







CONSORZIO ARGONAUTI (Politecnico di Bari / Università Roma Tre) - **DOTTORATO XXIX CICLO**  
**Architettura: Innovazione e Patrimonio**  
*gennaio 2014 - dicembre 2016*

Dottoranda: Arch. Roberta Gadaleta

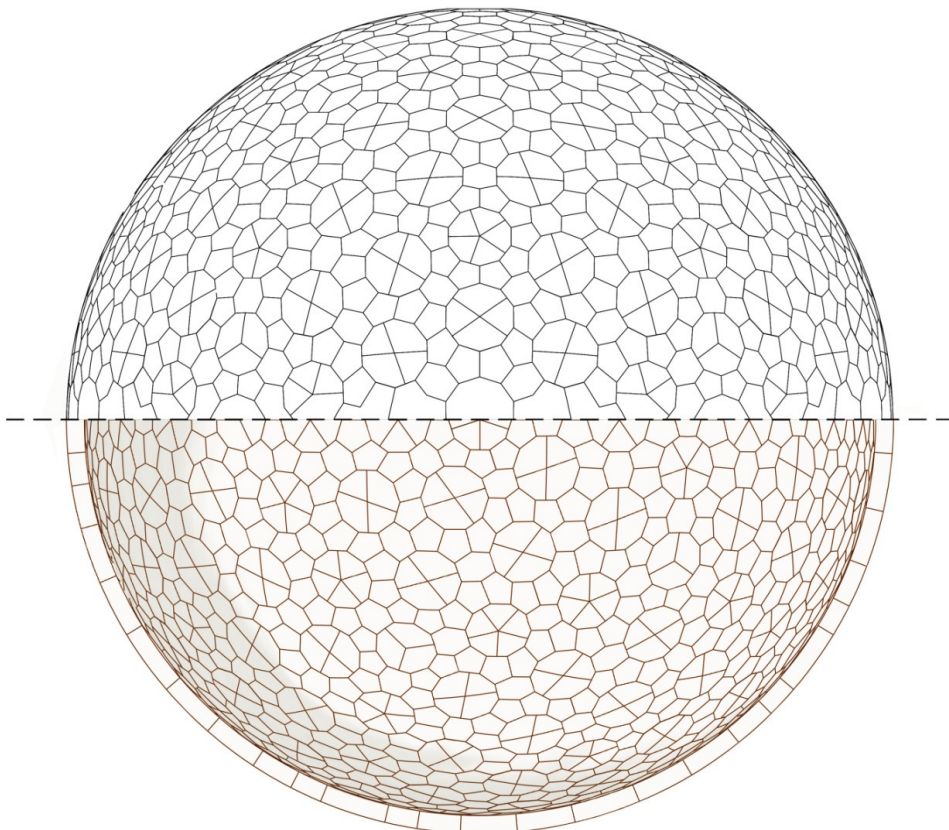
**STEREOTOMIA DELLA CUPOLA NELL'ARCHITETTURA DI PIETRA.**  
**STUDIO DELLA TRADIZIONE E RICERCA**  
**DI NUOVE MORFOLOGIE DI APPARECCHIATURA.**

*Stereotomy of dome in stone architecture.*  
*Study of tradition and research of new morphologies of bond.*

VOLUME I - TESTO CRITICO

Tutor: Prof. Arch. Giuseppe Fallacara

Co-Tutor: Prof. Arch. Claudio D'Amato Guerrieri



**Arch. Roberta Gadaleta**  
VOLUME I -Testo critico

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.  
Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**INDICE - INDEX**

---

**0. INTRODUZIONE**

*Introduction*

---

pp. 1,6

**0.1 Tema e finalità della tesi di ricerca**

*Theme and finality of research*

pp. 1,6

**0.2 Campo di indagine, metodologia e articolazione della ricerca**

*Field, methodology and structure of research*

pp. 3,8

**0.3 Ringraziamenti**

*Acknowledgments*

p. 11

**CAPITOLO I.**

**La cupola in pietra da taglio come compresenza di forma simbolica e forma costruita**

*Dome in cut stone as simultaneous presence of symbolic form and constructed form*

---

p. 13

**I.1 La forma simbolica della cupola lapidea**

*The symbolic form of stone dome*

p. 13

**I.2 La forma costruita della cupola lapidea**

*The constructed form of stone dome*

p. 31

**I.2.1 La geometria come fondamento della forma resistente**

*Geometry as foundation of form-resistant*

p. 31

**I.2.2. La tecnica costruttiva lapidea come espressione dell'unità forma-struttura**

*Stone building technique as expression of unit form-structure*

p. 36

---

**CAPITOLO II.**

**Analisi del metodo architettonico storico di suddivisione della cupola lapidea in elementi strutturali**

*Analysis of historic architectonic method of stone dome subdivision in structural elements* p. 41

---

- II.1**    Analisi degli esempi significativi dell'architettura lapidea tradizionale  
*Analysis of significant examples of traditional stone architecture* p. 44
- II.2**    Il materiale lapideo nell'architettura dello spazio voltato  
*Stone material in architecture of vaulted space* p. 49
- II.3**    Analisi degli esempi significativi codificati dalla disciplina stereotomica  
*Analysis of significant examples defined by stereotomic discipline* p. 55
- II.4**    Trattati sui metodi di apparecchiatura della cupola  
*Treatises on methods of dome bond* p. 70

**CAPITOLO III.**

**Analisi del metodo architettonico di suddivisione della cupola in pietra da taglio in elementi strutturali attraverso i poliedri sferici**

*Analysis of architectonic method of subdivision of cut stone dome in structural elements with spherical polyhedra* p. 71

---

- III.1**    La geometria come fondamento della stereotomia  
*Geometry as foundation of stereotomy* p. 71
- III.2**    Il poliedro sferico  
*Spherical polyhedron* p. 82
- III.3**    Divisione della sfera in parti uguali ai fini dell'ottimizzazione dei conci lapidei  
*Division of the sphere into equal parts for optimization of stone ashlars* p. 98
- III.3.1**    Divisione massima della sfera in parti uguali  
*Highest division of the sphere in equal parts* p. 101

<b>III.4</b>	Dal piano allo spazio: considerazioni sulla deformazione sferica e sul metodo proiettivo <i>From the plan to the space: considerations on the spherical deformation and the projective method</i>	p. 107
<b>III.5</b>	Individuazione della tassellazione in pietra da taglio <i>Individuation of tessellation in cut stone</i>	p. 143
<b>III.5.1</b>	Requisiti che la tassellazione deve soddisfare <i>Requirements that tessellation must meet</i>	p. 143
<b>III.5.2</b>	Ricerca della tassellazione stereotomica ottimizzata attraverso l'analisi dei metodi di suddivisione strutturale della sfera <i>Research of the optimized stereotomic tessellation by analyzing the method of structural subdivision of sphere</i>	p. 155
<b>III.5.3</b>	Primo dimensionamento della cupola <i>First dimensioning of dome</i>	p. 207
<b>III.5.4</b>	Tabella comparativa delle suddivisioni dell'emisfera in elementi strutturali <i>Comparative table of subdivisions of hemisphere in structural elements</i>	p. 210
<b>III.5.5.</b>	Scelta della tassellazione di studio per l'apparecchiatura stereotomica <i>Choice of tessellation of study for stereotomic bond</i>	p. 224

#### **CAPITOLO IV.**

#### **Forma strutturale stereotomica della cupola in pietra da taglio a simmetria quinaria**

	<i>Stereotomic structural form of dome in cut stone with five-fold symmetry</i>	p. 225
--	---	--------

---

<b>IV.1</b>	Primo caso di studio applicativo: la tassellazione di L. Danzer. Vantaggi e criticità. <i>First application of study case: Danzer's tessellation. Advantages and problems</i>	p. 225
-------------	--	--------

- IV.2** Dalla tassellazione di Keplero all'apparecchiatura della cupola in pietra da taglio: dalla geometria alla forma costruita  
*From Kepler's tessellation to bond of dome in cut stone: from geometry to constructed form* p. 248
- IV.2.1** La tassellazione quinaria definita da Keplero nell' *Harmonices Mundi*: deduzione dell'apparecchiatura stereotomica e definizione dei conci-invarianti  
*The five-fold symmetry of tessellation defined by Kepler in Harmonices Mundi: deduction of stereotomic bond and definition of invariant ashlar* p. 248
- IV.2.2** Costruzione del modello infografico tridimensionale e definizione del metodo  
*Construction of infographic three-dimensional model and method definition* p. 266
- IV.2.3** Costruzione del modello fisico tridimensionale o maquette : dalla stampa 3D degli elementi al processo di montaggio dell'apparecchiatura  
*Construction of the three-dimensional physical model or maquette: from 3D print of constructive elements to assembly process of bond* p. 271
- IV.2.4** Verifica statica attraverso il modello informatico geometrico-matematico e definizione delle condizioni limite della morfologia considerata  
*Static verification through the geometric-mathematical computer model and definition of the boundary conditions of morphology considered* p. 290
- IV.2.5** Considerazioni sulla prototipazione a controllo numerico  
*Considerations on CNC prototyping* p. 304
- CAPITOLO V.**  
**Considerazioni conclusive e prospettive dello studio di ricerca**  
*Conclusive consideration and future possibilities of research* p. 309
-

**VI. APPENDICE**

*Attachment*

---

p. 312

**VI.1. Scritto di L. Danzer sulla tassellazione da lui codificata**

*Text of L. Danzer on tessellation codified by him*

p. 312

**VI.2. Scritto su L. Danzer in occasione del suo 80° compleanno**

*Text in honor of L. Danzer's 80th birthday*

p. 320

**VII. BIBLIOGRAFIA TEMATICA**

*Thematic bibliography*

---

p. 323

**Arch. Roberta Gadaleta**  
VOLUME I -Testo critico

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.  
Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---



## **0. INTRODUZIONE**

---

### **0.1 Tema e finalità della tesi di ricerca**

Questo studio è stato sviluppato all'interno del XXIX ciclo di Dottorato di Ricerca in "Architettura: innovazione e patrimonio", istituito dal Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università degli Studi Roma Tre) inserendosi nel curriculum "cultura della costruzione" e si pone in continuità con le ricerche sull'aggiornamento delle tecniche tradizionali del costruire in pietra da taglio, che da molti anni costituiscono l'identità culturale della Facoltà di Architettura di Bari e successivamente del DICAR, svolte dal suo fondatore Prof. Claudio D'Amato Guerrieri e dal Prof. Giuseppe Fallacara.

Obiettivo del presente studio è aggiornare la costruzione tradizionale dello spazio cupolato in pietra da taglio, patrimonio architettonico distintivo dell'area mediterranea ed in particolare di quella pugliese, riconoscendo nella morfologia strutturale organica della cupola lapidea, la consustanzialità di forma, struttura e simbolo, che ne determina contemporaneamente venustas, firmitas ed utilitas.

Oggi il modello estetico basato sull'individualismo e l'edonismo estremo, porta alla ricerca dell'originalità innovativa attraverso la stranezza formale spesso decontestualizzata, producendo architetture caratterizzate dalla scissione della triade vitruviana ed in particolare dalla subordinazione della struttura alla forma, la cui vana apparenza cerca stupore. Queste strutture complesse la cui modernità viene riconosciuta nella stravaganza formale e nell'uso di materiali considerati innovativi, si rivelano spesso dispendiose ed effimere.

Lo studio vuole recuperare il linguaggio tettonico ed il senso della razionalizzazione costruttiva intrinseco alla logica unitaria dell'organismo architettonico tradizionale, aggiornandone la morfologia attraverso le attuali tecniche innovative di progettazione.

A partire dall'analisi delle cupole lapidee emisferiche storiche, questo studio verte sulla ricerca del tipo di apparecchiatura stereotomica e

*Aggiornamento  
stereotomico  
della cupola  
nell'architettura  
di pietra*

*Metodologia e  
finalità  
della ricerca*

quindi dell'opportuna configurazione degli elementi costruttivi che, a parità dimensionale, ottimizzi la costruzione della cupola lapidea rispetto alla tradizione, riducendone il numero degli invarianti ed aumentandone la definizione estetica e statica.

Un rigoroso studio geometrico è fondamentale per giungere alla definizione stereotomica degli elementi strutturali che, rispetto al passato, viene facilitata attraverso l'opportuno impiego degli attuali software infografici CAD/CAM (Computer-Aided Design/Computer Aided Manufacturing), che permettono il trasferimento diretto del disegno tridimensionale alle macchine a prototipazione rapida (RP) ed a controllo numerico (CNC), che permettono di realizzarlo semplificando il processo produttivo, raggiungendo l'unità di idea-progetto-costruzione.

Lo studio ricerca nuove morfologie stereotomiche attraverso cui poter giungere ad una analisi critica sull'attualità della cupola in pietra da taglio, dove la verità strutturale diviene chiaramente leggibile nella coincidenza di forma e struttura, vera essenza dell'architettura: bellezza senza tempo della forma costruita.

## 0.2 Campo di indagine, metodologia e articolazione della ricerca

Lo studio si articola nel modo seguente:

I. il **PRIMO CAPITOLO** “LA CUPOLA IN PIETRA DA TAGLIO COME COMPRESENZA DI FORMA SIMBOLICA E FORMA COSTRUITA”, espone la compresenza di simbolo, forma e struttura nell’architettura della cupola in pietra da taglio. La consustanzialità di forma simbolica e forma costruita viene esplicitata relazionando criticamente su :

- a. la *valenza simbolica* che la cupola rappresenta, attraverso l’analogia formale della volta architettonica con la volta celeste, effettuando uno studio critico di approfondimento etimologico sul rapporto delle parole *stereoma* e *stereotomia* e riportando alcuni esempi presenti nella letteratura storica ed architettonica e nella forma costruita;
- b. la *consustanzialità di forma e struttura* insita nella tecnica costruttiva lapidea, che prevede il legamento a secco di elementi strutturali distinti e di ridotte dimensioni, generando una precisa tessitura muraria che determina contemporaneamente espressività estetica e resistenza strutturale. Il concetto di tessitura implica quello di trama resistente, storicamente ricondotto all’origine della forma architettonica, essendo derivato dal gesto primitivo di legare per costruire. La tessitura, dunque l’apparecchiatura della cupola, necessita di una geometria ben determinata che tassella lo spazio generando una struttura resistente per forma, producendo ornato spaziale a valenza strutturale;

II. nel **SECONDO CAPITOLO** “ANALISI DEL METODO ARCHITETTONICO STORICO DI SUDDIVISIONE DELLA CUPOLA LAPIDEA IN ELEMENTI STRUTTURALI”, viene analizzato il metodo storico utilizzato per l'apparecchiatura delle cupole in pietra, attraverso alcuni casi studio scelti, appartenenti all'architettura tradizionale ed a quella codificata dalla disciplina stereotomica. I casi di studio vengono analizzati in relazione ai diversi tipi storici di apparecchiatura delle cupole emisferiche, in rapporto al numero dei conci invarianti, dimensioni e materiale degli stessi e dimensione della luce coperta. Questo al fine di ipotizzare soluzioni innovative per apparecchiare una cupola emisferica in pietra da taglio, che ottimizzino la sua costruzione, attraverso la ricerca di un metodo per ridurre il numero di conci-invarianti nella realizzazione dell'ornato strutturale, e la semplifichino grazie ai moderni mezzi tecnologici di disegno e prototipazione degli elementi costruttivi;

III. il **TERZO CAPITOLO** “ANALISI DEL METODO ARCHITETTONICO DI SUDDIVISIONE DELLA CUPOLA IN PIETRA DA TAGLIO IN ELEMENTI STRUTTURALI ATTRAVERSO I POLIEDRI SFERICI”, espone la possibilità di apparecchiare la cupola lapidea secondo la geometria data da un opportuno poliedro sferico, che dividendola in parti che si ripetono uguali a se stesse sulla superficie emisferica, possa ridurre il numero dei conci invarianti. Viene determinata la porzione minima in cui la sfera è suddivisibile in parti uguali, e attraverso l'analisi delle varie tassellazioni possibili della sfera, viene scelta una configurazione che possa suddividerla e che si riveli efficace per la sua costruzione in pietra da taglio. In questo è fondamentale la disciplina stereotomica che attraverso la conoscenza geometrica, permette di discretizzare l'emisfera in elementi strutturali distinti, assicurando l'equilibrio statico del sistema architettonico;

IV. il **QUARTO CAPITOLO** “FORMA STRUTTURALE STEREOTOMICA DELLA CUPOLA IN PIETRA DA TAGLIO A SIMMETRIA QUINARIA”, descrive la configurazione scelta, secondo cui si determina l'apparecchiatura stereotomica della cupola in pietra

da taglio. La configurazione si basa sulla tassellazione quinaria derivata da quella di Keplero, mai applicata alla costruzione architettonica dello spazio cupolato in pietra da taglio. L'apparecchiatura definita secondo questa tassellazione si rivela particolarmente efficace per la geometria che ottimizza il numero dei conci invarianti, e per l'ammorsamento statico degli stessi. Questo studio di ricerca analizza il comportamento statico di questa nuova apparecchiatura e ne deduce i limiti di bucatura della stessa, attraverso l'opportuna sottrazione di particolari conci, con conseguente alleggerimento della forma strutturale. Viene descritto il metodo secondo il quale è possibile la definizione stereotomica della cupola e la costruzione della maquette, che permette di determinare le fasi di montaggio dell'apparecchiatura e di compiere considerazioni sulla sua efficienza statica. Viene inoltre descritta la verifica statica della morfologia strutturale attraverso il modello informatico geometrico-matematico e il prototipo in pietra da taglio realizzato in scala ridotta;

V. infine il **QUINTO CAPITOLO** "CONSIDERAZIONI CONCLUSIVE E PROSPETTIVE DELLO STUDIO DI RICERCA", racchiude le considerazioni conclusive sulla morfologia ipotizzata e sul metodo adottato per determinarla, esponendone i vantaggi e le criticità rispetto a quello tradizionale. Quindi si illustrano le possibili prospettive di questo studio di ricerca.

## 0. INTRODUCTION

---

### 0.1 Theme and finality of research

This study was developed within the XXIX cycle of PhD in “Architecture: innovation and heritage”, established by Argonauti Consortium (Politecnico di Bari- Università degli Studi Roma Tre) becoming part of curriculum “culture of construction” and it is in continuity with researches on upgrading of traditional techniques of building in cut stone, which for many years constitute the cultural identity of the Faculty of Architecture in Bari and at a later time of the DICAR, and which are conducted by its founder Prof. Claudio D'Amato Guerrieri and by Prof. Giuseppe Fallacara.

*Stereotomic  
update of dome  
in stone  
architecture*

The aim of this study is to update the traditional construction of the domed space in cut stone, which constitutes architectural heritage of the Mediterranean area and in particular of the Apulian area, recognizing in the organic structural morphology of the stone dome, the consubstantiality of the form, structure and symbol, which determines simultaneously *venustas*, *firmitas* and *utilitas*.

Today the aesthetic model based on individualism and extreme hedonism, leads to research of innovative originality through the formal strangeness often decontextualized, and produces architecture characterized by split of the Vitruvian triad, and in particular from the subordination of structure to architectural shape, whose appearance vain seeks amazement. These complex structures whose modernity is recognized in the formal extravagance and in the use of materials considered innovative, are often expensive and ephemeral.

The study wants to recover the tectonic language and the sense of constructive rationalization inherent to the unitary logic of traditional architectural organism, updating its morphology through the current innovative design techniques.

*Methodology and  
finality of research*

Starting from the analysis of historic hemispherical stone domes, this study focuses on the research on the type of stereotomic bond and on the opportune configuration of building elements which, for the same

size, optimizes the construction of the stone dome compared to tradition, reducing the number of invariants and increasing the aesthetic and static definition. A rigorous geometric study is critical to reach the stereotomic definition of structural elements that, compared to past, becomes easier through the appropriate use of existing infographics software CAD/CAM (Computer-Aided Design/Computer Aided Manufacturing), which allow the direct transfer from three-dimensional model to rapid prototyping machines (RP) and numerical control machines (CNC), which can realize it, simplifying the production process, reaching the unit of idea, project and construction.

The study searches new stereotomic morphologies in order to arrive at critical analysis on topicality of dome in cut stone, where the structural truth becomes clearly visible in the coincidence of form and structure, true essence of architecture: beauty without time of constructed form.

## 0.2 Field, methodology and structure of research

The study is organized as follows:

I. the **FIRST CHAPTER** "DOME IN CUT STONE AS SIMULTANEOUS PRESENCE OF SYMBOLIC FORM AND CONSTRUCTED FORM", exposes the contemporary presence of symbol, form and structure in the architecture of dome in cut stone. The consubstantiality of symbolic form and constructed form is made explicit by relating critically on:

- a. the symbolic value that the dome represents, through the formal analogy between architectural vault and celestial vault (celestial sphere), making a critical in-depth study on the etymological relationship of words "stereoma" and "stereotomy", bringing some examples of historical literature, architectural literature and constructed forms;
- b. the consubstantiality of form and structure inherent in the stone construction technique, which provides for the dry assembling of distinct structural elements and of reduced dimensions, by generating a precise masonry bond that simultaneously determines expressivity aesthetic and structural strength. The concept of weaving that implies a resistant weft, can be traced back historically to the origin of architectural form, derived from the primitive gesture of tying for build. The masonry weaving, therefore the bond of the dome, requires a well-determined geometry that tessellates space generating a resistant structure through form, producing a "spatial adornment with structural value";



II. in the **SECOND CHAPTER** “ANALYSIS OF HISTORIC ARCHITECTONIC METHOD OF STONE DOME SUBDIVISION IN STRUCTURAL ELEMENTS”, it analyzes the historical method used for the bond of stone domes, through some selected case studies, belonging to traditional architecture and to architecture codified by stereotomic discipline. The case studies are analyzed in relation to different historical types of bond of hemispherical domes, in relation to the number, size and material of structural elements invariant and to the size of span. This in order to hypothesize innovative solutions for bonding a hemispherical dome in cut stone, that optimize its construction, through the research of method to reduce the number of ashlar-invariant for the realization of structural adornment, and to simplify it thanks to the modern technologies for design and prototype of building elements;

III. the **THIRD CHAPTER** “ANALYSIS OF ARCHITECTONIC METHOD OF SUBDIVISION OF CUT STONE DOME IN STRUCTURAL ELEMENTS WITH SPHERICAL POLYHEDRAL”, presents the possibility of bonding the stone dome, according to the geometry given by a suitable spherical polyhedron that, dividing dome into parts that are repeated equal to themselves on hemispherical surface, can reduce the number of the invariant ashlar. It is determined the minimum portion in which the sphere is divided into equal parts, and through the analysis of the various possible tessellations of the sphere, is chosen a configuration that can be divided it and that may prove effective for its construction in cut stone. Stereotomic discipline is fundamental, because through geometrical knowledge, it allows to discretize the hemisphere into distinct structural elements, ensuring the static balance of the architectural system;

IV. the **FOURTH CHAPTER** “STEREOTOMIC STRUCTURAL FORM OF DOME IN CUT STONE WITH FIVE-FOLD SYMMETRY”, describes the configuration chosen, that determines the stereotomic bond of the dome in cut stone. The configuration is based on the five-

fold symmetry derived from Kepler's tessellation, never applied to the architectural construction of the domed space in cut stone. The bond defined according to this tessellation is particularly effective for the geometry that optimizes the number of the invariant ashlar, and for the static clamping of the same. This research study analyzes the static behavior of this new bond, and infers the holding limits of the same, through the appropriate subtraction of particular ashlar, thereby unloading the structural form. It is described the method by which it is possible the stereotomic definition of the dome and the construction of a maquette, which allows to determine the phases of bond assembly and to make considerations on its static efficiency. The chapter also describes the static verification of the structural morphology through the geometric-mathematical computer model and prototype in cut stone on small-scale;

V. finally, the **FIFTH CHAPTER** "CONCLUSIVE CONSIDERATION AND FUTURE POSSIBILITIES OF RESEARCH" contains the concluding remarks on hypothesized morphology, and on the method adopted to determine it, giving the advantages and weaknesses compared to the traditional one. Then are discussed the possible prospects of this research study.

### **0.3 Ringraziamenti**

Voglio ringraziare particolarmente il Prof. Claudio D'Amato fondamentale Maestro, guida e riferimento, che mi ha permesso di intraprendere con serena fermezza e totale dedizione questo intenso percorso di studi.

I suoi preziosi consigli e le sue quotidiane azioni, sono esempio insostituibile di insegnamento all'impegno costante, promosso dalla passione per lo studio ed il lavoro, che determina il raggiungimento di importanti obiettivi, volti al miglioramento dell'esistenza.

Le sue indicazioni sulla definizione del tema di progetto architettonico in questo studio di ricerca, sono state indispensabili.

Ringrazio il Prof. Giuseppe Fallacara per aver creduto in questo lavoro e per i suoi utili suggerimenti che mi hanno permesso di studiare i legami teorici e pratici che intercorrono tra le forme e di definirli nell'ottica della realizzazione architettonica.

Ringrazio l' Ing. Daniele Malomo, per il suo considerevole contributo all'indagine statica della nuova soluzione architettonica qui presentata.



## **CAPITOLO I.**

### **La cupola in pietra da taglio come compresenza di forma simbolica e forma costruita**

---

Il fondamento teorico del tema del presente studio di ricerca, individua nella cupola lapidea l'espressione più chiara della consustanzialità di forma simbolica e forma costruita.

#### **I.1 La forma simbolica della cupola lapidea**

Il simbolismo della cupola come «specchio del cielo»<sup>1</sup> evidenzia il valore metafisico dell'architettura e della sua «istanza spirituale come interpretazione del cosmo»<sup>2</sup>, come imago mundi, rappresentazione della volta celeste, attraverso l'analogia morfologica dell'emisfera.

La percezione psicofisiologica<sup>3</sup> dello spazio nel mondo antico permise la comprensione della curvatura della linea d'orizzonte terrestre e dunque la successiva formulazione di teorie scientifiche sulla sfericità del Pianeta e del cosmo. Platone<sup>4</sup> nella prima metà del IV secolo a.C., formulò il modello delle “due sfere” concentriche: la Terra immobile, posta al centro della sfera celeste che ruota uniformemente intorno al proprio asse, definendo così il movimento apparente degli astri. Eudosso di Cnido<sup>5</sup> per spiegare le irregolarità osservabili nel moto dei corpi celesti, formulò l'ipotesi delle diverse sfere omocentriche ruotanti intorno ad assi differenti. Successivamente tali osservazioni

---

<sup>1</sup> CONFORTI CLAUDIA, *Lo specchio del cielo. Forme significati tecniche e funzioni della cupola dal Pantheon al Novecento*, Milano, Electa, 1997

<sup>2</sup> D'AMATO GUERRIERI CLAUDIO, *Perché il Modernismo non ha mai costruito volte*, in “Stereotomic Design” di G. Fallacara e V. Minenna, Maglie (LE), Ed. Gioffreda, 2014, pag. 7

<sup>3</sup> PANOFSKY ERWIN, *La prospettiva come “forma simbolica”*, Milano, Abscondita, 2007, pag.13

<sup>4</sup> PLATONE, *Timeo*, 360 a.C. ca.

<sup>5</sup> EUDOSSO DI CNIDO, *Phaenomena* (Φαινόμενα), pervenutaci attraverso la sua descrizione nell'opera in versi di Arato Soli (ca. 315 a.C.-240 a.C.) “Phaenomena”, composta su richiesta del re di Macedonia Antigono Gonata. Il testo di Arato ci è pervenuto attraverso la traduzione latina di Cicerone “Phaenomena Aratea”, scritta circa nel 90-89 a.C.

permisero a Strabone<sup>6</sup> di «assumere che il cosmo sia uno sferoide (σφαιροειδῆ), e che anche la superficie della Terra sia uno sferoide (σφαιροειδῆ)».

La nascita della scienza esatta nel III secolo a.C., attraverso l'introduzione di misure ottenute con rilievi topografici accurati, di calcoli matematici e dimostrazioni, portò ad uno straordinario risultato che determinò un forte progresso nella conoscenza scientifica sulla sfericità della Terra: la misura della circonferenza terrestre ottenuta da Eratostene di Cirene pari a 252.000 stadi<sup>7</sup> egizi corrispondenti con ottima approssimazione a circa 39,690 Km (lo stadio egizio corrisponde a 157.5 metri), con un errore inferiore all'1%<sup>8</sup> rispetto alla misura assunta attualmente, pari a 40,075 Km.

La speculazione filosofica antica<sup>9</sup> individuò nella sfera la rappresentazione del principio di perfezione universale, a causa delle sue proprietà geometriche che ne determinano i caratteri attribuiti all'Assolutezza, quali unità, omogeneità, compiutezza, immutabilità, «dal centro uguale in ogni parte»<sup>10</sup>, come scrisse Parmenide, perfezione conclusa ma allo stesso tempo infinita, teoricamente espandibile dal suo «centro di emanazione raggiante»<sup>11</sup>. Nel *Libro dei Ventiquattro Filosofi* (XII sec.), si legge una definizione di Assoluto: «Deus est sphaera infinita cuius centrum est ubique, circumferentia nusquam», dove l'Assoluto aristotelico, il Trascendente, è rappresentato come «una sfera il cui centro è dappertutto e la circonferenza in nessun

---

<sup>6</sup> STRABONE, *Geographica*, I, i, 20, in “Stelle, atomi, velieri. Percorsi di storia della scienza” di L. Russo, Milano, Mondadori, 2015, pp. 25,29

<sup>7</sup> RUSSO LUCIO, *Stelle, atomi, velieri. Percorsi di storia della scienza*, Milano, Mondadori, 2015, pag. 21

<sup>8</sup> *Ibidem*

<sup>9</sup> PITAGORA; PARMENIDE, *Sulla Natura (Περὶ Φύσεως)*, V sec. a. C.; PLATONE, *Timeo*, 360 a.C. ca.

<sup>10</sup> PARMENIDE, *Sulla Natura (Περὶ Φύσεως)*, V sec. a. C., *Il discorso sulla verità*, DK 28 B, frammento 8, vv. 43-44: «εὐκύκλου σφαίρης ἐναλίγκιον ὄγκωι./μεσσόθεν ἰσοπαλὲς πάντη», trad. it. di Albino Nollelli: «simile a massa di ben rotonda sfera, dal centro uguale in ogni parte».

<sup>11</sup> ZAVIZIANO COSTANTINO, *Sugli avvenimenti preistorici*, Napoli, Tipografia Morano, 1872, vol. II, pag. 89

luogo», come «intelligibilis sphaera»<sup>12</sup>, ad indicare lo spazio infinito, perfetto, immutabile.

La teoria sulla sfericità dei corpi celesti e sulla legge curvilinea del loro moto secondo precisi rapporti proporzionali geometrici e matematici, permise nell'antichità classica l'associazione fra dimensione, movimento, forma e suono, determinando la concezione dell'universo regolato dall' "armonia delle sfere", poeticamente espressa da Dante Alighieri<sup>13</sup> e scientificamente indagata da J. von Kepler<sup>14</sup>, che anticiparono la teoria sulla struttura dell'universo come "tre-sfera" formulata da Albert Einstein, coerente con le attuali misure cosmologiche<sup>15</sup>.

Questa teoria, infatti, descrive l'universo, come spazio costituito da sfere continue, ciascuna delle quali comprende l'altra ed è reciprocamente compresa da questa, «parendo inchiuso da quel ch'elli 'nchiude»<sup>16</sup> come appunto scrisse Dante.

Secondo diversi studi, come quelli condotti dal Prof. Marco Santagata<sup>17</sup> e come fa notare Carlo Rovelli<sup>18</sup>, è possibile ritenere che

---

<sup>12</sup> PLOTINO, *Enneadi*, II, 9, 17; VI, 5, 5; VI, 9, 8. Citato in: "Principi architettonici nell'età dell'umanesimo" di Rudolf Wittkower, Trento, Einaudi, 2010, pag. 20

<sup>13</sup> ALIGHIERI DANTE, *Divina Commedia*, (1304-1321), *Paradiso*, VI, v. 126: «rendono dolce armonia tra queste rote»; *Paradiso*, XXVII, vv. 113-114: «d'un cerchio lui comprende,/ sì come questo li altri»; *Paradiso*, XXX, vv. 103-108 : «E' si distende in circular figura,/ in tanto che la sua circonferenza/sarebbe al sol troppo larga cintura./Fassi di raggio tutta sua parvenza/reflesso al sommo del mobile primo, /che prende quindi vivere e potenza», dove la parola raggio indica sia la luce che dal centro cosmico si riflette, si proietta sulla superficie convessa (sommo) del Primo Mobile, sia quindi al raggio geometrico della sfera celeste.

<sup>14</sup> VON KEPLER JOHANNES, *Mysterium Cosmographicum*, Tubinga, 1596, AW 796, Tab. III, between pp. 24-25, Zentralbibliothek Zürich

<sup>15</sup> ROVELLI CARLO, *Dante e Einstein nella tre-sfera*, articolo tratto da "Il Sole 24Ore" del 20-10-2010; PATAPIEVICI ROMAN HORIA, *Gli occhi di Beatrice. Com'era davvero il mondo di Dante?*, Milano, Bruno Mondadori, 2006

<sup>16</sup> ALIGHIERI DANTE, *Divina Commedia*, *Paradiso*, XXX, v. 12

<sup>17</sup> SANTAGATA MARCO, *L'io e il mondo. Un'interpretazione di Dante*, Bologna, Il Mulino, 2011. Marco Santagata è Professore Ordinario presso il Dipartimento di Filologia, Letteratura e Linguistica dell'Università di Pisa.

<sup>18</sup> ROVELLI CARLO, *Dante e Einstein nella tre-sfera*, articolo tratto da "Il Sole 24Ore" del 20-10-2010

Dante Alighieri abbia avuto modo di vedere i mosaici che ricoprono l'intradosso della cupola del *Battistero di San Giovanni* a Firenze, disposti nel 1270 e completati verso il 1300 circa, ricordando anche che egli lasciò Firenze nel 1301, inizio del suo esilio.

«Nel mio bel San Giovanni»<sup>19</sup> scrisse infatti il Poeta nella *Divina Commedia*, riferendosi alla struttura architettonica del Battistero, molto verosimilmente completato quando egli scrisse questi versi, secondo la datazione attualmente accettata del poema, composto dal 1304 ed il 1321.

Sull'intradosso della cupola i luminosi mosaici su fondo dorato raffigurano gerarchicamente il Trascendente, disponendo le figure lungo diverse fasce concentriche che esprimono la concezione spirituale del mondo secondo la visione medievale definita dal sistema cosmologico aristotelico-tomistico e che si pongono in continuità con i versi dell'Alighieri (FIG. 1).

Successivamente gli affreschi all'intradosso della cupola progettata e costruita da Filippo Brunelleschi per la *Cattedrale di Santa Maria del Fiore* a Firenze, iniziati nel 1572 da Giorgio Vasari e Vincenzo Borghini e proseguiti da Federico Zuccari, che costituiscono per la superficie coperta, uno dei più grandi cicli di affreschi al mondo, (FIG. 2), riprendono la composizione figurativa dei mosaici posti all'intradosso della cupola del *Battistero di San Giovanni*, seguendo un moto rotatorio ed ascendente di spazi concentrici intorno alla sommità centrale, iconograficamente ed iconologicamente molto simile alla rappresentazione della *Candida Rosa* dantesca che Gustave Doré incise nel 1880 (FIG. 3).

