per rifollamento del legno, e non sono altrimenti applicabili. In generale il rifollamento è un

fenomeno di plasticizzazione che si verifica nelle giunzioni meccaniche quando la tensione di rifollamento del materiale giuntato viene superata, conducendo ad una plasticizzazione della superficie in contatto col connettore con conseguente ovalizzazione del foro.

## 5. Legno e derivati per uso strutturale

In questa tesi si è scelto di analizzare le coperture in legno massiccio di grandi dimensioni. Tuttavia per completezza, nonché per motivare al meglio la scelta di questo tema, è bene fare una rapida panoramica su quelli che sono le diverse tecnologie che utilizzano il legno, soprattutto in ambito strutturale. Oltre al legno massiccio, nel corso dei secoli si sono sviluppate delle lavorazioni che hanno portato a produrre elementi o materiali derivanti dal legno; tali materiali possono essere divisi in due macro gruppi: elementi bidimensionali ed elementi tridimensionali.

- **Elementi bidimensionali derivanti dal legno: I pannelli**

Derivando direttamente dal tronco, un elemento di legno a forma di colonna, o trave, è facilmente ricavabile; tuttavia la sua facilità di lavorazione ha consentito la produzione di elementi bidimensionali, il cui assemblaggio ha contribuito a sviluppare diverse tecnologie costruttive.

I pannelli di legno sono utilizzati sia per partizioni orizzontali che per partizioni verticali, ed il loro contributo statico gli permette di ricoprire aree anche molto estese. Uno dei sistemi più diffusi, soprattutto in Canada ed USA, è ad esempio quello del *platform frame*: un sistema composto di tavole di legno disposte nelle tre direzioni, tamponate ed irrigidite da pannelli di legno connessi mediante chiodi o viti:

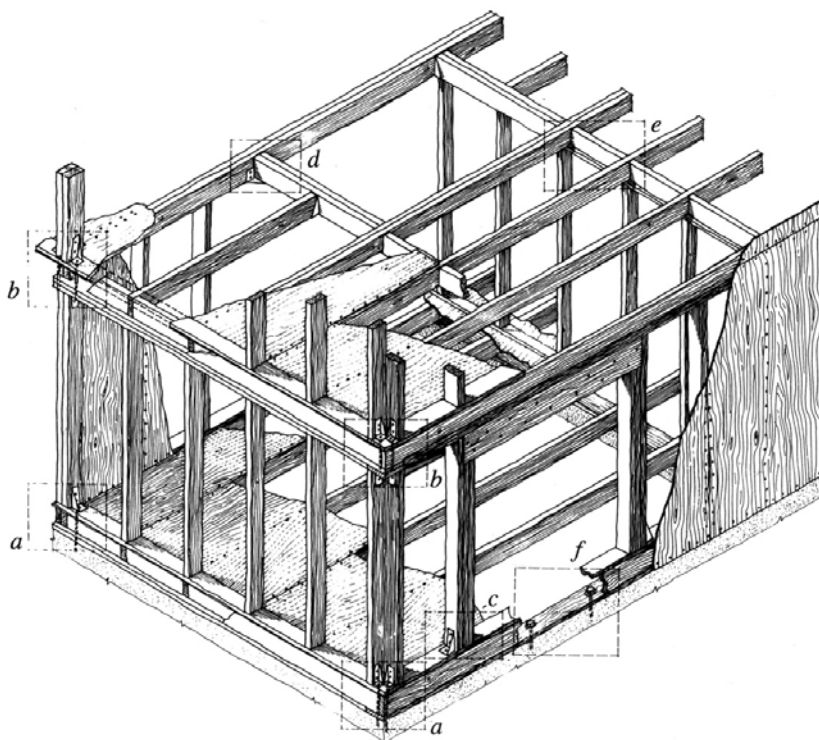


Fig. 1.27 – disegno assonometrico di un sistema *platform frame*

Tuttavia lo scarso rendimento della trasformazione di legno in tavole ha portato allo sviluppo di nuovi prodotti derivanti dal legno. Il concetto è quello di ridurre il tronco in elementi di dimensioni ridotte ed assemblarli insieme mediante l'aiuto di opportuni adesivi. I prodotti che ne conseguono sono di natura artificiale e, quindi, il loro comportamento meccanico è ben più prevedibile di quello del legno massiccio. Importante parametro di valutazione per questi prodotti misti legno/colla è la loro coesione.

Nonostante l'intervento dell'adesivo, il legno seppur ridotto in scaglie o tavole è comunque sensibile all'umidità ed alla durata del carico, esattamente come accade nel caso di legno massiccio. A livello normativo infatti, compariranno gli stessi coefficienti di sicurezza, seppure quantitativamente diversi, proprio per tenere conto del comportamento reologico e della perdita di resistenza nel tempo.

Tipologie di pannelli molto diffuse sono quelle di legno compensato e di legno massiccio. Un pannello di legno compensato è molto costoso da produrre ed il suo impiego si sta limitando a particolari campi di applicazione. Si tratta di ricavare dei veri e propri fogli *srotolando* gli anelli del tronco (che deve essere di ottima qualità); questi fogli, dopo aver subito diversi processi di lavorazione, vengono incollati uno sull'altro variando l'orientamento del foglio di 90 gradi rispetto al precedente, in modo tale da garantire una buona resistenza in ogni direzione.

I pannelli di legno massiccio, o *Solid Wood Panels* (SW) sono invece formati da tavole di legno accostate lungo il bordo e sovrapposte a strati di tavole incrociate. L'utilizzo di tavole permette la selezione delle stesse, tale da eliminare quelle in cui sono presenti difetti.

Queste due tipologie di pannelli rispettano la struttura spaziale e le caratteristiche del legno massiccio di partenza. Un discorso diverso va fatto invece per i pannelli di fibre e di particelle. I pannelli di fibre si ottengono disaggregando il legno fino, quasi, alla separazione totale delle fibre. I processi di lavorazione, che comprendono l'aggiunta di additivi, o la pressa del prodotto, portano a pannelli di tipo *duro*, cioè ad alta densità, o pannelli di tipo *tenero*, ossia a bassa densità. I pannelli ad elevata densità si utilizzano soprattutto come tamponamento nel settore dell'edilizia e del mobile, e sono caratterizzati nella maggior parte dei casi da spessori molto modesti; nei paesi nordici invece, i pannelli di tipo tenero hanno trovato vasta diffusione soprattutto se utilizzati come isolante, ed il loro spessore può raggiungere dimensioni considerevoli.

I pannelli di particelle utilizzano invece legno ridotto quasi in piccolissimi pezzi, detti appunto particelle. La riduzione di legno in particelle ha consentito di utilizzare anche il materiale di risulta di altre lavorazioni. In questi pannelli il legno mantiene la propria struttura ma l'orientamento delle particelle, per lo più casuale, conferisce delle caratteristiche di resistenza che sono spesso molto inferiori rispetto a quelle del legno di partenza.

La produzione di questi pannelli richiede un grande utilizzo di additivi, ai quali è interamente affidata la trasmissione del taglio; spessore e densità sono determinati dall'utilizzo di una pressa.

L'utilizzo in ambito edilizio di tali pannelli, a meno di casi particolari, non è quasi mai di tipo portante; tuttavia è molto diffuso per installazioni provvisorie di esposizioni, o per tamponamenti, vista la grande resistenza ad acqua e fuoco.

Un particolare tipo di pannelli, molto simile per certi versi a quelli di particelle, è costituito dai *engineered lumber*. Fanno parte di questa tipologia i pannelli di OSB (*Oriented Strand Board*) e di LVL (*Laminated Veneer Lumber*); tali pannelli sono destinati prevalentemente ad un utilizzo strutturale.

I pannelli di OSB sono composti di scaglie di dimensioni controllate che li penalizzano meno, in termini di caratteristiche meccaniche, rispetto ai pannelli di particelle. Una evoluzione del sistema *platform frame* utilizza infatti pannelli di OSB come tamponamento:

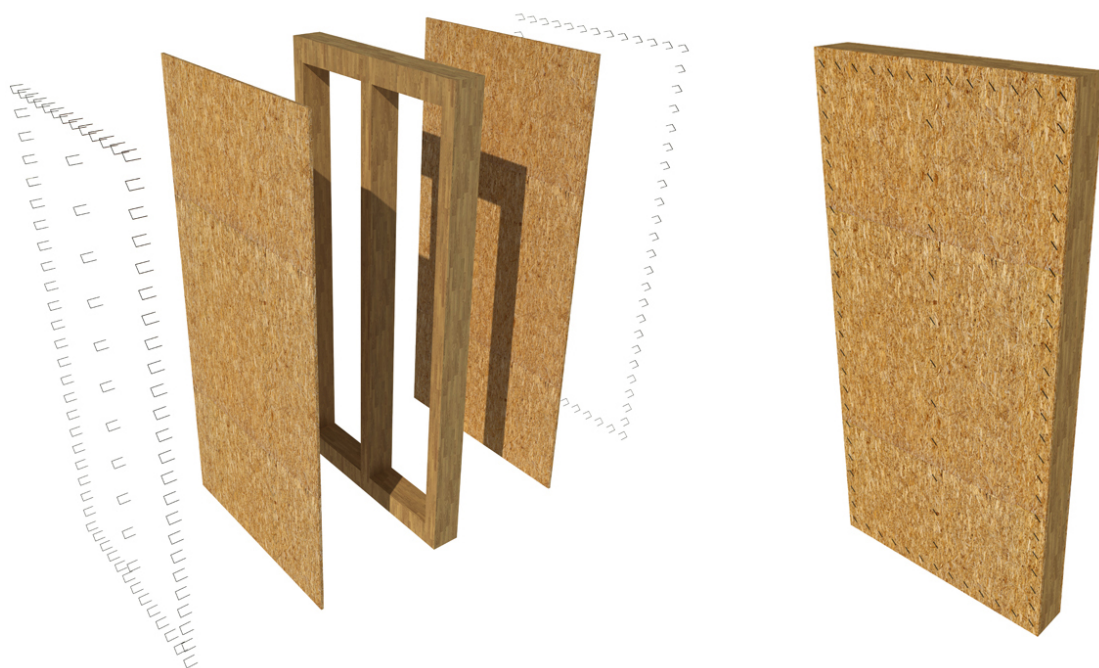


Fig. 1.28 – vista assonometrica di una soluzione tecnologica che utilizza pannelli OSB

La tecnologia tramite cui vengono realizzati tuttavia, è caratterizzata da una forte discontinuità, motivo per cui in ambito strutturale è bene che il loro impiego preveda che le sollecitazioni arrivino nel loro piano, e non trasversalmente ad esso.

Per il caso dei pannelli di LVL, sebbene permanga la problematica legata a sollecitazioni fuori dal piano, la loro tecnologia li rende equiparabili al legno massiccio e lamellare in termini di comportamento reologico e dipendenza delle proprietà meccaniche in funzione della durata del carico.

- **Elementi tridimensionali derivanti dal legno: il legno lamellare, micro lamellare e x-lam**

Con il termine legno lamellare, o legno lamellare incollato (*glulam*), si intende un prodotto a base di legno composto dalla sovrapposizione di segati dallo spessore modesto, non superiore ai 50mm. La sezione di un elemento strutturale di legno lamellare è composta di una serie di segati uniti mediante adesivi.

Rispetto al legno massiccio il legno lamellare ha due vantaggi fondamentali: la capacità di ovviare alla presenza dei nodi e il superamento del limite dimensionale dettato dalla grandezza naturale del tronco.

Per capire come è possibile ovviare al problema dei nodi è bene fare un esempio. Supponiamo di ricavare da un tronco una trave di legno massiccio di date dimensioni; questa conterrà sicuramente un determinato numero di nodi che ne indeboliranno le prestazioni meccaniche. Supponiamo ora di prendere questa stessa trave e segarla lungo la direzione della fibratura fino a suddividerla in un dato numero di tavole; incollando le tavole una sull'altra, invertendone l'ordine e ruotandole di 180° intorno al loro asse verticale, rispettando la direzione della fibratura, il difetto non sarà più concentrato in un solo punto, ma si distribuirà

su tutta la lunghezza della trave; in questo modo la sua incidenza sulla prestazioni meccaniche sarà inferiore, avvicinandosi a quelle di un elemento privo di difetti:

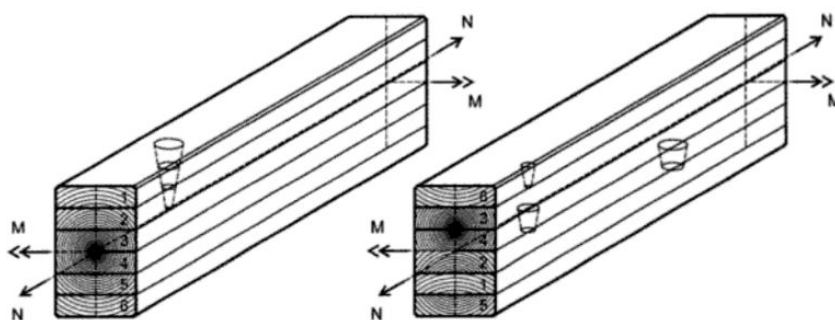


Fig. 1.29 – schema esemplificativo della riduzione del difetto in una trave di legno lamellare

Questo esempio è puramente teorico ma è utile a capire la logica per cui si ottengono vantaggi nella ricomposizione delle tavole.

Una ulteriore evoluzione di questa tecnologia è rappresentata da elementi di micro lamellare; in questo caso le tavole che compongono l'ipotetica trave sono composte di elementi ancora più sottili, aumentando di fatto le caratteristiche di resistenza e di lavorabilità. Fanno parte di questa categoria sia i SW che i pannelli LVL precedentemente descritti. Con il micro lamellare, ossia con l'LVL, si possono realizzare pannelli, travi e pilastri, ed è un sistema molto diffuso in nord Europa.

Altro vantaggio di questi derivati del legno, che sono comunemente definiti come legni ingegnerizzati, è il fatto che essendo il risultato di un assemblaggio di tavole, la lunghezza dell'elemento finito può essere teoricamente illimitata. Questa tecnologia si è sviluppata proprio per la necessità di superare il limite dimensionale del legno nel caso di strutture di grandi luci; l'unico vincolo dimensionale è dato dalla possibilità di lavorazione nell'impianto di produzione, e dalla trasportabilità.

Per quanto riguarda il x-lam (ossia *cross-lam*), questo viene utilizzato per la produzione di pannelli tridimensionali; il termine *x* sta per *cross* ovvero incrocio, ed indica il fatto che la direzione della fibratura negli strati che compongono il prodotto finale è ruotata di 90° tra strato e strato.



Fig. 1.30 – pannelli x-lam a tre e cinque strati

Questa soluzione tecnologica è motivata dal fatto che in entrambe le direzioni del piano la resistenza del pannello è proporzionale alla resistenza del legno // alla fibratura, ovvero la resistenza maggiore.

Con i pannelli di x-lam si possono realizzare sia partizioni verticali che partizioni orizzontali. Quando viene utilizzato come elemento portante verticale la sua funzione è assimilabile a quella della muratura portante.

L'utilizzo del *cross-lam* ha avuto una vasta diffusione negli ultimi anni, ed è proprio grazie a questa tecnologia che è stato possibile realizzare edifici multipiano in legno anche di 9 o 11 piani di altezza.

## 5.1 Legno lamellare incollato

Come è stato detto nella premessa di questo paragrafo, il tema della ricerca riguarda le coperture di grandi luci. Per questo particolare tipo di strutture, parlando di ingegneria del legno, tecnologie come i pannelli o il x-lam non rappresentano soluzioni ottimali.

Le travi in legno lamellare al contrario, si sono sviluppate proprio a partire dall'idea di riuscire a coprire grandi luci utilizzando elementi lignei, ed è bene soffermarci su questa tecnologia per capire quali sono i motivi per cui si è scelto di lavorare con il legno massiccio.

Il legno lamellare comporta dei vantaggi oggettivi in ambito strutturale. Con i dovuti processi di produzione è possibile realizzare elementi strutturali lineari o curvi di grandi dimensioni, assolutamente adatti nell'impiego di coperture per grandi luci. Per questo motivo negli ultimi decenni le maggiori case produttive si sono specializzate sulla produzione di legno lamellare piuttosto che massiccio, il cui utilizzo rimane limitato a particolari casi.

Anche le caratteristiche di resistenza vanno a favore del *glulam*, eliminando o limitando il problema della difettosità del legno. Bisogna considerare però che una struttura in legno lamellare non è una struttura in legno.

Tutti quei prodotti che fanno parte dei legni ingegnerizzati sono dei compositi. Ad esempio, una struttura in calcestruzzo armato non può essere definita una struttura in acciaio, così come non può essere definita una struttura in calcestruzzo, poiché è l'unione di questi due materiali che ne determina il comportamento meccanico.

Allo stesso modo, un elemento strutturale composto di colla e legno non può essere definito semplicemente come un elemento di legno, poiché la colla ha una rilevanza molto forte in termini di proprietà meccaniche.

All'adesivo infatti è attribuito non solo il compito di tenere unite le tavole di legno, ma anche di consentire la trasmissione delle forze tra una tavola e l'altra. Ciò vuol dire che, nonostante il volume di colla di una trave in legno lamellare sia molto inferiore rispetto al volume di legno, il suo comportamento è determinato al fine di caratterizzare tale elemento con delle specifiche caratteristiche di resistenza o deformabilità.

Le classi di resistenza del legno lamellare incollato si indicano con la sigla "GL" (*Glue Laminated Timber*) seguito da una cifra che corrisponde alla resistenza caratteristica a flessione, e da un'ultima lettera che varia tra *h* e *c*, che indicano rispettivamente la natura omogenea (*homogeneous*) o combinata (*combined*) del legno utilizzato.



### Classi di resistenza per il lamellare di conifera

Valori caratteristici per le proprietà di resistenza in N/mm <sup>2</sup>		LEGNO LAMELLARE (UNI EN 1194)					
		GL 24c	GL 24h	GL 28c	GL 28h	GL 32c	GL 36c
resistenza a flessione	$f_{m,k}$	24	24	28	28	32	36
resistenza a trazione parallela alla fibratura	$f_{t,0,k}$	14	16,5	16,5	19,5	19,5	22,5
resistenza a trazione perpendicolare alla fibratura	$f_{t,90,k}$	0,35	0,4	0,4	0,45	0,45	0,5
resistenza a compressione parallela alla fibratura	$f_{c,0,k}$	21	24	24	26,5	26,5	29
resistenza a compressione perpendicolare alla fibratura	$f_{c,90,k}$	2,4	2,7	2,7	3,0	3,0	3,3
resistenza a taglio	$f_{v,k}$	2,2	2,7	2,7	3,2	3,2	3,8

Valori caratteristici per le proprietà di massa volumica in kg/m <sup>3</sup>		LEGNO LAMELLARE (UNI EN 1194)					
		GL 24c	GL 24h	GL 28c	GL 28h	GL 32c	GL 36c
modulo di elasticità medio parallelo alla fibratura	$E_{0,mean}$	11.600	11.600	12.600	12.600	13.700	14.700
modulo di elasticità parallelo alla fibratura	$E_{0,05}$	9.400	9.400	10.200	10.200	11.100	11.900
modulo di elasticità medio perpendicolare alla fibratura	$E_{90,mean}$	320	390	390	420	420	460
modulo di taglio medio	$G_{mean}$	590	720	720	780	780	850
massa volumica	$\rho_k$	350	380	380	410	410	430

Fig. 1.31 – classi di resistenza per il legno lamellare di conifera

È bene sottolineare che le lamelle di legno che vanno a comporre un elemento lamellare incollato, sono di legno massiccio e, come tali, sono soggette agli stessi fenomeni esposti nei paragrafi precedenti. Anche per il *glulam* quindi, diventano indispensabili in fase di produzione e messa in opera il controllo dell'umidità o dello stato di fessurativo del legno. Per il *glulam* inoltre la scelta dell'adesivo assume particolare rilevanza. Le colle utilizzate per incollare tavole o pannelli di legno ad uso strutturale sono colle termoindurenti, ossia quelle colle che polimerizzano per effetto della temperatura. I prodotti comunemente utilizzati dopo essere stati riscaldati per indurli all'indurimento, non sono più solubili e rimangono stabili. Gli adesivi più diffusi sono principalmente tre:

- Resine fenol-resorcniche: composte da una base di fenolo e formaldeide. Il reticolo chimico è molto piccolo e non consente il movimento delle cellule del legno al suo interno. Queste colle sono caratterizzate da un colore scuro e, vista la presenza di fenolo, da un odore molto pungente in fase di produzione; hanno inoltre lo svantaggio che in caso di incendio vanno incontro a degradazione chimica poiché il fenolo, che è un alcol, ad 81°C raggiunge il suo punto di fiamma.
- MUF: resine a base di Melamina, Urea e Formaldeide. La presenza di melamina contribuisce ad aumentare la resistenza all'acqua, poiché a contatto con l'acqua si innesca una reticolazione irreversibile. Anche in questo caso le colle si caratterizzano da un odore pungente, ma l'assenza del fenolo fa sì che l'esposizione ad alte temperature non porti a degradamento chimico. L'indurimento avviene sia per umidità e calore, sia per via meccanica tramite l'utilizzo di presse. Questa tipologia di colle si distingue per il colore chiaro, o *linea di colla chiara*.
- Colle poliuretaniche: caratterizzate dal fatto che non utilizzano formaldeide. Questa tipologia di adesivi si compone di elementi naturali ed ha quindi caratteristiche di durabilità, di resistenza alla variazione di temperatura o di umidità, inferiori rispetto

agli altri tipi di colle. Hanno però il vantaggio di essere dei ritardanti di fiamma, sebbene il loro impiego in ambito strutturale risalga solo agli ultimi anni.

In passato le colle a base di formaldeide sono state le più utilizzate in ambito strutturale. L'emissione di formaldeide libera tuttavia è un parametro da tenere sotto controllo a causa della sua dannosità per l'ambiente, senza considerare che un composto di formaldeide in fase di produzione sprigiona gas tossici. Non solo, questa sostanza è irritante, corrosiva e cancerogena ed è classificata come allergene.

Per questi motivi nei tempi più recenti moltissime aziende hanno promosso l'utilizzo di colle poliuretaniche, o comunque di adesivi privi di formaldeide, i quali tuttavia hanno caratteristiche di durabilità peggiori.

## 6. Conclusioni

Le attuali costruzioni in legno, specie in caso di edifici alti o grandi coperture, utilizzano materiali ingegnerizzati. Tale scelta, per quanto vantaggiosa, tende a limitare l'utilizzo di legno massiccio, a discapito di una tradizione costruttiva propria del nostro Paese.

Nasce allora una riflessione mirata a determinare il valore del recupero di un saper fare, rivolta quindi ad una attualizzazione delle tecniche costruttive del passato in relazione al progetto delle grandi opere contemporanee.

In questo contesto va inquadrato il tema della ricerca: le grandi coperture realizzate in legno massiccio. Se da una parte è vero che l'utilizzo di legno lamellare comporta dei vantaggi costruttivi, dall'altra va sottolineato come tali vantaggi vengano meno quando gli elementi strutturali sono di piccole dimensioni. In questo caso, si eviterebbe il problema del limite dimensionale superiore degli elementi, nonché il problema della presenza dei difetti, potendo presumere di lavorare su elementi di legno netto, e non ad uso strutturale.

D'altro canto se si pensa di superare una grande luce con elementi inflessi, la scelta di utilizzare elementi di piccole dimensioni, e quindi di bassa inerzia, risulta inadeguata; al contrario questa scelta ben si accompagna ad una scelta di tipo formale che prevede di lavorare su strutture non piane, bensì curvate, in modo tale che in esse predominino gli sforzi di trazione e compressione rispetto a quelli di momento flettente.

A seguito del lavoro svolto, è stata identificata una tipologia strutturale che prende il nome di *gridshell* e che ben si adatta a soddisfare queste esigenze progettuali; si tratta di strutture a forma resistente composte di elementi di piccole dimensioni che formano un reticolo spaziale.

I capitoli successivi sono rivolti alla comprensione delle caratteristiche meccaniche e formali che determinano il funzionamento di questa tipologia strutturale.



## Capitolo 02

### Le Gridshell di Legno Massiccio

#### 1. Premessa: le strutture spaziali

Le gridshell sono delle strutture portanti spaziali resistenti per forma. Sebbene tutte le strutture, anche i più ordinari telai in cemento armato, abbiano a livello geometrico un'articolazione spaziale, siamo abituati, in sede di modello, a trascurarne la tridimensionalità. Esistono infatti strutture tridimensionali che nascono come collaborazione di strutture piane e che, sotto certe ipotesi, possono essere ricondotte a modelli piani; studiare tali strutture mediante modelli spaziali non porta infatti alcun vantaggio ai fini del progetto, e la difficoltà del calcolo non risulterebbe proporzionata al risultato. Ad esempio, una struttura a telaio spaziale può essere ricondotta ad una serie di telai piani purché i pilastri siano disposti lungo direttrici lineari, e il collegamento orizzontale possa essere ritenuto infinitamente rigido.

Ciò premesso, quali sono le condizioni per cui si rivela necessario considerare il comportamento spaziale di una struttura? Quando la sua conformazione tridimensionale non può essere trascurata senza comprometterne la comprensione meccanica. È il caso di tutte quelle strutture che si articolano spazialmente e la cui forma contribuisce in modo determinante al comportamento statico: sono le strutture spaziali resistenti per forma. Tali strutture sono descritte da una superficie non piana ed è indispensabile, affinché ne venga sfruttata la potenziale capacità portante, che le soluzioni strutturali che le realizzano assumano la medesima conformazione spaziale della forma resistente.

Le tipologie strutturali che meglio sfruttano le capacità portanti delle forme resistenti possono essere raggruppate in due grandi famiglie: strutture continue o strutture discrete. La dicotomia continuo/discreto ha a che fare con la continuità della materia; nel primo caso ci si riferisce a strutture nelle quali non vi è interruzione di materia (gusci o *shell*), mentre nel secondo caso ci si riferisce a strutture in cui i vuoti predominano sui pieni (reticoli spaziali o *gridshell*).

In questo capitolo ci soffermeremo sugli aspetti tecnologici e costruttivi delle gridshell in legno massiccio, analizzando brevemente alcuni casi studio; esplicheremo inoltre il concetto di forma resistente ad esse strettamente connesso.

#### 1.1 Tipologie strutturali: shell e gridshell

Come abbiamo detto, le shell e le gridshell differiscono per il fatto che le prime sono caratterizzate dalla continuità del materiale impiegato, mentre le seconde mostrano delle discontinuità materiali e sono quindi descritte da un reticolo spaziale. Tuttavia, è bene premettere che per grandi luci sia shell che gridshell rappresentano due soluzioni che lavorano principalmente per forma, traducendo i carichi applicati in soli sforzi di trazione o compressione. L'assenza di sollecitazioni flessionali, se non in corrispondenza dei bordi o di

alcune singolarità, rappresenta una ottimizzazione del materiale che consente l'utilizzo di spessori sottili.

Si pensi difatti all'andamento tensionale di una trave soggetta a flessione e di una seconda trave soggetta a sforzo assiale:

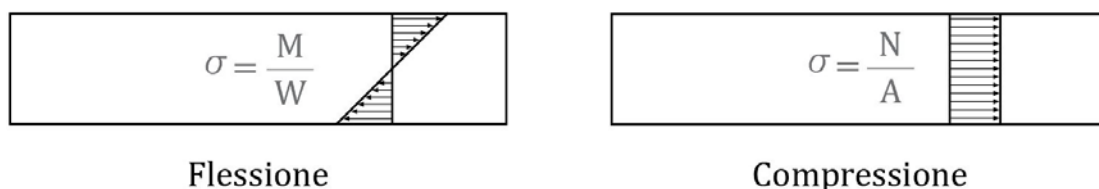


Fig. 2.1 - andamento tensionale per travi soggette a flessione (sinistra) e sforzo assiale (destra)

In un elemento soggetto a compressione o trazione tutta l'area della sezione reagisce in modo uniforme alla sollecitazione esterna, mentre nel caso della flessione sono i lembi superiori ed inferiori quelli maggiormente sollecitati; difatti, in caso di sforzi di trazione o compressione la caratteristica geometrica dominante è l'area della sezione, mentre nel caso della flessione domina il momento d'inerzia, e quindi l'altezza della sezione. Questo stesso ragionamento può essere applicato ad una superficie in cui lo spessore gioca il ruolo dell'altezza.

Ad esempio, in figura 2.2 è riportata la copertura del ristorante Los Manantiales, realizzato in Messico nel 1958 da un progetto dell'architetto spagnolo Felix Candela.



Fig. 2.2 - copertura del ristorante Los Manantiales, Messico

Quest'opera è stata realizzata con un getto continuo di cemento armato di spessore costante pari ad 4 cm. La luce massima, senza appoggi intermedi, è di 30 metri e la geometria è stata disegnata come una aggregazione di otto volte composte a raggiera a partire da un comune punto centrale. La geometria cui è stato fatto esplicito riferimento è quella del paraboloide iperbolico (vedi figura 2.3).

Per capire quanto la resistenza della forma abbia contribuito alla resistenza globale della struttura basti pensare che il rapporto tra la luce coperta e lo spessore della sezione resistente della shell è di 1/750, quando al contrario, nel caso di travi in calcestruzzo armato, una buona approssimazione di questo rapporto è ritenuta essere 1/10.

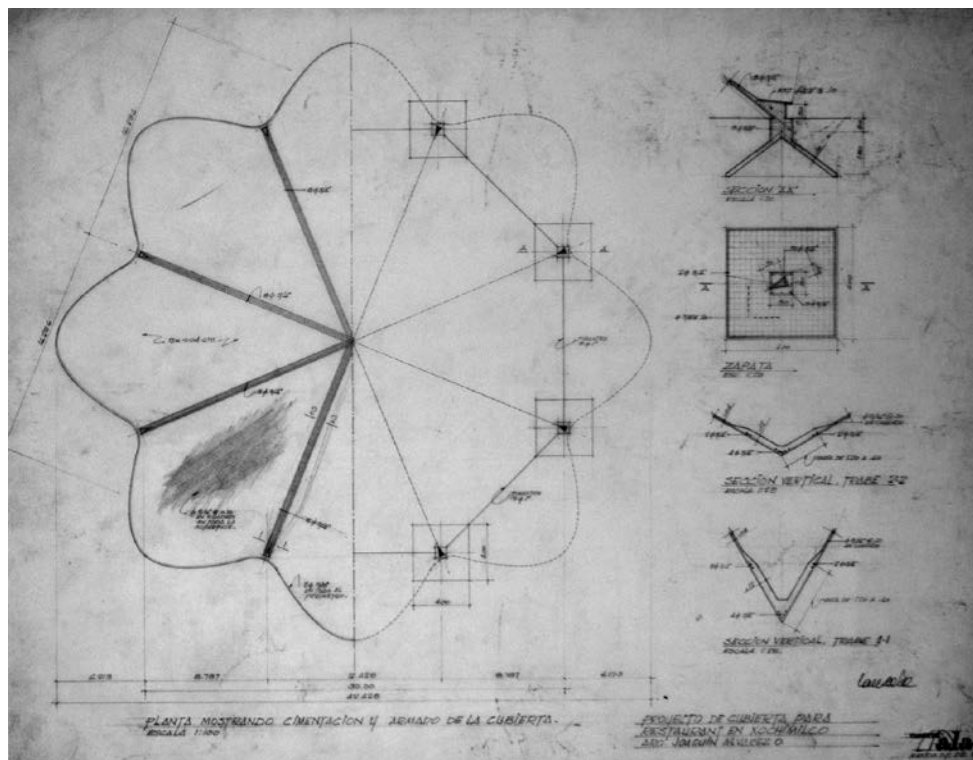


Fig. 2.3

Il limite di questa tipologia strutturale, ossia delle shell, è che ad oggi la si può realizzare solo con un materiale come il calcestruzzo armato, unico nel suo genere in termini di continuità. Tuttavia la natura stessa del materiale porta con sé due svantaggi non trascurabili. In primo luogo il calcestruzzo armato è un materiale intrinsecamente pesante, e ciò comporta un limite dimensionale strettamente correlato al fattore di scala. Nel caso di coperture continue infatti, si può dire che quasi l'80% del carico portato è costituito dal peso proprio; va da sé che più aumenta la luce da coprire più occorre aumentare la sezione della shell, fino ad arrivare ad un punto in cui l'aumento di sezione comporta un aumento di peso eccessivo in confronto alla capacità resistente. In secondo luogo, la costruzione di shell in cemento armato caratterizzato da una geometria complessa implica difficoltà realizzative delle casseforme di legno necessarie al getto, dato che, soprattutto nel caso di superfici a doppia curvatura, si pone il problema che il legno non può essere curvato in due direzioni. Ciò significa che la soluzione costruttiva potrebbe comportare un costo per le opere provvisorie ben più elevato rispetto al costo dell'opera stessa.

Pertanto, per grandi luci le gridshell rappresentano una soluzione ottimale, a patto che siano costituite da materiali caratterizzati da un elevato rapporto tra resistenza e peso specifico. Per la loro realizzazione si possono usare diversi materiali da costruzione in relazione alla loro *resistenza intrinseca*.

Questa può essere definita a partire dall'analisi del rapporto resistenza/peso di una porzione di superficie (vedi figura 2.4):

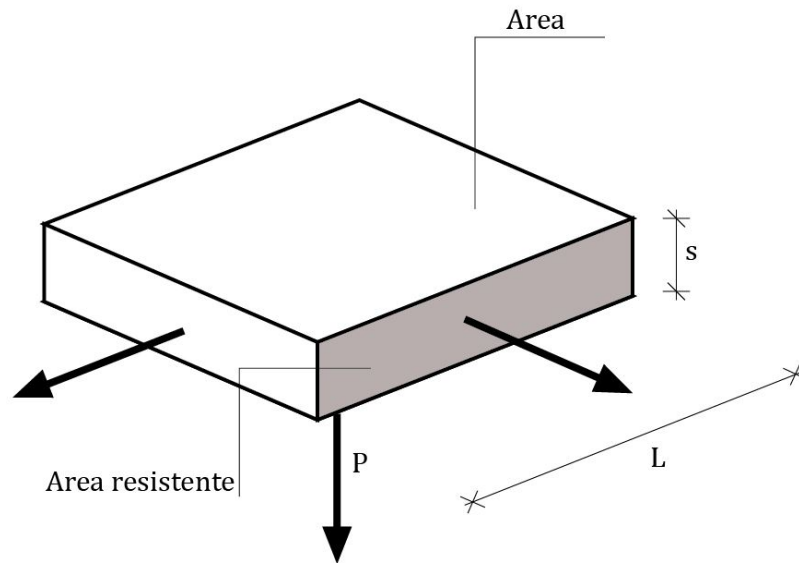


Fig. 2.4 – schema di una generica porzione di superficie

Possiamo definire le seguenti grandezze meccaniche:

$V = s L^2$	(volume)
$A_R = sL$	(area resistente)
$P = \gamma sL^2$	(Peso = peso specifico x volume)
$N_R = sL\sigma_R$	(Resistenza della sezione = area resistente x resistenza del materiale)

Il rapporto tra la resistenza del materiale che si esplica nella sezione ed il peso del volume portato è pari a:

$$\frac{N_R}{P} = \frac{s L \sigma_R}{\gamma s L^2}$$

da cui:

$$\frac{N_R}{P} = \frac{\sigma_R}{\gamma} \frac{1}{L}$$

Nella formula di cui sopra, il rapporto  $\sigma_R/\gamma$  rappresenta la resistenza intrinseca del solo materiale mentre il rapporto  $N_R/P$  e' assimilabile ad un coefficiente di sicurezza nella progettazione. Si comprende che maggiore è il rapporto  $\sigma_R/\gamma$ , maggiore è la luce (L) che la struttura sarà in grado di coprire a parità di sicurezza richiesta. Nella tabella sottostante si riportano, per materiale di costruzione di uso comune, i valori di resistenza caratteristica a compressione ed i rispettivi pesi specifici:

	$\sigma_R$ [N/mm <sup>2</sup> ]	$\gamma$ [N/dm <sup>3</sup> ]	$\sigma_R/\gamma$
Acciaio S235	235	76,96	3,09
Acciaio S275	275	76,96	3,57
C 25/30	25	22,54	1,11
C 28/35	28	22,54	1,24
Abete bianco GL24h	24	4,41	5,44
Abete bianco C24	21	4,31	4,87

Fig. 2.5 – tabella riassuntiva della resistenza intrinseca di diversi materiali

In termini di resistenza intrinseca quindi, il legno risulta il materiale più performante. In particolare si noti che la resistenza intrinseca del calcestruzzo armato è circa tre volte inferiore a quella dell'acciaio e cinque volte inferiore a quella del legno; questa considerazione basta a far capire come il cemento armato mal si adatti alla tipologia della gridshell, la cui leggerezza intrinseca è un fattore dominante.

Non si può dire la stessa cosa dell'acciaio, che per quanto meno performante rispetto al legno, mantiene comunque delle buone caratteristiche, tanto che negli ultimi decenni sono stati diversi i progetti di opere di rilevante importanza realizzate con gridshell in acciaio.

Nell'ambito di questo lavoro, ci si vuole però riferire solo alle gridshell di legno, in particolare a quelle di legno massiccio. In ogni caso, a prescindere dal materiale che si sceglie di utilizzare le problematiche che stanno alla base del progetto di una gridshell di grandi dimensioni riguardano in prima istanza il processo, che prende il nome di *form-finding* (ricerca della forma) tramite cui viene definita la forma resistente, ed in secondo luogo il criterio tramite cui viene definito il reticolo di curve sulla superficie. Prima di entrare nel dettaglio delle gridshell in legno massiccio è necessario approfondire questi punti.

## 1.2 La forma resistente

Per chiarire cosa si intenda con “forma resistente” è bene introdurre il concetto di funicularità.

La funicularità in un piano deriva dal comportamento della fune: quando una fune è soggetta ad un carico esterno, questa assume una configurazione deformata, che prende il nome di funicolare, ed in cui lo stato tensionale interno è di pura trazione. Se la configurazione della fune viene capovolta questa assume la forma di un arco che, soggetto allo stesso carico esterno, avrà uno stato tensionale di pura compressione.

Quando il carico che si lascia agire sulla fune è il suo stesso peso, l'arco che gli corrisponde si dice funicolare del peso proprio e la forma che assume è detta catenaria. Uno degli esempi più famosi di arco catenario è il Gateway Arch di St. Louis, progettato nel 1947 da Eero Saarinen (figura 2.6):





Fig. 2.6 – Gateway Arch, St. Louis

Sebbene assomigli ad una parabola, l'arco parabolico e l'arco catenario sono due configurazioni ben distinte (fig. 2.7); se la forma catenaria risulta funicolare del peso proprio, un arco parabolico si dice invece funicolare del carico distribuito.

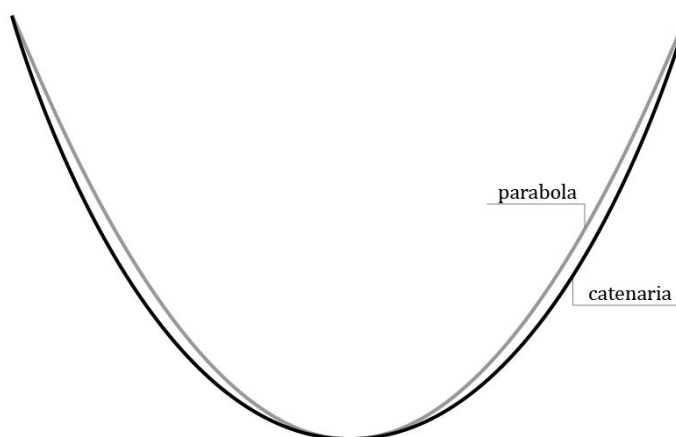


Fig. 2.7 – confronto geometrico tra una parabola ed una catenaria

Il concetto di funicolarità nell'arco si estrinseca in una stretta dipendenza tra il carico agente sull'arco e la forma del medesimo, chiarendosi che non tutti gli archi sono funicolari del carico che portano. Nelle strutture bidimensionali curve si ha, sotto talune condizioni, un comportamento qualitativamente diverso, che implica funicolarità (ossia azioni di trazione e compressione) qualunque sia il carico portato.

Questo avviene per strutture di piccolo spessore nelle regioni lontane dalle singolarità di carico o di spostamento (forze concentrate, vincoli, etc.) ed in tal caso la struttura si dice attingere ad un comportamento di membrana. Il grande vantaggio del comportamento a membrana risiede nella sua intrinseca isostaticità, valendo, come vedremo, che la determinazione degli sforzi interni può essere effettuata tramite sole equazioni di equilibrio.

Il passaggio quindi dall'equilibrio dell'arco a quello di membrana è cruciale, e le motivazioni di questa diffusa funicolarità delle strutture bidimensionali curve vanno comprese. A tal scopo, conviene utilizzare una struttura specifica come esemplificazione (figura 2.8).

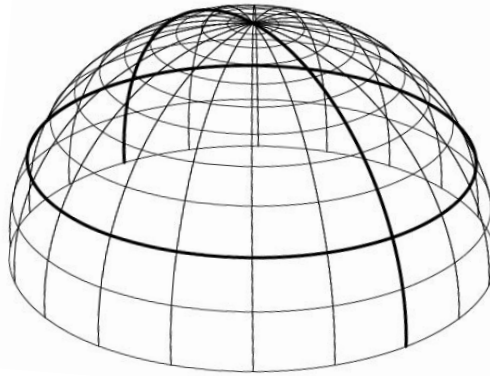


Fig. 2.8 – cupola semisferica con identificazione di meridiani e paralleli

Ipotizziamo quindi di volere determinare gli sforzi interni di una membrana sferica, caratterizzata da una distribuzione simmetrica dei carichi esterni; il discorso che segue è applicabile ad una qualunque superficie di rivoluzione. Questa doppia simmetria implica l'assenza di sforzi di membrana di taglio, che invece sono presentati nella teoria generale delle membrane. Pertanto, saranno presenti solo sforzi assiali, che indichiamo con  $N_m$ , sui meridiani, e con  $N_p$ , sui paralleli. In una porzione infinitesima di superficie, di dimensioni  $ds_m$  e  $ds_p$ , ritagliata intorno ad un punto di coordinate angolari  $(\theta, \varphi)$  si realizza la seguente situazione statica:

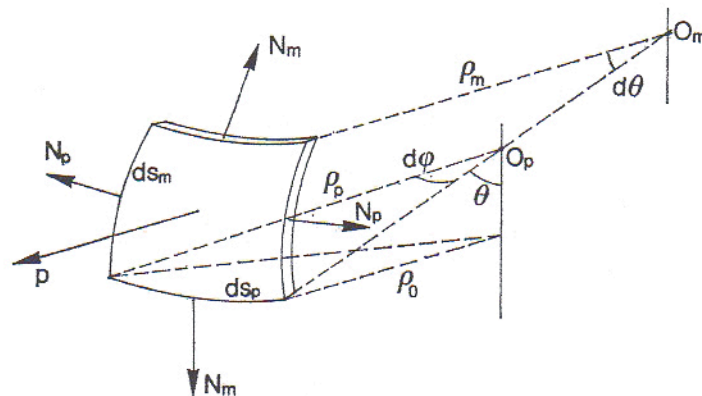


Fig. 2.9 – porzione infinitesima della superficie della cupola semisferica

indicando con  $\rho_p$  il raggio di curvatura del parallelo e con  $\rho_m$  il raggio di curvatura dell'arco meridiano, l'equilibrio locale dell'elemento suddetto soggetto ad una pressione  $p$ , uniforme, sarà dato dalla seguente:

$$p ds_p ds_m - 2N_m ds_p \frac{d\theta}{2} - 2N_p ds_m \frac{d\varphi}{2} = 0$$

da cui, semplificando, si ricava l'equazione di Laplace:

$$\frac{N_m}{\rho_m} + \frac{N_p}{\rho_p} = p$$

che relaziona gli sforzi su meridiani e paralleli ai rispettivi raggi di curvatura. Nella suddetta equazione  $p$  è considerato uniforme, ossia indipendente da  $\theta$  e  $\varphi$ , mentre non può dirsi la stessa cosa per il resto delle variabili, che rimangono legate alle coordinate del punto. L'equazione presenta due incognite, ovvero  $N_m$  ed  $N_p$ ; per risolverla serve quindi una seconda equazione di equilibrio. Per la sfera, la seconda equazione di equilibrio riguarda una porzione non infinitesima di superficie sulla quale imponiamo l'equilibrio alla traslazione verticale. Per farlo immaginiamo di tagliare la superficie con un piano orizzontale generico e disegniamo sulla sezione la componente  $N_m$  costante su tutta la circonferenza per ovvie ragioni di simmetria (figura 2.10).

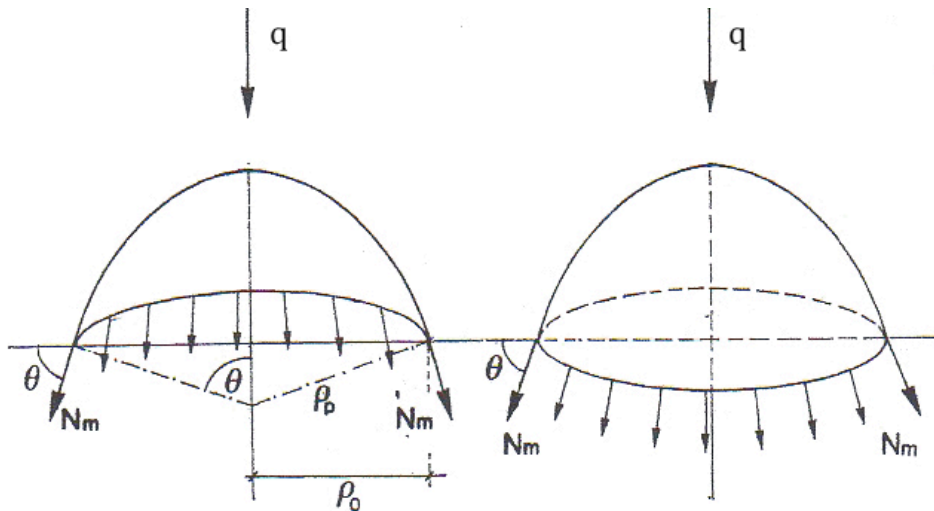


Fig. 2.10 - andamento della componente  $N_m$  lungo la circonferenza della superficie semisferica

L'equilibrio alla traslazione verticale viene scritto come segue:

$$2\pi\rho_0 N_m \sin\theta + q = 0$$

ove  $q$  è la risultante verticale dei carichi esterni e  $\rho_0$  è il raggio del parallelo su cui è stata effettuata la sezione. Mettendo in evidenza l'incognita  $N_m$  possiamo scrivere:

$$N_m = - \frac{q}{2\pi \rho_p \sin^2\theta}$$

Questa situazione è profondamente diversa da quella che caratterizza un arco funicolare, e mette in evidenza come le due direzioni intervengano nella ricerca dell'equilibrio statico. Nel caso dell'arco infatti, derivando questo dalla fune, esiste una sola configurazione per la quale un arco può risultare uniformemente compresso, ed è la configurazione che, capovolgendolo, assumerebbe una fune soggetta ad un determinato carico; al variare di tale carico l'arco sarà sottoposto a sollecitazioni composte di compressione e flessione poiché perderebbe le sue proprietà funicolari.

Riferiamoci sempre ad una cupola; se il materiale di cui è composta non è in grado di reagire a trazione, come avviene nelle cupole in muratura per via della scarsa resistenza a trazione della malta, questa può essere descritta come una successione di archi i quali non sono in grado di assumere configurazioni funicolari al variare dei carichi esterni. Al contrario, se immaginiamo che una cupola sia composta di un materiale reagente a trazione, le strisce

lungo i paralleli sono in grado di funzionare come funicolari di un carico radiale uniforme di qualsiasi entità. Questo significa che, al variare del carico, i meridiani restano nella loro forma funicolare e sono soggetti a stati di compressione uniforme, mentre la parte di carico di cui non sono funicolari viene assorbita dai paralleli sotto forma di carico radiale, per i quali come detto, sono funicolari. In questo modo sia le strisce di materia lungo i meridiani che quelle lungo i paralleli sono soggette a trazione o compressione uniforme, garantendo la possibilità di raggiungere alti livelli di resistenza con spessori sottili.

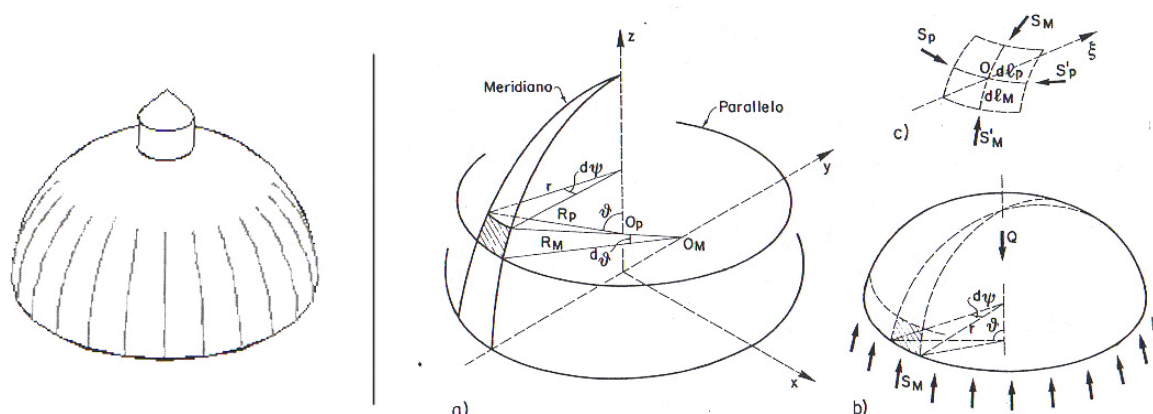


Fig. 2.11 - a sinistra le lesioni tipiche di una volta in muratura dovute alla scarsa resistenza a trazione della malta, a destra lo schema statico di una cupola capace di reagire a trazione

### 1.3 Forma e costruibilità

Come sosteneva Sergio Musmeci riguardo alla progettazione di strutture complesse, «*la vera incognita è la forma, non le tensioni*». Con il termine *form-finding* si intende descrivere il processo tramite cui viene definita una forma resistente; nell'ambito delle strutture che siamo interessati ad analizzare la forma derivante da tale processo è spesso descritta da una geometria complessa.

Nell'ambito di questa tesi si farà una distinzione tra due tipologie di forme: le forme libere e le forme parametriche. Tale distinzione è da contestualizzarsi in termini strumentali di modellazione geometrica. Per forme libere si intendono quindi le forme generate da strumenti software di modellazione geometrica, e la cui conoscenza analitica (delegata al software) non è facilmente deducibile. Per forme parametriche si considerano invece quelle forme modellate a partire dall'equazione parametrica che le descrive, la cui geometria può essere modificata consapevolmente al variare di determinati parametri.

Molte delle forme resistenti realizzate in architettura sono descrivibili parametricamente, per via dei vantaggi che si possono ottenere a livello progettuale, economico e costruttivo. In questi termini assumono un particolare rilievo le superfici di rivoluzione e le superfici rigate. Le superfici di rivoluzione, o rotazione, sono superfici ottenute facendo ruotare una curva, detta generatrice, attorno ad un asse, detto asse di rotazione; ad esempio una cupola può essere ottenuta facendo ruotare un semiarco, o semi meridiano, attorno all'asse verticale che va dal vertice al centro della circonferenza di base. L'utilizzo di superfici di rivoluzione

comporta un notevole vantaggio costruttivo dovuto al fatto che queste possono essere viste come la successione di spicchi tutti uguali fra loro.

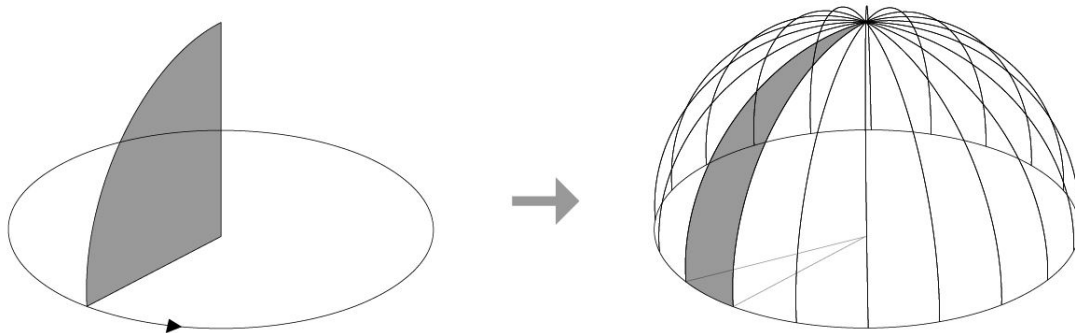


Fig. 2.12 – generazione di una semisfera a partire dalla rotazione della generatrice

Pier Luigi Nervi sfrutta proprio questa caratteristica per sperimentare una nuova cantierizzazione; lo studio da lui condotto parte dal progetto della copertura del Salone B di Torino del 1948 e diventerà caratterizzante di molte sue opere:

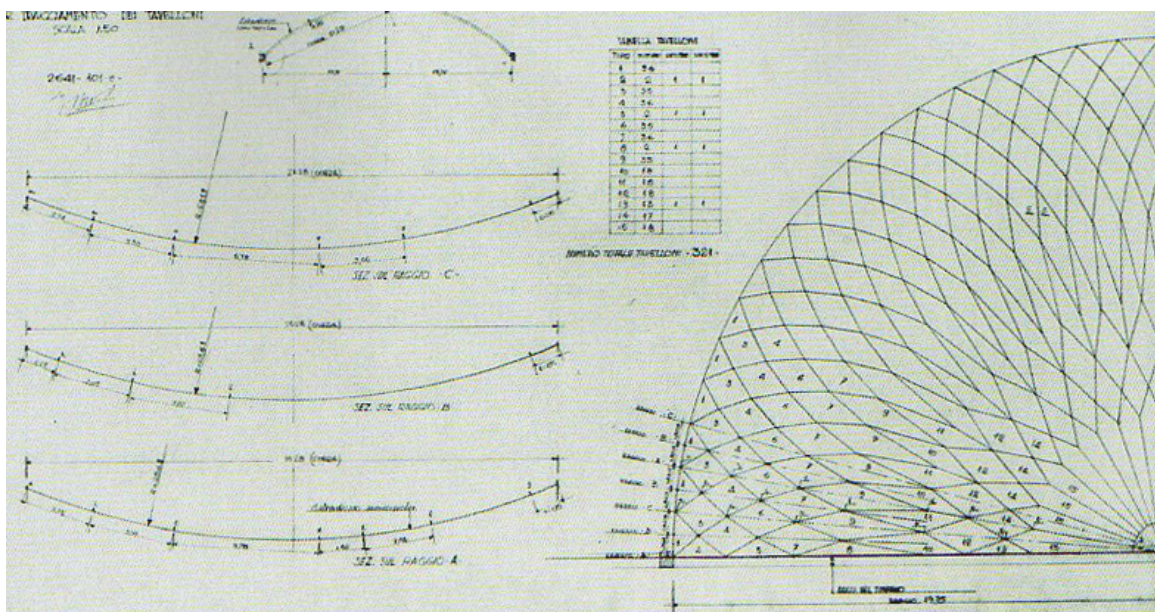


Fig. 2.13 – da S. PORETTI, T.IORI, SIXXI 2, Roma 2015 - disegni relativi al progetto della copertura del salone B di Torino

Tra gli esempi maggiormente noti citiamo il palazzetto dello sport Flaminio, a Roma, progettato e realizzato da Pierluigi Nervi nel 1960. Ogni spicchio della copertura si compone di un determinato numero di elementi romboidali tra i quali corrono le nervature; questi elementi vengono realizzati a piè d’opera nel corso del cantiere, il quale assume quindi un grado di prefabbricazione. La costruzione della cupola, elemento caratterizzante del progetto, è velocissima: tutti gli elementi vengono posizionati e saldati tra loro con un getto di calcestruzzo di completamento:



Fig. 2.14 – foto del cantiere del palazzo dello sport Flaminio, Roma 1960

Le superfici rigate, invece, sono superfici curve formate da generatrici rette. Le più conosciute sono il paraboloide iperbolico, o sella, l'elicoide e l'iperboloide ad una falda (fig. 2.15).



Fig. 2.15 - modelli matematici realizzati da Luigi Campedelli (matematico italiano, 1903 – 1978)

A livello costruttivo il vantaggio di realizzare delle superfici rigate è che si possono utilizzare elementi rettilinei per generare forme curve, motivo per cui hanno trovato largo utilizzo in ambito architettonico.

La facilità di realizzazione delle superfici rigate non riguarda solo le strutture discrete, ma anche le strutture continue in calcestruzzo armato; il vantaggio costruttivo in questo caso sta nella possibilità di realizzare facilmente le casseforme che devono contenere il getto. Un esempio applicativo molto celebre è il Padiglione Philips, realizzato da Le Corbusier per l'Esposizione Internazionale di Bruxelles del 1958, la cui articolazione spaziale nasce dall'intersezione di una serie di superfici rigate realizzate come pareti in calcestruzzo armato:

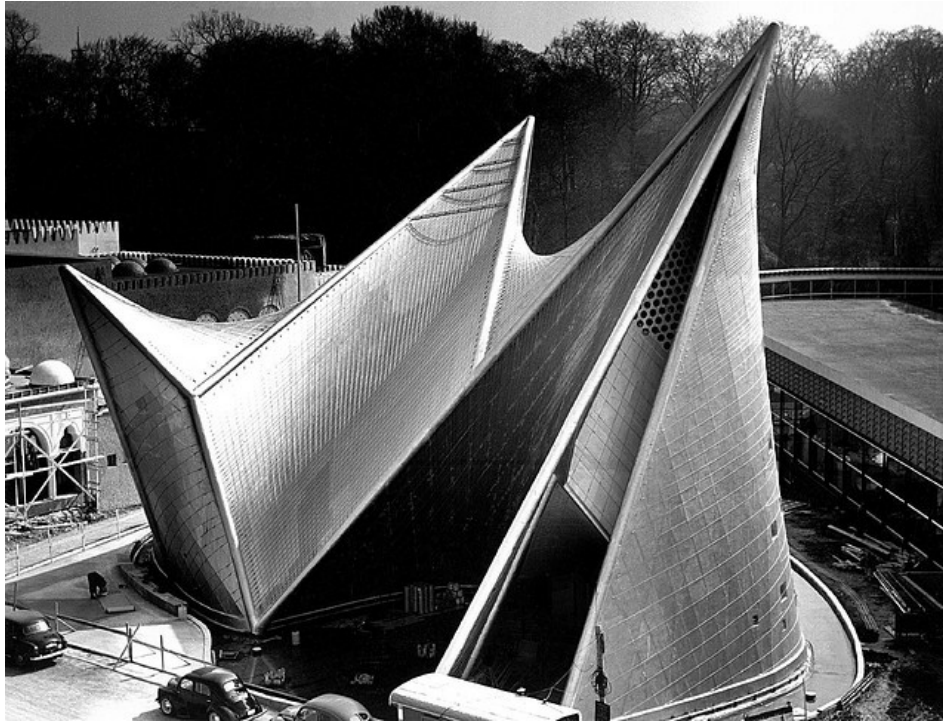


Fig. 2.16 – Padiglione Philips, Bruxelles 1958

Bisogna precisare che esistono due tipologie di superfici rigate: sviluppabili e non sviluppabili. Con il termine *superficie sviluppabile* si intende una superficie che può essere localmente *srotolata* su di un piano. In generale si può dire che le superfici *non sviluppabili* sono superfici la cui forma contribuisce alla resistenza, mentre le superfici sviluppabili in un piano rappresentano quelle superfici che, per essere considerate a forma resistente, hanno bisogno di ulteriori elementi di irrigidimento che ne impediscano il dispiegamento in piano. Per capire le implicazioni della sviluppabilità in un piano è bene aver chiaro il concetto di curvatura ed il suo legame con la resistenza per forma.