Nel presente studio è importante notare come nell'architettura storica siano presenti molti esempi che evidenziano attraverso la decorazione dell'intradosso delle volte ed in particolare di quello delle cupole, l'analogia formale con lo spazio sferico celeste.

Tra gli esempi più significativi si riporta qui la decorazione della cupola del *Mausoleo di Galla Placidia* (FIG. 4), costruita nella prima

---

<sup>19</sup> ALIGHIERI DANTE, *Divina Commedia, Inferno*, XIX, v. 17





1. Mosaici della  
cupola del  
Battistero di  
San Giovanni,  
ca. 1270-1300,  
Firenze



2. Affreschi della  
cupola della  
Cattedrale di  
Santa Maria del  
Fiore, iniziati nel  
1572, Firenze



3. Gustave Doré,  
*Candida Rosa*, 1880



4. Cupola del  
Mausoleo di Galla  
Placidia, prima metà  
del V sec. d.C.,  
Ravenna,  
foto di Franco Cosimo  
Panini Editore



5. Cupola della  
Chiesa di Santa  
Maria in Solario,  
metà XII sec.,  
Brescia



6. Cupola del  
Duomo di Siena  
(Cattedrale di Santa  
Maria Assunta),  
1481-1494,  
Siena



metà del V sec., dopo il 425 a Ravenna, dove stelle dorate su fondo blu-notte si dipartono concentricamente come emanazione dalla luminosa croce gemmata centrale posta alla sommità della cupola, raffigurazione del Motore Primo «amor che move il sole e l'altre stelle<sup>20</sup>». La non uniformità del colore del cielo raggiunta attraverso l'accostamento di tessere con tonalità ed inclinazioni differenti, che riflettono la luce delle tessere più chiare quali quelle della croce e delle stelle, crea la percezione di una profondità spaziale sferica che rende immediato il passaggio dall'architettura al simbolo, dalla forma costruita della cupola alla forma simbolica della sfera celeste, individuato nello stupore umano che si crea quando si coglie la bellezza dello spazio guardando verso l'alto, «a riveder le stelle»<sup>21</sup>.

Similmente la decorazione dell'intradosso della cupola della *Chiesa di Santa Maria in Solario* (FIG. 5), costruita a partire dalla metà del XII sec. a Brescia, è costituita da un affresco raffigurante un cielo blu intenso su cui si stagliano le applicazioni bronzee costituenti le stelle che si dipartono come irradiazione dal centro in cui alla simbologia della Croce presente nel *Mausoleo di Galla Placidia*, è sostituita la figura di Dio. Analogamente, ma in modo più consustanziale alla forma architettonica costruita, si pone la decorazione della cupola cassettonata del *Duomo di Siena (cattedrale di Santa Maria Assunta)* (FIG. 6), realizzata tra il 1481 ed il 1494, dove le stelle in rame dorato sono poste al centro di ogni cassettone a fondo blu, seguendo l'andamento radiale e concentrico del cassettonato fino alla luce in sommità emanata dalla lanterna, progettata da Gian Lorenzo Bernini e costruita nel 1666, sulla cui volta è rappresentata una colomba, simbolo dello Spirito Santo. Cupola cassettonata che ricorda il perfetto spazio sferico cupolato del Pantheon (118-128 d.C.), dal greco Πάνθεον [ἱερόν] “[tempio] di tutti gli dei” (πᾶν, “il tutto, la totalità, l'insieme” e θεός, “divinità”) opera di Apollodoro di Damasco che costituisce un chiaro rimando alla volta celeste, geometria tridimensionale simbolo per eccellenza della perfezione divina (FIG. 7).

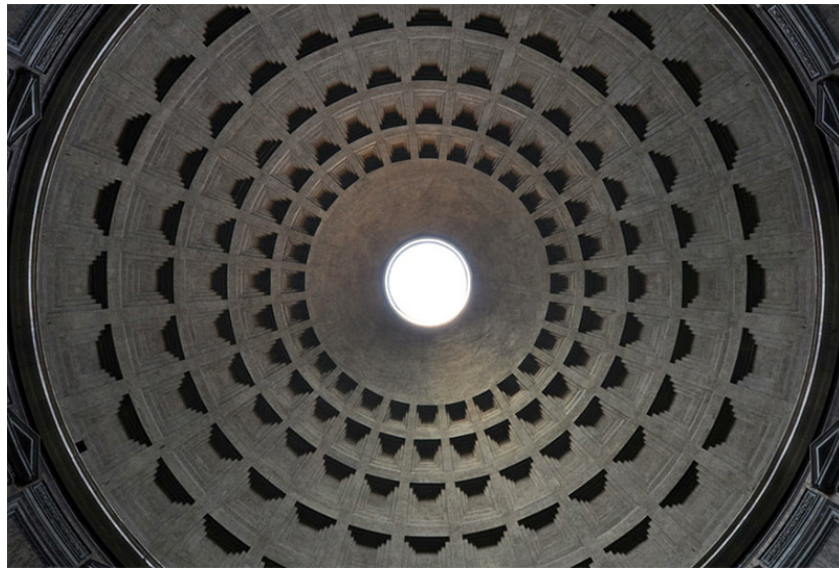
---

<sup>20</sup> ALIGHIERI DANTE, *Divina Commedia, Paradiso*, XXXIII, v. 145

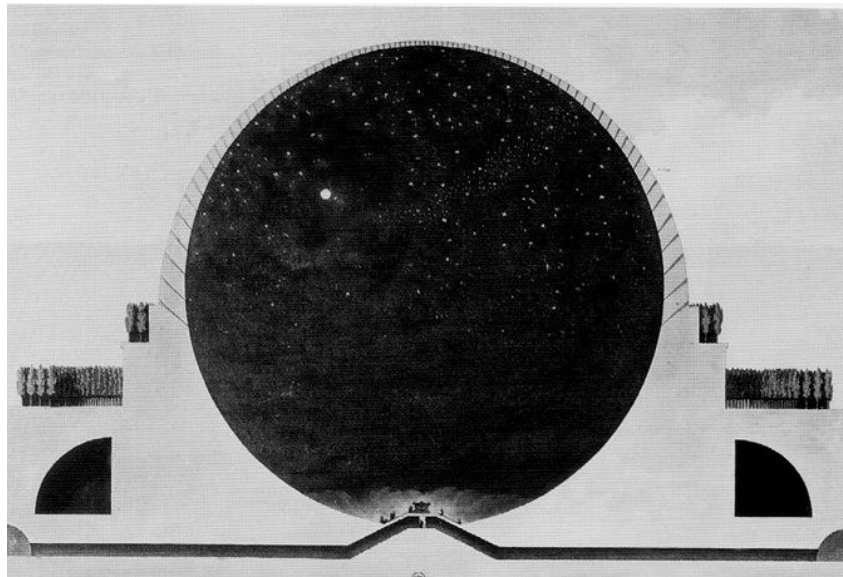
<sup>21</sup> ALIGHIERI DANTE, *Divina Commedia, Inferno*, XXXIV, v. 139



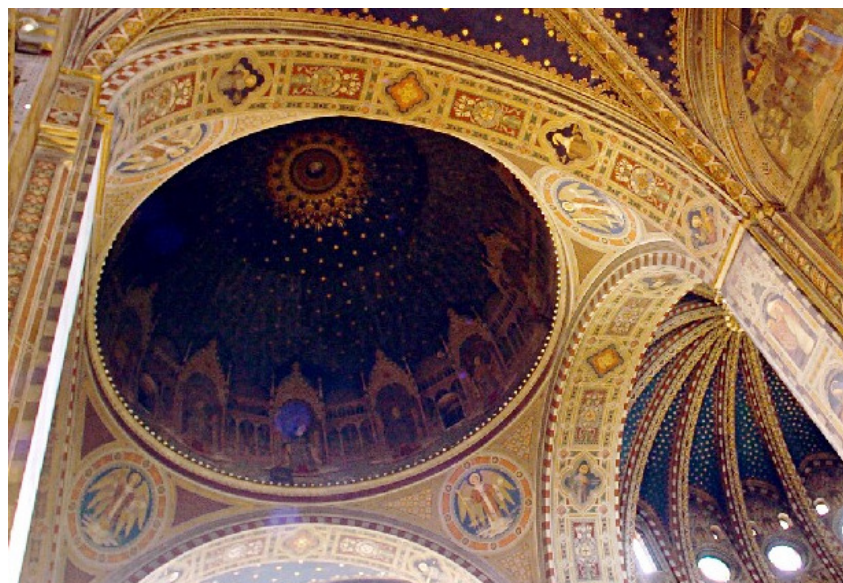
7. Apollodoro di  
Damasco,  
*Pantheon*, cupola,  
118-128 d.C.,  
Roma



8. Étienne-Louis  
Boullée, Progetto  
per il *Cenotafio di  
Newton*, 1784



9. Cupola sull'altare  
maggiore della  
Basilica di  
Sant'Antonio,  
1232-1310,  
Padova



«Il Pantheon sembra quasi l'immagine visibile dell'universo; nella perfezione delle proporzioni si perde e si assorbe l'idea di grandezza, come quando si guarda l'infinita volta del cielo»<sup>22</sup>, scrisse P. B. Shelley. Nel Pantheon non sono presenti decorazioni che evidenziano l'analogia con la sfera celeste, ma essa è intrinsecamente espressa con eleganza dalla geometria dell'emisfera. Similmente avviene nel progetto visionario di Étienne-Louis Boullée per il *Cenotafio di Newton (Mausoleo di Newton)* del 1784 (FIG. 8), dove la geometria della cupola rappresenta la sfericità del cosmo di cui I. Newton indagò le leggi fisiche<sup>23</sup>, ma dove l'analogia è evidenziata attraverso le aperture nell'immensa cupola buia che lasciano penetrare la luce creando la luminosità di un cielo stellato. Questo progetto può essere considerato come punto di contatto tra la rappresentazione dell'analogia formale attraverso la decorazione e quella espressa attraverso la forma architettonica costruita.

Altro esempio significativo di rappresentazione analogica è costituito dalla decorazione della cupola emisferica (FIG.9) posta sull'altare maggiore della *Basilica di Sant'Antonio di Padova*, dove un cielo stellato inonda radialmente lo spazio fino ad incontrare la superficie terrestre rappresentata lungo l'intradosso dei filari inferiori della cupola. Sono state citate in particolare le rappresentazioni della dimensione celeste sull'intradosso delle cupole, ma molte altre sono le rappresentazioni poste sull'intradosso delle volte, come accade nella stessa *Basilica di Sant'Antonio di Padova*, e nel *Duomo di Siena (cattedrale di Santa Maria Assunta)*, nel *Duomo di San Gimignano*

---

<sup>22</sup> SHELLEY PERCY BYSSHE, *Essays, Letters from Abroad. Translations and Fragments*, 2 voll., Londra, Edward Moxon, Bradbury and Evans Printers, 1840, vol. II, pag. 203: «The Pantheon [...] it is, as it were, the visible image of the universe; in the perfection of its proportions, as when you regard the unmeasured dome of heaven, the idea of magnitude is swallowed up and lost.», trad. it. in «Roma capricciosa. Miti leggende aneddoti fatti di ieri e di oggi narrati da Mario dell'Arco» di Mario Dell'Arco, Roma, Il Nuovo Cracas Editore, 1967, pag. 12

<sup>23</sup> Isaac Newton introdusse la legge di gravitazione universale nell'opera *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* del 1687, ponendo le basi della «meccanica celeste» (parte della meccanica classica che studia il moto dei corpi celesti) il cui termine fu introdotto oltre cento anni dopo da Pierre-Simon Laplace nella sua opera *Mécanique Céleste* (1799-1825).

(collegiata di Santa Maria Assunta), o nella *Basilica di Santa Maria* a Cracovia, o ancora nella *Basilica superiore di San Francesco d'Assisi* ad Assisi, all'intradosso delle volte a crociera della cripta inferiore della *Sainte-Chapelle* a Parigi.

Esempi la cui vasta frequenza sottolinea come da sempre lo spazio architettonico voltato sia rappresentazione simbolica dello spazio celeste, possedendo caratteri di tensione all'infinito attraverso la concezione intellettuale di un'alta spiritualità.

«Neque me praeterit Ennium poetam maximas coeli appellasse fornices (e non mi è nascosto che il poeta Ennio parla di volte vastissime del cielo) [...] Quod si arcus ipsi complures et coaequales mutuo unicum in punctum medii culminis sese intersecuerint, testudinem constituent coelo similem: rectam inde sphericam appellari sic placuit (se invece molti archi uguali si intersecano tra loro in un sol punto situato nel mezzo e in cima, costituiscono una volta simile a quella celeste, e si volle perciò chiamarla sferica)», scrisse Leon Battista Alberti nel *De re aedificatoria (Liber III, Caput XIV)*<sup>24</sup>.

Nella lingua italiana le espressioni “volta celeste” e “volta architettonica” hanno in comune lo stesso termine, che sottolinea la profonda corrispondenza di simbolo e architettura nella morfologia dello spazio voltato.

Anche la parola *stereotomia*, utilizzata per la prima volta nell'opera di Jacques Curabelle intitolata *Examen des oeuvres du Sieur Desargues*<sup>25</sup> del 1644, indicando la definizione architettonica dello spazio voltato attraverso il taglio degli elementi lapidei che lo compongono, possiede nella sua etimologia il riferimento allo spazio celeste.

La volta o emisfera celeste, anticamente concepita come solida, fissa, immutabile anche nelle sue periodiche variazioni dovute ai moti

---

<sup>24</sup> ALBERTI LEON BATTISTA, *L'architettura (De re aedificatoria)*, testo latino e traduzione a cura di Giovanni Orlandi. Introduzione e note di Paolo Portoghesi, 2 Tomi, Milano, Edizioni Il Polifilo, 1966, Tomo I, Libro III, Capitolo XIV, pp. 240-243. La traduzione a pag. 240 riporta: «So bene, del resto, che Ennio parla di 'volte vastissime' del cielo».

<sup>25</sup> FALLACARA GIUSEPPE, *Verso una progettazione stereotomica. Nozioni di stereotomia, stereotomia digitale e trasformazioni topologiche: ragionamenti intorno alla costruzione della forma*, Roma, Aracne editrice, 2007, pag. 36

celesti, si riflette, infatti, nell'emisfera o cupola architettonica *stereotomica*, dove la solidità dell'intera forma strutturale è ottenuta attraverso la connessione dei suoi elementi *solidi* componenti effettuata attraverso l'opportuna progettazione del loro *taglio* che determina l'efficacia del nodo organico architettonico.

Il termine *stereotomia*, infatti, riferito all'arte del taglio dei solidi, è composto dalle antiche parole greche στερεός (*stereos*) "solido" e τομή (tomè) "taglio". Il termine στερεός (*stereos*) nella sua accezione geometrica indica il "tridimensionale"<sup>26</sup>, campo di indagine della *geometria solida* (o *stereometria*) che studia, misura e definisce le figure geometriche formate da punti compresi in una porzione di *spazio a tre dimensioni*, caratterizzate quindi da altezza, larghezza e profondità, dette appunto *solidi geometrici*, che occupano un dato *volume*.

La parola στερεός (*stereos*) racchiude quindi il senso di *solidità* sia nel significato di *saldezza, compattezza e robustezza* materica e strutturale, sia nel senso geometrico-spaziale di *tridimensionalità*<sup>27</sup>.

Il volume di un solido, ossia lo spazio misurabile che esso occupa, è per definizione *stabile, fisso*, caratterizzato da elevata resistenza a variazione a causa della *compatta* struttura della materia, dove la coesione molecolare è così intensa che, oltre il volume, il solido tende a conservare la propria *forma*, resistendo alle deformazioni<sup>28</sup>.

---

<sup>26</sup> PLATONE, *Filebo* (Φίληβος), 51c; EUCLIDE, *Elementi* (Στοιχεῖα), 11 Def. P.Oxy. (Papiro di Ossirinco) 669.7; σ. ἀριθμός, numero cubico, ARISTOT. *Politica* (Τὰ πολιτικά), 1316a 8; τὰ σ., numeri cubici che rappresentano corpi tridimensionali PLATONE, *Teeteto* (Θεαίτητος) 148 b. Tratto da: MONTANARI FRANCO, *Vocabolario della lingua greca*, Milano, Loescher Editore, 2003, (I Ed. 1995) e LIDDELL HENRY GEORGE, SCOTT ROBERT, *A Greek-English Lexicon. Revised and augmented throughout by Sir Henry Stuart Jones with the assistance of Roderick McKenzie*, Oxford, Clarendon Press, 1940

<sup>27</sup> Da qui le parole derivate come "stereometria" o geometria solida, disciplina che riguarda lo studio e la misurazione dei solidi; "stereoscopia" percezione ottica della tridimensionalità degli oggetti nello spazio che generalmente è conseguenza della visione binoculare; "stereofonia" percezione uditiva dei caratteri spaziali dei suoni che generalmente è conseguenza dell'audizione binaurale. Il termine stereoma denota, inoltre, nella lingua corrente, il fusto della pianta che ne individua il sostegno, la forma strutturale resistente.

<sup>28</sup> DEVOTO GIACOMO, OLI GIAN CARLO, *Nuovo vocabolario illustrato della lingua italiana*, 2 voll., Milano, Edizioni di Selezione dal Reader's Digest S.p.A. grandi opere, 1991 (I Ed. 1987), vol. II

Solida è quindi una forma strutturale che occupa stabilmente un volume.

La radice στερεο- (stereo-) del termine στερεός (stereos) è contenuta anche nell'antica parola greca στερέωμα (stereoma) "corpo solido, sostegno, fondamento"<sup>29</sup> che designa anche la solida struttura della volta celeste nel libro della *Genesi* presente nella *versione dei Settanta* o *Septuaginta*<sup>30</sup>, traduzione greca del più antico libro ebraico אשיתר (Bereshit)<sup>31</sup> "Genesi", dove רקיע (rakía) "struttura espansa, compatta, solida"<sup>32</sup> è l'antica parola ebraica tradotta con il greco στερέωμα (stereoma).

Il termine רקיע (rakía) indica infatti la porzione di cielo visibile dalla superficie terrestre e percepita *emisferica* a causa della curvatura del Pianeta, indica quindi la volta celeste come *estesa, stabile e compatta copertura* della terra. Nell'attuale lingua ebraica רקיע (rakía) indica infatti *il cielo* nella sua compatta estensione concava, notando che la parola "cielo" a sua volta deriva dall'antico termine greco κοῖλος (coilos) "cavo, concavo"<sup>33</sup>.

<sup>29</sup> MONTANARI FRANCO, *Vocabolario della lingua greca*, Milano, Loescher Editore, 2003, (I Ed. 1995)

<sup>30</sup> *Septuaginta (LXX) o versione dei Settanta*, (III-I sec. a. C.), Γένεσις (Ghènesis) "Genesi", 1, 6-8: «<sup>6</sup>καὶ εἶπεν ὁ θεὸς γενηθήτω στερέωμα ἐν μέσῳ τοῦ ὕδατος καὶ ἔστω διαχωρίζον ἀνὰ μέσον ὕδατος καὶ ὕδατος καὶ ἐγένετο οὕτως <sup>7</sup>καὶ ἐποίησεν ὁ θεὸς τὸ στερέωμα καὶ διεχώρισεν ὁ θεὸς ἀνὰ μέσον τοῦ ὕδατος ὃ ἦν ὑποκάτω τοῦ στερεώματος καὶ ἀνὰ μέσον τοῦ ὕδατος τοῦ ἐπάνω τοῦ στερεώματος <sup>8</sup>καὶ ἐκάλεσεν ὁ θεὸς τὸ στερέωμα οὐρανόν», trad. it. testo C.E.I. 2008: «<sup>6</sup>Dio disse: "Sia un firmamento in mezzo alle acque per separare le acque dalle acque". <sup>7</sup>Dio fece il firmamento e separò le acque che sono sotto il firmamento dalle acque che sono sopra il firmamento. E così avvenne. <sup>8</sup>Dio chiamò il firmamento cielo».

<sup>31</sup> תנך (Tanàkh) Antico Testamento, אשיתר (Bereshit) "Genesi", 1, 6-8:

וַיֹּאמֶר אֱלֹהִים יְהִי רָקִיעַ בְּתוֹךְ הַמַּיִם וַיְהִי מְבֻדֵּל בֵּין מַיִם לַמַּיִם: <sup>7</sup>וַיַּעַשׂ אֱלֹהִים אֶת־הַרָקִיעַ וַיְבַדֵּל בֵּין הַמַּיִם אֲשֶׁר מִתַּחַת לַרָקִיעַ וּבֵין הַמַּיִם אֲשֶׁר מֵעַל לַרָקִיעַ וַיְהִי־כֵן: <sup>8</sup>וַיִּקְרָא אֱלֹהִים לַרָקִיעַ שָׁמַיִם וַיְהִי־עֶרֶב וַיְהִי־בֹקֶר יוֹם שֵׁנִי: פ

In rosso scuro è riportata la parola רקיע (rakía). Per la trad. it. testo C.E.I. 2008 si veda la nota 30.

<sup>32</sup> BROWN FRANCIS, DRIVER SAMUEL ROLLES, BRIGGS CHARLES AUGUSTUS, *A Hebrew and English Lexicon of the Old Testament*, Oxford, Clarendon Press, 1939 (I Ed. 1906)

<sup>33</sup> MONTANARI FRANCO, *Vocabolario della lingua greca*, Milano, Loescher Editore, 2003, (I Ed. 1995). Si noti come anche la parola "atmosfera" dal greco antico ἀτμός (atmòs) "vapore" e σφαῖρα (sphàira) "sfera", significhi letteralmente "sfera



Successivamente nella *Vulgata*<sup>34</sup> la parola στερέωμα (stereoma) venne tradotta in latino con il termine *firmamentum*, utilizzato per la prima volta con riferimento astronomico ad indicare la salda volta del cielo, derivante dalla parola latina *firmus*<sup>35</sup> “fermo, saldo, stabile, durevole, immutabile”, rappresentato più volte in antichità come spazio voltato concluso e continuo.

In particolare Cosma Indicopleuste ovvero “che viaggiò in India”, pseudonimo di Costantino di Antiochia (VI sec.), mercante e cartografo alessandrino che si dedicò anche alla scrittura del suo pensiero sulla configurazione cosmologica, rappresenta nella *Topographia Christiana*, le cui trascrizioni più antiche risalgono al XI sec.<sup>36</sup> (FIG. 10), lo stereoma come volta celeste che si erge sulla terra.

Una rappresentazione che ricorda la decorazione affrescata che Giotto (1267ca.-1337) dipinse sull'intradosso della volta della *Cappella degli Scrovegni* a Padova (XIV sec.), dove sullo sfondo dipinto col pigmento blu oltremare si stagliano le stelle e le raffigurazioni inserite all'interno dei clipei del Cristo, San Giovanni Battista e tre Profeti nella parte adiacente all'abside e le raffigurazioni della Madonna e quattro Profeti nella parte della volta adiacente alla facciata<sup>37</sup>(FIG.11). Analogicamente a questa rappresentazione dello spazio celeste in architettura, si pone l'affresco sull'intradosso della volta della *Cappella Sistina*, antecedente a quelli del Michelangelo, opera di Piermatteo d'Amelia collocato temporalmente alla fine del XVI secolo, documentato da un disegno

---

di vapore”, indicando l'involucro gassoso di varia composizione e natura che circonda la Terra ed altri pianeti.

<sup>34</sup> *Vulgata*, fine del IV secolo d.C., Liber Genesis, 1, 6-8; *Nova Vulgata*, 1979, Liber Genesis, 1, 6-8: «<sup>6</sup>Dixit quoque Deus: “Fiat **firmamentum** in medio aquarum et dividat aquas ab aquis”. <sup>7</sup>Et fecit Deus **firmamentum** divisitque aquas, quae erant sub **firmamento**, ab his, quae erant super **firmamentum**. Et factum est ita. <sup>8</sup>Vocavitque Deus **firmamentum** Caelum ». Per la trad. it. testo C.E.I. 2008 si veda la nota 30.

<sup>35</sup> CASTIGLIONI LUIGI, SCEVOLA MARIOTTI, *Vocabolario della lingua latina*, Milano, Loescher Editore, 1996

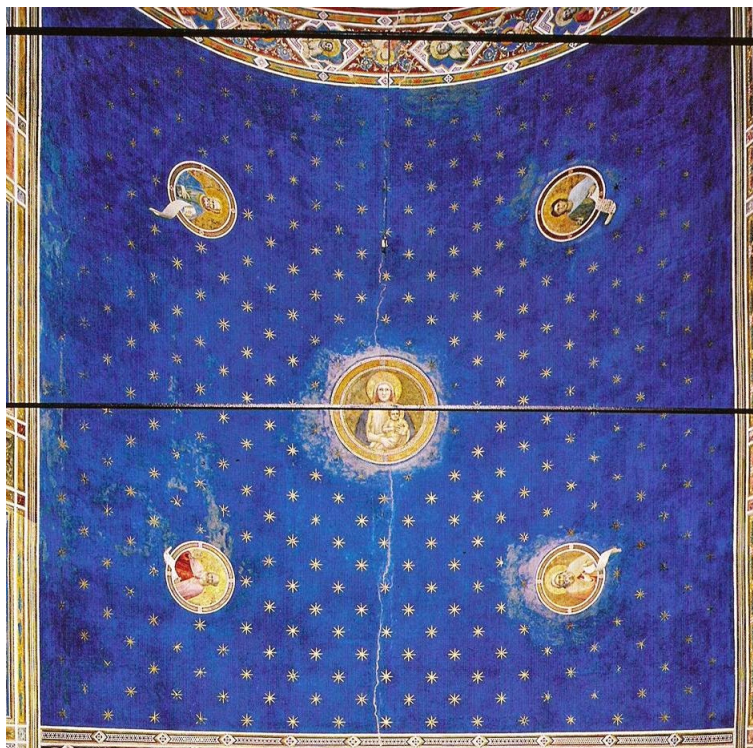
<sup>36</sup> FALLACARA GIUSEPPE, *Stereotomia e rappresentazione del Mondo*, in “Stereotomic Design” di G. Fallacara e V. Minenna, Maglie (LE), Ed. Gioffreda, 2014, pag. 18

<sup>37</sup> SPIAZZI ANNA MARIA, *Giotto. La cappella degli Scrovegni di Padova*, contributi di Giuseppe Basile e Serenella Borsella, Ginevra-Milano, Skira Editore, 2013, pag. 13

10. Cosma  
Indicopleuste,  
Rappresentazione  
del cosmo in  
"Topographia  
Christiana",  
XI sec., Firenze,  
Biblioteca Medicea  
Laurenziana,  
Pl. 82.10,  
cc. 95v-96r



11. Giotto,  
affreschi sulla  
volta della  
Cappella degli  
Scrovegni,  
XIV sec.,  
Padova



di progetto attribuito allo stesso P. d'Amelia, conservato presso il Gabinetto dei disegni e delle stampe (GDSU) degli Uffizi a Firenze (FIG. 12), e successivamente raffigurato in una stampa del XIX secolo (FIG. 13).

La morfologia architettonica cupolata per rappresentare lo spazio celeste è stata utilizzata anche da Karl Friedrich Schinkel quando nel 1815 progettò la scenografia architettonica *Salone delle stelle nel palazzo della Regina della Notte*, per la scena 6 dell'Atto I del *Flauto Magico (Die Zauberflöte)* di W. A. Mozart, dove il cielo stellato con morfologia a cupola circonda la *Regina della Notte*, la cui raffigurazione ad opera dello stesso Schinkel è conservata presso la Gemäldegalerie a Berlino (FIG. 14).

Lo spazio voltato possiede quindi una forte valenza spirituale riferendosi alla morfologia cosmica di cui l'architettura ne rappresenta il simbolo e ne costituisce l'interpretazione.

La cupola è la forma classica dell'organismo architettonico espressione della perfetta «sintesi tra forma e contenuto»<sup>38</sup>, consustanzialità che secondo G. W. F. Hegel individua l'essenza della bellezza e dell'arte, «in armonia con il suo più autentico concetto, l'unione del contenuto spirituale e della forma esteriore»<sup>39</sup>.

La perdita della forma voltata stereotomica nella maggior parte delle architetture contemporanee, è indice della perdita del senso spirituale del λόγος eracliteo, della logica unitaria che connette le strutture cosmiche attraverso precise leggi che nella consustanzialità esatta di firmitas, utilitas e venustas determinano elegantemente la Bellezza.

La frammentazione dei legami, l'ottica funzionalista-meccanicista ed il forte individualismo caratteristico della società attuale, definita da Zygmunt Bauman "liquida"<sup>40</sup> perché basata su valori effimeri e non solidi, ha portato in architettura a considerare soltanto il mero dato

---

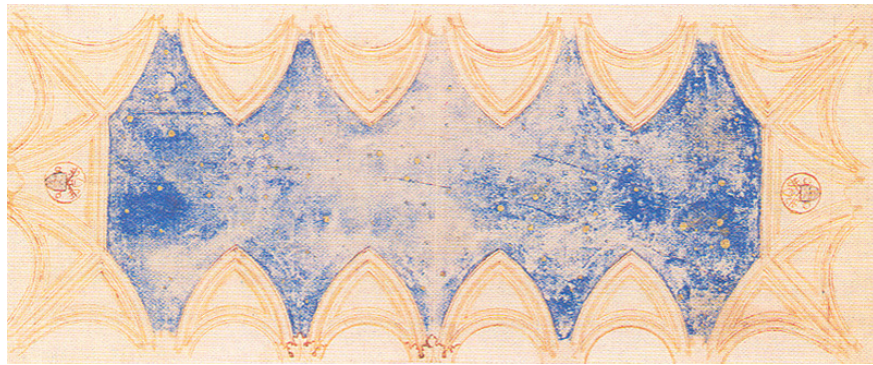
<sup>38</sup> FRAMPTON KENNETH, *Tettonica e architettura. Poetica della forma architettonica nel XIX e XX secolo*, Milano, Skira Ed., 2007, pag. 86

<sup>39</sup> *Ibidem*

<sup>40</sup> BAUMAN ZYGMUNT, *Modernità liquida*, Roma-Bari, Laterza, 2011 (I Ed. "Liquid Modernity", Cambridge, Polity Press, 2002)



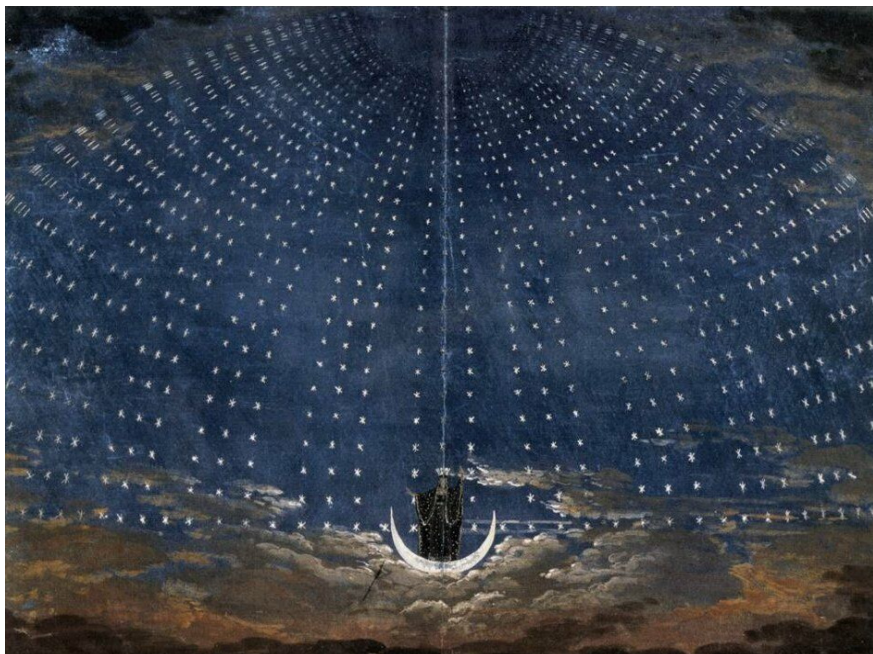
12. Piermatteo d'Amelia, Progetto per l'affresco sulla volta della Cappella Sistina, XVI sec., Gabinetto dei disegni e delle stampe degli Uffizi, Firenze



13. Cappella Sistina, Stampa del XIX sec.



14. Karl Friedrich Schinkel, Scenografia *Salone delle stelle nel palazzo della Regina della Notte*, 1815, Gemäldegalerie, Berlino



funzionale, portando alla scissione analitica di *spirito* e *materia*, di  $\psi\upsilon\chi\eta$  (psiuchè) e  $\iota\upsilon\lambda\eta$  (i(u)le) che concorrono alla  $\tau\acute{\epsilon}\chi\nu\eta$  (téchne) “il saper fare a regola d’arte”, di *Kunstform* (forma simbolico-artistica) e *Kernform* (forma tecnica) come le definì Karl Bötticher<sup>41</sup>, disgregando l’unità vitruviana di firmitas, utilitas e venustas, scindendo forma e struttura e subordinando sempre più quest’ultima alla prima.

«Assistiamo oggi all’ “irrazionale” sottomissione della struttura alla forma»<sup>42</sup>, «il linguaggio è superato dalla continua invenzione formale, dall’accettazione della forma come risultato»<sup>43</sup>, portando infatti ad una vana apparenza che cerca solo stupore e ad architetture generiche, “contenitori” privi di caratteri tipo-morfologici, indifferenti alla specificità derivata dalla particolare destinazione d’uso, «gigantesche icone architettoniche capaci di assumere nella loro astratta disponibilità qualsiasi possibile programma»<sup>44</sup>.

Il rifiuto della logica costruttiva organica propria del linguaggio classico dell’architettura è stato spesso giustificato sia con motivi dettati dalla globalizzazione spesso omologante<sup>45</sup>, sia con motivi economici sia con la limitatezza attribuita alla tecnica costruttiva muraria a causa dei suoi caratteri di forte matericità, compattezza, pesantezza, limitatezza dimensionale.

Contrariamente a questo, la conoscenza approfondita della disciplina stereotomica rivela enormi potenzialità dell’architettura organica a carattere murario, derivate dalla progettazione accurata degli elementi strutturali, ottimizzati per forma, numero e dimensione, razionalizzando quindi la costruzione.

---

<sup>41</sup> BÖTTICHER KARL, *Die Tektonik der Hellenen*, Potsdam, 1844-1852, citato in “Tettonica e architettura. Poetica della forma architettonica nel XIX e XX secolo”, di K. Frampton, Milano, Skira Ed., 2007, pag. 22

<sup>42</sup> D’AMATO GUERRIERI CLAUDIO, *Perché il Modernismo non ha mai costruito volte*, in “Stereotomic Design” di G. Fallacara e V. Minenna, Maglie (LE), Ed. Gioffreda, 2014, pag. 7

<sup>43</sup> MONEO RAFAEL, *L’altra modernità. Considerazioni sul futuro dell’architettura*, Milano, Christian Marinotti Edizioni, 2015, pag. 73

<sup>44</sup> Ivi, pag. 89

<sup>45</sup> «globalizzazione omologante» in PURINI FRANCO, *Comporre l’architettura*, Roma-Bari, Editori Laterza, 2000, pag. 163

Poiché, in accordo con le parole di Rafael Moneo, «la costruzione dell'architettura ha sempre comportato l'invenzione della forma»<sup>46</sup>, saper progettare l'ottimizzazione degli elementi strettamente necessari alla forma resistente attraverso la loro configurazione formale, consente di poter ridurre gli spessori murari, effettuare bucatore e ricercare quindi nuove morfologie strutturali che definiscano la possibilità dello spazio stereotomico voltato di rappresentare attraverso la propria architettura la leggerezza dello spazio curvo celeste di cui ne costituisce il simbolo.

La forma simbolica della cupola lapidea può dunque essere rivelata dalla stereotomia, intesa come rappresentazione dello spazio leggero, quasi immateriale del Cielo, attraverso la solidità e massività dello spazio cupolato in pietra da taglio, nella possibilità di esprimere nel progetto architettonico caratteri di leggerezza formale adoperando un materiale pesante per definizione, in accordo con le parole di Charles Perrault che definisce la stereotomia «art de se servir de la pesanteur de la pierre contre elle-même et de la faire soutenir en l'air par la même poids qui la fait tomber»<sup>47</sup>, ovvero «arte di servirsi del peso stesso della pietra per farla sostenere in alto, dalla stessa forza che la farebbe cadere in basso».

Analogicamente al significato di *solida stabilitas* racchiuso nei termini רַקִּיָּע (rakía), στερέωμα (stereoma) e *firmamentum*, *stereotomica* è una forma strutturale organica, conclusa e continua, la cui forte stabilità, *firmitas*, è data dalla salda connessione degli elementi solidi che la compongono, restituendo il senso della logica strutturale cosmica che lega anche i suoi elementi più leggeri attraverso precise leggi che rispono alla *firmitas*, poiché solide, all' *utilitas*, poiché utili ed alla *venustas*, riflessa attraverso l'armonica proporzione che determinano.

---

<sup>46</sup> MONEO RAFAEL, *L'altra modernità. Considerazioni sul futuro dell'architettura*, Milano, Christian Marinotti Edizioni, 2015, pag. 37

<sup>47</sup> PÉROUSE DE MONTCLOS JEAN-MARIE, *L'architecture à la Française du milieu du XV siècle à la fin du XVIII siècle*, Paris, 1982, pag. 85

## I.2 La forma costruita della cupola lapidea

### I.2.1 La geometria come fondamento della forma resistente

«Una costruzione ben progettata è dunque un piccolo universo – molto spesso è proprio un modello dell’universo, una vera e propria rappresentazione cosmica – governato da un principio di superiore economia e caratterizzato da una dipendenza reciproca degli elementi che lo costituiscono» scrive Franco Purini<sup>48</sup>.

La razionalizzazione della costruzione della cupola lapidea, della «sfera di pietra»<sup>49</sup> parafrasando il titolo del libro di F. P. Puerto, derivata dall’ottimizzazione degli elementi strutturali attraverso la progettazione stereotomica, si serve della conoscenza delle proprietà geometriche della sfera, teoricamente condotte a modelli di perfezione ideale, ma che determinano anche vantaggi di natura pratica.

La geometria sferica, infatti, oltre a possedere un infinito grado di simmetria interna, possiede proprietà isoperimetrica: a parità di superficie con altre forme tridimensionali, racchiude il volume massimo ed a parità di volume, possiede la superficie minima.

Inoltre con l’aumentare del raggio, il volume della sfera cresce più della superficie.

E’ nota la leggenda narrata da Virgilio nell’*Eneide*, secondo cui Larba, re dei Getuli concesse a Didone tanta terra quanta lei ne potesse circondare con la pelle di un bue. Utilizzando la proprietà isoperimetrica del cerchio, dimostrata da Zenodoro nel I sec. a. C., si narra che l’astuta Didone recise la pelle producendo strisce molto sottili che dispose sul perimetro di un cerchio così da poter ottenere abbastanza terra da poter fondare la città di Cartagine<sup>50</sup>.

---

<sup>48</sup> PURINI FRANCO, *Comporre l’architettura*, Roma-Bari, Editori Laterza, 2000, pag. 65

<sup>49</sup> PINTO PUERTO FRANCISCO, *Las esferas de piedra. Sevilla como lugar de encuentro entre arte y ciencia en el Renacimiento*, Sevilla, Diputación de Sevilla, Servicio de Publicaciones, Sección Arte, RC Impresores, 2002

<sup>50</sup> PUBLIO VIRGILIO MARONE, *Eneide*, Liber I, vv. 360-368, trad. it. di Annibale Caro, XVI secolo: «Giunsero in questi luoghi, ov’or vedrai/ sorgere la gran cittade e l’alta rocca/ de la nuova Cartago, che dal fatto/ Birsa no mossi, per

Il celebre “Problema degli Isoperimetri”, ovvero la ricerca della curva che chiude maggiore spazio fra tutte le curve che possiedono lo stesso contorno, è stato affrontato da molti matematici e fisici tra i quali Leibniz, Newton, de l'Hopital, Giovanni Bernoulli e Giacomo Bernoulli che risolse il problema nel 1701<sup>51</sup>.

Successivamente Eulero nel *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minime proprietate gaudentes (Metodo per trovare le linee curve che godono di proprietà di massimo o minimo)* del 1744, formulò un metodo per individuare quelle linee curve per le quali una certa quantità fosse massima o minima, e che quindi risultano più efficienti per geometria.

La geometria della sfera si rivela quindi molto utile ai fini dello studio e della sperimentazione della possibilità di poter ulteriormente razionalizzare la costruzione attraverso la disciplina stereotomica.

La forma sferica, infatti, racchiude il massimo spazio con il minimo impiego di materiale, inoltre «conserva il calore interno offrendo poca superficie alle difficoltà climatiche esterne»<sup>52</sup>.

A causa di queste proprietà la morfologia sferica è largamente presente in Natura, che costruisce il Bello con il necessario, attraverso la disposizione della materia secondo precisi rapporti geometrici che ne minimizzano la quantità e ne massimizzano l'efficienza, rispondendo ottimamente all'equilibrio statico e generando contemporaneamente un forte equilibrio estetico.

«Rotundis naturam in primis delectari, ex his, quae ductu eius habeantur gignantur aut fiant, in prompti est (che in natura prevalga la forma circolare, è manifesto da tutto ciò che nell'universo dura, si

---

l'astuta merce/ che, per fondarla, fèr di tanto sito/ quanto cerchiar di buè potesse in tergo».

<sup>51</sup> BRUNACCI VINCENZIO, *Corso di matematica sublime*, Tomo IV, Firenze, Presso Pietro Allegrini, 1808, pag. 178

<sup>52</sup> DI CARLO BIAGIO, *Strutture geodetiche*, Pescara, DC Books, lulu.com editions, 2010, pag. 8



genera o si trasforma)»<sup>53</sup> scrisse Leon Battista Alberti nel *De re aedificatoria (Liber VII, Caput IV)*.

Sferiche sono infatti molte forme strutturali naturali, siano esse presenti nel microcosmo, come radiolari e cellule, sia nel macrocosmo dove gli esempi sono molteplici e si estendono dalle bolle di sapone, agli organismi viventi ed ai corpi celesti (FIG.15).

Le forme strutturali naturali offrono concrete risposte sull'efficienza della forma resistente, in rapporto alla geometria ad essa sottesa.

E' infatti «sempre auspicabile racchiudere un maggior volume in una superficie minore. Vi è sempre una ricompensa formale quando si lavora in termini di economia intrinseca»<sup>54</sup>, come accade secondo le leggi naturali. «La Natura non fa niente invano, e più è invano quando meno è necessario, perché la Natura si compiace della semplicità e non ama la pompa delle cause superflue», scrisse Newton nel *Philosophiae naturalis principia mathematica* (1687), riprendendo le parole di Aristotele.

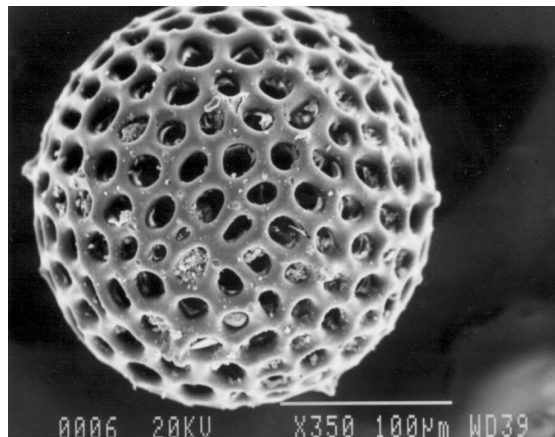
Nel *De re aedificatoria (Liber I, Caput IX)*, Leon Battista Alberti scrisse che «nel conformare le membra la semplicità della natura è l'esempio da seguire. In questo campo, come in tutti gli altri del resto, non meno di quanto è lodevole la sobrietà, è riprovevole la smania smodata di costruire. La membratura sia dunque di proporzioni moderate e non esorbiti dalle precise funzioni che le sono state assegnate. Giacchè, a ben osservare, ogni forma architettonica trovò origine dalla necessità, si sviluppò in funzione della praticità, fu abbellita dall'uso; infine fu tenuto conto del piacere; ma il piacere medesimo rifugge sempre da ogni eccesso. L'edificio sia quindi disposto in modo che nella sua membratura nulla manchi di ciò che è

---

<sup>53</sup> ALBERTI LEON BATTISTA, *L'architettura (De re aedificatoria)*, testo latino e traduzione a cura di Giovanni Orlandi. Introduzione e note di Paolo Portoghesi, 2 Tomi, Milano, Edizioni Il Polifilo, 1966, Tomo II, Libro VII, Capitolo IV, pag. 294, citato in "Disegnare il tempo e l'armonia. Il disegno di architettura osservatorio nell'universo" a cura di E. Mandelli, G. Lavoratti, Atti del Convegno Internazionale AED, Università degli Studi di Firenze, Dipartimento di Architettura: Disegno-Storia-Progetto, Firenze, Alinea Editrice, 2009, pag. 215

<sup>54</sup> MONEO RAFAEL, *L'altra modernità. Considerazioni sul futuro dell'architettura*, Milano, Christian Marinotti Edizioni, 2015, pag. 65

15. Alcune forme  
strutturali naturali  
sferiche:  
Radiolare visto al  
microscopio  
elettronico



Taràssaco



Bolla di sapone



Corpi celesti  
(sistema Terra-Luna)



necessario, e che quanto è in esso non possa essere criticato sotto nessun punto di vista»<sup>55</sup>.

«Imparare dalla natura vuol dire accettare anche nella architettura la “totalità indivisa” nell’inestricabile sovrapporsi di ragioni funzionali e ragioni estetiche» scrive Paolo Portoghesi<sup>56</sup>, vuol dire riconoscere quella legge segreta, la *geheimes Gesetz*<sup>57</sup> espressa da Goethe, la *sanfte Gesetz*, mite legge di cui scrisse Adalbert Stifter<sup>58</sup> e successivamente Paul Schmitthenner<sup>59</sup>, quella logica del Tutto «che spiega l’unità nella molteplicità e giustifica il legame profondo tra le cose»<sup>60</sup>, quei rapporti di reciproca necessità tra le parti che armonicamente compongono un organismo strutturale unitario, espressi in architettura attraverso la concinnitas albertiana.

---

<sup>55</sup> ALBERTI LEON BATTISTA, *L’architettura (De re aedificatoria)*, testo latino e traduzione a cura di Giovanni Orlandi. Introduzione e note di Paolo Portoghesi, 2 Tomi, Milano, Edizioni Il Polifilo, 1966, Tomo I, Libro I, Capitolo IX, pag. 66 – testo latino pag. 67: «Caeterum in membris conformandis modestiam naturae imitari oportet. Neque enim, uti in reliquis, sic et hac in re non magis sobrietatem laudamus, quam profusam aedificandi libidinem vituperamus. Modica esse oportet membra et ad rem, qua de acturus sis, necessaria. Nam aedificandi omnis ratio, si recte prospexeris, a necessitate profecta est; eam aluit commoditas; usus honestavit; ultimum fuit, ut voluptati prospiceretur, tametsi nunquam ab immodicis omnibus ipsa voluta non abhorruit. Erit ergo eiusmodi, ut membrorum in ea nihilo plus desideretur, quam quod adsit, et nihil, quod adsit, ulla ex parte improbetur».

<sup>56</sup> PORTOGHESI PAOLO, *Geoarchitettura. Verso un’architettura della responsabilità*, a cura di Maria Ercadi e Donatella Scatena, Ginevra-Milano, Skira, 2005, pag. 34

<sup>57</sup> VON GOETHE JOHANN WOLFGANG, *Versuch die Metamorphose der Pflanzen zu erklären (Le Metamorfosi delle Piante)*, Gotha, bey Carl Wilhelm Ettinger, 1790, 5-8: «Alle Gestalten sind ähnlich, und keine gleichet der andern;/Und so deutet das Chor auf ein geheimes Gesetz,/Auf ein heiliges Rätsel. (Simili sono tutte le forme, nessuna è identica all’altra;/in coro ti preannunciano una legge segreta, un sacro enigma)».

<sup>58</sup> STIFTER ADALBERT, *Bunte Steine*, Vienna, 1853 (trad. it. “Pietre colorate”, Marsilio Editori, Venezia, 2005)

<sup>59</sup> SCHMITTHENNER PAUL, *Das sanfte Gesetz in der Kunst, in Sonderheit in der Baukunst. Rede*. Hünenburg, Straßburg, 1943

<sup>60</sup> PORTOGHESI PAOLO, *Geoarchitettura. Verso un’architettura della responsabilità*, a cura di Maria Ercadi e Donatella Scatena, Ginevra-Milano, Skira, 2005, pag. 15

«L'architetto deve dunque educare la propria visione a penetrare la struttura nascosta delle forme»<sup>61</sup>, a comprendere le regole geometriche e materiche che le governano, per poter cogliere l'essenza del principio di efficace bellezza risiedente nella semplicità logica della forma e poter razionalizzare ed ottimizzare elegantemente la sua costruzione.

### **I.2.2 La tecnica costruttiva lapidea come espressione dell'unità forma-struttura**

L'individuazione della necessaria ratio dispositionis, della relazione tra le parti che concorrono armonicamente a formare l'unità costruttiva, secondo un principio di economia intrinseca organizzando logicamente il materiale secondo precisa ed utile geometria, determina in natura come in architettura la forma strutturale, ovvero la compresenza inscindibile di forma e struttura.

La linea curva che definisce l'arco è la forma strutturale naturale a cui tende il materiale lapideo quando si presenta la necessità di superare un vuoto. Come accade visibilmente nelle caverne, la «legge [...] che incide in profondità sulla struttura statica delle cavità, è la tendenza dei soffitti lapidei a trasformarsi nel corso dei decenni, per effetto delle fratturazioni spontanee e dei crolli, in vere e proprie cupole circolari»<sup>62</sup>, permettendo di riferire la morfologia dello spazio architettonico cupolato al suo archetipo individuato nella caverna, primo riparo, origine della forma dell'abitare.

La concavità della copertura si pone a fondamento del carattere dello spazio interno quale dimora protetta dall'esternità lungo più direzioni curve intorno ad un medesimo centro, costituendo lo spazio piegato

---

<sup>61</sup> PURINI FRANCO, *Comporre l'architettura*, Roma-Bari, Editori Laterza, 2000, pag. 79

<sup>62</sup> PORTOGHESI PAOLO, *Geoarchitettura. Verso un'architettura della responsabilità*, a cura di Maria Ercadi e Donatella Scatena, Milano, Skira, 2005, pag. 138

cupolato, dal greco antico κύπτω (kupto) “piegarsi”<sup>63</sup>, simile ad una coppa rovesciata, detta in greco antico κύπελλον (cuppellon), in latino *cuppella*, comune origine etimologica del termine italiano *cupola*.

Lo spazio concavo, soprattutto in area mediterranea, si definisce come prima cellula abitativa, prima δομή (domè) “costruzione” del δόμος (domos) “dimora” in latino *domus*, attraverso la cupola, che la lingua inglese indica con il termine *dome*.

La cupola architettonica «è la soluzione più naturale, e anche tecnicamente più significativa, per coprire un’area senza supporti intermedi, con il minimo consumo di materiale»<sup>64</sup>.

La razionalità propria dell’organismo architettonico lapideo nell’opportuna ed esatta disposizione dei suoi elementi strutturali in base alle loro caratteristiche fisiche quali forma, dimensione e peso, secondo precisa geometria che determina la resistenza della forma, implica il raggiungimento di un alto grado di concinnitas tra le parti che compongono l’unità, tra i piccoli elementi strutturali discreti che compongono un grande sistema continuo.

«Definiremo la bellezza come armonia tra tutte le membra, nell’unità di cui fan parte, fondata sopra una legge precisa, per modo che non si possa aggiungere o togliere o cambiare nulla se non in peggio. Risultato questo di grande valore e quasi divino, per ottenere il quale è necessario impegnare tutto l’ingegno e tutta l’abilità tecnica di cui si è provvisti [...] la bellezza vera e propria è una qualità intrinseca e quasi naturale che investe l’intera struttura dell’organismo che diciamo ‘bello’»<sup>65</sup> scrisse Leon Battista Alberti nel *De re aedificatoria (Liber VI, Caput II)*.

---

<sup>63</sup> È interessante notare come la definizione di piegatura caratterizzi l’etimologia dei termini *volta* derivante da *voltare*, ovvero piegare in una determinata direzione e *cupola* derivante da κύπτω (kupto) “piegarsi” indicando lo spazio voltato e cupolato, come lo spazio piegato in una o più determinate direzioni.

<sup>64</sup> TORROJA EDUARDO, *Razón y ser de los tipos estructurales*, Madrid, 1960, trad. it. *La concezione strutturale*, Milano, CittàStudi Ed., 1995, pag. 132

<sup>65</sup> ALBERTI LEON BATTISTA, *L’architettura (De re aedificatoria)*, testo latino e traduzione a cura di Giovanni Orlandi. Introduzione e note di Paolo Portoghesi, 2 Tomi, Milano, Edizioni Il Polifilo, 1966, Tomo II, Libro VI, Capitolo II, pag. 235 - «Gratia sic diffiniemus: ut sit pulchritudo quidem certa cum ratione concinnitas universarum partium in eo, cuius sint: ita ut addi aut

Il buon rapporto di connessione tra le parti necessariamente legate da esigenze ontologicamente costruttive, determina nell'architettura lapidea la contemporanea definizione estetica e statica dell'intero sistema architettonico, chiaramente leggibile nella consustanzialità di forma e struttura espressa dalla sua forma costruita.

La costruzione della cupola lapidea che prevede la discretizzazione dell'emisfera in conci giuntati a secco e mutuamente sostenuti, implica la «connessione perfetta di elementi»<sup>66</sup> a formare una finale tessitura organica, morfologicamente resistente ed espressiva allo stesso tempo. «La struttura dell'intero tessuto è determinata dalla coerenza complessiva dei rapporti reciproci tra le parti»<sup>67</sup>, dalla tettonica<sup>68</sup> intesa come τεκτονική τέχνη, ovvero «arte della connessione»<sup>69</sup> degli elementi strutturali, carattere fondativo dell'architettura, la cui etimologia deriva dalle antiche parole greche “ἀρχή - τεκτονική - τέχνη”, ovvero “prima arte del costruire”.

La tettonica della trama resistente per forma, richiama nella sua essenza costruttiva la logica dell'intreccio tessile, origine della forma costruita attraverso l'opportuna configurazione del nodo tettonico inteso come legamento organico di parti distinte, determinando quindi ornato spaziale a valenza strutturale (FIG. 120B).

La tettonica dell'intreccio trova la sua profonda origine nel nodo, definito da Semper «il più antico simbolo tettonico, cosmogonico», poiché primo manufatto strutturale che deriva dalla necessità di legare per costruire.

---

diminui aut immutari possit nihil, quin improbabilius reddatur. Magnum hoc et divinum, in quo perficiendo omnes vires artium et ingenii consumuntur; [...] pulchritudinem quasi suum atque innatum toto esse perfusum corpore, quod pulchrum sit».

<sup>66</sup> PORTOGHESI PAOLO, *Geoarchitettura. Verso un'architettura della responsabilità*, a cura di Maria Ercadi e Donatella Scatena, Milano, Skira, 2005, pag. 157

<sup>67</sup> Ivi, pag. 17

<sup>68</sup> Dal greco antico τεκτονική (τέχνη) “arte del costruire”

<sup>69</sup> BORBEIN ADOLF HEINRICH, *Tektonik, zur Geschichte eines Begriffs der Archäology*, in “Archiv für Begriffsgeschichte”, XXVI, n. 1, 1982. Citato in: K. Frampton, “Tettonica e architettura. Poetica della forma architettonica nel XIX e XX secolo”, Ginevra-Milano, Skira, 2007, pag. 22

Una necessità, secondo Semper<sup>70</sup>, il cui etimo trova origine nell'antica radice indoeuropea *noc*, da cui le parole greche ἀνάγκη “forza, necessità”, νέω “filare, tessere” e le parole latine *nodus* “nodo”, *necto* “legare”, *nexus* “legame, intreccio, connessione”, *neo* “filare, tessere”, comune origine etimologica delle parole tedesche *der Knoten* “il nodo” e *die Naht* “il giunto”, individuando il legame tettonico che origina la forma costruita e ne descrive l'essenza più autentica.

«La muratura, quando non assume la forma di un conglomerato nella costruzione di tipo pisè, vale a dire quando è costruita da corsi di elementi, è anch'essa una forma di tessitura, della quale rendono testimonianza tutte le diverse connessioni o commessure per sovrapposizione di una muratura»<sup>71</sup>.

La tessitura muraria implica una struttura tridimensionale geometrica ben determinata che tassa lo spazio generando una configurazione resistente per forma.

Nella cupola in pietra da taglio «la nudité et la sobriété de l'appareil avec ses lignes de joint [...] constituent déjà des éléments du décor»<sup>72</sup>, la struttura della muratura e la sua decorazione coincidono, e sono determinate dalla capacità di pro-gettare, dunque di pre-vedere la configurazione finale del sistema architettonico e la possibile divisione nelle sue parti componenti, mutuamente collaboranti.

Come nell'arte della tessitura esistono diversi tipi di punti di lavorazione, che determinano diversi tipi di ornato resistente, così nella tessitura muraria, definendo la morfologia dei conci attraverso l'arte della stereotomia, è possibile determinare diversi tipi di apparecchiatura che possiedono contemporaneamente i caratteri di espressività formale e resistenza strutturale.

Il presente studio ricerca l'ottimizzazione dell'apparecchiatura della cupola lapidea attraverso l'ideazione di una nuova morfologia di

---

<sup>70</sup> FRAMPTON KENNETH, *Tettonica e architettura. Poetica della forma architettonica nel XIX e XX secolo*, Ginevra-Milano, Skira, 2007, pag. 108-109

<sup>71</sup> FRAMPTON KENNETH, *Tettonica e architettura. Poetica della forma architettonica nel XIX e XX secolo*, Ginevra-Milano, Skira, 2007, pag. 24

<sup>72</sup> LALBAT CLAUDE, MARGUERITTE GILBERT, MARTIN JEAN, *De la stéréotomie médiévale : la coupe des pierres chez Villard de Honnecourt*, in *Bullettin Monumental*, tome 147, n.1, Parigi, 1989, pag. 32

tessitura muraria individuata suddividendo opportunamente l'emisfera in elementi costruttivi sineddoche, intesi come parti che racchiudono in sé la configurazione finale del tutto, divenendone elementi di misura e modularità. Tale ottimizzazione è ricercata a partire dallo studio dei metodi storici di apparecchiatura della cupola lapidea.



## **CAPITOLO II.**

### **Analisi del metodo architettonico storico di suddivisione della cupola lapidea in elementi strutturali**

---

La conoscenza della tecnica costruttiva lapidea propria del *modus operandi* tradizionale e di quello codificato dalla disciplina stereotomica, insieme alla conoscenza della tecnologia innovativa di progettazione infografica e di produzione degli elementi strutturali, dimostra le effettive «potenzialità della pietra strutturale nell'architettura contemporanea»<sup>73</sup>, permettendo il ritorno dell'unità del processo ideativo-esecutivo dell'opera architettonica nella figura dell'architetto classico, conoscitore dell'idea, artefice della sua rappresentazione e della sua costruzione, costituendo la sintesi di sapere e saper-fare.

Il presente studio si pone quindi in stretta relazione con il patrimonio architettonico storico, aggiornandone la tradizione con innovazione.

Possedere la cultura della costruzione delle cupole lapidee, si rivela fortemente necessario per poter “salire sulle spalle dei giganti”, parafrasando il celebre aforisma di Bernardo di Chartes, ponendosi in continuità con il sapere costruttivo storico, apprendendone gli insegnamenti più vantaggiosi per poter rispondere coerentemente e concretamente ai problemi della contemporaneità.

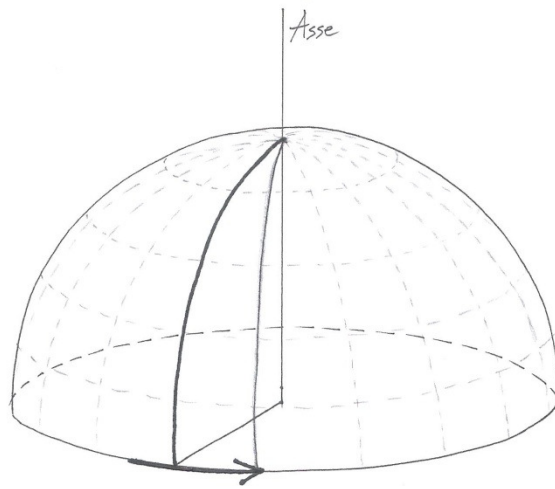
*«Innovazione e permanenza sono due valori esattamente della stessa importanza [...]. Perché l'innovazione non sia a vuoto, bisogna avere una permanenza sostanzialmente forte; ed una permanenza legata ad una tecnica costruttiva è sicuramente importantissima [...].*

Lo studio della pietra aggiungendo il sapere stereotomico al sapere, diciamo istintivo, della tradizione pratica è un'innovazione affascinante [...]. Heidegger diceva che la grande tradizione è attesa, apertura verso il futuro, il futuro si costruisce solo con [...] i doni del

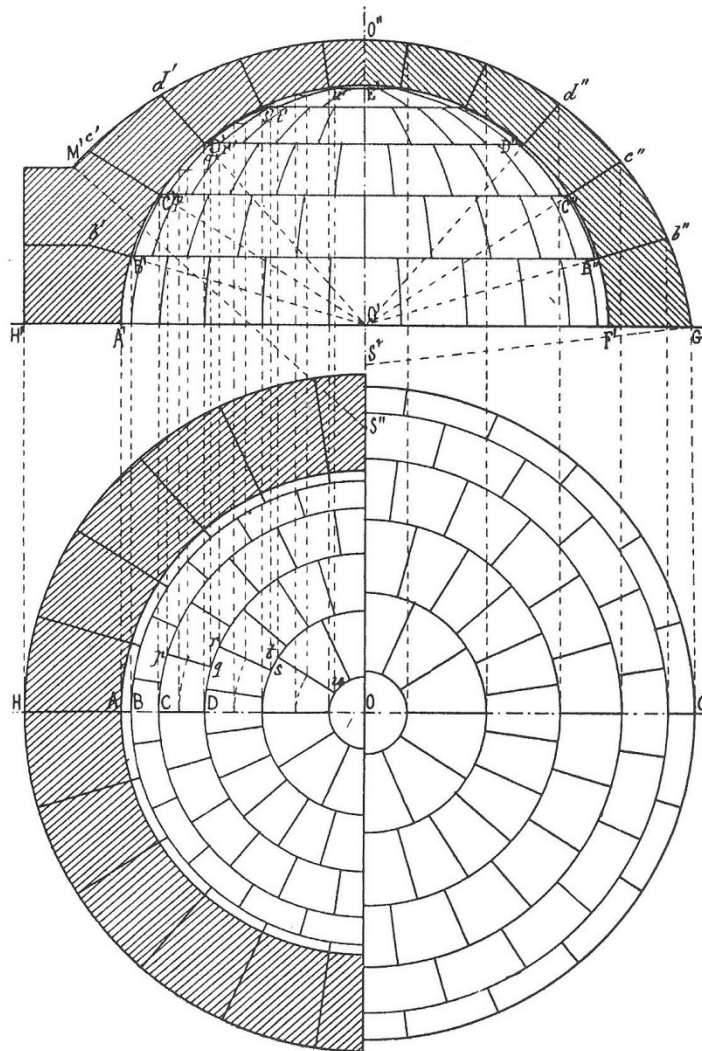
---

<sup>73</sup> D'AMATO GUERRIERI CLAUDIO, FALLACARA GIUSEPPE, *Archetipi costruttivi dell'architettura in pietra*, in “Città di Pietra/Cities of Stone. Pietre di Puglia. Costruire in pietra portante/Stones of Apulia. To Build load-bearing Stone”, La Biennale di Venezia e Sensi Contemporanei, Venezia, Marsilio, 2006, pag. 39

16. R. Gadaleta,  
*Geometria sottesa*  
*alla costruzione*  
*tradizionale delle*  
*cupole lapidee,*  
disegno a mano  
libera



17. J. Chaix, Cupola  
emisferica, pianta  
ipografica e sezione,  
1890, "Traité de coupe  
des pierres", Parigi



passato»<sup>74</sup>, dice Paolo Portoghesi nell'intervista a lui rivolta dal Prof. Claudio D'Amato.

Dall'analisi dell'apparecchiatura delle cupole lapidee storiche è quindi possibile determinare in modo inedito nel presente studio, la relazione architettonica che lega la configurazione, il numero e le dimensioni dei conci utilizzati in rapporto alla luce coperta, ponendosi come obiettivo l'ottimizzazione della costruzione della cupola attraverso la riduzione del loro numero a parità dimensionale degli stessi e della luce da coprire.

Il metodo di suddivisione dell'emisfera secondo meridiani e paralleli è storicamente il più utilizzato nella costruzione di cupole lapidee ed è geometricamente generato dalla rotazione di un arco di circonferenza intorno al suo asse di simmetria (FIG.16). I conci sono uguali per ogni ricorso orizzontale, ma differiscono progressivamente nelle dimensioni dal piano d'imposta alla chiave. Sfalsando i giunti verticali radiali dei conci, si ottiene un ammorsamento migliore dei ricorsi che favorisce un'azione di cerchiatura efficace, per contrastare le deformazioni laterali causate dalle spinte dei meridiani (FIG.17).

Nelle cupole in pietra, soggette ad un uniforme stato di compressione, esiste una corrispondenza diretta tra dinamica delle forze statiche e disposizione dei conci, quindi l'apparecchiatura e la dimensione dei suoi elementi componenti svolgono un ruolo centrale nel rispondere all'equilibrio gravitazionale.

L'aumento della resistenza dell'apparecchiatura si consegue riducendo le superfici di separazione verticali ed oblique rispetto alla direzione degli sforzi di compressione, quindi rispetto ai meridiani.

Attraverso la conoscenza del patrimonio architettonico storico è dunque possibile effettuare uno studio di indagine che si pone il problema, e quindi l'obiettivo, di impiegare nuove morfologie di apparecchiatura che possano costituire valide alternative a quelle tradizionali, migliorandone l'espressività formale nel rispetto delle leggi statiche che ne determinano l'apparecchiatura, ottimizzando il

---

<sup>74</sup> D'AMATO CLAUDIO, *Studiare l'architettura, un vademecum e un dialogo*, Roma, Gangemi Editore, 2014, pp. 179,187,189

numero degli elementi strutturali, la cui produzione viene facilitata dalle attuali tecnologie informatiche.

I casi analizzati appartengono sia all'architettura tradizionale pugliese, dove sono presenti numerosi esempi di cupole lapidee, sia all'architettura codificata dalla disciplina stereotomica, prevalentemente in area spagnola e francese, dove gli elementi costruttivi sono progettati con precisione, in riferimento all'ottimizzazione dei conci volta alla riduzione dei panneaux necessari per tagliarli.

Ai fini dell'analisi sono state individuate le cupole emisferiche costituite da conci a faccia vista all'intradosso, quindi più facilmente leggibili nella loro configurazione statica e formale.

## **II.1 Analisi degli esempi significativi dell'architettura lapidea tradizionale**

L'architettura lapidea delle cupole distingue l'area pugliese rispetto ai contesti architettonici europei ed orientali, rivelando la sua originalità nella configurazione tettonica adottata, in dipendenza di capacità di razionalizzazione del materiale in cantiere che determina le dimensioni degli elementi costituenti e la qualità della lavorazione.

Caratteristica dell'architettura non codificata dalla disciplina stereotomica, ma basata su regole empiriche e sulla trasmissione del sapere basata sull'acquisizione del *modus operandi* dall'esperienza delle maestranze, è la diversità e l'irregolarità dei conci costituenti l'apparecchiatura.

Essi non sono definiti stereotomicamente, attraverso il taglio preciso del materiale secondo il disegno geometrico eseguito in precedenza, ma sono definiti e tagliati in cantiere attraverso l'esperienza delle maestranze, che determinava la loro morfologia. I conci venivano quindi spesso realizzati in itinere, durante la costruzione della cupola, anche recuperando gli scarti del materiale prodotti dalla lavorazione di

altri conci. A causa di queste motivazioni, alcuni di essi risultano sottodimensionati, poiché integrati all'occorrenza all'interno dell'apparecchiatura muraria, rispettandone la tecnica costruttiva di convergenza radiale delle facce di giunto, e del loro reciproco ammorsamento verticale, rendendo il processo costruttivo economicamente vantaggioso.

Il taglio dei conci non segue quindi procedimenti matematici e geometrici rigorosi ed esatti, ma è guidato da un processo "artigianale", basato sulla "geometria fabrorum"<sup>75</sup>, ovvero sulle regole di acquisizione del saper-fare tradizionale, tramandate di generazione in generazione, costituendo l'unicità del patrimonio lapideo pugliese.

Le esigenze del mestiere artigianale si basavano su una tecnica geometrica empirica, base della disciplina scientifica geometrica codificata successivamente attraverso precise regole teoriche e tecniche, che renderà possibile realizzare forme costruite più complesse.

«Nella Puglia del XI e del XII secolo, l'atteggiamento dei costruttori di fronte al progresso è quindi molto distante dall'ottica di prefabbricazione e standardizzazione propria dell'architettura gotica, che già si presenta in embrione nella produzione tardo-romanica del Nord-Europa. [...] L'attitudine dei magister pugliesi al taglio della pietra può essere quindi definita "proto-stereotomica", in quanto essi sono capaci di determinare l'elemento-concio anticipando parzialmente gli invarianti stereotomici codificati nei trattati seriori, seppur in modo rudimentale e non intenzionale, tendendo unicamente a risolvere i problemi di ordine pratico che si presentano in cantiere»<sup>76</sup>.

---

<sup>75</sup> RUIZ DE LA ROSA JOSÉ ANTONIO, *Fuentes para el estudio de la geometría fabrorum. Análisis de documentos*, in *Actas del Cuarto Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, Instituto Juan de Herrera, SEHC, COAC, CAATC, Madrid, 2005, pag. 1001-1008

<sup>76</sup> LEONARDIS ENRICA, *Architettura romanica pugliese. Il progetto e la costruzione in pietra portante dell'edificio per il culto*, Roma Gangemi Editore, 2015, pp. 192-193

La *Chiesa di Ognissanti* sita a Valenzano (Bari) (FIGG.18,19), costruita nella seconda metà del XI sec., dal 1061 al 1078, costituisce l'esemplificazione del "tipo a cupole in asse" che caratterizza il patrimonio architettonico pugliese. La navata centrale della chiesa è infatti costituita da una sequenza assiale di tre campate cupolate, impostate su base quadrata avente il lato pari a circa 5,5 metri<sup>77</sup>, «geometricamente regolari e costituite da conci accuratamente tagliati»<sup>78</sup> in pietra calcarea locale.