#### 1.4 Il concetto di curvatura in relazione alla forma resistente

Il concetto di curvatura è un elemento chiave nello studio delle superfici, per questo motivo è bene soffermarvisi per capirne meglio il significato. Il professor Christopher Calladine, dell'università di Cambridge, scrive: «[...] una curva con un raggio di curvatura più piccolo ha una curvatura più grande, d'accordo con la nostra idea intuitiva di impartire una curvatura ad una linea inizialmente dritta semplicemente facendola curvare [...]»<sup>7</sup>.

Banalmente, laddove una linea si incurva esiste una curvatura. A livello geometrico possiamo definire il raggio di curvatura tramite semplici regole di trigonometria: sappiamo che un arco di circonferenza è uguale al raggio per l'angolo al centro. Riferiamoci quindi alla figura 2.17:

<sup>7</sup> C.R. CALLADINE, Theory of Shell Structure, Cambridge 1983

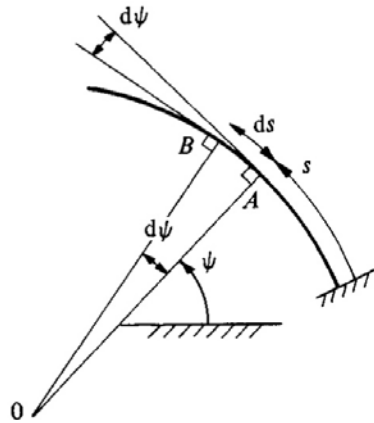


Fig. 2.17 – da C.R. CALLADINE, Theory of Shell Structure, Cambridge 1983

l'arco di circonferenza AB misura  $ds$ , il suo angolo al centro misura  $d\psi$ . Il raggio di curvatura  $\rho$  è dato quindi dal rapporto tra  $ds$  e  $d\psi$ , ossia:

$$\rho = ds / d\psi$$

La curvatura  $k$  di una curva corrisponde all'inverso del raggio di curvatura, ovvero:

$$k = 1/\rho$$

I teoremi matematici che definiscono con precisione la curvatura, e tutti gli elementi ad essa connessi, fanno parte della geometria differenziale; questo ramo della geometria studia localmente, in un intorno infinitamente piccolo di un punto, l'andamento di una curva o di una superficie nello spazio. In questo lavoro non scenderemo in dettagli matematici, sebbene ad essi ci si riferisca soprattutto per la fase di modellazione geometrica. Quello che invece è importante capire è la relazione della forma con la resistenza strutturale.

Quando si parla di superfici il concetto di curvatura precedentemente introdotto per una linea curva deve essere ampliato. Nella geometria differenziale si distinguono diversi tipi di curvatura, quali la curvatura normale, media, principale o gaussiana. Ad avere un particolare significato sono le curvature normali, strettamente connesse alla curvatura gaussiana. Vediamo come.

Anzitutto vanno premessi due concetti, ossia il concetto di sviluppabilità di una curva in un piano ed il concetto di curvatura normale di una superficie, prodromi al concetto di curvatura gaussiana di una superficie.

Partendo dal primo, rimarchiamo che ogni curva anche non piana può essere vista localmente, ossia molto vicino ad un suo qualunque punto, come appartenente ad un piano definito dai suoi due vettori **tangente** (**t**) e **normale** (**n**). Il vettore tangente (**t**) ha una definizione ovvia, mentre il vettore normale (**n**), derivata del versore tangente rispetto al parametro che descrive i punti della curva, è diretto perpendicolarmente al vettore tangente ed ha come suo modulo la curvatura  $k$  sopra definita. I due vettori individuano quindi un piano su cui la curva si posiziona, almeno localmente. Questo piano è detto **piano osculatore**. Queste caratteristiche geometriche appartengono alla curva nello spazio e non dipendono dalla superficie cui essa potrebbe appartenere.



Il secondo concetto che ora emerge è quello di **curvatura normale**. Questa è una caratteristica geometrica della superficie definita tramite le proprietà delle curve che appartengono ad essa. Quando invece parliamo di curve appartenenti a superfici, ossia composte da punti che appartengono ad una superficie, emergono nuovi concetti di curvatura che non appartengono ad una sola curva ma ad intera famiglia di curve. Spostiamo l'attenzione quindi sulle superfici. In ogni punto regolare di una superficie possiamo definire un piano tangente. Al piano tangente appartengono tutti i vettori tangenti a tutte le curve passanti per quel punto ed appartenenti alla superficie.

In ogni punto esiste inoltre la perpendicolare al piano tangente, che chiamiamo (**N**) e che ovviamente è perpendicolare a qualunque tangente di qualunque curva passante per il punto. Ora, definiamo una famiglia di curve tramite le caratteristiche di passare tutte per lo stesso punto di una superficie e con lo stesso vettore tangente in quel punto. Ognuna di esse avrà una curvatura differente, individuata da un diverso versore (**n**), da un diverso valore di (**k**) e da un differente piano osculatore.

Si dimostra tuttavia che tutte le curve appartenenti a questa famiglia hanno la stessa **curvatura normale**, ossia la stessa proiezione ortogonale (**k<sub>n</sub>**) della loro curvatura (**k**) sul vettore comune (**N**).

La curvatura normale è quindi una caratteristica della superficie e non della singola curva. In ogni punto regolare di una superficie si dimostra che possono essere individuate due direzioni, sempre ortogonali fra loro, che prendono il nome di **direzioni principali**, lungo le quali **k<sub>n</sub>** assume valori di massimo o di minimo. In particolare, le curvature normali nelle due direzioni principali si indicano con **k<sub>1</sub>** e **k<sub>2</sub>** e prendono il nome di **curvature principali**.

A questo punto è possibile definire la curvatura gaussiana come:

$$K = k_1 k_2$$

Ossia, la curvatura gaussiana in ogni punto di una superficie è calcolata come il prodotto delle curvature principali in quel punto.

Bisogna sottolineare che il concetto di curvatura gaussiana è un concetto locale, pertanto una superficie complessa può avere un valore di curvatura gaussiana variabile punto per punto. L'importanza della curvatura gaussiana di una superficie, in relazione agli intenti di questo lavoro, ha a che fare con il concetto di sviluppabilità e di forma resistente. Per comprendere il significato di questa affermazione possiamo aiutarci con un esempio.

In primo luogo introduciamo il concetto di **linea di curvatura**, definita come « [...] *una curva giacente su una superficie e tale che la sua tangente in ciascun punto si trova lungo una direzione principale* [...]»<sup>8</sup>. È possibile descrivere una superficie a partire da un reticolo di linee di curvatura le quali, disponendosi punto per punto lungo le due direzioni principali, godranno di due importanti proprietà: le curve del reticolo saranno sempre ortogonali fra loro ed assumeranno, in ogni punto, valori di massimo o minimo di curvatura normale. Quando le superfici non sono geometrie semplici, determinare le equazioni che descrivono l'andamento del reticolo di linee di curvatura diventa complesso, ma ciò non toglie che localmente le due direzioni principali siano sempre individuabili.

Si prenda ora il caso di una superficie semisferica, assimilabile ad una cupola, ed il caso di una superficie semicilindrica, assimilabile ad una volta a botte, sulle quali sono stati individuati due reticoli di linee di curvatura (figura 2.18).

---

<sup>8</sup> M. LIPSCHUTZ, Teoria e problemi di geometria differenziale, pag. 185, Milano 1984

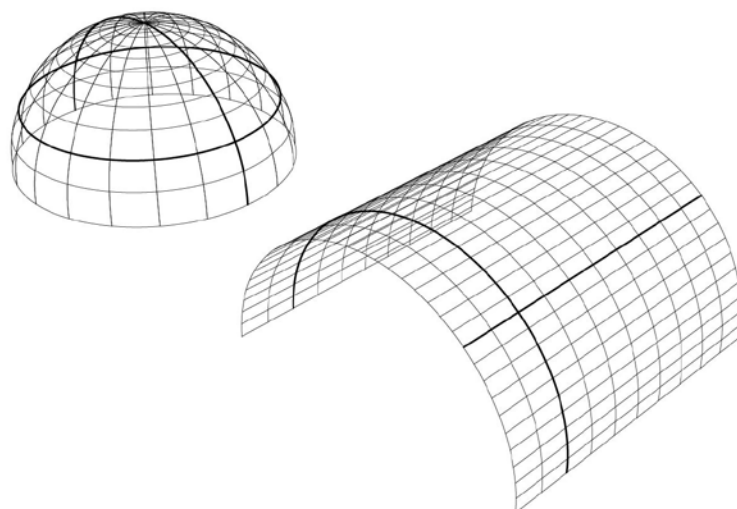


Fig. 2.18 . semisfera, a sinistra, e semicilindro, a destra, con individuazione delle linee di curvatura

Per il caso della superficie semi sferica, dette linee coincidono con la successione di meridiani e paralleli; per il caso della superficie semi cilindrica invece, in una direzione troviamo una successione di archi, mentre nella direzione ortogonale una successione di linee rette.

Nel caso particolare della superficie semisferica è facilmente intuibile che i meridiani, avendo tutti lo stesso raggio, ossia il raggio della sfera, presentano in ogni punto la medesima curvatura normale. Per quanto riguarda i paralleli invece è necessario enunciare il teorema per cui risulta che « [...] *tutte le curve passanti per un punto  $P$  che sono tangenti alla stessa retta passante per  $P$  hanno la stessa curvatura normale in  $P$  [...]»<sup>9</sup>. Osservando la figura 2.19 possiamo notare che l'intersezione del piano individuato dai vettori normale ( $\mathbf{N}$ ) e tangente ( $\mathbf{t}$ ), definiti in un punto  $A$ , con la sfera, individua un cerchio massimo di circonferenza, ovvero una circonferenza che ha per raggio il raggio della sfera.*

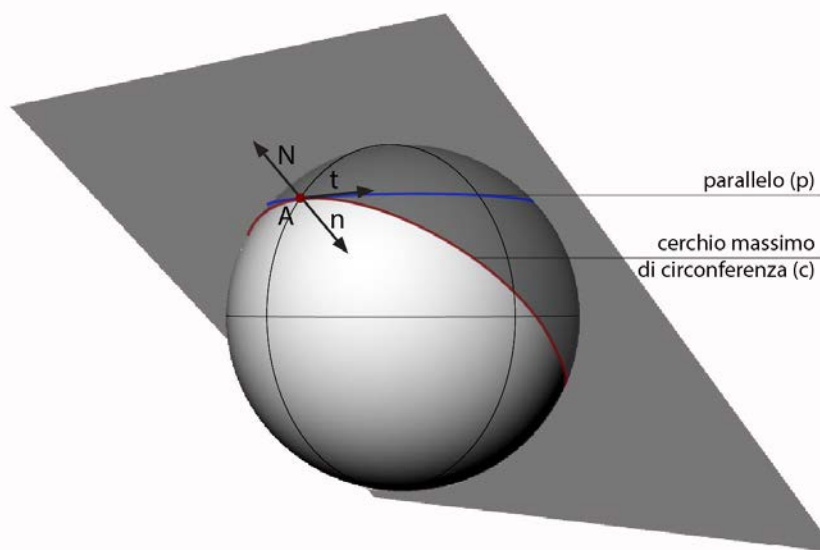


Fig. 2.19 – intersezione della superficie sferica con il piano individuato dai vettori  $\mathbf{t}$  ed  $\mathbf{N}$

<sup>9</sup> M. LIPSCHUTZ, Teoria e problemi di geometria differenziale, pag. 185, Milano 1984

I cerchi massimi di circonferenza si individuano al variare delle coordinate angolari di longitudine e di latitudine, caso quest'ultimo che identifica i meridiani.

Poiché in ogni punto la retta tangente al cerchio massimo di circonferenza coincide con la retta tangente del parallelo, queste due curve avranno la stessa curvatura normale che, nel caso della sfera, coinciderà con la curvatura normale dei meridiani. Ne consegue che la curvatura gaussiana sarà, su tutta la superficie, costante, ed assumerà valore massimo.

Nel caso della superficie semi cilindrica invece, questa è stata generata come la successione di un arco, coincidente con il semi meridiano della superficie semi sferica con la quale ci si sta confrontando. La curvatura principale nella direzione descritta dagli archi avrà quindi lo stesso valore della curvatura normale descritta dai meridiani della semi sfera. Nella direzione ortogonale invece, le linee di curvatura assumono andamento retto, per cui la curvatura normale assumerà valore nullo in ogni punto. Ne consegue che la curvatura gaussiana in ogni punto della superficie semicilindrica sarà pari a zero.

Le superfici la cui curvatura gaussiana in ogni punto è diversa da zero sono sicuramente superfici a forma resistente. Tra queste ci sono le superfici rigate non sviluppabili. Paraboloide iperbolico ed iperboloide ad una falda ad esempio, sono superfici rigate a doppia curvatura non sviluppabili, ossia a curvatura gaussiana diversa da zero (figura 2.20). Nel caso invece di una superficie piana torta lungo il suo asse maggiore, questa è una superficie rigata sviluppabile che, pur essendo a geometria curva, possiede curvatura gaussiana pari a zero e, quindi, non viene ritenuta una superficie a forma resistente.

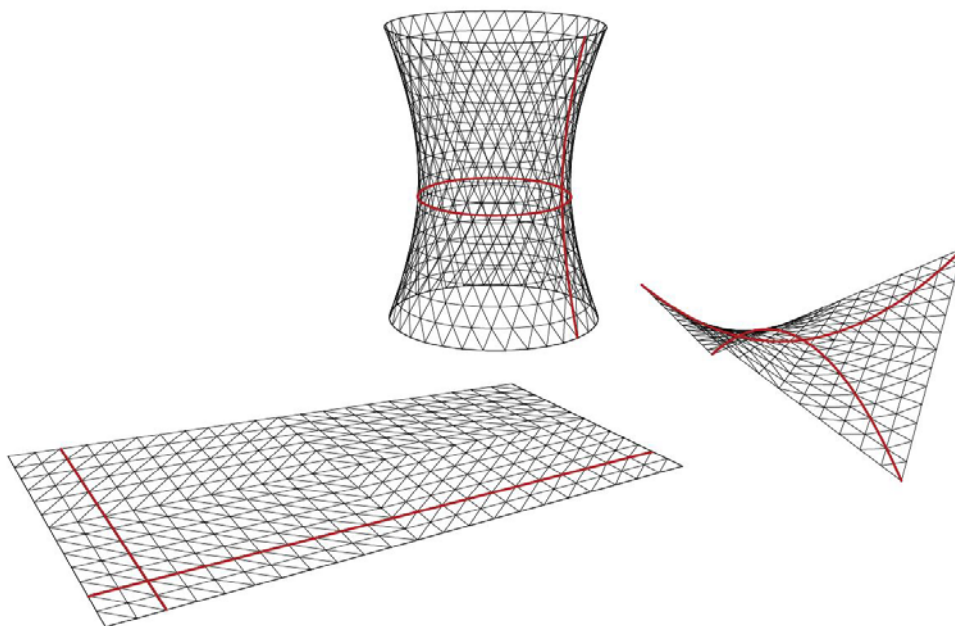


Fig. 2.20 - superfici rigate con indicazione delle direzioni principali

Facciamo un ulteriore esempio per capire il legame tra la resistenza della forma e la sviluppabilità in un piano. Immaginiamo di realizzare una superficie semicilindrica, assimilabile ad una volta a botte, ed una superficie emisferica, assimilabile ad una cupola, utilizzando un foglio di carta, tenendo a mente che la carta può incurvarsi nello spazio in una sola direzione. Nel caso della superficie semicilindrica sarà sufficiente incurvare il foglio di carta in una direzione fino a raggiungere la configurazione desiderata facendo agire una coppia di forze (figura 2.21).

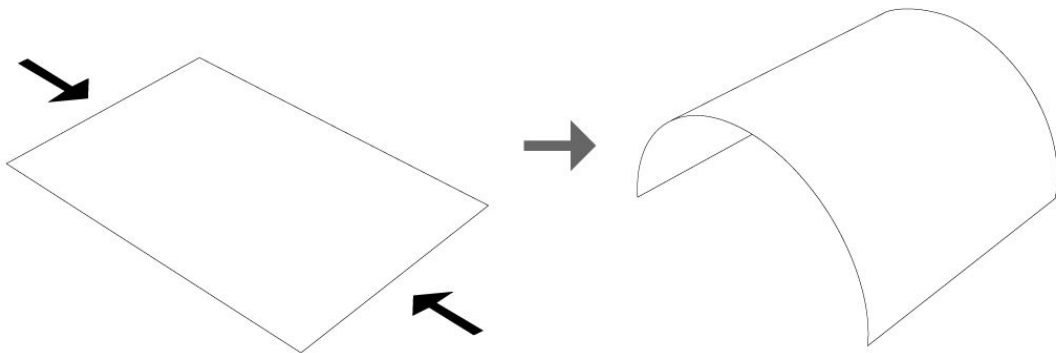


Fig. 2.21 – schema della superficie semicilindrica ricavata dall'incurvamento di un foglio di carta

Se si smette di imprimere la forza suddetta alla superficie o, analogamente, se non se ne vincolano i bordi, o se non si riempiono i timpani (dando in tal caso alla forza esterna lo status di reazione vincolare), sotto l'effetto della forza di gravità questa si svilupperà nel piano tornando ad assumere la configurazione iniziale del foglio di carta.

Nel caso di superficie emisferica, invece, non potendo incurvare il foglio in entrambe le direzioni spaziali, per riuscire a ricostruirne la geometria diventa necessaria una lavorazione diversa; si divide il foglio in spicchi, se ne sottraggono delle parti, e si riuniscono per assumere la configurazione sferica finale (figura 2.22). Una volta ricostruita la superficie, ammettendo che la continuità tra gli spicchi sia ripristinata, sarà possibile notare che la superficie, senza l'aiuto di forze o vincoli esterni, mantiene invariata la sua forma anche sotto effetto della forza di gravità.

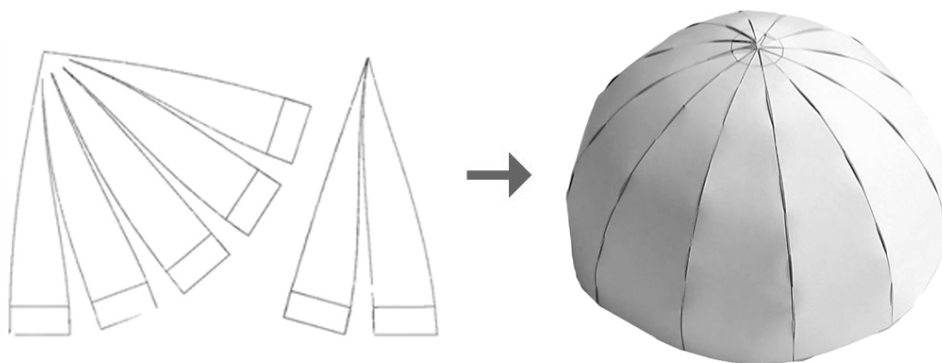


Fig. 2.22 – costruzione di una superficie emisferica con un foglio di carta

Affinché la superficie torni ad avere una conformazione piana, la continuità tra gli spicchi dovrebbe venire meno, consentendo a questi di separarsi per potersi dispiegare in piano. Lungi dall'essere una dimostrazione, possiamo comunque affermare che le superfici ricostruibili a partire da un foglio di carta semplicemente incurvato sono a curvatura

gaussiana nulla, ovvero a singola curvatura spaziale, e quindi sviluppabili in piano e non resistenti per forma.

Viceversa, superfici non riproducibili semplicemente incurvando un foglio di carta sono non sviluppabili, e la loro curvatura gaussiana è diversa da zero: queste possono pertanto considerarsi superfici a forma resistente.

A partire dal legame tra la curvatura gaussiana di una superficie e la sua sviluppabilità è possibile fare un'ulteriore considerazione. Nel caso di superfici complesse è possibile che la curvatura gaussiana sia variabile in ogni punto, pertanto possono appartenere alla stessa superficie aree a curvatura gaussiana nulla ed aree a curvatura gaussiana diversa da zero. Ciò nonostante è evidente che le aree in cui la curvatura gaussiana assume valori non nulli fungono da vincolo anche per le parti a curvatura gaussiana nulla, pregiudicando la sviluppabilità della superficie nel suo complesso.

### 1.5 Curve sulle superfici e costruibilità

Qualunque superficie può essere descritta da un insieme di curve che assumo diversi significati, siano essi estetici, geometrici o costruttivi. A tal proposito, una delle tecniche costruttive che ha contribuito a rendere celebre l'ingegner Pier Luigi Nervi è il solaio a nervature isostatiche, per il quale la Società Ingg. Nervi & Bartoli ha depositato il brevetto, n.45678, il 23 luglio 1949.<sup>10</sup>

Grazie a questa soluzione Nervi realizza una ottimizzazione topologica; disponendo infatti le travi di una superficie piana lungo le linee isostatiche di flessione, ovvero le traiettorie delle tensioni principali, è possibile utilizzare una sezione alta e sottile potendo trascurare l'effetto torsionale. È il caso ad esempio del solaio del Lanificio Gatti a Roma, progettato nel 1951 dallo stesso Nervi (figura 2.23)<sup>11</sup>.



Fig. 2.23 – solaio nervato del Lanificio Gatti, Roma 1951

<sup>10</sup> T. IORI, Lanificio Gatti, Roma in Pier Luigi Nervi, Milano 2009

<sup>11</sup> P.L. NERVI, Scienza o arte del costruire? Caratteristiche e possibilità del cemento armato, Roma 1945

La scelta del reticolo spaziale che compone una gridshell deve tenere in considerazione gli aspetti analitici, costruttivi e strutturali. La geometria differenziale rappresenta un utile strumento per la comprensione delle famiglie curve in grado di descrivere una superficie; di particolare interesse nell'ambito di questo lavoro sono le linee di curvatura, le linee geodetiche e le linee coordinate. Discernendo da procedimenti analitici è chiaro che queste tipologie di curve presentano un rigore geometrico, ma ciò non toglie che possano nel contempo assumere anche un significato meccanico o costruttivo.

Nel caso delle linee di curvatura, di cui si è parlato nel paragrafo 1.4 di questo capitolo, è infatti possibile supporre che vi sia uno stretto legame tra gli aspetti geometrici e gli aspetti meccanici; in particolare è possibile ipotizzare che le linee di curvatura possano in qualche modo coincidere con le linee isostatiche di compressione. Tuttavia il procedimento analitico che porta alla determinazione delle linee isostatiche, così come delle linee di curvatura, è tutt'altro che immediato. Fatta eccezione per alcune geometrie semplici, la determinazione di queste curve è ancora oggetto di ricerca.

Ci sono poi le curve geodetiche: presa una qualunque superficie e due punti su di essa, una geodetica è la curva di minore lunghezza, appartenente alla superficie, che unisce due punti. A livello meccanico le curve geodetiche non hanno un legame diretto con la resistenza strutturale, non solo. Nel caso di una gridshell applicata ad una geometria complessa, l'utilizzo di un reticolo composto di linee geodetiche darebbe luogo ad una struttura non modulare, il che comporterebbe delle complicazioni a livello realizzativo.

A livello costruttivo quindi sarebbe necessario poter generare un reticolo uguale nelle due direzioni, in modo tale da poter ridurre l'intera gridshell ad un unico modulo di base ripetuto nello spazio.

Una soluzione compatibile con questa esigenza è quella di utilizzare un reticolo di linee coordinate. Nella geometria differenziale ogni superficie nello spazio può essere riferita ad un dominio piano; per ogni punto del dominio piano, definito in due variabili ( $u; v$ ), corrisponderà un punto appartenente alla superficie nello spazio, detta codominio, definito in tre variabili ( $u; v; z$ ). In altre parole, scelto un sistema di riferimento piano è possibile disegnare un reticolo di curve ortogonali fra loro che, una volta proiettate sulla superficie, definiranno il reticolo di linee coordinate (figura 2.24).

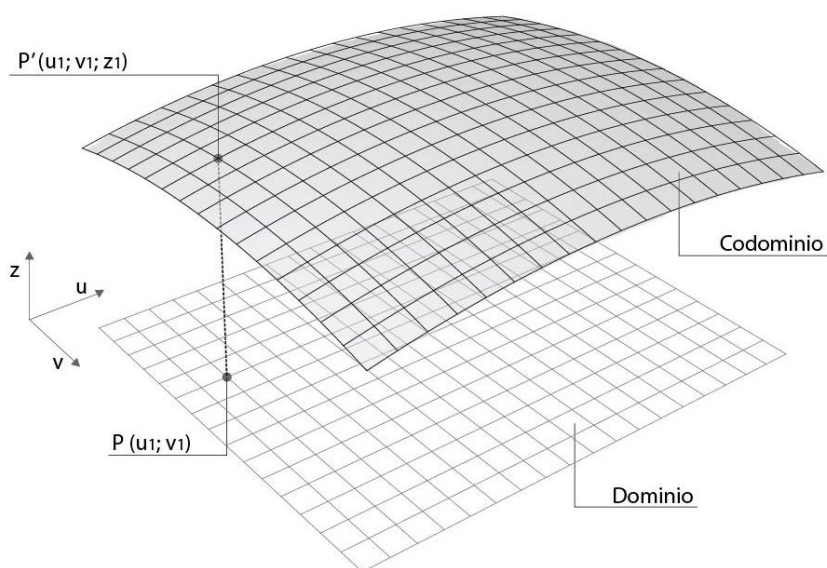


Fig. 2.24 – dominio e codominio di una superficie e disegno del reticolo di linee coordinate

È chiaro che la lunghezza dei segmenti appartenenti al dominio sarà diversa, o meglio minore, dei corrispondenti segmenti del codominio, in quanto il dominio corrisponde alla proiezione delle curve del codominio su un piano. Riferiamoci per il momento al caso delle gridshell post formate (vedi paragrafo 2.2): il procedimento costruttivo ha inizio con la realizzazione di un reticolo di travi modulari piane, che possiamo quindi definire geometricamente come un reticolo di linee coordinate. Solo successivamente vengono impresso delle forze che deformano il reticolo fino a fargli assumere una conformazione spaziale. La curvatura impressa ai singoli elementi strutturali solitamente non ha valori molto elevati, in quanto questa deve tenere conto della deformabilità del materiale, sia per evitare che si arrivi localmente a rottura, sia per evitare che al suo interno si generi uno stato di coazione troppo elevato. Ciò vuol dire che la variazione di lunghezza delle travi messe in forma rispetto alla loro proiezione a terra non è rilevante, motivo per cui le linee coordinate si adattano bene a questa tecnica costruttiva.

## 2. Gridshell in legno massiccio

L'utilizzo delle gridshell in legno di grandi dimensioni è sempre stato pressoché limitato alla realizzazione di padiglioni espositivi temporanei, fatta eccezione per alcuni fortunati esempi di architetture permanenti.

Le gridshell in legno differiscono da quelle in acciaio o in altri materiali per il fatto che, nel caso del legno, gli elementi strutturali che le compongono sono continui e si appoggiano gli uni sugli altri formando diversi livelli (*layer*).

Tra i primi a condurre degli studi sulle gridshell in legno è stato Frei Otto, che nel 1962 ha realizzato un padiglione per le esposizioni ad Essen, determinandone la forma con un processo di *form-finding* basato sul modello delle catenarie (figura 2.25).

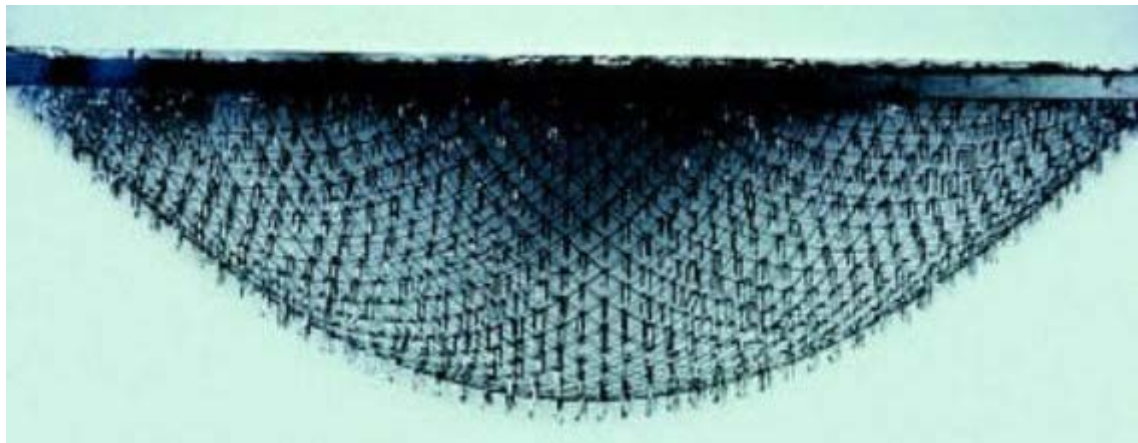


Fig. 2.25 – modello di catenarie realizzato da Frei Otto per la gridshell di Essen

Questa tipologia strutturale da allora si è evoluta molto in fretta e, nonostante gli esempi costruiti non siano numerosi, per la realizzazione di ognuno di questi progetti sono state affrontate delle specifiche problematiche il cui superamento ha contribuito ad una innovazione strutturale.

La prima opera di grandi dimensioni realizzata in legno massiccio è la Mannheim Multihalle, del 1975, la cui soluzione strutturale fu curata dallo stesso Frei Otto in collaborazione con l'ingegner Ted Happold. Lo studio di ingegneria Buro Happold fondato da quest'ultimo, ha

curato tutti i progetti strutturali di gridshell in legno massiccio di grandi dimensioni realizzate nel Regno Unito tra il 2002 ed il 2007. Fatta eccezione per queste opere, che verranno approfonditi nel paragrafo 3, nel panorama mondiale si fatica molto a trovare esempi di questa tipologia strutturale applicata a coperture di considerevoli dimensioni.

Il fatto che la realizzazione di suddette opere sia stata affidata, fin dal '75, allo stesso gruppo ingegneristico, fa pensare che la conoscenza necessaria alla gestione di queste strutture sia a tutt'oggi nelle mani di pochi.

Negli ultimi anni si sono formati dei gruppi di ricerca, in ambito accademico, per lo studio delle gridshell in legno massiccio; tra gli altri vi sono l'università Napier ad Edimburgo<sup>12</sup> e la scuola di design di Melbourne, in Australia che ha da poco iniziato a realizzare dei prototipi<sup>13</sup>; uno dei più importanti centri di studio è certamente quello dei professori Richard Harris e Chris Williams dell'università di Bath, in Inghilterra, i quali hanno collaborato con lo studio Buro Happold per la realizzazione di alcune opere<sup>14</sup>.

In Italia il gruppo guidato dal professor Sergio Pone, dell'Università di Napoli "Federico II", è attivo dai primi anni del 2000 ed annovera diverse pubblicazioni<sup>15</sup> e realizzazioni di prototipi ed opere permanenti in legno massiccio<sup>16</sup>, avendo sviluppato una particolare soluzione tecnologica che velocizza molto i tempi di cantiere. Lo stesso gruppo di lavoro dell'architetto Pone ha inoltre collaborato con la Melbourne School of Design per la realizzazione, nel 2014, della prima gridshell post-formata in *accoya d'Australia*.

Tuttavia se si vuole affrontare il tema delle grandi dimensioni è al Regno Unito che si deve guardare, ed è proprio nel Regno Unito che sono stati individuati i casi studio maggiormente significativi nell'ambito di questo lavoro.

Per poter osservare i casi studio con occhio critico, è bene soffermarsi sulle caratteristiche proprie delle gridshell in legno massiccio, sia in termini di prestazioni che in termini di costruibilità.

## 2.1 La scelta del materiale

Quando si parla di gridshell in legno massiccio ci si riferisce ad elementi strutturali di piccole dimensioni, ossia elementi di legno massiccio netto.

Per via della sua anisotropia, non è possibile pensare ad una shell interamente costituita di legno; al contrario questo materiale ben si adatta ad un reticolo spaziale nel quale gli elementi portanti sono disposti in due direzioni ortogonali fa di loro.

Le strutture in legno, se ben concepite, sono strutture leggere; la leggerezza è sicuramente un vantaggio sia in termini di fondazioni sia in termini di carichi portati, ma allo stesso tempo impone un controllo meccanico agli effetti del vento.

Da un punto di vista economico, in via del tutto generale, scegliere il legno anziché materiali come acciaio o calcestruzzo armato non comporta significativi vantaggi in termini di costo del

---

<sup>12</sup> Centre for Timber Engineering (CTE), Led by Professor Abdy Kermani. Si veda anche B. D'AMICO, Timber Grid-shell Structures: form-finding, analysis and optimisation, PhD tesi, Napier 2015

<sup>13</sup> Per la gridshell della MSD, si veda: <http://www.karamba3d.com/projects/accoya-timber-gridshell/>

<sup>14</sup> Si veda ad esempio D. NAICIU, R. HARRIS, C. WILLIAMS, Timber gridshells: design method and their application to a temporary pavilion, WCTE (World Conference on Timber Engineering), Canada 2014

<sup>15</sup> Tra le altre pubblicazioni citiamo: S. PONE, Gridshell, I gusci a graticcio in legno tra innovazione e sperimentazione, Firenze 2012

<sup>16</sup> Come ad esempio la gridshell realizzata a Lecce nella Masseria Ospitale nel 2009



materiale, ma comporta un significativo risparmio in termini di costi di cantiere. Quando si parla di strutture ordinarie i tempi di cantiere si possono molto ridurre in quanto i pezzi possono arrivare già pronti per la posa in opera e le connessioni sono spesso di facile realizzazione; in altri termini le strutture in legno hanno sempre un certo grado di prefabbricazione.

Viene da sé che per mantenere questo vantaggio anche per la cantierizzazione di strutture non ordinarie, quali ad esempio le gridshell, in cui non è possibile pensare ad una totale prefabbricazione, la fase di cantiere deve essere ben studiata.

Altro grande vantaggio del legno, soprattutto in strutture composte di molti elementi, è che in caso di degrado o rottura è possibile effettuare operazioni di sostituzione locali senza compromettere l'equilibrio globale della struttura.

Una caratteristica che va tenuta in considerazione è che un elemento ligneo, così come avviene per un foglio di carta, può essere curvato una sola volta nello spazio. Questa proprietà implica, nel caso di gridshell, che il reticolo spaziale non debba essere composto di elementi a doppia curvatura; ciò vuol dire che la proiezione a terra del reticolo spaziale deve essere un insieme di linee rette. Viceversa, se si forma un reticolo di linee curve su un piano e lo si proietta su una superficie, anch'essa curva, tali linee assumeranno una prima curvatura iniziale in piano ed una seconda curvatura spaziale, tali da renderle difficilmente realizzabili o eccessivamente onerose, se si utilizza il legno.

L'unico modo per imprimere una doppia curvatura ad un elemento di legno è quello di torcerlo, descrivendo con il suo tronco una rigata, che ha generatrici rette: difatti, questo è stato il procedimento utilizzato da Shigeru Ban per le travi della copertura del Centre Pompidou di Metz, realizzata con una gridshell di legno lamellare. Procedimento tuttavia onerosissimo proprio per l'induzione di una doppia curvatura in ogni elemento della gridshell stessa (figura 2.26).



Fig. 2.26 – travi di legno lamellare che compongono la copertura del Centre Pompidou di Metz

Nell'ambito di questa tesi si farà riferimento ad elementi a curvatura singola, i quali ben si adattano al processo realizzativo descritto nel paragrafo successivo.

## 2.2 Gridshell pre-formate e gridshell post-formate

A seconda della metodologia realizzativa si possono distinguere due tipologie di gridshell: pre-formate e post-formate.

Tra le maggiori difficoltà in cantiere vi è quella di garantire che la forma realizzata sarà uguale alla forma progettata. In fase di realizzazione quindi si può scegliere di costruire un reticolo spaziale pre-formato, ossia un reticolo spaziale in cui gli elementi che lo compongono vengono assemblati ognuno in una data posizione e ad una data quota, ovvero l'esatta posizione e quota che occuperebbero nella forma definitiva. Sebbene questo procedimento sia molto diffuso per la realizzazione di gridshell in acciaio, per quanto riguarda le gridshell in legno viene prediletta la post-formazione.

Una gridshell post-formatata viene assemblata inizialmente su di un piano ad una fissata quota, che non necessariamente deve corrispondere alla quota del terreno. Una volta assemblato il reticolo piano, mediante l'applicazione di forze concentrate ad esso viene imposta una deformazione tale da raggiungere la configurazione spaziale desiderata; una volta messa in forma, la struttura viene vincolata ai bordi e, se necessario, irrigidita (figura .27).

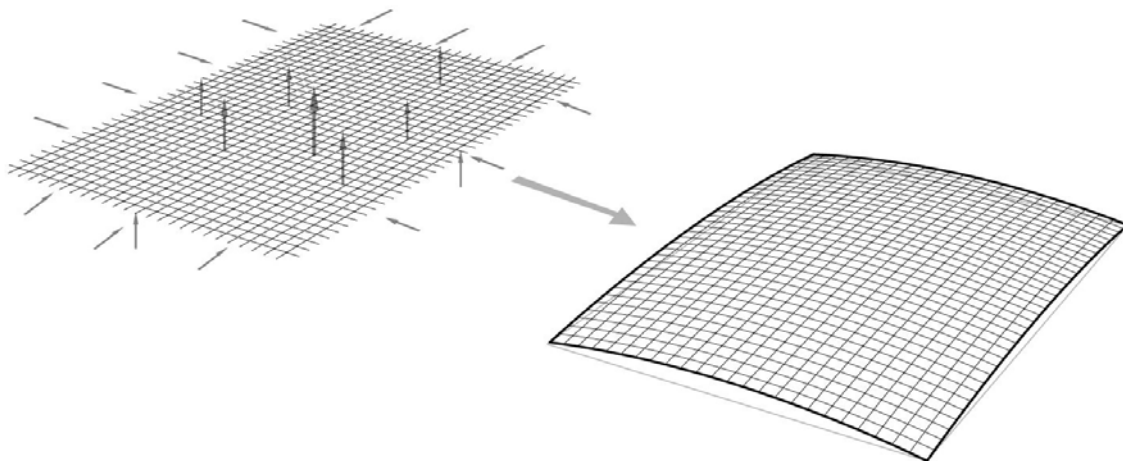


Fig. 2.27 – schema esemplificativo del processo di post-formazione

## 3. Casi studio

Sono stati selezionati tre casi studio ritenuti particolarmente significativi nell'ambito di questa ricerca. Si tratta di edifici realizzati con gridshell di legno massiccio post-formate di grandi dimensioni: La Mannheim Multihalle di Frei Otto, la Downland gridshell di Edward Cullinan Architects ed il Savill Building di Glenn Howells Architects.

I progetti riportati in questo paragrafo presentano caratteristiche comuni a livello strutturale. In ognuno di essi le travi di cui sono composte le gridshell vengono dette a *doppio layer*, ovvero travi a sezione variabile composte da un *layer*, o corrente, *superiore*, un *layer inferiore*, e dei blocchi detti *blocchi di taglio* (figura 2.28).

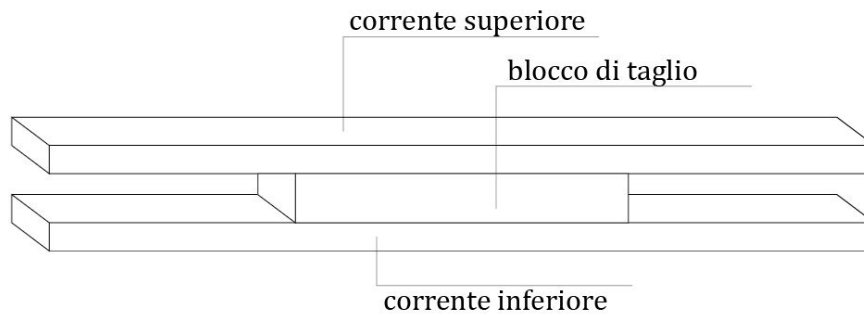


Fig. 2.28 – descrizione di una trave tipo a sezione variabile che compone le gridshell

I due correnti sono realizzati come elementi continui, ossia mediante l'assemblaggio di una serie di piccoli pezzi, tutti di pari lunghezza, giuntati di testa con un giunto a dita. Di fatto questo particolare giunto è l'unico realizzato con la colla, mentre tutti gli altri collegamenti tra gli elementi strutturali sono metallici.

### 3.1 La Mannheim Multihalle

Nel 1970 la città di Mannheim, fortemente colpita dai bombardamenti della seconda guerra mondiale, viene scelta per ospitare il *Bundesgartenschau*, la biennale di orticoltura. Gli architetti Carlfried Mutschler e Winfried Langer vengono selezionati nel 1971 per progettare il padiglione che avrebbe ospitato l'esposizione, progetto che doveva rappresentare il centro dal quale sarebbe partita la ricostruzione dell'intera città.

Alla luce dell'esperienza di Essen, viene deciso di realizzare il nuovo edificio utilizzando una gridshell in legno massiccio e Frei Otto viene chiamato come consulente strutturale per il progetto.



Fig. 2.29 - vista dall'alto della copertura della Mannheim Multihalle

La Mannheim Multihalle viene realizzata nel 1975 e copre una superficie di circa 9000 mq; la sua articolazione spaziale consiste in due grandi cupole, l'una di circa 40x40m e l'altra di 60x60m, connesse tra loro mediante corridoi coperti.

Per il processo di *form-finding* Frei Otto decide di adottare l'approccio funicolare. Egli realizza un modello in scala 1:500 con un reticolo di catene vincolate in determinati punti dal quale determinare la forma di un guscio che avesse comportamento membranale; così facendo è stato possibile dimensionare gli elementi strutturali senza considerare la sollecitazione di flessione, con il risultato che per l'intera struttura sono stati utilizzati degli elementi in abete occidentale dalla sezione 5x5cm.



Fig. 2.30 – Il modello utilizzato da Frei Otto durante il processo di *form-finding*

Per il progetto strutturale intervengono gli ingegneri della Ove Arup & Partners, Ian Liddle e Edmund Happold. Il loro intervento si rende necessario al fine del calcolo della struttura, per il quale viene elaborato un modello numerico tramite cui non solo sono stati verificati gli elementi strutturali, ma è stato determinato il processo costruttivo di post-formazione. Il modulo della gridshell viene fissato ad una luce di 50x50 cm ed inizialmente viene pensato di realizzare un solo layer di travi; a seguito dei primi calcoli Happold e Liddle si rendono però conto che la resistenza della struttura sarebbe stata troppo bassa e decidono quindi per una gridshell a doppio layer, sempre utilizzando elementi a sezione costante di 5x5 cm.

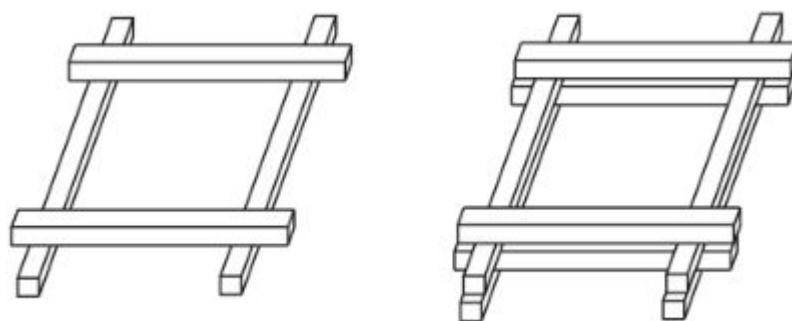


Fig. 2.31 – modulo base ad un solo layer (sinistra) ed a doppio layer (destra)

La scelta delle connessioni tra i vari layer nel caso di gridshell post-formate, impone che il reticolo piano abbia un grado di labilità tale da consentire le deformazioni necessarie alla messa in forma. La post- formazione può avvenire sia dal basso verso l'alto che dall'alto verso

il basso; nel caso della Mannheim è stato scelto di realizzare il reticolo piano alla quota del terreno per poi spingerlo verso l'alto fino ad ottenere la forma di progetto.

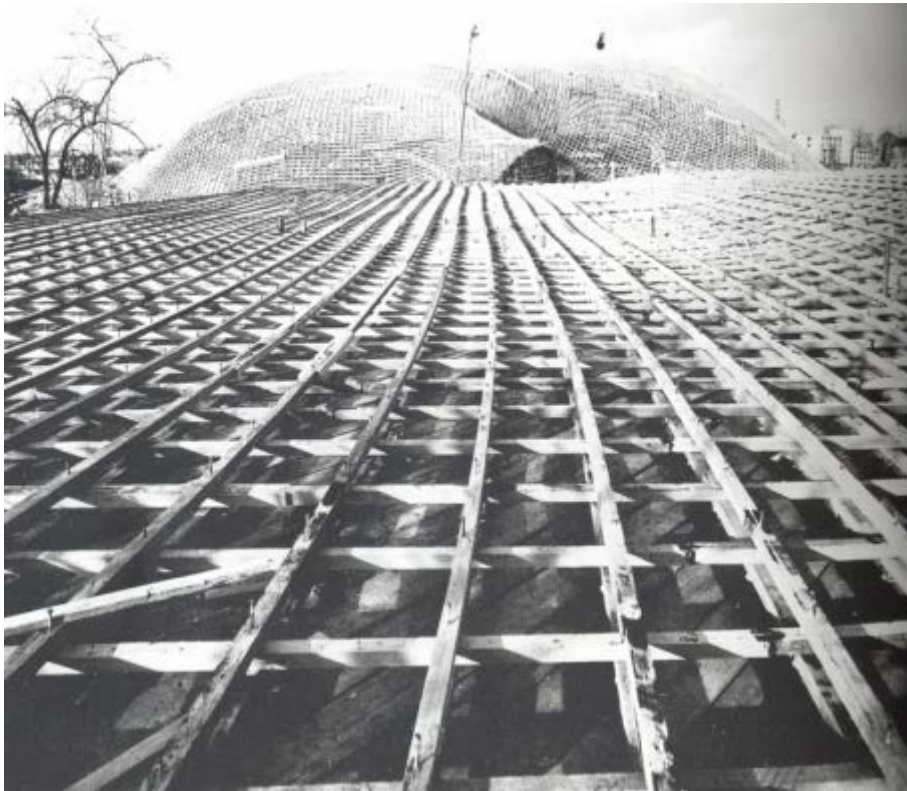


Fig. 2.32 – foto del cantiere della Mannheim Multihalle durante il processo di post-formazione

Per quanto riguarda le connessioni, queste dovevano, in una prima fase, consentire le rotazioni relative tra i vari layer e, onde evitare che si generassero stati di coazione interni troppo elevati, doveva essere consentito anche un certo grado di scorrimento di un layer sopra l'altro.

La scelta è stata quindi quella di utilizzare dei bulloni, uno per ogni nodo, con la funzione di cerniera cilindrica interna che connettesse tutti e quattro i layer, lasciando in questo modo libere le rotazioni relative intorno all'asse verticale. Per i due layer superiori inoltre è stata realizzata un'asola che consentisse lo scorrimento di un layer sull'altro (figura 2.33).

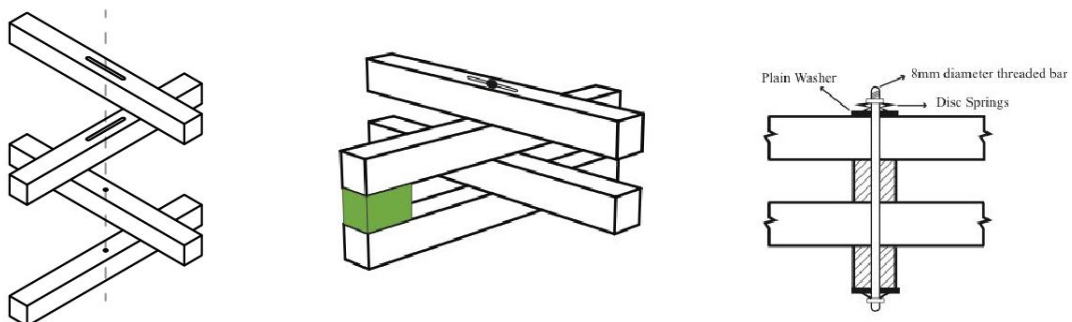


Fig. 2.33 – disegno della connessione tra i quattro layer

Per consentire la trasmissione del taglio, tra un layer e l'altro sono stati imbullonati dei blocchetti di legno massiccio denominati *shearblocks*, o *blocchi di taglio*. La messa in forma della struttura è avvenuta mediante l'applicazione di forze esterne e con l'aiuto di impalcature interne che servivano a mantenere fissa la quota di alcuni punti.

Una volta messa in forma la struttura doveva quindi essere stabilizzata, sia vincolandone i bordi per non consentire alla gridshell di tornare alla conformazione piana, sia eliminando i gradi di libertà che avrebbero compromesso l'equilibrio statico. I bulloni che vincolavano i layer sono stati stretti eliminando la possibilità di scorrimento, mentre per eliminare le rotazioni sono stati inseriti dei cavi di controventamento in acciaio ogni sei moduli della gridshell.

Per quanto riguarda le travi di bordo è bene osservare che il comportamento della struttura fa sì che le tensioni membranali debbano essere assorbite e portate a terra; le strutture di bordo devono quindi essere in grado sia di assorbire le spinte, sia di trasmettere le sollecitazioni alle fondazioni, sia di sopportare gli effetti di flessione, che si estinguono a breve distanza dal bordo stesso. Nel progetto della Mannheim Multihalle sono state utilizzate ai bordi diverse tecnologie tra le quali: travi di legno lamellare, cavi in acciaio e strutture di contenimento in cemento armato.

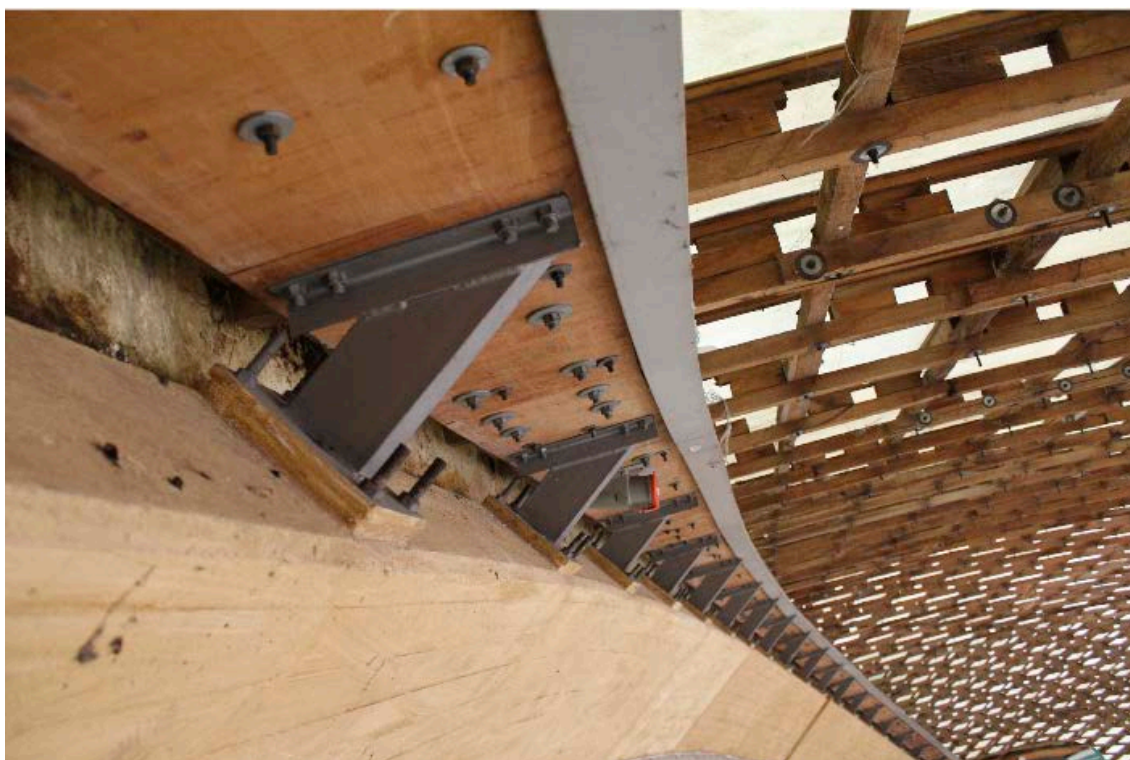


Fig. 2.34 – immagine della trave di bordo della Mannheim Multihalle

La Mannheim Multihalle è la prima grande opera realizzata con una gridshell in legno, e la sua importanza è tale che, nonostante sia nata come padiglione espositivo provvisorio da demolire entro due anni, ad oggi è ancora in piedi e rappresenta il primo effettivo progetto di riferimento di questa tipologia strutturale.



Fig. 2.35 – fotografia dell'interno della Mannheim Multihalle

### 3.2 La Weald&Downland

A seguito della realizzazione della Multihalle sono stati realizzati altri esempi di gridshell, ma solo limitatamente a casi di padiglioni espositivi temporanei<sup>17</sup>. La prima opera in Europa che utilizza questa tecnica per un edificio permanente è la struttura realizzata per il Weald&Downland Open Air Museum di Sussex, in Inghilterra, nel 2002. Più di 45 edifici provenienti da diverse regioni sono stati smontati, restaurati e ricostruiti nell'area aperta del museo, a testimonianza delle tecniche costruttive utilizzate in Inghilterra tra il XV ed il XIX secolo. Questo intervento ha avuto lo scopo di promuovere gli studi sulla conservazione degli edifici antichi, ed in particolare gli edifici costruiti con la tecnica tradizionale inglese del *timber-frame*. Inserendosi in questo contesto, l'edificio museale doveva quindi essere un esempio di edificio moderno in grado di richiamare e valorizzare le tecniche costruttive del passato.



Fig. 2.36 – Vista dell'Open Air Museum di Sussex

<sup>17</sup> Come ad esempio il padiglione espositivo del Giappone per l'EXPO di Hannover, nel 2000. Progettato da Frei Otto e Shigeru Ban, e realizzato da Buro Happold, il padiglione non utilizza il legno massiccio, ma è stato di certa ispirazione nel determinare la forma della Downland gridshell.

Il progetto del museo viene affidato alla Edward Cullinan Architects e si compone di due livelli: quello inferiore, in muratura, che si attesta sulla collina del sito di progetto, e quello superiore realizzato con una gridshell in legno massiccio.

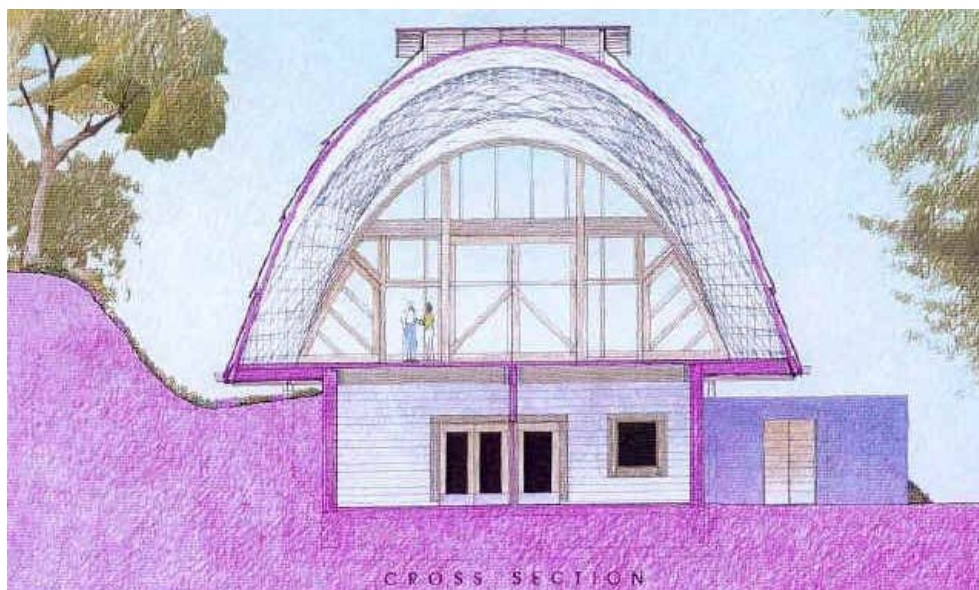


Fig. 2.37 - sezione trasversale di progetto

Il progetto strutturale viene affidato allo studio Buro Happold, in collaborazione con la Green Oak Carpentry, e l'opera cui si fa principale riferimento a livello strutturale è la Mannheim Multihalle. Lo studio di quest'ultima è stato determinante per l'affinamento della tecnica costruttiva: nella gridshell di Mannheim il processo di post-formazione che andava dal basso verso l'alto ha portato alla concentrazione di forze in determinati punti, causando la rottura di diversi elementi e di molte connessioni a dita. Inoltre gli operai, nelle varie fasi dell'erezione, hanno dovuto lavorare in altezza appoggiandosi al reticolo non ancora fissato, cosa che non può essere consentita dalle moderne norme di sicurezza in cantiere.

La forma della Downland gridshell è stata scelta secondo criteri di rigidità, per limitarne la massima deformazione in condizioni di esercizio. Nel processo di form-finding i software di modellazione hanno giocato un ruolo fondamentale nel determinare la superficie a doppia curvatura che descrive l'andamento della gridshell.



Fig. 2.38 - modello tridimensionale della Downland gridshell



La superficie può essere descritta come l'intersezione di tre cupole di uguali dimensioni che si estendono longitudinalmente per 50 m. Nella direzione trasversale la luce varia da un minimo di 12,5 m ad un massimo di 16 m, mentre l'altezza varia tra i 7,5 ed i 9,5 m. I due layer della gridshell sono composti da elementi di legno massiccio di quercia di sezione 50x35 mm tra i quali sono interposti i blocchi di taglio, e formano un reticolo regolare di 1x1 m, infittito in alcune zone. Per il sistema di controventamento è stato utilizzato lo stesso elemento ligneo, posto in opera solo dopo aver dato forma alla struttura, che corre longitudinalmente per tutta la lunghezza della gridshell.

Anche in questo caso per la messa in forma della gridshell si è scelto di seguire un processo di post-formazione, il quale richiede che, nel passare dalla configurazione piana alla configurazione deformata, debbano essere consentite sia le rotazioni relative che gli scorrimenti relativi fra i layer. Nel caso della Downland gridshell sono stati identificati ed imbullonati i nodi che non avevano bisogno dello scorrimento, lasciando comunque libere le rotazioni, mentre per tutti gli altri punti è stata studiata e brevettata una particolare connessione (figura 2.39).

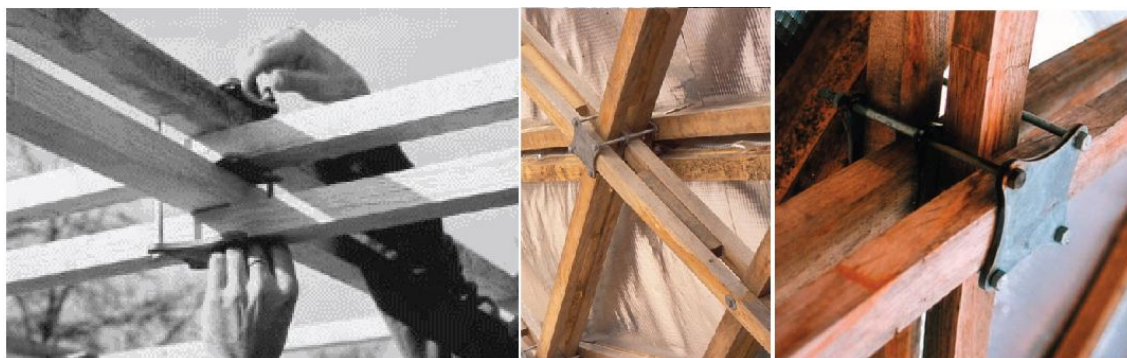


Fig. 2.39 – la connessione della Downland gridshell

A differenza del sistema di connessione utilizzato per la Mannheim Multihalle, qui grazie alla bullonatura esterna agli elementi strutturali, per garantire lo scorrimento e la rotazione locale non è stato necessario creare delle asole nei correnti.

La vera innovazione a livello costruttivo tuttavia è rappresentata dalla scelta di post-formare la gridshell dall'alto verso il basso, utilizzando quindi a proprio vantaggio l'azione della forza di gravità. Grazie ad un sistema di impalcature, l'assemblaggio piano del reticolo è stato operato ad una determinata quota; una volta realizzato il reticolo, le impalcature sono state sostituite da speciali elementi di sostegno che non vincolavano lo scorrimento orizzontale. La struttura è stata poi formata imponendo uno spostamento di pochi centimetri al giorno fino a raggiungere la configurazione spaziale di progetto.

Alcune di questa fasi realizzative sono riportate nella figura 2.40:

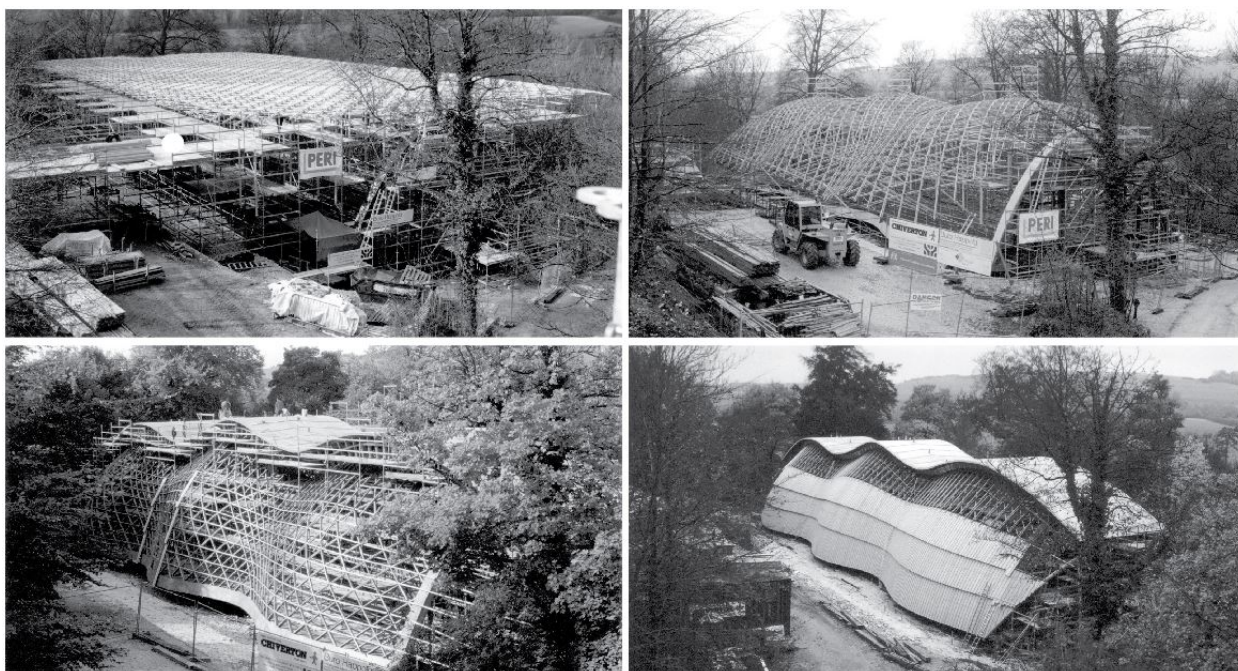


Fig. 2.40 – fasi realizzative della Downland gridshell

Il sistema di controventamento, così come le travi di bordo di legno lamellare, sono state inserite al termine del processo di post-formazione vincolando la forma.

Rispetto al caso di Mannheim è evidente come i moderni strumenti informatici abbiano consentito una progettazione più attenta fase per fase. Grazie ad un processo di prova ed errore è stato infatti possibile non solo scegliere una forma ottimale, ma anche simulare ogni fase della realizzazione, individuare le zone maggiormente sollecitate prevenendo la possibile rottura di alcuni elementi.

### 3.3 Il Savill Building

La copertura del Savill Building di Windsor Great Park, nello Berkshire, è l'esempio più recente di gridshell in legno massiccio a doppio layer di grandi dimensioni. L'edificio, realizzato nel 2007, è il centro per visitatori del Savill Garden, un giardino espositivo creato da Sir Eric Savill nel 1930.

La gridshell del Savill Building, disegnata dallo studio Glenn Howells Architects e realizzata da Buro Happold, copre una superficie di 90x25 metri ed è la gridshell più grande di tutto il Regno Unito.

Il processo di form-finding è stato condotto inizialmente dal prof. Chris Williams dell'università di Bath, il quale collaborò nel 1970 con Ted Happold per determinare la forma della Mannheim Multihalle. In questo caso l'opera da mettere in risalto non vuole essere l'edificio ma il giardino circostante, motivo per cui la forma iniziale viene ispirata dalle forme naturali; la superficie della copertura passa poi attraverso un processo analitico tramite il quale viene parametrizzata.



Fig. 2.41 -vista interna del Savill Building

Rispetto ai due casi studio precedentemente esposti, il Savill Building presenta rilevanti differenze. Anzitutto in questo progetto la gridshell funge unicamente da copertura mentre la struttura di sostegno verticale è realizzata in acciaio. A livello architettonico infatti si voleva dare continuità al paesaggio, ragione per cui le partizioni verticali dell'intero edificio sono vetrate ed i pilastri di sostegno della copertura sono concentrati solo in pochi punti.



Fig. 2.42 - vista esterna del Savill Building

La concentrazione di carichi nei bordi risulta in questo progetto particolarmente significativa, anche per il fatto che tutte le sollecitazioni della copertura per arrivare a terra hanno bisogno di raggiungere i pilastri. La trave di bordo è costituita da un tubolare in acciaio che corre per tutto il perimetro, al quale è stata imbullonata una seconda trave di irrigidimento in Kerto LVL (legno micro lamellare).

La struttura della gridshell è invece realizzata da elementi di legno massiccio di larice, provenienti dalla foresta circostante, di sezione 8x5 cm, mentre i blocchetti di taglio misurano in sezione 8x8 cm e sono disposti sempre uno sopra l'altro, garantendo una distanza di 16 cm tra il corrente superiore ed il corrente inferiore della gridshell (figura 2.43).



Fig. 2.43 – fase di assemblaggio della gridshell del Savill Building

Una seconda innovazione rispetto ai casi precedenti è la tecnica realizzativa. Come nella Downland Gridshell, il processo di post-formazione avviene dall'alto verso il basso per sfruttare a proprio vantaggio la forza di gravità. Questa volta però la costruzione del reticolo avviene in più fasi.

Vengono montati in piano solo i due correnti inferiori, connessi da un bullone e senza asole, ossia capaci di ruotare ma non di scivolare uno sull'altro. Il processo di post-formazione viene applicato quindi ad un reticolo di aste la cui resistenza è molto bassa rispetto alla struttura finita; durante la messa in forma vengono posizionati ed avvitati i blocchi di taglio, mentre il corrente superiore viene fissato solo una volta che il reticolo iniziale ha raggiunto la forma di progetto ed è stato vincolato alle travi di bordo. In particolare, la classe di resistenza del corrente inferiore è C24, mentre il corrente superiore, per facilitare l'operazione di messa in forma postuma, presenta una classe di resistenza C20.



Fig. 2.44 – montaggio del corrente superiore della gridshell del Savill building

Oltre alle connessioni, alla conformazione spaziale ed alla tecnica costruttiva, a variare è anche il sistema di controventamento. In questo caso infatti si è scelto, per ragioni estetiche,

di far risaltare il reticolo ligneo utilizzando come controventi dei pannelli di compensato avvitati sul corrente superiore.



Fig. 2.45 – fasi di montaggio del sistema di controventamento

### 3.4 Considerazioni e confronti

Le scelte architettoniche e formali che hanno caratterizzato i progetti sopra esposti influiscono sulla scelta della specie legnosa, non esistendo di fatto una specie legnosa applicabile ad ogni struttura. Di seguito si riporta una tabella riassuntiva dei materiali usati e delle ragioni per le quali sono stati scelti<sup>18</sup>:

Caso Studio	Materiale scelto
<b>Mannheim Multihalle</b>	Abete Occidentale. Scelto perché gli alberi di questa specie possono raggiungere i 60 m di altezza con tronchi dritti, dando quindi la possibilità di ricavarne degli elementi strutturali molto lunghi.
<b>Weald&amp;Downland</b>	Quercia. Scelto perché ha buone caratteristiche di durabilità ed è facilmente reperibile nel Regno Unito.
<b>Savill Building</b>	Larice. Scelto per via delle ottime qualità in termini di durabilità e resistenza all'esposizione esterna, nonché perché disponibile direttamente dal terreno del committente.

Fig. 2.46 – tabella riassuntiva dei materiali utilizzati nelle coperture dei tre casi studio

<sup>18</sup>D. NAICU, Geometry and performance of timber gridshells, PhD in Architecture and Civile engineering, Univeristy of Bath, Bath, 2012

Un altro interessante studio riporta un confronto tra i progetti di gridshell in legno massiccio ed alcuni noti esempi di gridshell in acciaio, la copertura del British Museum di Londra ed il Palacio de Comunicaciones di Madrid.

I confronti sono stati effettuati sia in termini di costo al metro quadro, sia in termini di peso per area coperta.

Per quanto riguarda il costo, il paragone si riferisce al solo costo di costruzione della gridshell, che nel caso della Weald&Downland e del Savill Building ha rappresentato il 28% del costo totale dell'opera<sup>19</sup>.

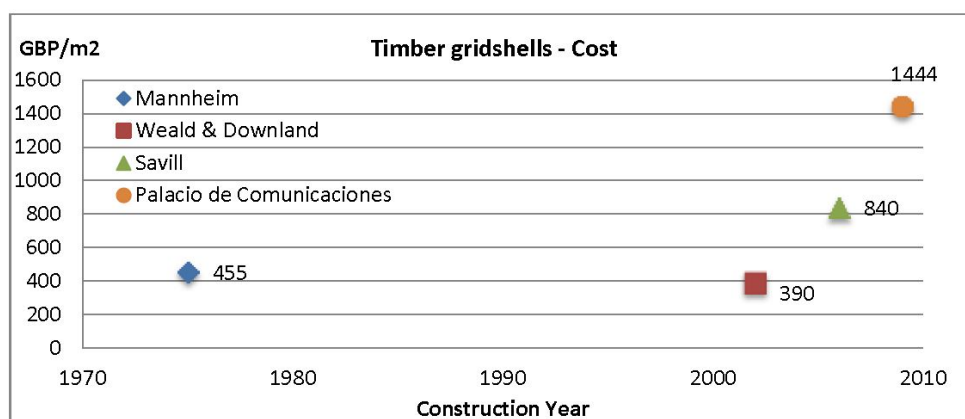


Fig. 2.47 – costo al metro quadro per la realizzazione delle gridshell in legno a confronto con il costo di realizzazione della gridshell in acciai del Palacio de Comunicaciones di Madrid

Per quanto riguarda il rapporto tra peso al metro quadro ed area coperta, il confronto è stato schematizzato come segue, normalizzando cioè sia il peso che l'area coperta in funzione della gridshell del British Museum:

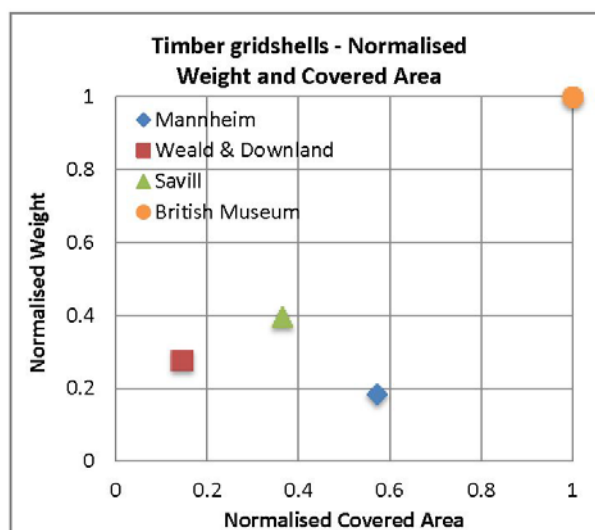


Fig. 2.48 – tabella di confronto tra il rapporto di peso/area coperta riferito alle gridshell di legno massiccio ed alla gridshell del British Museum di Londra

<sup>19</sup>D. NAICU, R. HARRIS, C. WILLIAMS, Timber gridshells: design method and their application to a temporary pavilion, WCTE (World Conference on Timber Engineering), Canada, 2014

Il dato interessante che emerge dal confronto è che la struttura più performante risulta essere la Mannheim Multihalle gridshell, per quanto sia l'unica ad essere stata realizzata come opera temporanea. Leggendo il grafico si evince infatti che con meno del 20% del peso al metro quadro, questa è in grado di coprire quasi il 60% dell'area coperta dalla gridshell del British Museum.

In ultimo, riportiamo un grafico in cui viene quantificato il peso di queste strutture per metro quadro, sempre in relazione con l'area coperta. Anche in questo caso il paragone è con la gridshell del British Museum, e mette in evidenza le caratteristiche di leggerezza delle gridshell in legno prese in esame. Il confronto risulta particolarmente significativo se si pensa che le strutture in acciaio sono considerate strutture leggere dagli standard prestazionali elevati.

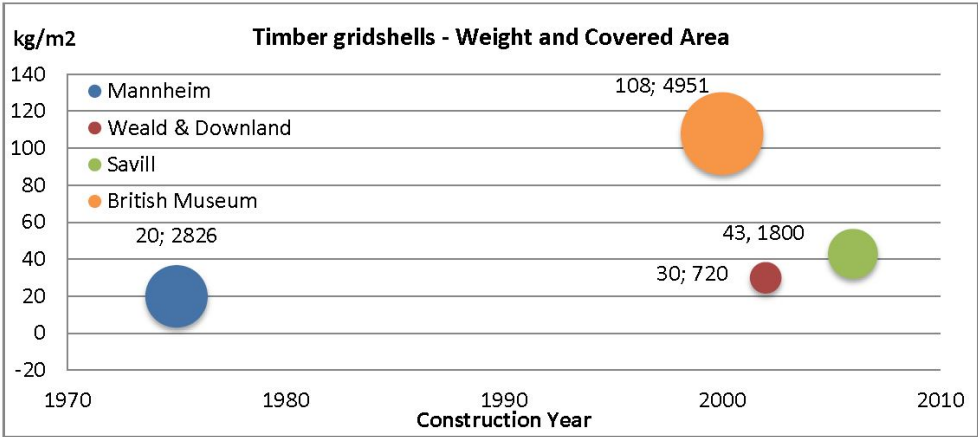


Fig. 2.49 – tabella di confronto tra il peso al metro quadro e l'area coperta riferito alle gridshell di legno massiccio ed alla gridshell del British Museum di Londra

## Capitolo 03

### Gli Aspetti Metodologici della Modellazione

#### 1. Premessa

In questo capitolo viene presentato un metodo, scelto a seguito dell'approfondimento delle fasi di progetto di alcuni casi studio e ritenuto particolarmente efficace per l'approccio alla progettazione di gridshell di grandi dimensioni.

Come abbiamo visto nel capitolo precedente, la complessità delle strutture che costituiscono l'oggetto di studio risiede sia nella loro conformazione morfologica che nell'articolata soluzione tecnologica.

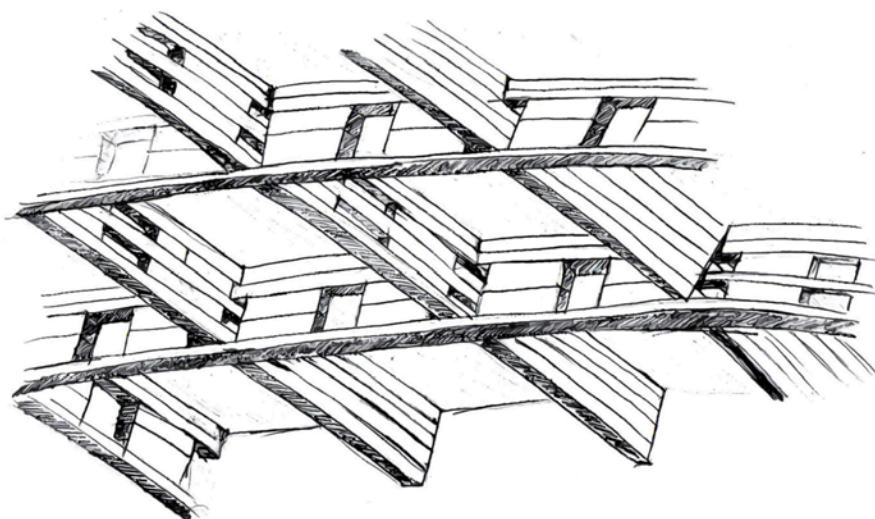


Fig. 3.1 – disegno della tessitura del Savill Building

Ci si muove, quindi, nel campo della progettazione computazionale, rendendosi di fatto indispensabile l'utilizzo di strumenti di modellazione ed analisi. Questo capitolo ha il duplice intento di esplicitare l'iter procedurale che verrà adottato, nonché di fungere da introduzione ai tre capitoli successivi, nei quali si entrerà nello specifico dei problemi numerici ed analitici.

#### 2. Inquadramento delle problematiche

Nella progettazione di strutture come le gridshell entrano pesantemente in gioco questioni tecnologiche, morfologiche ed analitiche, ognuna delle quali meriterebbe uno specifico approfondimento. Nell'ambito di questo lavoro è stata fatta la scelta di concentrarsi sull'aspetto computazionale della semplificazione del modello di calcolo.

Questa scelta è motivata dalla volontà di andare incontro alle esigenze di un progettista che si avvicina ad un progetto ex novo di una gridshell di legno massiccio di grandi dimensioni,



ponendosi quindi come fine ultimo la generazione di strumenti di facile lettura tramite i quali sia possibile ridurre ai minimi termini la complessità del problema.

È bene specificare che in nessun caso la progettazione di una struttura può essere completamente delegata ad un sistema automatizzato, prescindendo, quindi, dalla capacità critica del progettista. Non è dunque nostra intenzione banalizzare la complessità del problema sostenendo che la risoluzione dello stesso possa essere interamente delegata a strumenti informatici; l'ambizione è, piuttosto, quella di sviluppare un sistema esperto in cui le scelte progettuali, da quelle estetiche a quelle funzionali, e la valutazione delle prestazioni strutturali rimangano, come è giusto che sia, onere del progettista.

Entriamo, quindi, più nello specifico del problema. Come in ogni progetto, la concezione iniziale di una struttura è caratterizzata da un processo di prova ed errore atto a determinare la soluzione considerata maggiormente efficiente; nell'approcciarsi a strutture a forma resistente, questa primissima fase riguarda proprio la ricerca della forma, mediante il cosiddetto processo di *form-finding*. In questi casi, infatti, la forma strutturale assume carattere architettonico e deve rispondere a principi estetici, in aggiunta a determinati requisiti meccanici.

Il requisito meccanico fondamentale per una struttura composta da piccoli pezzi e chiamata a coprire grandi luci è quello di avere un comportamento membranale, ottimizzando in tal modo gli elementi strutturali in termini di peso e resistenza.

Se nella fase di ricerca della forma non si attuasse alcuna semplificazione del modello, il meccanismo iterativo di prova ed errore risulterebbe del tutto inefficiente in termini di tempo. Un iter progettuale efficace, infatti, non solo deve essere in grado di restituire risultati affidabili, ma deve consentire di apportare modifiche, anche significative, e di ripetere le analisi necessarie nel minor tempo possibile.

Tuttavia, riferendoci a strutture come quelle presentate nel capitolo precedente (vedi anche Fig. 3.1), si evince chiaramente che una modellazione completa delle stesse mal si adatta ad un processo iterativo suscettibile di molteplici variazioni; tale modellazione comprende, infatti, una quantità di elementi tale da richiedere un forte investimento in termini di tempo, sia nei confronti della modellazione geometrica che nei confronti della modellazione meccanica.

A partire da questi presupposti, vediamo come è stato sviluppato l'iter procedurale.

### 3. Iter procedurale

Per affrontare le problematiche oggetto di studio è indispensabile avvalersi di strumenti computazionali. In particolare, nello sviluppo di questa ricerca, e per tutti i casi applicativi che seguiranno, sono stati utilizzati tre differenti software: Rhinoceros, per la modellazione geometrica, SAP2000, per l'analisi della struttura, e Maple18 come manipolatore algebrico per la risoluzione dei problemi analitici.

Ciò premesso, l'intento primo di questa ricerca è stato quello di sviluppare un sistema di modellazione multiscala atto a semplificare l'approccio alle diverse fasi progettuali. In particolare si possono distinguere tre fasi fondamentali: la fase iniziale di ricerca della forma, una fase intermedia di dimensionamento degli elementi lignei, una fase conclusiva di dimensionamento globale, ivi comprese le connessioni; per ognuna di queste fasi è stato sviluppato un modello ad una definita scala di dettaglio.

Nella prima fase di *form-finding*, ad esempio, è necessario lavorare su un modello che consenta di modificare la geometria della struttura senza un particolare dispendio di tempo, determinando una forma che risponda alle esigenze del progetto. Quello che si ricerca in questa prima fase è, quindi, una forma che abbia un comportamento prevalentemente membranale; il modello che si utilizza deve essere, inoltre, adatto ad un primo dimensionamento delle travi che compongono la copertura, restituendo dei risultati affidabili in termini di sollecitazioni.

Trattandosi di strutture leggere, il corretto dimensionamento degli elementi strutturali deve certamente rispondere a criteri di resistenza, ma deve anche tenere conto dell'aspetto deformativo. Nella seconda fase, quindi, si deve utilizzare un modello con un grado di dettaglio superiore. Una volta determinata la forma, è possibile adattarle un sistema a graticcio descritto da un modello semplificato della struttura reale in grado, stavolta, di restituire risultati affidabili sia in termini di sollecitazioni che in termini di spostamenti.

Nella terza fase, infine, si deve utilizzare un modello dettagliato della struttura; questo deve essere in grado di riprodurre il comportamento di ogni elemento che la compone, in modo tale da poter fornire tutte le informazioni necessarie all'effettivo dimensionamento della struttura in ogni sua parte.

Il comportamento meccanico di ognuno di questi modelli deve essere strettamente correlato; riuscendo a garantire questa correlazione, si può arrivare a dover modellare la struttura in modo dettagliato una sola volta, avendo già determinato la forma che dovrà assumere e la dimensione delle travi che la compongono. Nell'ultima fase quindi sarà possibile verificare la validità dei risultati ottenuti dalle due modellazioni precedenti e procedere al dimensionamento delle connessioni.

Per capire meglio il motivo per cui la modellazione multiscala è considerata vantaggiosa, si osservi la figura 3.2, nella quale viene rappresentato un modulo della struttura della Weld & Downland Gridshell.

Ricordiamo che ognuna delle coperture prese in esame è sottesa a superfici a doppia curvatura spaziale e che, dovendo coprire grandi luci, si compone di una ripetizione spaziale di centinaia di moduli base simili a quelli riportati in figura.

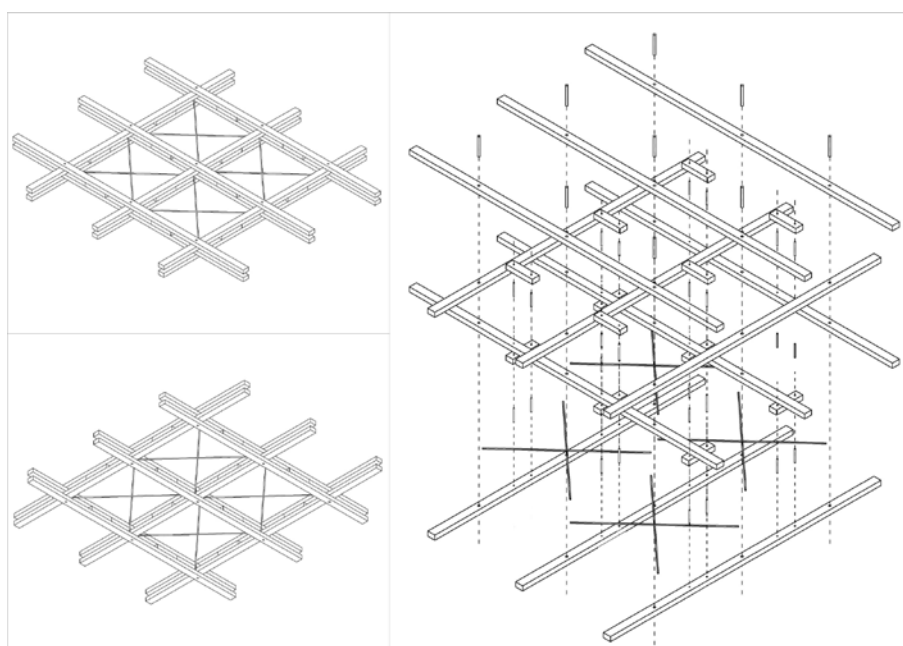


Fig. 3.2 - rappresentazione assonometrica del modulo della Downland gridshell

Volendo riprodurre in modo dettagliato una struttura siffatta si renderebbe necessario modellarne ogni elemento: i layer superiori nelle due direzioni, i layer inferiori nelle due direzioni, i blocchi di taglio nelle due direzioni, i vincoli di bordo e tutte le connessioni interne, sia quelle tra layer e layer che quelle tra layer e blocchi di taglio. Ognuno di questi elementi corrisponde ad un oggetto geometrico e, pertanto, rende la fase di generazione del modello lunga e complessa. Nella figura 3.3 si riporta, ad esempio, la geometria del modello della copertura del Savill Building nelle sue effettive dimensioni.

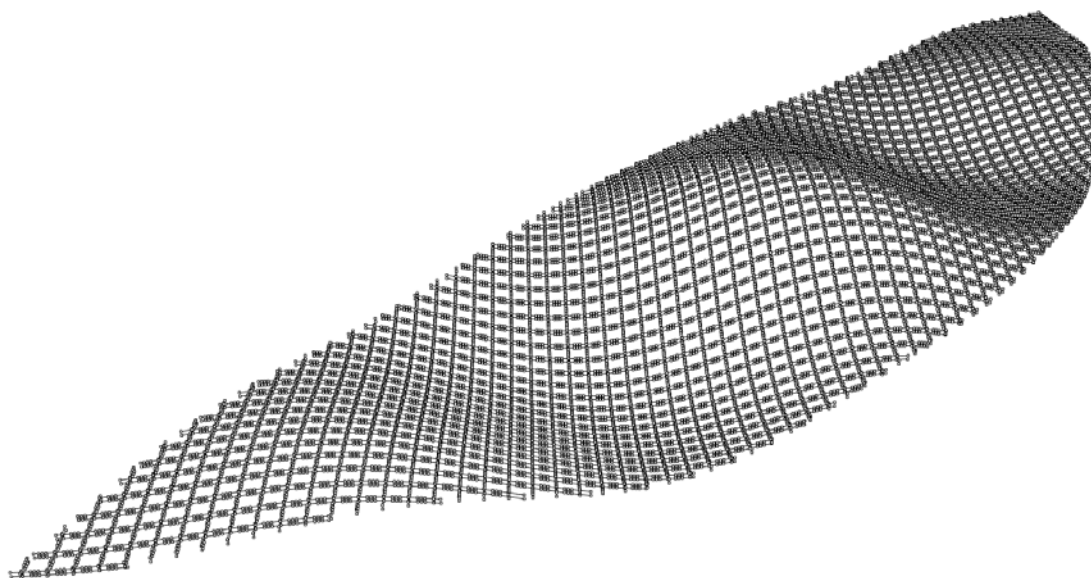


Fig. 3.3 – modello dettagliato della copertura del Savill Building

È facile immaginare che, se si utilizzasse un modello così tanto dettagliato anche nel procedimento di ricerca della forma, qualora quest'ultima risultasse inefficace, una eventuale modifica implicherebbe il dover rimodellare l'intera struttura dettagliatamente, laddove l'investigazione degli effetti della curvatura e delle lunghezze caratteristiche sugli stati di membrana non necessita di questo grado di dettaglio. Inoltre è bene ricordare che più un modello strutturale è dettagliato, più è difficoltosa la lettura dei risultati e più è alta la probabilità di cadere in errori materiali di modellazione.

Tutto ciò premesso, in figura 3.4 sono riportati i modelli alle diverse scale della copertura del Savill Building le quali, da ora in avanti, saranno denominate come segue:

1. Modello di guscio equivalente
2. Modello a travi equivalenti
3. Modello dettagliato

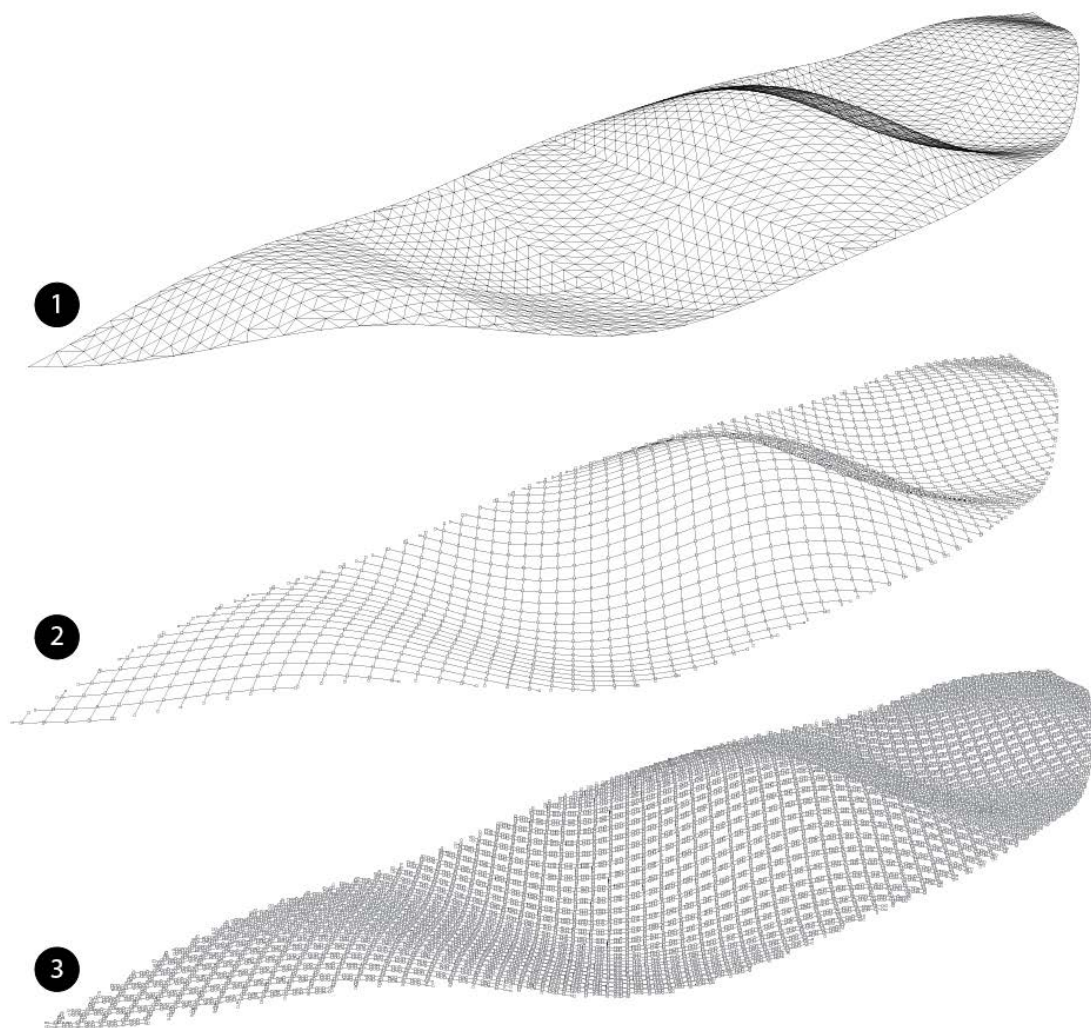


Fig. 3.4 - i modelli della gridshell del Savill Building alle diverse scale di osservazione

Per far sì che sia possibile modellare in modo dettagliato una struttura solo nella fase conclusiva del progetto è fondamentale capire come caratterizzare i modelli semplificati. Il metodo utilizzato nell'ambito di questa ricerca verrà approfondito nei prossimi capitoli.

#### 4. Il layout dei prossimi capitoli

Come abbiamo detto, per poter sfruttare i vantaggi di una modellazione multiscala è necessario che i modelli siano in relazione fra loro in termini di prestazioni meccaniche. Per garantire questa condizione è stato seguito un iter composto da diversi passaggi logici ben definiti che verranno presentati nel dettaglio nei prossimi capitoli. In particolare questi si struttureranno come segue:

- Nel capitolo 4 verrà isolato un singolo modulo base piano (1); su di esso verranno condotti i necessari procedimenti analitici per determinarne l'inerzia e l'area equivalente. A partire da questi ultimi parametri si determineranno le dimensioni di

una sezione rettangolare omogenea tramite cui verrà definito il modello semplificato di quello stesso modulo base (2).

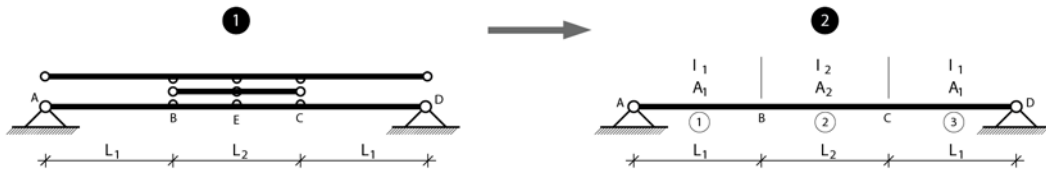


Fig. 3.5 - descrizione schematica della omogeneizzazione del modello di trave

La validità dei procedimenti analitici verrà quindi verificata mettendo a confronto i rispettivi modelli numerici, sia nel caso di sollecitazioni flessionali che nel caso di sollecitazioni assiali. Verrà infine verificato, sempre a livello numerico, che questo stesso criterio di omogeneizzazione sia applicabile ad una trave piana composta da una successione di un determinato numero di moduli base.

- Nel capitolo 5 si analizzerà invece una struttura piana bidimensionale. Verrà modellato un graticcio di travi (3) e verranno determinati i parametri tramite cui sarà possibile definire una superficie piana equivalente (4). Verranno poi condotte delle analisi sui relativi modelli numerici per verificare che il comportamento meccanico degli stessi si equivalga in termini di sollecitazioni e spostamenti per stati di sollecitazione omogenea di taglio, momento e sforzo normale.

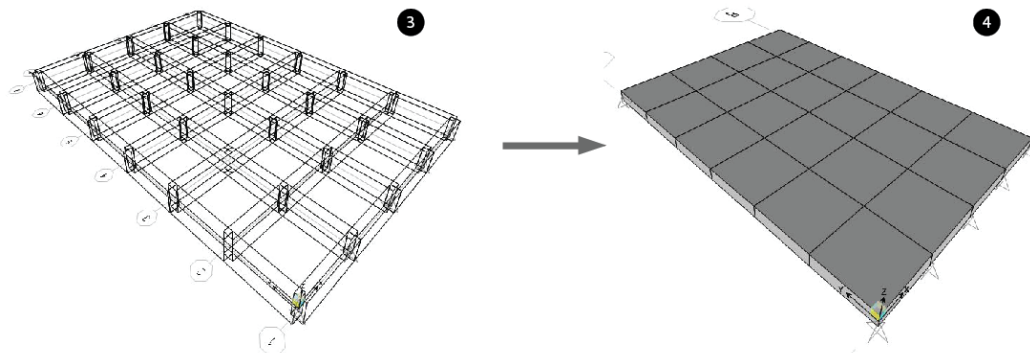


Fig. 3.6 - descrizione schematica del passaggio da discreto a continuo

- Nel capitolo 6 verrà infine preso in considerazione il contributo della curvatura. Si procederà inizialmente a determinare il modello equivalente di una serie di archi modellati in modo dettagliato, al variare delle caratteristiche geometriche di curvatura.

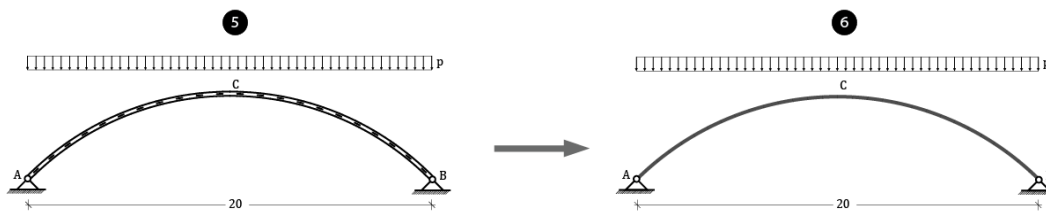


Fig. 3.7 – descrizione schematica dell'omogeneizzazione di una trave curva

Una volta risolto il problema dei singoli archi si presenteranno delle esemplificazioni relative a differenti casi: una gridshell piana, una gridshell a singola curvatura e due gridshell a doppia curvatura spaziale. Per ognuno di questi casi verranno elaborati i modelli alle tre diverse scale di dettaglio e verranno messi a confronto i risultati delle analisi su di essi condotte.

Lo scopo di questo procedimento sarà quello di validare l'efficacia dei modelli equivalenti. Per questa ragione non si procederà in alcun modo a dimensionare gli elementi strutturali, ma ci si limiterà a verificare che il procedimento di modellazione multiscala sia effettivamente utilizzabile per semplificare l'iter progettuale di una gridshell in legno massiccio composta di piccoli pezzi.



## Capitolo 04

### Il Modello di Trave Omogenea Equivalente

#### 1. Premessa

La struttura che si sta analizzando è un reticolo spaziale che macroscopicamente ha forma di guscio, tuttavia composto da una fitta griglia di travi a doppio layer, e per questo viene chiamato gridshell. La singola trave risulta essere una ripetizione nello spazio di un modulo base in accordo con una legge di periodicità; tuttavia, per rispondere al meglio ai diversi stati di sollecitazione della gridshell, il modulo base presenta delle variazioni. Da un'analisi approfondita dell'intera struttura di copertura del Savill Building, preso come caso studio di riferimento, sono stati identificati cinque diversi moduli base, che sono quelli riportati in figura 4.1:

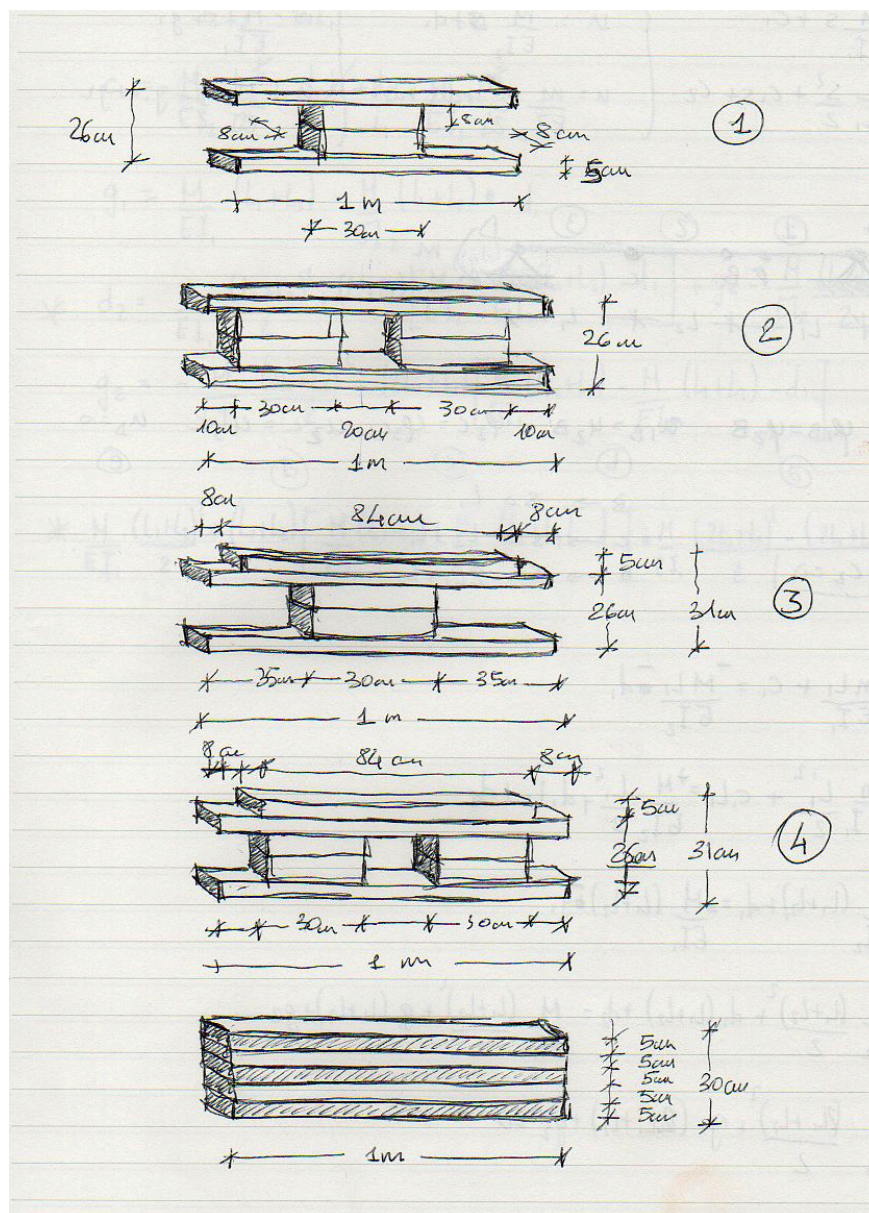


Fig. 4.1 - i moduli base che compongono la copertura del Savill Building



La loro complessità spaziale porta con sé un problema di modellazione. Un modello dettagliato, infatti, sarebbe composto da troppi elementi di piccola taglia e comporterebbe non solo difficoltà di modellazione, ma anche di lettura e di interpretazione dei risultati. Come strumento di sintesi, la trave composta da una ripetizione periodica di moduli base viene in una fase intermedia modellata come una trave a sezione uniforme lungo la lunghezza del suo asse. Questa trave verrà chiamata *trave equivalente* in quanto, tramite opportuna definizione degli aspetti costitutivi, dovrà fornire le stesse risposte meccaniche in termini di flessione e sforzo assiale della trave periodica.

L'iter che si è scelto di adottare per determinare le caratteristiche della trave equivalente è quindi il seguente: si isola il modulo di base della trave periodica e si risolvono i problemi flessionale ed assiale sotto azioni uniformi utilizzando le corrispondenti equazioni della linea elastica; la soluzione dei problemi flessionale ed assiale consentirà la determinazione rispettivamente dell'inerzia e dell'area *equivalenti* della sezione.

In questa fase i due problemi assiale e flessionale vengono risolti in forma disaccoppiata perché la trave viene ritenuta rettilinea o la sua curvatura considerata ininfluente ai fini costitutivi.

Di seguito risolveremo i problemi flessionale ed assiale del modulo di base di figura 4.2, che si compone di due layer (corrente inferiore e corrente superiore) ed un blocco di taglio:

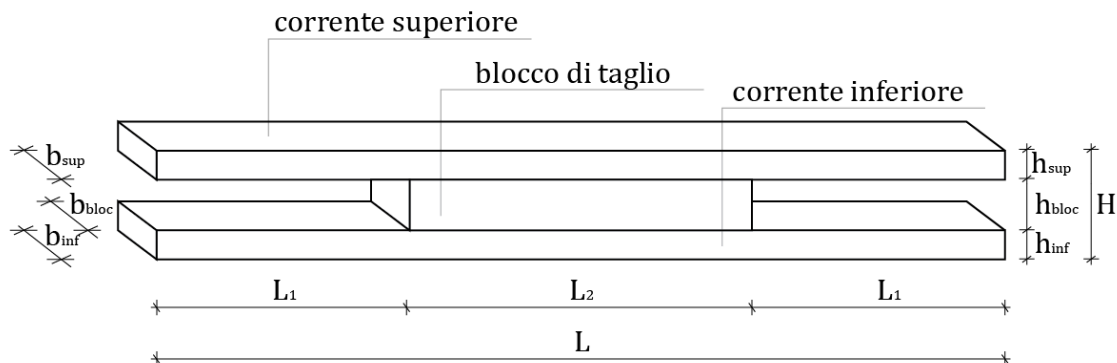


Fig. 4.2 - modulo base di riferimento

Riferendoci sempre alla copertura del Savill Building, il modulo riportato in figura è quello che compone la copertura quasi nella sua interezza, ed è il motivo per cui è stato scelto di condurre le nostre analisi su di esso; tutti gli altri moduli riportati in figura 4.1 sono invece utilizzati come irrigidimento a mano a mano che ci si avvicina ai bordi, punti nei quali sono presenti singolarità e concentrazione di sforzi.

Prima di procedere alla soluzione analitica del problema è bene fare una precisazione.

Contrariamente a quanto avviene per elementi strutturali in acciaio e calcestruzzo, quando si tratta di strutture in legno la deformabilità a taglio assume una certa rilevanza, soprattutto se paragonata alla deformabilità a flessione, anche per elementi snelli.

Per valutare analiticamente quanto la deformabilità a taglio degli elementi che andremo ad analizzare incida sui risultati, poniamoci nel caso di una mensola soggetta ad una forza concentrata nell'estremo libero, come riportato in figura 4.3:

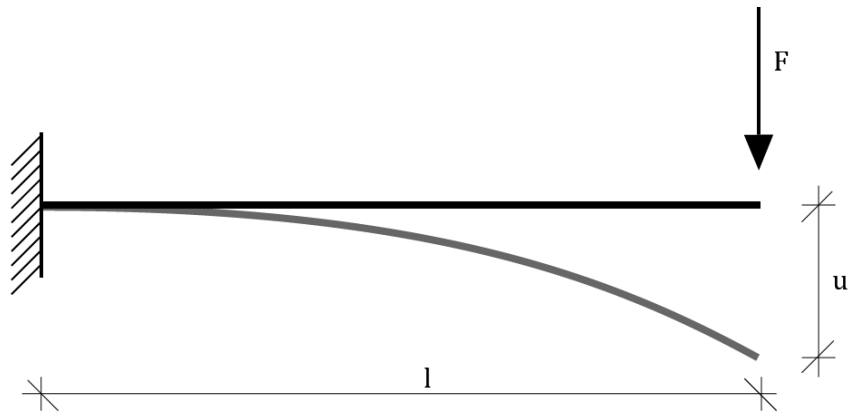


Fig. 4.3 – Schema statico della mensola soggetta ad un carico concentrato

I modelli di riferimento per elementi monodimensionali di trave sono quelli di Eulero-Bernoulli, che trascura la deformabilità a taglio degli elementi, e quello di Timoshenko, che invece la considera.

Nel modello di trave di Eulero-Bernoulli, lo spostamento ( $u_B$ ) viene calcolato in termini di rigidezza come:

$$u_B = \frac{Fl^3}{3EI}$$

utilizzando il modello di Timoshenko invece, quello stesso spostamento (che chiameremo  $u_T$ ) sarà dato da:

$$u_T = \frac{Fl^3}{3EI} + \frac{Fl}{G A_s}$$

nel caso di travi a sezione rettangolare di dimensioni  $B \times H$ , avremo:

$$A_s = \frac{6}{5} A$$

$$I = \frac{1}{12} BH^3$$

$$A = BH$$

Tramite cui possiamo riscrivere la funzione spostamento della trave di Timoshenko come:

$$u_T = \frac{Fl^3}{3EI} \left( 1 + 0,21 \frac{E}{G} \left( \frac{H}{l} \right)^2 \right)$$

La differenza tra  $u_B$  ed  $u_T$  dovuta alla deformabilità a taglio è quindi quantificabile e vale:

$$0,21 \frac{E}{G} \left( \frac{H}{l} \right)^2$$

Osservando questa espressione emerge che la deformabilità a taglio dipende fondamentalmente da due parametri: l'altezza della trave in relazione alla sua lunghezza ( $H/l$ ) ed il rapporto tra il modulo di elasticità ed il modulo di taglio del materiale ( $E/G$ ).

Il primo di questi parametri si riferisce alla conformazione geometrica della struttura e sta ad indicare che la deformabilità tagliante incide maggiormente su elementi tozzi piuttosto che su elementi snelli; il secondo parametro invece si riferisce unicamente alle caratteristiche del materiale. È utile condurre un confronto fra il legno e gli altri materiali da costruzione in funzione di questo secondo parametro.

Nella tabella sottostante sono riportati i valori di modulo elastico ( $E$ ), modulo di taglio ( $G$ ) e del loro rapporto ( $E/G$ ) di tre differenti materiali da costruzione ordinari: l'acciaio S275, il calcestruzzo armato di classe C25/30, ed il legno massiccio di classe C24.

	<b>Acciaio S275</b>	<b>CLS C25/30</b>	<b>Legno C24</b>
	[Mpa]	[Mpa]	[Mpa]
<b>E</b>	210000,00	31000,00	11000,00
<b>G</b>	80769,23	12916,67	690,00
<b>E/G</b>	2,60	2,40	15,94

Fig. 4.4. - Tabella riassuntiva del rapporto E/G per materiali da costruzione ordinari

Come è possibile constatare il rapporto E/G del legno è più di dieci volte superiore a quello di acciaio e calcestruzzo; ciò sta ad indicare che per il legno il contributo della deformabilità a taglio potrebbe assumere valori significativi anche in riferimento ad elementi strutturali snelli. Vediamo come.

Riferiamoci allo schema statico della mensola riportato in figura 4.3 e poniamoci nel caso di una mensola di legno massiccio di classe C24 geometricamente definita come segue:

$$B = 8 \text{ cm}$$

$$H = 16 \text{ cm}$$

$$L = 2 \text{ m}$$

Assumiamo quindi che la forza ( $F$ ) applicata all'estremo libero sia pari a 5 kN ed andiamo a calcolare lo spostamento nel medesimo punto utilizzando sia il modello di Eulero-Bernoulli che quello di Timoshenko:

$$u_B = \frac{Fl^3}{3EI} = 3,55 \text{ cm}$$

$$u_T = \frac{Fl^3}{3EI} \left( 1 + 0,21 \frac{E}{G} \left( \frac{H}{l} \right)^2 \right) = 3,62 \text{ cm}$$

In questo caso l'errore tra i due risultati è di circa il 2%. In seguito a questo esempio è stato verificato che al variare della snellezza, facendo riferimento alle dimensioni degli elementi strutturali oggetto della ricerca, l'errore nello spostamento fosse sempre contenuto e che fosse, in particolare, inferiore al 4%.

A partire da questa verifica si è quindi deciso di trascurare il contributo della deformabilità a taglio nei procedimenti analitici che verranno di seguito descritti, al solo scopo di semplificarne i calcoli.

Tuttavia, avendo verificato che il rapporto  $E/G$  proprio del materiale è particolarmente significativo, e non volendone trascurare l'importanza, in tutti i modelli numerici che verranno presentati nel corso di questo studio è stato utilizzato il modello di trave di Timoshenko.

## 2. Risoluzione, con l'equazione differenziale della linea elastica, del problema flessionale

Lo schema statico del problema è rappresentato nella figura sottostante:

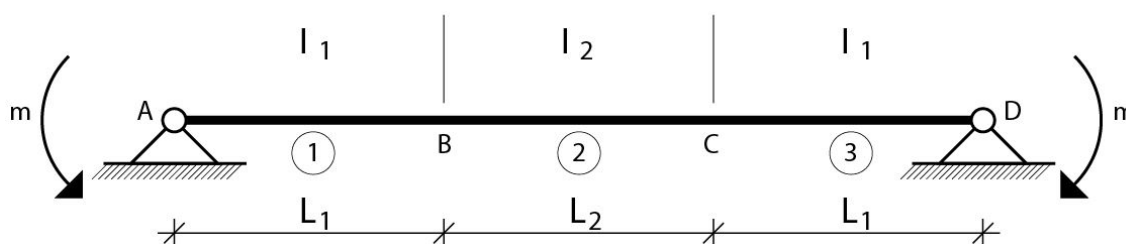


Fig. 4.5 – schema statico del modulo base soggetto a sollecitazione flessionale uniforme

L'obiettivo del semplice esercizio che qui di seguito riportiamo è la determinazione analitica della rotazione nell'estremo A dell'asta sotto la condizione di carico illustrata in figura 4.5. Fatto questo, tale rotazione sarà imposta ad una trave di sezione uniforme, ancorché incognita, con l'obiettivo di determinarne il momento di inerzia equivalente, ipotizzando che essa abbia la stessa rigidezza della trave disomogenea.

Si considerino ora il problema di figura 4.5. I tre diversi tratti sono caratterizzati da momenti d'inerzia differenti: chiameremo  $I_1$  il momento di inerzia nei tratti 1 e 3, ed  $I_2$  il momento di inerzia nel tratto 2. Gli stessi pedici 1, 2 e 3, saranno utilizzati per distinguere il tratto cui la generica funzione cinematica appartiene. Le lettere maiuscole A, B, C e D indicheranno i punti della trave in cui i diversi tratti interagiscono.

Il sistema è isostatico ed, in particolare, il momento ed il taglio sono rispettivamente costanti e nullo su tutta la trave. Pertanto, è possibile semplificare il problema dalla conoscenza, tramite il momento flettente, della funzione curvatura ( $\chi = v''$ ), integrandola due volte per determinare le funzioni rotazione ( $\varphi = v'$ ) e spostamento ( $v$ ). In particolare, si avrà nei tre tratti:

Tratto 1:

$$(1) \quad E I_1 v''_1 = m$$

$$(2) \quad E I_1 v'_1 = m s + c_1 = \varphi_1$$

$$(3) \quad E I_1 v_1 = \frac{m s^2}{2} + c_1 s + c_2$$

Tratto 2:

$$(4) \quad E I_2 v''_2 = m$$

$$(5) \quad E I_2 v'_2 = m s + d_1 = \varphi_2$$

$$(6) \quad E I_2 v_2 = \frac{m s^2}{2} + d_1 s + d_2$$

Tratto 3:

$$(7) \quad E I_1 v''_3 = m$$

$$(8) \quad E I_1 v'_3 = m s + g_1 = \varphi_3$$

$$(9) \quad E I_1 v_3 = \frac{m s^2}{2} + g_1 s + g_2$$

La soluzione generale è quindi nota ed assume la forma contenuta nelle equazioni (3)(6)(9). La soluzione particolare sarà determinata dando un valore alle 6 incognite,  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $d_1$ ,  $d_2$ ,  $g_1$  e  $g_2$ , in base a condizioni al contorno di natura cinematica o di continuità tra i tratti della rotazione e dello spostamento. La soluzione particolare necessita quindi di sei equazioni di natura algebrica, determinate qui di seguito.