La cupola è costituita da 18 ricorsi concentrici, la cui altezza della faccia di paramento oscilla dai 30 cm ai 40 cm. La cupola centrale è composta da circa 587 conci, con facce di letto o di posa non uguali per dimensioni all'interno dello stesso ricorso. Riconducendo questa forma costruita ad un modello teorico architettonico regolare nella sua definizione geometrico-formale, per poter dedurre parametri dimensionali utili in fase progettuale, è possibile costruire una cupola lapidea avente luce pari a 5,5 m, utilizzando 18 conci tipo-invarianti, la cui altezza della faccia di paramento misura 24 cm.

Un altro esempio molto significativo dell'architettura storica tradizionale è costituito dalla cupola lapidea presente nel *Duomo di San Corrado* sito a Molfetta (Bari) (FIGG.20,21), costruito dalla seconda metà XII sec. al XIII sec. «Il Duomo di San Corrado, con fronte di quasi 20 metri e sviluppo longitudinale di 34 metri, rappresenta le più grandi dimensioni raggiunte dall'organismo architettonico "a cupole in asse" nella Terra di Puglia»<sup>79</sup>. Delle tre cupole presenti nel Duomo, si sceglie di analizzare quella più antica, posta all'interno della prima campata procedendo dal fronte absidale,

---

<sup>77</sup> I numeri più significativi che quantificano i conci e che descrivono sia le loro dimensioni, sia quelle del diametro delle cupole, sono volutamente indicati in questo studio con le cifre arabe e non con la notazione in lettere, per renderli maggiormente evidenti e facilmente individuabili nella consultazione, in quanto tali valori costituiscono il confronto tra grandezze, molto importante ai fini del presente studio, ove si cerca di ottimizzare il numero dei conci in rapporto alle dimensioni della cupola lapidea. Per rendere maggiormente efficace la consultazione di tali valori, la FIG.125 li sistematizza in una tabella sintetica.

<sup>78</sup> LEONARDIS ENRICA, *Architettura romanica pugliese. Il progetto e la costruzione in pietra portante dell'edificio per il culto*, Roma Gangemi Editore, 2015, pag. 97

<sup>79</sup> Ivi, pag. 22





18. Interno della Chiesa di Ognissanti, 1061-1078, Valenzano (Bari), fotografia di Silvia Chieco



19. Cupola della Chiesa di Ognissanti, 1061-1078, Valenzano (Bari), fotografia tratta da: E. Leonardis, "Architettura romanica pugliese. Il progetto e la costruzione in pietra portante dell'edificio per il culto", 2015, pag.30



20. Interno del  
Duomo di  
San Corrado,  
seconda metà  
XII sec.-XIII sec.,  
Molfetta (Bari)



21. Cupola  
sull'altare  
maggiore del  
Duomo di  
San Corrado,  
seconda metà  
XII sec.-XIII sec.,  
Molfetta (Bari),  
fotografia di  
R. Gadaleta





che si differenzia dalle altre per la regolarità della sua forma emisferica. La cupola in pietra calcarea locale, presenta una luce pari a circa 8 metri, è costituita da 34 ricorsi concentrici, la cui altezza della faccia di paramento oscilla dai 20 cm ai 30 cm. All'interno della cupola si contano circa 1472 conci, anch'essi aventi le facce di letto o di posa non uguali per dimensioni all'interno dello stesso ricorso. Anche in questo caso, regolarizzando la forma costruita per poter dedurre parametri dimensionali utili in fase di progetto, assumendo quindi l'uguaglianza dei conci per ogni ricorso orizzontale, è possibile costruire una cupola lapidea avente luce pari a 8 m, utilizzando 34 conci tipo-invarianti, la cui altezza della faccia di paramento misura circa 25 cm.

## **II.2 Il materiale lapideo nell'architettura dello spazio voltato**

L'architettura romanica pugliese delle cupole in pietra si distingue dalle altre aree culturali architettoniche, per l'esclusivo utilizzo nella costruzione di materiali lapidei locali.

Lo stretto rapporto che le architetture pugliesi stabiliscono con il *genius loci* è allora assai evidente ed occupa un ruolo molto importante nel presente studio che vuole porsi in continuità con la tradizione, ereditandola criticamente ed adoperando quella "poetica dell'ascolto" affrontata e sostenuta da P. Portoghesi, con la precisa intenzione di recuperare il rapporto con il carattere morfo-tipologico dell'architettura che ne costituisce la peculiare identità e ne determina il linguaggio riconoscibile, trasferendolo nel progetto contemporaneo. «Nullus locus sine genio est» scrisse Servio<sup>80</sup>, infatti il *genius loci*, interazione tra luogo ed identità, determina il carattere dell'architettura in un determinato contesto, poiché essa nasce dal luogo e lo crea al tempo stesso. Ascoltare il luogo significa adoperare il materiale locale disponibile rispettandone la vocazione della materia

---

<sup>80</sup> SERVIO, *Comm. Eneide* V, 95

a possedere forma, in quanto, in accordo con le parole di Adolf Loos, «ogni materiale possiede un linguaggio formale che gli appartiene»<sup>81</sup>. Le pietre «hanno prodotto in Puglia nel corso del tempo quella che possiamo a buon diritto chiamare una vera e propria civiltà architettonica della pietra, caratterizzata dal loro uso monomaterico sia in funzione costruttiva che di ornato: le pietre di Puglia, apparentemente così 'umili', hanno saputo ingenerare direttamente capolavori, senza ricorrere all'artificio della 'maschera' poiché posseggono in sé quel valore aggiunto che deriva dalla loro vocazione costruttiva»<sup>82</sup>. L'abbandono della tecnica costruttiva lapidea è dettato da motivazioni architettoniche di carattere teorico, come si è detto nel Capitolo I, relative alla perdita del significato simbolico e tecnico-costruttivo dello spazio voltato, ma anche da motivazioni di ordine pratico legate ai costi ed ai tempi di produzione, all'assenza di maestranze specializzate nel taglio delle pietre, alla poca diffusione ed alla progressiva perdita nel corso del tempo delle conoscenze teorico-pratiche proprie della disciplina stereotomica.

Queste motivazioni hanno permesso la nascita dell'architettura dell'effimero, dove l'economia è raggiunta attraverso il carattere transitorio dell'opera architettonica e la possibilità di smontare e rimontare rapidamente la costruzione in altri luoghi, che ne determina i caratteri di provvisorietà. In queste architetture l'economia è raggiunta attraverso il non investimento nella qualità dei materiali e quindi nella firmitas duratura della costruzione, che ne determina il carattere intrinseco di resistenza strutturale, a vantaggio del dominio della forma che si rivela spesso dispendioso.

Al contrario, il progetto architettonico contemporaneo in pietra da taglio si rivela competitivo e vantaggioso sia per i suoi caratteri di razionalizzazione costruttiva insita nella forma strutturale lapidea, di cui si è detto nel paragrafo I.2.2, sia per la possibilità di produrre

---

<sup>81</sup> LOOS ADOLF, *Parole nel vuoto*, Milano, Adelphi Ed., 2007, pag.80, Ed. originale "Ins Leere gesprochen", Berlino, Verlag Der Sturm, 1921

<sup>82</sup> D'AMATO GUERRIERI CLAUDIO, *Puglia: paesaggi e architetture di pietra*, in "Città di Pietra/Cities of Stone. Pietre di Puglia. Costruire in pietra portante/Stones of Apulia. To Build load-bearing Stone", La Biennale di Venezia e Sensi Contemporanei, Venezia, Marsilio, 2006, pag. 15

velocemente ed in serie gli elementi strutturali. L'aggiornamento delle tecniche tradizionali del costruire grazie all'odierna innovazione tecnologica, permette infatti di velocizzare il processo produttivo del singolo elemento strutturale attraverso la modellazione informatica finalizzata a trasferire i dati geometrici dell'elemento dal computer alle macchine a controllo numerico computerizzato (CNC), permettendo il ritorno all'unità nella figura dell'architetto del processo logico idea-progetto-costruzione-realizzazione.

In questo modo si risolvono «le difficoltà tecniche legate alla costruzione di volte in pietra da taglio e la carenza di maestranze in grado di eseguirle»<sup>83</sup>, come evidenziò Jean-Baptiste Rondelet (1743-1829) nel *Traité théorique et pratique de l'Art de Bâtir*.

I costi del materiale lapideo vanno rapportati anche ai benefici che ne derivano dal suo utilizzo, in termini di ottima durabilità e resistenza strutturale, con conseguente abbattimento dei costi di manutenzione, infatti «secondo la trattatistica ottocentesca, la volta più solida e duratura era realizzata in pietra da taglio»<sup>84</sup>.

«Costruire per l'architetto significa impiegare i materiali in ragione delle loro qualità e della loro natura propria, con in mente l'idea di rispondere a un bisogno con i mezzi più semplici e più duraturi [...]» sostiene Viollet-le-Duc nel *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI au XVI siècle*, (1854 – 1868).

---

<sup>83</sup> RONDELET JEAN-BAPTISTE, *Traité théorique et pratique de l'Art de Bâtir* (Trattato teorico e pratico dell'arte di edificare), Parigi, 1803; Ed. it. a cura di Basilio Soresina, Napoli, Tipografia Del Gallo, 1839. La citazione riportata nel testo è presente in “Le volte in muratura negli edifici storici: tecniche costruttive e comportamento strutturale” di Elide Tomasoni, Tesi di Dottorato di Ricerca in “Ingegneria delle strutture - Modellazione, Conservazione e Controllo dei Materiali e delle Strutture” (XX ciclo), Università degli Studi di Trento, 2008, pag. 49

<sup>84</sup> TOMASONI ELIDE, *Le volte in muratura negli edifici storici: tecniche costruttive e comportamento strutturale*, Tesi di Dottorato di Ricerca in “Ingegneria delle strutture - Modellazione, Conservazione e Controllo dei Materiali e delle Strutture” (XX ciclo), Università degli Studi di Trento, 2008, pag. 49. La citazione si riferisce a “L'architettura Pratica dettata nella scuola e cattedra dell'insigne accademia di S. Luca” di Giuseppe Valadier, 5 voll., Roma, Incisori d'Architettura Giacomo Rocruè ed Eleuterio Catesi, con permesso de'superiori, 1833; Roma, Editorgrafica, 1992, vol. IV

«L'essenza dell'architettura [...] è una vocazione alla permanenza. Il momento di tempo reale in un edificio è, in effetti, il desiderio di esistere per sempre»<sup>85</sup>, nella convinzione che l'attualità di un progetto non è diretta conseguenza della novità tecnologica dei materiali, ma di come essi sono utilizzati, in accordo con le parole di F. L. Wright «we must remember that everything depends on how we use a material, not on the material itself... New materials are not necessarily superior. Each material is only what we make of it»<sup>86</sup>.

La tecnica costruttiva delle cupole pugliesi con materiale lapideo non prevede l'utilizzo di altri materiali come il laterizio o elementi fittili, come accade per esempio nell'architettura bizantina dello spazio cupolato. Vengono utilizzate in prevalenza *pietre calcaree* e *tufi* poiché facilmente lavorabili e molto resistenti a compressione.

Tra i tipi di pietra adoperati vi sono infatti i calcari compatti ed i tufi calcarei (tuffo pugliese). Il materiale lapideo pugliese si differenzia in particolari tipi in relazione al luogo di estrazione, alle caratteristiche fisiche, meccaniche e cromatiche del materiale che ne determina il peculiare impiego:

- ◆ la *pietra leccese* è un calcare sedimentario compatto e fortemente omogeneo di colore bianco/giallo paglierino. Questo materiale possiede ottima resistenza a compressione e facile lavorabilità, adoperato nell'architettura storica pugliese, sia nella realizzazione dei sistemi costruttivi a volta, sia nell'arte decorativa barocca leccese;
- ◆ il *màzzaro*, calcare molto compatto, che raggiunge elevate resistenze meccaniche e durezza, presenta un colore giallo-rossastro;

---

<sup>85</sup> MONEO RAFAEL, *L'altra modernità. Considerazioni sul futuro dell'architettura*, Milano, Christian Marinotti Edizioni, 2015, pag. 44

<sup>86</sup> LUDWIG MIES VAN DER ROHE, dal suo discorso tenuto presso l'Illinois Institute of Technology, 1938, citato in "Greenhills" di Debbie Mills e Margo Warminski with the Greenhills Historical Society, Ohio, Arcadia Publishing, 2013, pag. 43

- ♦ il *carparo*, tufo calcareo, caratterizzato da elevata durezza e resistenza, dal colore giallastro (giallo-scuro, giallo-rossiccio) è molto diffuso in Terra d'Otranto, possiede ottime caratteristiche meccaniche, resistenza a compressione e all'erosione e buona impermeabilità. Inoltre raggiunge un buon grado di finitura dopo la lavorazione.

Questi materiali sono adoperati per la realizzazione di cupole, volte a stella e volte a botte. Poiché le volte sono sistemi costruttivi maggiormente impiegati in area pugliese e poiché, come affermato in precedenza, la loro realizzazione è divenuta costosa a causa della necessaria presenza di manodopera specializzata sempre più rara e del tempo impiegato per la loro esecuzione, sono state rapidamente sostituite da sistemi in c.a., minando il patrimonio architettonico storico. A tal riguardo la legge della Regione Puglia *Tutela e valorizzazione del sistema costruttivo con copertura a volta*, del 27 ottobre 2009, n. 26, «al fine di conservare e promuovere le costruzioni tipiche e a volta del territorio pugliese, tutela e valorizza le tecniche costruttive tradizionali, riconoscendole come elementi caratterizzanti della storia, della tradizione e della cultura della popolazione pugliese (art.1), stabilisce gli interventi promossi anche sul terreno dell'attività formativa: al fine di incentivare l'utilizzo delle tipologie di copertura a volta (volte a botte, volte a stella, volte a squadro) e la conservazione delle stesse, la Regione Puglia promuove progetti formativi, anche in collaborazione con le Università, con gli enti territoriali preposti e con le associazioni di categoria, per la trasmissione e la conservazione delle conoscenze tecniche e applicative necessarie alla realizzazione di tali strutture (art.2)». Inoltre «si occupa di disciplinare gli interventi di nuova costruzione, sopraelevazione e ripristino, preoccupandosi di stabilire condizioni incentivanti al mantenimento ed alla ricostruzione delle strutture voltate. Nel caso di demolizione, la legge propone di derogare gli indici volumetrici di zona pur di ricostruire l'edificio con strutture voltate (art.3.)». La legge dichiara che «con riferimento al costo di costruzione, i Comuni applicano al costo base per l'edilizia agevolata un coefficiente massimo di correzione pari a 0,60 per il

rilascio di permesso di costruire con la previsione progettuale di realizzare con coperture a volta almeno il 60 per cento della copertura totale assentita (art.4)».

In relazione al *genius loci* «la Regione Puglia, al fine di favorire l'utilizzo di materiali e manufatti tradizionali e delle tecniche tipiche locali di costruzione, incentiva l'inclusione degli interventi di manutenzione, restauro e ripristino delle costruzioni tipiche a volta nei programmi integrati di rigenerazione urbana di cui alla legge regionale 29 luglio 2008, n. 21, e in ogni altro strumento di pianificazione e programmazione orientato al recupero edilizio e alla riqualificazione urbana. Tale inclusione rappresenta criterio di valutazione nell'erogazione dei finanziamenti destinati alla riqualificazione urbana (art. 5.1)». Inoltre «la Regione Puglia promuove altresì progetti culturali rivolti alla formazione e all'aggiornamento di operatori tecnici e professionali, in maniera da garantire la trasmissione delle conoscenze e delle esperienze necessarie alla realizzazione delle strutture a volta (art. 5,2)».

La legge del 29 ottobre 2009, n. 26 che qui si è voluta riportare, sottolinea l'importanza della costruzione voltata lapidea in area pugliese, e dimostra la sua attualità promuovendola nel progetto di architettura, riaffermando i caratteri identitari ed il linguaggio condiviso espresso da una tecnica consolidata e ricca di innovative potenzialità espressive, che in questo studio si vogliono dimostrare attraverso la fondamentale interazione di Sapere e Saper-fare offerto dalla disciplina stereotomica.

### **II.3 Analisi degli esempi significativi codificati dalla disciplina stereotomica**

L'arte della stereotomia, ovvero l'arte del taglio dei solidi, la cui prima codificazione è individuata ne *Le Premiere Tome de l'Architecture* (Parigi, 1567) di Philibert Delorme, attraverso regole geometriche di tipo proiettivo derivate dall'antica "arte del tracciato geometrico" (art du trait géométrique) tramandatasi nel corso dei secoli, individua e rappresenta attraverso il disegno l'esatta morfologia di ogni concio, per consentirne il taglio.

La disciplina stereotomica si fonda su tre "principi-invarianti" che la caratterizzano e la distinguono da ogni altra architettura lapidea, potendo considerare la stereotomia come «speculazione estrema dell'architettura in pietra»<sup>87</sup>:

- ◆ *invariante prefigurativo*, ovvero la suddivisione di un sistema continuo architettonico in opportune parti (definizione dell'apparecchiatura);
- ◆ *invariante tecnico/geometrico*, ovvero la definizione della morfologia degli elementi costruttivi (tecniche proiettive/tecniche di taglio);
- ◆ *invariante statico*, ovvero la capacità di assicurare l'equilibrio meccanico del sistema architettonico giuntato a secco (statica grafica/meccanica dei corpi rigidi).

Il concio lapideo, elemento minimo strutturale che contiene in sé la configurazione dell'intero sistema architettonico, viene quindi definito geometricamente in fase di progetto.

Il procedimento stereotomico di definizione formale possiede vantaggi di natura pratica poiché permette la prefigurazione dell'intero spazio voltato razionalizzandone la costruzione, ma si basa sull'esattezza

---

<sup>87</sup> D'AMATO GUERRIERI CLAUDIO, FALLACARA GIUSEPPE, *Costruire con la pietra oggi*, in "Città di Pietra/Cities of Stone. Pietre di Puglia. Costruire in pietra portante/Stones of Apulia. To Build load-bearing Stone", La Biennale di Venezia e Sensi Contemporanei, Venezia, Marsilio, 2006, pag. 35

progettuale di geometrie complesse e sulla lavorazione precisa degli elementi che in passato richiedeva la presenza di maestranze altamente specializzate, distinte per l'alto livello tecnico della lavorazione di finitura che erano in grado di ottenere. Oggi, il processo esecutivo dell'elemento strutturale si basa sulla conoscenza approfondita delle tecniche di modellazione info-grafica tridimensionale e sulla precisione delle macchine a controllo numerico computerizzato nel taglio degli elementi.

Attraverso la stereotomia è quindi possibile definire con esattezza il numero dei conci necessari alla costruzione della cupola lapidea in fase di progetto prevedendo l'espressività della configurazione del continuo architettonico, raggiunta attraverso la complessa morfologia geometrica dei suoi elementi strutturali discreti.

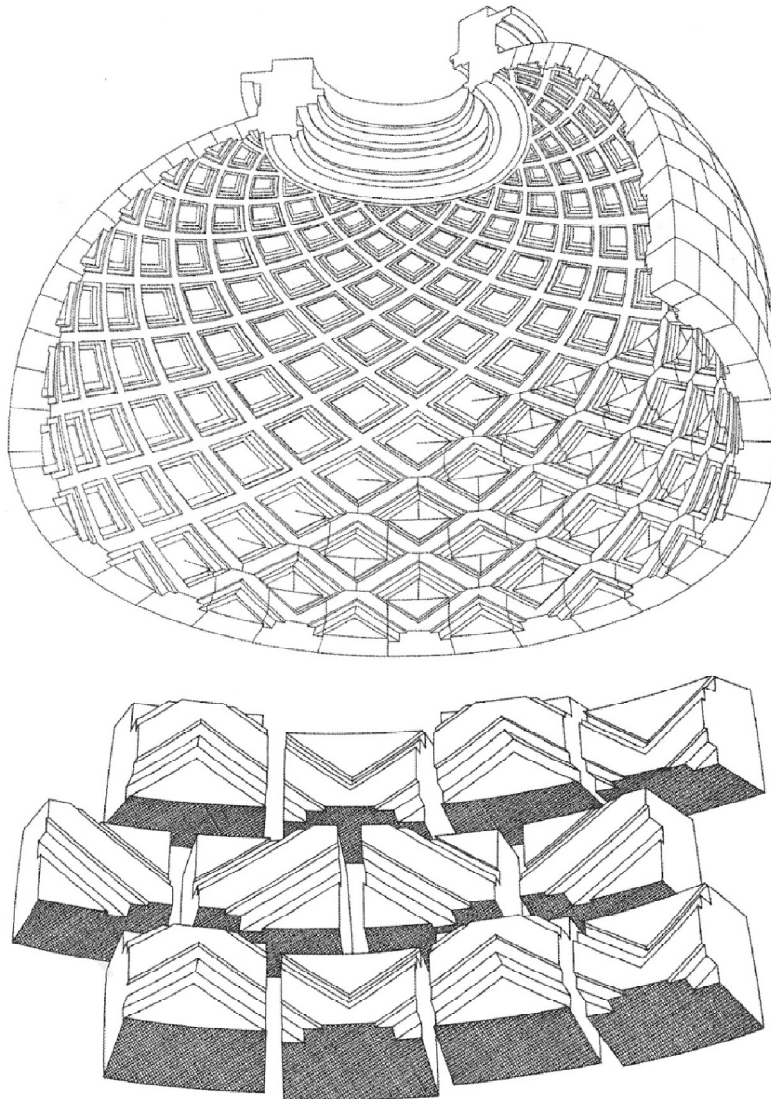
Esempio significativo è rappresentato dalla cupola lapidea stereotomica della *Royal Chapel* del *Château d'Anet*, in Francia, progettata da Philibert Delorme e costruita nel XVI secolo, tra il 1547 ed il 1552 (FIG.22).

Ogni concio racchiude nella sua configurazione sia la definizione della trama decorativa all'intradosso, costituita da due spirali logaritmiche di senso inverso sovrapposte, sia la definizione della trama strutturale costituita dal metodo tradizionale di apparecchiatura della cupola lapidea per ricorsi concentrici.

La disciplina stereotomica permise a Delorme di controllare la definizione della forma per ottimizzare il processo produttivo dei conci riducendo al minimo il numero di panneaux necessari per tagliarli. La cupola è costituita da 14 ricorsi concentrici, la cui altezza della faccia di paramento oscilla dai 50 cm all'imposta ai 20 cm in adiacenza alla lanterna. Le facce di letto o di posa sono uguali per dimensioni all'interno dello stesso ricorso, ma 28 sono i conci-tipo invariati, poiché ogni ricorso è costituito da due tipi di conci aventi uguali dimensioni ma diversa modanatura scolpita sulla faccia di intradosso.

Dall'analisi della *Planche IV* della *Monographie du Chateau d'Anet construit par Philibert Delorme en MDXLVIII, dessinée, gravée, et accompagnée d'un text historique & descriptif* opera di Rodolphe Pfnor





22. Philippe Potié,  
Studio della cupola della  
Cappella del Castello di  
Anet, progettata da  
Philibert Delorme. In  
“Philibert de l’Orme.  
Figures de la pensée  
constructive,” Marseille,  
Editions Parenthèses,  
1996, pp.116,117

23.  
Rodolphe Pfnor,  
Cappella di Anet  
in "Monographie  
du Chateau  
d'Anet construit  
par Philibert  
Delorme", 1867,  
Kyoto University  
Library



datata al 1867, conservata presso la Kyoto University Library, si rileva che la dimensione della luce coperta dalla cupola di Anet è pari a 8,21 metri (FIG. 23).

Differenti configurazioni di apparecchiatura delle cupole lapidee si riscontrano nell'architettura spagnola del XVI secolo, descritte nel *Libro de Traças de Cortes de Piedras*, opera che Alonso de Vandelvira redasse probabilmente tra il 1575 ed il 1591. Alcune di queste vennero realizzate nelle volte della *Casa Lonja de Mercaderes de Sevilla*, conosciuta anche come *Archivo General de Indias*.

Le coperture voltate degli ambienti di questo rilevante edificio vennero progettate e costruite attraverso i metodi di divisione della sfera adoperati dalla cartografia, quali lo sviluppo cilindrico e conico<sup>88</sup>. Lo sviluppo cilindrico si ottiene dividendo la sfera in meridiani e assimilando ognuno di essi alla porzione di un cilindro si determina la loro rappresentazione sul piano. Lo sviluppo conico, invece si ottiene dividendo la sfera in settori orizzontali secondo i paralleli, ogni settore individua una porzione della superficie sferica, sviluppo della superficie laterale di un tronco di cono.

I coni che definiscono le superfici coniche dei ricorsi paralleli hanno diverso raggio di base e vertici in punti distinti, ma sempre sopra l'asse della cupola. Tali coni non devono infatti confondersi con quelli che definiscono le facce di giunto dei conci che hanno vertice nel centro dell'emisfera che definisce la cupola (FIG. 24).

La trattatistica predilige lo sviluppo conico per il tracciamento della geometria degli elementi lapidei, poiché è più facilmente deducibile lo sviluppo della superficie laterale di ogni tronco di cono, corrispondente ad ogni ricorso, divisibile in un numero determinato di conci. Quindi la sagoma rigida o flessibile della faccia di intradosso del concio di un preciso ricorso che ne determina il taglio, equivale ad

---

<sup>88</sup> MINENNA VINCENZO, *Lo spazio Vandelviresco: forma e costruzione*, in "La ricerca che cambia: Atti del primo convegno nazionale dei dottorati italiani dell'architettura, della pianificazione e del design. Università IUAV di Venezia 19-20/11/2014" di Mauro Marzo e Lorenzo Fabian, Siracusa, LetteraVentidue Edizioni, 2015, pp. 143-155.

Ulteriori approfondimenti sulla relazione tra stereotomia e cartografia sono esposti nel paragrafo III.4 di questo studio.

una porzione dello sviluppo della superficie laterale del tronco di cono corrispondente a quel ricorso<sup>89</sup>.

Alonso de Vandelvira nel *Libro de Traças de Cortes de Piedras* individua un metodo geometrico sintetico (FIG. 25) per definire i conci attraverso lo sviluppo conico con il minor disegno di linee possibile. Il metodo di tracciamento illustrato nel *Titulo 74* e *Titulo 75* del manoscritto<sup>90</sup>, combina in una unica rappresentazione la pianta della cupola e la sua sezione, che corrisponde alla metà della pianta rappresentata, divisa in un numero di filari proporzionato alle dimensioni dei conci, permettendo di ottenere anche la posizione in pianta ed in sezione, per ciascun ricorso, delle facce del concio. Tale metodo di tracciamento attraverso le proiezioni coniche, è illustrato nella tavola<sup>91</sup> di Amédée François Frézier all'interno della sua opera *Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*<sup>92</sup> (1737-1739) (FIG. 28). Attraverso l'uso di questo metodo, de Vandelvira costruì le volte ad intradosso sferico presenti nell' Archivio General de Indias presso Siviglia, che presentano diverse apparecchiature determinate dalla diversa posizione dell'asse del cono rispetto all'asse dell'emisfera.

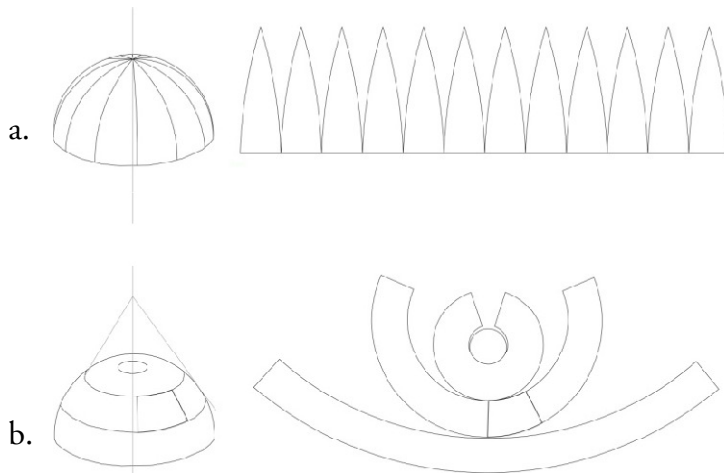
---

<sup>89</sup> Per ulteriori approfondimenti del tema si veda: CALVO LÓPEZ JOSÉ, ALONSO RODRÍGUEZ MIGUEL ÁNGEL, RABASA DÍAZ ENRIQUE, LÓPEZ-MOZO ANA, *Cantería renacentista en la Catedral de Murcia*, Murcia, Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia, 2005, pp. 57- 63

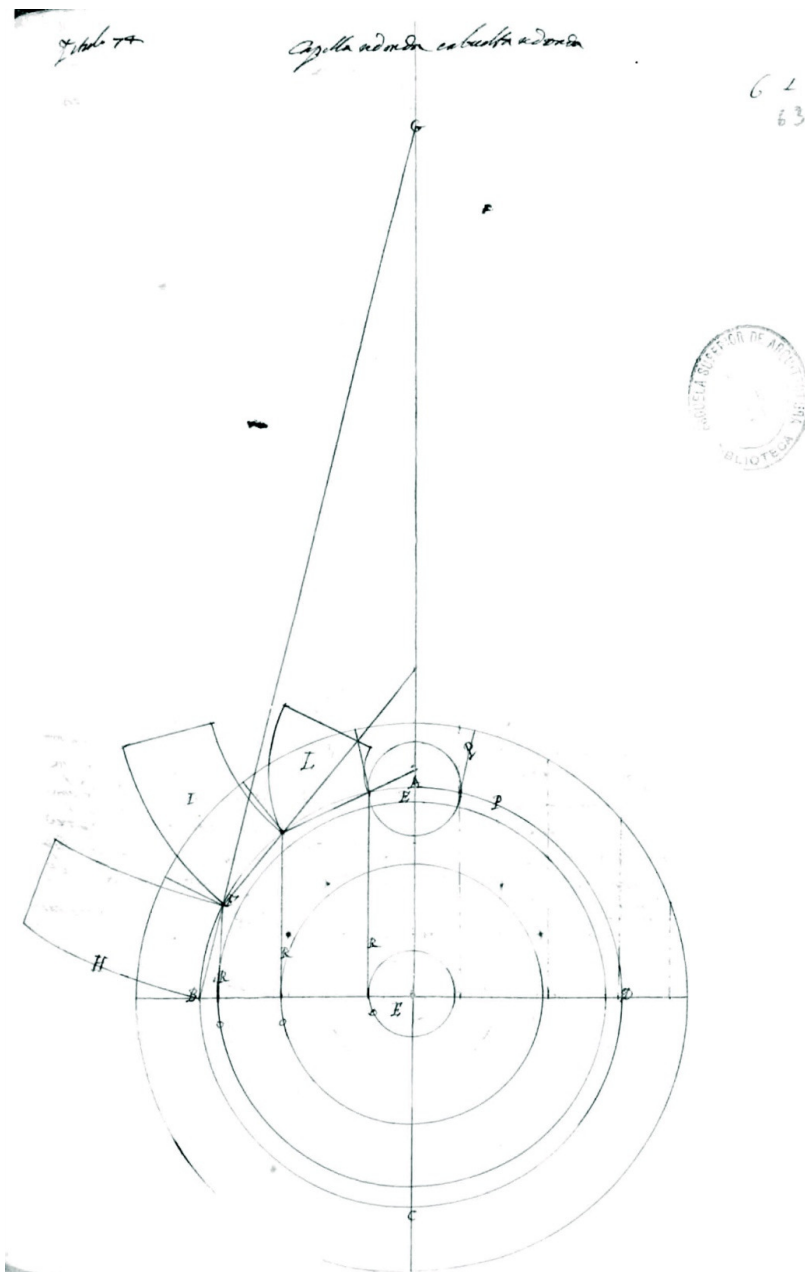
<sup>90</sup> DE VANDELVIRA ALONSO, *Libro de Traças de Cortes de Piedras* (1575-1591), manoscritto *Exposición y declaración sobre el tratado de Cortes de Fábricas que escribió Alonso de Valdelvira por el excelente e insigne architecto, maestro mayor de obras de la Santa Iglesia de Toledo*, conservato presso la Biblioteca Universitaria della Escuela Técnica Superior de Arquitectura (E.T.S.), Universidad Politécnica de Madrid

<sup>91</sup> FRÉZIER AMÉDÉE FRANÇOIS, *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des bâtimens civils & militaires, ou Traité de stereotomie à l'usage de l'architecture*, 2 tomi, Strasburgo-Parigi, 1737-1739; ristampato da Jacques LAGET-L.A.M.E., Nogent-le-Roi, 1980, Tome second, Planche 53, pag. 331

<sup>92</sup> *Ibidem*.



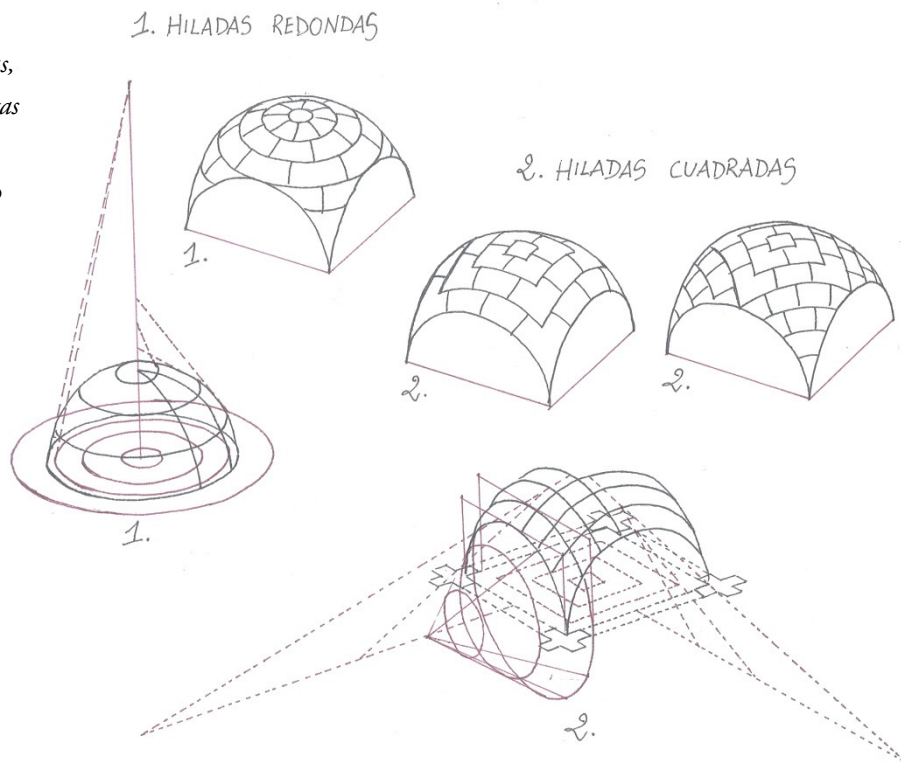
24. R. Gadaleta,  
*Divisione sferica  
attraverso proiezione  
cilindrica (a.)  
e conica (b.),  
ridisegno\*  
infografico*



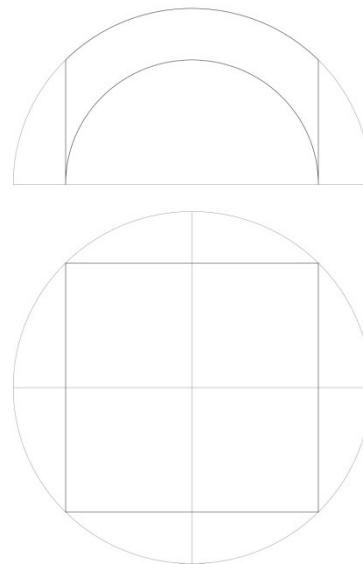
25. Alonso de  
Vandelvira, *Capilla  
redonda en buelta  
redonda*, 1575-  
1591, "Libro de  
Traças de Cortes de  
Piedras", Titulo 74,  
E.T.S. Universidad  
Politécnica de  
Madrid

26.