Le prime due condizioni impongono che gli spostamenti verticali nei nodi A e D siano nulli. Quindi:

$$v_{1A} = 0 \quad (10)$$

ed in aggiunta:

$$v_{3D} = 0 \quad (11)$$

Alle equazioni (10) ed (11) se ne aggiungono altre di continuità cinematica. In particolare, lo spostamento verticale ( $v$ ) e la rotazione ( $\varphi$ ) dei tratti 1 e 2 nel punto B devono essere uguali:

$$v_{1B} = v_{2B} \quad (12)$$

$$\varphi_{1B} = \varphi_{2B} \quad (13)$$

Per la stessa ragione, nel nodo C lo spostamento verticale ( $v$ ) e la rotazione ( $\varphi$ ) devono avere lo stesso valore in entrambi i tratti 2 e 3, ossia:

$$v_{2C} = v_{3C} \quad (14)$$

$$\varphi_{2C} = \varphi_{3C} \quad (15)$$

Le condizioni (10-15) vengono ora riscritte tenendo conto delle (1-9) al fine di ottenere le sei equazioni algebriche per la determinazione delle sei incognite. Imponendo alla (3) la condizione (10) si avrà:

$$v_{1A} = v_{1(s=0)} = c_2 = 0$$

Per trovare le altre incognite è necessario operare le dovute sostituzioni e mettere a sistema le cinque equazioni rimanenti. Per esemplificare i calcoli si può parametrizzare l'espressione di  $I_2$  mettendola in relazione con  $I_1$ , ovvero porre:

$$I_2 = \alpha I_1$$

A questo punto, imponendo la condizione (12) alle equazioni (3) e (6) in  $s = L_1$  si otterrà:

$$\frac{1}{I_1} \frac{m L_1^2}{2} + \frac{1}{I_1} c_1 L_1 = \frac{1}{\alpha I_1} \frac{m L_1^2}{2} + \frac{1}{\alpha I_1} d_1 L_1 + \frac{1}{\alpha I_1} d_2$$

Inoltre, imponendo la condizione (13) alle equazioni (2) e (5) si otterrà:

$$\frac{1}{I_1} m L_1 + \frac{1}{I_1} c_1 = \frac{1}{\alpha I_1} m L_1 + \frac{1}{\alpha I_1} d_1$$

Di seguito, imponendo la (14) alle equazioni (6) e (9) in  $s = L_1 + L_2$  si otterrà:

$$\frac{1}{\alpha I_1} \frac{m (L_1 + L_2)^2}{2} + \frac{1}{\alpha I_1} d_1 (L_1 + L_2) + \frac{1}{\alpha I_1} d_2 = \frac{1}{I_1} \frac{m (L_1 + L_2)^2}{2} + \frac{1}{I_1} g_1 (L_1 + L_2) + \frac{1}{I_1} g_2$$

Ancora, imponendo la condizione (15) alle equazioni (5) ed (8) in  $s = L_1 + L_2$  si otterrà:

$$\frac{1}{\alpha I_1} m (L_1 + L_2) + \frac{1}{\alpha I_1} d_1 = \frac{1}{I_1} m (L_1 + L_2) + \frac{1}{I_1} g_1$$

Infine imponendo la condizione (11) all'equazione (9) in  $s = 2L_1 + L_2$  si otterrà:

$$\frac{1}{I_1} \frac{m (2L_1 + L_2)^2}{2} + \frac{1}{I_1} g_1 (2L_1 + L_2) + \frac{1}{I_1} g_2 = 0$$

A questo punto mettendo a sistema le equazioni così ottenute si ricava il valore delle rimanenti cinque incognite. A tal scopo viene utilizzato un manipolatore algebrico (Maple18). Determinati tali valori, le funzioni rotazione e spostamento del problema si esprimono in forma univoca. Per il tratto 1 si ha:

$$\varphi_{1(s)} = \frac{m s}{E I_1} - \frac{1}{2} \frac{(2 L_1 I_2 + L_2 I_1) m}{E I_1 I_2}$$

$$V_{1(s)} = \frac{m s^2}{2 E I_1} - \frac{1}{2} \frac{(2 L_1 I_2 + L_2 I_1) m}{E I_1 I_2} s$$

Finalmente, per  $s$  uguale a zero, otteniamo la rotazione  $\varphi_A$ :

$$\varphi_A = m \frac{(2 L_1 I_2 + L_2 I_1)}{2 E I_1 I_2} \quad (16)$$

A questo punto, come premesso, possiamo determinare il momento di inerzia della trave equivalente. A tal scopo, imponiamo che la rotazione in A della trave equivalente sia pari alla rotazione in A (16) della trave disomogenea. Nel caso di trave a sezione uniforme la rotazione ( $\varphi_A$ ) di una delle due sezioni di estremità sotto le medesime condizioni statiche di figura 4.3, è un valore noto e vale:

$$\varphi_A = \frac{m l}{2 E I_{eq}} \quad (17)$$

Eguagliando la (16) con la (17) si ottiene quindi:

$$I_{eq} = \frac{(2L_1 + L_2)I_1 I_2}{2 L_1 I_2 + L_2 I_1} \quad (18)$$

### 3. Risoluzione, con l'equazione differenziale della linea elastica, del problema assiale

Con lo stesso procedimento analitico si risolve il problema assiale. Lo schema statico analizzato è il seguente:

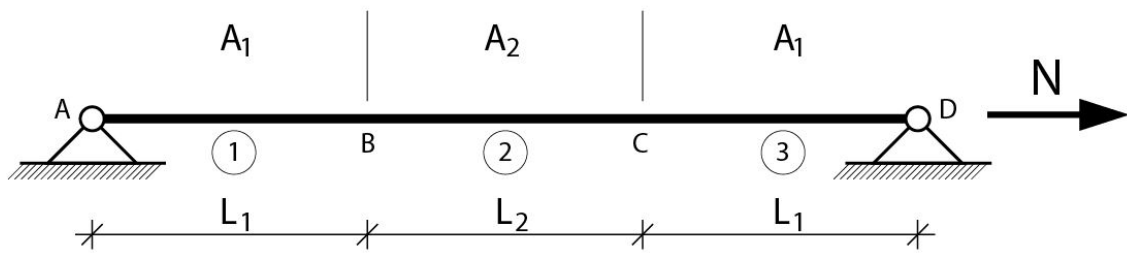


Fig. 4.6 – schema statico del modulo di base soggetto a sollecitazione assiale uniforme

L'obiettivo è la determinazione analitica dello spostamento ( $u$ ) nell'estremo D dell'asta sotto la condizione di carico illustrata in figura 4.6. Tale spostamento sarà imposto ad una trave di sezione uniforme con l'obiettivo di determinarne l'area equivalente, ipotizzando che essa abbia la stessa rigidezza assiale della trave disomogenea.

Le incognite del problema sono  $u_1(s)$ ,  $u_2(s)$  ed  $u_3(s)$  e le equazioni che le determinano sono le seguenti:

Tratto 1:

$$(19) \quad E A_1 u_1' = N$$

$$(20) \quad E A_1 u_1 = N s + c_1$$

Tratto 2:

$$(21) \quad E A_2 u_2' = N$$

$$(22) \quad E A_2 u_2 = N s + d_1$$

Tratto 3:

$$(23) \quad E A_1 u_3' = N$$

$$(24) \quad E A_1 u_3 = N s + g_1$$

Le soluzioni generali (20), (22) e (24) sono note a meno delle costanti  $c_1$ ,  $d_1$  e  $g_1$ . Sono quindi necessarie tre equazioni algebriche per individuare la soluzione particolare.

La prima di queste equazioni impone la nullità dello spostamento ( $u$ ) nel punto A, essendo questo vincolato da una cerniera esterna:

$$u_{1A} = 0 \quad (25)$$

Le due equazioni rimanenti derivano dalla continuità degli spostamenti orizzontali nei punti B e C. In particolare avremo nel punto B:

$$u_{1B} = u_{2B} \quad (26)$$



mentre nel punto C:

$$u_{2C} = u_{3C} \quad (27)$$

Impostando il sistema delle tre equazioni (25-27) è possibile determinare il valore delle incognite, e quindi ricavare le funzioni spostamento cercate. Infine si ha:

$$u_{1(s)} = \frac{N s}{E A_1} \quad (28)$$

$$u_{2(s)} = \frac{N s}{E A_2} - \frac{N L_1 (E A_1 - E A_2)}{E A_2 E A_1} \quad (29)$$

$$u_{3(s)} = \frac{N s}{E A_1} + \frac{N L_2 (A_1 - A_2)}{E A_2 A_1} \quad (30)$$

Determinate le funzioni degli spostamenti è possibile imporre l'eguaglianza con lo spostamento della trave equivalente. Questo è definito come segue:

$$\underline{u} = \frac{N L}{E A_{eq}} \quad (31)$$

Imponendo l'eguaglianza tra la (30) e la (31) si ricava l'espressione dell'area equivalente:

$$A_{eq} = \frac{L A_1 A_2}{2 L_1 A_2 + L_2 A_1} \quad (32)$$

#### 4. Determinazione della geometria della sezione equivalente

Alla luce dei risultati ottenuti è necessario individuare la sezione della trave equivalente, in termini di base (b) ed altezza (h), tale che soddisfi sia i requisiti dell'area equivalente, sia i requisiti del momento d'inerzia equivalente. In particolare riferendoci alla (18) ed alla (32), ed ipotizzando una sezione rettangolare, si ha per la sezione equivalente:

$$I_{eq} = \frac{b h^3}{12} \quad (33)$$

$$A_{eq} = b h \quad (34)$$

Da queste, imponendo l'uguaglianza con la (18) e la (32), si ricava prima l'altezza (h):

$$\frac{I_{eq}}{A_{eq}} = \frac{bh^3}{12} \frac{1}{bh} \quad (35)$$

$$h = \sqrt{12 \frac{I_{eq}}{A_{eq}}} \quad (36)$$

e poi la base (b):

$$b = \frac{A_{eq}}{h} \quad (37)$$

## 5. Modelli teorici relativi alle connessioni interne: determinazione dell'inerzia equivalente

Per verificare che le equazioni che definiscono la sezione della trave equivalente diano i risultati desiderati è necessario formulare delle ipotesi riguardo la modellazione del modulo base di trave. Il punto fondamentale della modellazione è la connessione dei layer con i vincoli esterni e con il blocchetto di taglio.

Il calcolo del momento d'inerzia dei diversi tratti del modulo base varia infatti a seconda della natura della connessione. Si possono quindi formulare delle ipotesi riguardanti sia la natura della connessione tra i due layer, sia la natura, più complessa, della connessione tra i layer ed il blocchetto di taglio. Riferendoci alla figura sottostante, nelle diverse ipotesi proposte in questo paragrafo a variare sarà principalmente il vincolo interno dei punti B e C, il cui comportamento dipende sia dalla tipologia di connessione sia dal contributo dell'attrito.

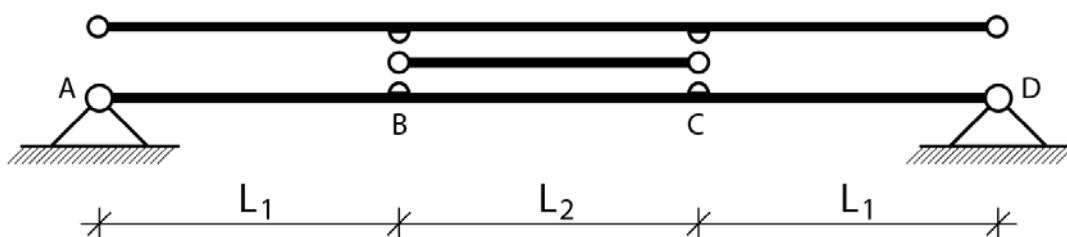


Fig. 4.7 - ipotesi di posizionamento della connessioni interne del modulo base (punti A, B, C e D)

Prima di analizzare le possibilità di vincolo per le connessioni B e C, analizziamo quanto accade in A e D allo scopo di fornirne una modellazione accettabile. Per tutti i casi di studio i punti A e D sono punti di intersezione in cui si sovrappongono quattro ordini di travi a due a due ortogonali. Facendo riferimento alla figura 4.8, che guarda gli elementi strutturali nella loro disposizione spaziale, il vincolo interno si considera realizzato mediante una vite che unisce i due layer superiori ed una seconda vite che unisce i due layer inferiori, nel loro punto di intersezione:

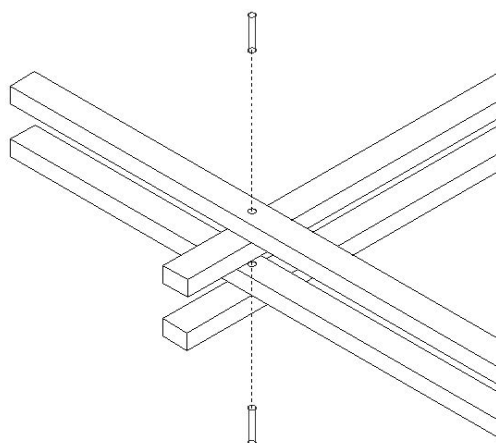


Fig. 4.8 - vista spaziale delle intersezioni corrispondenti ai punti A e D della figura 4.7

Tra i due layer così avvitati non sono presenti altri elementi, per cui non dovrebbero sussistere ulteriori condizioni di vincolo tra i rispettivi spostamenti relativi. Tuttavia è possibile ipotizzare che lo spostamento verticale dei due punti (i punti A e D della figura 4.7) sia il medesimo. Questa approssimazione si ritiene accettabile sia perché il sistema di viti sopra illustrato crea un irrigidimento locale, in quanto raddoppia la sezione di entrambi i layer superiore ed inferiore, sia perché la distanza tra due blocchetti di taglio, che fungono soprattutto da distanziatori, è limitata e questo, a meno di casi di carichi concentrati e tenendo conto della curvatura dei layer (finora trascurata), minimizza lo spostamento verticale relativo tra i due layer suddetti. Pertanto nei punti di estremità della trave in figura 4.5 verrà imposto almeno il seguente vincolo relativo:

$$\Delta v=0$$

Nei paragrafi a seguire verranno presentate tre diverse ipotesi di vincolo interno per modellare la connessione tra i layer ed il blocco di taglio e per ognuno di essi verrà fornita l'espressione dei momenti di inerzia dei tratti del modulo considerato.

### 5.1 Ipotesi 1: Caso flessionale, vincolo delle rotazioni relative

Si consideri lo schema statico di partenza per il procedimento di omogeneizzazione come riportato in figura 4.9:

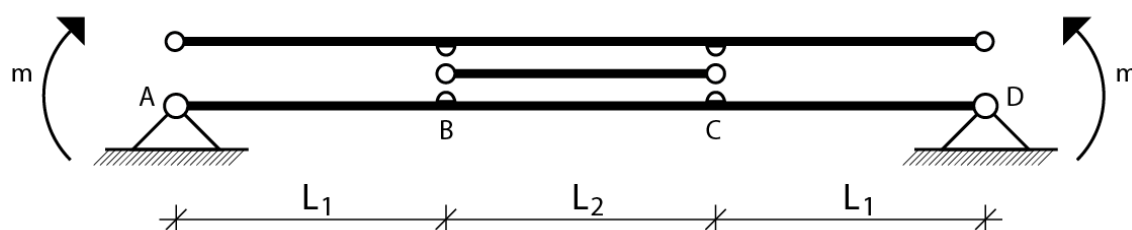


Fig. 4.9 - schema statico di riferimento per il caso flessionale

Per quanto riguarda la modellazione della connessione dei punti B e C come prima ipotesi si utilizza un vincolo interno rigido, che si esprime con le seguenti due equazioni:

$$\Delta v=0$$

$$\Delta \varphi=0$$

In questo caso la trave, sottoposta alla sollecitazione di figura 4.10, si deformerà come segue:

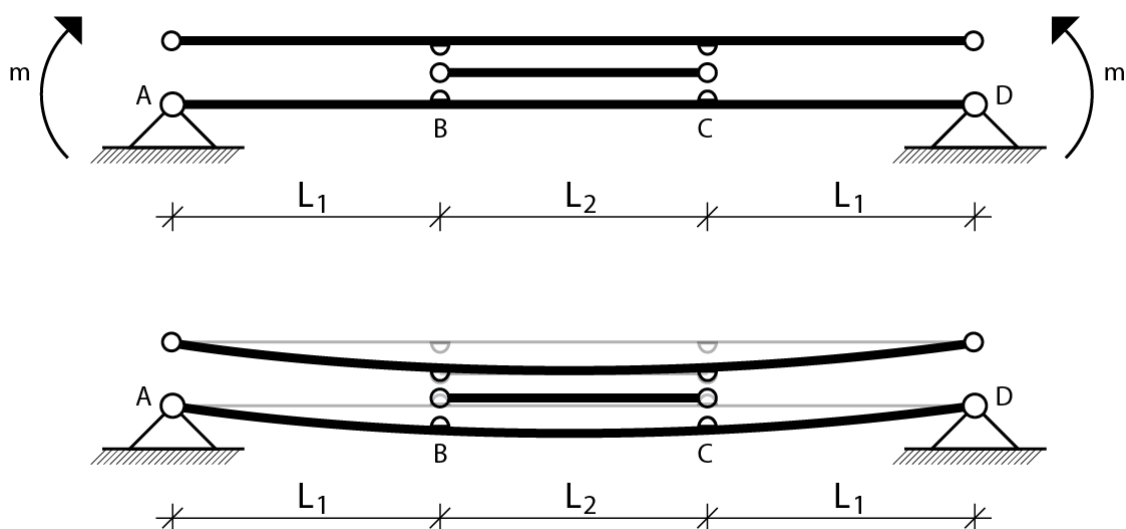


Fig. 4.10 – deformazione del modulo base soggetto a momento flettente sotto l'ipotesi di vincolo interno tra layer e blocco di taglio relativo alle rotazioni ed allo spostamento verticale

Definendo il vincolo interno in questo modo si impone l'uguaglianza sia della rotazione che della curvatura dei due layer, superiore ed inferiore, e ciò implica che il momento d'inerzia nei vari tratti risulterà pari alla somma dei momenti d'inerzia degli elementi che compongono il tratto.

Nel tratto AB e nel tratto CD quindi, il momento d'inerzia corrisponde alla somma del momento d'inerzia del corrente superiore e di quello del corrente inferiore. Per il tratto BC andrà ulteriormente sommato il momento di inerzia del blocchetto di taglio. In formule:

Tratti AB / CD

$$I_1 = I_{\text{sup}} + I_{\text{inf}}$$

Tratto BC

$$I_2 = I_1 + I_{\text{bloc}}$$

## 5.2 Ipotesi 2: Caso flessionale, vincolo di incastro interno

La seconda ipotesi è che la connessione dei punti A, B, C e D vincoli tutti gli spostamenti e tutte le rotazioni relative dei punti che essa connette, ovvero che la connessione si comporti come un incastro interno. Ci si trova in questo caso nell'ipotesi di conservazione delle sezioni piane, per cui il momento d'inerzia dei vari tratti andrà calcolato utilizzando il teorema del trasporto di Huygens.

Il modulo base di trave sottoposto alla sollecitazione di momento uniforme darà quindi una deformata come quella riportata in figura 4.11:

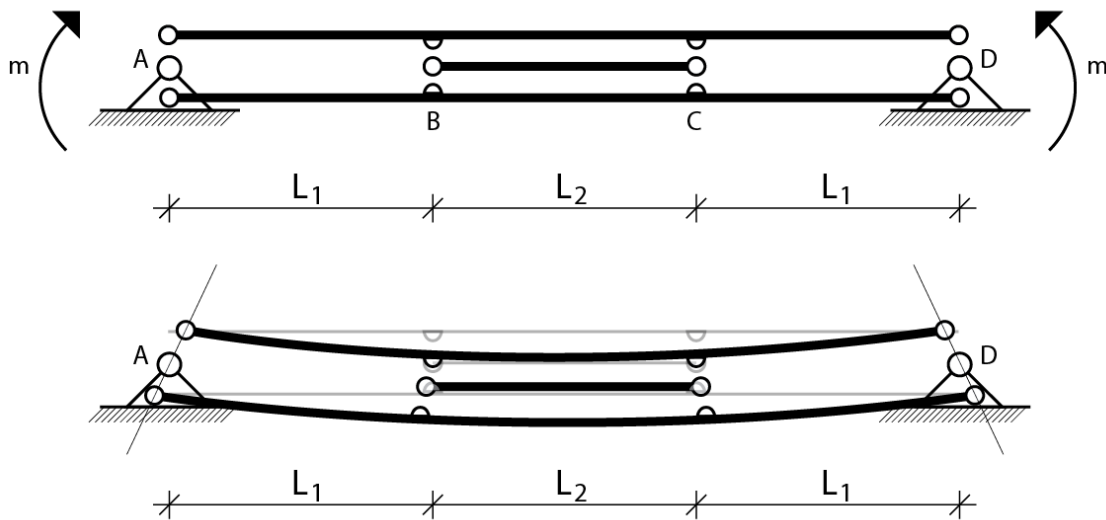


Fig. 4.11 - deformazione del modulo base soggetto a momento flettente sotto l'ipotesi di vincolo interno di incastro relativo ai punti A, B, C e D

Il vincolo rigido interno dei punti A, B, C e D in questo caso è il medesimo e deve essere definito come segue:

$$\Delta u = 0$$

$$\Delta v = 0$$

$$\Delta \varphi = 0$$

Per calcolare il momento d'inerzia  $I_1$  ci si avvale quindi del teorema del trasporto; ipotizzando che la trave del corrente superiore e quella del corrente inferiore siano uguali, varrà:

Tratto AB / CD:

$$I_1 = 2 \frac{bh^3}{12} + 2 (bh d^2)$$

Per il tratto BC invece, il momento d'inerzia  $I_2$  sarà:

Tratto BC:

$$I_2 = I_1 + I_{\text{bloc}}$$

### 5.3 Ipotesi 3: Caso flessionale, vincolo degli spostamenti relativi

La terza ipotesi considerata è che nei punti B e C il vincolo interno non interessi le rotazioni ma solo gli spostamenti, ossia:

$$\Delta u=0$$

$$\Delta v=0$$

Non vincolando le rotazioni, è possibile che le curvature dei due layer e del blocco di taglio assumano valori differenti. In tal caso l'espressione dei momenti di inerzia dei tratti del modulo non è determinabile con la semplicità dei due casi precedenti e necessita di una trattazione rigorosa.

Premettiamo anzitutto una considerazione modellistica relativa al tratto centrale, le cui intime ragioni sono illustrate in figura 4.12. Applicando alle due estremità due coppie flettenti, come nei casi precedenti, questa volta la mancanza del vincolo sulla rotazione relativa produce un campo di spostamenti che lascia indeformato il blocchetto centrale.

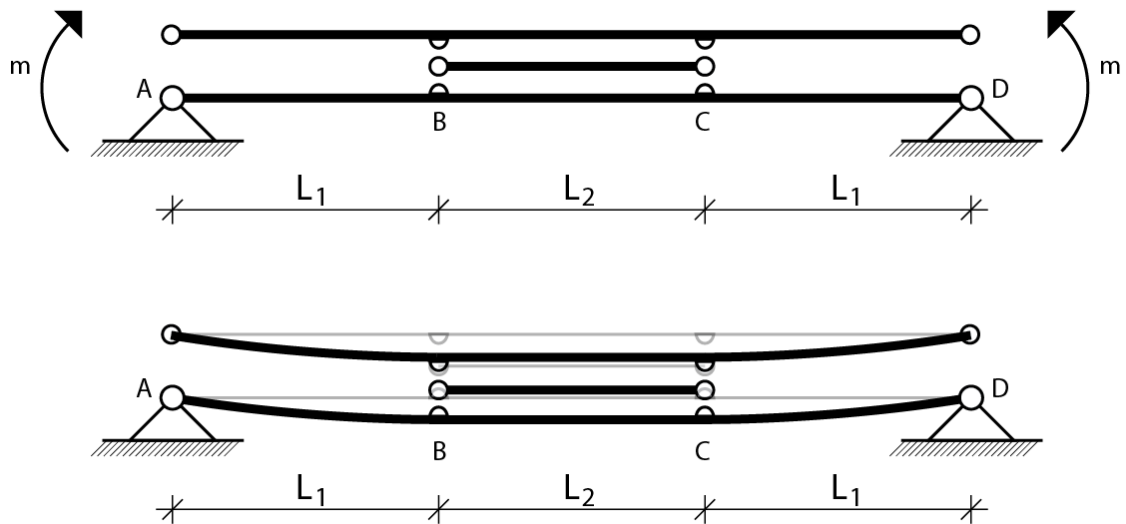


Fig. 4.12 – deformazione del modulo base soggetto a momento flettente nell'ipotesi di vincolo rigido interno relativo agli spostamenti

Tale comportamento non può essere assunto come veritiero in quanto trascura completamente l'aderenza che esiste tra i due layer ed il blocco di taglio; tale aderenza impone infatti che incurvandosi l'uno si debbano necessariamente deformare anche gli altri elementi.

Il problema è limitato al modello. Per questo caso specifico si rende quindi necessaria l'aggiunta di un ulteriore vincolo interno che simuli il reale comportamento dell'elemento; ci si riferisce quindi allo schema statico riportato in figura 4.13:

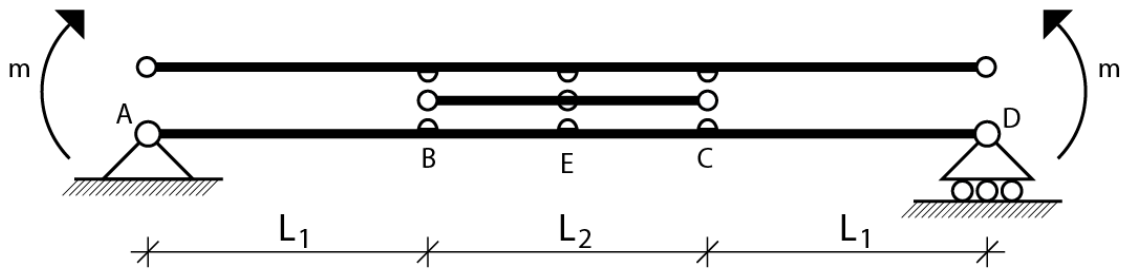


Fig. 4.13 - schema statico del modulo di base con l'aggiunta di un ulteriore vincolo interno nel punto E

in cui al punto interno E sono assegnate le medesime condizioni di vincolo interno di B e C. La deformata del modulo di base così definito, sottoposto alla condizione di carico standard, sarà quindi:

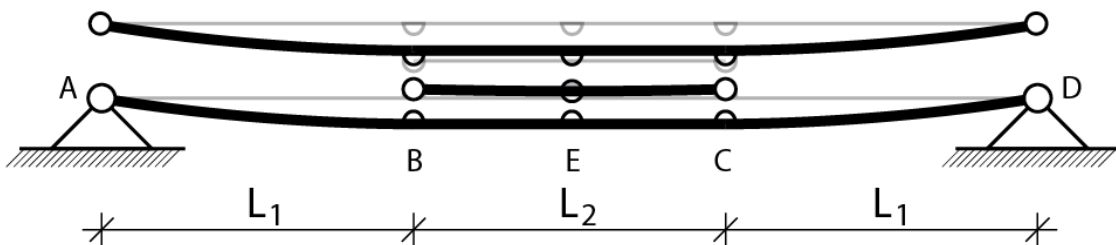


Fig. 4.14 - deformata del modulo base soggetto a momento flettente nell'ipotesi di vincolo rigido interno relativo agli spostamenti dei punti B, C ed E

Rispetto ai casi precedenti il calcolo dell'inerzia equivalente  $I_2$  necessita di una trattazione rigorosa. Si consideri lo schema statico riportato in figura 4.15: questo rappresenta il modello del solo tratto centrale, compreso tra le sezioni B e C e su questo si concentrerà la nostra attenzione.

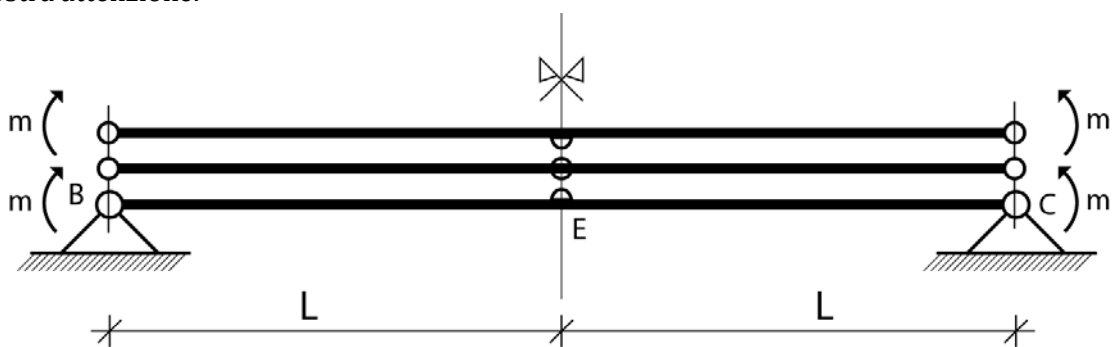


Fig. 4.15 - schema statico del tratto BC del modulo di base

Trattandosi di un sistema simmetrico e caricato simmetricamente è possibile considerare solo il tratto che va da un estremo fino all'asse di simmetria. Ci riferiremo pertanto al solo tratto BE. Per determinare il momento di inerzia equivalente del tratto in esame, va calcolato il legame tra il momento applicato e la rotazione indotta all'estremità. La configurazione deformata del suddetto tratto di trave è illustrata in figura 4.16:

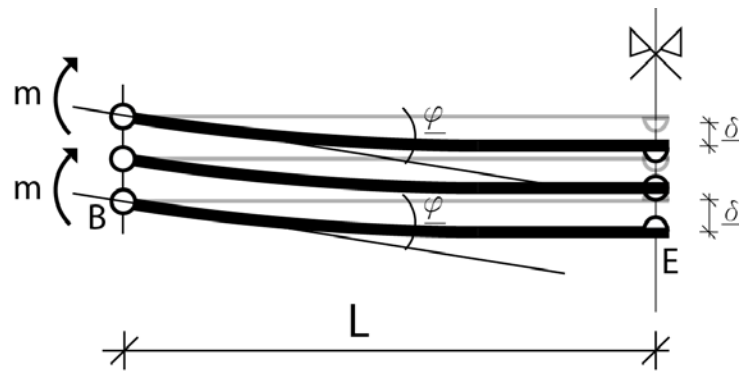


Fig. 4.16 - stato de formativo del tratto BE soggetto a momento flettente

Per determinare spostamenti e rotazioni si utilizza l'equazione differenziale della linea elastica, analogamente a quanto fatto nel paragrafo 1. Le incognite in questo caso sono la rotazione ( $\varphi$ ) e lo spostamento ( $\delta$ ) di entrambi i correnti superiore ed inferiore, considerati uguali per ovvie ragioni di simmetria.

Premesso questo, concentreremo l'attenzione solo sulla funzione spostamento del corrente superiore tenendo però conto che curvature, rotazioni e spostamenti sono presenti anche nel corrente inferiore e nel blocco di taglio. In particolare, la configurazione del blocco di taglio è pari a quella di una trave doppiamente appoggiata soggetta ad un cedimento vincolare  $\delta$ . Trattandosi di uno schema notevole il valore del taglio  $T_2$  (vedi figura 4.17) è univocamente determinato come:

$$T_2 = \frac{3EI_2}{L^3} \delta$$

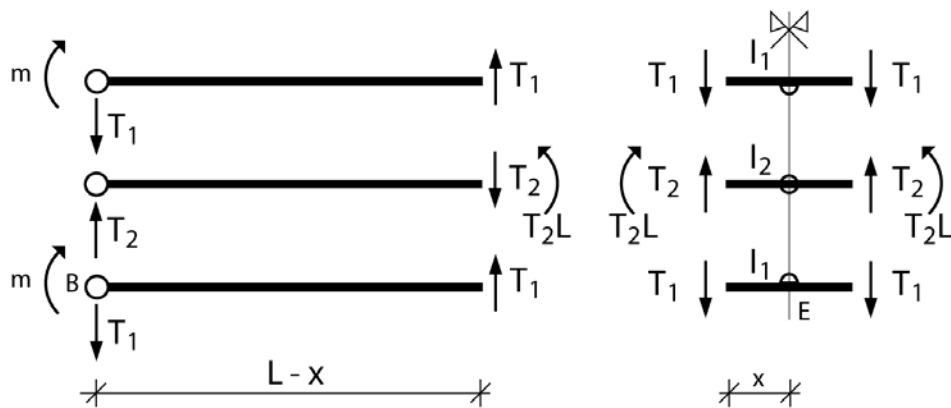


Fig. 4.17 - andamento del taglio nel tratto BE soggetto a momento flettente

Questo valore  $s$  si specchia intorno all'asse di simmetria. Al contrario, i correnti inferiore e superiore forniscono un valore del taglio pari a  $T_1$  ricavato per equilibrio (vedi figura 17) e pari a:

$$T_1 = -\frac{3EI_2}{2L^3} \delta$$



Il problema è quindi staticamente determinato e ciò semplifica l'applicazione dell'equazione della linea elastica dato che sia il momento flettente, sia ovviamente la curvatura, sono noti nelle aste in esame. Le equazioni che definiscono il problema dell'equilibrio elastico di uno dei due correnti sono quindi le seguenti:

$$(38) \quad M(s) = m - Ts$$

$$(39) \quad \chi(s) = \frac{1}{EI_1} (m - Ts)$$

$$(40) \quad \varphi(s) = \frac{1}{EI_1} \left( ms - \frac{Ts^2}{2} \right) + c_1$$

$$(41) \quad v(s) = \frac{1}{EI_1} \left( \frac{ms^2}{2} - \frac{Ts^3}{6} \right) + c_1s + c_2$$

In questo caso il valore del taglio  $T$  è già noto e corrisponde a  $T_1$  precedentemente determinato.

Per arrivare alla soluzione in termini di spostamento, occorre imporre le condizioni al bordo di natura cinematica, che sono le seguenti:

$$\varphi(L) = 0$$

$$v(0) = 0$$

$$\varphi(0) = c_1 = \underline{\varphi}$$

$$v(L) = \underline{\delta}$$

Operando le dovute sostituzioni si determina lo spostamento del punto E:

$$\underline{\delta} = \frac{-mL^2}{E(2I_1 + I_2)}$$

e la rotazione della sezione B:

$$\underline{\Phi}_B = -\frac{mL}{EI_1} + \frac{3}{4} \frac{I_2}{I_1 E} \frac{mL}{(2I_1 + I_2)}$$

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo 1, è possibile imporre un'eguaglianza con la rotazione nel medesimo punto della trave equivalente. In particolare, nel caso di trave a sezione omogenea la rotazione ( $\underline{\Phi}_B$ ) sotto le medesime condizioni statiche, è un valore noto e vale:

$$\underline{\Phi}_B = \frac{2ml}{E I e q}$$

Imponendo ora ( $\varphi_B = \Phi_B$ ) sarà possibile ricavare la funzione che definisce l'inerzia equivalente del blocco centrale del modulo di base ( $I_{eq,bloc}$ ):

$$I_{eq,bloc} = \frac{-2}{-\frac{1}{I_1} + \frac{3}{4} \frac{I_2}{I_1} - \frac{1}{2I_1 + I_2}}$$

Considerando l'intero modulo di base sotto l'ipotesi di vincolo interno proposta in questo paragrafo si calcolerà quindi per i tratti esterni:

Tratto AB/CD:

$$I_1 = I_{sup} + I_{inf}$$

Mentre per il tratto centrale si avrà:

Tratto BC:

$$I_2 = I_{eq,bloc}$$

## 6. Modelli teorici relativi alle connessioni interne: determinazione dell'area equivalente

In questo paragrafo viene affrontato il problema della determinazione dell'area equivalente. Analogamente a quanto fatto per il caso flessionale, è necessario ora definire un modello statico per il quale la trave risulti soggetta al solo sforzo assiale uniforme (figura 4.18).

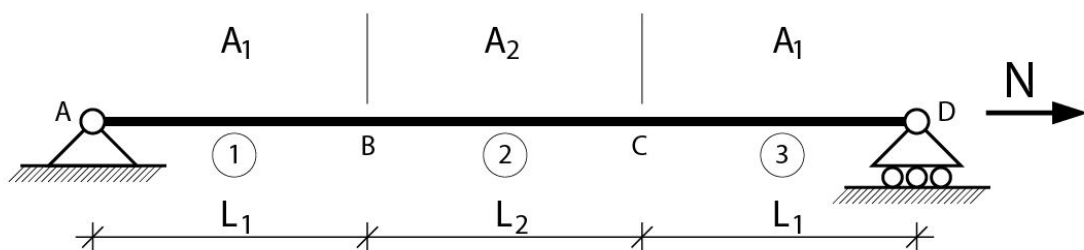


Fig. 4.18 - modello statico del modulo di base soggetto a sforzo assiale

Anche in questo caso la determinazione dell'area equivalente dipende dalla connessione interna dei punti B e C, definiti secondo le ipotesi 1, 2 e 3 precedentemente formulate. Per i punti A e D invece, la condizione di vincolo rigido interno verrà definita come riportato nel paragrafo 5, ovvero vincolando unicamente lo spostamento verticale relativo dei punti connessi.

### 6.1 Ipotesi 1: caso assiale (riferimento al par. 5.1)

Come definito nel paragrafo 5.1, la prima tipologia di vincolo rigido interno applicato ai punti B e C interessa lo spostamento verticale e la rotazione relativa dei punti connessi:

$$\Delta v=0$$

$$\Delta \varphi=0$$

Non avendo vincolato in alcun modo il blocco centrale ai due layer in termini di spostamento orizzontale, bisogna supporre che, per la sola sollecitazione assiale, esso non segua la deformazione degli altri elementi strutturali rimanendo quindi in deformato (figura 4.20).

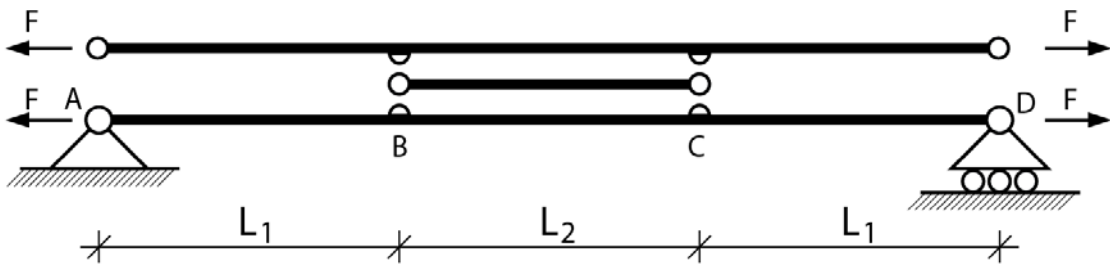


Fig. 4.19 - modello statico del modulo di base soggetto a sforzo assiale

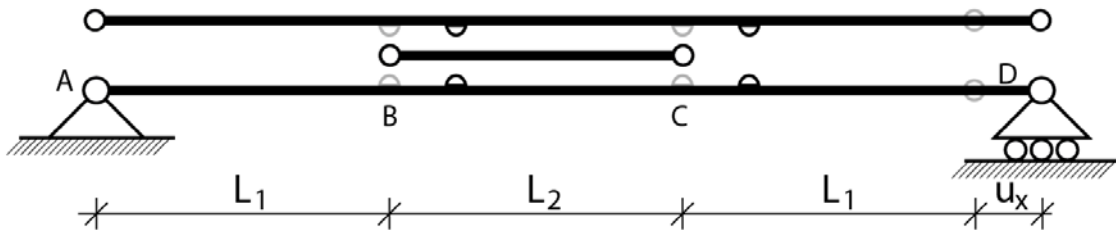


Fig. 4.20 - deformata del modello di base soggetto a sforzo assiale nell'ipotesi di vincolo interno di rotazioni e spostamento verticale relativo ai punti B e C

L'area del blocco di taglio non da alcun contributo in termini di resistenza, ciò significa che i valori di  $A_1$  ed  $A_2$  possono essere calcolati come segue:

Tratto AB / CD

$$A_1 = A_{sup} + A_{inf}$$

Tratto BC

$$A_2 = A_1$$

## 6.2 Ipotesi 2: caso assiale (riferimento al par. 5.2)

I vincoli interni della seconda tipologia di connessione, d'accordo col paragrafo 5.2, sono stati definiti come:

$$\Delta u=0$$

$$\Delta v=0$$

$$\Delta \varphi=0$$

ovvero ipotizzando un vincolo di incastro interno. Avendo vincolato lo spostamento orizzontale, per questa ipotesi nel tratto BC dovrà essere considerato il contributo del blocco di taglio. La deformata del modulo di base, soggetto alle sollecitazioni assiali come riportato in figura 4.19, in questo caso sarà:

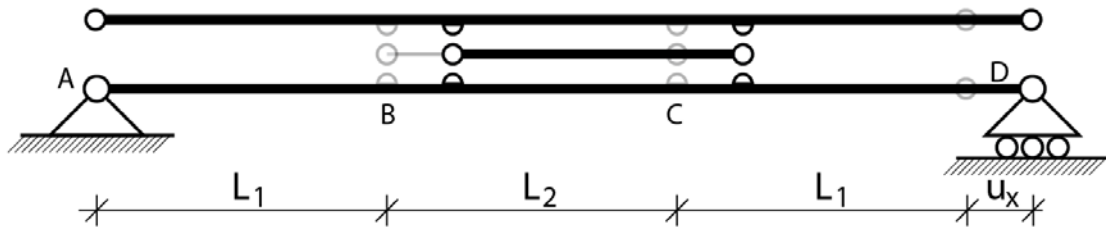


Fig. 4.21 - deformata del modello di base soggetto a sforzo assiale nell'ipotesi di vincolo interno degli spostamenti e delle rotazioni relative dei punti A, B, C e D

Di conseguenza, andremo a calcolare i valori di  $A_1$  ed  $A_2$  come segue:

Tratto AB / CD

$$A_1 = A_{\text{sup}} + A_{\text{inf}}$$

Tratto BC

$$A_2 = A_1 + A_{\text{bloc}}$$

### 6.3 Ipotesi 3: caso assiale (riferimento al par. 5.3)

La terza ipotesi di connessione vincolava i soli spostamenti nelle due direzioni, orizzontale e verticale:

$$\Delta u = 0$$

$$\Delta v = 0$$

Nel determinare l'area equivalente l'unico vincolo relativo che conta è quello che riguarda lo spostamento orizzontale. Essendo esso vincolato, come nel caso del paragrafo precedente, l'area equivalente verrà calcolata d'accordo col 6.2, ovvero:

Tratto AB / CD

$$A_1 = A_{\text{sup}} + A_{\text{inf}}$$

Tratto BC

$$A_2 = A_1 + A_{\text{bloc}}$$

## 7. Modellazione in SAP2000: confronto tra il modello dettagliato ed il modello equivalente

Le funzioni fin qui determinate riguardanti area ed inerzia equivalente sono state inserite in una tabella Excel, di modo tale da poter calcolare le dimensioni della sezione della trave equivalente al variare dei soli dati di partenza del modulo di base (figure. 22 e 23).

Dati Sezioni Modulo di Base Somma Inerzia						Dati Sezioni Modulo di Base Trasporto					
$h_{sup}$	$b_{sup}$	$h_{inf}$	$b_{inf}$	$h_{bloc}$	$b_{bloc}$	$h_{sup}$	$b_{sup}$	$h_{inf}$	$b_{inf}$	$h_{bloc}$	$b_{bloc}$
[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]
5	8	5	8	16	8	5	8	5	8	16	8
Calcolo Inerzia Equivalente						Calcolo Inerzia Equivalente					
$L_1$	$L_2$	$I_1$	$I_2$	$d$	$I_{eq}$	$L_1$	$L_2$	$I_1$	$I_2$	$d$	$I_{eq}$
[cm]	[cm]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm]	[cm]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm]	[cm <sup>4</sup> ]
35	30	166,6667	2897,333	10,5	232,3667	35	30	8986,666667	11717,3	10,5	9662,18
Calcolo Area Equivalente						Calcolo Area Equivalente					
$L$	$L_1$	$L_2$	$A_1$	$A_2$	$A_{eq}$	$L$	$L_1$	$L_2$	$A_1$	$A_2$	$A_{eq}$
[cm]	[cm]	[cm]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]
100	35	30	80	208	98,11321	100	35	30	80	208	98,1132
Calcolo Sezione Equivalente				Calcolo Sezione Equivalente							
$I_{eq}$	$A_{eq}$	$h$	$b$	$I_{eq}$	$A_{eq}$	$h$	$b$				
[cm <sup>4</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm]	[cm]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm]	[cm]				
232,3667	98,11321	5,331063	18,40406	9662,18	98,1132	34,37672789	2,85406				

Fig. 22 – tabelle di calcolo per la determinazione di area ed inerzia equivalente relative all'ipotesi di vincolo interno di rotazioni e spostamento verticale (ipotesi 1, a sinistra), ed all'ipotesi di vincolo di incastro interno relativo a spostamenti e rotazioni (ipotesi 2, a destra)

IPOTESI 3: Dati Sezioni Modulo di Base						Calcolo inerzia equivalente tratto centrale ( $I_2$ per tabella sinistra)						
$h_{sup}$	$b_{sup}$	$h_{inf}$	$b_{inf}$	$h_{bloc}$	$b_{bloc}$	$M$	luce	$E$	$I_1$	$I_2$	$\delta$	$\varphi$
[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm]	[kN m]	[m]	[kN/m <sup>2</sup> ]	[m <sup>4</sup> ]	[m <sup>4</sup> ]	[m]	[m]
5	8	5	8	16	8	5	50	11000000	83,33333	2730,667	-3,9E-07	-8E-08
Calcolo Inerzia Equivalente						Calcolo Area Equivalente						
$L_1$	$L_2$	$I_1$	$I_2$	$d$	$I_{eq}$	$L$	$L_1$	$L_2$	$A_1$	$A_2$	$A_{eq}$	
[cm]	[cm]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm]	[cm]	[cm]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]	
35	30	166,66667	568,5505	10,5	211,52124	100	35	30	80	208	98,113208	
Calcolo Sezione Equivalente				Calcolo Sezione Equivalente								
$I_{eq}$	$A_{eq}$	$h$	$b$	$I_{eq}$	$A_{eq}$	$h$	$b$					
[cm <sup>4</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm]	[cm]	[cm <sup>4</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm]	[cm]					
211,52124	98,113208	5,0863223	19,289617	568,5505	98,113208	5,0863223	19,289617					

Fig. 23 - tabella di calcolo per la determinazione di area ed inerzia equivalente relative all'ipotesi di vincolo interno relativo agli spostamenti dei punti B e C

In questo paragrafo verranno modellate sia il modulo di base che la trave equivalente; per entrambi gli stati di sollecitazione precedentemente studiati, ossia per la trave soggetta a momento flettente ed a sforzo assiale, verranno condotte delle analisi al fine di ricavare e mettere a confronto, rispettivamente, i valori della rotazione in A e dello spostamento

orizzontale in D. Tale processo di modellazione e verifica verrà effettuato per ognuna delle tre ipotesi di vincolo interno formulate nei paragrafi 5 e 6.

Volendo studiare separatamente i due stati di sollecitazione analizzati si rende necessario utilizzare due differenti modelli. A cambiare sarà il vincolo esterno del punto D che per il caso flessionale verrà modellato come una cerniera, mentre per il caso assiale verrà modellato come un carrello.

Un'ultima precisazione riguarda la modellazione dei vincoli rigidi interni. In SAP2000, anche quando si modellano strutture piane, queste risultano immerse in uno spazio fisico tridimensionale il cui sistema di riferimento globale è definito mediante i tre assi cartesiani  $x$ ,  $y$  e  $z$ . Muovendoci nelle tre dimensioni per ogni nodo sono possibili sei movimenti rigidi, tre spostamenti ( $u_x$ ,  $u_y$  e  $u_z$ ) e tre rotazioni ( $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  e  $\varphi_z$ ). Tenendo conto di questo sistema di riferimento possiamo ridefinire le tre ipotesi di vincolo interno come segue:

Ipotesi 1 ( $\Delta v=0$  ;  $\Delta \varphi=0$ ):

$$\begin{aligned} u_x ; u_y &\rightarrow \text{non vincolati} \\ u_z ; \varphi_x ; \varphi_y ; \varphi_z &\rightarrow \text{vincolati} \end{aligned}$$

Ipotesi 2 ( $\Delta u=0$ ;  $\Delta v=0$ ;  $\Delta \varphi=0$ ):

$$u_x ; u_y ; u_z ; \varphi_x ; \varphi_y ; \varphi_z \rightarrow \text{vincolati}$$

Ipotesi 3 ( $\Delta u=0$  ;  $\Delta v=0$ ):

$$\begin{aligned} \varphi_x ; \varphi_y ; \varphi_z &\rightarrow \text{non vincolati} \\ u_x ; u_y ; u_z &\rightarrow \text{vincolati} \end{aligned}$$

### 7.1 Ipotesi 1: verifica dell'equivalenza per stati di tensione omogenea

Si riportano, nella figura sottostante, i modelli del modulo di base e della trave omogenea utilizzati per il caso flessionale:

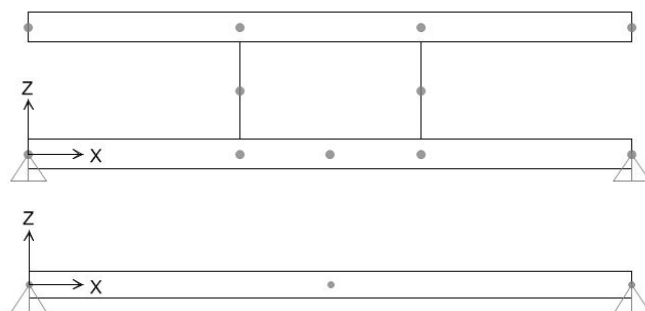


Fig. 4.24 – modelli numerici del modulo base dettagliato (sopra) ed a sezione equivalente (sotto)

Per le connessioni interne viene utilizzato un *constraint* (vincolo rigido interno) detto *weld*. Per la prima ipotesi di connessione interna (paragrafo 5.1), si definisce quindi:

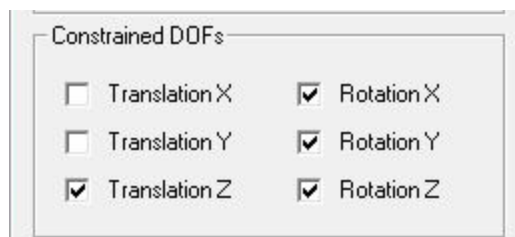


Fig. 4.25 – definizione dei vincoli interni dei punti B e C per la prima ipotesi di vincolo

Utilizzando questo vincolo interno, il momento d'inerzia nei vari tratti di trave deve essere calcolato come la semplice somma dei momenti d'inerzia dei singoli elementi. La sezione rettangolare da assegnare al modello di trave equivalente avrà le seguenti dimensioni:

Calcolo Sezione Equivalente			
$I_{eq}$	$A_{eq}$	$h$	$b$
[cm <sup>4</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm]	[cm]
232,366654	80	5,90381216	13,5505666

Fig. 4.24 – dati di inerzia, area, base ed altezza equivalenti ricavati dalle tabelle riportate in figura 4.20

I due modelli sono soggetti al medesimo sforzo flessionale. Avviando l'analisi andiamo a verificare che si equivalgano i risultati in termini di rotazione nel punto A. In particolare per il modello dettagliato avremo la seguente deformata:

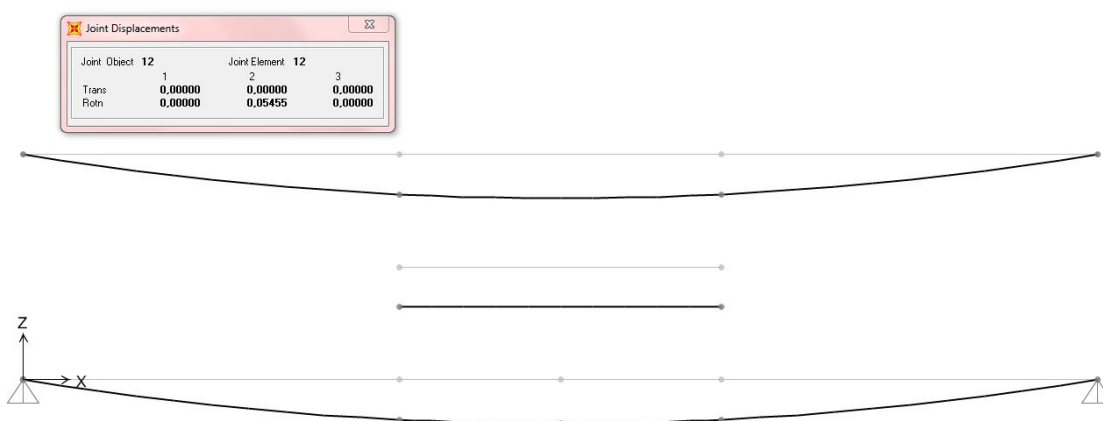


Fig. 4.27 – configurazione deformata del modello dettagliato sotto l'ipotesi 1 di vincolo interno

Mentre per il modello di trave equivalente avremo:



Fig. 4.28 - configurazione deformata del modello equivalente sotto l'ipotesi 1 di vincolo interno

La rotazione indicata come *Rotn 2* si riferisce al sistema di riferimento locale di SAP2000 ed equivale alla rotazione del punto A intorno all'asse uscente y. Come possiamo constatare tale rotazione è uguale per entrambi modelli e vale:

$$\varphi_A = 0,05454$$

Per quanto riguarda il caso assiale andremo invece a verificare l'eguaglianza in termini di spostamento orizzontale del punto D. Per fare in modo che la trave del modello dettagliato sia soggetta al solo stato di sollecitazione assiale si applicano le forze come riportato nella figura sottostante:



Fig. 4.29 - condizione di carico assiale del modulo di base

Si ricorda che nella prima ipotesi di connessione il blocco non da alcun contributo assiale in quanto questo viene visto unicamente come distanziatore.