R. Gadaleta,  
*Hiladas redondas,*  
*Hiladas cuadradas*  
ridisegno\*  
eseguito a mano



27. R. Gadaleta,  
*Geometria della*  
*volta a vela,*  
disegno  
infografico



FIGG. 24, 26, Ridisegno delle illustrazioni presenti in: “Canteria renacentista en la catedral de Murcia” di J. C. López, M. A. A. Rodríguez, E. R. Díaz, A. López-Mozo, Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia, 2005, pp.58,59;  
FIG. 26, Ridisegno delle illustrazioni presenti in: “Lo spazio Vandelviresco: forma e costruzione”, di V. Minenna, in “La ricerca che cambia: Atti del primo convegno nazionale dei dottorati italiani dell'architettura, della pianificazione e del design. Università IUAV di Venezia 19-20/11/2014” di Mauro Marzo e Lorenzo Fabian, Siracusa, LetteraVentidue Edizioni, 2015, pag.149

Si definiscono quindi fundamentalmente due tipi di apparecchiatura con (FIG. 26):

- ◆ *filari circolari* (hiladas redondas), dove gli assi dei coni che li determinano sono verticali e coincidenti tra loro e con l'asse della volta sferica;
- ◆ *filari quadrati* (hiladas cuadratas), dove gli assi dei coni che li determinano sono orizzontali e non coincidenti tra loro e con l'asse della volta sferica.

La FIG. 26 mostra il disegno eseguito a mano dei due metodi succitati, al fine di comprenderne la costruzione. La volta a vela a base quadrata apparecchiata con filari quadrati, presente nella Casa Lonja, copre una luce di 8 metri ed è costituita da 31 conci-tipo invarianti.

Anche se la realizzazione di questa configurazione di apparecchiatura ottenuta attraverso proiezione conica, non si riscontra nella cupola, ma nelle volte ad intradosso sferico e particolarmente nelle volte a vela, si è scelto di enunciarle in questo studio, poiché, come noto, geometricamente la volta a vela costituisce la diretta derivazione della sfera attraverso la sezione di quest'ultima con i quattro piani verticali passanti per i lati del quadrato inscritto nella sua circonferenza di base. La volta a vela determina un involucro spaziale della campata coperto infatti da una porzione di semisfera (FIG. 27).

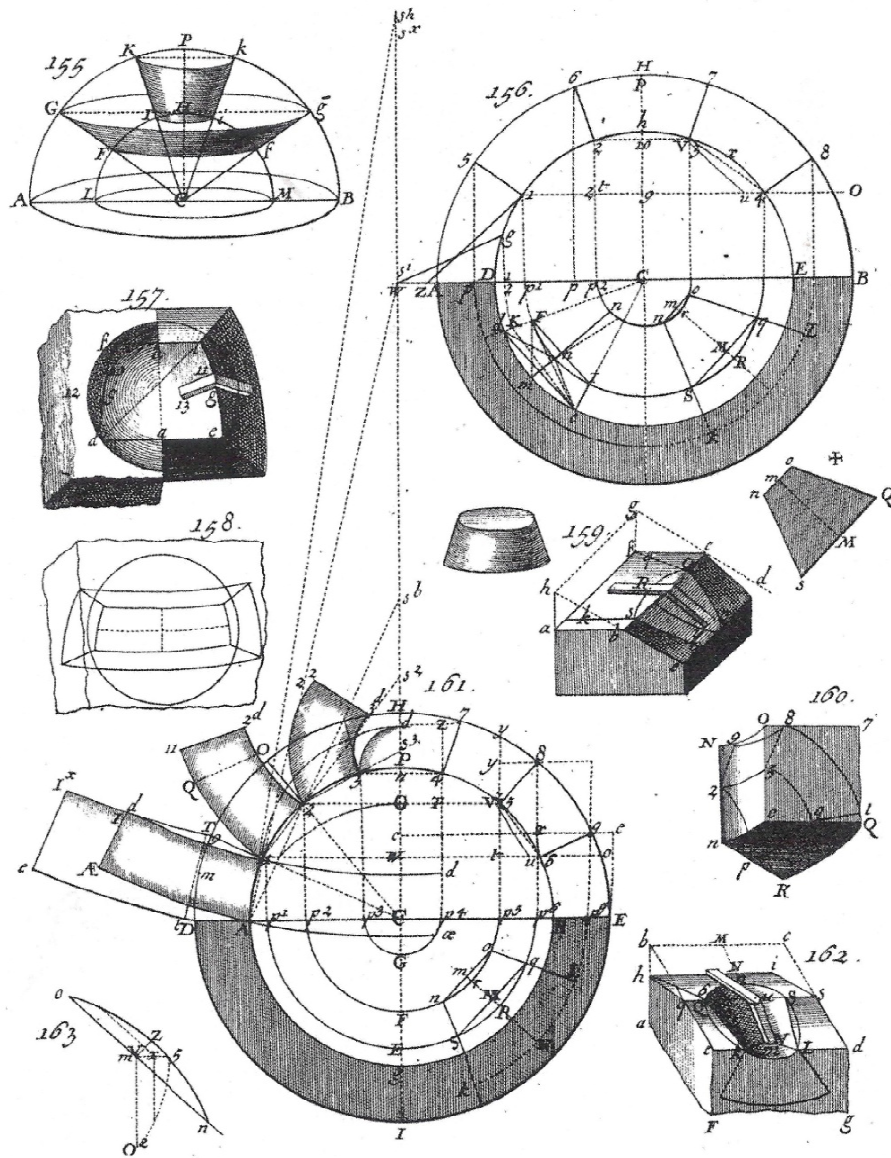
Sia la volta a vela emisferica che la cupola emisferica possiedono intradosso sferico, per questo entrambe sono denominate "volte sferiche". L'illustrazione 166 nella *Planche 54* del *Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*<sup>93</sup> di A. F. Frézier, (FIG. 29), testimonia come il metodo di divisione per filari quadrati possa essere applicato alla cupola emisferica che costituisce "l'estensione costruttiva" della volta a vela. Inoltre la stretta analogia tra queste due morfologie di copertura

---

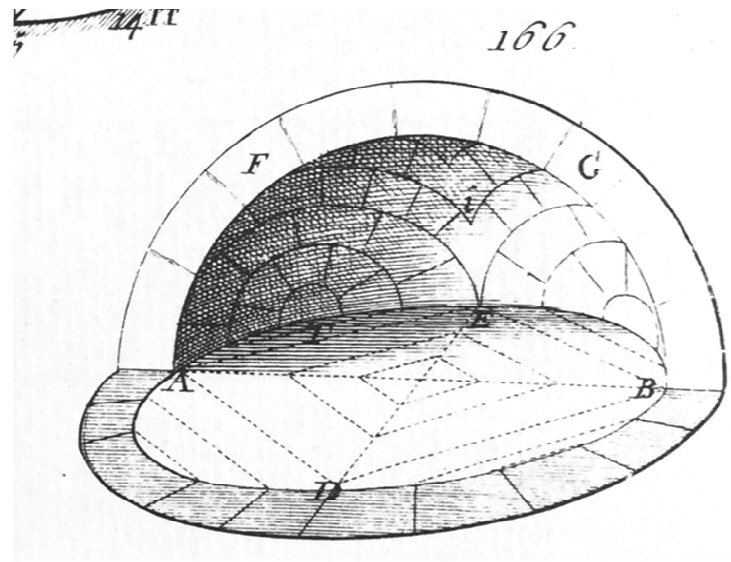
<sup>93</sup> FRÉZIER AMÉDÉE FRANÇOIS, *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des bâtimens civils & militaires, ou Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*, 2 tomi, Strasburgo-Parigi, 1737-1739; ristampato da Jacques LAGET-L.A.M.E., Nogent-le-Roi, 1980, Tome second, Planche 54, pag. 339



28. Amédée  
 François Frézier,  
 Tracciati  
 geometrici per la  
 suddivisione sferica  
 ed il taglio dei  
 conci attraverso la  
 proiezione conica,  
 1737-1739 in  
 "Traité de  
 stéréotomie à  
 l'usage de  
 l'architecture",  
 Tome II,  
 Planche 53



29. Amédée  
 François Frézier,  
 1737-1739,  
 Tracciati  
 geometrici per la  
 suddivisione sferica  
 attraverso la  
 proiezione conica,  
 in "Traité de  
 stéréotomie à  
 l'usage de  
 l'architecture",  
 Tome II,  
 Planche 54





è evidenziata da Enrique Rabasa quando nell'enunciare i diversi metodi di apparecchiatura utilizzati nelle coperture sferiche spagnole, scrive «conviene primero recordar que las bóvedas semiesféricas o vaídas se suelen despiezar en dovelas organizadas en hiladas horizontales»<sup>94</sup> interponendo la congiunzione “o” tra le due morfologie architettoniche per evidenziarne la comune base geometrica che determina l'equivalenza nel metodo di divisione della superficie sferica in conci e quindi nel metodo di apparecchiatura, equivalenza principalmente evidente nel caso dell'apparechiatura per filari circolari. Si nota come la terminologia “bóveda semiesférica” indica la cupola intesa come volta a calotta con perfetta simmetria centrale a base circolare, identificata anche con le parole “bóveda de media naranja” (volta simile a metà arancia)<sup>95</sup>. Nel libro *Las esferas de piedra. Sevilla como lugar de encuentro entre arte y ciencia en el Renacimiento*, di Francisco Pinto Puerto, infatti, il testo tratto dal *De re aedificatoria (Liber III, Caput XIV)* dell'Alberti «testudinum ista sunt genera: fornix, camura et recta spherica», «i generi delle volte sono: a botte, a crociera, sferiche»<sup>96</sup>, viene tradotto con: «las clases de bovedas son las siguientes: de canon, de arista y de media naranja»<sup>97</sup>. José Carlos Palacios, nel *Trazas y cortes de cantería en el Renacimiento español*, afferma che «el arquetipo de este tipo de bóvedas y de toda la

---

<sup>94</sup> RABASA DÍAZ ENRIQUE, *Estereotomía: teoría y práctica, justificación y alarde*, in “Informes de la construcción” a cura di E. Díaz, A. López-Mozo, CSIC, Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja, Consejo Superior de investigaciones científicas, Volumen 65, N° EXTRA-2, Madrid, ottobre 2013, pag.10

<sup>95</sup> I riferimenti terminologici indicati sono presenti in:

CALVO LÓPEZ JOSÉ, ALONSO RODRÍGUEZ MIGUEL ÁNGEL, RABASA DÍAZ ENRIQUE, LÓPEZ-MOZO ANA, *Cantería renacentista en la Catedral de Murcia*, Murcia, Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia, 2005, pag. 57;

HEYMAN JACQUES, *El esqueleto de piedra. Mecánica de la arquitectura de fábrica*, Madrid, Instituto Juan de Herrera, 1999, pag. 33

<sup>96</sup> ALBERTI LEON BATTISTA, *L'architettura (De re aedificatoria)*, testo latino e traduzione a cura di Giovanni Orlandi. Introduzione e note di Paolo Portoghesi, 2 Tomi, Milano, Edizioni Il Polifilo, 1966, Tomo I, Libro III, Capitolo XIV, pp. 240-241

<sup>97</sup> PINTO PUERTO FRANCISCO, *Las esferas de piedra. Sevilla como lugar de encuentro entre arte y ciencia en el Renacimiento*, Sevilla, Diputación de Sevilla, Servicio de Publicaciones, Sección Arte, RC Impresores, 2002, pag. 85

arquitectura llamada clásica es, sin duda, el casquete esférico que habitualmente llamamos hoy cúpula de media naranja. Es, por tanto, obvio el insistir en la importancia de la traza estereotómica de este modelo, ya que encierra la clave de toda la estereotomía del dieciséis»<sup>98</sup> ovvero che «l'archetipo di questo tipo di volte e di tutta l'architettura chiamata classica è, senza dubbio, la calotta sferica che habitualmente chiamiamo oggi cupola “a metà arancia” (emisferica). È quindi ovvio insistere sull'importanza del tracciato (disegno) stereotomico di questo modello, perché possiede la chiave di tutta la stereotomia del XVI secolo».

Un altro tipo di apparecchiatura, derivato dal metodo di proiezione conica per filari circolari, è costituito dalla *cupola elicoidale*, che Philibert Delorme definisce «en forme d'une coquille de limaçon» nel *Premier Tome de l'Architecture* (FIG. 30), e che Alonso de Vandelvira chiama «en vuelta de capazo» nel *Libro de Traças de Cortes de Piedras*<sup>99</sup> (FIG. 31).

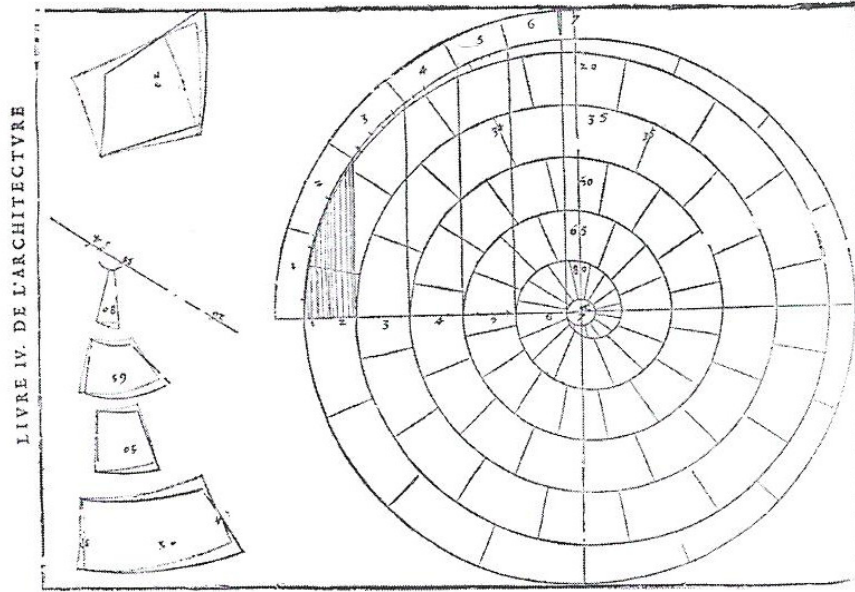
Il termine “capazo” fa riferimento ad un tradizionale cesto intrecciato secondo un andamento spiraliforme, che afferma ancora una volta l'identità teorica che intercorre tra arte della tessitura e tessitura muraria. Questa apparecchiatura, infatti, è data dalla divisione della sfera secondo una superficie elicoidale.

In pianta la spirale ha passo costante, ma l'altezza dei filari è variabile, determinando conci tutti diversi tra loro, differentemente dal modello per “hiladas redondas”. La difficoltà di configurazione dei conci ha determinato il raro utilizzo di questa apparecchiatura, di cui esistono sei esempi costruiti in Spagna, di cui quello più significativo è costituito dalla volta dell'antesacristía della Cattedrale di Murcia del

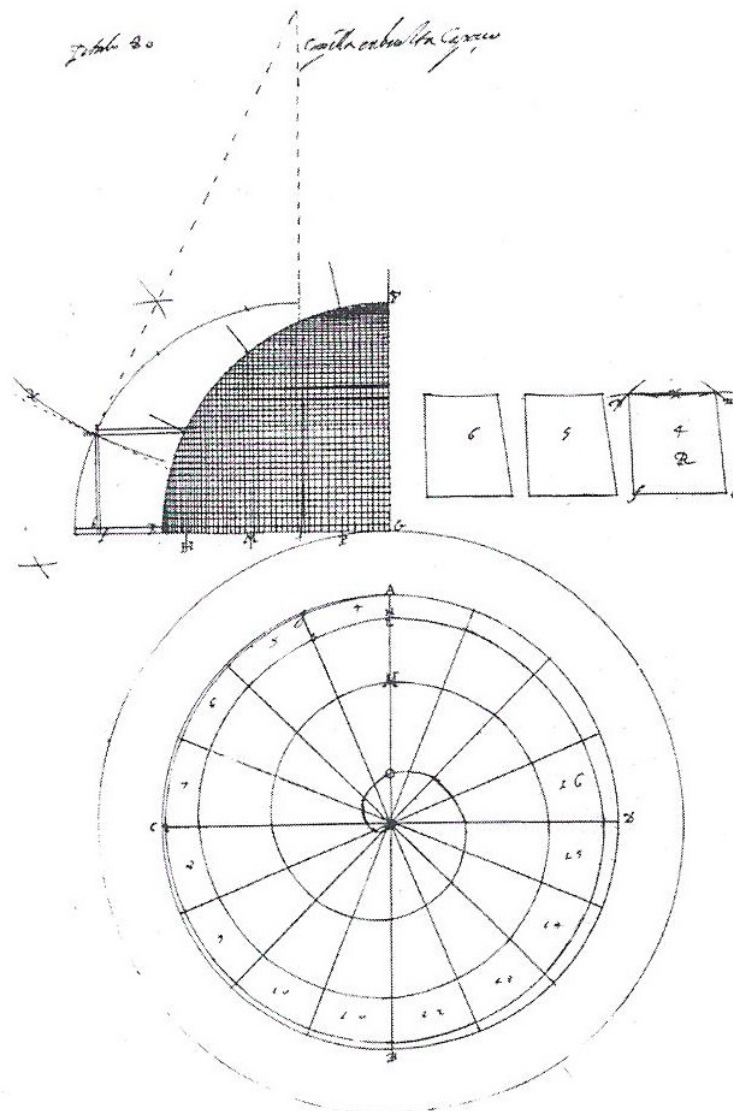
---

<sup>98</sup> PALACIOS GONZALO JOSÈ CARLOS, *Trazas y cortes de cantería en el Renacimiento español*, ICBR-Ministerio de Cultura, Madrid, 1990, pag. 135, citato in “Las esferas de piedra. Sevilla como lugar de encuentro entre arte y ciencia en el Renacimiento” di F. P. Puerto, Sevilla, Diputación de Sevilla, Servicio de Publicaciones, Sección Arte, RC Impresores, 2002, pag. 138

<sup>99</sup> Per ulteriori approfondimenti del tema si veda: CALVO LÓPEZ JOSÉ, ALONSO RODRÍGUEZ MIGUEL ÁNGEL, RABASA DÍAZ ENRIQUE, LÓPEZ-MOZO ANA, *Cantería renacentista en la Catedral de Murcia*, Murcia, Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia, 2005, pp. 123-136



30. Philibert Delorme, Cupola elicoidale, 1567, in "Premier Tome de l'Architecture"



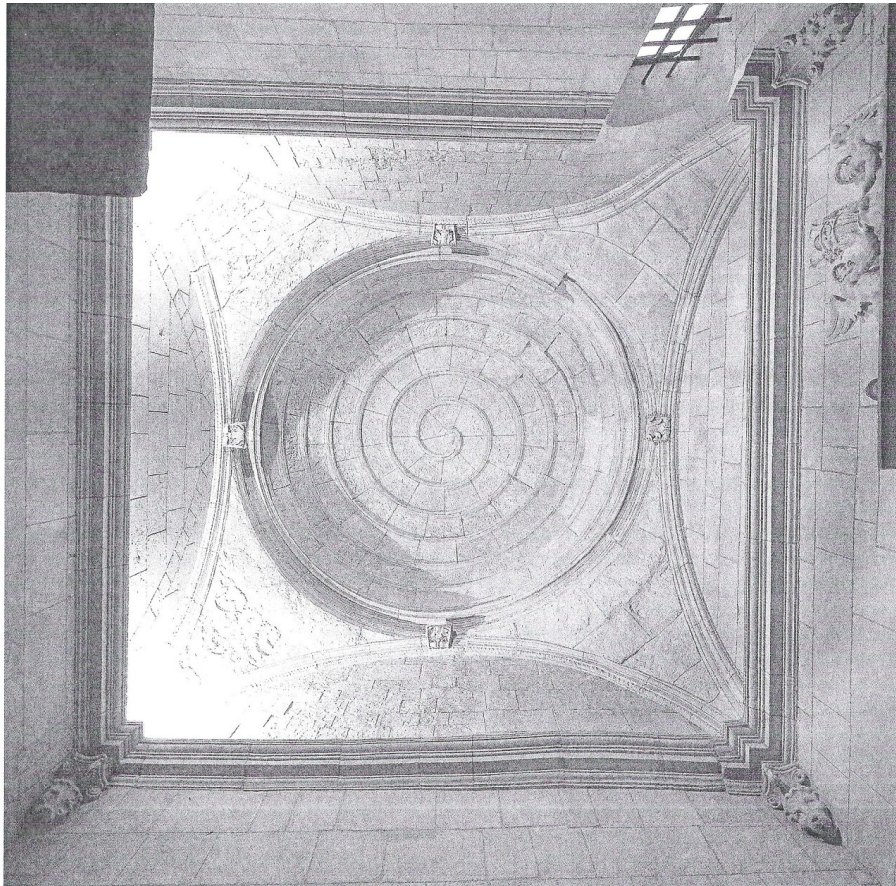
31. Alonso de Vandelvira, Capilla redonda en buelta capazo, Cupola elicoidale, 1575-1591 "Libro de Traças de Cortes de Piedras", E.T.S. Universidad Politénica de Madrid, Titulo 80

XVI secolo, che copre una luce poco inferiore ai 6 metri utilizzando circa 80 conci tutti differenti per geometria, inoltre l'altezza della faccia di estradosso dei conci varia da 20 cm nel filare più vicini alla sommità della cupola, a 60 cm nel filare più vicino all'imposta, come si evince dalle foto e dai disegni di rilievo presenti in *Cantería renacentista en la Catedral de Murcia*<sup>100</sup> (FIGG. 32, 33).

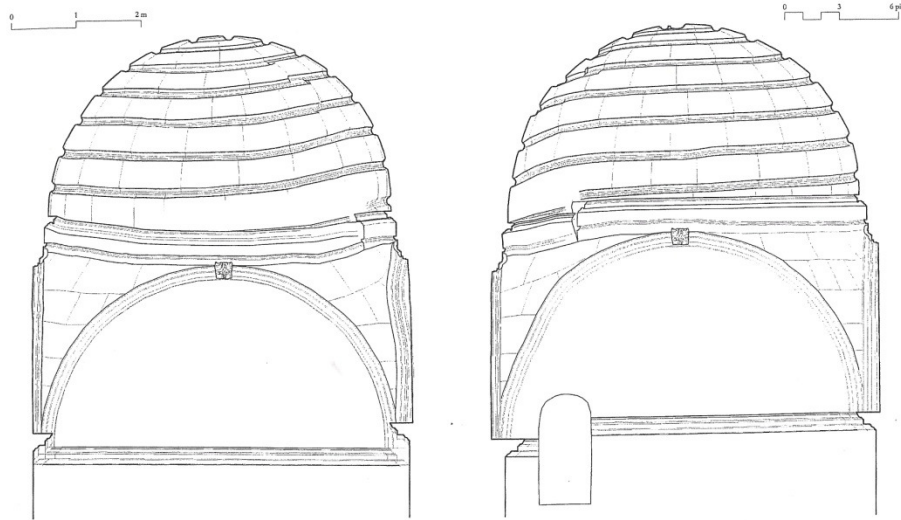
Queste apparecchiature non giustificano fini di natura pratica, poiché la complessità della definizione dei conci e la loro diversità in rapporto alla luce da coprire è tale che la costruzione non viene razionalizzata. Una giustificazione può essere trovata esclusivamente nell'espressività formale e nell'arditezza della soluzione morfologica conseguita, che rende non comuni questi spazi voltati costruiti.

---

<sup>100</sup> CALVO LÓPEZ JOSÉ, ALONSO RODRÍGUEZ MIGUEL ÁNGEL, RABASA DÍAZ ENRIQUE, LÓPEZ-MOZO ANA, *Cantería renacentista en la Catedral de Murcia*, Murcia, Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia, 2005, pp. 124, 127



32. Cupola all'interno della Cattedrale di Murcia, XVI sec., foto in "Cantería renacentista en la Catedral de Murcia" di J. C. López, M. A. Rodríguez, E. R. Díaz, A. López-Mozo, 2005, pag. 124



Sección hacia el testero norte.

Sección hacia el testero de levante.

33. Cupola all'interno della Cattedrale di Murcia, XVI sec., rilievi in "Cantería renacentista en la Catedral de Murcia" di J. C. López, M. A. Rodríguez, E. R. Díaz, A. López-Mozo, 2005, pag. 127



## II.4. Trattati sui metodi di apparecchiatura della cupola

Di seguito si riportano i principali trattati che descrivono i metodi di apparecchiatura della cupola, divisi in base agli aspetti teorico-tecnici ivi descritti, anche se tale distinzione ha confini labili:

- 1) Sulla geometria come controllo della forma costruita dello spazio cupolato, nel progetto di architettura:
  - ◆ Marcus Vitruvius Pollio, *De Architectura, Libri decem*, 15 a. C. ca.;
  - ◆ Leon Battista Alberti, *De re aedificatoria*, 1450 ca.;
  - ◆ Andrea Palladio, *I Quattro libri dell'architettura*, 1570;
  - ◆ Sebastiano Serlio, *I Sette Libri dell'Architettura*, 1537;
- 2) Descrizione dei rapporti dimensionali individuati negli esempi della tradizione costruttiva:
  - ◆ Carlo Fontana, *Templum Vaticanum et ipsius origo*, 1694;
- 3) Trattati di stereotomia per il progetto della cupola in pietra da taglio:
  - ◆ François Derand, *L'Architecture des voûtes*, 1643;
  - ◆ Philibert Delorme, *Le premier tome de l'architecture*, 1567 ;
  - ◆ Guarino Guarini, *Architettura civile*, postuma, 1737;
  - ◆ Amédée François Frézier, *Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*, 1737-1739;
  - ◆ Alonso de Vandelvira, *Libro de Traças de Cortes de Piedras*, 1575-1591;
- 4) Descrizione dell'apparechiatura della cupola in rapporto a considerazioni statiche sulla forma e al materiale:
  - ◆ Vincenzo Scamozzi, *Idea dell'Architettura Universale*, 1615, definisce le cupole emisferiche «di più sicura fermezza»;
  - ◆ Philippe De La Hire, *Traité de mécanique : où l'on explique tout ce qui est nécessaire dans la pratique des arts, et les propriétés des corps pesants lesquelles ont un plus grand usage dans la physique*, 1695;

### CAPITOLO III.

## Analisi del metodo architettonico di suddivisione della cupola in pietra da taglio in elementi strutturali, attraverso i poliedri sferici

---

### III.1 La geometria come fondamento della stereotomia

«Geometria autem plura praesidia praestat architecturae (la geometria offre molti aiuti all'architettura)», si legge nel *Liber I* del *De Architectura* di Vitruvio<sup>101</sup>.

L'arte della costruzione si basa infatti sulla conoscenza di precise regole geometriche che attraverso l'uso della riga, della squadra e del compasso, permettono il controllo della forma da costruire, sia essa ottenuta attraverso la geometria *fabrorum*, dunque la conoscenza di regole empiriche basate sul sapere tradizionale, come si è detto in precedenza nel paragrafo II.1, sia essa ottenuta attraverso la geometria teorica nella sua codificazione disciplinare su cui si basa l'arte della stereotomia, come si è detto nel paragrafo II.3.

Per queste motivazioni si è voluto in questo studio, analizzare sia i metodi di costruzione dello spazio cupolato lapideo determinati attraverso l'ausilio della "geometria pratica", sia quelli definiti attraverso la "geometria teorica", poiché «l'architettura è una scienza, che è adornata di molte cognizioni, e colla quale si regolano tutti i lavori, che si fanno in ogni arte. Si compone di Pratica e di Teorica. La Pratica è una continua e consumata riflessione sull'uso, e si eseguisce colle mani dando una forma propria alla materia necessaria, di qualunque genere ella sia. La Teorica poi, è quella che può dimostrare e dar conto dell'opere fatte colle regole della proporzione e col raziocinio»<sup>102</sup>, così come scrisse Vitruvio<sup>103</sup>.

---

<sup>101</sup> MARCUS VITRUVIUS POLLIO, *De Architectura, Libri Decem*, Liber I,1,4, I sec. a. C. (15 a. C. ca)

<sup>102</sup> GALIANI BERARDO, *L'architettura di Marco Vitruvio Pollione, tradotta e commentata dal marchese Berardo Galiani, accademico ercolanese e architetto di merito dell'Accademia di S. Luca*, Napoli, Fratelli Terres, 1790

<sup>103</sup> MARCUS VITRUVIUS POLLIO, *De Architectura, Libri Decem*, Liber I,1,1, I sec. a. C. (15 a. C. ca), testo latino: «Architecti est scientia pluribus disciplinis et variis eruditionibus ornata, [cuius iudicio probantur omnia] quae ab ceteris

34. Frézier Amédée  
François,  
*Geometria plura  
praesidia praestat  
Architecturae*, 1737-  
1739, in "Traité de  
stereotomie à l'usage  
de l'architecture",  
Strasburgo-Parigi,  
Jacques LAGET-  
L.A.M.E., Nogent-  
le-Roi, 1980, Tome  
second, seconda  
pagina dopo il  
frontespizio



onnart inv. et del.

Horwetz Sculp.

*Geometria plura praesidia praestat Architecturae. Vitruv. Lib. I.*

artibus perficiuntur. Opera ea nascitur et fabrica et ratiocinatione. Fabrica est continuata ac trita usus meditatio, quae manibus perficitur e materia cuiuscumque generis opus est ad propositum deformationis. Ratiocinatio autem est. quae res fabricatas sollertiae ac rationis proportione demonstrare atque explicare potest. »



«La teoria - scrive Rondelet – è una scienza che guida tutte le operazioni pratiche. Questa scienza è il risultato dell'esperienza e del ragionamento, fondato sui principi della matematica e della fisica applicati alle differenti operazioni dell'arte. È per mezzo della teoria che un abile costruttore giunge a determinare le forme e le giuste dimensioni che si devono dare a ciascuna parte dell'edificio secondo la sua posizione e gli sforzi che essa dovrà sostenere, in modo che ne risulti la perfezione, solidità e economia»<sup>104</sup>.

Se le regole geometriche costituiscono la base della costruzione tradizionale, si rivelano essere maggiormente indispensabili nella costruzione stereotomica, dove il controllo di forme complesse avviene attraverso la conoscenza approfondita di determinate e precise regole geometriche, il cui studio puntuale diviene fondamentale nella fase di preliminare del progetto architettonico.

Dal trattato di Amedée François Frézier, *Traité de stéréotomie à l'usage de l'architecture*<sup>105</sup>, si apprende bene che la stereotomia, ovvero l'arte "de la coupe des pierres" è la diretta conseguenza del rigoroso metodo dell'arte "du trait géométrique", adoperata in origine nella carpenteria per la risoluzione del taglio degli elementi strutturali, basatasi sul metodo proiettivo analizzato e poi codificato da Girard Desargues, detto il "Lyonnais", che generalizzò la geometria euclidea allo spazio infinito ed alle coordinate omogenee.

Attraverso la sua opera *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* (bozza di un saggio su quello che si ottiene sezionando un cono con un piano) del 1639, Desargues afferma di poter applicare le regole geometriche alla costruzione di meridiane («Touchant les Montres de l'heure au Soleil»), al taglio delle pietre («Touchant la coupe des pierres de taille»), ed alla prospettiva («Touchant la Perspective»).

---

<sup>104</sup> D'AMATO CLAUDIO, *Studiare l'architettura, un vademecum e un dialogo*, Roma, Gangemi Editore, 2014, pag. 31

<sup>105</sup> FRÉZIER AMÉDÉE FRANÇOIS, *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des bâtimens civils & militaires, ou Traité de stereotomie à l'usage de l'architecture*, 2 tomi, Strasburgo-Parigi, 1737-1739; ristampato da Jacques LAGET-L.A.M.E., Nogent-le-Roi, 1980

Questa relazione disciplinare tra geometria ed architettura è ben espressa nella tavola<sup>106</sup> di Abraham Bosse, uno dei maggiori incisori francesi del XVII secolo che contribuì molto a divulgare il lavoro di G. Desargues, contenuta all'interno della sua opera del 1653, *Moyen Universel de pratiquer la Perspective sur les Tableaux, ou Surfaces Irregulieres. Ensemble Quelques particularitez concernant cet Art, e celuy de la Graueure en Taille-Douce*.

La tavola (FIG. 35) illustra un modo pratico per individuare, attraverso la proiezione della luce, quindi attraverso la teoria delle ombre, le linee di fuga determinanti il tracciato della griglia prospettica su una volta cilindrica.

Il concetto di proiezione, definita infatti come «l'azione della luce e dell'ombra in rapporto alla direzione assunta e alla superficie investita»<sup>107</sup> a causa della «propagazione rettilinea di un fascio di raggi»<sup>108</sup>, è intuitivamente posto alla base della prospettiva, essendo essa derivata dalla percezione visiva, dove l'occhio costituisce il centro di proiezione dei raggi visuali che intercettano le forme viste, fornendo una particolare visione dello spazio dipendente dalla collocazione dell'osservatore, ovvero dal "punto di vista".

La "scienza della visione", definita ὀπτική τέχνη<sup>109</sup> (optichè technè) "ottica", nell'antichità classica, descrive i fenomeni ottici derivati dal comportamento e dalle proprietà della luce, quando questa interagisce con la materia, assumendo che essa si propaghi mediante raggi rettilinei, intercettati attraverso la visione.