Andiamo quindi a confrontare le deformate del modello dettagliato e del modello di trave equivalente:



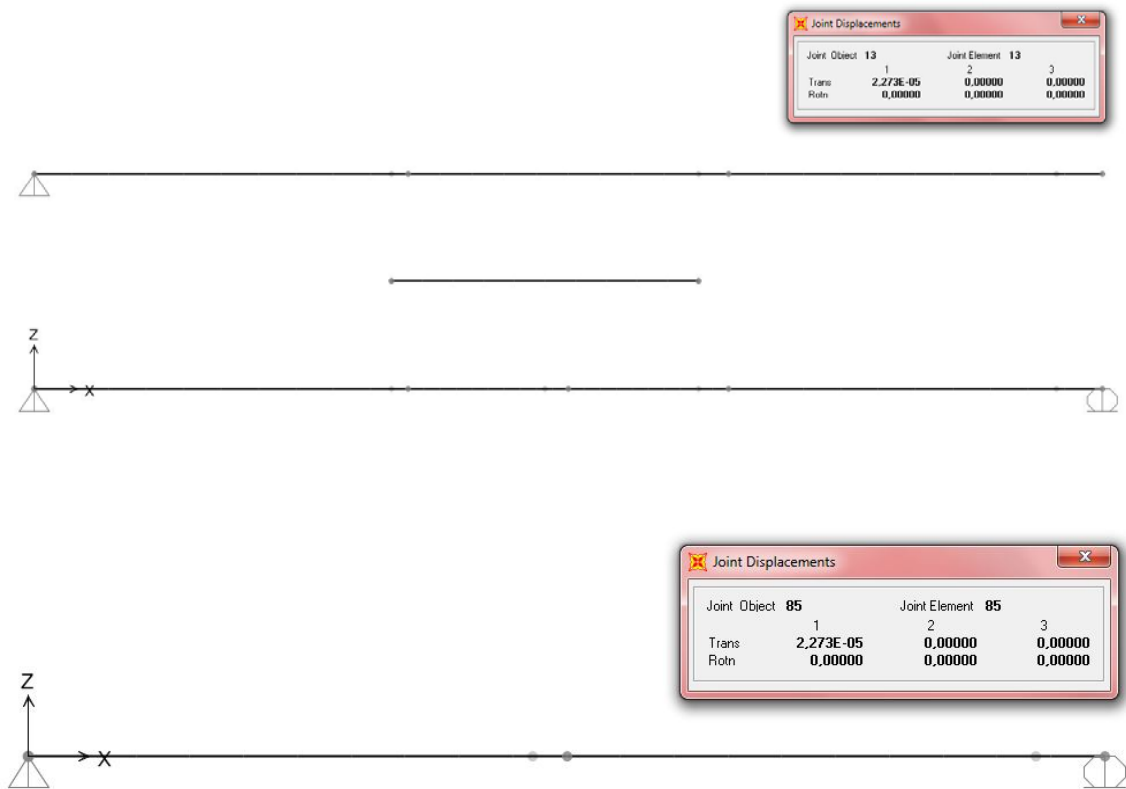


Fig. 4.30 – deformato del modello dettagliato (sopra) e del modello equivalente (sotto) soggette a sforzo assiale sotto l’ipotesi 1 di vincolo interno

Anche per questo stato di sollecitazione l’uguaglianza risulta verificata in quanto lo spostamento lungo x è uguale per entrambi i modelli e vale:

$$u_x = 2,273 \times 10^{-5} \text{ m}$$

## 7.2 Ipotesi 2: verifica dell’equivalenza per stati di tensione omogenea

Per la seconda tipologia di connessione interna si ipotizza la conservazione delle sezioni piane; di conseguenza il vincolo interno di tutti i punti del modello dettagliato verrà definito come segue:

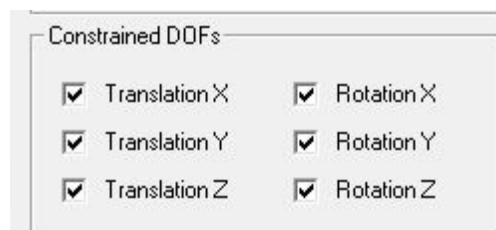


Fig. 4.31 - definizione dei vincoli interni dei punti A, B, C e D per la seconda ipotesi di vincolo

In questo caso il momento d'inerzia equivalente dovrà essere calcolato utilizzando il teorema del trasporto di Huygens, mentre l'area resistente dovrà tenere conto del contributo del blocco di taglio. La sezione rettangolare del modello di trave equivalente avrà le seguenti dimensioni:

Calcolo Sezione Equivalente			
$I_{eq}$	$A_{eq}$	$h$	$b$
[cm <sup>4</sup> ]	[cm <sup>2</sup> ]	[cm]	[cm]
9662,184	98,11321	34,37673	2,854059

Fig. 4.32 - di inerzia, area, base ed altezza equivalenti ricavati dalle tabelle riportate in figura 4.20

Utilizzando questo tipo di connessione i risultati, in termini di rotazione, sono sensibilmente diversi rispetto al modello del paragrafo 7.1; ossia:

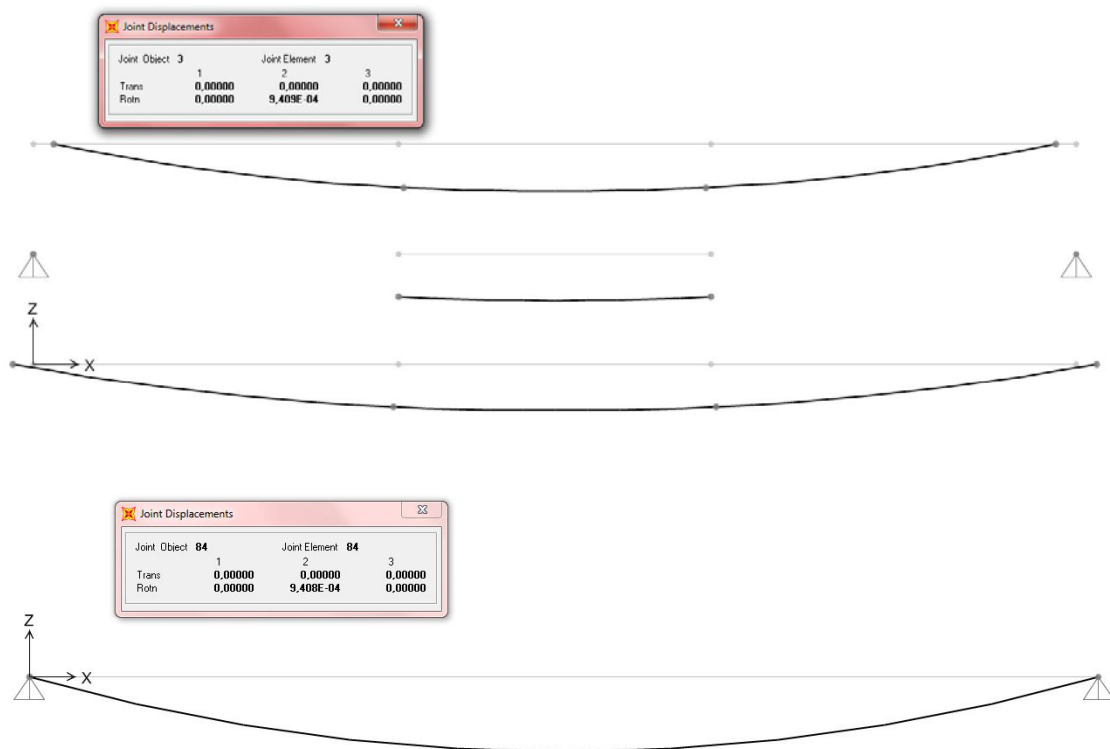


Fig. 4.33 – configurazioni deformate del modello dettagliato (sopra) e del modello equivalente (sotto) soggette a momento flettente sotto l'ipotesi 2 di vincolo interno

Anche in questo caso la rotazione è uguale per entrambi modelli e vale, nel punto A:

$$\varphi_A = 9,409 \times 10^{-4}$$

Si procede quindi al confronto dello spostamento orizzontale nel caso di stato di sollecitazione assiale uniforme. Ci si riferisca quindi alla figura 4.34:

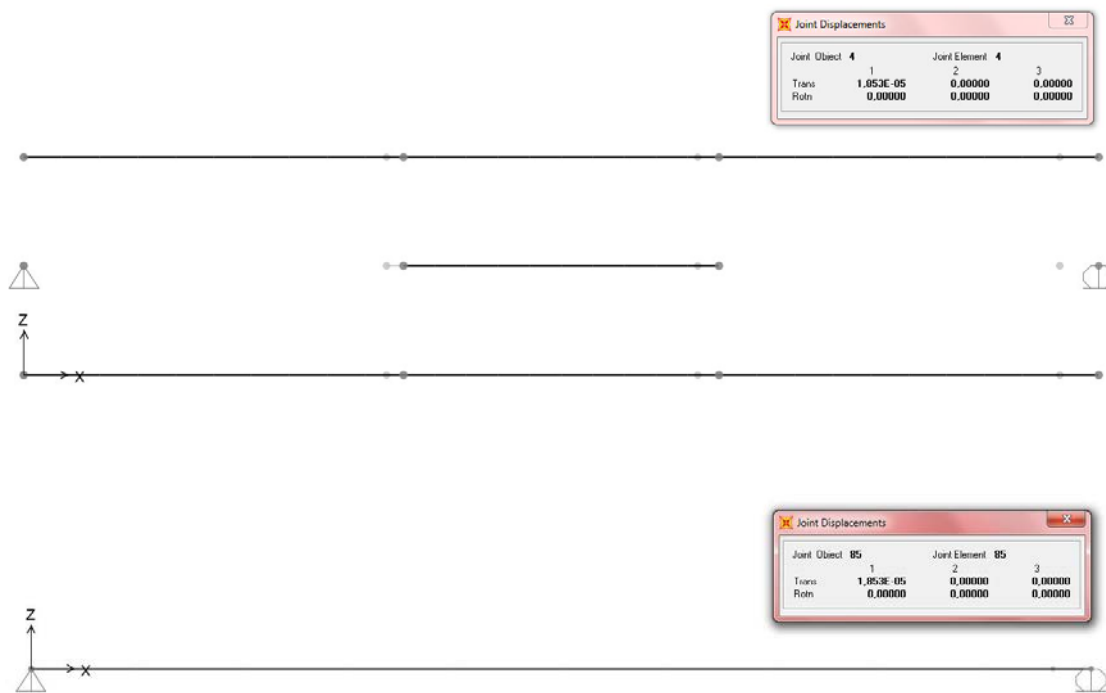


Fig. 4.34 - configurazioni deformate del modello dettagliato (sopra) e del modello equivalente (sotto) soggette a sforzo assiale sotto l'ipotesi 2 di vincolo interno

Anche in questo caso la traslazione orizzontale del punto D è la medesima per entrambi i modelli, e vale:

$$u_x = 1,853 \times 10^{-5}$$

### 7.3 Ipotesi 3: verifica dell'equivalenza per stati di tensione omogenea

I vincoli interni della terza tipologia di connessione vengono definiti dal *constraint weld* vincolando tutti gli spostamenti relativi dei punti connessi:

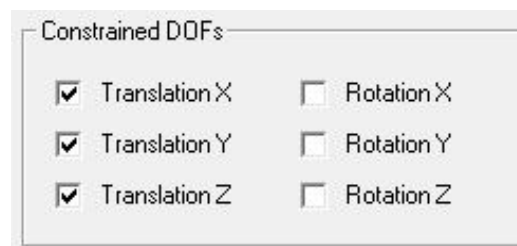


Fig. 4.35 - definizione dei vincoli interni per la terza ipotesi di vincolo

In questo caso la sezione rettangolare della trave equivalente, d'accordo con quanto detto nel paragrafo 5.3, avrà le seguenti dimensioni:

Calcolo Sezione Equivalente			
$I_{eq}$	$A_{eq}$	$h$	$b$
[ $cm^4$ ]	[ $cm^2$ ]	[cm]	[cm]
211,52124	98,113208	5,0863223	19,289617

Fig. 4.36 - di inerzia, area, base ed altezza equivalenti ricavati dalle tabelle riportate in figura 4.21

Conducendo l'analisi per sollecitazione di momento uniforme, andiamo a confrontare la deformata del modello dettagliato con quella del modello di trave equivalente:

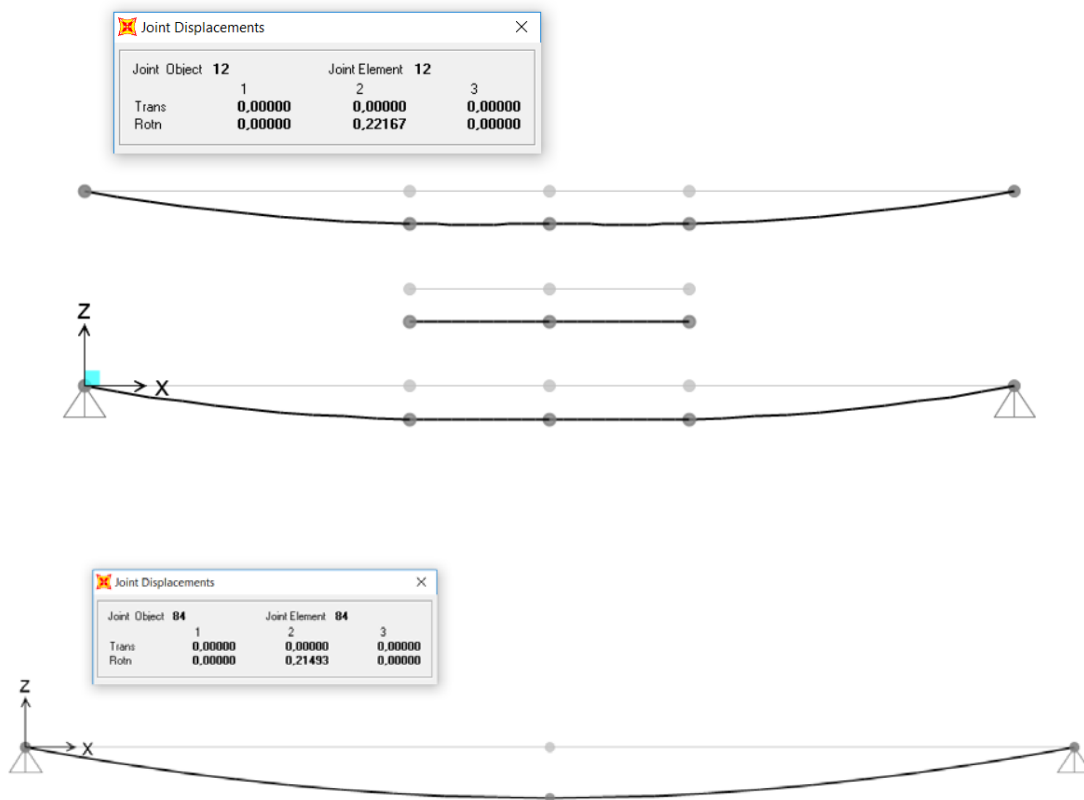


Fig. 4.37 - configurazioni deformate del modello dettagliato (sopra) e del modello equivalente (sotto) soggette a momento flettente sotto l'ipotesi 3 di vincolo interno

La rotazione in A dei due modelli in questo caso non coincide; in particolare si hanno i seguenti valori:

$$\varphi_{A,dettagliato} = 0,22167$$

$$\varphi_{A,equivalente} = 0,21493$$

Il procedimento analitico tramite cui è stata determinata l'inerzia equivalente di questa ipotesi di connessione differisce dai precedenti, ed è a questo che si può imputare l'imperfezione dei risultati. Tuttavia il processo logico adottato è rigoroso.

In generale nei processi di omogeneizzazione e di semplificazione dei modelli si deve certamente accettare un grado di approssimazione, purché questa conduca ad una percentuale di errore accettabile. Se si volesse calcolare la percentuale d'errore nel caso in esame, si potrebbe scrivere:

$$\text{Err}\% = 100 * (\varphi_{A,\text{dettagliato}} - \varphi_{A,\text{equivalente}}) / \varphi_{A,\text{dettagliato}} = 3,04\%$$

Verificando quindi che l'errore percentuale è molto basso e lo si può considerare accettabile. Visto il basso grado di approssimazione è quindi possibile considerare i due modelli equivalenti in termini di rotazione.

Si procede quindi alla verifica dello spostamento orizzontale dei modelli soggetti a stato di sollecitazione assiale uniforme (figura 4.38).

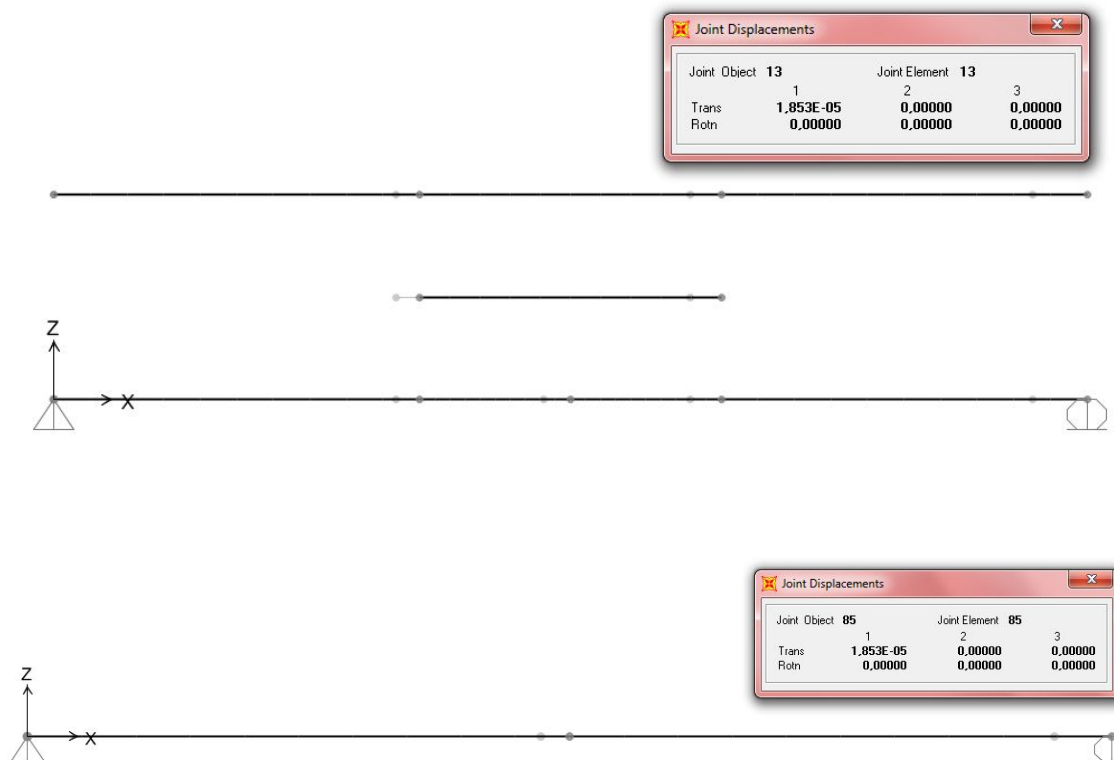


Fig. 4.38 - configurazioni deformate del modello dettagliato (sopra) e del modello equivalente (sotto) soggette a sforzo assiale sotto l'ipotesi 3 di vincolo interno

Lo spostamento orizzontale dei due modelli è il medesimo, e coincide con lo spostamento del paragrafo 7.2, ossia:

$$u_x = 1,853 \times 10^{-5}$$

ciò significa che la differenza che intercorre tra la seconda e la terza tipologia di connessione è determinata dal solo comportamento flessionale.

## 8. Modellazione di un elemento trave composto di più moduli base

Nel paragrafo 7 è stato verificato che i risultati analitici ricavati dall'analisi del modulo base sono utilizzabili per riuscire a modellare una trave equivalente a sezione omogenea. Come è stato espresso nel paragrafo introduttivo, le travi del progetto in analisi sono una ripetizione spaziale di un modulo base. Di seguito si vuole verificare che i risultati ottenuti siano applicabili ad una trave composta dalla successione di diversi moduli base.

Quello che ci si aspetta è che nel passaggio dal modello del modulo di base a quello di una trave composta di più moduli, i risultati in termini di equivalenza tra spostamenti e rotazioni presentino lo stesso grado di errore. Di conseguenza verrà condotta la verifica limitatamente ad una delle tre ipotesi di connessione interna.

Il modello generato per tale verifica è quello di una trave lunga 10 m, ripetizione di 10 moduli base di lunghezza pari ad 1 metro, come riportato in figura 4.39:

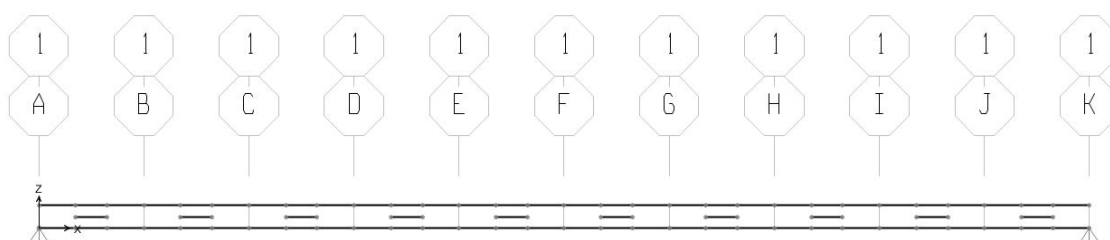


Fig. 4.39 – modello statico di una trave composta dalla successione di dieci moduli base

I vincoli interni dei punti A, B, C, D, E, F, G, H, I, J e K sono stati modellati come descritto nel paragrafo 5, ossia:

$u_x \rightarrow$  non vincolato  
 $u_y \rightarrow$  non vincolato  
 $u_z \rightarrow$  vincolato  
 $\varphi_x \rightarrow$  non vincolato  
 $\varphi_y \rightarrow$  non vincolato  
 $\varphi_z \rightarrow$  non vincolato

Nei punti di connessione tra i blocchi di taglio ed i layer (superiore ed inferiore) verrà invece assegnato il vincolo interno della prima ipotesi di connessione, ovvero:

Ipotesi 1:

$u_x \rightarrow$  non vincolato  
 $u_y \rightarrow$  non vincolato  
 $u_z \rightarrow$  vincolato  
 $\varphi_x \rightarrow$  vincolato  
 $\varphi_y \rightarrow$  vincolato  
 $\varphi_z \rightarrow$  vincolato

Trattandosi della ripetizione spaziale del modulo di base precedentemente verificato, le dimensioni della sezione rettangolare della trave omogenea saranno equivalenti a quelle calcolate nel paragrafo 7.1.

Si procede quindi alla verifica a partire dal caso di stato flessionale. La deformata del modello dettagliato è riportata in figura 4.40:

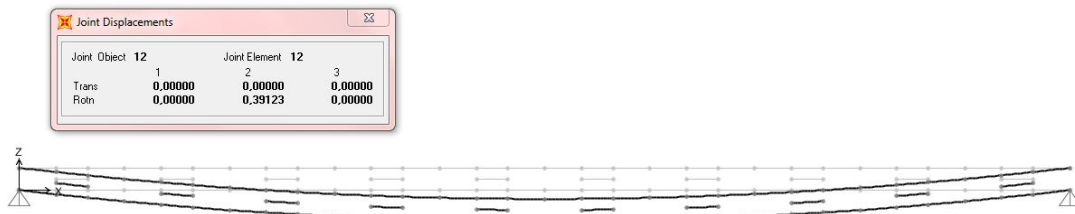


Fig. 4.40 – deformata della trave composta di più moduli base soggetta a momento flettente

Mentre la deformata della trave equivalente è riportata in figura 4.41:

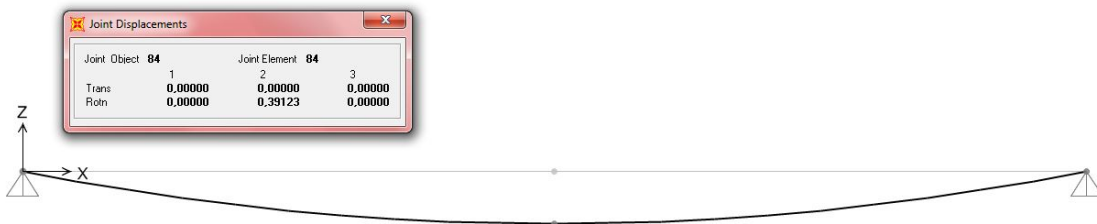


Fig. 4.41 – deformata della trave equivalente soggetta a momento flettente

La rotazione nel punto A assume il medesimo valore per entrambi i modelli, ossia:

$$\varphi_A = 0,39123$$

Cambiando la condizione di vincolo esterno del punto K, ovvero sostituendo il vincolo di cerniera con il vincolo di carrello per consentire lo spostamento orizzontale, si applicano i carichi tali da generare uno stato di sforzo assiale. La deformata del modello dettagliato risulta:

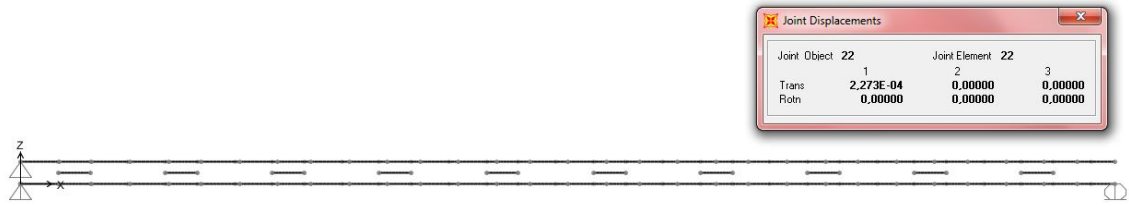


Fig. 4.42 – deformata della trave composta di più moduli base soggetta a sforzo assiale

Mentre per il modello di trave equivalente:

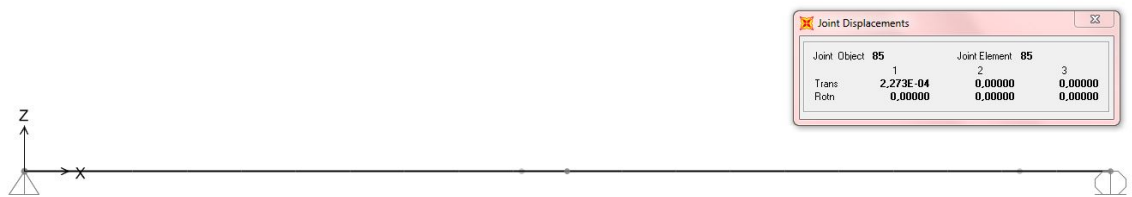


Fig. 4.43 – deformata della trave equivalente soggetta a sforzo assiale

Lo spostamento orizzontale è il medesimo e vale:

$$u_x = 2,273 \times 10^{-4}$$

## 9. Conclusioni

I risultati riportati in questo capitolo dimostrano che il metodo di omogeneizzazione utilizzato per il calcolo della sezione equivalente restituisce dei buoni risultati se applicato al problema di una singola trave. Si può infatti affermare che, laddove si generi un modello di trave equivalente efficace per un modulo di base, questo sarà utilizzabile per una trave di qualsivoglia lunghezza, purché essa risulti essere composta unicamente di una successione di moduli base.

Il passaggio successivo è quello di trovare le soluzioni di equivalenza anche per le strutture bidimensionali. Nel successivo capitolo, quindi, si continuerà a lavorare sul problema piano, operando una serie di passaggi analitici che, analogamente con quanto fatto in questo capitolo, saranno mirati alla definizione delle rigidità equivalenti di un graticcio di travi e del suo continuo bidimensionale.





## Capitolo 05

### Il Modello di Continuo Bidimensionale

#### 1. Introduzione

In questo capitolo si estenderà il processo di continuizzazione, applicato nel capitolo precedente per modellare con un'unica trave un elemento monodimensionale composto di piccoli pezzi, al caso in cui un graticcio di travi monodimensionali verrà modellato come un continuo bidimensionale.

A seconda del comportamento meccanico selezionato, il continuo bidimensionale sarà quello di lastra, piastra o guscio ed il procedimento di continuizzazione si baserà sulla estrema regolarità geometrica del graticcio continuizzato. Ovviamente tale procedimento ha senso quando il numero di travi costituenti il graticcio è estremamente elevato, oppure, il che è la stessa cosa, quando il rapporto fra la distanza tra due travi successive e la lunghezza caratteristica della piastra è un numero che tende a zero.

Analogamente a quanto fatto nel passaggio tra modello dettagliato a modello di trave equivalente, si parte dalla definizione di un VER (volume elementare di riferimento) la cui lunghezza caratteristica rispetto alla lunghezza caratteristica dell'insieme (ordine grandezza) è molto piccola (vedi figura 5.1).

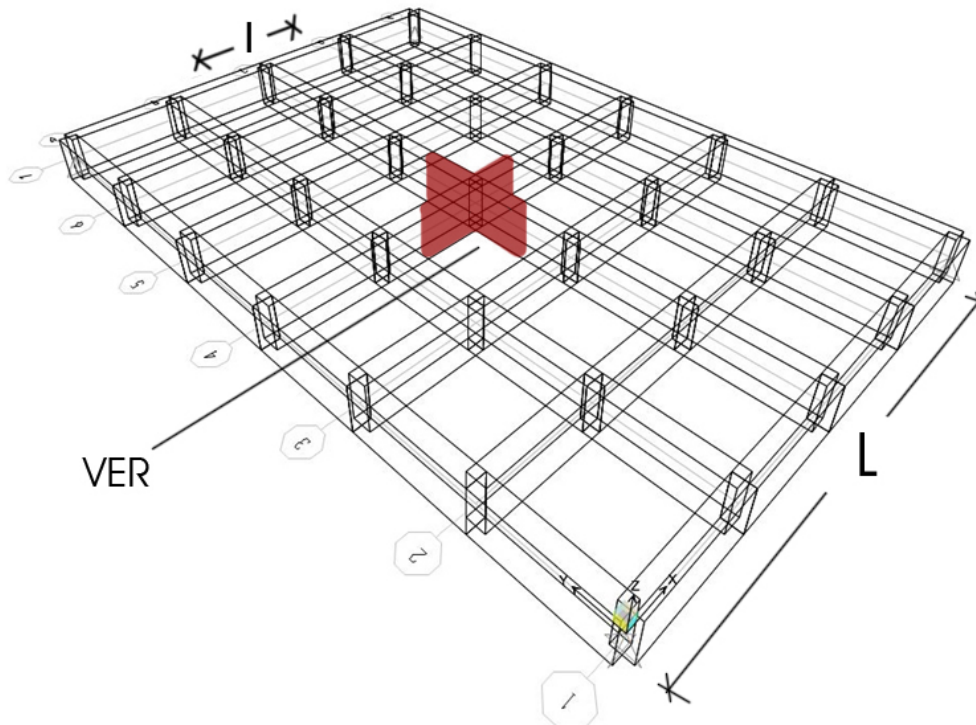


Fig. 5.1 – identificazione di un VER su un generico graticcio di travi piane

$$\varepsilon = \frac{l}{L} \rightarrow 0$$

Per fare un altro esempio di modellazione tramite continuo bidimensionale, consideriamo un muro di mattoni a tessitura regolare in modo che esista una cella di riferimento (VER) che, ripetendosi nel piano, tassella tutto il muro. Anche in questo caso il sistema discreto può essere reso al continuo, per esempio con uno stato piano di Cauchy, ma ovviamente la resa al continuo è tanto migliore quanto più piccola è la dimensione del mattone rispetto alla dimensione del muro. Questo perché il procedimento al continuo è parente di un metodo di approssimazione e, quindi, introduce errori nei problemi elastici di interesse.

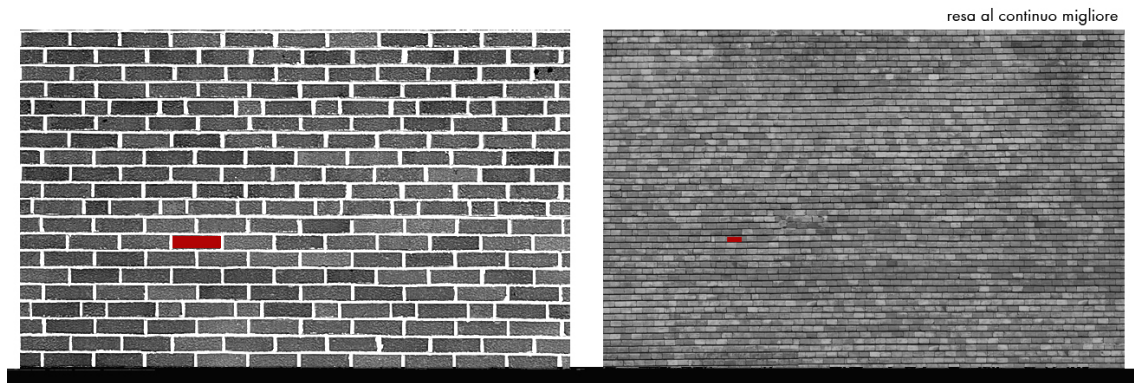


Fig. 5.2 – esempio di superficie in muratura con indicazione del singolo mattone

Una caratteristica di un efficiente metodo di omogeneizzazione è quella di far corrispondere con sufficiente accuratezza gli stati di tensione, o deformazione, uniforme dei due modelli che mette in relazione (discreto/continuo). Ad esempio, nel caso della piastra gli stati di deformazione uniformi sono quelli in cui questa si comporta globalmente come una trave soggetta ad uno stato di deformazione uniforme, ed in particolare quelli in cui il momento in una direzione è massimo mentre il momento nell'altra direzione è nullo.

In genere in un continuo bidimensionale piano il comportamento meccanico per sforzi contenuti nel suo piano è disgiunto dal comportamento meccanico per sforzi agenti perpendicolarmente ad esso. Si parla cioè di comportamento a lastra o a piastra di tale continuo. Nel caso di strutture curve i comportamenti in piano e fuori dal piano interagiscono, e molto più complesso si rivela il procedimento di omogeneizzazione. Quello che faremo in questo capitolo è analizzare separatamente gli stati di deformazione uniforme di una lastra e di una piastra, per metterli in relazione individualmente con il comportamento assiale ed il comportamento flessionale di un graticcio di travi. In tal modo otterremo dei coefficienti di rigidità equivalenti che ci consentiranno di passare da un modello all'altro con una approssimazione controllata.

## 2. Determinazione delle rigidità equivalenti

Per determinare le caratteristiche del sistema continuo procederemo prima di tutto omogeneizzando, caso per caso, gli stati di deformazione uniforme; in seguito attribuiremo ad un unico modello bidimensionale le proprietà così ricavate.

Gli stati di deformazione uniforme che andremo ad analizzare sono quelli dovuti a sforzo assiale e taglio uniformi, per azioni agenti nel piano medio, e azioni di momento flettente uniformi, nelle due direzioni. Tralascieremo la torsione poiché il suo contributo, nel caso di gridshell in legno, è trascurabile.

Prima di procedere alla modellazione bisogna avere ben chiari i modelli teorici che si vogliono mettere a confronto. Premettiamo che nei paragrafi a seguire utilizzeremo dei risultati numerici di confronto ottenuti tramite il software ad elementi finiti SAP2000. Faremo riferimento al modello di trave di Timoshenko, i cui risultati numerici per travi snelle coincidono con i risultati ottenibili dalla trave di Bernoulli, ed al modello di piastra di Kirchhoff. In relazione all'utilizzo di questo preciso software, conviene chiarire quali siano i parametri da stimare con il procedimento di omogeneizzazione da inserire come dati di partenza per l'analisi ad elementi finiti del continuo bidimensionale.

Questo primo esempio vuole mettere in luce alcuni aspetti metodologici; a tal scopo è sufficiente utilizzare un modello di graticcio semplificato, composto di un solo layer di travi in legno massiccio e riportato in figura 5.3.

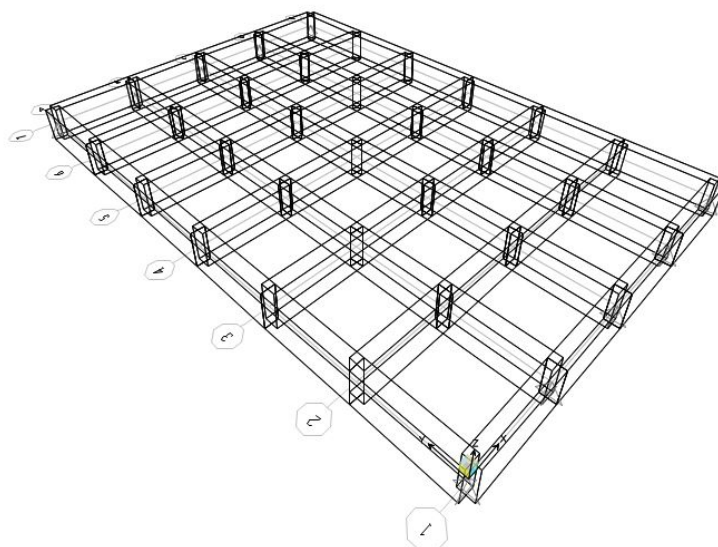


Fig. 5.3 – graticcio di travi complanari di legno massiccio

Il continuo bidimensionale di riferimento avrà le medesime dimensioni geometriche del graticcio e verrà modellato come una superficie, corrispondente alla sua superficie mediana, con rigidezza assiale e tagliante, in piano, e flessionale, fuori dal piano, uguali a quelle del graticcio. Queste tre grandezze ci consentono di definire tre parametri del continuo equivalente. Fissando il modulo di elasticità normale pari a quello del legno di classe C24, come riportato nelle norme UNI 1912 (figura 1.13 del capitolo 1), la rigidezza assiale e quella flessionale ci consentono di determinare un'area equivalente ed un'inerzia equivalente che conducono, in generale, e in ognuno dei casi di questa tesi, a due spessori differenti del continuo, l'uno utilizzabile per gli sforzi in piano, l'altro utilizzabile per gli sforzi fuori dal piano. In effetti, nella definizione di una shell in SAP2000 si possono impostare due differenti spessori, come evidenziato in figura 5.4:

Material	
Material Name	+ MAT
Material Angle	0.
Thickness	
Membrane	0.2
Bending	0.2

Fig. 5.4 – parametri di spessore per una shell in SAP2000

Il software utilizza il valore della voce *Membrane* per calcolare gli stati di tensione nel piano ed il valore della voce *Bending* per calcolare gli stati di tensione fuori dal piano.

Per quanto riguarda invece la rigidezza a taglio nel piano della superficie, non avendo più a disposizione grandezze geometriche riguardanti la sezione, possiamo solo agire sul modulo di taglio  $G$  per garantire l'eguaglianza della rigidezza tagliante nei modelli discreto e continuo. Tale coefficiente elastico ovviamente non corrisponderà a quello della norma UNI 1912, ma sarà il risultato di una equivalenza meccanica.

General Data	
Material Name and Display Color	MAT
Material Type	Other
Material Notes	Modify/Show Notes...
Weight and Mass	
Weight per Unit Volume	4.07
Mass per Unit Volume	0.415
Units	
	KN, m, C
Isotropic Property Data	
Modulus of Elasticity, E	12000000
Poisson's Ratio, U	0.
Coefficient of Thermal Expansion, A	1.170E-05
Shear Modulus, G	6000000.

Fig. 5.5 – parametri di definizione di un materiale in SAP2000

Procediamo ora identificando analiticamente ognuno degli stati di tensione da equiparare.

## 2.1 Determinazione della rigidezza flessionale

Prendiamo il caso della trave doppiamente appoggiata soggetta ad una sollecitazione uniforme di momento flettente:

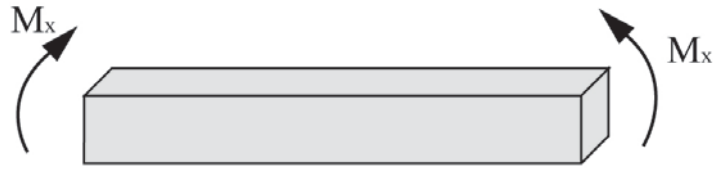


Fig. 5.6 – esempio di trave soggetta a momento flettente applicato alle estremità

Nel modello monodimensionale di Timoshenko il momento flettente  $M_x$  è dato da:

$$M_{x, \text{trave}} = E I_x \chi_x \quad (42)$$

Ovvero dal prodotto del modulo di elasticità ( $E$ ), per il momento di inerzia baricentrico ( $I_x$ ), per la curvatura ( $\chi_x$ ).

Per una striscia larga un metro di piastra di Kirchhoff, la relazione che lega il momento in direzione  $x$  con la relativa curvatura, è pari a:

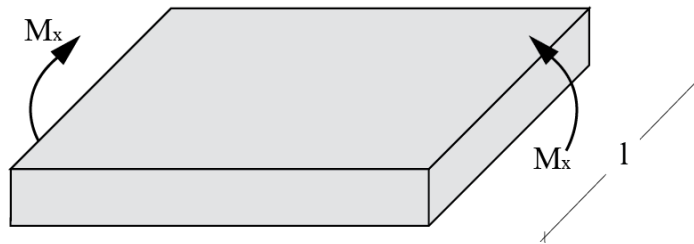


Fig. 5.7 – momento in direzione  $x$  che agisce su una porzione di superficie

$$M_x = D \chi_x \quad (43)$$

dove:

$$D = \frac{E s^3}{12 (1 - \nu^2)} \quad (44)$$

Nel caso bidimensionale quindi il momento flettente dipende dallo spessore della lastra ( $s$ ) e dal coefficiente di Poisson ( $\nu$ ).

Imponendo ora che, a parità di curvatura, il momento flettente della striscia di piastra larga un metro sia pari alla somma dei momenti flettenti delle travi che insistono su quella porzione di spazio (il numero di travi in un metro è pari al reciproco dell'interasse  $i$  espresso in metri), avremo:

$$\frac{1}{i} E I_x \chi_x = \frac{E s^3}{12 (1 - \nu^2)} \chi_x \quad (45)$$

in cui abbiamo ipotizzato che in entrambi i modelli il materiale sia lo stesso. Imponiamo ora che il materiale fittizio del sistema continuo abbia coefficiente di Poisson uguale a zero, per

azzerare gli effetti di deformazioni secondarie che nel graticcio sono assenti. Fatte queste ipotesi, la (45) ci consente di determinare lo spessore di piastra del continuo bidimensionale, che varrà:

$$s = \sqrt[3]{12 I_x / i} \quad (46)$$

Nel caso in cui l'interasse sia pari ad un metro, avremo:

$$s = \sqrt[3]{12 I_x} \quad (47)$$

## 2.2 Determinazione della rigidità assiale

Analogamente a quanto fatto per la rigidità flessionale, prendiamo un elemento modulare continuo ed uno discreto soggetti alla medesima deformazione assiale uniforme.

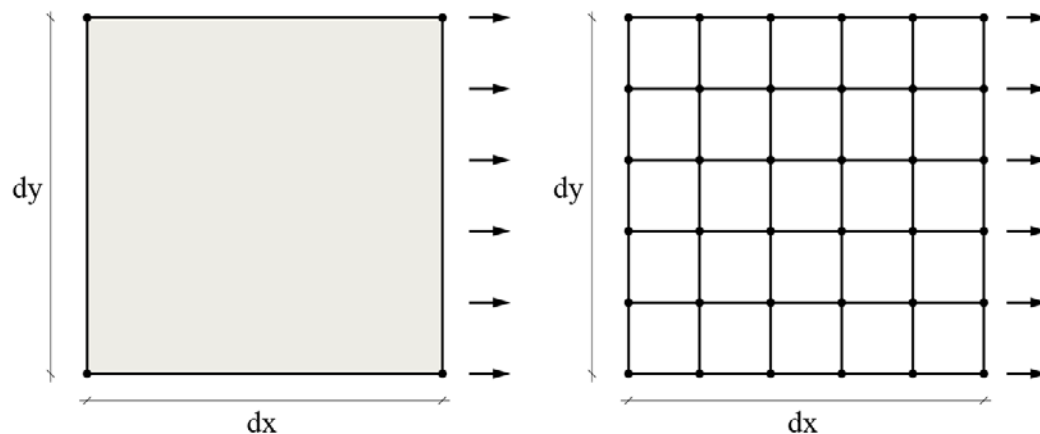


Fig. 5.8 – sistema continuo bidimensionale e sistema a travi soggetti a sforzo assiale uniforme

Al modello continuo viene applicata una forza uniforme in una direzione che indicheremo come direzione 1, individuando quindi con  $F_{11}$  il corrispettivo sforzo; nel sistema discreto invece chiameremo  $N$  le forze di trazione puntuali applicate ad ogni asta.

Nel modello di piastra di Kirchhoff, vale:

$$F_{11} = \frac{Es}{(1-\nu^2)} (\epsilon_{11} + \nu \epsilon_{22}) \quad (48)$$

Come possiamo notare, nel modello di piastra gli effetti dello sforzo assiale applicato in una sola direzione risentono comunque dalla deformazione secondaria che avviene, per via dell'effetto Poisson, nella direzione ortogonale (direzione 2). Nel nostro caso però vale lo stesso discorso fatto per il momento flettente, per il quale decidiamo di impostare il valore del coefficiente di Poisson pari a zero.

Di conseguenza la (48) si semplifica come segue:

$$F_{11} = E s \varepsilon_{11} \quad (49)$$

Nel modello di trave monodimensionale, invece, lo sforzo normale viene espresso mediante la (50):

$$N = E A \varepsilon \quad (50)$$

Imponendo ora che, a parità di deformazione assiale, lo sforzo della striscia di lastra larga un metro sia pari alla somma degli sforzi assiali delle travi che insistono su quella porzione di spazio (come prima,  $n_{travi} = 1/i$ ), avremo:

$$\frac{EA \varepsilon}{i} = E s \varepsilon_{11} \quad (51)$$

da cui si ricava lo spessore di membrana del continuo bidimensionale equivalente, che varrà:

$$s = \frac{A}{i} \quad (52)$$

### 2.3 Determinazione della rigidezza tagliante

Le modalità di assorbimento di uno stato tagliante uniforme in un sistema discreto, dipendono strettamente dal sistema di controventamento utilizzato in piano. Trattandosi di una struttura in legno, infatti, di grande modularità e di semplice assemblaggio, è poco probabile che i nodi interni possano essere realizzati come nodi ad incastro. Ipotizzando che siano delle cerniere sferiche, ciò renderebbe necessario un sistema di controventamento piano per evitare il meccanismo cinematico del quadrilatero articolato. Consideriamo in questo caso un modulo base il cui controventamento si componga di una diagonale anch'essa di legno:

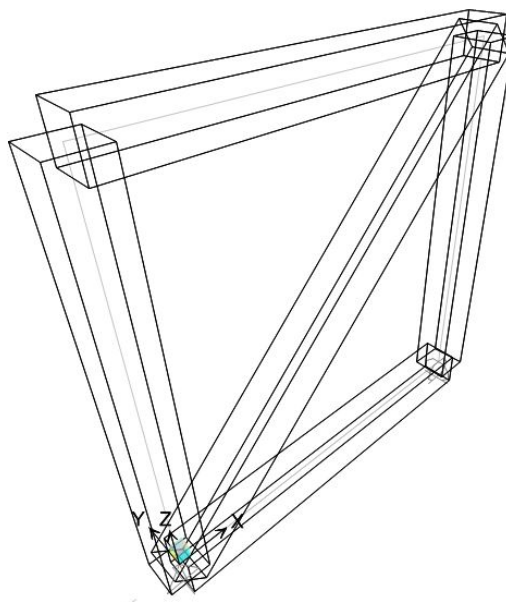


Fig. 5.9 – esempio di modulo controventato



Lo stato di tensione/deformazione tagliante nel continuo bidimensionale, mostrata in figura 5.10:

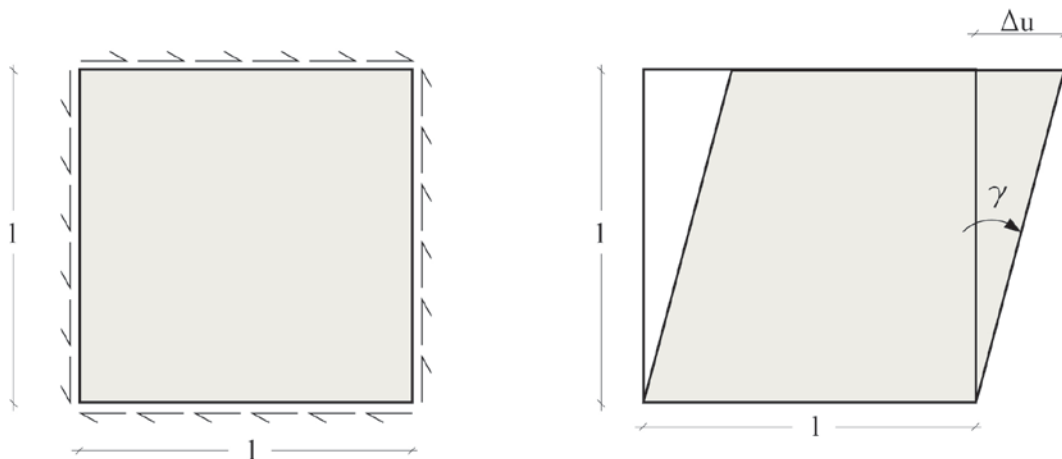


Fig. 5.10 – stato uniforme di taglio per un sistema continuo bidimensionale

viene fatto corrispondere al seguente stato di sforzi/deformazioni, del sistema a travi (vedi figura 5.11):

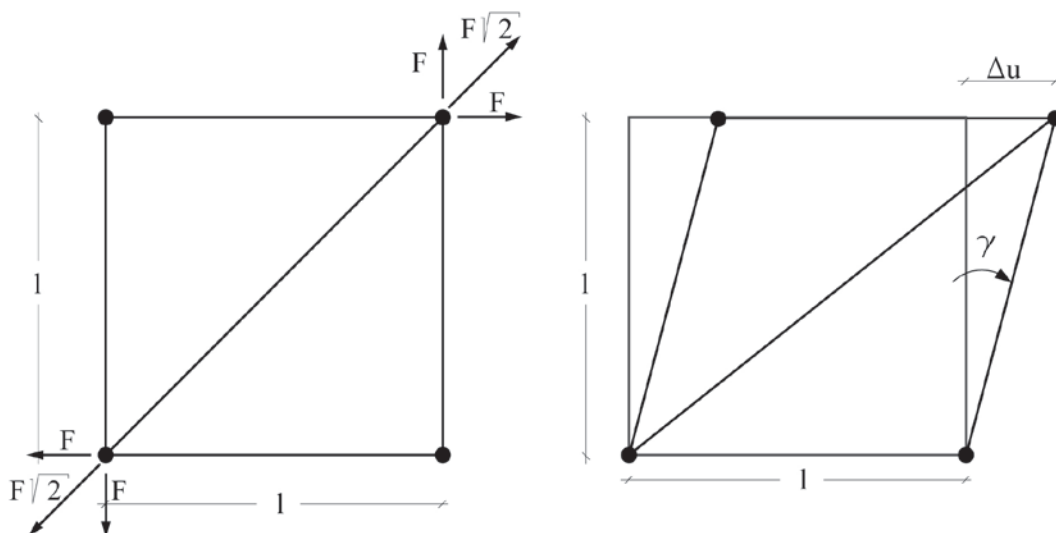


Fig. 5.11 – applicazione delle forze necessarie a generare una sollecitazione uniforme di taglio nel sistema a travi

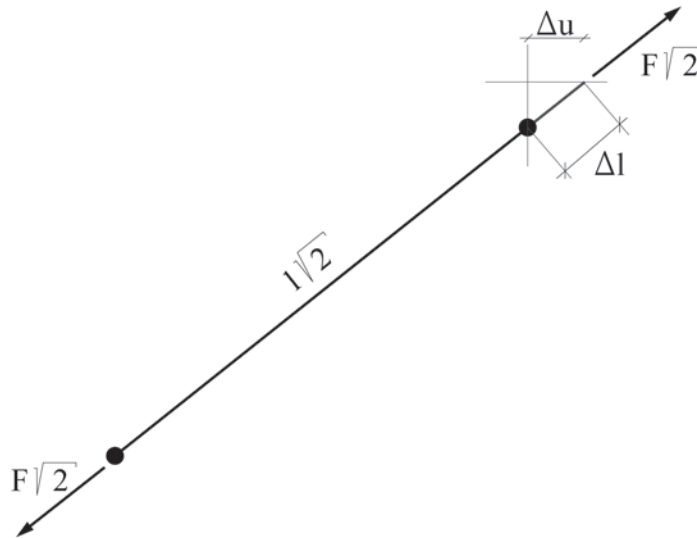


Fig. 5.12 – deformazione dell’asta di controventamento (vedi figura 5.11)

Per il modello continuo, in corrispondenza dello spostamento  $\Delta u$  di figura 5.10 insorge uno scorrimento angolare  $\gamma$  di valore pari a:

$$\gamma = \frac{\Delta u}{l} \quad (53)$$

che corrisponde ad una tensione tangenziale  $\tau$ :

$$\tau = G\gamma = G \frac{\Delta u}{l} \quad (54)$$

la cui risultante sul lato è pari ad  $F$ :

$$F = \tau s l = \tau l s = G \gamma l s = G \frac{\Delta u}{l} l s \quad (55)$$

Nel sistema ad aste, in corrispondenza dello spostamento  $\Delta u$  di figura 5.11 insorge un allungamento dell’asta diagonale  $\Delta l$  (illustrato in figura 5.12) di valore pari a:

$$\Delta l = \Delta u \frac{\sqrt{2}}{2} \quad (56)$$

che da origine alla seguente deformazione assiale:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l\sqrt{2}} = \frac{\Delta u}{2l} \quad (57)$$

che corrisponde ad uno sforzo normale  $N$  pari a :

$$N = E A \varepsilon = E A \frac{\Delta u}{2l} \quad (58)$$

in equilibrio con la forza esterna secondo la:

$$N = F \sqrt{2} \quad (59)$$

da cui possiamo ricavare:

$$F = \frac{N}{l\sqrt{2}} = \frac{EA}{l2\sqrt{2}} \Delta u \quad (60)$$

A questo punto, eguagliando la (55) con la (60), a parità di  $\Delta u$ , otteniamo:

$$G s = \frac{EA}{l2\sqrt{2}} \quad (61)$$

e infine ricavando:

$$G = \frac{EA}{sl2\sqrt{2}} \quad (62)$$

### 3. Modellazione e verifica in SAP2000

Nel paragrafo precedente abbiamo definito l'equivalenza tra modello continuo bidimensionale e modello a travi, utilizzando gli stati omogenei di tensione/deformazione. In particolare, per ognuna delle sollecitazioni prese in esame, abbiamo individuato una relazione tra un parametro geometrico o meccanico del continuo bidimensionale ed uno del sistema a travi. In particolare le tre relazioni determinate sono le seguenti:

**Momento flettente:**

$$s = \sqrt[3]{12 I_x}$$

**Sforzo Assiale:**

$$s = \frac{A}{i}$$

**Taglio:**

$$G = \frac{EA}{sl2\sqrt{2}}$$

con ovvio significato dei simboli. Bisogna ora verificare che questi parametri consentano una modellazione attendibile, ossia affidabile ed accurata, del continuo bidimensionale equivalente. Conduciamo questa verifica su SAP2000, mettendo a confronto i risultati dei modelli numerici del sistema continuo bidimensionale e del sistema a travi per ognuno degli stati di tensione uniforme.

### 3.1 Momento flettente

Anzitutto dobbiamo modellare il sistema a travi. Come prima cosa disegniamo la struttura: decidiamo di utilizzare una maglia di travi di 1x1 m applicata ad un graticcio di 4 metri in direzione x e 6 metri in direzione y:

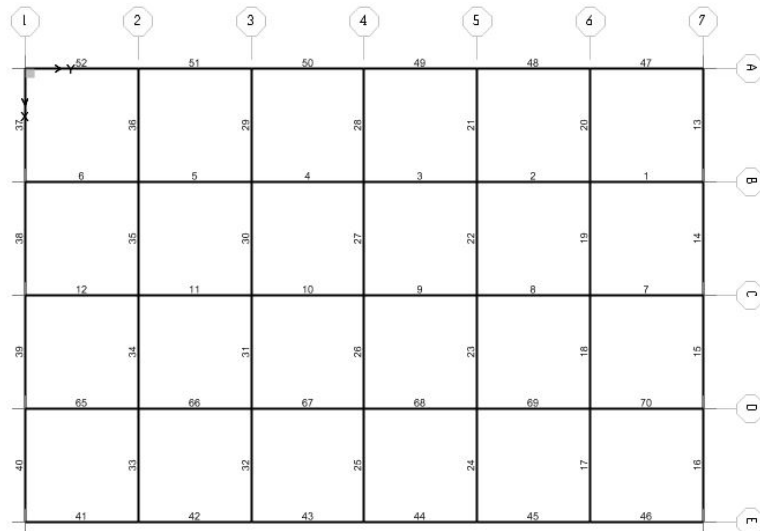


Fig. 5.13 – disegno in pianta del graticcio di travi mediante rappresentazione del solo asse baricentrico

Per la definizione del materiale delle travi è stato creato un materiale ortotropo, in accordo con i parametri riportati in figura 1.13, relativi al legno massiccio di classe C24.

A questo punto dobbiamo definire la sezione delle travi. Per questa esemplificazione consideriamo un graticcio di travi incastrate la cui sezione è arbitrariamente determinata come rettangolare di 40x15 cm.

Decidiamo di non considerare il contributo della torsione. Per farlo apportiamo una modifica al parametro *Torsional Constant*, che dovrà essere pari a zero:

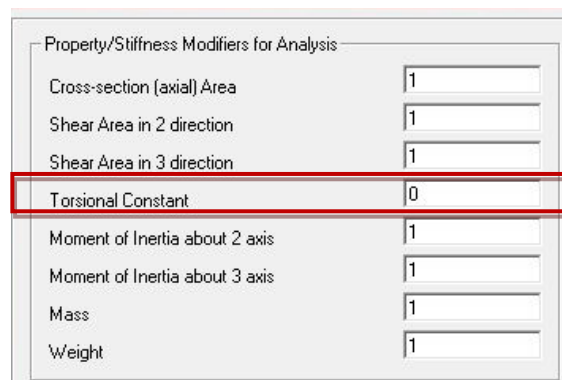


Fig. 5.14 – impostazione della rigidità torsionale delle travi pari a zero

Assegniamo ora dei vincoli cerniera a tutti i nodi di due dei lati perimetrali, ed un carico uniformemente distribuito a tutte le travi in direzione ortogonale a quella vincolata:

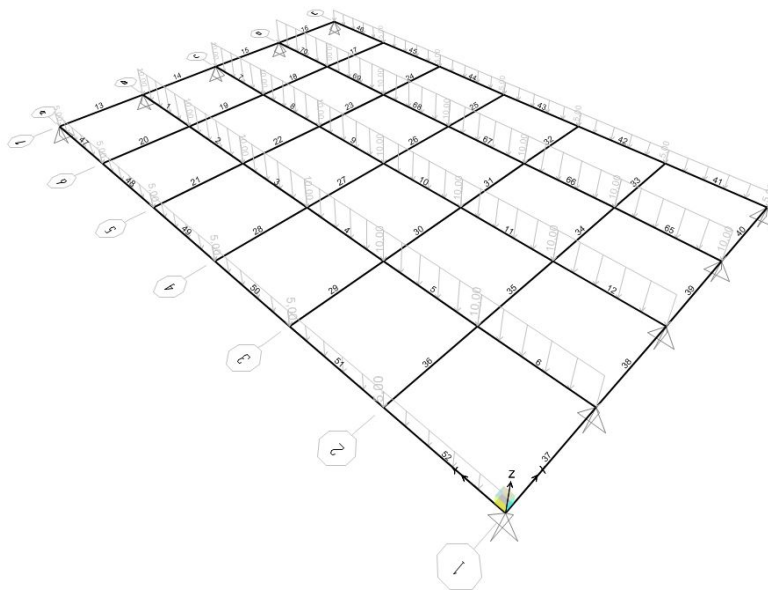


Fig. 5.15 – assegnazione dei carichi verticali alle travi del graticcio

Il carico distribuito vale 10 kN/m su tutte le travi ad eccezione di quelle di bordo, in cui valore viene dimezzato ed è quindi pari a 5 kN/m. Questo perché nel sistema continuo assegneremo una densità superficiale di carico uniforme; le porzioni di area marginali avranno quindi la metà dell'area di influenza di quelle lontane dai bordi. Per fare in modo che il dimezzamento del carico nelle travi di bordo nel sistema a travi non incida sull'uniformità in direzione trasversale deformata del graticcio, decidiamo di raddoppiare la deformabilità delle travi di bordo. Andiamo quindi a definire una seconda sezione che assegneremo solo alle travi di bordo; utilizziamo le stesse proprietà della sezione precedentemente definita, ma dimezziamo in questo caso il valore del momento di inerzia nelle due direzioni, modificando i parametri *Moment of Inertia about 2 axis* e *Moment of Inertia about 3 axis*.

Property/Stiffness Modifiers for Analysis	
Cross-section (axial) Area	1
Shear Area in 2 direction	1
Shear Area in 3 direction	1
Torsional Constant	0
Moment of Inertia about 2 axis	0,5
Moment of Inertia about 3 axis	0,5
Mass	1
Weight	1

Fig. 5.16 – modifica della rigidità flessionale delle travi di bordo

Procediamo ora alla modellazione del continuo equivalente. Utilizziamo per comodità un modello di guscio con una discretizzazione rada e coincidente con le travi del graticcio, ed assegniamo gli stessi vincoli del sistema discreto:

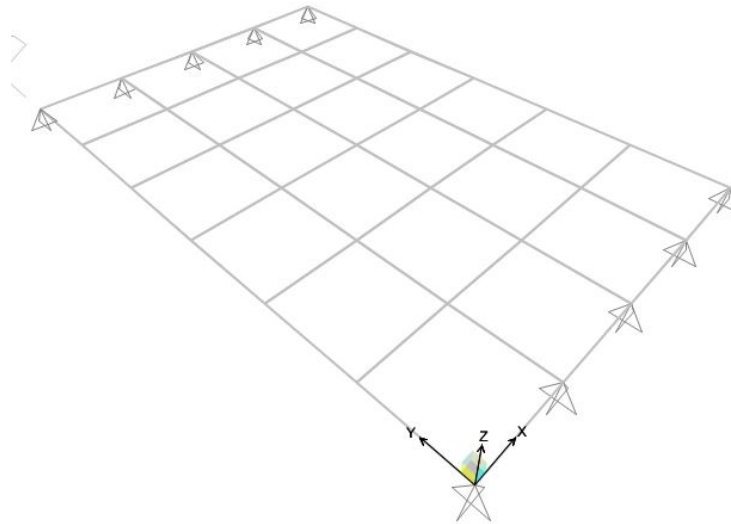


Fig. 5.17 – modello di guscio equivalente

Definiamo un materiale equivalente. Dovendo riprodurre uno stato di flessione in un sola direzione non è necessario che il materiale del continuo sia ortotropo come quello del sistema a travi. Possiamo quindi semplificare i passaggi definendo un materiale isotropo con lo stesso peso e lo stesso modulo elastico del legno, in direzione parallela alla fibratura. Inoltre, per i motivi precedentemente spiegati, impostiamo il valore del coefficiente di Poisson pari a zero:

Weight and Mass		Units
Weight per Unit Volume	4,2	KN, m, C
Mass per Unit Volume	0,4283	
Isotropic Property Data		
Modulus of Elasticity, E		11000000
Poisson's Ratio, U		0,
Coefficient of Thermal Expansion, A		1,170E-05
Shear Modulus, G		5500000,

Fig. 5.18 – definizione del materiale per il continuo bidimensionale

A questo punto assegniamo un carico distribuito pari a 10 kN/mq, ovvero equivalente alla condizione di carico del modello discreto:

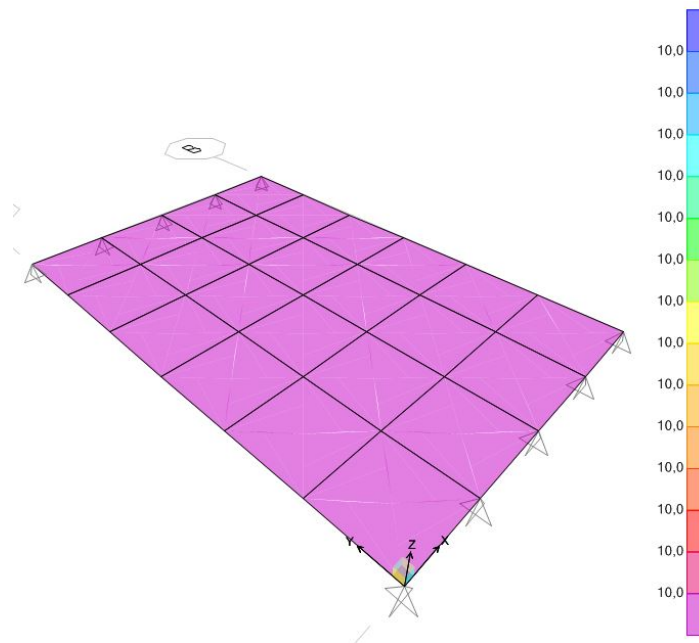


Fig. 5.19 – visualizzazione cromatica del carico applicato uniformemente al modello di continuo bidimensionale

Definiamo quindi la sezione del guscio. Assegniamo il materiale equivalente ed eliminiamo la rigidità torsionale:

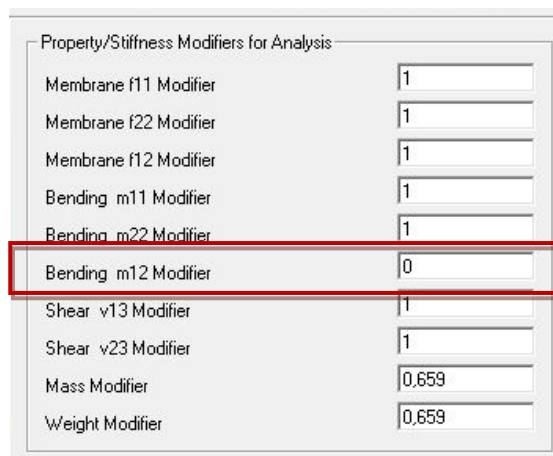


Fig. 5.20 – parametri di modifica del peso e della rigidità torsionale da assegnare al guscio equivalente

Sebbene non sia necessario ai fini del calcolo, in quanto si trascurerà il contributo del peso proprio, abbiamo assegnato un coefficiente diminutivo al peso ed alla massa del guscio (vedi figura 5.20), per rendere questi due parametri equivalenti al modello discreto. Dobbiamo ora definire geometricamente il guscio. Lo spessore che utilizzeremo è stato precedentemente calcolato e vale:

$$s = \sqrt[3]{12 I_x}$$

Avendo scelto di utilizzare un modulo 1x1 m per il graticcio, per calcolare lo spessore dell'area equivalente sarà sufficiente sostituire al parametro ( $I_x$ ) il valore del momento d'inerzia delle travi del graticcio. Nel caso in cui la disposizione delle travi fosse più o meno rada, sarebbe invece necessario dividere il momento ( $I_x$ ) per l'interasse ( $l$ ) delle travi espresso in metri.

Il momento d'inerzia  $I_x$  di una sezione rettangolare si calcola come segue:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

da cui:

$$s = \sqrt[3]{12 \frac{bh^3}{12}} = h \sqrt[3]{b}$$

$$s = 0,2123 \text{ m}$$

Definisco quindi la sezione del guscio sostituendo il valore sopra determinato alla voce *thickness*, sia per quanto riguarda il parametro *membrane* che per quanto riguarda il parametro *bending*.

Effettuata l'analisi, mettiamo a confronto i risultati del modello a travi con quelli del continuo bidimensionale, prima in termini di spostamento:

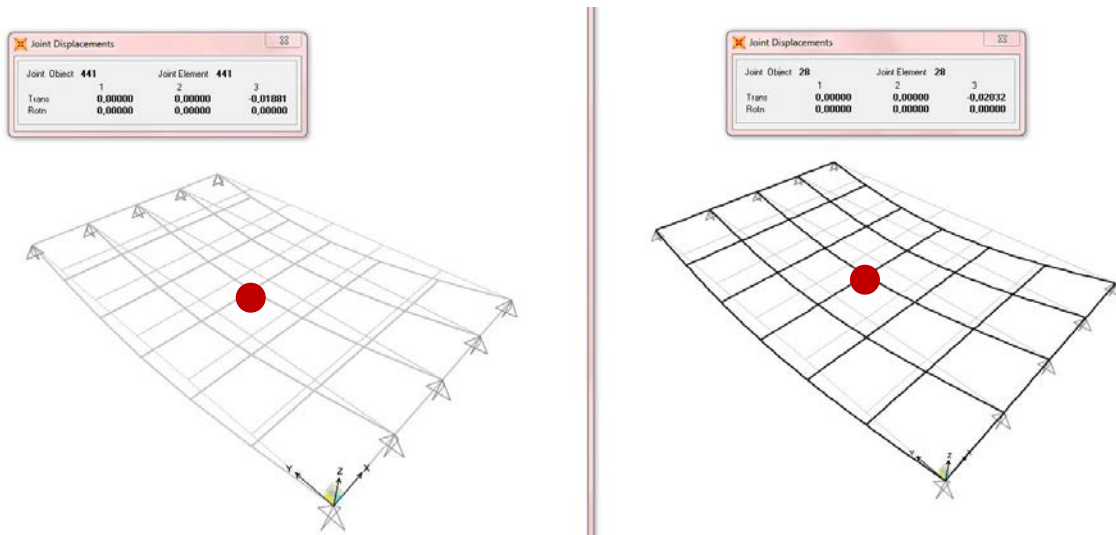


Fig. 5.21 – risultati dello spostamento a confronto tra modello di continuo bidimensionale (sinistra) e modello discreto (destra)

$$u_3 = -0,01881 \text{ m}$$

$$u_3 = -0,02032 \text{ m}$$



poi in termini di momento flettente:

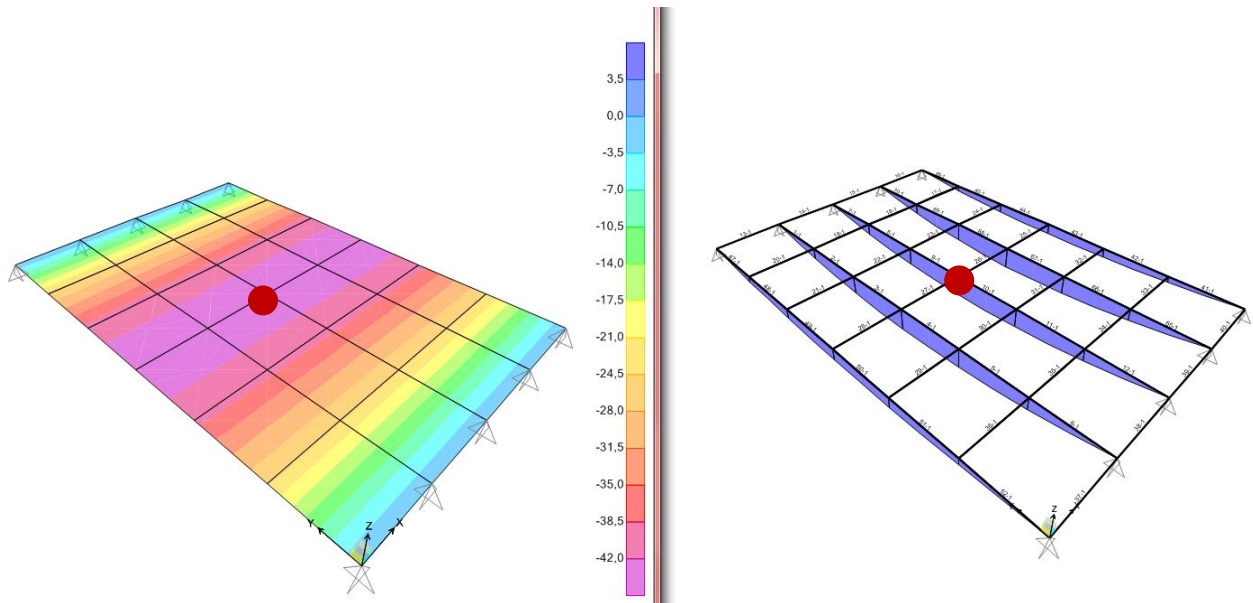


Fig. 5.22 – andamento del momento flettente a confronto tra modello di continuo bidimensionale (sinistra) e modello a travi (destra)

$$M_{22} = 45 \text{ kN-m/m}$$

$$M_{3-3} = 44,6 \text{ kN m}$$

Trattandosi di un software ad elementi finiti i risultati saranno tanto più affidabili tanto più fitta sarà la discretizzazione. Infatti, ripetendo l'analisi con un modello di continuo maggiormente discretizzato possiamo notare che nel medesimo punto lo spostamento tende al valore del modello discreto:

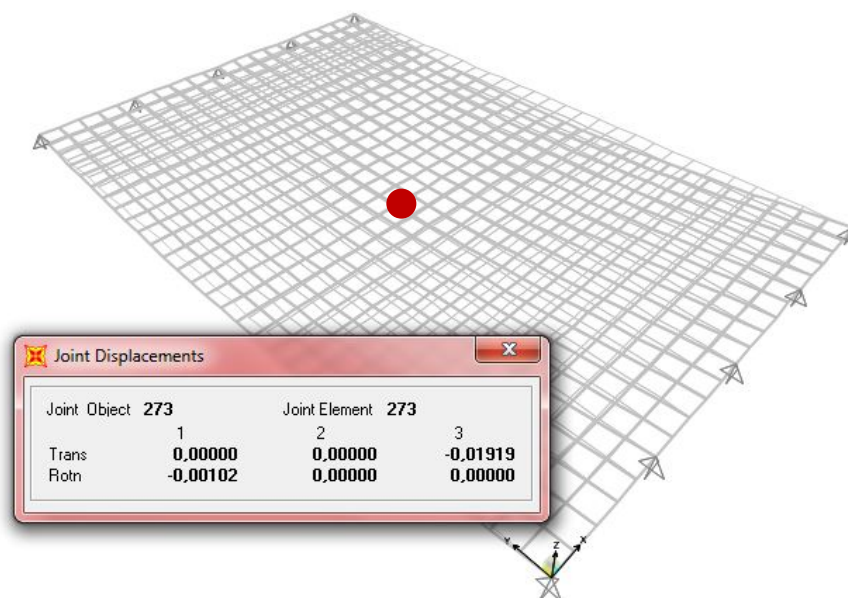


Fig. 5.23 – configurazione deformata del modello continuo con discretizzazione più fitta

Nei modelli FEM (*Finite Element Method*) vi è infatti un limite di discretizzazione al di sotto del quale il risultato è meno affidabile, e al di sopra del quale il risultato converge ad un dato valore, come riportato nel grafico in figura 5.24<sup>20</sup>:

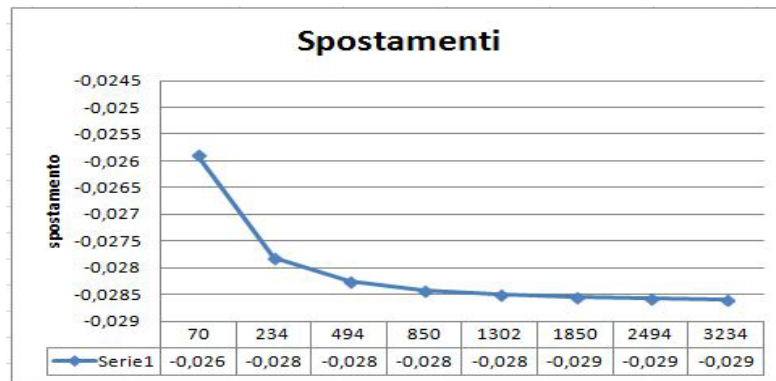


Fig. 5.24 – variazione dei valori dello spostamento calcolato sulla shell al variare della sua discretizzazione.

Questo concetto vale ovviamente per tutte le analisi, e va tenuto in conto.

Per completare il discorso sul momento flettente verifichiamo che lo stesso modello sia valido anche nella direzione ortogonale. Invertiamo quindi i vincoli e la direzione dei carichi distribuiti.

Sempre tenendo presente che la discretizzazione utilizzata è poco raffinata (sebbene renda più immediato il confronto fra i modelli), verifichiamo lo spostamento:

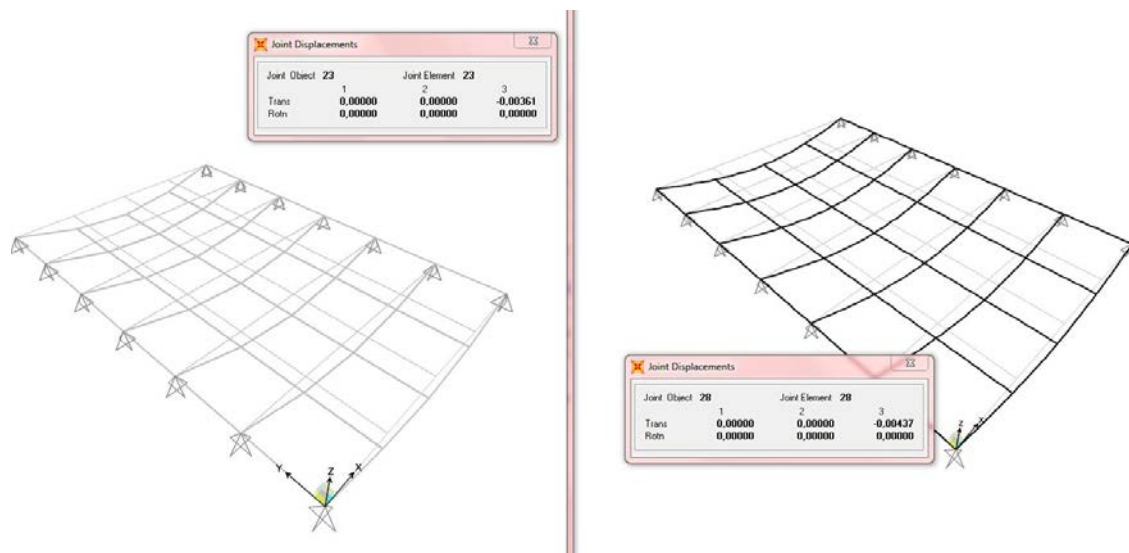


Fig. 5.25 – risultati dello spostamento a confronto tra modello di continuo bidimensionale (sinistra) e modello a travi (destra)

$$u_3 = -0,00361 \text{ m}$$

$$u_3 = -0,00437 \text{ m}$$

<sup>20</sup> Sulle ordinate si riportano i valori dello spostamento mentre in ascissa viene indicato il numero dei punti presenti sul guscio (vertici delle porzioni di area). È bene bilanciare la discretizzazione di un guscio in modo tale che i risultati siano accurati senza ricorrere ad un eccessivo infittimento; questo perché un guscio con una discretizzazione troppo fitta richiede dei tempi di analisi anche molto lunghi.

ed il valore massimo del momento flettente:

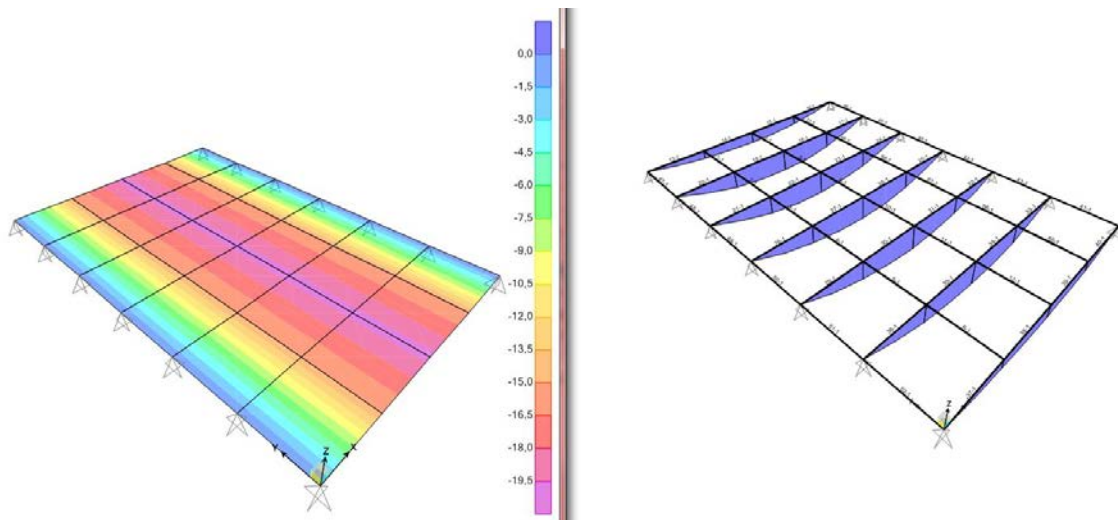


Fig. 5.26 – andamento del momento flettente a confronto tra modello di continuo bidimensionale (sinistra) e modello a travi (destra)

$$M_{11} = 20 \text{ kN-m/m}$$

$$M_{3-3} = 19,99 \text{ kN m}$$

### 3.2 Sforzo assiale

Per l'analisi dello sforzo assiale nel modello discreto definiamo materiale e sezione come è stato fatto per il caso del momento flettente. Andiamo quindi a modellare lo schema strutturale come segue:

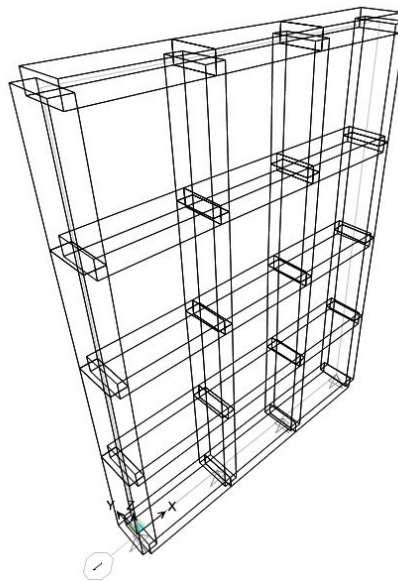


Fig. 5.27 – modello a travi utilizzato per l'analisi della sollecitazione uniforme di sforzo assiale

ovvero una griglia di 1x1 m di dimensioni 3 metri lungo x e 4 metri lungo z con travi di sezione 40x15 cm in legno massiccio C24. Ricordiamo che lo spessore del guscio equivalente è da determinarsi con la formula:

$$s = \frac{A}{i}$$

poiché l'interasse è pari ad 1m, lo spessore del guscio in questo caso varrà:

$$s = A = 0,4 \times 0,15 = 0,06 \text{ m}$$

Modelliamo quindi il guscio inserendo questo parametro come *membrane thickness* ed assegniamo i carichi in modo tale che i due sistemi si equivalgano.

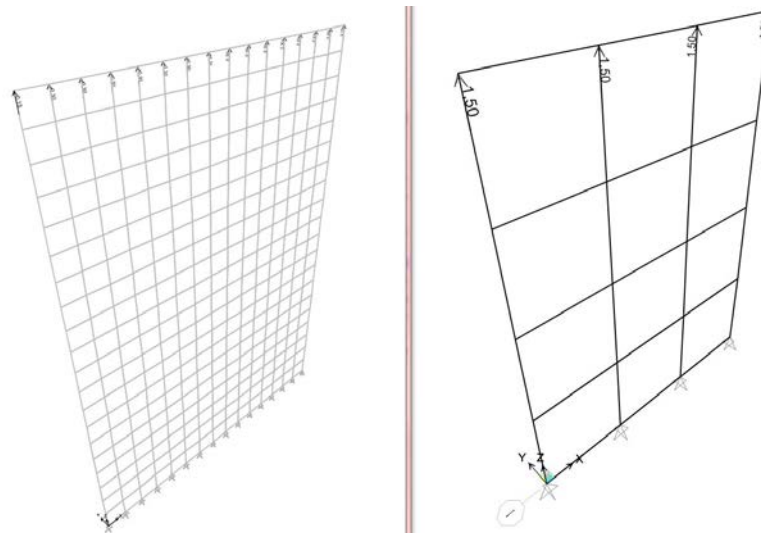


Fig. 5.28 – modello di continuo bidimensionale (a destra) e a travi (a sinistra) sotto la medesima condizione di carico

Nel modello continuo il carico è stato assegnato sotto forma di forza puntuale applicata ai nodi di superiori del guscio. La sommatoria di queste forze dovrà essere uguale alla somma delle forze applicate alle travi del modello discreto. Per garantire lo stato di deformazione uniforme, nei punti di bordo esterni del modello continuo, dove l'area di influenza è la metà di quella dei punti centrali, è stata applicata una forza di valore dimezzato rispetto a quelle applicate nei restanti nodi. Avviando l'analisi possiamo verificare sia lo spostamento:

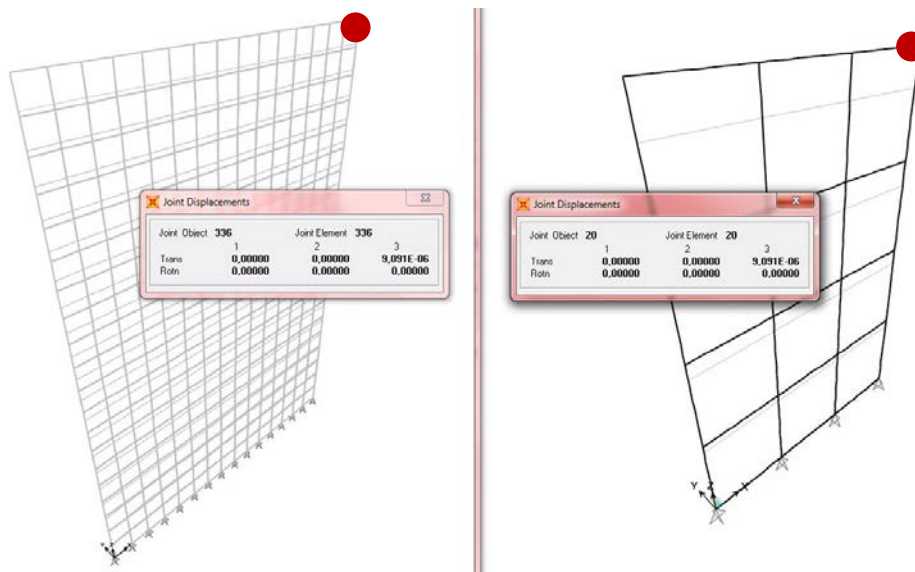


Fig. 5.29 – deformazione assiale a confronto tra modello di continuo bidimensionale (sinistra) e modello a travi (destra)

$$u_3 = 9,091 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$u_3 = 9,091 \times 10^{-6} \text{ m}$$

sia il valore dello sforzo assiale:

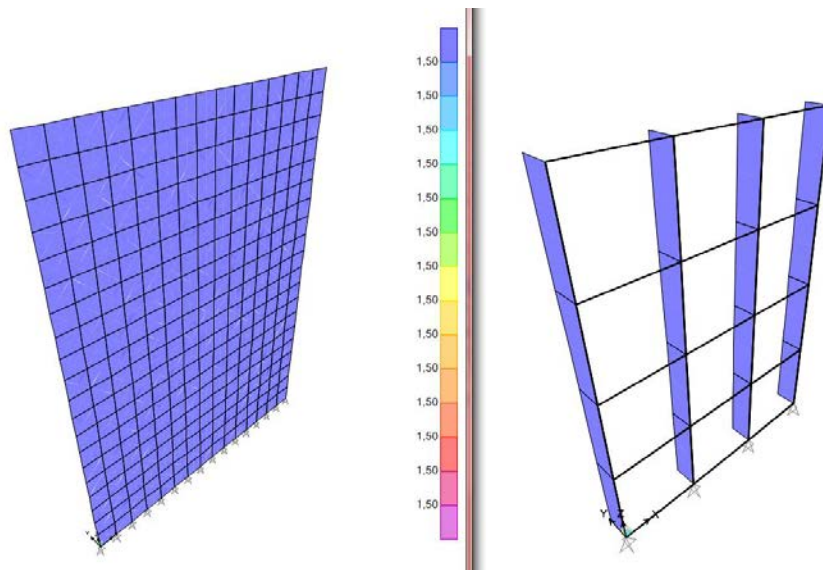


Fig. 5.30 – andamento della sollecitazione assiale a confronto tra modello di shell (sinistra) e modello discreto (destra)

$$F_{22} = 1,5 \text{ kN/m}$$

$$N = 1,5 \text{ kN}$$

Allo stesso modo verifichiamo che il guscio funzioni anche nella direzione ortogonale. Cambiamo quindi la condizione di vincolo e riassegniamo il carico in direzione x:

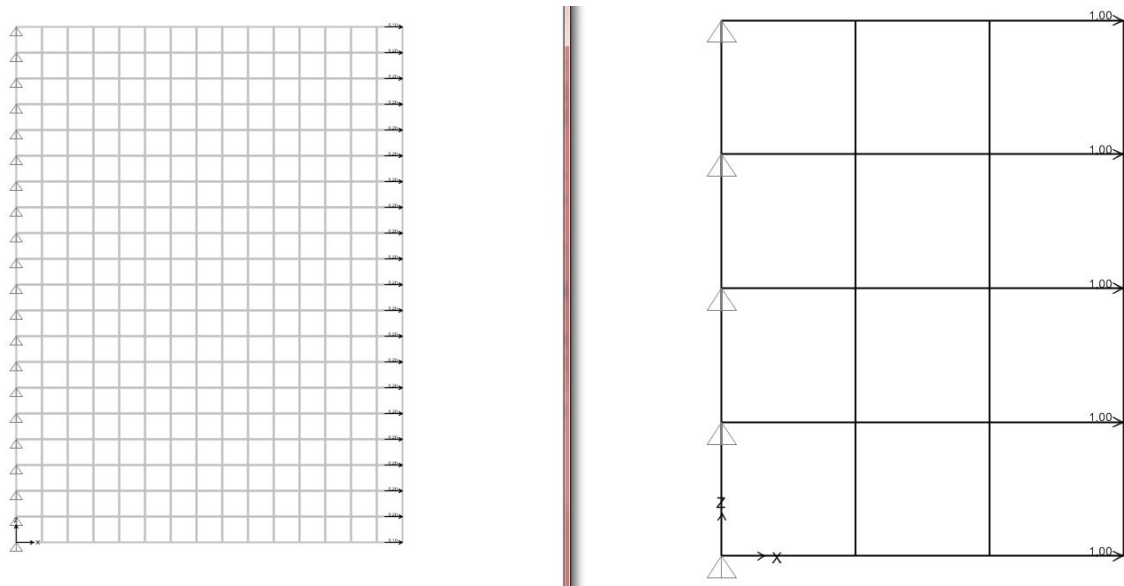


Fig. 5.31 – carico assiale applicato al modello di continuo bidimensionale (a destra) ed al modello a travi (a sinistra)

Verifichiamo l'eguaglianza in termini di spostamento:

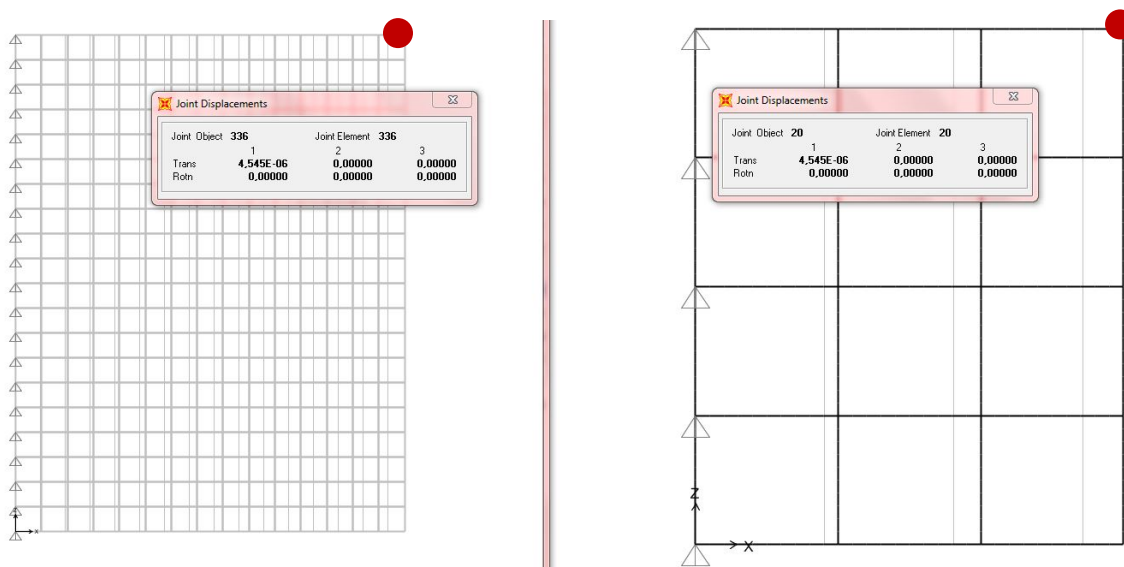


Fig. 5.32 – deformazione assiale a confronto tra modello di continuo bidimensionale (sinistra) e modello a travi (destra)

$$u_1 = 4,545 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$u_1 = 4,545 \times 10^{-6} \text{ m}$$

e di sforzo assiale:

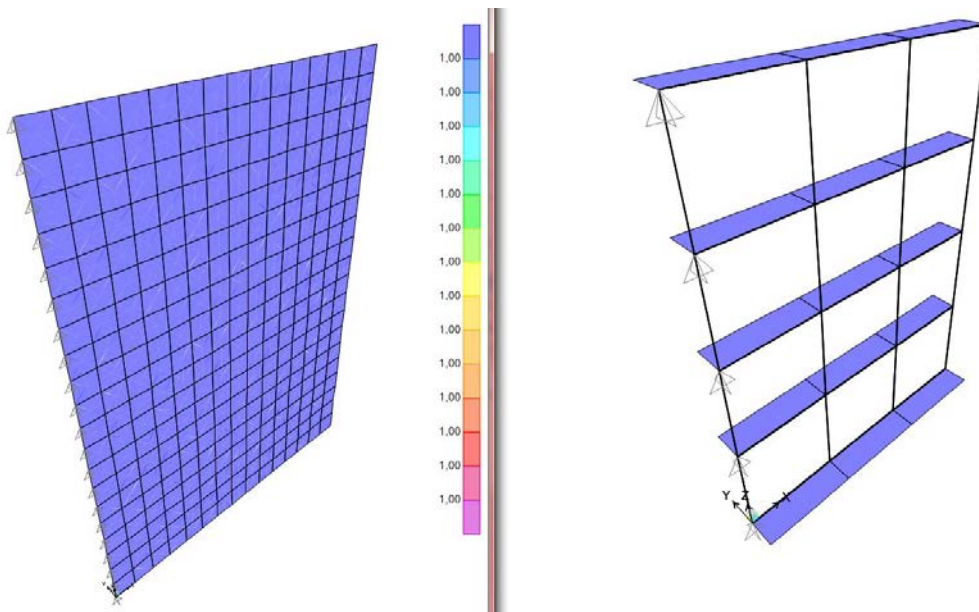


Fig. 5.33 - andamento della sollecitazione assiale a confronto tra modello di continuo bidimensionale (sinistra) e modello a travi (destra)

$$F_{11} = 1 \text{ kN/m}$$

$$N = 1 \text{ kN}$$

### 3.3 Taglio

Come abbiamo detto, per lo sforzo di taglio bisogna avere ben chiaro quale sia la soluzione tecnologica del graticcio, poiché tale lo sforzo nel piano deve venire assorbito dal controvento sotto forma di sforzo assiale. La soluzione che abbiamo scelto di modellare è quella del controventamento realizzato con una trave, anch'essa di legno massiccio. Definiamo materiale e sezione ed assegniamo il carico come premesso nel paragrafo 2.3 di questo capitolo:

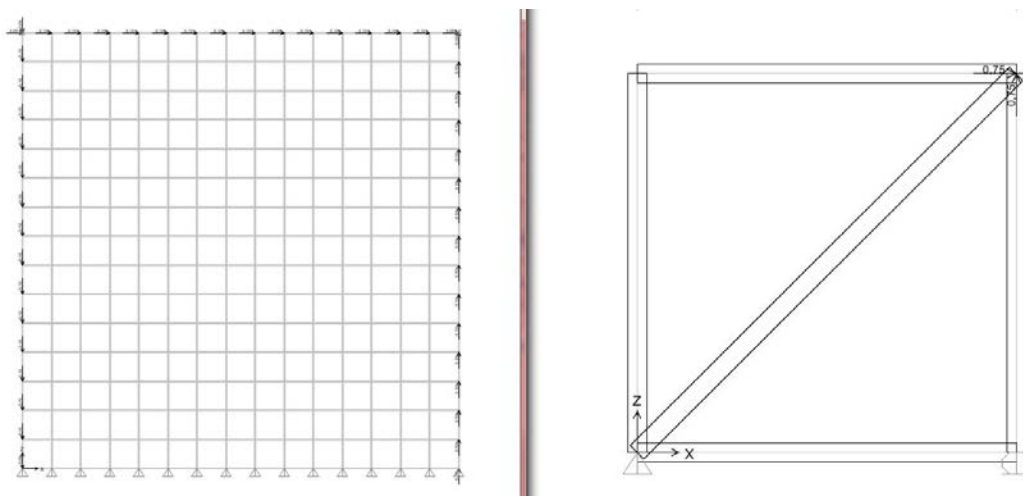


Fig. 5.34 - sollecitazione di taglio applicata al modello di continuo bidimensionale (a destra) ed al modello a travi (a sinistra)

Calcoliamo quindi il valore del modulo di taglio che deve servire a rendere equivalenti i due sistemi:

$$G = \frac{EA}{sI2\sqrt{2}}$$

ovvero:

$$G = \frac{11000000 \times 0,06}{0,06 \times 1\sqrt{2}} = 7778175 \text{ kN/m}^2$$

Come abbiamo visto, il modello di guscio su SAP2000 ammette due differenti spessori, definiti rispettivamente per il comportamento membranale e a quello flessionale. Per il calcolo del modulo di taglio utilizzo lo spessore relativo al parametro *membrane*:



Thickness	
Membrane	0,06
Bending	0,2123

5.35 – valore dello spessore del guscio utilizzato per determinare il modulo di taglio G

Definiamo il materiale da assegnare al guscio equivalente. Nei casi precedenti abbiamo creato un materiale fittizio isotropo che aveva come caratteristiche peso e massa del legno C24, il modulo di elasticità (E), pari al modulo elastico della direzione parallela alla fibratura, ed il coefficiente di Poisson pari a zero.

Senza ulteriori specifiche, il modulo di taglio verrebbe calcolato in automatico e, essendo nullo il valore del coefficiente Poisson, corrisponderebbe esattamente alla metà del modulo elastico. Volendo inserire il valore di G precedentemente calcolato lasciando invariato il modulo di Young, è necessario slegare questi due parametri.

In questo senso, una delle possibilità offerte dal software è quella di definire un materiale fittizio ortotropo (vedi figura 5.36). Per fare in modo che il materiale sia comunque isotropo sarà sufficiente assegnare lo stesso valore di E e di G in tutte le direzioni, ovvero:



Material Name MAT	Material Type Other	Symmetry Type Orthotropic
Modulus of Elasticity E1 11000000 E2 11000000 E3 11000000	Weight and Mass Weight per Unit Volume 4,2 Mass per Unit Volume 0,428	Units KN, m, C
Poisson's Ratio U12 0 U13 0 U23 0	Advanced Material Property Data Nonlinear Material Data...    Material Damping Properties... Time Dependent Properties...    Thermal Properties...	
Coeff of Thermal Expansion A1 1,170E-05 A2 1,170E-05 A3 1,170E-05		
Shear Modulus G12 7778175 G13 7778175 G23 7778175		

Fig. 5.36 – definizione del materiale isotropo equivalente a partire dalle impostazioni avanzate per la definizione di materiali ortotropi

A questo punto possiamo avviare l'analisi.

Verifichiamo che vi sia eguaglianza sia in termini di spostamento:

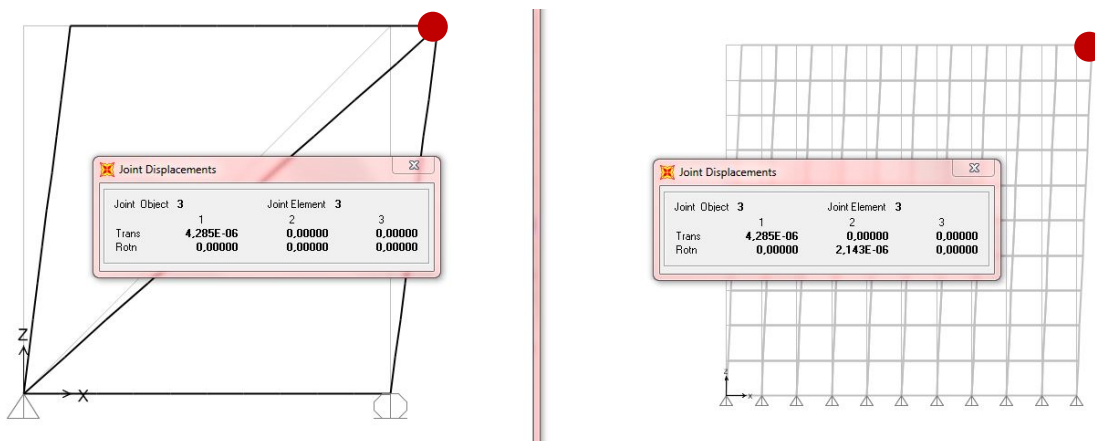


Fig. 5.37 – deformazione di taglio a confronto tra modello a travi (sinistra) e modello di continuo bidimensionale (destra)

$$u_1 = 9,642 \times 10^{-6} \text{ m}$$

$$u_1 = 9,642 \times 10^{-6} \text{ m}$$

che in termini di sollecitazione di taglio:

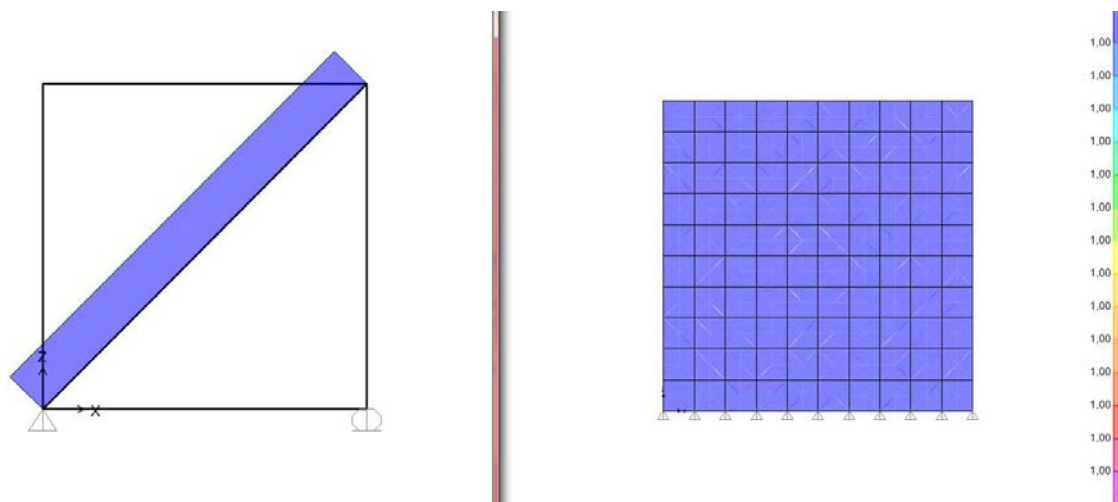


Fig. 5.38 – deformazione di taglio a confronto tra modello a travi (sinistra) e modello di continuo bidimensionale (destra)

$$N = 1,414 \text{ kN}$$

$$F_{12} = 1 \text{ kN/m}$$

L'equivalenza risulta verificata poiché il valore dello sforzo assiale nel controvento è esattamente uguale alla risultante delle forze applicate al nodo, ovvero in questo caso:

$$F\sqrt{2} = \sqrt{2} = 1,414 \text{ kN}$$

#### 4. Conclusioni

I risultati ottenuti in questo capitolo dimostrano che il procedimento di omogeneizzazione adottato è valido per tutti gli stati di sollecitazione esaminati, relativi cioè a sollecitazioni di taglio, momento e sforzo normale.

Questa condizione non dimostra che un continuo equivalente così modellato sia in grado di riprodurre senza errori il comportamento di un sistema discreto soggetto a stati di sollecitazioni combinati. Tuttavia, come precisato all'inizio di questo capitolo, la verifica degli stati uniformi di sollecitazione è il primo criterio di validazione di un processo di omogeneizzazione e deve necessariamente essere soddisfatta.

Nel capitolo 3 è stato spiegato che quello del continuo bidimensionale è il modello maggiormente semplificato (che presenta la minore scala di dettaglio), adatto ad essere utilizzato in una prima fase progettuale (ad esempio nel processo di *form-finding*). Tuttavia un elemento continuo risponde a dei modelli teorici in parte molto distanti da quelli che governano i modelli discreti e, di conseguenza, è normale aspettarsi che per modellazioni più complesse si possano presentare degli errori significativi. È noto che nei problemi di equilibrio dei gusci sottili, la soluzione è disturbata da particolari effetti che si manifestano in corrispondenza sia delle condizioni al bordo, sia delle singolarità (geometriche e di carico); questa è la causa principale del disturbo nel confronto numerico con gli altri modelli equivalenti.

Ciò premesso, la scala di osservazione più rada sarà comunque sempre in grado di indicare un andamento globale delle sollecitazioni, fatta eccezione per i bordi, e sarà quindi utilizzabile per determinare il comportamento predominante della forma (flessionale o membranale), nonché per un primo dimensionamento degli elementi strutturali in termini di resistenza.

Nel capitolo successivo tutti i risultati fin qui ottenuti, sia quelli relativi alla modellazione della trave equivalente che quelli relativi al passaggio da modello a travi a continuo bidimensionale, si confronteranno con il problema della curvatura. Determinata l'incidenza di quest'ultima sul processo di omogeneizzazione, verranno infine condotti degli esempi applicativi operando un confronto fra i modelli alle tre scale di osservazione.

## Capitolo 06

### La Modellazione Multiscala di Strutture di Interesse Progettuale: Risultati Numerici ed Applicazioni

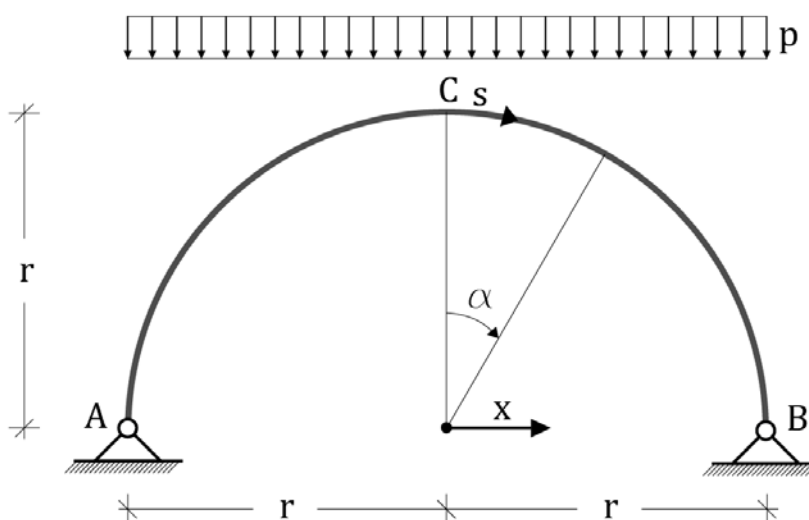
#### 1. Introduzione

Nei capitoli 4 e 5 la modellazione ed analisi multiscala è stata applicata al caso di strutture piane. Tale modellazione verrà ora applicata a casi geometricamente curvi.

Come prima cosa verrà impostato il problema analitico di un arco iperstatico doppiamente incernierato; i risultati derivanti da tale procedimento si utilizzeranno per una prima validazione del modello numerico di trave equivalente. Nel tentativo di capire quale sia l'effettiva incidenza della curvatura sui risultati, si opereranno una serie di confronti utilizzando, in prima istanza, i parametri di trave equivalente derivanti dalla soluzione del problema piano (vedi capitolo 4).

#### 2. Il problema dell'equilibrio elastico di un arco doppiamente incernierato

Di seguito si richiamano le equazioni differenziali del problema dell'equilibrio elastico di un arco di circonferenza, e si fornisce la soluzione generale, a meno dell'applicazione delle condizioni al bordo<sup>21</sup>, di un arco di circonferenza in condizioni di indeformabilità assiale e tagliante. La soluzione del problema è effettuata tramite integrazione delle linea elastica, sui cui aspetti metodologici viene fatto ampio cenno. In figura 6.1 è riportato il primo degli esempi analizzati.



<sup>21</sup> La soluzione del problema elastico per l'arco semicircolare è tratta dalle dispense del prof. Ing. Luigi Nicola Rizzi, del corso di Scienza delle Costruzioni della laurea magistrale in Restauro, Dipartimento di Architettura dell'Università degli Studi Roma Tre

Fig. 6.1 – schema di arco iperstatico doppiamente incernierato

Come prima cosa è necessario definire un sistema di riferimento che tenga conto della curvatura dell'arco, identificando i tratti di circonferenza in funzione dall'ascissa  $s$ .

Si consideri un elemento trave con asse in forma di arco di circonferenza di ampiezza angolare  $\alpha$  raggio  $r$  e centro  $c$ , e sezioni ortogonali all'asse; sia inoltre  $s$  l'ascissa curvilinea utilizzata (vedi figura 6.2). Si considerino due sistemi di riferimento, l'uno a base fissa definito dai versori  $i, j$  e  $k$ , con  $k = i \times j$ , e l'altro, variabile ed adattato alla sezione, definito da  $(b_1, b_2, k)$ . La relazione fra questi due sistemi è la seguente:

$$b_1 = \cos\alpha \, i - \sin\alpha \, j \quad (63)$$

$$b_2 = \sin\alpha \, i + \cos\alpha \, j \quad (64)$$

ovvero:

$$i = \cos\alpha \, b_1 + \sin\alpha \, b_2 \quad (65)$$

$$j = -\sin\alpha \, b_1 + \cos\alpha \, b_2 \quad (66)$$

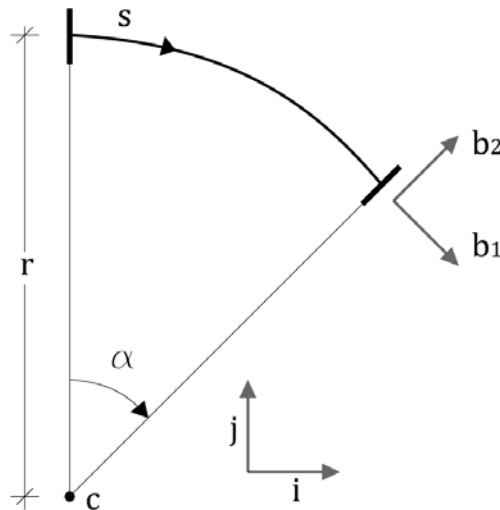


Fig. 6.2 – sistemi di riferimento globale e locale relativi ad un arco di circonferenza

La base adattata alla linea d'arco ci consente di definire le componenti delle azioni di contatto come segue:

$$t(s) = N(s)b_1 + T(s)b_2 \quad (67)$$

$$m(s) = M(s)k \quad (68)$$

fatte queste premesse, la forma scalare delle equazioni di equilibrio assume la seguente forma:

$$\begin{cases} N' + \frac{1}{r} T + f_1 = 0 \\ T' - \frac{1}{r} N + f_2 = 0 \\ M' + T + g = 0 \end{cases} \quad (69)$$

Ove  $f_1$ ,  $f_2$  e  $g$  sono le densità di forza e di coppia esterne espresse nella base adattata all'arco. In relazione agli aspetti cinematici il vettore spostamento  $\mathbf{u}(s)$  ed il vettore rotazione  $\boldsymbol{\phi}(s)$  sono definiti come segue:

$$\mathbf{u}(s) = u_1(s)\mathbf{b}_1 + u_2(s)\mathbf{b}_2 \quad (70)$$

$$\boldsymbol{\phi}(s) = \phi(s)\mathbf{k} \quad (71)$$

Le equazioni di compatibilità cinematica per un generico arco hanno la seguente forma scalare:

$$\begin{cases} \varepsilon = u'_1 + \frac{1}{r} u_2 \\ \Upsilon = u'_2 - \frac{1}{r} u_1 - \phi \\ \chi = \phi' \end{cases} \quad (72)$$

Infine, le equazioni di legame costitutivo sono scelte lineari elastiche:

$$\begin{cases} N = A\varepsilon \\ T = C\Upsilon \\ M = B\chi \end{cases} \quad (73)$$

In relazione al problema in figura 6.1, bisogna ora esprimere la densità di carico sulla base adattata. Il carico uniformemente distribuito  $p(x)$ , in forma vettoriale pari a  $-p(x)\mathbf{j}$  viene ora espresso in termini dell'ascissa  $s$ , come segue:

$$\underline{p}(s)ds = p(x)dx \rightarrow \underline{p}(s) = p(x) \frac{dx}{ds} = p(x) \cos\alpha \quad (74)$$

da cui si ricava, usando le formule trigonometriche di duplicazione:

$$-\underline{p}\mathbf{j} = p \cos\alpha (-\sin\alpha \mathbf{b}_1 + \cos\alpha \mathbf{b}_2) = \frac{p}{2} \sin \frac{2s}{r} \mathbf{b}_1 - \frac{p}{2} (1 + \cos \frac{2s}{r}) \mathbf{b}_2 \quad (75)$$

ed infine:

$$f_1 = \frac{p}{2} \sin \frac{2s}{r} \quad (76)$$

$$f_2 = -\frac{p}{2} (1 + \cos \frac{2s}{r}) \quad (77)$$

Dalle equazioni generali di equilibrio (69), operando le dovute sostituzioni, si arriva a definire la seguente funzione:

$$T'' + \frac{1}{r^2} T + \frac{1}{r} f_1 + f_2 = 0 \quad (78)$$

Sostituendo la (76) e la (77) otteniamo quindi:

$$T'' + \frac{1}{r^2} T = -\frac{p}{2r} \sin \frac{2s}{r} - \frac{p}{r} \sin \frac{2s}{r} \quad (79)$$

in cui si mette in evidenza la funzione incognita  $T(s)$ . La soluzione della (79) risulta essere la somma di una soluzione particolare,  $T_p(s)$ , e della soluzione generale dell'omogenea associata,  $T_{g-hom}(s)$ , ossia:

$$T(s) = T_{g-hom}(s) + T_p(s) \quad (80)$$

con:

$$T''_{g-hom}(s) + \frac{1}{r^2} T_{g-hom}(s) = 0 \quad (81)$$

Trovando le radici del polinomio caratteristico dell'omogenea associata, ossia:

$$z'' + \frac{1}{r^2} = 0 \rightarrow z_{1,2} = \pm \frac{1}{r} i = 0 \quad (82)$$

la soluzione generale assume la seguente forma:

$$T_{g-hom}(s) = c_1 \cos \frac{s}{r} + c_2 \sin \frac{s}{r} \quad (83)$$

essendo:

$$T_p(s) = pr \sin \frac{s}{r} \cos \frac{s}{r} \quad (84)$$

una soluzione particolare, avremo infine:

$$T(s) = c_1 \cos \frac{s}{r} + c_2 \sin \frac{s}{r} + pr \sin \frac{s}{r} \cos \frac{s}{r} \quad (85)$$

Per determinare gli spostamenti in forma analitica, facciamo ora l'ipotesi di indeformabilità assiale e tagliante della trave. A partire dalle (72) otterremo quindi l'espressione della curvatura ( $\chi$ ):

$$\varepsilon = u'_1 + \frac{1}{r} u_2 = 0 \rightarrow u'_1 = -\frac{1}{r} u_2 \quad (86)$$

e

$$\gamma = u'_2 - \frac{1}{r} u_1 - \phi = 0 \rightarrow \chi = \phi' = u''_2 + \frac{1}{r^2} u_2 \quad (87)$$

Sostituendo la (87), insieme con la (85), nell'equazione di equilibrio a rotazione (69.3), utilizzando la (73.3), e ponendo  $g = 0$ , otterremo:

$$B(u_2''' + \frac{1}{r^2} u_2') = -(c_1 \cos \frac{s}{r} + c_2 \sin \frac{s}{r} + pr \sin \frac{s}{r} \cos \frac{s}{r}) \quad (88)$$

A partire da queste soluzioni si procede quindi alla determinazione di tutte le funzioni che descrivono spostamenti e sollecitazioni, operando una serie di sostituzioni ed integrazioni delle nove equazioni che descrivono il modello di arco.

Per quanto riguarda le sollecitazioni avremo le seguenti soluzioni generali:

$$T(s) = c_1 \cos \frac{s}{r} + c_2 \sin \frac{s}{r} + pr \sin \frac{s}{r} \cos \frac{s}{r} \quad (89)$$

$$N(s) = -c_1 \sin \frac{s}{r} + c_2 \cos \frac{s}{r} - pr \sin^2 \frac{s}{r} \quad (90)$$

$$M(s) = -c_1 r \sin \frac{s}{r} + c_2 r \cos \frac{s}{r} + \frac{1}{4} pr^2 \cos \frac{2s}{r} - \frac{1}{12} pr^2 + \frac{1}{r^2} B c_5 \quad (91)$$

Per quanto riguarda gli spostamenti avremo invece:

$$u_1(s) = \frac{1}{24 B r} [12 r^2 \cos \frac{s}{r} (-3 r^2 c_1 + r s c_2 + 2B c_3) + 12 r^2 \sin \frac{s}{r} (-r s c_1 - 2 r^2 c_2 + 2B c_4) - 24 B r c_6 + pr^5 \sin \frac{2s}{r} + 2 pr^4 s] \quad (92)$$

$$u_2(s) = \frac{1}{6 B} [3 r \sin \frac{s}{r} (-2 r^2 c_1 + r s c_2 + 2B c_3) + r \cos \frac{s}{r} (-3 r s c_1 + 3 r^2 c_2 - 6B c_4) - pr^4 \cos^2 \frac{s}{r} + 6B c_5] \quad (93)$$

$$\phi(s) = \frac{1}{24 B r^2} [24 r^4 c_1 \cos \frac{s}{r} + 24 r^4 c_1 \sin \frac{s}{r} + 24 B s c_5 - 24 B c_6 - 2 pr^4 s + 3 pr^5 \sin \frac{2s}{r}] \quad (94)$$

### 3. Arco semicircolare: soluzione analitica particolare del problema iperstatico

Nella soluzione generale ottenuta nel paragrafo precedente (89-94) compaiono le sei costanti di integrazione  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5$  e  $c_6$ . Per determinare le soluzioni di un problema in particolare, è quindi necessario imporre sei condizioni al bordo. Per l'esempio riportato in figura 6.1, queste valgono:

nel vincolo A, ovvero per  $s_A = -\frac{\pi r}{2}$

$$u_{1A} = 0$$

$$u_{2A} = 0$$

$$M_A = 0$$



e nel vincolo B, ovvero per  $s_B = \frac{\pi r}{2}$

$$\begin{aligned} u_{1B} &= 0 \\ u_{2B} &= 0 \\ M_B &= 0 \end{aligned}$$

Le sei equazioni così ottenute si risolvono utilizzando il manipolatore algebrico Maple18. Questi i valori delle sei costanti:

$$\begin{aligned} c_1 &= 0 \\ c_2 &= -\frac{4}{3} \frac{p r}{\pi} \\ c_3 &= 0 \\ c_4 &= \frac{1}{24} \frac{p r^3 (3\pi^2 - 32)}{B\pi} \\ c_5 &= \frac{1}{3} \frac{r^4 p}{B} \\ c_6 &= 0 \end{aligned} \tag{95}$$

Sostituendo le (95) nelle equazioni di partenza (89-94), si ottengono, ad esempio, i valori della rotazione in A ( $\phi(A)$ ) ed in B ( $\phi(B)$ ), e dello spostamento verticale del punto C ( $u(C)$ ), ovvero:

$$\begin{aligned} \phi(A) &= -\frac{1}{24} \frac{p r^3 (3\pi^2 - 32)}{B\pi} \\ \phi(B) &= \frac{1}{24} \frac{p r^3 (3\pi^2 - 32)}{B\pi} \\ u(C) &= -\frac{1}{24} \frac{p r^4 (3\pi^2 - 4\pi - 16)}{B\pi} \end{aligned} \tag{96}$$

In termini di sollecitazione, in particolare, riportiamo i seguenti valori:

- lo sforzo normale nei punti A ( $N_A$ ), B ( $N_B$ ), e C ( $N_C$ ):

$$\begin{aligned} N_A &= -p r \\ N_B &= -p r \\ N_C &= -\frac{4}{3} \frac{p r}{\pi} \end{aligned} \tag{97}$$

- lo sforzo di taglio nei punti A ( $T_A$ ) e B ( $T_B$ ):

$$T_A = \frac{4 p r}{3 \pi} \quad (97)$$

$$T_B = -\frac{4 p r}{3 \pi}$$

- il momento flettente nel punto C ( $M_C$ ):

$$M_C = \frac{1}{6} \frac{p r^2 (-8 + 3\pi)}{\pi} \quad (98)$$

#### 4. Confronto tra i risultati analitici ed i risultati del modello numerico

In questo paragrafo viene effettuato un confronto tra un modello dettagliato di un arco semicircolare e la soluzione analitica fornita nei paragrafi precedenti, all'interno della quale viene utilizzato, come coefficiente costitutivo  $B$  del legame momento/curvatura, quello determinato nel caso di strutture piane. L'arco semicircolare, mostrato in figura 6.3, nella scala di maggior dettaglio. La sezione utilizzata è la medesima del capitolo 4, composta quindi da due layer, uno superiore ed uno inferiore, e dai blocchetti di taglio connessi mediante dei vincoli interni. In particolare il vincolo interno utilizzato è quello che annulla ogni spostamento relativo dei punti collegati, supponendo che questo sia il vincolo più fedele al reale comportamento della connessione (ipotizzando che quest'ultima sia realizzata mediante avvitaamento dei layer al blocco di taglio). Per poter confrontare i risultati del modello numerico con quelli derivanti dal procedimento analitico sono state imposte le condizioni indeformabilità assiale ed a scorrimento anche nel modello numerico.