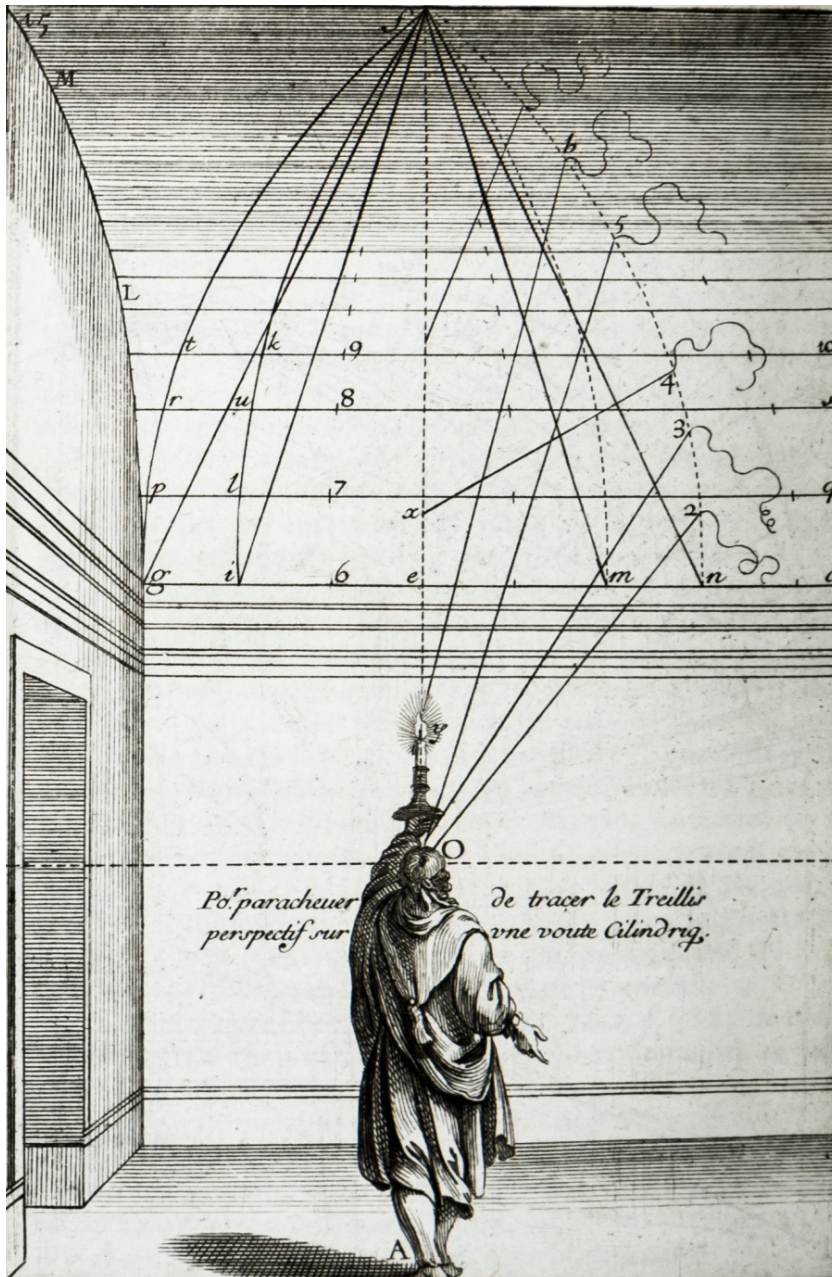
---

<sup>106</sup> BOSSE ABRAHAM, *Moyen Universel de pratiquer la Perspective sur les Tableaux, ou Surfaces Irregulieres. Ensemble Quelques particularitez concernant cet Art, e celuy de la Graueure en Taille-Douce*, Parigi, 1653, Planche 15 – "Po.r parachuteur de tracer le Treillis / perspectif sur une voute cilindriq(ue)"

<sup>107</sup> DEVOTO GIACOMO, OLI GIAN CARLO, *Nuovo vocabolario illustrato della lingua italiana*, 2 voll., Milano, Edizioni di Selezione dal Reader's Digest S.p.A. grandi opere, , 1991 (I Ed. 1987), vol. II

<sup>108</sup> *Ibidem*

<sup>109</sup> MONTANARI FRANCO, *Vocabolario della lingua greca*, Milano, Loescher Editore, 2003, (I Ed. 1995)



35. Abraham Bosse,  
*Po.r parachuteur de tracer  
le Treillis / perspectif sur  
une voute cilindriq(ue),*  
1653, in "Moyen  
Universel de pratiquer  
la Perspective sur les  
Tableaux, ou Surfaces  
Irregulieres. Ensemble  
Quelques particularitez  
concernant cet Art, e  
celuy de la Graeure en  
Taille-Douce",  
Bibliothèque nationale  
de France (BnF Gallica)

Essa formula la visione oculare e “psicofisiologica”<sup>110</sup> dello spazio come proiezione dei raggi visuali rettilinei che partendo dall'occhio, intercettano le forme nello spazio acquisendo la percezione della loro morfologia e posizione.

Il primo postulato dell'*Ottica* (Ὀπτικά) di Euclide afferma infatti che «i segmenti rettilinei tracciati a partire dall'occhio si portino ad una distanza tra loro di dimensioni sempre maggiori»<sup>111</sup>, il secondo postulato afferma che «la figura formata dai raggi visuali sia un cono avente il vertice nell'occhio e la base sui contorni delle cose viste»<sup>112</sup> ed il quarto afferma che «le cose viste sotto angoli più grandi appaiono più grandi, quelle viste sotto angoli più piccoli, appaiono più piccole e quelle viste sotto angoli uguali, appaiono uguali»<sup>113</sup>.

Euclide nella *proposizione 6* dell'*Ottica* anticipa la teoria prospettica sistematizzata successivamente, affermando che «rette parallele non sono viste parallele»<sup>114</sup>, ma appaiono di larghezze diverse se viste a distanze diverse, quindi se poste a distanza diversa dal punto di vista, ed in particolare afferma che la retta più vicina appare di larghezza maggiore rispetto a quella più lontana.

«La scenografia, nata come tecnica di realizzazione degli scenari teatrali, è definita da Gemino come la parte dell'ottica necessaria per disegnare le apparenze degli edifici»<sup>115</sup> di cui Vitruvio scrisse «item scaenographia est fronti set laterum abscedentium adumbratio ad circinique centrum omnium linearum responsus (la scenografia, poi, è lo schizzo del fronte e dei lati che si allontanano e la corrispondenza di tutte le linee al centro del compasso)»<sup>116</sup>.

---

<sup>110</sup> PANOFSKY ERWIN, *La prospettiva come "forma simbolica"*, Milano, Abscondita, 2007, pag.13

<sup>111</sup> EUCLIDE, *Ottica. Immagini di una teoria della visione*, a cura di Francesca Incardona, Roma, Editore Di Renzo, 2011

<sup>112</sup> *Ibidem*

<sup>113</sup> *Ibidem*

<sup>114</sup> RUSSO LUCIO, *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*, Milano, Universale Economica Feltrinelli, 2013, ( I Ed. 1996), pag. 85

<sup>115</sup> Ivi, pag. 83

<sup>116</sup> MARCUS VITRUVIUS POLLIO, *De Architectura, Libri Decem*, Liber I,2,2, I sec. a. C. (15 a. C. ca) trad. it. in “La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico

Questa visione intuitivamente prospettica dello spazio, è stata codificata dal Rinascimento e particolarmente attraverso il lavoro di Filippo Brunelleschi, con il nome di *perspectiva*, dove il “punto di vista” veniva matematizzato nel “punto di fuga” ed i “raggi visuali” in esso convergenti, nelle “linee di fuga”, facenti parte della “piramide visiva”.

Nel *De Pictura* di Leon Battista Alberti si legge infatti «erit ergo pictura intercisio pyramidis visivae secundum datum intervallum posito centro statutisque luminibus in datam superficiem lineis et coloribus arte repraesentata (sarà adunque pittura non altro che intercisione della piramide visiva, sicondo data distanza, posto il centro e costituiti i lumi, in una certa superficie con linee e colori artificiose representata)»<sup>117</sup>.

La prospettiva, attualmente intesa, è infatti la tecnica geometrica che consente di ottenere, nell’ambito di una rappresentazione piana, immagini corrispondenti a quelle fornite dalla visione diretta.

La parola *perspectiva* corrispondente al significato del termine greco ὀπτικά, deriva dal latino *perspectare* “guardare attraverso” e *prospectare* “guardare avanti”, da *pro* “avanti” e *spectare* “guardare”. Il termine *prospectus* infatti viene tradotto con “prospetto, veduta, prospettiva”<sup>118</sup>. L’atto del guardare avanti, corrisponde all’atto del gettare avanti lo sguardo, del proiettare i “raggi visuali” sulle “cose viste”, dal latino *proiectio-onis*, “il distendere”, derivazione di *proiectus*, participio passato di *proicere* “distendere, protendere, gettare avanti”, da *pro* “avanti” e *iacere* “gettare”<sup>119</sup>, stessa origine etimologica della parola “progetto” nel significato di “gettare avanti lo sguardo, pro-gettare”, quindi pre-vedere, pre-configurare le forme nello spazio, pre-vedere il taglio dei conci attraverso il disegno geometrico.

Per conoscere lo sviluppo dei conci lapidei al fine di poterli tagliare con precisione, è necessaria una profonda conoscenza geometrica nella

---

greco e la scienza moderna” di L. Russo, Milano, Universale Economica Feltrinelli, 2013, (I Ed. 1996), pag. 85

<sup>117</sup> ALBERTI LEON BATTISTA, *De Pictura*, Liber I, 12, 1436

<sup>118</sup> CASTIGLIONI LUIGI, SCEVOLA MARIOTTI, *Vocabolario della lingua latina*, Milano, Loescher Editore, 1996

<sup>119</sup> *Ibidem*

produzione del taglio effectuato storicamente “par panneaux et biveaux”.

Delorme affermò che la geometria da lui codificata come “trait géométrique”, derivava dalla geometria euclidea «studiata [...], inaugurata dottamente interpretata e documentata, illustrata e messa in luce dal signor Francois de Candale e pubblicamente letta ed esposta ai professori del re in questa università di Parigi», scrisse ne *Le Premiere Tome de l'architecture*, LIII, f.116.

Esiste uno stretto rapporto fra taglio dei solidi codificato dalla disciplina stereotomica e studio dei poliedri derivante dalla geometria classica, portato successivamente in auge dalla trattatistica rinascimentale che lo individuò come studio necessario per l'apprendimento dei principi della prospettiva, come dimostrano il *Libellus de quinque corporibus regularibus* ed il *De prospectiva pingendi* di Piero della Francesca (FIG. 36), ed anche, seppur in periodo successivo, *La perspective curieuse ou Magie artificielle des effets merveilleux* (Parigi, 1638) di Jean-François Nicéron (FIG. 37).

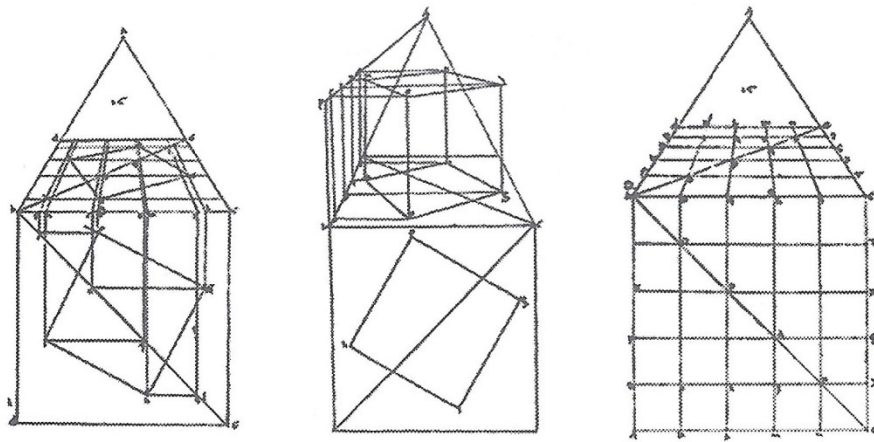
Tale relazione consiste nella possibilità di trasformare un poliedro in un altro, conoscendo le proprietà che determinano le interdipendenze formali dei solidi regolari, per mezzo del taglio dei suoi vertici secondo precisi parametri di proporzione geometrica. Quindi è possibile determinare la variazione poliedrica, ossia la trasformazione di un poliedro in un altro da esso derivato, effettuando peculiari tagli del solido geometrico, con esattezza di proporzionamento, che permettono anche di ottenere l'unione e/o l'incastro topologico tra i solidi poliedrici attraverso le superfici di taglio.

«Basandosi certamente sull'opera di Pacioli<sup>120</sup>, Albrecht Dürer considerava la conoscenza dei corpi regolari un requisito necessario all'opera degli scalpellini e degli architetti individuando nelle proprietà stereometriche dei poliedri uno strumento geometrico indispensabile

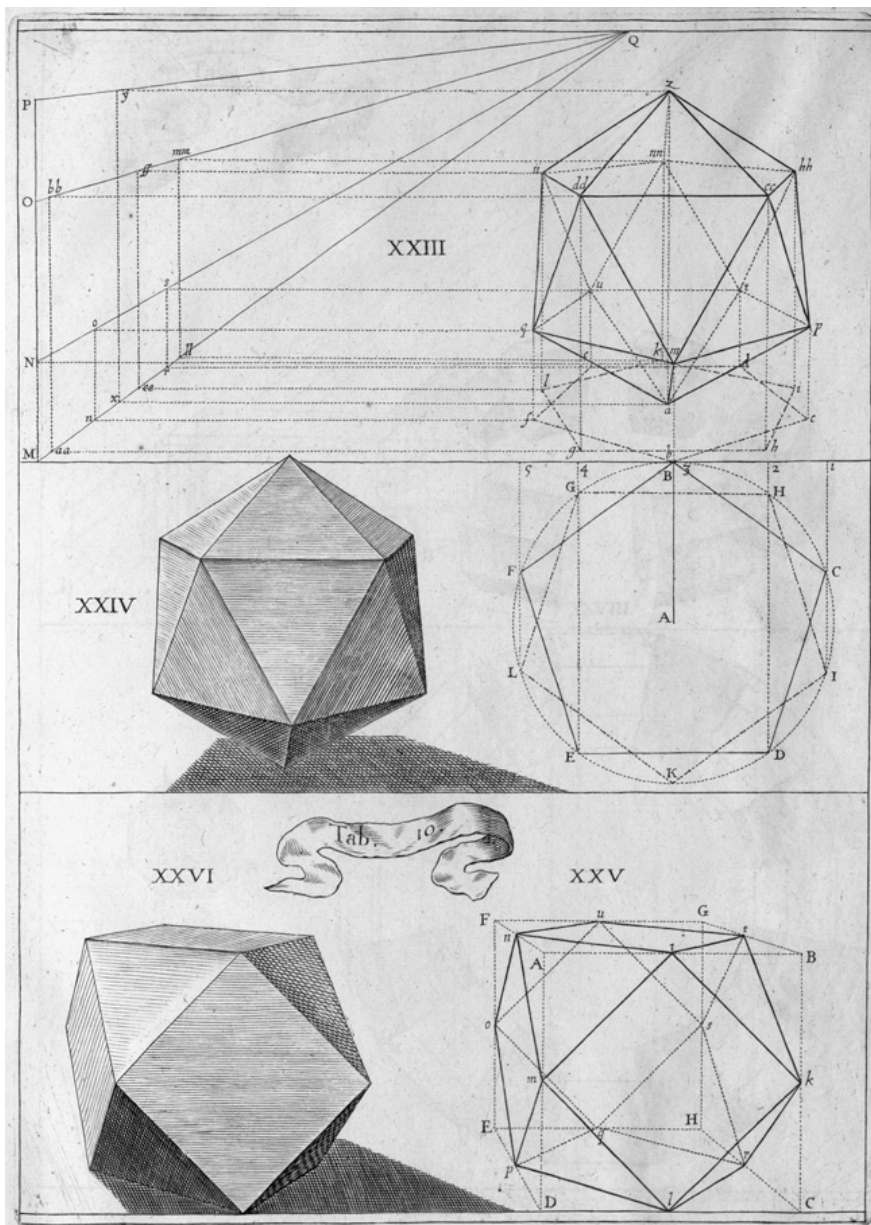
---

<sup>120</sup> PACIOLI LUCA, *Divina proportione*, Venezia, Paganino Paganini, 1509, opera conservata presso la Biblioteca Ambrosiana di Milano





36. Piero della Francesca, Studio prospettico, XV sec., in "Libellus de quinque corporibus regularibus", manoscritto, Biblioteca Apostolica Vaticana, Urb. Lat. 632



37. Jean-François Niceron, Studio della prospettiva attraverso l'icosaedro, 1638, in "La perspective curieuse ou Magie artificielle des effets merveilleux", ETH-Bibliothek Zürich, Rar 1296

per il taglio delle pietre e il disegno degli elementi architettonici»<sup>121</sup>.

Dürer affermò infatti nel suo trattato *Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebnen unnd gantzen corporen* del 1525: «La geometria è il giusto fondamento di ogni pittura, ho deciso di insegnare i suoi rudimenti e principi a tutti i giovani che vogliono apprendere l'arte perché può beneficiare non solo pittori, ma anche orafi, scultori, scalpellini, carpentieri e tutti quelli che devono fare affidamento sulla misurazione»<sup>122</sup>.

La conoscenza approfondita della geometria ed il possesso delle sue regole di trasformazione topologica, è quindi fondamentale al fine del progetto stereotomico, dove la corretta esplicazione della «relazione esistente tra geometria, rappresentazione e costruzione»<sup>123</sup> costituisce per l'architetto «la protezione formale garantita dalle regole»<sup>124</sup> del buon costruire consapevolmente e coerentemente, razionalizzando la forma, che diviene chiaramente intelligibile.

Come detto in precedenza, la differenza con il passato risiede principalmente negli strumenti tecnologici infografici di modellazione tridimensionale, che permettono la piena consapevolezza e l'esatta visualizzazione geometrica dell'elemento progettato, permettendone il controllo della forma, senza dover ricorrere a calcoli matematici e regole di costruzione geometrica del disegno molto più complesse. Tali strumenti, inoltre, semplificano la realizzazione di geometrie complesse permettendo di effettuare l'istantaneo passaggio dal modello tridimensionale alle macchine a prototipazione rapida prima, ed a controllo numerico successivamente, quindi il passaggio

---

<sup>121</sup> FOLICALDI FRANCESCA (a cura di), *Il numero e le sue forme. Storie di poliedri da Platone a Poincaré passando per Luca Pacioli*, Firenze, Nuova Grafica Fiorentina, per conto di Nardini Editore, 2005, pag. 4

<sup>122</sup> DÜRER ALBRECHT, *Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebnen unnd gantzen corporen (Istruzioni per la misurazione con riga e compasso di figure nel piano e nello spazio)*, Nuremberg, Hieronymus Andreas Formschneider, 1525, citato in "Las esferas de piedra. Sevilla como lugar de encuentro entre arte y ciencia en el Renacimiento", di F. Pinto Puerto, Sevilla, Diputación de Sevilla, Servicio de Publicaciones, Sección Arte, RC Impresores, 2002, pag. 96

<sup>123</sup> MONEO RAFAEL, *L'altra modernità. Considerazioni sul futuro dell'architettura*, Milano, Christian Marinotti Edizioni, 2015, pag. 76

<sup>124</sup> Ivi, pag. 102



immediato dal disegno al taglio ed alla produzione degli elementi, il passaggio immediato dall'ideale al reale.

Modellare tridimensionalmente gli elementi strutturali significa visualizzarne la configurazione finale d'insieme e possedere la visione spaziale unitaria dell'opera architettonica, colmando quel divario tra visione sintetica e visione analitica dello spazio, determinata dalla contrapposizione della prospettiva brunelleschiana e della geometria proiettiva di G. Desargues, con l'analiticità delle proiezioni ortogonali codificate dal metodo di G. Monge.

Fondamento della disciplina che regola la pratica della costruzione stereotomica è dunque la buona conoscenza della teoria geometrica.

Per queste ragioni, nelle prossime pagine di questo studio, verranno trattati argomenti di geometria, che lungi dall'essere astratti, si rendono necessari allo sviluppo del presente studio di ricerca, in quanto direttamente finalizzati alla costruzione dell'architettura, poiché, come scritto nel *Trattato della pittura* di Leonardo da Vinci, «quelli che s'inamorano di pratica senza scienza sono come li nochieri ch'entran in naviglio senza timone o bussola, che mai hanno certezza dove si vadano»<sup>125</sup>.

---

<sup>125</sup> DA VINCI LEONARDO, *Libro di pittura di M. Lionardo da Vinci pittore et scultore fiorentino*, Codice Vaticano Manoscritto Urbinate Lat. 1270 datato al 1540 ca., redatto da Francesco Melzi allievo di Leonardo, Parte Secunda, LDE T0080 CID80, a. Dell'errore di quelli che usano la pratica senza la scientia, G foglio 8, pag. 39v

### III.2 Il poliedro sferico

«Parlerò ora della bellezza delle forme [...] come qualcosa di rettilineo e alternatamente circolare, le figure piane e solide che si possono generare per mezzo del compasso, riga e squadra. Affermo infatti che queste figure sono belle non per qualcuno, ma belle in se stesse», secondo le parole pronunciate da Socrate nel *Filebo* di Platone.

Lo studio della geometria nell'antichità classica, la ricerca della giusta proporzione, dell'armonia tra le parti perseguita attraverso particolari rapporti numerici, evidente nell'affermazione di Policleto «il bello si realizza a poco a poco attraverso molti numeri»<sup>126</sup>, pervenutaci dal *Trattato di Meccanica* di Filone, portò alla formulazione geometrica e matematica delle figure tridimensionali e delle loro proprietà.

Platone nel *Timeo*<sup>127</sup>, dopo aver affermato che la sfera costituisce il simbolo di perfezione universale a causa delle sue caratteristiche geometriche che ne determinano regolarità di proporzioni e quindi bellezza, descrive i cinque poliedri regolari<sup>128</sup> derivati dall'unione di tre poligoni regolari<sup>129</sup> (triangolo equilatero, quadrato e pentagono regolare) lungo i loro lati, secondo precisi angoli diedrali, associandone le caratteristiche geometriche agli elementi fisici costituenti parti del cosmo: il tetraedro associato al fuoco, l'esaedro o cubo alla terra, l'ottaedro all'aria, l'icosaedro all'acqua. Da questi cinque poliedri platonici fondamentali, derivano tutti gli altri poliedri. Il dodecaedro rappresenta, secondo la definizione aristotelica, la “quinta essenza” cosmica, dal latino *quinta essentia*, ovvero il

---

<sup>126</sup> FILONE DI BISANZIO, *Trattato di Meccanica* (Μηχανική Σύνταξις), 4,1: «τὸ εὖ παρὰ μικρὸν διὰ πολλῶν ἀριθμῶν γίνεται», tratto da “Asti. Studi sulla città greca” di Luigi Maria Calìò, Roma, Thiasos Monografie, Edizioni Quasar, 2012, pag. 115

<sup>127</sup> PLATONE, *Timeo*, 360 a.C. ca.

<sup>128</sup> Un solido platonico o equivalentemente solido regolare o poliedro convesso regolare, indica un poliedro convesso che ha per facce poligoni regolari congruenti (ovvero esattamente sovrapponibili) e che ha tutti gli spigoli e i vertici equivalenti. Ne consegue che anche i suoi angoloidi hanno la stessa ampiezza.

<sup>129</sup> Un poligono regolare è un poligono convesso che è contemporaneamente equilatero (ovvero ha tutti i lati congruenti fra loro) ed equiangolo (ovvero ha tutti gli angoli congruenti fra loro).

“quintoelemento”, in greco antico πέμπτον στοιχεῖον, da πέμπτον (pempton), “quinto” e στοιχεῖον (stoicheion) “elemento”, che tutto avvolge e comprende (FIG. 38).

La quintaessenza costituiva il principio secondo cui il mondo fisico appare organizzato, che contribuisce al suo andamento, al suo movimento e cambiamento.

È interessante notare che attualmente la fisica definisce “quintessenza” una forma di energia ipotetica, postulata per spiegare l'accelerazione dell'universo, proposta come quinta forza fondamentale<sup>130</sup>, «in analogia con l'invisibile e onnipresente sostanza immaginata da Aristotele»<sup>131</sup>.

E' possibile individuare una reale verità di rapporto tra forme geometriche ed elementi fisici: chimicamente, infatti, le molecole si conformano e si legano secondo forme tetraedriche come il carbonio, molecola che regola la vita biologica degli esseri viventi.

Tali morfologie regolari possono rendersi evidenti nei cristalli, ed in particolare in quelli diffusi nell'attuale Italia meridionale, antica Magna Grecia, come la pirite<sup>132</sup> avente forma simile al dodecaedro, individuando nell'evidenza delle geometrie delle forme strutturali naturali, la possibile origine della speculazione filosofica-matematica (FIG. 39).

Molto probabilmente, infatti, l'antico studio della geometria è derivato dall'attenta osservazione delle forme strutturali naturali macroscopiche, che rivelano gli «intrinseci secreti dela natura»<sup>133</sup> basati su criteri di economia e massima efficienza, visibili nelle corrispondenze delle stesse leggi proporzionali in morfologie diverse e

---

<sup>130</sup> BRAIBANT SYLVIE, GIACOMELLI GIORGIO, SPURIO MAURIZIO, (Dipartimento di Fisica, Università di Bologna), *Particelle e interazioni fondamentali*, Milano, Springer, 2012, pag. 431, (II Ed.)

<sup>131</sup> LIVIO MARIO, *La sezione aurea. Storia di un numero e di un mistero che durava tremila anni*, Ariccia (RM), Biblioteca Universale Rizzoli, 2007, (I Ed. 2003), pag. 107

<sup>132</sup> Ivi, pag.109

<sup>133</sup> PACIOLI LUCA, *Divina proportione*, Wien, Ed. C. Winterberg, 1889, vol. II, pag. 129, citato in “Principi architettonici nell'età dell'umanesimo” di Rudolf Wittkower, Trento, Einaudi, 2010, pag. 19

leggibili attraverso la loro geometria che è stata razionalizzata matematicamente sin dall' antichità.

I cristalli costituiscono un esempio significativo di geometria assimilabile ai poliedri; i cristalli di pirite, diffusi nell'antica Magna Grecia ed in particolare vicino Crotona<sup>134</sup>, dove fu fondata da Pitagora la scuola pitagorica intorno al 530 a.C., presentano geometria esaedrica, ottaedrica e dodecaedrica, macroscopicamente visibile, data dall'ordine atomico interno, secondo regola geometrica.

Nei pressi di Crotona, inoltre, si rileva una importante miniera di zolfo, caratterizzato da forma cristallina rombica, ed in generale nel territorio calabrese, dove molte sono le località mineralogiche presenti<sup>135</sup>, sono osservabili vari cristalli dall'aspetto geometrico definito, come ad esempio il granato fosso d'Acri, dalla forma diacisdodecaedrica (FIG. 40).

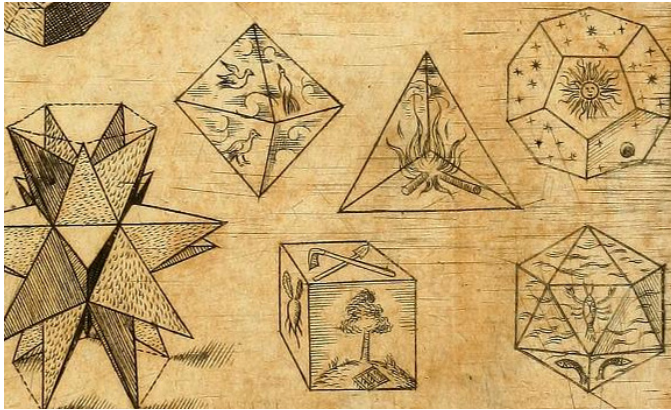
Questi cristalli geometricamente sfaccettati, ovvero caratterizzati dalla visibile forma poliedrica, dal greco antico πολύς (polùs) “molto” ed ἔδρα (edra) “base, faccia”, sono detti “euedrali”, dal greco εὖ (eu) “bene” ed ἔδρα (edra) “base, faccia”, termine che «descrive un cristallo completamente delimitato da facce cristalline, la cui crescita non è stata limitata o disturbata da cristalli o granuli adiacenti»<sup>136</sup>, insomma caratterizzato da “buone facce”, geometricamente individuabili. L'osservazione di tali forme ha potuto innescare riflessioni sulla geometria poliedrica e sulla geometria dei poligoni, derivata intuitivamente anche dalle forme determinabili empiricamente attraverso l'unione delle estremità di tre o più lunghezze uguali.

---

<sup>134</sup> La presenza di “pirite creduta aurifera” che presenta forma dodecaedrica è rinvenuta in Calabria, come attestano gli “Annali civili del Regno delle Due Sicilie”, Volume XIII, fascicolo XXV, Napoli, Tipografia del Real Ministero degli Affari Interni, 1837, pag. 58

<sup>135</sup> molte miniere sono presenti nel territorio calabrese, come anche attestano le parole di Saverio Tucci in “Memoria sul ristoro della Calabria”, Napoli, Gabinetto Bibliografico e Tipografico, 1848, Cap. VIII, pag. 79: «Perché nulla mancasse alla fertilità della Calabria ha la Natura arricchito il suo seno di miniere di ogni genere, dalle quali si potrebbero ritrarre speciosissimi vantaggi»

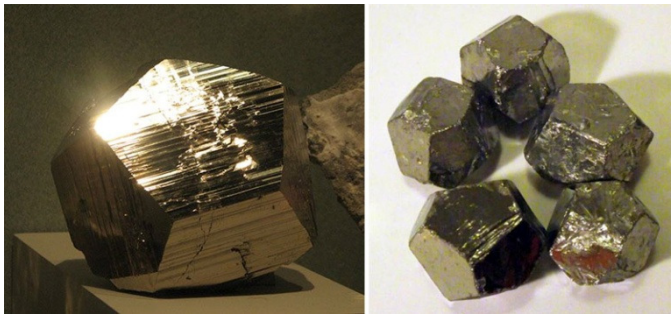
<sup>136</sup> KLEIN CORNELIS, *Mineralogia. Prima edizione italiana condotta sulla ventiduesima edizione americana*, Bologna, Zanichelli editore, 2004, pag. 19



38. Johannes von Kepler, Cinque solidi platonici e loro simbologia, 1619, in "Harmonices Mundi", Francoforte, Liber II, foglio posto tra pag. 58 e pag. 59



39. Cristalli di pirite



40. Granato Fosso d'Acri

Inoltre tali forme naturali hanno potuto rafforzare la teoria pitagorica sul significato cosmico dei numeri e dei principi geometrici di simmetria (συμμετρία) ed euritmia (εὐρυθμία) come riflesso di principi universali, quei principi ordinatori dell' «Universo che, nella perfezione della sua simmetria, è semplicemente il più sublime dei poemi (Universe which, in the supremeness of its symmetry, is but the most sublime of poems)», come scrisse Edgar Allan Poe<sup>137</sup>.

Molte sono le forme strutturali naturali caratterizzate da visibile simmetria geometrica, di cui cito in questo studio quelle che hanno potuto stimolare il pensiero sulla suddivisione di una superficie sferica, proprie di alcuni frutti, come l'arancia divisa simmetricamente in spicchi (non a caso, come si è detto in precedenza, nella lingua spagnola la superficie emisferica della cupola viene detta “media naranja” ovvero “metà arancia”), oppure proprie di alcune tipologie di fiori come il “*Platycodon grandiflorus*” (*Campanula glandiflora*), il cui bocciolo pentagonale, dopo essersi gonfiato, si schiude dividendosi secondo simmetria pentagonale, dando origine ad un fiore con cinque petali.

Molte sono anche le forme strutturali naturali caratterizzate dalla divisione di una superficie sferica secondo geometria poliedrica, macroscopicamente visibili nelle morfologie di alcuni funghi come il *Clathrus ruber* (FIG. 41), caratteristico delle zone appenniniche o prealpine, che assume la forma di un icosaedro troncato (FIG. 42), quando è ben conformato.

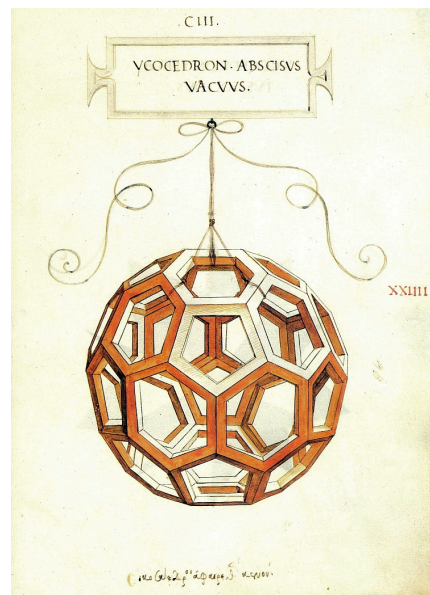
A livello microscopico questa morfologia poliedrica caratterizza i radiolari, le diatomee, i granuli di alcuni pollini, alcune molecole dette fullerereni (dalle strutture geodetiche di R. B. Fuller) oppure le capsidi di alcuni virus, così geometricamente conformate in modo da renderli stabili quindi più resistenti. Nel caso dei virus, infatti, la struttura poliedricamente simmetrica è quella più efficiente perchè compatta, in quanto richiede minore energia per essere mantenuta e quindi, viceversa, la maggiore quantità di energia per essere disgregata. Inoltre il capside è così costituito da poche proteine ripetute molte volte (la

---

<sup>137</sup> POE EDGAR ALLAN, *Eureka. A Prose Poem*, New York, Geo. P. Putnam, 1848, pag. 130



41. Clathrus ruber



42. Leonardo da Vinci, *Ycocedron Abscisus Solidus*, *Ycocedron Abscisus Vacuus*, Icosaedro troncato, 1509, nel “Divina Proportione” di Luca Pacioli, Plate XXIII, Plate XXIIII



cosiddetta “ridondanza proteica”), questo per risparmiare materiale genetico prodotto e avere maggiori possibilità di sopravvivenza, in quanto se una proteina viene danneggiata, le altre ad essa uguali sopperiscono al suo compito.

È possibile suddividere la superficie sferica attraverso la geometria dei poliedri, poiché i cinque solidi platonici regolari possono essere inscritti e circoscritti ad una sfera, questo significa che il centro del poliedro coincide con il centro della sfera e che i vertici del poliedro giacciono tutti sulla superficie sferica.

Euclide nella sua opera *Elementi* (Στοιχεῖα) composta tra il IV ed il III secolo a.C., descrive infatti i rapporti geometrici tra i poliedri platonici e la sfera. In particolare nel tredicesimo libro descrive la costruzione dei cinque solidi regolari inscrivibili in una sfera.

In particolare, attraverso la *Proposizione 13* degli *Elementi*, Euclide descrive il modo di «Costruire una piramide avente quattro facce triangolari equilatero circoscrivibile da una assegnata sfera e dimostrare che il quadrato sul diametro della sfera è una volta e mezzo il quadrato sul lato della piramide»<sup>138</sup>.

Nella *Proposizione 14* egli descrive il metodo per: «Costruire un ottaedro e circoscriverlo dalla medesima sfera della piramide e dimostrare che il quadrato sul diametro della sfera è doppio in potenza del lato dell'ottaedro (il quadrato sul diametro della sfera è il doppio del quadrato sul lato dell'ottaedro)»<sup>139</sup>.

Nella *Proposizione 15*, Euclide descrive il modo per: «Costruire il cubo e comprenderlo nella medesima sfera delle precedenti figure e dimostrare che il diametro della sfera è in potenza il triplo del lato del cubo (il quadrato sul diametro della sfera è triplo del lato del cubo)»<sup>140</sup>.

---

<sup>138</sup> COMMANDINO FEDERICO, *De gli Elementi d'Euclide, libri quindici, con gli scholii antichi. Tradotti prima in lingua latina da M. Federico Commandino da Urbino e con Commentarij illustrati trasportati nella nostra vulgare e da lui riveduti. Con privilegio*, in Urbino, Appresso Domenico Frisolino, 1575, libro XIII, pag. 257

<sup>139</sup> Ivi, pag. 258

<sup>140</sup> Ivi, pag. 259



Nella *Proposizione 16* egli espone il metodo per: «Costruire l'icosaedro e comprenderlo nella medesima sfera delle altre figure e dimostrare che il lato dell'icosaedro è una linea irrazionale che si chiama minore»<sup>141</sup>.

Nella *Proposizione 17* Euclide descrive il modo per: «Costruire il dodecaedro e comprenderlo nella medesima sfera nella quale sono comprese le precedenti figure e dimostrare che il lato del dodecaedro è una linea irrazionale che si chiama apotome ovvero residuo»<sup>142</sup>.