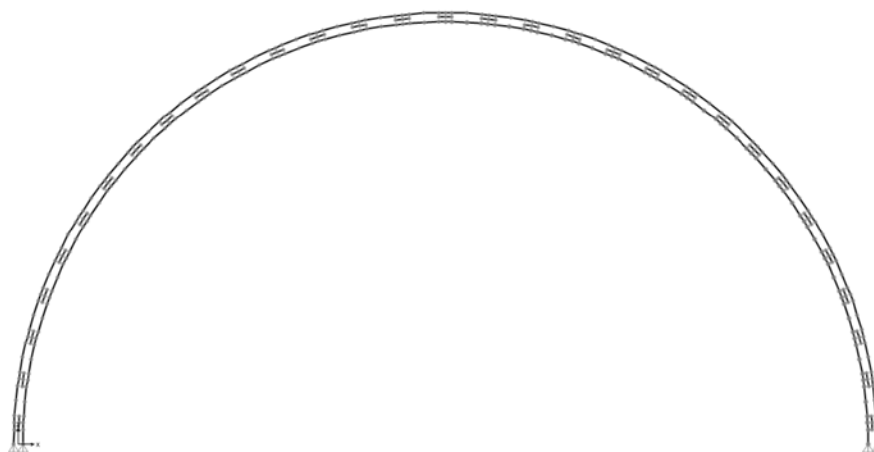


Fig. 6.3 – modello numerico dell'arco dettagliato doppiamente incernierato

L'intento di questo confronto è molteplice: da una parte si vuole mostrare come un sistema così dettagliato possa essere modellato con un continuo monodimensionale, dall'altra si intende capire se la presenza della curvatura imponga necessariamente un metodo di omogeneizzazione più complesso di quello presentato per le strutture piane. In sintesi, si

determinerà il valore del parametro  $B$  utilizzando l'inerzia equivalente relativa al vincolo interno sopra specificato, in accordo con quanto calcolato nel paragrafo 7.3 del capitolo 4. Avendo imposto l'indeforabilità assiale ed a scorrimento infatti, nel calcolo della rigidità l'unico parametro geometrico che entra in gioco è proprio l'inerzia, tramite cui si determina il valore della rigidità flessionale.

Utilizzando come modulo elastico ( $E$ ) il valore di  $E = 11000000$  [kN/m<sup>2</sup>], relativo al legno massiccio di classe C24, il valore di  $B$ , uguale al prodotto tra il momento d'inerzia ed il modulo elastico, risulta:

$$B = I_x E = 2,115 \times 10^{-6} \times 11000000 = 26,7336 \text{ [kN m}^2\text{]}$$

È stato poi assegnato un carico distribuito uniforme ( $p$ ) pari a 5 kN/m, e la luce coperta, ovvero la distanza tra i punti A e B, è di 20 m, per cui il raggio  $r$  misura 10 m.

A questo punto è stata creata una tabella di confronto tra i risultati analitici e quelli numerici, nella quale vengono riassunte anche le caratteristiche geometriche dello schema statico, nonché il valore del carico ( $p$ ) applicato. Si veda quindi la tabella sottostante (figura 6.4) nella quale vengono indicati con "spostamenti/sollecitazioni Maple" i risultati ricavati dal procedimento analitico (facendo riferimento al manipolatore algebrico utilizzato per i calcoli), e con "spostamenti/sollecitazioni SAP" i dati ricavati dal modello SAP2000.

Confronto Maple Sap arco dettagliato 180°					
	Luce	$\alpha$	Lungh.	$p$	$\chi$
	[m]	[rad]	[m]	[m]	[1/m]
<b>Arco 00</b>	20	3,141593	31,42	10,00	0,099987
<b>dati modello SAP</b>				<b>L/f</b>	<b>2</b>
<b>p</b>	<b>b</b>	<b>h</b>	<b>I</b>	<b>E</b>	<b>B</b>
[kN/m]	[m]	[m]	[m <sup>4</sup> ]	[kN/m <sup>2</sup> ]	[kN m <sup>2</sup> ]
0,2	0,0509	0,1929	2,12E-06	11000000	23,26734
<b>spostamenti maple</b>		<b>spostamenti SAP</b>		<b>errore %</b>	
<b>rot A</b>	-0,272712	<b>rot A</b>	-0,267795	<b>rot A</b>	1,84
<b>rot B</b>	0,272712	<b>rot B</b>	0,267795	<b>rot B</b>	1,84
<b>u<sub>2c</sub></b>	-1,189049	<b>u<sub>2c</sub></b>	-1,16739	<b>u<sub>2c</sub></b>	1,86
<b>sollecitazioni maple</b>		<b>sollecitazioni SAP</b>		<b>errore %</b>	
<b>T<sub>A</sub></b>	0,848936	<b>T<sub>A</sub></b>	0,81413	<b>T<sub>A</sub></b>	4,28
<b>T<sub>B</sub></b>	-0,848936	<b>T<sub>B</sub></b>	-0,81413	<b>T<sub>B</sub></b>	4,28
<b>M<sub>C</sub></b>	1,512128	<b>M<sub>C</sub></b>	1,5	<b>M<sub>C</sub></b>	0,81
<b>N<sub>A</sub></b>	-2,000259	<b>N<sub>A</sub></b>	-2,02	<b>N<sub>A</sub></b>	0,98
<b>N<sub>B</sub></b>	-2,000259	<b>N<sub>B</sub></b>	-2,02	<b>N<sub>B</sub></b>	0,98
<b>N<sub>C</sub></b>	-0,848936	<b>N<sub>C</sub></b>	-0,85	<b>N<sub>C</sub></b>	0,13

Fig. 6.4 – tabella di confronto tra i risultati analitici e quelli del modello numerico dettagliato dell'arco semicircolare doppiamente incernierato

Come si evidenzia in tabella, la percentuale d'errore (indicata con la dicitura "errore %") nelle grandezze valutate si mantiene mediamente intorno all'1/2%, rimanendo comunque inferiore al 5% nei casi di maggiore errore. Questi risultati fanno presumere che, ai fini di un primo dimensionamento, i parametri di omogeneizzazione derivanti dal caso piano possano essere utilizzati anche per strutture curve. Come ulteriore comprova di quanto ora ipotizzato, lo stesso procedimento di confronto verrà applicato, nel successivo paragrafo, ad archi ribassati.

## 5. Il problema elastico degli archi ribassati

In questo paragrafo verranno riportate le soluzioni analitiche del problema elastico relativo a due archi ribassati indeformabili assialmente ed a taglio; sui medesimi esempi verrà condotta un'analisi numerica i cui risultati saranno confrontati con quelli forniti dal modello analitico, sempre utilizzando lo stesso valore dell'inerzia equivalente (come calcolata nel paragrafo 7.3 del capitolo 4). Gli archi analizzati presentano le seguenti caratteristiche geometriche:

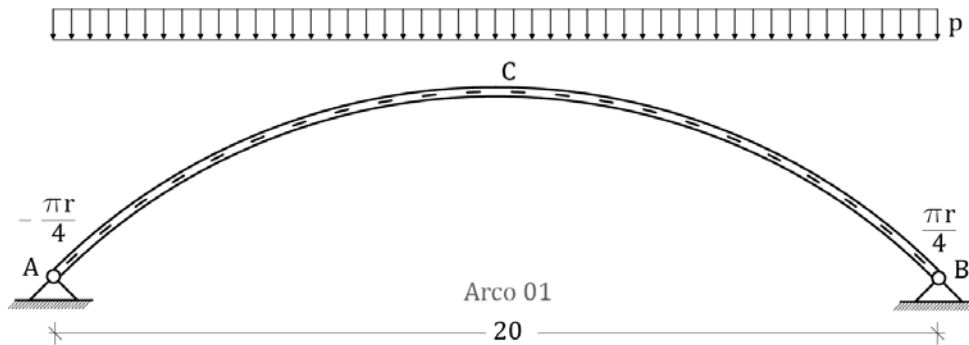


Fig. 6.5 - arco ribassato avente angolo al centro di  $90^\circ$

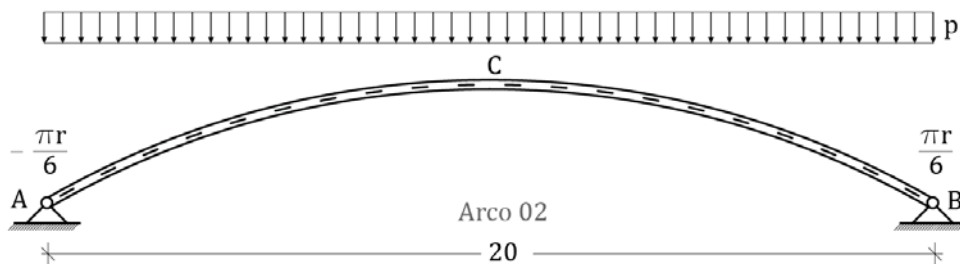


Fig. 6.6 - arco ribassato avente angolo al centro di  $60^\circ$

Si tratta, anche in questo caso, di archi di circonferenza; l'angolo al centro dell'arco 01 è di  $90^\circ$ , mentre quello dell'arco 02 di  $60^\circ$ . Al decrescere dell'angolo al centro, ed a parità della luce coperta, vi è un aumento del raggio della circonferenza cui l'arco è sotteso e, di conseguenza, una diminuzione della curvatura.

Le condizioni al bordo utilizzate per i due esempi sono le medesime del paragrafo 3; si imporrà quindi nel vincolo A:

$$u_{1A} = 0$$

$$u_{2A} = 0$$

$$M_A = 0$$

e nel vincolo B:

$$u_{1B} = 0$$

$$u_{2B} = 0$$

$$M_B = 0$$

Imponendo le condizioni al bordo si determinano, per entrambi i casi, i valori delle sei costanti di integrazione, che riportiamo di seguito (99-100):

- Arco 01 (ampiezza angolare di 90°):

$$\begin{aligned}
 c1 &= 0 \\
 c2 &= -\frac{1}{12} \frac{p r \sqrt{2}}{\pi - 3} \\
 c3 &= 0 \\
 c4 &= -\frac{1}{96} \frac{r^3 p \sqrt{2} (-4 + \pi)}{(\pi - 3) B} \\
 c5 &= \frac{1}{12} \frac{r^4 p (\pi - 2)}{(\pi - 3) B} \\
 c6 &= 0
 \end{aligned} \tag{99}$$

- Arco 02 (ampiezza angolare di 60°):

$$\begin{aligned}
 c1 &= 0 \\
 c2 &= -\frac{1}{2} \frac{r p (\pi \sqrt{3} - 5)}{10 \pi - 18 \sqrt{3}} \\
 c3 &= 0 \\
 c4 &= -\frac{1}{24} \frac{r^3 p (\pi^2 + 19 \pi \sqrt{3} - 114)}{B (10 \pi - 18 \sqrt{3})} \\
 c5 &= \frac{1}{24} \frac{p r^4 (8 \pi - 12 \sqrt{3})}{B (10 \pi - 18 \sqrt{3})} \\
 c6 &= 0
 \end{aligned} \tag{100}$$

Si possono ora determinare le funzioni di spostamenti, rotazioni e sollecitazioni e, in particolare, i loro valori nei punti A, B e C (101-108). Per semplificare la lettura delle soluzioni verranno inseriti gli effettivi valori di seno e coseno, nonché il valore numerico del  $\pi$ . In questo modo otteniamo:

- Arco 01:

$$\begin{aligned}
 \phi(A) &= \frac{0.001302359820 p r^3}{B} \\
 \phi(B) &= -\frac{0.001302359820 p r^3}{B} \\
 u(C) &= -\frac{0.0002624010601 p r^4}{B}
 \end{aligned} \tag{101}$$

$$\begin{aligned}
 N_A = N_B &= -1.088542772 p r \\
 N_C &= -0.8323251725 p r
 \end{aligned} \tag{102}$$

$$\begin{aligned} T_A &= 0.08854277616 p r \\ T_B &= -0.08854277616 p r \end{aligned} \quad (103)$$

$$M_C = 0.006217601279 p r^2 \quad (104)$$

- Arco 02:

$$\begin{aligned} \phi(A) &= \frac{0.0001801914593 r^3 p}{B} \\ \phi(B) &= -\frac{0.0001801914593 r^3 p}{B} \end{aligned} \quad (105)$$

$$u(C) = -\frac{0.00002386381891 p r^4}{B}$$

$$\begin{aligned} N_A = N_B &= -1.049671004 p r \\ N_C &= -0.9233805368 p r \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} T_A &= 0.02867760512 p r \\ T_B &= -0.02867760512 p r \end{aligned} \quad (107)$$

$$M_C = 0.001290469977 p r^2 \quad (108)$$

A questo punto è possibile operare il confronto con il modello numerico.

Nelle tabelle in figura 6.7 sono riportati i parametri geometrici, le caratteristiche del materiale ed il valore della densità di carico (p) dei quattro archi analizzati. Nelle stesse vengono inoltre messi a confronto i risultati derivanti dal procedimento analitico con quelli derivanti dalla modellazione in SAP2000, in termini di spostamenti, rotazioni e sollecitazioni.

Confronto Maple Sap arco dettagliato ribassato 90°					
	Luce	$\alpha$	Lungh.	$\rho$	$\chi$
	[m]	[rad]	[m]	[m]	[1/m]
<b>Arco 01</b>	20	1,570796	22,16	14,13	0,070771
dati modello SAP				L/f	<b>4,828585</b>
<b>p</b>	<b>b</b>	<b>h</b>	<b>l</b>	<b>E</b>	<b>B</b>
[kN/m]	[m]	[m]	[m <sup>4</sup> ]	[kN/m <sup>2</sup> ]	[kN m <sup>2</sup> ]
0,2	0,0509	0,1929	2,12E-06	11000000	23,26734
spostamenti maple		spostamenti SAP		errore %	
rot A	-0,031582	rot A	-0,031455	rot A	0,40
rot B	0,031582	rot B	0,031455	rot B	0,40
$u_{2c}$	-0,089912	$u_{2c}$	-0,09025	$u_{2c}$	0,37
sollecitazioni maple		sollecitazioni SAP		errore %	
$T_A$	0,250222	$T_A$	0,23	$T_A$	8,79
$T_B$	-0,250222	$T_B$	-0,23	$T_B$	8,79
$M_C$	0,248084	$M_C$	0,25	$M_C$	0,77
$N_A$	-3,076222	$N_A$	-3,08	$N_A$	0,12
$N_B$	-3,076222	$N_B$	-3,08	$N_B$	0,12
$N_C$	-2,352151	$N_C$	-2,35	$N_C$	0,09

Confronto Maple Sap arco dettagliato ribassato 60°					
	Luce	$\alpha$	Lungh.	r	$\chi$
	[m]	[rad]	[m]	[m]	[1/m]
<b>Arco 02</b>	20	1,047198	20,944	20,00	0,05
dati modello SAP				L/f	<b>7,465472</b>
<b>p</b>	<b>b</b>	<b>h</b>	<b>l</b>	<b>E</b>	<b>B</b>
[kN/m]	[m]	[m]	[m <sup>4</sup> ]	[kN/m <sup>2</sup> ]	[kN m <sup>2</sup> ]
1	0,0509	0,1929	2,12E-06	11000000	23,26734
spostamenti maple		spostamenti SAP		errore %	
rot A	-0,061955	rot A	-0,05926	rot A	4,55
rot B	0,061955	rot B	0,05926	rot B	4,55
$u_{2c}$	-0,164103	$u_{2c}$	-0,15893	$u_{2c}$	3,26
sollecitazioni maple		sollecitazioni SAP		errore %	
$T_A$	0,573553	$T_A$	0,525895	$T_A$	9,06
$T_B$	-0,573553	$T_B$	-0,525895	$T_B$	9,06
$M_C$	0,51619	$M_C$	0,51	$M_C$	1,21
$N_A$	-20,99347	$N_A$	-21,01	$N_A$	0,08
$N_B$	-20,99347	$N_B$	-21,01	$N_B$	0,08
$N_C$	-18,46765	$N_C$	-18,471	$N_C$	0,02

Fig. 6.7 – tabelle di confronto tra i risultati analitici e quelli numerici dell'arco 01 (a sinistra) e dell'arco 02 (a destra). I risultati del procedimento analitico sono stati calcolati utilizzando come inerzia il valore dell'inerzia equivalente relativa alla sezione utilizzata

Come è possibile osservare tutti i valori ottenuti presentano un errore percentuale piccolissimo per spostamenti, rotazioni e sollecitazioni di momento e sforzo assiale, mentre si avvicinano al 10% per la sollecitazione tagliante. Sebbene il calcolo della percentuale d'errore sia un utile strumento di lettura dei risultati, in questo caso, in cui la sollecitazione tagliante è tendente a zero, non consideriamo questo errore come invalidante né della modellazione al continuo né del procedimento di omogeneizzazione. Si può dunque affermare che il procedimento di omogeneizzazione restituisce risultati affidabili, ed è quindi lecito considerare affidabile anche il modello numerico di arco dettagliato.

È ora importante capire se questa affidabilità di risultati risulta invariata anche nel caso in cui la modellazione si avvicini maggiormente alle reali condizioni di progetto, svincolandosi quindi dagli assunti teorici fin qui adottati per facilitare la soluzione del problema analitico.

## 6. Verifiche conclusive sul modello di arco continuo equivalente

Nei paragrafi precedenti è stato studiato il problema elastico di archi indeformabili assialmente e tangenzialmente e sotto la condizione di vincolo di doppia cerniera.

Tuttavia, come accennato nel capitolo 2, in corrispondenza dei bordi di una gridshell si posizionano delle strutture di irrigidimento (travi di bordo) che impongono, ad ogni singola trave della griglia, condizioni al bordo ben più rigide di una cerniera. Per questo motivo, in questo paragrafo si considereranno anche archi doppiamente incastrati. Il confronto sarà effettuato tra due modelli numerici della stessa geometria, l'uno dettagliato e l'altro continuo. Per entrambi sarà rilasciata l'ipotesi di indeformabilità; per l'arco continuo il procedimento di omogeneizzazione riguarda stavolta anche gli aspetti assiali, e non solo quelli flessionali.

Il confronto sarà effettuato su nove archi diversi di differente curvatura, a parità di luce coperta (vedi figura 6.8).

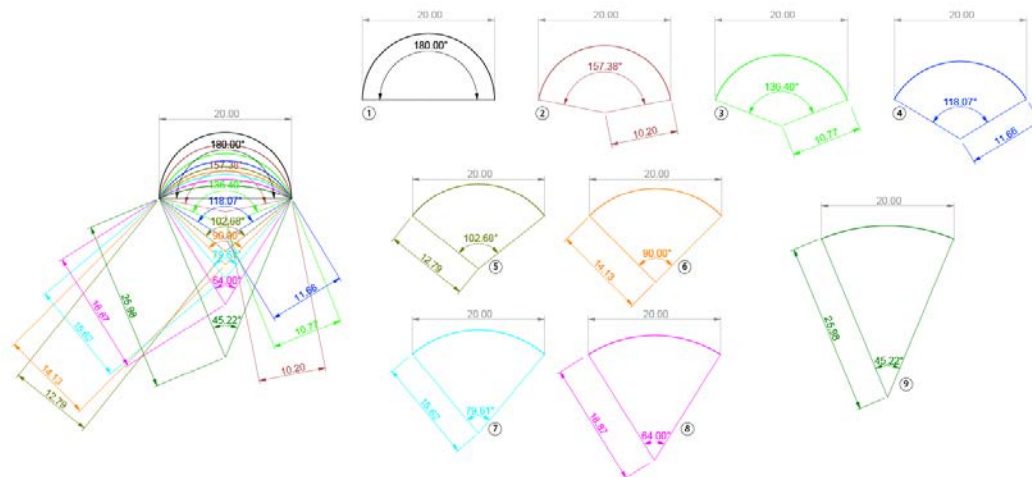


Fig. 6.8 – caratteristiche geometriche dei nove modelli di arco utilizzati per le analisi

Nel modello dettagliato sono stati utilizzati i seguenti vincoli interni (vedi capitolo 4):

Vincolo interno di connessione fra i layer:

$u_z \rightarrow$  vincolato;  $u_x, u_y, \phi_x, \phi_y, \phi_z \rightarrow$  non vincolati

vincolo interno di connessione fra layer e blocchi di taglio:

$u_x, u_y, u_z \rightarrow$  vincolati;  $\phi_x, \phi_y, \phi_z \rightarrow$  non vincolati

La prima serie di analisi ha riguardato i modelli, dettagliati ed a sezione equivalente, di arco doppiamente incernierato (figura 6.9).

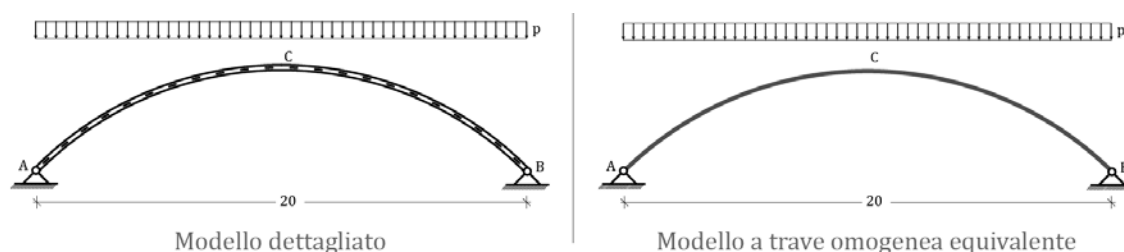


Fig. 6.9 – modello dettagliato (a sinistra) e modello a sezione equivalente (a destra) di un generico arco

Si osservi la tabella riportata in figura 6.10, nella quale si riportano, per ognuno dei nove archi, i valori del raggio di curvatura ( $\rho$ ) e quelli della curvatura ( $\chi$ ), nonché i valori, messi a confronto, di spostamento e rotazione. Lo spostamento ( $u_{discreto}$  per l'arco modellato dettagliatamente e  $u_{hom}$  per l'arco modellato con sezione omogenea equivalente) è stato valutato nel punto C; la rotazione invece, valutata nel vincolo esterno A, prende il nome di  $\phi_{hom}$  per il modello di arco a sezione equivalente e di  $\phi_{media-discreto}$  per il modello di arco dettagliato. Quest'ultima viene assunta come il valore medio tra le rotazione dei due layer nel punto A.

Confronto tra modello discreto e modella a sezione equivalente - SPOSTAMENTI								
	$\rho$	$\chi$	$\phi_{media-discreto}$	$u_{discreto}$	$\phi_{hom}$	$u_{hom}$	$E_{\phi}\%$	$E_u\%$
	[m]	[1/m]	[rad]	[m]	[rad]	[m]	[%]	[%]
Arco 1	10	0,1	-0,03	-0,12	-0,03	-0,12	1,52	1,67
Arco 2	10,2	0,098039	-0,02	-0,06	-0,02	-0,06	2,90	2,02
Arco 3	10,77	0,092851	-0,02	-0,07	-0,02	-0,07	3,65	2,69
Arco 4	11,66	0,085763	-0,03	-0,10	-0,03	-0,10	2,69	4,63
Arco 5	12,79	0,078186	-0,05	-0,14	-0,04	-0,13	3,21	2,86
Arco 6	14,13	0,070771	-0,08	-0,23	-0,08	-0,23	2,87	3,29
Arco 7	15,62	0,06402	-0,09	-0,24	-0,08	-0,24	1,79	2,26
Arco 8	18,87	0,052994	-0,05	-0,14	-0,05	-0,14	3,04	2,58
Arco 9	25,98	0,038491	-0,02	-0,07	-0,02	-0,07	8,75	6,16

Fig. 6.10 – tabella di confronto tra i risultati degli archi doppiamente incernierati (modello dettagliato e modello a trave equivalente) in termini di spostamenti

L'errore percentuale calcolato sugli spostamenti e sulle rotazioni cresce al decrescere della curvatura, ma rientra comunque nei limiti di accettabilità.

Per quanto riguarda le sollecitazioni i risultati delle analisi sono riportati nella tabella sottostante (figura 6.11):



Confronto tra modello discreto e modello a sezione equivalente - SOLLECITAZIONI									
	$T_{A\text{-discreto}}$	$M_{C\text{-discreto}}$	$N_{A\text{-discreto}}$	$T_{A\text{-hom}}$	$M_{C\text{-hom}}$	$N_{A\text{-hom}}$	$E_T\%$	$E_M\%$	$E_N\%$
	[rad]	[m]	[rad]	[rad]	[m]	[%]	[%]	[%]	[%]
Arco 1	-0,08	0,15	-0,20	-0,08	0,15	-0,20	0,00	0,67	0,00
Arco 2	-0,06	0,10	-0,22	-0,06	0,10	-0,22	0,00	0,00	0,00
Arco 3	-0,10	0,13	-0,48	-0,10	0,14	-0,48	0,00	3,85	0,00
Arco 4	-0,19	0,23	-1,29	-0,19	0,23	-1,29	0,00	0,00	0,00
Arco 5	-0,28	0,34	-2,82	-0,28	0,33	-2,82	0,09	1,76	0,00
Arco 6	-0,53	0,62	-7,70	-0,53	0,62	-7,70	0,19	0,06	0,00
Arco 7	-0,54	0,67	-17,84	-0,54	0,68	-17,84	0,15	2,24	0,00
Arco 8	-0,27	0,40	-20,63	-0,27	0,40	-20,63	0,29	1,00	0,02
Arco 9	-0,05	0,19	-27,23	-0,04	0,22	-27,25	5,88	15,79	0,07

Fig. 6.11 – tabella di confronto tra i risultati degli archi doppiamente incernierati (modello dettagliato e modello a trave equivalente) in termini di sollecitazioni

In questo caso sono stati utilizzati i valori del taglio e dello sforzo normale nel punto A, ed il valore del momento nel punto C.

Come è possibile constatare, l'errore percentuale relativa alla sollecitazione assiale ( $E_N\%$ ) è praticamente sempre nullo, mentre per momento ( $E_M\%$ ) e taglio ( $E_T\%$ ) si riscontra un errore significativo nell'arco 9, ovvero il più ribassato. Anche in questo caso però, gli errori sono relativi a sollecitazioni che sono molto vicine allo zero, soprattutto se paragonate allo sforzo normale che, al contrario, nell'arco 9 assume un valore molto alto.

Si può concludere, quindi, che il modello di trave a sezione equivalente riproduce con buona approssimazione il comportamento del modello dettagliato.

Passiamo ora al caso dell'arco doppiamente incastrato. I modelli di cui riportiamo i risultati presentano le stesse caratteristiche di quelli appena analizzati, sia in termini geometrici che di condizioni di vincolo interno relative alle connessioni tra i due layer e tra i layer ed i blocchi di taglio. L'unica differenza risiede quindi nella natura del vincolo esterno. Si riportano, in figura 6.12, gli schemi statici relativi ad un generico arco doppiamente incastrato.

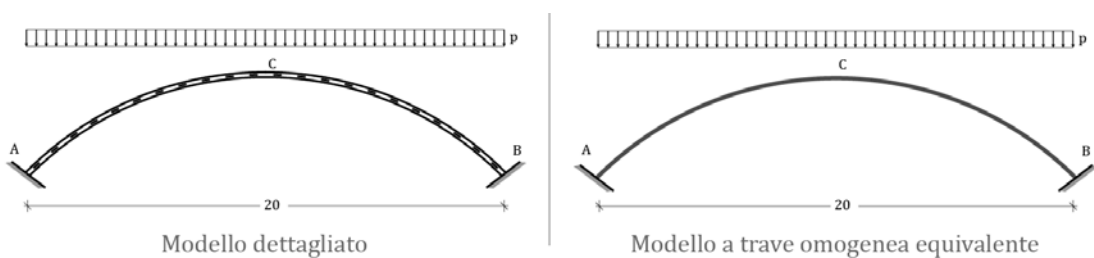


Fig. 6.12 - modello dettagliato (a sinistra) e modello a sezione equivalente (a destra) di un generico arco

Avendo utilizzato un vincolo di incastro, la rotazione nel punto A sarà nulla e, pertanto, non verrà considerata ai fini del confronto. I risultati delle analisi condotte sui nove archi, riportate nella tabella di figura 6.13, riguarderanno quindi l'abbassamento del punto C ( $u_{\text{discreto}}$  per il modello dettagliato ed  $u_{\text{hom}}$  per il modello a trave omogenea), ed il valore delle sollecitazioni di taglio, normale e momento, tutte valutate nel punto A (distinguendo sempre

con il pedice “discreto” i risultati relativi al modello dettagliato e con il pedice “hom” i risultati relativi ai modelli con trave omogenea equivalente).

	$u_{discreto}$	$u_{hom}$	$E_u\%$	$N_{A-discreto}$	$N_{A-hom}$	$E_N\%$	$T_{A-discreto}$	$T_{A-hom}$	$E_T\%$	$M_{A-discreto}$	$M_{A-hom}$	$E_M\%$
	[m]	[m]	[%]	[kN]	[kN]	[%]	[kN]	[kN]	[%]	[kN m]	[kN m]	[%]
Arco 1	-0,0595	-0,0586	1,62943	-0,202	-0,202	0,00	-0,108	-0,108	0,00	0,212	0,21	0,94
Arco 2	-0,0313	-0,0302	3,63752	-0,223	-0,223	0,00	-0,086	-0,086	0,00	0,145	0,146	0,69
Arco 3	-0,035	-0,0336	4,16905	-0,49	-0,49	0,00	-0,134	-0,134	0,00	0,2	0,19	5,00
Arco 4	-0,2106	-0,2028	3,69456	-5,34	-5,34	0,00	-1,02	-1,02	0,00	1,41	1,42	0,71
Arco 5	-0,2536	-0,2435	3,98265	-16,05	-16,06	0,06	-1,453	-1,455	0,14	1,95	1,96	0,51
Arco 6	-0,1725	-0,1655	4,02992	-16,98	-16,98	0,00	-1,043	-1,05	0,67	1,4	1,41	0,71
Arco 7	-0,1233	-0,1195	3,08191	-18,12	-18,12	0,00	-0,77	-0,77	0,00	1,05	1,05	0,00
Arco 8	-0,0749	-0,0723	3,4713	-20,87	-20,87	0,00	-0,4164	-0,4176	0,29	0,63	0,64	1,59
Arco 9	-0,0429	-0,041	4,51793	-27,4	-27,4	0,00	-0,104	-0,1063	2,21	0,28	0,26	7,14

Fig. 6.13 – tabella di confronto tra i risultati dei modelli di arco doppiamente incastrato

In questo caso gli errori percentuali relativi agli stati di sollecitazione sono praticamente nulli per lo sforzo normale mentre per taglio e momento si riscontra un errore maggiore sempre nel caso dell’arco maggiormente ribassato. Per quanto riguarda gli spostamenti invece, gli errori sono complessivamente inferiori ad una percentuale del 5%, il che rende il modello di trave omogenea affidabile anche nel caso di vincolo esterno di incastro.

## 7. Esempi di strutture bidimensionali

Di seguito vengono presentate alcune analisi multiscala condotte su strutture bidimensionali di interesse progettuale. In particolare la scelta è ricaduta su un sistema piano, uno a singola curvatura ed una a doppia curvatura spaziale. A questi si aggiunge una struttura di grande complessità che ricalca geometricamente il Savill Building. Per ognuno di questi esempi sono state applicate le procedure di omogeneizzazione descritte nel capitolo 4, relative al passaggio dal modello dettagliato a quello di travi equivalenti, e quelle descritte nel capitolo 5, relative al passaggio dal graticcio al continuo bidimensionale. L’obiettivo di questo paragrafo è di verificare che la procedura multiscala restituisca risultati attendibili, sia in termini di spostamenti che in termini di sollecitazioni, anche per strutture bidimensionali. Per i casi esaminati sono stati utilizzati vincoli esterni di incastro mentre, per quanto riguarda i vincoli interni del modello dettagliato, questi sono stati modellati come di seguito indicato:

Vincolo interno di connessione fra i layer e controventi nelle due direzioni:

$$u_x, u_y, u_z \rightarrow \text{vincolati}; \phi_x, \phi_y, \phi_z \rightarrow \text{non vincolati}$$

vincolo interno di connessione fra layer e blocchi di taglio:

$$u_x, u_y, u_z \rightarrow \text{vincolati}; \phi_x, \phi_y, \phi_z \rightarrow \text{non vincolati}$$

Per quanto riguarda il modello a travi equivalenti invece, è presente una sola tipologia di vincolo interna relativa ai punti di intersezione delle travi. Questi vincoli sono stati modellati nel seguente modo:

Vincolo interno di connessione fra le travi a sezione omogenea equivalente:

$$u_x, u_y, u_z \rightarrow \text{vincolati}; \phi_x, \phi_y, \phi_z \rightarrow \text{non vincolati}$$

## 7.1 Esempio piano

Il primo esempio applicativo riguarda il caso di una struttura piana incastrata ai bordi. La dimensione minore misura 15 m mentre la maggiore misura 20 m; la struttura si compone di una ripetizione spaziale di un modulo base di 1m x 1m (figura 6.14):

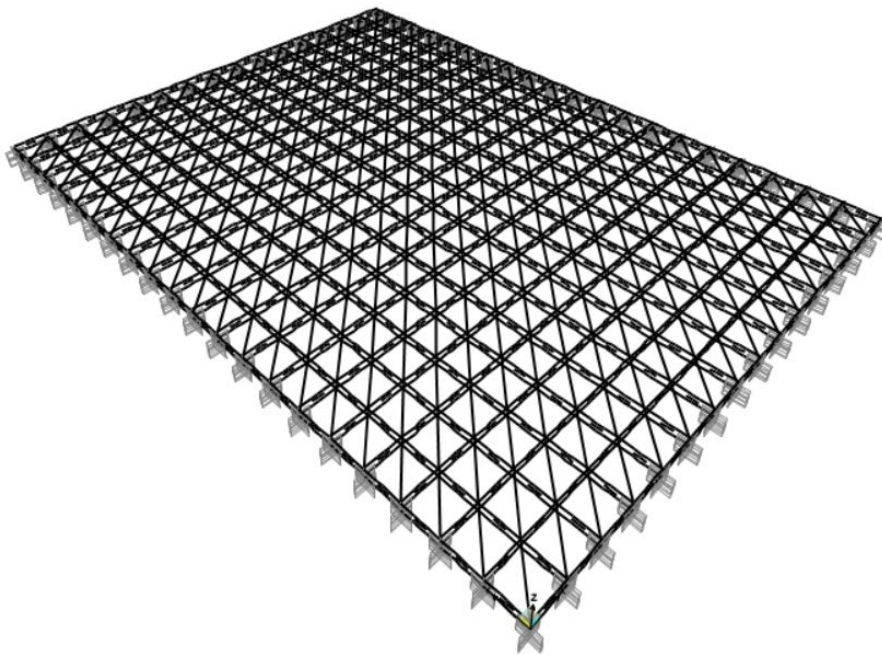


Fig. 6.14 - vista tridimensionale della struttura piana

Per condurre l'analisi è stato applicato un carico uniformemente distribuito su entrambi i layer, superiori ed inferiori, nelle due direzioni. Per la medesima struttura è stato generato il modello a travi equivalenti, soggetto ad una condizione di carico equivalente, ossia caratterizzata dalla medesima risultante e stesso momento risultante ed uniformemente distribuito su tutte le travi.

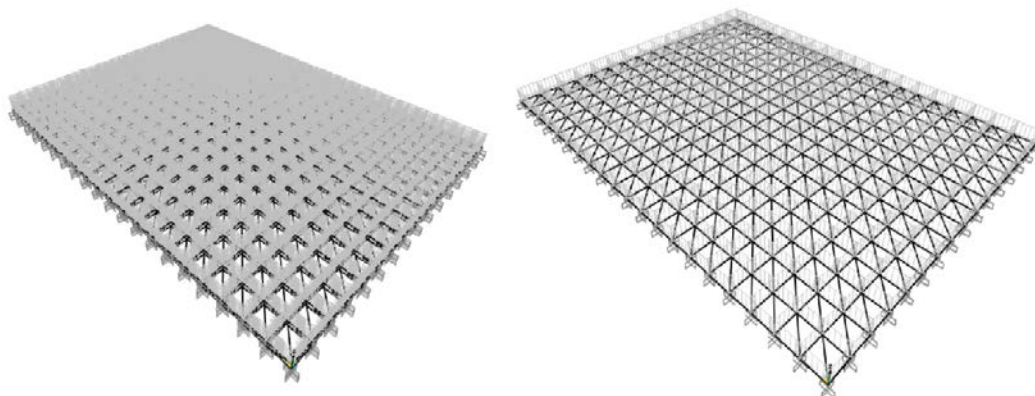


Fig. 6.15 – carico applicato al modello dettagliato (sinistra) ed al modello a travi equivalenti (destra)

Una volta impostati materiale, sezione delle travi e condizioni di vincolo interno, è stata condotta l'analisi numerica. Il confronto viene effettuato sia qualitativamente che quantitativamente. Il confronto quantitativo utilizza lo spostamento di un punto di riferimento lontano dal bordo, come quello indicato in figura 6.16:

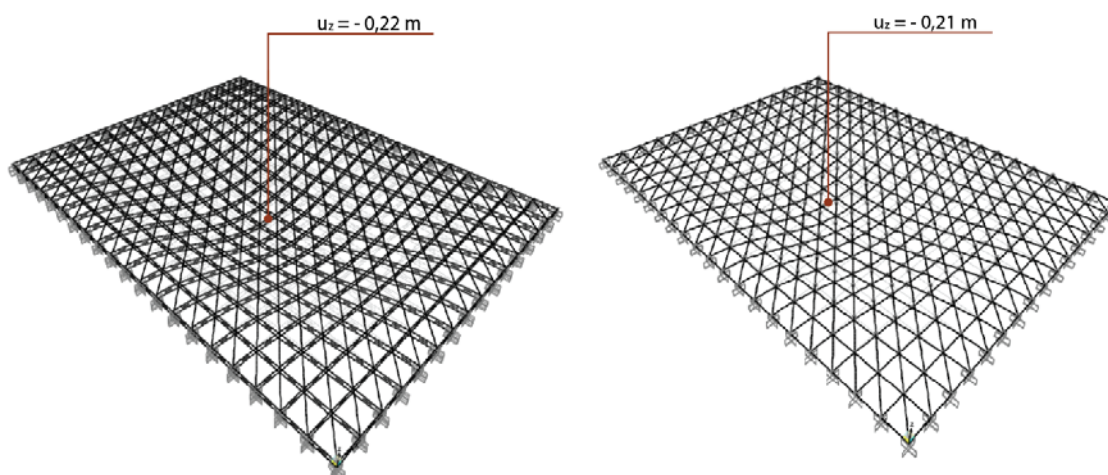


Fig. 6.16 – configurazione deformata del modello dettagliato (a sinistra) e del modello a travi equivalenti (a destra) con indicazione del valore dello spostamento verticale in un punto

Come detto in precedenza, nel modello continuo in corrispondenza dei bordi o di altre singolarità si sviluppano effetti che mal si adattano ad un confronto con gli altri modelli. Pertanto il confronto andrà effettuato leggendo i risultati in punti ragionevolmente distanti dal bordo. Come si evince dalla figura 6.16, la deformata è qualitativamente simile; inoltre i valori degli spostamenti verticali ( $u_z$ ) dei punti indicati presentano delle differenze percentuali risibili.

In termini di sollecitazioni, trattandosi di travi piane soggette ad un carico verticale uniformemente distribuito, lo sforzo assiale sarà pari a zero in ogni asta. La sollecitazione di momento flettente, invece, presenta l'andamento riportato in figura 6.17:

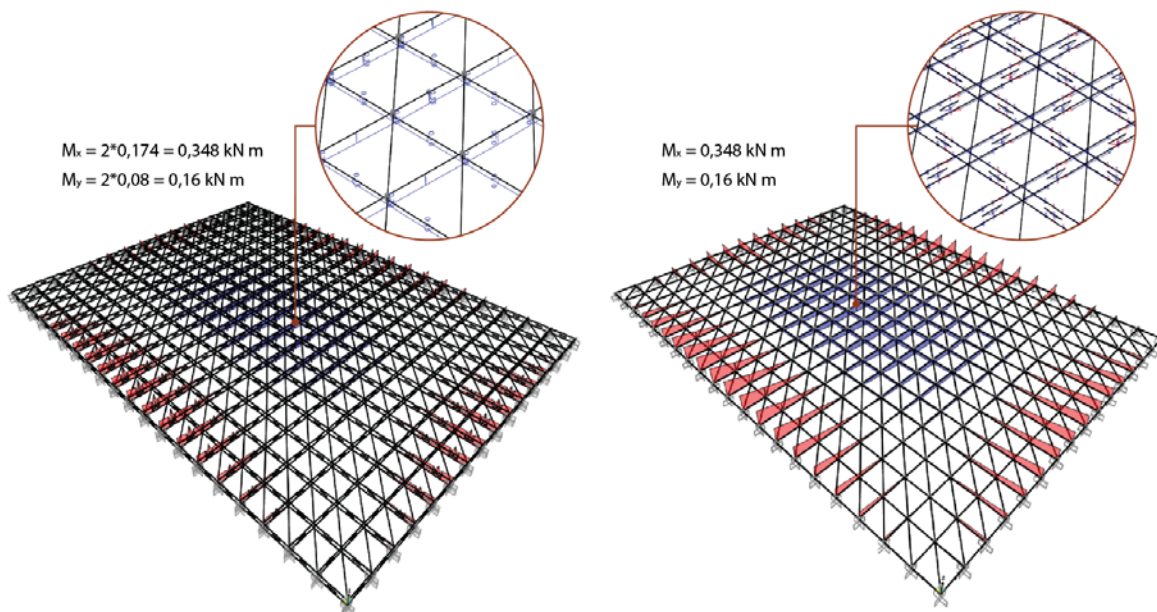


Fig. 6.17 – andamento del momento flettente nel modello dettagliato (a sinistra) e nel modello a travi equivalenti (a destra)

Anche in questo caso, sia l'andamento generale che i valori del momento, valutati nel punto indicato in figura 6.17, coincidono.

Per lo stesso esempio è stato generato anche il modello bidimensionale equivalente (in accordo con quanto detto nel capitolo 5), soggetto alle stesse condizioni di vincolo esterno e ad un carico verticale uniforme, quantitativamente equivalente a quello applicato ai casi discreti (figura 6.18).

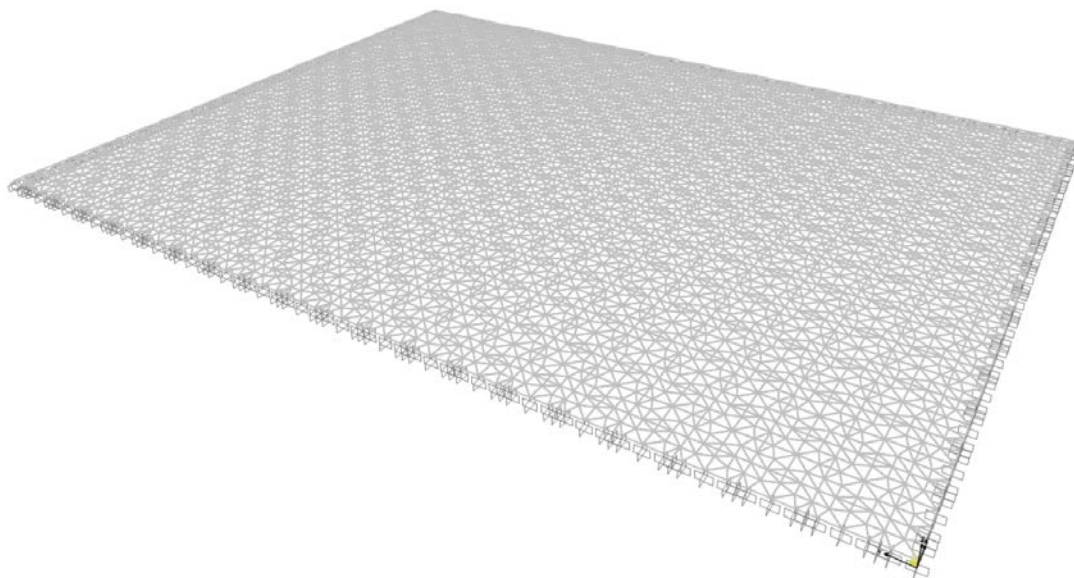


Fig. 6.18 – vista tridimensionale della superficie equivalente

Osserviamo i risultati a partire dalla configurazione deformata. Per facilitarne la lettura è stata utilizzata la visualizzazione cromatica degli spostamenti verticali (figura 6.19).

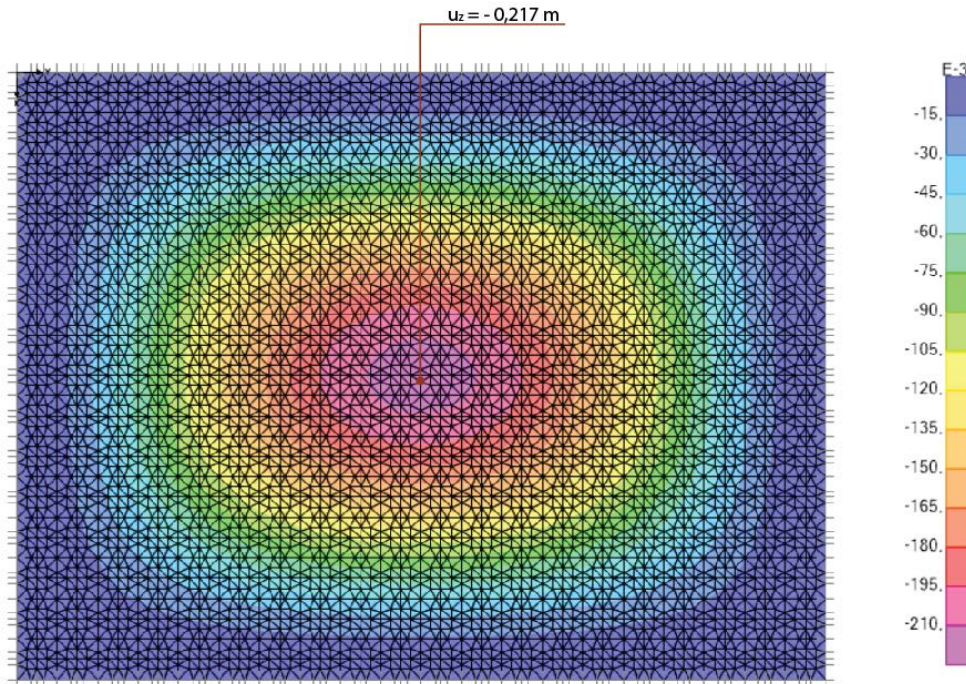


Fig. 6.19 – visualizzazione cromatica relativa agli spostamenti verticali

Posizionandoci nello stesso punto dei modelli discreti è facilmente verificabile che lo spostamento verticale restituisce il risultato atteso.

Andiamo ora a valutare la sollecitazione di momento flettente. Nel caso del continuo bidimensionale saranno visualizzati due grafici, uno relativo al momento in direzione x (che, rispetto agli assi locali degli elementi finiti, coincide in questo caso con  $M_{11}$ ) ed uno relativo al momento in direzione y (ovvero  $M_{22}$ ). L'andamento del momento flettente  $M_{11}$  è riportato in figura 6.20:

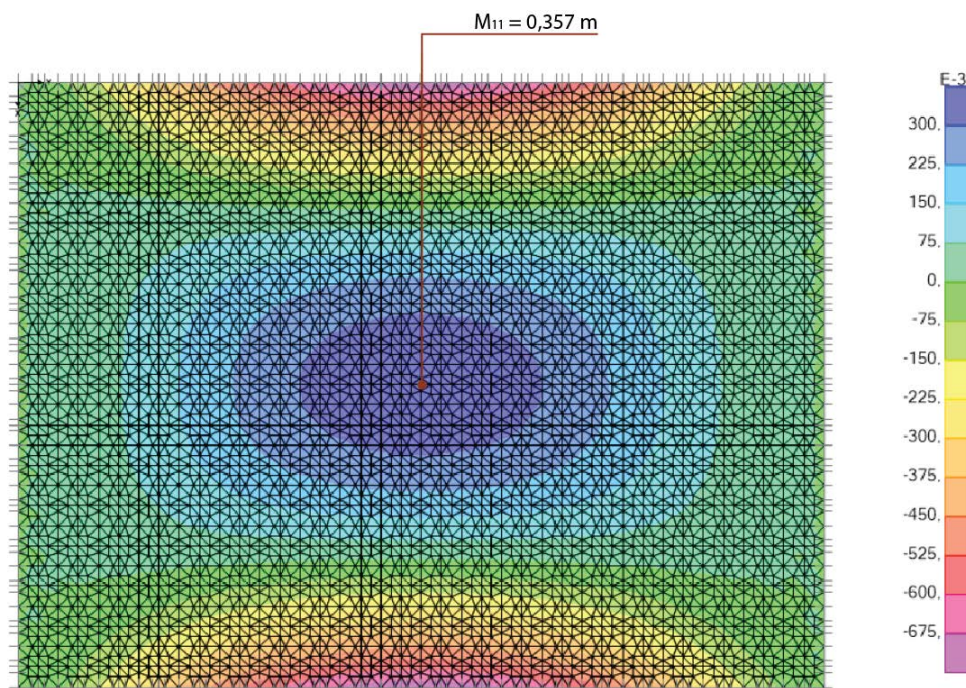


Fig. 6.20 – andamento del momento in direzione x –  $M_{11}$

mentre l'andamento del momento flettente  $M_{22}$  è riportato in figura 6.21:

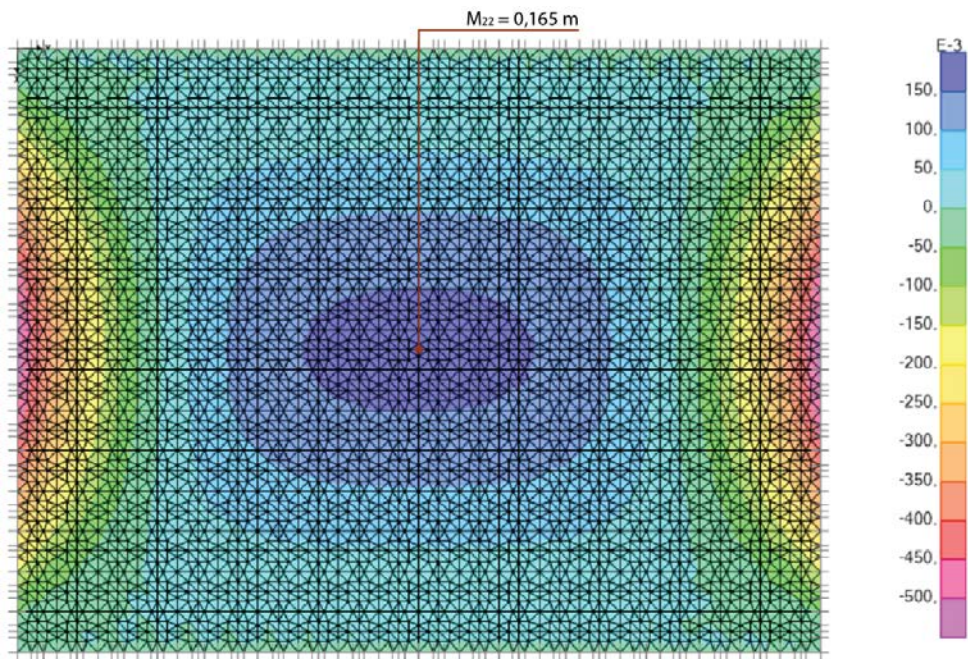


Fig. 6.21 - andamento del momento in direzione  $y$  -  $M_{22}$

Messi a confronto tutti i risultati, si può concludere che il procedimento multiscala adottato è applicabile con buona accuratezza ad una superficie piana.

## 7.2 Superficie a singola curvatura spaziale

Analogamente a quanto fatto nel paragrafo precedente, effettuiamo ora i medesimi confronti per una struttura a singola curvatura spaziale:

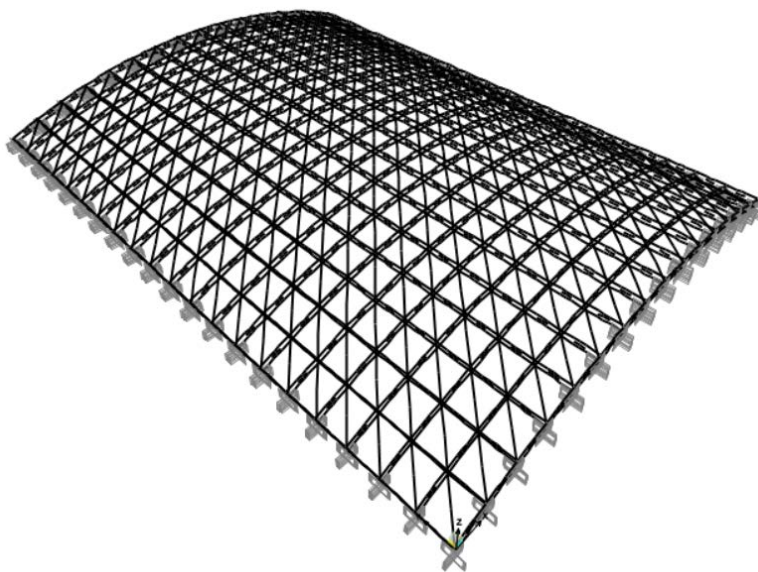


Fig. 6.22 - vista tridimensionale del modello dettagliato per la struttura a singola curvatura spaziale

Utilizziamo la condizione di carico esterno uniformemente distribuito, come fatto per il caso piano, ed andiamo a leggere i risultati delle analisi confrontando, in primo luogo, il modello dettagliato con quello a travi equivalenti in termini di spostamento e deformazione. In figura 6.23 sono riportate le configurazioni deformate dei due modelli:

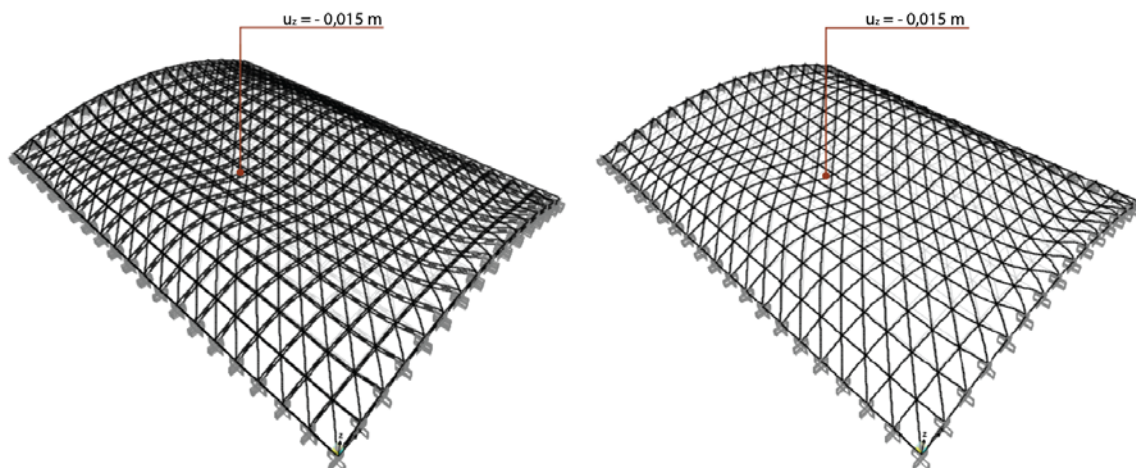


Fig. 6.23 - configurazione deformata del modello dettagliato (a sinistra) e del modello a travi equivalenti (a destra) con indicazione del valore dello spostamento verticale in un punto

Anche in questo caso la configurazione deformata del modello a travi equivalenti risulta quantitativamente e qualitativamente simile a quella del modello dettagliato.