Il numero irrazionale è caratteristico della proporzione aurea, chiamata “divina proporzione” da Luca Pacioli, in particolare come afferma la *Proposizione 16*, il lato dell'icosaedro corrisponde al lato minore di uno dei tre rettangoli aurei uguali tra loro in esso contenuti, posti in rapporto di reciproca perpendicolarità ed aventi in comune un punto che coincide con il centro del poliedro.

Inoltre i vertici di ogni rettangolo aureo, ovvero il rettangolo in cui il rapporto tra il lato maggiore e quello minore è uguale al numero aureo irrazionale  $\varphi = 1,618$ , coincidono con quattro dei vertici dell'icosaedro.

I poliedri platonici sono interrelati secondo regole dettate dai loro gruppi di simmetria e secondo dualità poliedrale, ovvero la possibilità di trasformare un poliedro regolare in un altro, congiungendo i baricentri delle sue facce. Secondo queste proprietà, ogni poliedro può essere contenuto in un altro e contenerne un altro, oppure può contenere tutti i rimanenti quattro poliedri regolari, poiché, come ben evidenziato nel disegno di Johannes von Kepler nel *Mysterium Cosmographicum*<sup>143</sup> (FIG. 43) ogni poliedro può essere iscritto in una sfera e circoscriverne un'altra, «parendo inchiuso da quel ch'elli 'nchiude»<sup>144</sup>, secondo l'espressione che Dante utilizzò per descrivere l'interpretazione del cosmo attraverso sfere concentriche.

«Questi cinque corpi sono legati, proporzionati tra loro e circoscritti da una sfera, solo ricorrendo alla Divina Proportion che fra loro li

---

<sup>141</sup> Ivi, pp. 259-260

<sup>142</sup> Ivi, pag. 261

<sup>143</sup> VON KEPLER JOHANNES, *Mysterium Cosmographicum*, Tubinga, 1596

<sup>144</sup> ALIGHIERI DANTE, *Divina Commedia, Paradiso*, XXX, v. 12

accorda con certa irrazionale sinfonia»<sup>145</sup>, scrisse infatti il Pacioli. Se infatti il dodecaedro platonico ha spigolo di lunghezza pari a 1, il suo poliedro duale costituito dall'icosaedro ha spigolo pari al numero aureo  $\varphi$ . La legge di proporzione aurea, definita da Paolo Portoghesi «la struttura che connette»<sup>146</sup> le diverse morfologie esistenti in natura, secondo una logica individuata dalla «giusta proporzione»<sup>147</sup> che ne determina armonia formale di struttura e dunque bellezza, «sembra costituire quasi la legge segreta che presiede alla formazione cosmica, in una concezione della natura basata, come afferma lo Chastel, su di una specie di analisi cristallografica delle cose nella quale poliedri ed elementi fisici si corrispondono. [...] Nella sezione aurea è individuato il segreto matematico dell'organizzazione delle forme naturali. Pertanto lo studio della natura, sia nelle scienze che nelle arti, non può prescindere da essa»<sup>148</sup>.

Luca Pacioli descrive le regole di corrispondenza aurea dei poliedri tra loro nel *Divina proportione*, dove essi sono rappresentati dai disegni di Leonardo da Vinci che lo stesso Pacioli, nella dedica a Ludovico il Moro, descrive come l'artefice delle «supreme e leggiadrissime figure de tutti li platonici et matematici corpi regolari et dipendenti, che in prospectivo disegno non è possibile al mondo fare meglio». Leonardo per ogni poliedro ne raffigura il suo aspetto *solidus* quindi il poliedro con facce piane "solide", ovvero l'area dei poligoni che determinano le facce è rappresentata come matericamente costituita in modo da non apparire trasparente, ed il suo *vacuus*, corrispondente alla struttura intelaiata che ne evidenzia gli spigoli, permettendo di comprenderne l'esatta struttura portante (FIG.42).

---

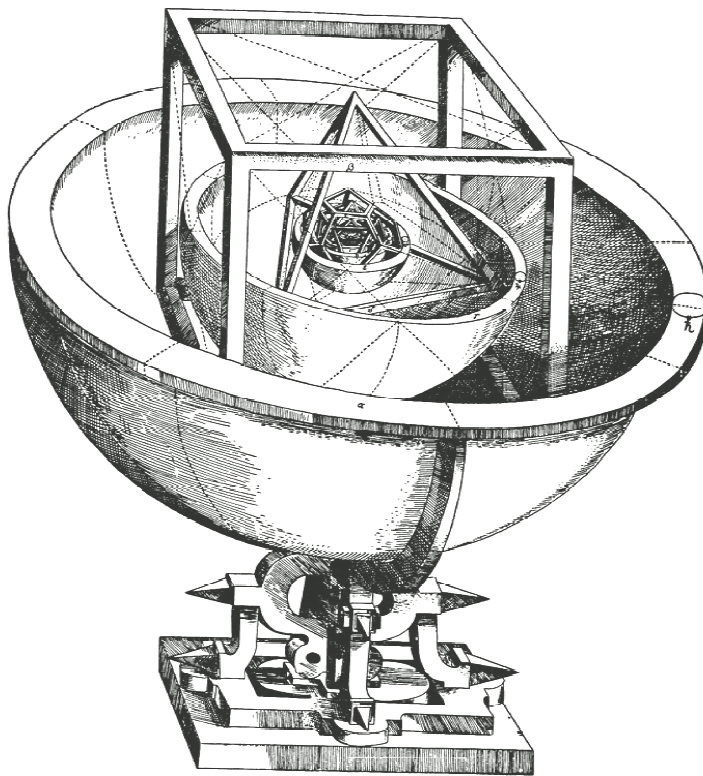
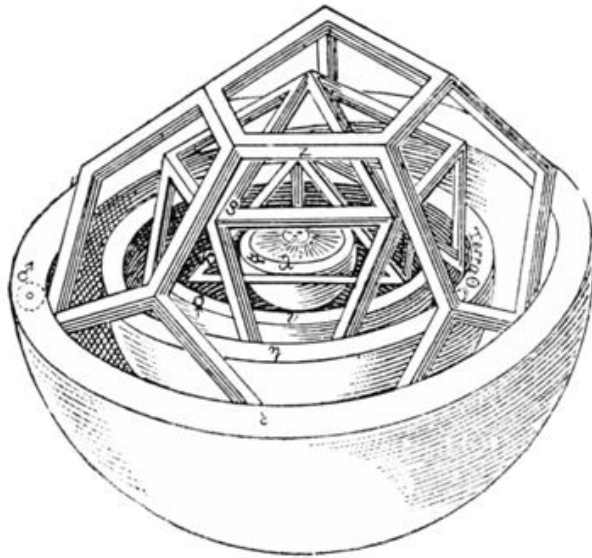
<sup>145</sup> PACIOLI LUCA, *De Divina proportione*, introduzione di Augusto Marinoni, Milano, Silvana Editoriale, 1986, pag.10 dell'introduzione

<sup>146</sup>PORTOGHESI PAOLO, *Geoarchitettura. Verso un'architettura della responsabilità*, a cura di Maria Ercadi e Donatella Scatena, Milano, Skira, 2005, pag. 63

<sup>147</sup> PLATONE, *Timeo*, 360 a.C. ca.

<sup>148</sup> BRUSCHI ARNALDO, MALTESE CORRADO, TAFURI MANFREDO, BONELLI RENATO (a cura di), *Scritti rinascimentali di architettura*, Milano, Edizioni Il Polifilo, 1978, pag.35

43. Johannes von Kepler,  
Ipotesi sulla morfologia  
del cosmo in “Mysterium  
Cosmographicum”,  
1596, Tubinga



L'antichità classica studiò la geometria sferica e formulò metodi per calcolarne il volume e la superficie inscrivendo alla sfera solidi geometrici che potessero approssimarne la geometria, ovvero suddividerla in porzioni di spazio aventi regole di calcolo note, quindi misurabili.

La *Proposizione 17* contenuta nel dodicesimo libro degli *Elementi* di Euclide, afferma che è possibile «essendo due sphaere d'intorno al medesimo centro, descrivere nella maggiore un solido polyedro, cioè di molti lati, che non tocchi la superficie della minor sphaera»<sup>149</sup>, a cui segue una dettagliata descrizione del metodo di costruzione grafica. Subito dopo aver enunciato la *Proposizione 17*, Euclide puntualizza: «intendasi due sphaere intorno al medesimo centro A. Bisogna nella maggiore sphaera descrivere un solido di molti lati, che non tocchi la superficie dell minor sphaera. Seghinsi le sfere da qualche piano, tirato per lo centro. I segmenti saranno cerchi, percioche stando fermo il diametro del cerchio, e girato il mezo cerchio d'intorno si è fatta la sphaera [...] si costituirà una figura di molti lati descritta nella sphaera, e composta de pyramidi, le cui basi sono i detti quadrilateri, [...] e la cima il punto A»<sup>150</sup>.

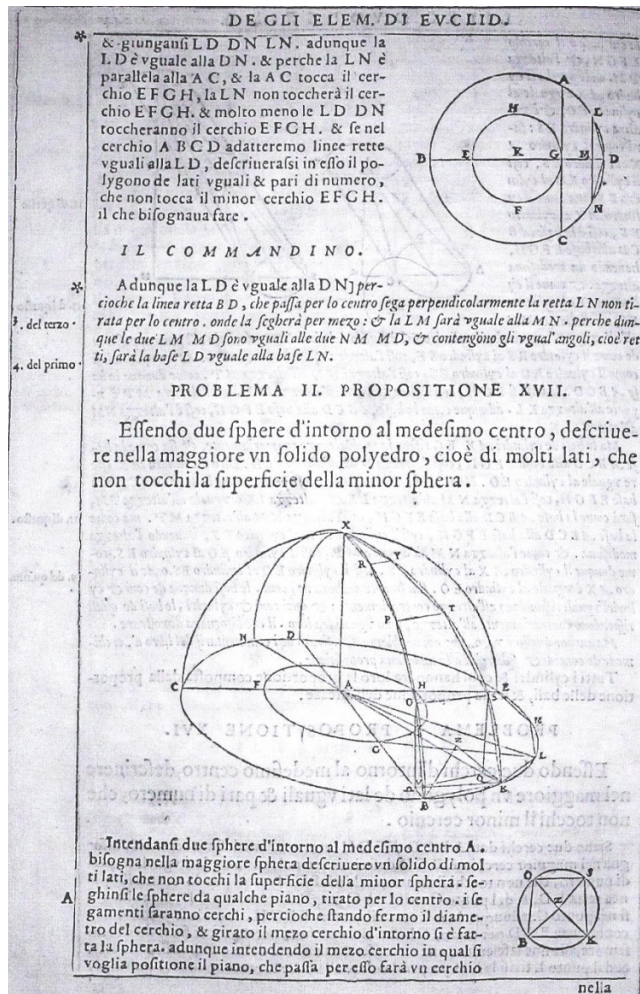
Da questa fondamentale proposizione (FIG. 44) si evince la conoscenza della geometria sferica quale solido di rotazione e la capacità di approssimare la superficie della stessa attraverso il poliedro ad essa inscritto, suddividendo quindi uno spicchio sferico con i quadrilateri determinati dalle basi delle piramidi aventi il vertice nel centro della sfera. Inoltre, come si denota dalla descrizione che segue la proposizione<sup>151</sup>, si evince la conoscenza del metodo per determinare le proporzioni dei lati dei quadrilateri che costituiscono le basi delle piramidi, che progressivamente diminuiscono la loro area procedendo dalla base della sfera verso la sua sommità.

---

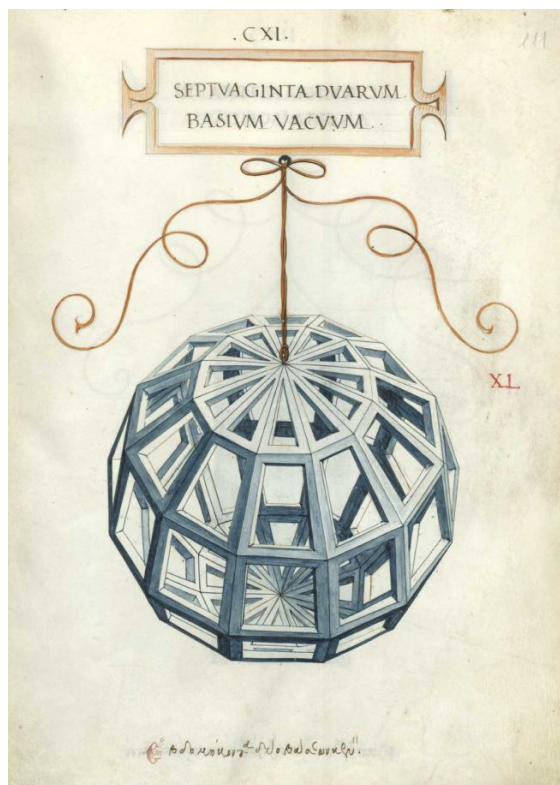
<sup>149</sup> COMMANDINO FEDERICO, *De gli Elementi d'Euclide, libri quindici, con gli scholii antichi. Tradotti prima in lingua latina da M. Federico Commandino da Urbino e con Commentarij illustrati trasportati nella nostra vulgare e da lui riveduti. Con privilegio*, in Urbino, Appresso Domenico Frisolino, 1575, libro XII, pag. 244

<sup>150</sup> Ivi, pp. 244-245

<sup>151</sup> *Ibidem*



44. Euclide,  
Proposizione XVII,  
In “De gli Elementi  
d’Euclide” di Federico  
Commandino, 1575,  
libro XII, pag.244



45. Leonardo da  
Vinci, *Septuaginta  
Duarum Basium  
Vacuum*, 1509,  
nel “Divina  
Proportione” di  
Luca Pacioli,  
Plate XL

Il poliedro che si determina ha morfologia molto simile a quella del *Septuaginta Duarum Basium*, il solido composto da settantatue basi disegnato da Leonardo da Vinci nelle tavole XXXIX e XL contenute all'interno del *Divina proportione* di Luca Pacioli (FIG.45).

Tale poliedro, nonostante approssimi molto la sfera alla quale può essere inscritto, non è regolare e neanche semiregolare, «essendo le sue due metà costituite da due serie di dodici trapezi, differenti per ogni serie, e da dodici triangoli isosceli»<sup>152</sup>.

Il metodo geometrico delle proiezioni era ben noto nell'antichità classica, come dimostra la proiezione gnomonica<sup>153</sup> sviluppata da Talete di Mileto (640 – 547 a.C.) ritenuta la più antica proiezione cartografica e come attesta l'*Ottica* di Euclide di cui si è detto in precedenza. La proiezione dei punti della sfera dal suo centro in un qualsiasi piano ad essa tangente è detta gnomonica.

L'approssimazione della sfera attraverso i poliedri ad essa inscritti e le conoscenze di geometria proiettiva sferica, permettono di dedurre che l'antichità classica conosceva la proiezione radiale degli spigoli del poliedro dal centro della sfera ad esso circoscritta sulla sua superficie, ottenendo il poliedro sferico.

Questa deduzione è dimostrata dal discorso di Socrate scritto nel *Fedone* di Platone in cui si legge: «ecco, amico mio, quel che si dice, che per prima cosa questa vera Terra, a chi la guardi dall'alto, appare come una di quelle variopinte sfere di cuoio divise in dodici spicchi»<sup>154</sup>, riferendosi ad una suddivisione sferica delle antiche palle di cuoio, utilizzate nel gioco detto σφαίρις (sfairis) “gioco della palla”.

---

<sup>152</sup> FOLICALDI FRANCESCA (a cura di), *Il numero e le sue forme. Storie di poliedri da Platone a Poincaré passando per Luca Pacioli*, Firenze, Nuova Grafica Fiorentina, per conto di Nardini Editore, 2005, pag. 51

<sup>153</sup> La *gnomonica* è l'arte di rappresentare la sfera celeste o parti di essa, allo scopo di studiare nelle proiezioni così ottenute le posizioni e i movimenti degli astri rispetto all'osservatore. Il termine deriva dal greco antico γνομονική τέχνη (gnomoniche technè) “l'arte di costruire meridiane”, ovvero orologi solari. Lo “gnomone” dal greco antico γνώμων (gnomon) è l'asta che proietta l'ombra sul quadrante.

<sup>154</sup> PLATONE, *Fedone* (Φαίδων), 386 - 385 a.C. (IV sec. a.C.) 110b: «λέγεται τοίνυν, ἔφη, ὃ ἑταῖρε, πρῶτον μὲν εἶναι τοιαύτη ἡ γῆ αὐτὴ ἰδεῖν, εἴ τις ἄνωθεν θεᾷτο, ὥσπερ αἱ δωδεκάσκυτοι σφαῖραι, ποικίλη», tratto da “Platonis Opera” di

Nel 1958 attraverso alcuni scavi svoltisi nell'antica necropoli di Samotracia, nei pressi del *Santuario dei Grandi Dei* (ἱερό των Μεγάλων Θεών) è stato rinvenuto un modello in terracotta rappresentante una antica palla di cuoio divisa in dodici porzioni poligonali incise sulla sua superficie, ovvero una palla divisa secondo un dodecaedro sferico. Il reperto è datato al 275 - 250 a.C. (III secolo a.C.), e misura circa 4 cm di diametro (FIG. 46). Nell'articolo *News Letter from Greece*, pubblicato nel 1958 sull'*American Journal of Archaeology*, si legge: «Whit the model from this Samothracian tomb we are able for the first time to see what such a ball was like (con il modello proveniente dalla tomba di Samotracia, noi siamo in grado per la prima volta di vedere come era una palla di questo tipo)»<sup>155</sup>. La palla era composta da poligoni sferici in cuoio cuciti tra loro, come evidenziano i lembi rialzati delle porzioni poligonali, fiancheggiati da una fila di punti neri, che rappresentano la cucitura dell'apertura attraverso la quale veniva inserita la camera d'aria, che veniva successivamente gonfiata. Questo procedimento secondo il quale venivano realizzate le palle di cuoio è testimoniato dalle parole di Arriano che scrive «fuggite giovani, questo gioco con la palla gonfiata dall'aria è diventato per persone di mezza età e per bambini»<sup>156</sup>. Dall'analisi del reperto di terracotta è emerso che i dodici pentagoni sferici in cui era suddivisa la palla di cuoio, dovevano essere dipinti con molti colori vivaci che li differenziavano tra loro, proprio come si legge nelle parole tratte dal *Fedone* di Platone, sopra riportate. L'antico metodo di suddivisione sferica è attualmente utilizzato per la costruzione dei palloni da gioco, derivati dalla sfericizzazione, ottenuta attraverso la pressione dell'aria interna, dell'icosaedro troncato, uno dei tredici poliedri archimedei, composto da venti esagoni e dodici pentagoni. La palla da gioco, infatti, risulta essere la visualizzazione

---

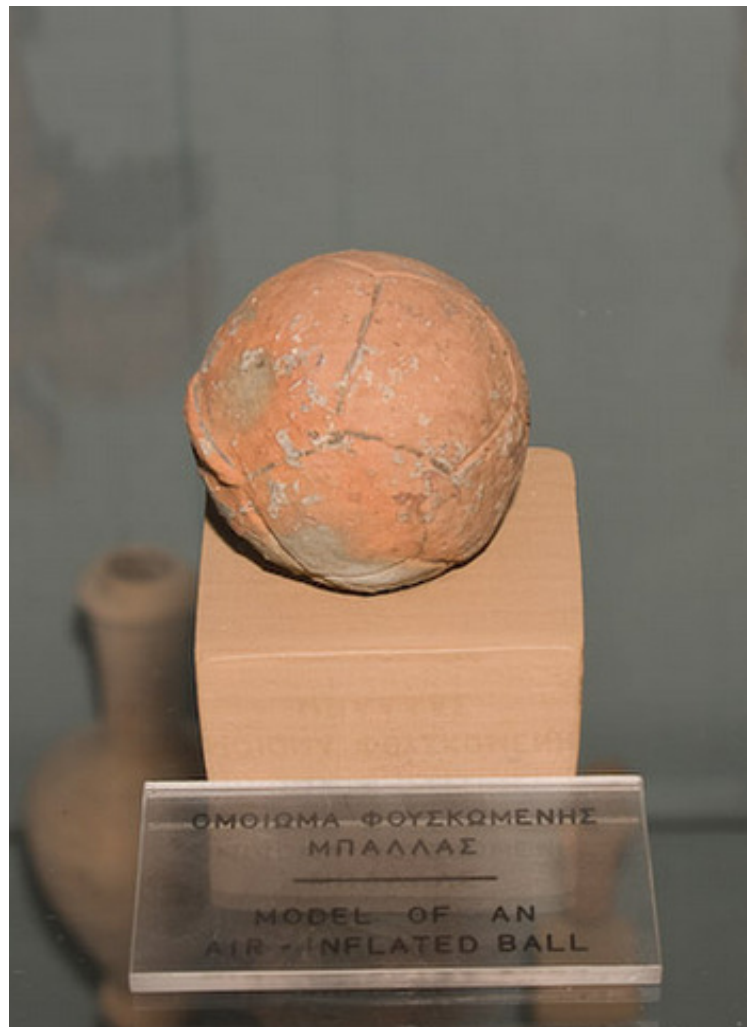
John Burnet, 5 tomi, Oxford, Oxford University Press, 1903, tomo I; e "Plato's Phaedo" di John Burnet, Oxford, Clarendon Press, 1911, pag. 109d

<sup>155</sup> VANDERPOOL EUGENE, *News Letter from Greece*, in "American Journal of Archaeology", Vol. 62, No. 3 (Jul., 1958), Published by Archaeological Institute of America, pag. 325

<sup>156</sup> ARRIANO, XIV, 47



46. Modello in  
terracotta di una  
antica palla di cuoio,  
275-250 a.C.,  
Samotracia,  
Museo Archeologico



più immediata del poliedro sferico di cui si ha costantemente esperienza tangibile.

La palla di cuoio così realizzata dimostra che il poliedro sferico si rivela molto utile nella pratica, per suddividere in parti uguali una superficie sferica.

### III.3. Divisione della sfera in parti uguali ai fini dell'ottimizzazione dei conci lapidei

I poliedri dunque possono «dividere l'intera sfera in parti uguali e simili»<sup>157</sup> proiettando radialmente dal centro del poliedro i suoi spigoli sulla sfera ad esso circoscritta o inscritta.

In questo modo si ottiene la divisione della superficie sferica in poligoni sferici corrispondenti topologicamente ai poligoni che costituiscono le facce dei poliedri platonici (FIGG. 47, 48).

La geometria della sfera, ovvero il luogo geometrico dei punti dello spazio, equidistanti da un dato punto, detto centro, sistematizzata dal matematico e fisico tedesco Bernhard Riemann, è caratterizzata da peculiari proprietà, ben descritte dal matematico Magnus J. Wenninger nel suo libro *Spherical Models*, di cui qui si riporta la traduzione: «1- Ogni sezione di una superficie sferica eseguita con un piano è un cerchio. In particolare questo significa che ogni faccia del poliedro inscritto nella sfera giace su un piano che taglia la sfera ottenendo un cerchio. Tale cerchio è circoscritto a quella faccia ed è chiamato “small circle” (piccolo cerchio). 2- Se un piano passa attraverso il centro della sfera, la sezione prodotta sarà chiamata “great circle” (cerchio massimo) ed il suo centro ed il suo raggio coincidono con il centro e con il raggio della sfera. 3- Un unico cerchio massimo è determinato dal centro della sfera e da due punti sulla sua superficie [...]. Questo significa che ogni spigolo del poliedro avente centro coincidente con il centro della sfera, determina un arco di cerchio massimo, se i due punti estremi dello spigolo (ovvero i vertici del poliedro) giacciono sulla superficie della sfera. La più piccola distanza da un punto all'altro sulla superficie sferica giace sul cerchio massimo, ed è chiamata “geodetica”. In particolare gli spigoli del poliedro possono essere sostituiti da archi di cerchi massimi per ottenere un poliedro sferico.

Ogni poligono piano che costituisce una faccia del poliedro si trasforma così in un poligono sferico che costituisce una faccia del poliedro sferico»<sup>158</sup> (FIG.38, 39).

---

<sup>157</sup> PLATONE, *Timeo*, 360 a.C. ca.

Il “cerchio massimo” fu denominato ὁ μέγιστος κύκλος (o méghistos chiuclos) “cerchio più grande” dal matematico ed astronomo greco Autolico di Pitane<sup>159</sup> (360-290 a. C.), contemporaneo di Euclide. Wenninger afferma che un altro modo per pensare questa trasformazione è costituito dalla proiezione centrale (chiamata anche gnomonica), attraverso la quale gli spigoli del poliedro generano archi appartenenti a cerchi massimi sulla superficie della sfera dividendola in poligoni sferici, ciascuno dei quali è corrispondente ad una faccia del poliedro.

«Ogni piano di simmetria del poliedro seziona la sfera ottenendo un cerchio massimo, perché tutti i piani di simmetria passano per il centro del poliedro che è anche il centro della sfera. L'intersezione di tutti i cerchi massimi costituiti dai piani di simmetria del poliedro dividono la superficie della sfera in una rete di triangoli sferici. Tale suddivisione è chiamata tassellazione sferica (spherical tessellation)»<sup>160</sup>.

Questo tipo di tassellazione sferica derivata dai poliedri, permette di ottenere una suddivisione della sua superficie in parti uguali o simili.

Una arcaica rappresentazione della suddivisione sferica in parti uguali, secondo forme poliedriche, può essere rintracciata nelle *petrosfere*, manufatti in pietra sferoidi di circa 3 cm di diametro, datati intorno al 3000 a.C., ritrovati presso il villaggio neolitico di Skara Brae in Scozia, alcune di essi attualmente conservati presso l'Ashmolean Museum ad Oxford, testimonianza della volontà sempre presente nell'intelletto umano di dividere e razionalizzare la forma sferica (FIG.49).

Ai fini del presente studio si rende necessaria la ricerca di una suddivisione della superficie sferica in un maggior numero di parti

---

<sup>158</sup> WENNINGER MAGNUS JOSEPH, *Spherical Models*, Mineola, New York, Dover Publications, Inc., 1999, pag. 1, (I Ed. Cambridge University Press, 1979), traduzione italiana a cura dell'autrice R. Gadaleta

<sup>159</sup> AUTOLICO DI PITANE, Περὶ κινουμένης σφαιράς, *Sulla sfera in moto*, 330 a.C. ca., contenente proposizioni di trigonometria sferica applicate alla descrizione della volta celeste, quindi dell'astronomia.

<sup>160</sup> WENNINGER MAGNUS JOSEPH, *Spherical Models*, Mineola, New York, Dover Publications, Inc., 1999, pag. 1, (I Ed. Cambridge University Press, 1979)

47. Dal cubo al cubo  
sferico secondo  
proiezione radiale,  
in: M. Wenninger,  
"Spherical Models",  
1999, pag. 4

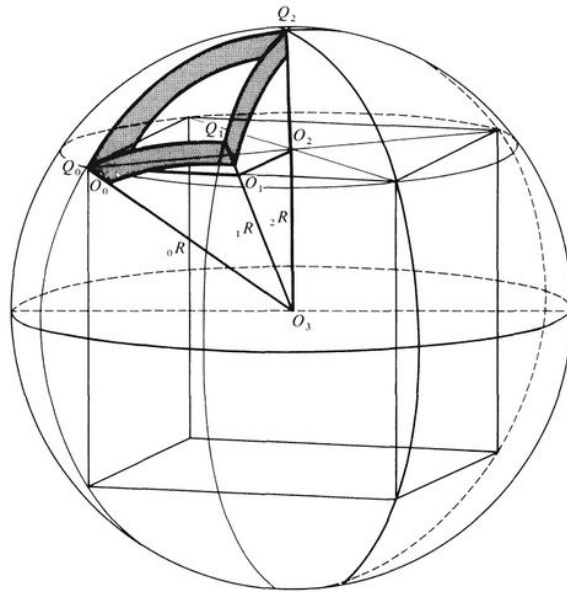
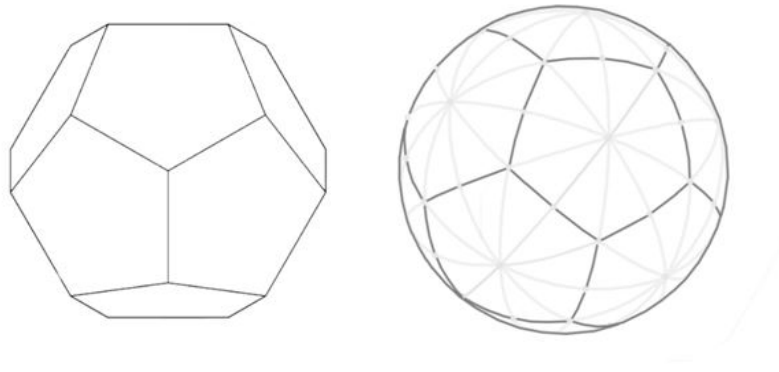


Fig. 1. Cube with circumscribing sphere.

48. R. Gadaleta,  
*Dal dodecaedro al  
dodecaedro sferico*,  
disegno infografico  
tridimensionale



49. *Petrosfere*,  
3.000 a.C.,  
Ashmolean  
Museum, Oxford



uguali caratterizzate dallo stesso tipo di conci, in modo da renderli quanto più ripetibili sull'emisfera e quindi ridurre al massimo il numero di conci diversi, ottimizzando il numero degli elementi necessari alla costruzione.

Ci si chiede quindi in quale modo è possibile dividere la superficie sferica in un maggior numero di parti uguali tra loro.

### **III.3.1 Divisione massima della sfera in parti uguali**

Al fine della tassellazione architettonica dell'emisfera, ovvero della determinazione della sua apparecchiatura, è necessario suddividere la superficie della stessa in piccole parti, dunque occorre determinare la divisione massima della sfera in parti uguali tra loro.

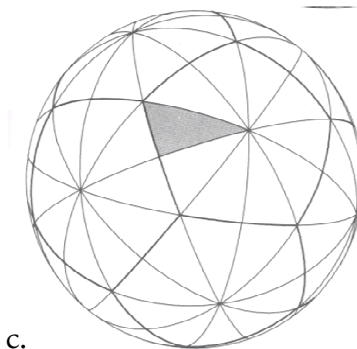
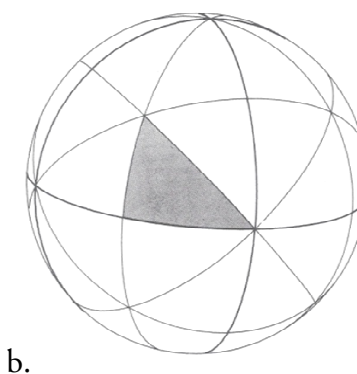
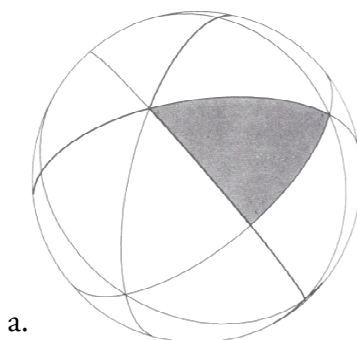
Dagli studi fin qui svolti, basati su conoscenze teorico-geometriche e su prove condotte empiricamente attraverso la costruzione di modelli infografici tridimensionali e di modelli in carta, è possibile affermare che la divisione massima della sfera in parti uguali tra loro secondo geometria poliedrica (escludendo quindi la divisione determinata dai meridiani e paralleli, abitualmente utilizzata nelle cupole lapidee come si è detto precedentemente), è data dalla divisione della superficie sferica secondo i cerchi massimi determinati dai piani di simmetria poliedrica, come si è detto nel paragrafo precedente.

I gruppi di simmetria di base dei cinque poliedri regolari si riconducono a tre: il gruppo di simmetria del tetraedro, quello dell'ottaedro e quello dell'icosaedro, come è anche illustrato e dimostrato da M. Wenninger<sup>161</sup>. Questo avviene perché i tre poliedri appena citati sono composti da facce costituite da triangoli equilateri, che proiettati radialmente sulla superficie sferica, generano triangoli equilateri sferici. Dividendo tali triangoli secondo i loro piani di simmetria (che coincidono con quelli del poliedro da cui sono originati) e congiungendo i loro baricentri con archi di cerchi

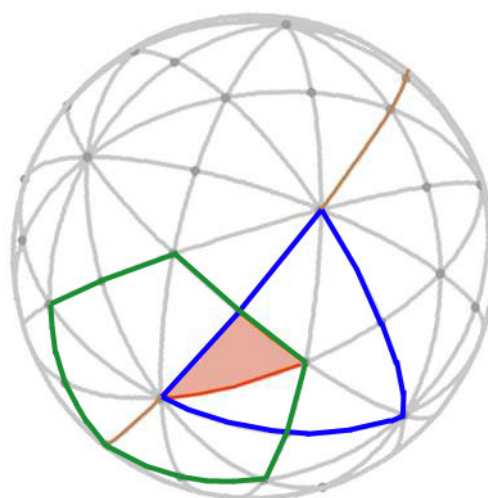
---

<sup>161</sup> Ivi, pp. 3-21

50. Triangoli  
caratteristici dei  
tre gruppi di  
simmetria:  
a. tetraedro  
b. cubo/ottaedro  
c. dodecaedro/  
icosaedro  
in "Spherical  
models", di  
M. Wenninger,  
1999



51. R. Gadaleta,  
*Divisione della sfera  
secondo il gruppo di  
simmetria  
dato dall' icosaedro e  
dal dodecaedro sferico,*  
modello  
tridimensionale  
infografico





massimi, si ottiene che la proiezione sferica del tetraedro è simmetrica alla proiezione sferica di un altro tetraedro, quella dell'ottaedro è simmetrica a quella del cubo e quella dell'icosaedro è simmetrica a quella del dodecaedro.

Quindi ogni proiezione sferica di un solido platonico ne contiene due simmetriche, o più precisamente duali tra loro. Infatti il poliedro duale di un tetraedro è un altro tetraedro, il duale di un ottaedro è il cubo e il duale di un icosaedro è un dodecaedro.

Si ricorda che, come affermato nel paragrafo III.2, la dualità poliedrale è la possibilità di trasformare un poliedro regolare in un altro, congiungendo i baricentri delle sue facce.

Quindi i gruppi di cerchi massimi simmetrici, che dividono la sfera in un reticolato composto da porzioni triangolari uguali e/o simili tra loro, sono tre: il primo è quello generato dal tetraedro sferico (gruppo di simmetria tetraedrica), il secondo è quello dato dalla compresenza simmetrica e duale dell'ottaedro sferico e del cubo sferico (gruppo di simmetria ottaedrica) ed il terzo è quello originato dalla compresenza simmetrica e duale dell'icosaedro sferico e del dodecaedro sferico (gruppo di simmetria icosaedrica).

La più piccola porzione triangolare sferica determinatasi in ognuno di questi tre casi o gruppi di simmetria, è diversa per ogni gruppo ed è chiamata "triangolo caratteristico"<sup>162</sup>, perché la sua ripetizione simmetrica tassa l'intera superficie sferica (FIG.50).

In particolare il gruppo di simmetria sferica del tetraedro è composto da triangoli caratteristici uguali tra loro e quindi sovrapponibili. Quello dell'ottaedro-cubo e quello del dodecaedro-icosaedro, invece, sono composti da triangoli caratteristici simmetrici tra loro e non sovrapponibili né per traslazione né per rotazione sulla superficie sferica. Dunque questi due gruppi di simmetria sono caratterizzati da due triangoli-tipo costituiti dal triangolo caratteristico e dal suo simmetrico, che si ripetono su tutta la superficie sferica.