Per quanto riguarda le sollecitazioni sono stati confrontati i risultati relativi allo sforzo assiale, trascurando quelli di momento e taglio che saranno certamente molto minori. Riferiamoci alla figura sottostante:

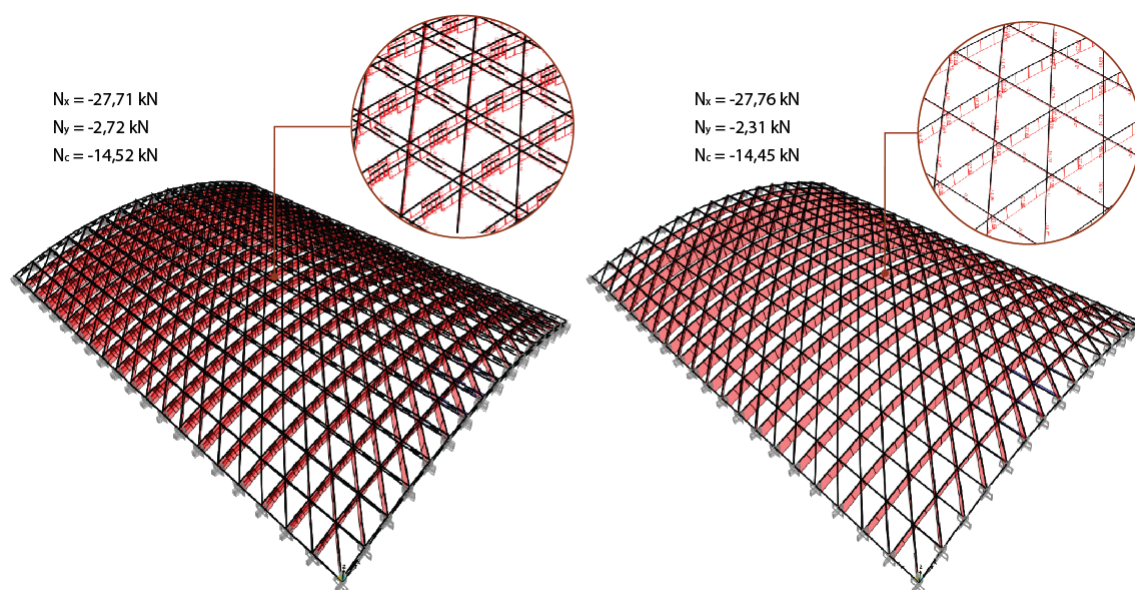


Fig. 6.24 - andamento dello sforzo assiale nel modello dettagliato (a sinistra) e nel modello a travi equivalenti (a destra)



Lo sforzo normale si sviluppa principalmente nelle aste curve, in quanto queste sono le uniche ad assumere un comportamento ad arco. Anche in questo caso i risultati coincidono. Vediamo ora cosa accade nel modello di continuo bidimensionale. Osserviamo, in figura 6.25, il grafico a colori dell'andamento dello spostamento verticale:

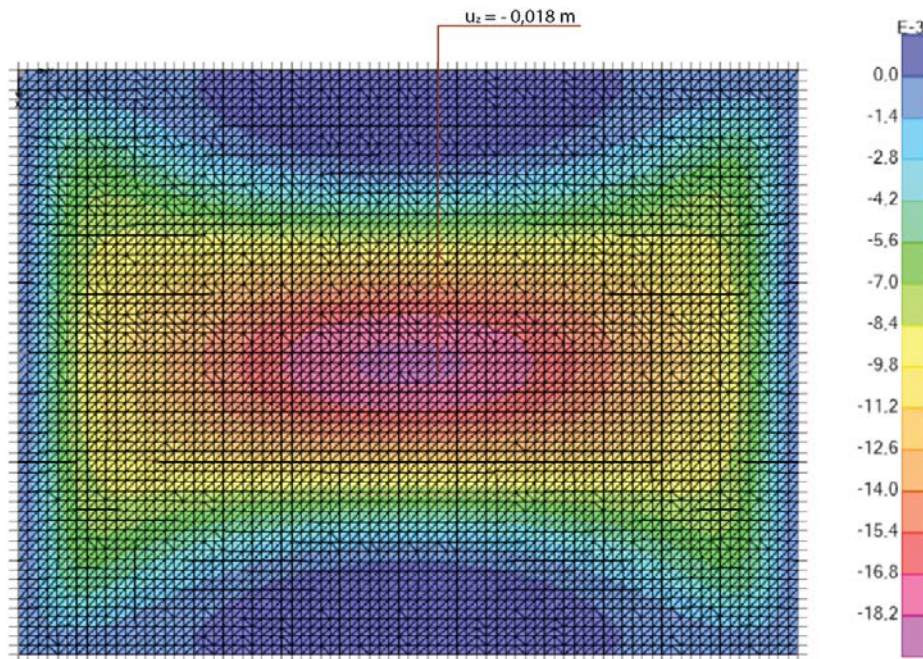


Fig. 6.25 - visualizzazione cromatica relativa agli spostamenti verticali

Il valore dello spostamento, calcolato nello stesso punto del caso discreto, presenta un errore accettabile. Analizziamo ora lo sforzo membranale (figura 6.26) valutato in direzione x, ovvero nella direzione di maggiore entità dello sforzo:

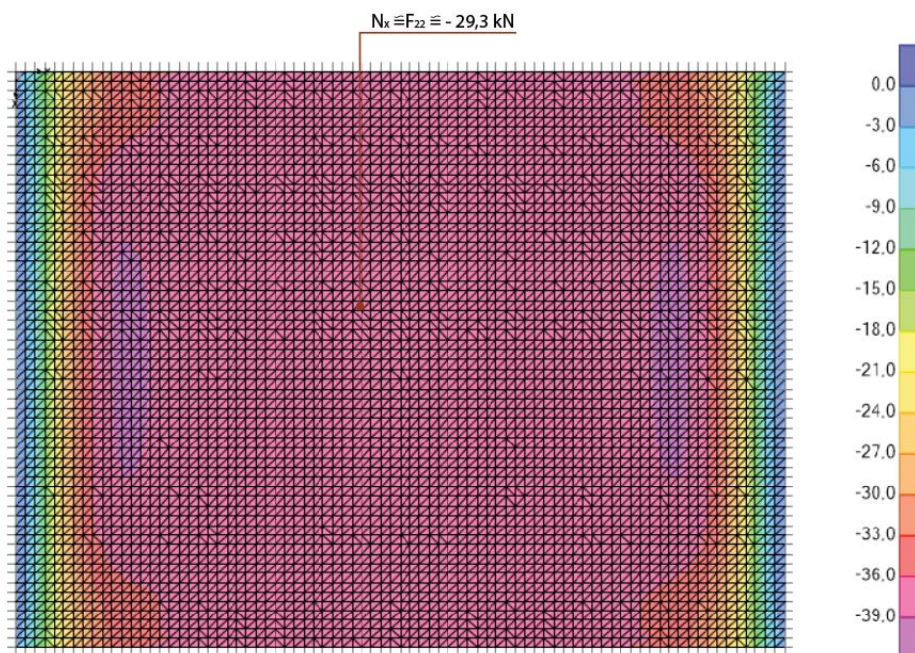


Fig. 6.26 - andamento dello sforzo membranale in direzione x -  $F_{22}$

I risultati sono vicini a quelli attesi per cui il procedimento di continuizzazione, anche in questo caso, può considerarsi attendibile.

### 7.3 Superficie a doppia curvatura spaziale

In questo terzo esempio è stata modellata una struttura a doppia curvatura spaziale di cui si riporta, in figura 6.27, la vista tridimensionale del modello dettagliato:

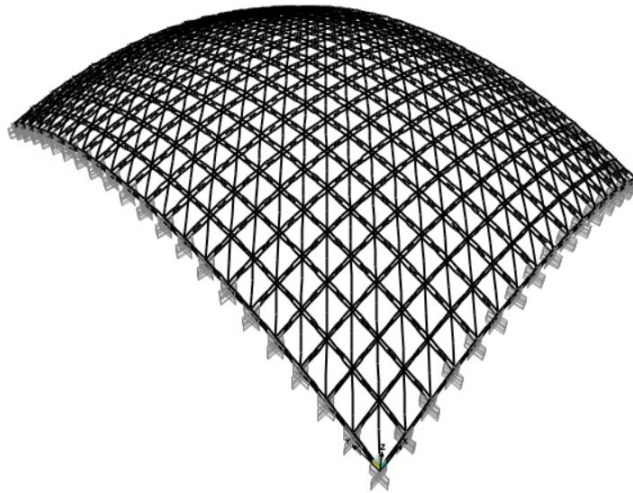


Fig. 6.27 – vista tridimensionale del modello dettagliato della struttura a doppia curvatura spaziale

Conduciamo quindi il primo confronto con il modello a travi equivalenti, sottoponendo entrambe le strutture ad un carico esterno verticale uniformemente distribuito. Nella figura sottostante sono riportate le configurazioni deformate:

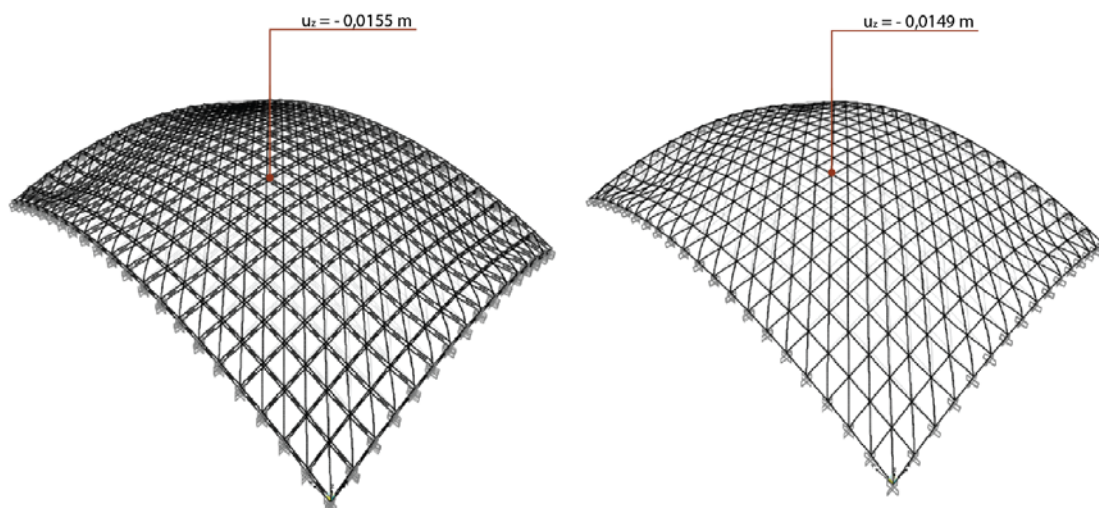


Fig. 6.28 – configurazione deformata del modello dettagliato (a sinistra) e del modello a travi equivalenti (a destra) con indicazione del valore dello spostamento verticale in un punto

In termini di spostamenti il modello a travi equivalenti approssima bene il comportamento del modello dettagliato. Andiamo quindi a verificare che questa stessa conformità si ritrovi anche in termini di sollecitazioni.

La struttura in esame è sottesa ad una superficie a doppia curvatura spaziale la cui curvatura gaussiana è quindi diversa da zero. Il suo comportamento è pertanto prevalentemente membranale, motivo per cui la sollecitazione dominante sarà quella assiale.

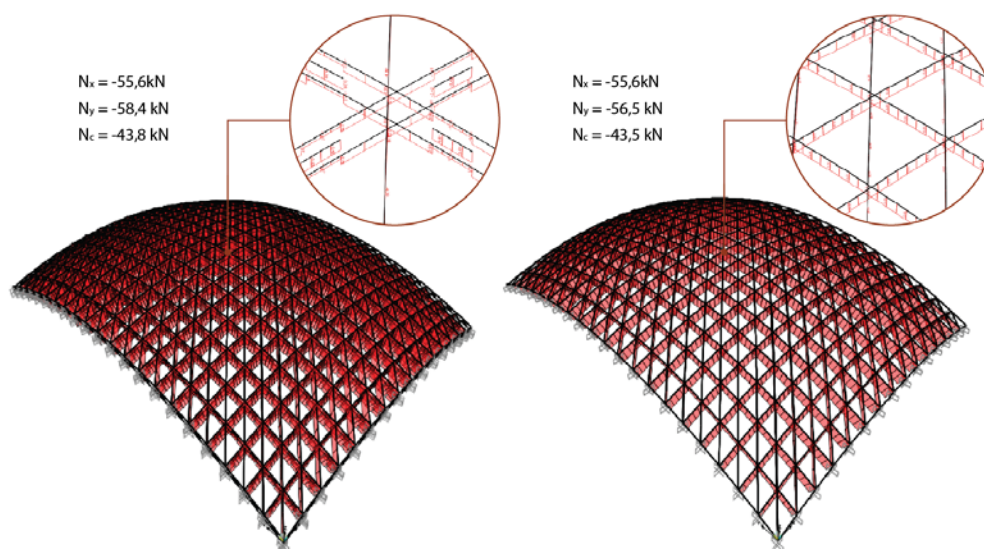


Fig. 6.29 – andamento dello sforzo assiale nel modello dettagliato (a sinistra) e nel modello a travi equivalenti (a destra)

I risultati confermano l'affidabilità del modello. Andiamo ora ad analizzare il continuo equivalente.

Per quanto concerne lo stato deformativo si riporta, in figura 6.30, il grafico a colori relativo allo spostamento verticale:

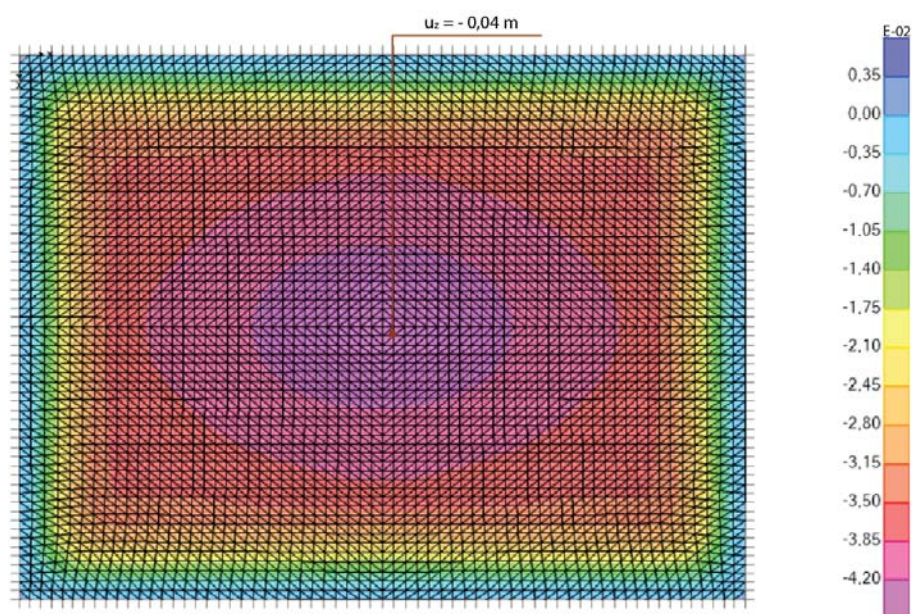


Fig. 6.30 – visualizzazione cromatica relativa agli spostamenti verticali

In termini di sollecitazioni misuriamo invece il valore dello sforzo membranale in direzione x ( $F_{22}$ ):

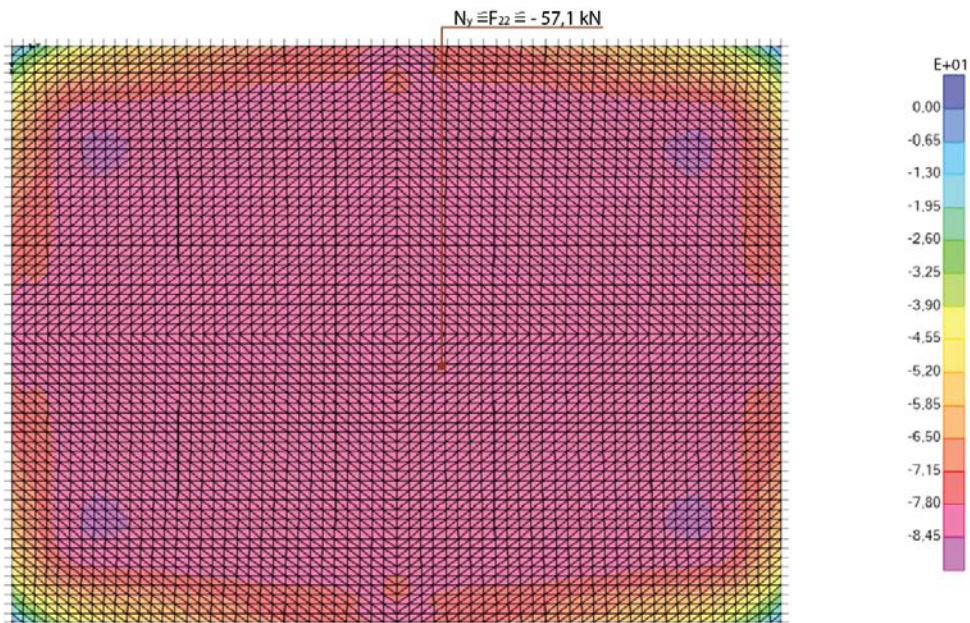


Fig. 6.31 – grafico dello sforzo membranale in direzione y –  $F_{22}$

e quello in direzione y ( $F_{11}$ ):

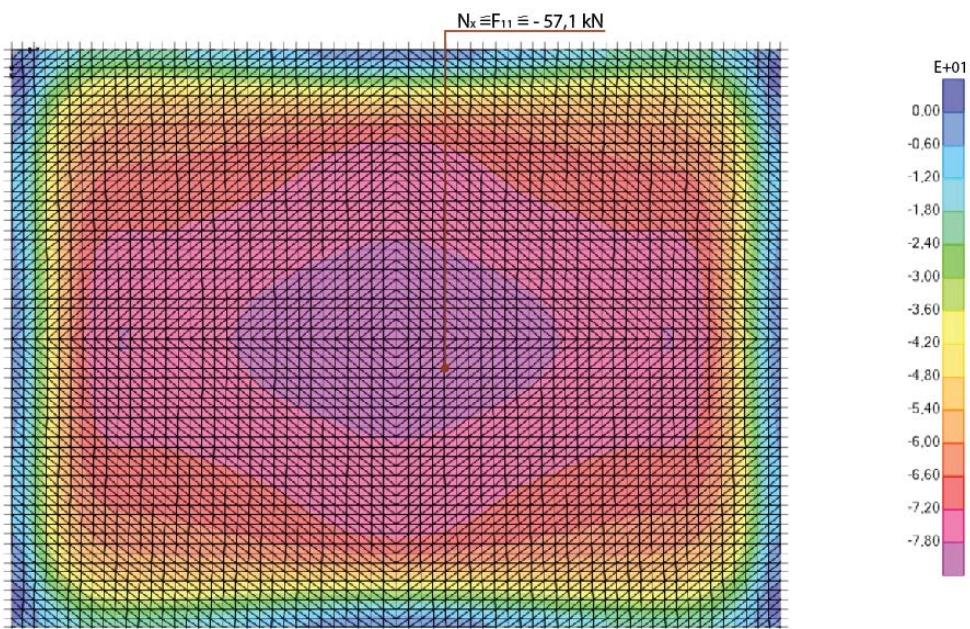


Fig. 6.32 - grafico dello sforzo membranale in direzione x –  $F_{11}$

In questo caso gli sforzi di membrana, nelle due direzioni, sono equiparabili alle sollecitazioni assiali che si sviluppano nei modelli discreti. Per quanto riguarda lo spostamento, invece, il

risultato del modello di guscio equivalente è molto distante da quello dei modelli discreti con i quali ci si confronta.

#### 7.4 Struttura dalla geometria complessa

In questo ultimo esempio è stata modellata una struttura a doppia curvatura spaziale caratterizzata da un grado di complessità geometrica più elevata rispetto al caso precedente:

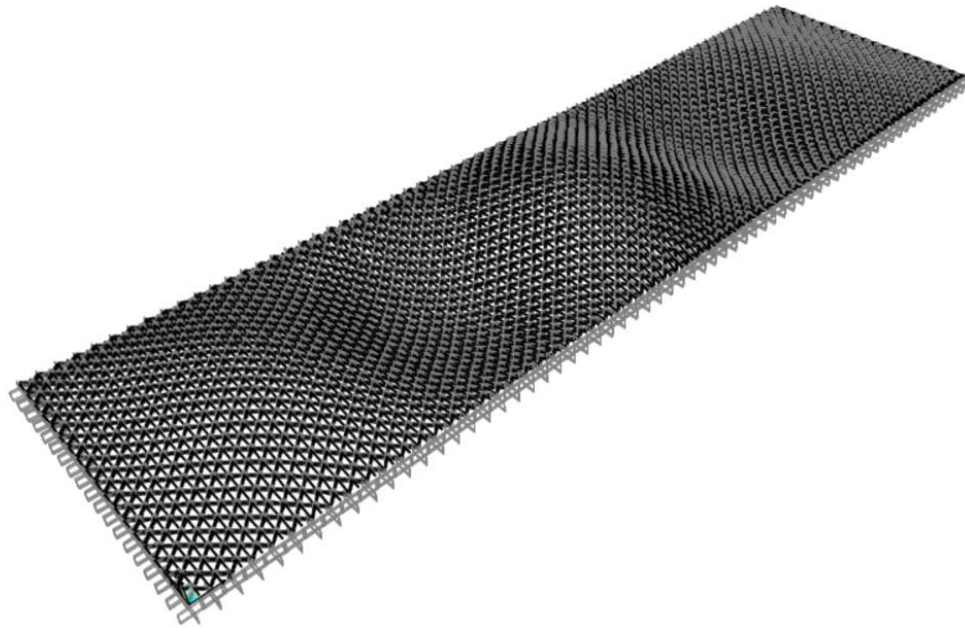


Fig. 6.33 – Vista tridimensionale del modello dettagliato della struttura

In particolare la forma è stata ispirata dalla copertura del Savill Building ed è costruita con un particolare rigore geometrico. Immaginando di sezionare la struttura in direzione longitudinale l'andamento della forma è sinusoidale, come schematicamente rappresentato in figura 6.34:

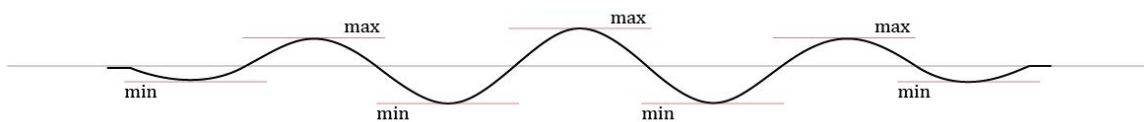


Fig. 6.34 – Andamento sinusoidale dalla forma in direzione longitudinale

In direzione ortogonale invece la forma si esplica in una successione di parabole. L'estensione della copertura è di 90 metri nel lato lungo e 25 metri nel lato corto.

Sono state quindi impostate le analisi del modello dettagliato e del modello a travi equivalenti utilizzando, per entrambe le strutture, un carico esterno verticale uniformemente distribuito. In figura 6.35 si riportano le configurazioni deformate dei due modelli.

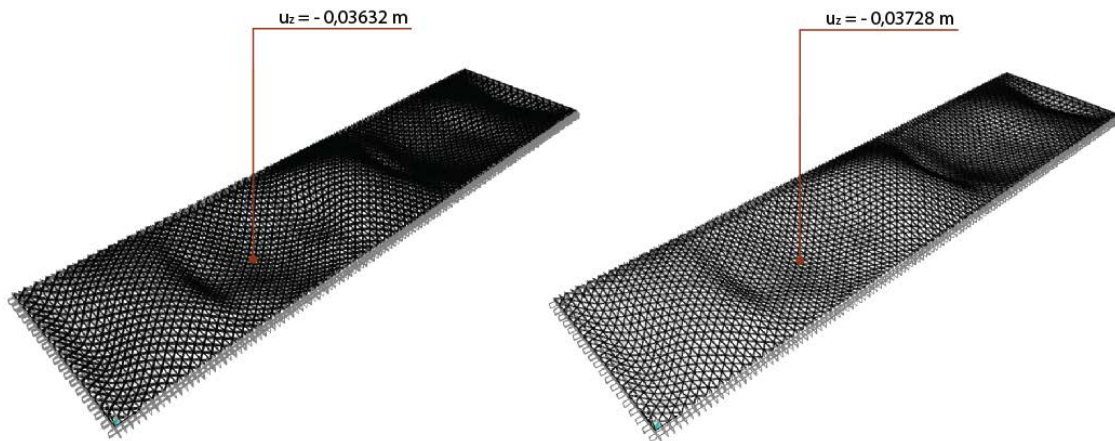


Fig. 6.35 - configurazione deformata del modello dettagliato (a sinistra) e del modello a travi equivalenti (a destra) con indicazione del valore dello spostamento verticale in un punto

In termini di sollecitazioni riportiamo l'andamento dello sforzo normale in entrambi i modelli, mettendone in evidenza il valore in un'asta, come riportato in figura 6.36:

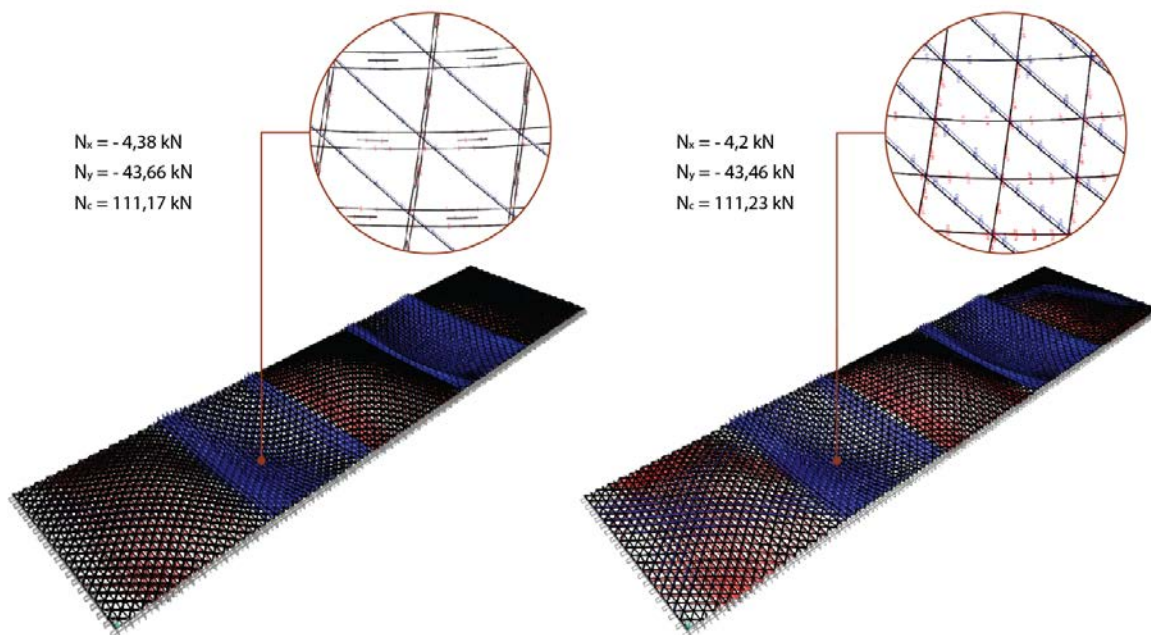


Fig. 6.36 - andamento dello sforzo assiale nel modello dettagliato (a sinistra) e nel modello a travi equivalenti (a destra)

Mettendo a confronto i risultati di spostamenti e sollecitazioni, il modello a travi equivalenti può essere considerato una buona approssimazione del modello dettagliato. In ultimo, è stato generato il modello di continuo bidimensionale di cui riportiamo, in figura 6.37, la vista tridimensionale della superficie mediana:



Fig. 6.37 – vista tridimensionale del modello di continuo bidimensionale

La configurazione deformata del continuo bidimensionale è riportata in figura 6.38 nella sua visualizzazione cromatica:

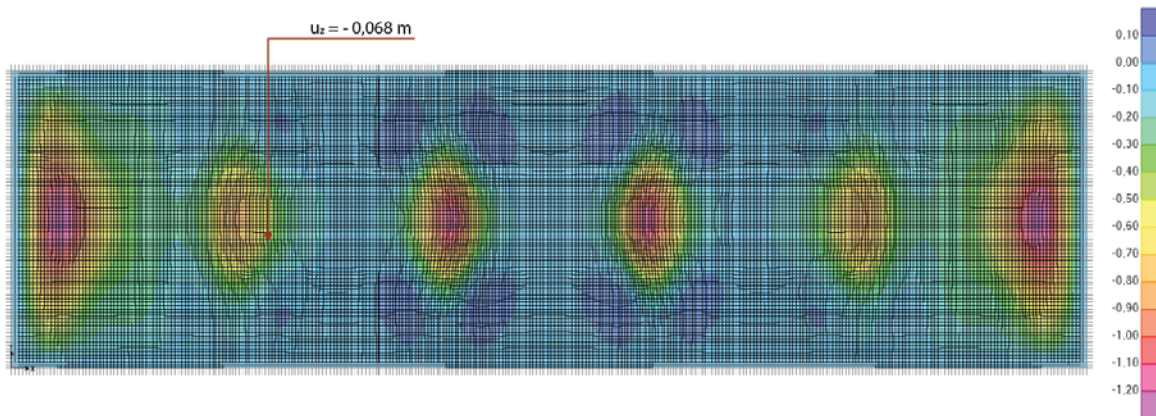


Fig. 6.38 – visualizzazione cromatica relativa agli spostamenti verticali

Per quanto riguarda gli sforzi di membrana invece, riportiamo il grafico dell'andamento dello sforzo membranale nella direzione in cui esso è maggiore, ovvero  $F_{12}$  (figura 6.39):

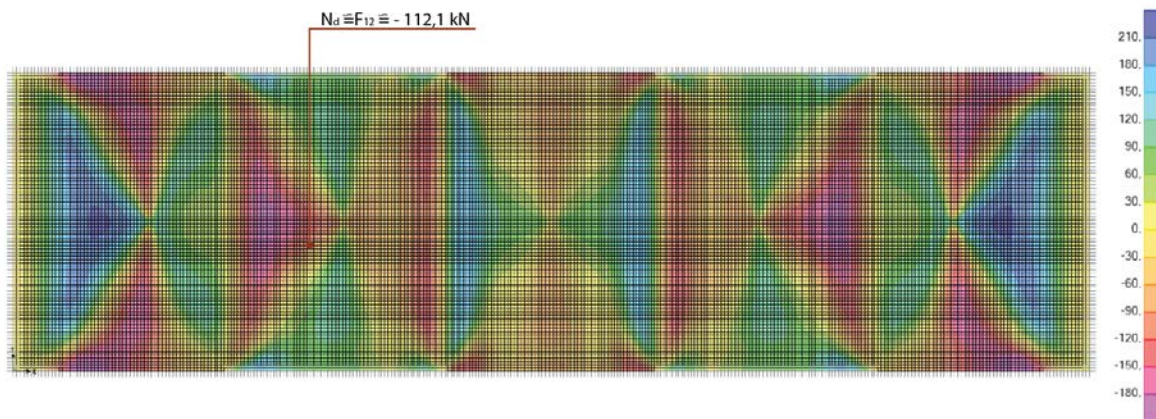


Fig. 6.39 – grafico dello sforzo membranale  $F_{12}$

Anche in questo caso i valori delle sollecitazioni nei tre modelli sono paragonabili, mentre il modello di continuo bidimensionale si discosta dai modelli discreti in termini di spostamento.

## 8. Commento ai risultati

I risultati ottenuti dalle analisi condotte alla fine di questo capitolo sono riassunti nelle tabelle sottostanti.

Struttura Piana			Struttura a Singola Curvatura		
$u_{dettagliato}$	$u_{hom}$	$u_{shell}$	$u_{dettagliato}$	$u_{hom}$	$u_{shell}$
[m]	[m]	[m]	[m]	[m]	[%]
-0,22	-0,21	-0,217	-0,015	-0,015	-0,018
$M_{dettagliato}$	$M_{hom}$	$M_{shell}$	$N_{dettagliato}$	$N_{hom}$	$N_{shell}$
[kN m]	[kN m]	[kN m]	[kN]	[kN]	[kN]
0,348	0,348	0,357	-27,71	-27,76	-29,3

Struttura a Doppia Curvatura			Struttura a Doppia Curvatura (Savill)		
$u_{dettagliato}$	$u_{hom}$	$u_{shell}$	$u_{dettagliato}$	$u_{hom}$	$u_{shell}$
[m]	[m]	[%]	[m]	[m]	[%]
-0,0155	-0,0149	-0,04	-0,03632	-0,03728	-0,068
$N_{dettagliato}$	$N_{hom}$	$N_{shell}$	$N_{dettagliato}$	$N_{hom}$	$N_{shell}$
[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]	[kN]
-55,6	-55,6	-57,1	-111,17	-111,23	-112,1

Fig. 6.33 – tabelle riassuntive dei risultati ottenuti sulle quattro strutture spaziali

Mentre per la struttura piana e per la struttura ad una sola curvatura spaziale i risultati dei modelli, alle tre scale di osservazione, sono equiparabili in termini di spostamenti e sollecitazioni, nel caso di strutture a doppia curvatura sono presenti errori significativi.

L'errore maggiore si riscontra nel modello maggiormente semplificato, ovvero il modello di continuo bidimensionale equivalente, nei riguardi dello spostamento verticale. Già nelle conclusioni del capitolo precedente era stato premesso che nella modellazione al continuo ci si sarebbe aspettato di trovare degli errori. Questo è dovuto sia alle proprietà intrinseche del modello di guscio, diverse da un sistema di travi equivalenti, sia alle modalità con cui le proprietà di questo sono state ottenute nel procedimento di omogeneizzazione in cui, si ricorda, gli effetti della curvatura sono stati trascurati e parimenti trascurati gli effetti di interazione tra aspetti membranali e flessionali. Non è infatti un caso che gli errori maggiori si riscontrino nelle geometrie la cui curvatura gaussiana, punto per punto, è diversa da zero. Ovviamente questo aspetto è molto migliorabile e su questo si lavorerà in futuro.

Tuttavia, come anche premesso nel capitolo 3, quello che si richiede al modello di continuo bidimensionale non è una esatta restituzione dei risultati nella loro totalità, bensì una certa accuratezza dei risultati in termini di comportamento globale della forma, dando modo di determinare, in ogni punto della superficie, quale sia il comportamento dominante, se quello flessionale o quello membranale. Altro requisito prestazionale del modello di continuo



bidimensionale equivalente è quello di fornire i dati necessari ad un primo dimensionamento delle travi che comporranno la gridshell; alla luce dei risultati ottenuti dalle analisi, si può dire che il modello soddisfa tale requisito, in quanto i valori delle sollecitazioni sono sufficientemente vicini a quelle del modello dettagliato.

## 9. L'analisi non lineare per simulare il processo costruttivo

Nel descrivere i casi studio (vedi nel capitolo 2) è stato messo in evidenza il processo costruttivo di post-formazione che accomuna tutti gli esempi di gridshell di legno massiccio cui si è fatto fin qui riferimento.

La realizzazione di queste tipologie strutturali è molto complessa poiché, per garantire che la forma realizzata corrisponda alla forma modellata digitalmente, il processo costruttivo deve necessariamente essere in grado di dominare la deformazione che viene imposta alla struttura inizialmente piana.

In particolare bisogna poter prevedere quali punti devono essere vincolati, a quale quota bisogna apporre vincoli, in quali punti è necessario applicare una forza e quale deve essere l'intensità di quest'ultima affinché sia in grado di produrre la deformazione desiderata.

Gli strumenti digitali, e più nello specifico i modelli numerici, possono andare incontro a questa esigenza di controllo. Ad esempio, è certamente possibile simulare il processo di messa in forma della struttura in termini di forza applicata e conseguente deformazione: trattandosi di deformazioni importanti, ci si trova nel campo di analisi non lineare ed in particolare dell'analisi non lineare ai grandi spostamenti. L'intento di quest'ultimo paragrafo è quindi quello di verificare che la compatibilità dei modelli multiscala fin qui dimostrata si ritrovi anche in campo non lineare.

Poniamoci in un caso semplice, ossia la messa in forma di un singolo elemento trave il cui schema statico è riportato in figura 6.34:

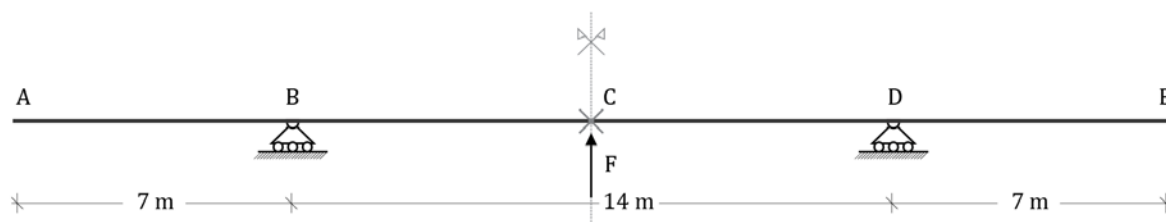


Fig. 6.34 – Schema statico dell'elemento trave per l'analisi non lineare ai grandi spostamenti

Si tratta di una trave continua su due appoggi (B e C) vincolati esternamente da carrelli; per evitare che il sistema sia labile, e per garantirne la simmetria, il punto C è stato vincolato allo spostamento orizzontale.

In questo modo l'applicazione della forza (F) nel punto C avrà come effetto una configurazione deformata come quella riportata in figura 6.35:

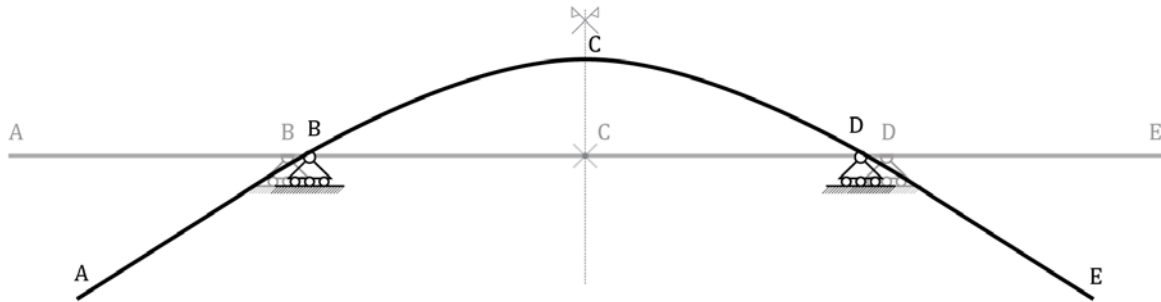


Fig. 6.35 – Configurazione deformata dello schema statico di Fig. 6.34

Come simulazione del processo costruttivo immaginiamo che la trave, nella configurazione iniziale piana si trovi ad una data quota, che indicheremo come quota zero, e che il punto C nella configurazione finale debba trovarsi ad un'altezza di due metri al di sopra della quota zero.

I risultati che devono essere ricavati dall'analisi sono quindi due: anzitutto, il valore della forza  $F$  necessaria a garantire lo spostamento desiderato del punto C. In secondo luogo, la posizione finale rispetto alla quota zero dei punti A ed E, necessaria per prevedere il posizionamento dei vincoli esterni da applicare a seguito della messa in forma della struttura. Impostiamo l'analisi. Trattandosi di un caso piano gli unici modelli che possono essere messi a confronto sono il modello dettagliato ed il modello di trave equivalente.

Nel processo costruttivo del Savill Building (vedi capitolo 2) il reticolo iniziale piano era composto del solo layer inferiore e dei blocchetti di taglio, mentre il layer superiore veniva montato solo una volta che la copertura era stata messa in forma e vincolata ai bordi; per questa esemplificazione si è scelto di modellare la trave allo stesso modo, ossia priva del layer superiore, sebbene questo non escluda che lo stesso procedimento possa essere ripetuto considerando l'elemento trave nella sua interezza.

Il modello dettagliato risulta quindi essere il seguente:



Fig. 6.36 – Configurazione indeformata del modello dettagliato

Impostando i parametri dell'analisi non lineare imponendo lo spostamento verticale del punto C, punto di applicazione della forza, pari a due metri, si ottiene la seguente deformata:

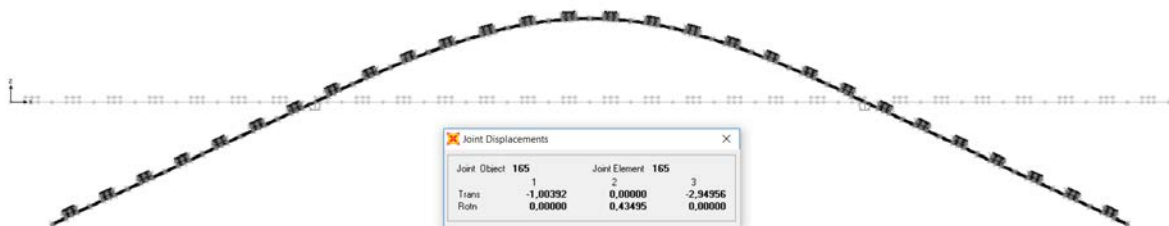


Fig. 6.37 – Configurazione deformata del modello dettagliato, in tabella gli spostamenti del punto E

Riportiamo di seguito i valori degli spostamenti per il punto C e per l'estremo libero E:

$$u_{zC} = 2,00 \text{ m}$$

$$u_{zE} = - 2,95 \text{ m}$$

$$u_{xE} = -1,00 \text{ m}$$

Conduciamo ora la stessa analisi sul modello di trave equivalente; in questo caso la sezione rettangolare omogenea della trave equivalente è stata determinata tenendo conto dell'assenza del layer superiore nel modello dettagliato, sia in termini di inerzia equivalente che in termini di area equivalente.

Si riportano, in figura 6.38, le configurazioni indeformata e deformata del modello di trave equivalente:

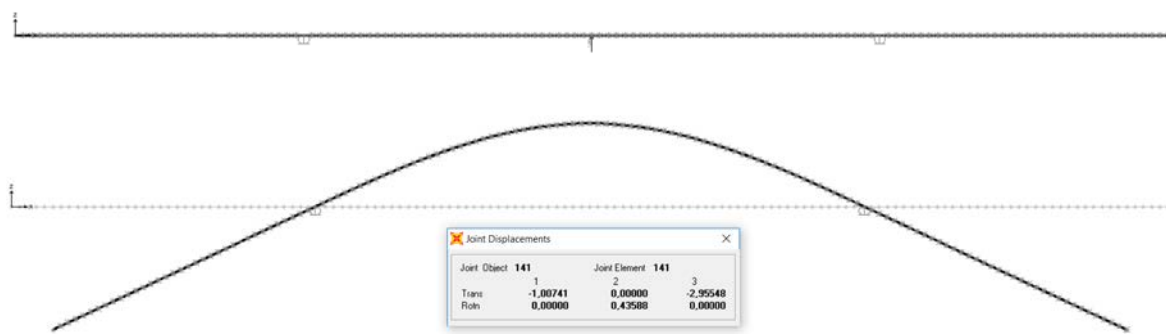


Fig. 6.38 – configurazione deformata (sopra) e configurazione indeformata (sotto) del modello di trave equivalente, in tabella gli spostamenti del punto E

i valori degli spostamenti per il punto C e per l'estremo libero E sono:

$$u_{zC} = 2,00 \text{ m}$$

$$u_{zE} = - 2,95 \text{ m}$$

$$u_{xE} = -1,00 \text{ m}$$

Gli spostamenti coincidono. Ciò nonostante, per poter sostenere che i due modelli producano gli stessi risultati è necessario mettere a confronto le rispettive curve di equilibrio, ovvero le curve definite, ad ogni passo dell'analisi non lineare, dal valore della forza e dallo spostamento.

Più nello specifico, il percorso di equilibrio di una struttura in ambito non lineare si graficizza su un piano cartesiano definito in ascissa dallo spostamento più significativo (in questo caso lo spostamento verticale dell'estremo libero E), e in ordinata dalla forza che lo ha prodotto.

In figura 6.39 riportiamo i percorsi di equilibrio dei due modelli:

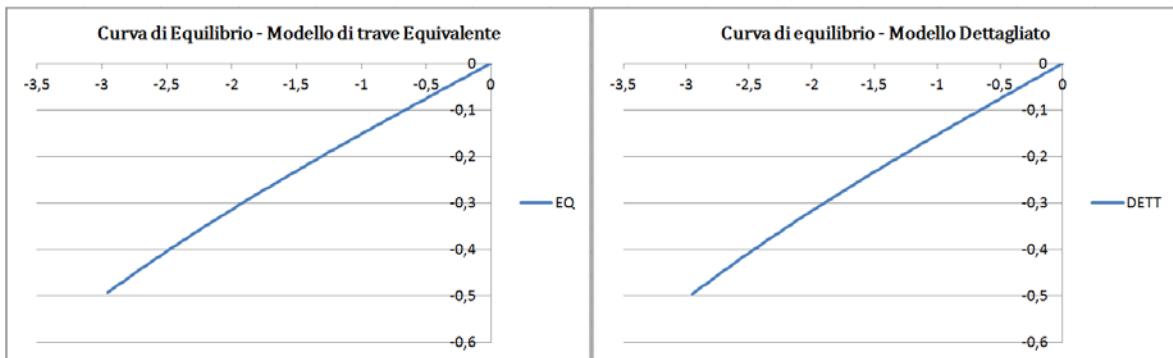


Fig. 6.39 – Percorsi di equilibrio del modello di trave equivalente (a sinistra) e del modello dettagliato (a destra)

Mettendo a confronto i due grafici è possibile verificare che i percorsi di equilibrio delle due strutture sono quasi coincidenti:

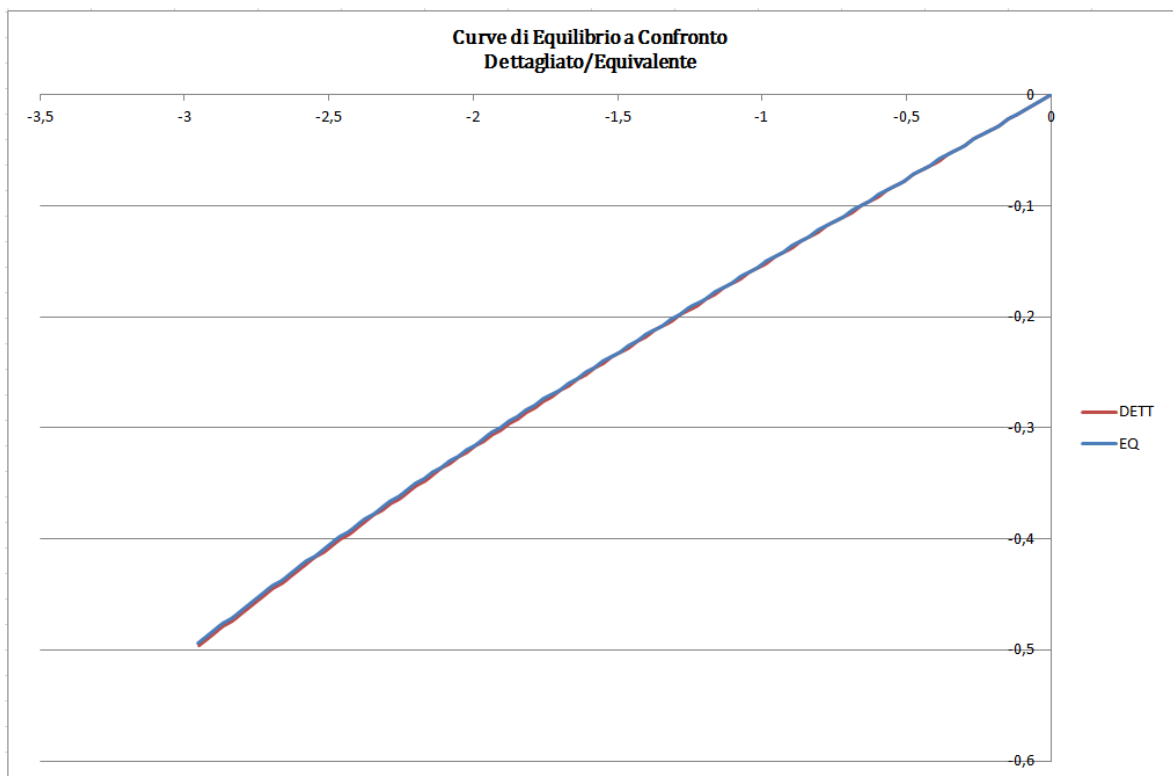


Fig. 6.40 – Percorsi di equilibrio dei due modelli messi a confronto

In particolare il valore della forza che determina lo spostamento ultimo vale:

modello a trave equivalente:

$$F = - 0,494 \text{ kN}$$

modello dettagliato:

$$F = - 0,496 \text{ kN}$$

Si può quindi dire che il modello di trave equivalente è in grado di riprodurre con buona approssimazione il comportamento del modello dettagliato anche in campo non lineare. Tuttavia, questa esemplificazione non ambisce a dimostrare che i due modelli siano in grado di restituire risultati equivalenti per qualsiasi aspetto di non linearità; quello che si può affermare è piuttosto che l'equivalenza si può ritenere rispettata per analisi non lineari mirate al controllo degli spostamenti di taluni punti, ovvero per quelle analisi che sono in grado di simulare, almeno in parte, il processo costruttivo delle gridshell post-formate.

## Conclusioni

Nell'ambito di questa ricerca sono state investigate, in riferimento ad una tipologia costruttiva complessa, alcune delle possibilità che la cultura digitale offre al progetto in Architettura. In particolare sono stati adattati degli strumenti computazionali, di uso corrente in ambito architettonico, alla modellazione multiscala del comportamento meccanico delle gridshell in legno.

Le tre scale di osservazione e di modellazione selezionate per questa morfologia strutturale, dalla più dettagliata a quella maggiormente semplificata, trovano corrispondenza a tre fasi differenti della progettazione architettonica, risultando l'intero processo efficace ed utilizzabile in un contesto di *form-finding*.

Il processo computazionale sperimentato non è, tuttavia, un sistema automatizzato di *form-finding* e di ottimizzazione strutturale, bensì una sorta di *sistema esperto*, ossia un ambiente digitale integrato, in cui il progettista è presente in ogni momento decisionale.

Tale procedimento ha trovato un banco di prova in una precisa tecnologia costruttiva, ovvero quella del modulo base utilizzato nella copertura del Savill Building, alla quale sono state specializzate le procedure di omogeneizzazione finalizzate al calcolo delle rigidezze equivalenti. Tuttavia, l'intera metodologia è esportabile ai casi in cui il modulo base sia costruttivamente diverso e, più in generale, non essendo strettamente vincolata all'utilizzo del legno o di specifici software, essa risulta applicabile a strutture di diversi materiali costruttivi ed all'utilizzo di differenti strumenti di modellazione e calcolo.

I modelli computazionali sono stati considerati nelle loro potenzialità e nei loro limiti. Ne conseguono alcune consapevolezza: anzitutto che l'intero processo debba essere supportato da qualche prova sperimentale su piccoli assemblaggi in grado di validare il modello meccanico della connessione, essendo questa sia il fulcro tecnologico dell'opera realizzata sia quello scientifico della parametrizzazione dei modelli matematici dell'intera struttura. In aggiunta, qualora l'obiettivo delle simulazioni numeriche si finalizzasse anche alla progettazione strutturale dell'opera, non potrebbero essere trascurate analisi dinamiche miranti a comprendere gli effetti dell'interazione tra queste strutture e l'azione del vento. Un eventuale prosieguo di questo lavoro non potrebbe che ripartire da questo punto.

Per concludere, volendo inquadrare questa tesi in quel filone contemporaneo dell'Architettura, che prende il nome di *computational design*, nella sua più ampia accezione, un ulteriore prosieguo di questo lavoro potrebbe essere quello di utilizzare i modelli numerici anche per governare le fasi realizzative delle gridshell post-formate, sperimentando modelli di meccanica non lineare ai grandi spostamenti per la fase di messa in forma della copertura.



## Bibliografia

**A.A.V.V.**, *Manuale del recupero del comune di Roma*, a cura di Francesco Giovanetti, Dei tipografia del genio civile, Roma 2000.

**A. A. V. V.**, *Eurocodice 5, Progettazione delle strutture di legno*. UNI ENV 1995-1-1

**A. A. V. V.**, UNI EN 338 – 2009. *Legno Strutturale: Classi di Resistenza*.

**A. A. V. V.**, UNI EN 14080 – 2013. *Strutture di legno – Legno lamellare incollato e legno massiccio incollato. Requisiti*.

**A. A. V. V.**, CNR (Consiglio Nazionale delle Ricerche). *Istruzioni per la progettazione, l'esecuzione e il controllo delle strutture di legno*. CNR-DT 206/2007, rev. Ottobre 2008.

**A.A.V.V.**, *Centre Georges Pompidou*, in The Plan 044, Centauro Edizioni, Bologna 2010

**A.A.V.V.**, *MetropolParasol*, in The Plan 048, Centauro Edizioni, Bologna 2011

**A.A.V.V.**, *Centre Georges Pompidou*, in The Plan 044, Centauro Edizioni, Bologna 2010.

**A.A.V.V.**, *Metropol Parasol*, in The Plan 048, Centauro Edizioni, Bologna 2011.

**A. Cavalli, M. Malavolti, A. Morosini, A. Salvin, M. Togni**, *Mechanical performance of full scale steel-timber exoposyoints after exposure to estreme environmental conditions*, Elsevier, Amsterdam 2014.

**A. Trevor Hodge**, *The woodwork of greek roofs*, Cambridge Universty Press, Cambridge 2010.

**Antonino Giuffrè**, *La meccanica dell'architettura – la statica*, Carocci Editore, Roma 1986.

**Ario Ceccotti, Elio Giangreco**, *Ingegneria delle strutture, volume3 capitolo XII, Le strutture di Legno*, UTET, Torino 2002.



**B. D'Amico, A. Kermani, H. Zhan**, *Form finding and structural analysis of actively bent timber grid shells*, Elsevier, Amsterdam 2014

**B. D'Amico, A. Kermani, H. Zhan**, *Form finding and structural analysis of actively bent timber grid shells*, Elsevier, Amsterdam 2014.

**C. R. Calladine**, *Theory of shell structures*, Cambridge University Press, Cambridge 1983.

**Curt Siegel**, *Struttura e forma nell'architettura moderna*, Edizioni C.E.L.I Bologna, scuola litografica salesiana, 1968.

**D. Naicu, R. Harris, C. Williams**, *Timber gridshells: design method and their application to a temporary pavilion*, WCTE (World Conference on Timber Engineering), Canada, 2014.

**D'Arcy W. Thomson**, *Crescita e forma*, Bollati Boringhieri, Torino 1992.

**Dragos-Iulian Naicu**, *Geometry and performance of timber gridshell*, PhD thesis department of civil engineering, Bath 2012.

**Edoardo Benvenuto**, *La scienza delle costruzioni e il suo sviluppo strico*, Sansoni, Firenze 1981.

**Emanuele Zamperini**, *Evoluzione tecnologica e tipologica delle coperture lignee in Italia nel periodo 1800 - 1950*, Tesi di dottorato in Ingegneria Civile ed Edile/Architettura XXVI Ciclo, Pavia 2014.

**Eugene Vladimirovich Popov**, *Geometric approach to Chebyshev net generation along an arbitrary surface represented by NURBS*, International Conference Graphicon, Nizhny Novgorod, Russia, 2002.

**Farshid Moussavi**, *The function of form*, Actar, Barcellona 2006.

**H.J Blass, F. Colling**, *Load-carrying capacity of dowelled connections*, INTER 48 – 07 - 03, Sibenik 2015.

**Ian Liddell**, *Frei Otto and the development of gridshells*, Elsevier Case Studies in Structural Engineering, Volume 4 pag. 39-49, Amsterdam 2015.

**Jan Helmholtz e Andrea van Doorn**, *Shape from Chebyshev net*, ECCV '98 Proceedings of the 5th European Conference on Computer Vision – Volume II pag. 215-225, 1998.

**John Frazer**, *An evolutionary architecture*, John Frazer and the Architectural Association, Londra 1995.

**Kenneth Frampton**, *Tettonica e architettura. Poetica della forma architettonica nel XIX e XX secolo*, Skira, Milano 1999.

**Maria Rita Campa**, *Le Nouvelles Inventions di Philibert de l'Orme*, Aracne, Roma 2009.

**Mario Como**, *Statica delle costruzioni storiche in muratura*, ARACNE editrice, Roma 2010.

**Martin M. Lipschutz**, *Teoria e problemi di geometria differenziale*, Etas, Milano 1984.

**Maurizio piazza, Roberto Tomasi, Roberto Modena**, *Strutture in legno*, Hoepli, Milano 2014.

**O. Kelly, R. Harris, M. Dickinson, J. Rowe**, *Construction of the Downland gridshell*, The structural Engineering Volume 79 Issue 17, 2001.

**Pia D'angelo**, *La tecnologia delle Gridshell. Sperimentazione di un sistema di copertura "automontante"*, Tesi di dottorato in Tecnologia dell'architettura, Napoli 2011.

**Pier Luigi Nervi**, *Ingegneria, Architettura, Costruzione, scritti scelti 1922-1971*, a cura di Gabriele Neri, Città Studi Edizioni, Novara 2014.

**Placido Munafò**, *Le capriate lignee antiche per i tetti a bassa pendenza: evoluzione, disegni, tecniche di intervento*, Alinea editrice, Firenze 2002.

**R. Harris, B. Happold**, *Sustainable structures – the reality*, The 2005 World Sustainable Building Conference, Tokyo 2005.

**R. Harris, J. Roynon**, *The Savill Garden Gridshell design and construction*, 10th World Conference of Timber Engineering, Miyazaki 2008.

**R. Harris, J. Romer, O. Kelly, S. Johnson**, *Design and construction of the Downland Gridshell*, Vol. 31, Issue 6, Building Research & Information, 2003.

**Roger B. Ulrich**, *Roman woodworking*, Yale University Press, Yale University 2007.

**S. Colabella, D. Lancia, L. Repola, R. Memmolo, S. Pone**, *A monitoring system for wooden post-formed gridshells*, Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium, Amsterdam 2015.

**S. Jeska, K. S. Pascha**, *Emergent timber technologies – materials, structures, engineering, Projects*, Birkhauser, Basilea 2014.

**S. Malek, T. Wierzbicki, J. Ochsendorf**, *Buckling of spherical cap gridshells: a numerical and analytical study revisiting the concept of the equivalent continuum*, Elsevier Engineering Structures, Volume 75 pag. 288-298, Amsterdam 2015.

**S. Pone**, *Gridshell, I gusci a graticcio in legno tra innovazione e sperimentazione*, Alinea editrice, Firenze 2012.

**Samar Rula Malek**, *The effect of geometry and topology on the mechanics of grid shells*, PhD in Structures and materials at Massachusetts Institute of technology, Johns Hopkins University, 2002.

**Toussaint M.H.**, *A design tool for gridshells – the development of a grid generation tool*, Master Thesis, Delft university of Technology, May 2007.

**T. Happold, E. and Liddell**, *W.I. Timber lattice roof for the Mannheim Bundesgartenschau*, The Structural Engineer, Volume 53 pag. 99–135, 1975.

**T. Iori, S. Poretti, *SIXXI 1 Storia dell'ingegneria strutturale in Italia*, Gangemi Editore, Roma 2014.**

**T. Iori, S. Poretti, *SIXXI 2 Storia dell'ingegneria strutturale in Italia*, Gangemi Editore, Roma 2014.**

**T. Iori, S. Poretti, *SIXXI 3 Storia dell'ingegneria strutturale in Italia*, Gangemi Editore, Roma 2015.**