Il riconoscimento della non sovrapponibilità di triangoli sferici simmetrici si trova nell'opera *Sphaerica* di Menelao di Alessandria (70 - 140 d.C.), dove si trovano anche le definizioni di "triangolo sferico"

---

<sup>162</sup> Ivi, pp. 28,29,30

detto τρίπλευρον (tripleuron) distinto dal “triangolo piano” denominato τρίγωνον (trigonon)<sup>163</sup>.

Il triangolo caratteristico del gruppo di simmetria del tetraedro possiede area maggiore rispetto a quello del gruppo cubo-ottaedro che a sua volta possiede area maggiore di quello del gruppo di simmetria dell'icosaedro-dodecaedro.

Quindi la porzione più piccola in cui è suddivisibile la superficie sferica in parti uguali secondo geometria poliedrica, è il triangolo caratteristico del gruppo di simmetria dell'icosaedro-dodecaedro, che in questo studio verrà denominato “triangolo caratteristico minimo”, evidenziato in rosso in FIG.51.

Questa considerazione è stata svolta attraverso l'analisi di molti poliedri, che essendo derivati dai cinque solidi regolari platonici come qualsivoglia poliedro, sono caratterizzati dalla stessa suddivisione geometrica data dai gruppi di simmetria dei poliedri da cui sono originati.

Il triangolo caratteristico minimo corrisponde sia alla proiezione sferica della sesta porzione triangolare (evidenziata in blu in FIG.51), che si ottiene dividendo il triangolo dell'icosaedro secondo le sue mediane, ovvero i segmenti che uniscono ogni vertice del triangolo con il punto medio del lato opposto, incontrandosi in uno stesso punto detto baricentro del triangolo, sia alla proiezione sferica della decima porzione triangolare (evidenziata in verde in FIG.51), che si ottiene dividendo il pentagono del dodecaedro secondo le sue mediane. La relazione geometrica tra il pentagono del dodecaedro ed il triangolo dell'icosaedro è enunciata nella *Proposizione 2* del *Secondo Teorema* contenuto nel XIV libro degli *Elementi* di Euclide, attribuito a Ipsicle (190 - 120 a.C.) che riprende gli studi di Aristeo il Vecchio (370 - 300 a.C.), dove si afferma e si dimostra che «il medesimo

---

<sup>163</sup> BUSCHERINI STEFANO, PANAINO ANTONIO CLEMENTE DOMENICO, *The table of chords and greek trigonometry*, in “Conservation Science in Cultural Heritage”, Bologna, Pitagora Editrice, n. 10/2010, pag. 26; anche in “Enciclopedia Italiana Treccani”, 1936, ad vocem “sfera” di Attilio Frajese

cerchio comprende il pentagono del dodecaedro e il triangolo dell'icosaedro, descritti nella medesima sfera»<sup>164</sup>.

Conoscendo queste importanti affermazioni geometriche, si vuole ora suddividere il triangolo caratteristico minimo in piccole parti ottimizzate, ovvero quanto più simili o uguali tra loro, costituenti la geometria di base su cui progettare i conci-tipo invarianti lapidei.

Da analisi empiriche condotte attraverso gli attuali software di modellazione infografica tridimensionale quali *AutoCAD® 2012*, *Rhinoceros® 5.0*, e *3ds Max 2015 (3d Studio Max 2015)*, si può affermare che non è possibile suddividere ulteriormente il triangolo caratteristico minimo in parti tutte uguali tra loro.

Esiste il brevetto US 8365474 B2, denominato “Building panel module and spherical shell” che propone di suddividere il triangolo caratteristico minimo in parti ad esso uguali e simmetriche, congiungendo i punti medi dei suoi lati, costituiti da archi di cerchi massimi, determinando quindi quattro triangoli sferici uguali tra loro, indicati con la lettera “A” e quattro triangoli sferici simmetrici uguali tra loro indicati con la lettera “B”. Ripetendo questa suddivisione per i triangoli così formati, secondo il brevetto, si otterrebbe una divisione del triangolo caratteristico minimo e del suo simmetrico, in piccole parti tutte uguali tra loro. Quindi sarebbe possibile tassellare una superficie sferica con pannelli triangolari sferici di soli due tipi (“A” e “B”) invarianti, secondo le parole riportate nella descrizione del brevetto, dove si legge «since only two types of panels need to be manufactured, cost is reduced (poiché solo due pannelli devono essere prodotti, il costo è ridotto)»<sup>165</sup>.

---

<sup>164</sup> COMMANDINO FEDERICO, *De gli Elementi d'Euclide, libri quindici, con gli scholii antichi. Tradotti prima in lingua latina da M. Federico Commandino da Urbino e con Commentarij illustrati trasportati nella nostra vulgare e da lui riveduti. Con privilegio*, in Urbino, Appresso Domenico Frisolino, 1575, libro XIV, pag. 266

<sup>165</sup> Patent US 8365474 B2, *Building panel module and spherical shell*, numero domanda: US 12/932,031, data di pubblicazione: 05/02/2013, data di registrazione: 16/02/2011, pubblicato anche come US20120204496, visualizzabile su <https://www.google.ch/patents/US8365474>

Riguardo l'obiettivo del presente studio, la divisione geometrica del brevetto appena enunciato, significa che sarebbe possibile tassellare l'intera cupola con soli due conci-tipo invarianti, ma questo, purtroppo, non è possibile.

Attraverso modelli tridimensionali infografici effettuati, è possibile dimostrare che suddividere il triangolo caratteristico in quattro triangoli uguali congiungendo i punti medi dei suoi lati, è possibile solo nel piano, ovvero solo nel caso in cui il triangolo suddetto sia planare.

Non è possibile suddividere nello stesso modo il triangolo sulla sfera, dove tale suddivisione produce triangoli sferici diversi, a causa della doppia curvatura che caratterizza la sua superficie e che produce una deformazione inevitabile nel passaggio dal piano alla sfera.

### **III.4 Dal piano allo spazio: considerazioni sulla deformazione sferica e sul metodo proiettivo**

Ai fini del presente studio, per ottenere suddivisioni maggiori dell'emisfera architettonica al fine di determinarne i piccoli elementi strutturali che la costituiscono, occorre suddividere geometricamente il "triangolo sferico caratteristico minimo" in parti di piccole dimensioni, massimizzando il numero di quelle invarianti, che saranno tradotte architettonicamente nei conci lapidei, e ripetere poi tale suddivisione in modo speculare e radiale su tutta la superficie dell'emisfera.

Costruire lo spazio sferico attraverso piccoli elementi strutturali che ne razionalizzino la costruzione, significa suddividerlo opportunamente secondo una apparecchiatura ben determinata, che si basa su una precisa struttura geometrica di tassellazione tridimensionale.

Nella scelta della tassellazione e quindi del disegno di progetto dell'apparecchiatura, dove è possibile effettuare il calcolo del numero dei conci-tipo invarianti, si deve tener conto della deformazione della stessa quando la si proietta sulla sfera, operando scelte architettoniche che coinvolgono contemporaneamente il suo disegno planare e quello sferico, topologicamente equivalenti o omeomorfi, ossia caratterizzati dalla possibilità di essere deformati l'uno nell'altro senza strappi o sovrapposizioni.

La trasformazione topologica del triangolo caratteristico minimo sulla sfera, che possedendo doppia curvatura si delinea come geometria complessa, implica il saper controllare la morfologia della suddivisione nel piano, dove essa si teorizza istintivamente e sulla sfera, dove essa verrà proiettata radialmente, ai fini della riconoscibilità di simmetrie e corrispondenze volte all'ottimizzazione delle porzioni minime che si determineranno, ovvero i conci, tasselli costitutivi dell'apparecchiatura lapidea.

Il controllo di tale complessa geometria è reso più semplice dalla tecnologia di modellazione infografica che, rispetto al metodo tradizionale di tracciamento geometrico, consente di visualizzare la divisione geometrica sul piano e la corrispondente tassellazione

strutturale nello spazio, di controllarne i volumi, di verificarne le equivalenze e le simmetrie delle parti in cui essa è suddivisa con sicurezza visibile della precisione effettiva del disegno.

La tecnologia infografica è dunque il fondamentale strumento per la progettazione di morfologie complesse, come quelle sferiche, che si basano sul controllo esatto delle regole di corrispondenza proiettiva nel passaggio dal piano bidimensionale alla superficie tridimensionale. Tale problema, che in questo studio necessita di essere ben conosciuto, costituisce un importante nodo teorico-pratico della definizione e della rappresentazione dello spazio sferico attraverso le regole della geometria proiettiva.

Metodi geometrici proiettivi sono utilizzati dalla cartografia, che vuole rappresentare la superficie quasi sferica del Globo<sup>166</sup> con il minor numero di deformazioni possibili, nel tentativo di restituirne una immagine planare quanto più verosimile possibile.

Essa è una rappresentazione ridotta, approssimata e simbolica in un piano dell'intera superficie terrestre o parte di essa. L'approssimazione è data dall'inevitabile deformazione causata dalla riduzione in un piano della superficie sferica o quasi sferica, infatti soltanto il Globo può fornire una rappresentazione correttamente proporzionale della forma della Terra, che oggi la tecnologia scientifica e le fotografie scattate dallo Spazio cosmico, restituiscono molto fedelmente.

Il trasferimento della superficie tridimensionale sferica alla superficie bidimensionale piana comporta la non possibilità di quest'ultima di rispondere contemporaneamente a "isogonia o conformità", ovvero la conservazione sulla superficie del Globo degli angoli grafici formati tra meridiani e paralleli, ad "equidistanza", ovvero alla diretta proporzionalità tra le distanze reali sul Globo a quelle riportate sulla

---

<sup>166</sup> E' noto infatti che il Globo Terrestre è propriamente un geoide, ovvero è caratterizzato da una forma sferica leggermente deformata a causa dello schiacciamento determinato in corrispondenza dei poli per effetto della rotazione terrestre intorno al suo asse. Dunque il geoide è simile ad uno sferoide oblato, generato dalla rotazione di un ellisse intorno al proprio asse. La forza di gravità tende a conformare un corpo celeste in una sfera perfetta, poiché tale forma permette alla massa del corpo di essere quanto più vicina possibile al centro del corpo stesso, ma il movimento di rotazione altera tale conformazione.

carta, ad “equivalenza” ovvero alla diretta proporzionalità delle aree tra le superfici reali e quelle rappresentate graficamente.

I metodi geometrici che generano le rappresentazioni cartografiche si basano su proiezioni prospettiche e proiezioni di sviluppo.

Il metodo della proiezione prospettica proietta la superficie terrestre su un piano ad essa tangente in un punto, denominato centro di proiezione. Esso può essere situato al polo dando origine alla proiezione polare, sull’equatore determinando la proiezione equatoriale e su di un qualsiasi parallelo generando la proiezione obliqua o trasversale.

In base alla posizione del punto di vista, detto anche punto di proiezione, si determinano: la proiezione centrografica o gnomonica, dove il punto di proiezione è sito al centro della sfera, come si è detto in precedenza; la proiezione stereografica, dove il punto di proiezione è collocato sulla superficie della sfera e opposto al punto di tangenza, quella scenografica<sup>167</sup> con punto di proiezione esterno alla superficie sferica a distanza finita da questa e la proiezione ortografica, con punto di vista posto all’infinito.

La proiezione prospettica ed in particolare quella stereografica polare ed equatoriale, è stata adoperata per rappresentare la superficie sferica divisa in due emisferi sulla carta, che venne denominata “mappamondo” dal latino “Mappa Mundi” ovvero “carta del mondo”, corrispondente al termine “planisfero” che indica appunto il disegno della sfera su di un piano.

Successivamente con il termine mappamondo si tende ad indicare la rappresentazione del Globo come sfera solida intera che ruota intorno ad un asse sulla cui superficie è rappresentata la morfologia fisica del Pianeta.

La proiezione stereografica polare rappresenta, con due circonferenze separate o tangenti tra loro in un punto, i due emisferi terrestri, ovvero l’emisfero nord (o boreale) e quello sud (o australe), indicati

---

<sup>167</sup> Si noti come il termine “scenografico” racchiuda il significato del termine vitruviano “scaenographia” relativo alla proiezione effettuata da un particolare punto di vista, come descritto nel paragrafo III.1. Qui il termine è adoperato, infatti, per indicare un metodo proiettivo determinante una rappresentazione cartografica.



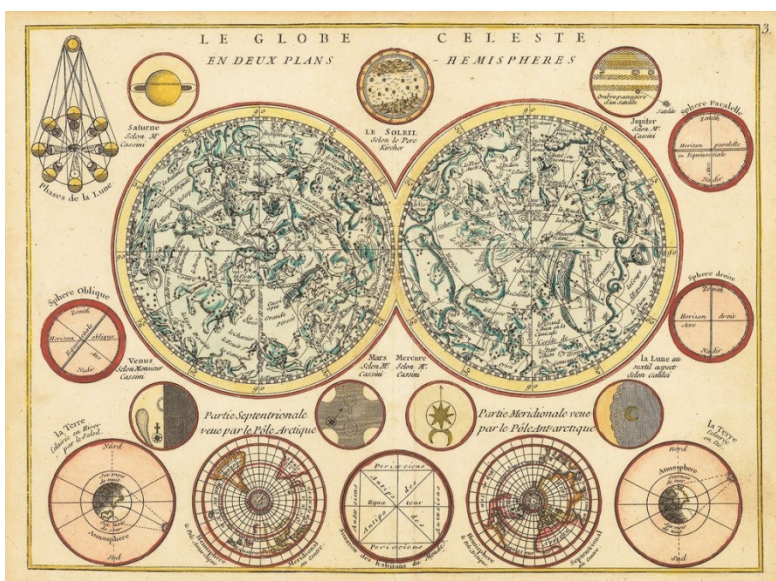
convenzionalmente in questo modo a causa della loro posizione rispetto all'equatore. La proiezione equatoriale rappresenta con circonferenze i due emisferi, anch'essi separati o tangenti tra loro, quello occidentale e quello orientale, indicando convenzionalmente il primo posto ad ovest del meridiano di Greenwich (o meridiano primo), ed il secondo posto ad est dello stesso meridiano.

Le proiezioni stereografiche polari ed equatoriali (FIG.52) sono conformi, ovvero isogone, conservano quindi gli angoli formati tra meridiani e paralleli, in particolare con quelle polari si rappresentano i paralleli con archi di circonferenze concentriche a distanza decrescente verso il centro della circonferenza ed i meridiani come segmenti rettilinei radiali posti ad uguale ampiezza tra loro. Invece in quelle equatoriali i paralleli sono rappresentati come archi di circonferenze non concentriche posti a distanza costante progredendo dal perimetro della circonferenza che delimita un singolo emisfero, al suo centro, mentre i meridiani sono rappresentati come archi di circonferenze più ravvicinati tra loro verso il centro della circonferenza che descrive il singolo emisfero.

È interessante notare come la proiezione stereografica polare, che rappresenta i due opposti emisferi terrestri sia adoperata anche per la rappresentazione del cielo visibile dalla Terra, rappresentato come sferico perché appunto la sua visione è molto influenzata dalla sfericità del Pianeta che abitiamo. Le carte celesti (FIG.53) rappresentano con proiezioni stereografiche l'emisfero nord o boreale e quello sud o australe della sfera celeste, una sfera immaginaria sulla cui superficie sono rappresentate per convenzione le stelle visibili e al cui centro è posta la sfera terrestre, come già si evince dalla raffigurazione nel *Theatrum Mundi et Temporis* opera di Giovanni Gallucci eseguita nel 1588 (FIG.54). Le denominazioni degli emisferi si riferiscono quindi a quelle terrestri poiché l'equatore celeste giace convenzionalmente sullo stesso piano di quello terrestre. Questa rappresentazione dimostra ancora una volta come lo spazio celeste possa essere rappresentato come sferico a causa della percezione visiva, dell'ottica, utilizzando il termine euclideo, che se ne acquisisce dalla superficie terrestre.



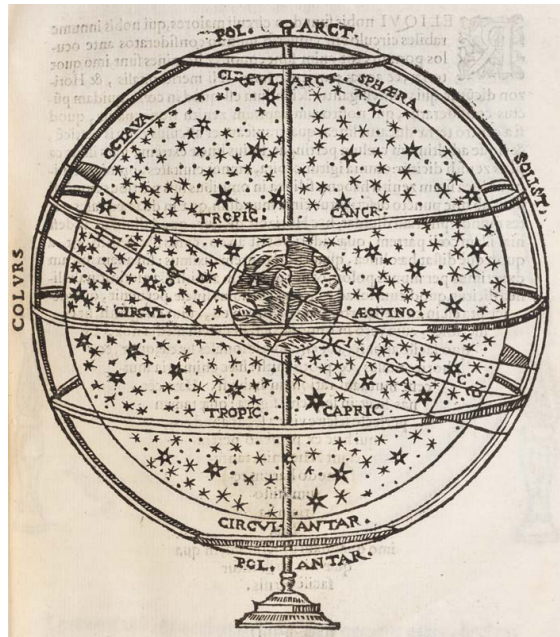
52. Jean Covens e  
Corneille Mortier,  
Proiezioni  
cartografiche  
polari ed equatoriali,  
1745, Amsterdam



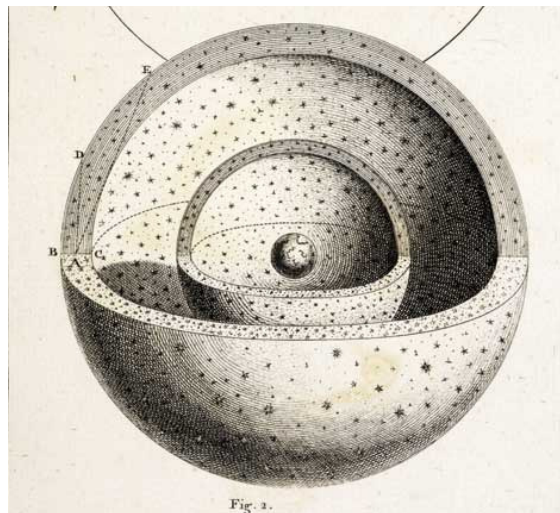
53. *Le Globe  
celeste en deux plans  
hemispheres,*  
1748 ca.,  
cartografia celeste  
in proiezione polare,  
per gli atlanti di  
George Louis  
Le Rouge



54. Giovanni  
Gallucci, La Terra  
nella Sfera Celeste,  
in "Theatrum  
Mundi et Temporis",  
1588, Biblioteca  
Nazionale Braidense,  
Milano



55. Thomas Wright,  
La Terra nelle sfere  
celesti, in "An  
Original Theory  
or New Hypothesis  
of the Universe",  
London, 1750,  
British Library,  
(49 E 15),  
Plate XXVII



56. Giuliano  
D'Arrigo, Affreschi  
della cupola nella  
scarsella della  
Cappella Pazzi di  
Filippo Brunelleschi,  
1420-1428,  
Sacrestia Vecchia,  
Basilica di San  
Lorenzo, Firenze



Ancora una volta si dimostra come lo spazio emisferico celeste che ci sovrasta possa essere simbolica copertura della Terra e come lo spazio emisferico architettonico di copertura cupolata che ci sovrasta, possa essere rappresentazione simbolica dello stereoma, della volta celeste, come discusso nel paragrafo I.1 e come testimoniato dall'affresco all'intradosso della cupola posta sulla scarsella all'interno della *Cappella Pazzi* di Filippo Brunelleschi a Firenze.

L'affresco rappresenta le costellazioni del cielo come appariva a Firenze la notte del 4 luglio 1442, ad opera di Giuliano D'Arrigo detto Pesello, su indicazione dell'astronomo Paolo dal Pozzo Toscanelli, quasi fosse una carta celeste (FIG.56).

Un altro tipo di proiezioni utilizzate per le rappresentazioni cartografiche sono quelle di sviluppo, dette coniche e cilindriche.

Esse si ottengono proiettando sulla superficie di un cono o su quella di un cilindro, la superficie della sfera contenuta in essi e determinando lo sviluppo di tale superficie sul piano.

Riguardo le proiezioni cilindriche, il cilindro risulta tangente all'equatore in modo che l'asse terrestre coincida con quello del cilindro. Sviluppando sul piano la superficie del cilindro i meridiani vengono rappresentati come rette tra loro parallele ed equidistanti, ortogonali rispetto all'equatore, ed i paralleli sono rappresentati anch'essi come segmenti rettilinei ed equidistanti tra loro.

Tale proiezione fu corretta nel 1569 dal cartografo fiammingo Gerhard Kremer, noto come Mercatore, che aumentò la distanza tra i paralleli in modo progressivo procedendo dall'equatore verso i poli.

Questa carta permette di individuare le località attraverso le coordinate fornite dai paralleli e dai meridiani ed inoltre si rivela anche conforme «ed è quindi possibile rappresentarvi con segmenti le rotte che formano un angolo costante con il nord, come si pensava di fare nelle carte da navigare»<sup>168</sup>.

La conservazione degli angoli, ovvero l'isogonia, è molto importante infatti nelle carte nautiche poiché per «mantenere una rotta costante significava seguire una direzione con un angolo costante rispetto al

---

<sup>168</sup> RUSSO LUCIO, *Stelle, atomi, velieri. Percorsi di storia della scienza*, Milano, Mondadori, 2015, pag. 41

nord segnato dalla bussola, significava cioè percorrere una traiettoria che tagliasse tutti i meridiani secondo lo stesso angolo. Una tale traiettoria è detta lossodromica»<sup>169</sup>.

Attualmente anche le carte aeronautiche utilizzano le linee lossodromiche come riferimento per il controllo della navigazione aerea.

Studi geometrici sulla proiezione cilindrica si trovano nell'*Underweysung der messung*<sup>170</sup> di Albrecht Dürer pubblicato nel 1525, dove l'illustrazione 34 (FIG.57) all'interno del *IV Libretto (Das Viert Büchlein)*, rappresenta una sfera divisa in meridiani e paralleli ed il suo sviluppo piano derivato dallo sviluppo planare della superficie cilindrica su cui sono proiettati gli spicchi sferici. Tale rappresentazione si ritrova in un planisfero datato al 1507(FIG.58), opera del cartografo tedesco Martin Waldseemüller, dove si legge per la prima volta il nome "America" per designare il Nuovo Mondo concordato insieme al cartografo Matthias Ringmann, in onore di Amerigo Vespucci, uno dei primi esploratori del continente scoperto dagli europei nel 1492, attraverso il viaggio di Cristoforo Colombo. Rappresentazioni di questo tipo sono state utilizzate anche dalla cartografia celeste per disegnare su carta il cielo stellato, come dimostra la tavola all'interno dell'opera *Coelum poeticum seu sphaera astronomica* di Vitus Scheffer datata al 1686 (FIG.59).

Una rappresentazione sferica del Globo opera del cartografo austriaco Johannes Stabius incisa nel 1515 da Albrecht Dürer, dimostra come il trasferimento grafico delle informazioni geometriche dalla superficie sferica al piano e viceversa, sia stato sistematizzato in questo periodo.

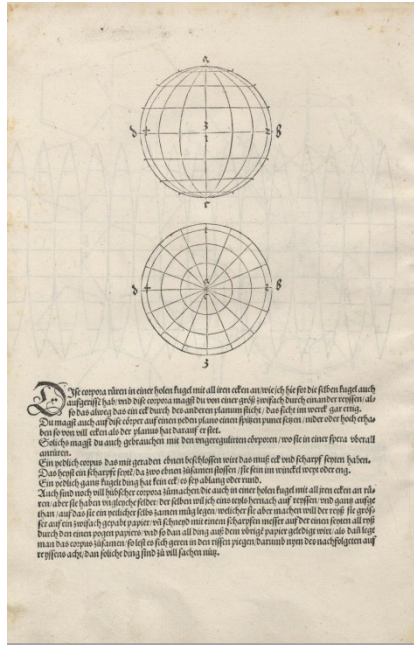
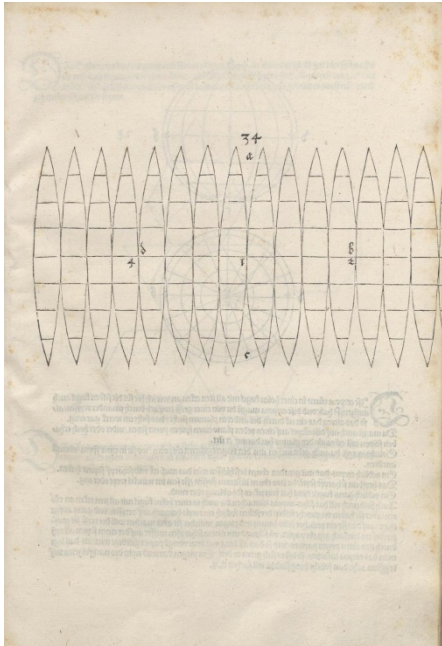
La proiezione cilindrica descritta dal Dürer nell'illustrazione 36 presente nel *II Libretto (Das Zweites Büchlein)* dell'*Underweysung der*

---

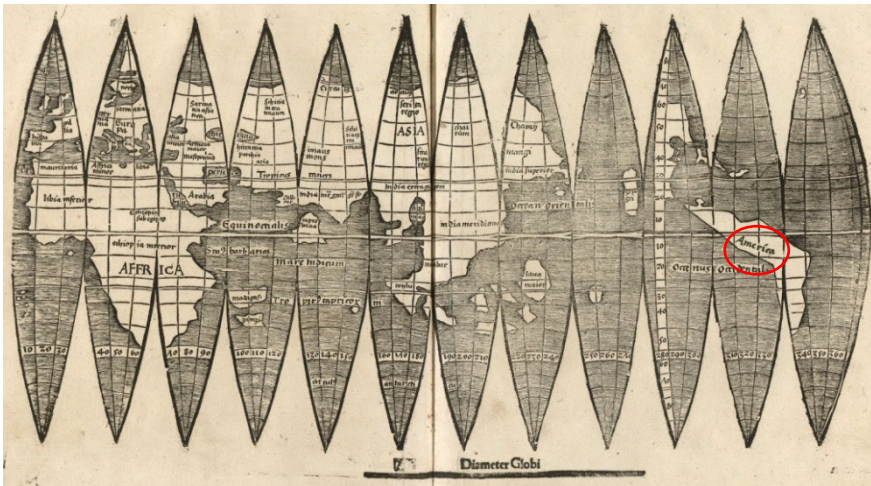
<sup>169</sup> Ivi, pag. 40

<sup>170</sup> DÜRER ALBRECHT, *Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebenen unnd gantzen corporen (Istruzioni per la misurazione con riga e compasso di figure nel piano e nello spazio)*, Nuremberg, Hieronymus Andreas Formschneider, 1525, Das Viert Büchlein (IV Libretto), illustrazione 34, conservato presso SLUB Dresden, segnatura: S.B.616





57. Albrecht Dürer,  
Divisione della sfera  
in meridiani e  
paralleli e suo  
sviluppo con  
proiezione  
cilindrica, 1525,  
in "Underweysung  
der messung",  
fig. 34, IV Libretto,  
SLUB Dresden



58. Martin  
Waldseemüller,  
Planisfero con  
il nome "America",  
1507, Badische  
Landes Bibliothek  
(BLB)



59. Vitus Scheffer,  
Cartografia celeste,  
1686, in "Coelum  
poeticum seu  
sphaera  
astronomica"

*messung*<sup>171</sup> (FIG.60), che descrive il metodo per proporzionare la distanza tra i paralleli all'interno di uno spicchio sferico inscrivendovi circonferenze di assegnato diametro, è sovrapponibile alla tavola nel foglio 63r del *Libro de Traças de Cortes de Piedras* di Alonso de Vandelvira<sup>172</sup> (FIG.61), che illustra il proporzionamento dei filari di una *Capilla redonda por cruceros*. Una conferma di questa similitudine si legge nelle parole di F. Pinto Puerto, che descrivendo il metodo rappresentato nella tavola di A. de Vandelvira, afferma che quest'ultima soluzione «introduce un control de las proporciones de los casetones semejante al aplicado por Durero (introduce un controllo della proporzione dei cassettoni somigliante a quello applicato dal Dürer)<sup>173</sup>».

Riguardo il metodo cartografico che adopera le proiezioni coniche (FIG.62), utilizzate sin da Claudio Tolomeo (FIG.63), «la cui *Geographia* è l'unica opera di geografia matematica e cartografica trasmessaci dall'antichità»<sup>174</sup>, la superficie laterale del cono retto, che ha asse coincidente con quello terrestre, è tangente alla superficie terrestre lungo un parallelo o secante ad essa lungo due paralleli, come avviene nel caso della “proiezione conica conforme di Lambert”, dal nome del fisico, filosofo ed astronomo svizzero Johann Heinrich Lambert.

Questa carta, detta anche “conica secante isogona”, viene attualmente utilizzata nella determinazione delle carte aeronautiche e nautiche, e ponendo l'intersezione della superficie conica con due paralleli, detti di riferimento, minimizza la distorsione derivata dal passaggio dalla

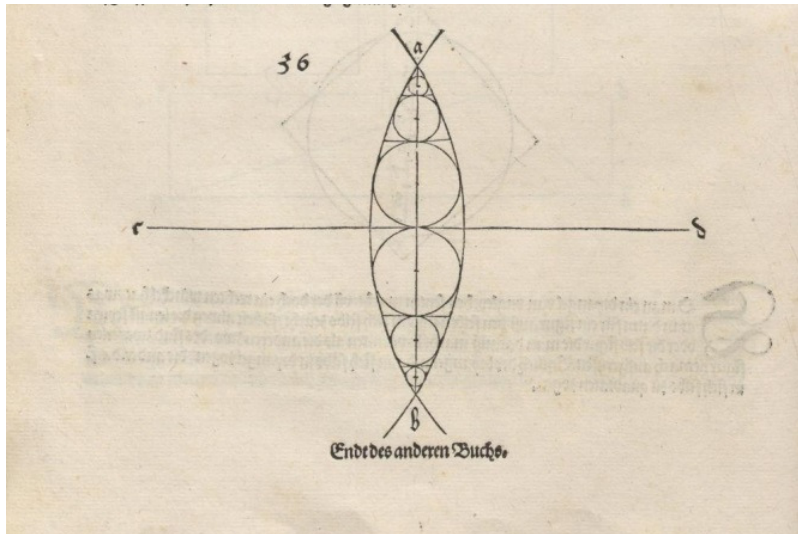
---

<sup>171</sup> Ivi, *Das Zweites Büchlein* (II Libretto), illustrazione 36

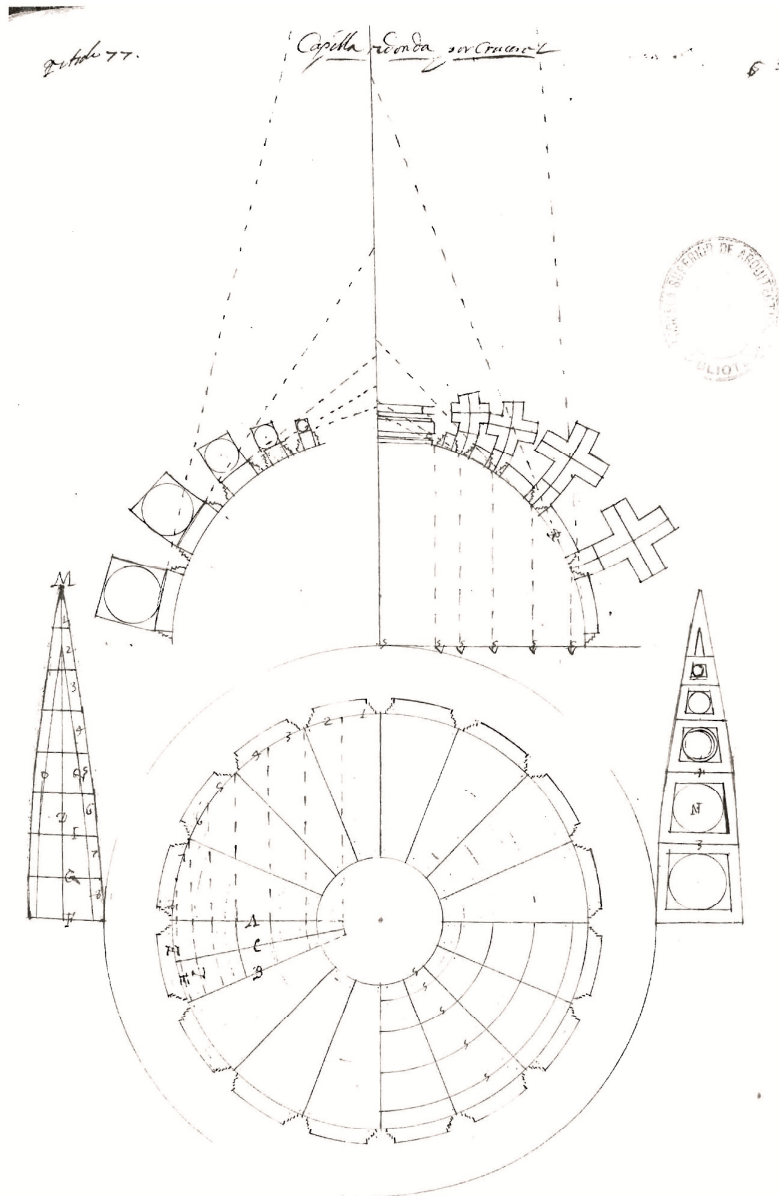
<sup>172</sup> DE VANDELVIRA ALONSO, *Libro de Traças de Cortes de Piedras* (1575-1591), manoscritto *Exposición y declaración sobre el tratado de Cortes de Fábricas que escribió Alonso de Valdevira por el excelente e insigne architecto, maestro mayor de obras de la Santa Iglesia de Toledo*, Titolo 77, foglio 63 recto, conservato presso la Biblioteca Universitaria della Escuela Técnica Superior de Arquitectura (E.T.S.), Universidad Politécnica de Madrid

<sup>173</sup> PINTO PUERTO FRANCISCO, *Las esferas de piedra. Sevilla como lugar de encuentro entre arte y ciencia en el Renacimiento*, Sevilla, Diputación de Sevilla, Servicio de Publicaciones, Sección Arte, RC Impresores, 2002, pag. 123, nota 7

<sup>174</sup> RUSSO LUCIO, *Stelle, atomi, velieri. Percorsi di storia della scienza*, Milano, Mondadori, 2015, pag. 35



60. Albrecht Dürer,  
1525, "Underweysung  
der messung", fig. 36,  
II Libretto, SLUB  
Dresden



61. Alonso de  
Vandelvira,  
*Capilla redonda por  
cruceros*, 1575-1591,  
"Libro de Traças de  
Cortes de Piedras",  
Titulo 77, folio 63r,  
E.T.S. Universidad  
Politécnica de Madrid



superficie tridimensionale sferica a quella piana bidimensionale; in questo modo, infatti, non vi è distorsione lungo i paralleli di riferimento, mentre questa aumenta con l'aumentare della distanza da essi. Sviluppando sul piano la superficie del cono, si ottiene un reticolato in cui i paralleli diventano archi di circonferenze concentriche al cui centro convergono i meridiani rappresentati come semirette radiali ad ampiezza costante tra essi. Le maglie del reticolo sono quindi trapezi a basi curve, denominati trapezoidi.

Questa proiezione viene preferita dagli aviatori poiché una linea retta disegnata su di essa costituisce una buona approssimazione della rotta relativa al cerchio massimo tra il punto di partenza e quello di arrivo.

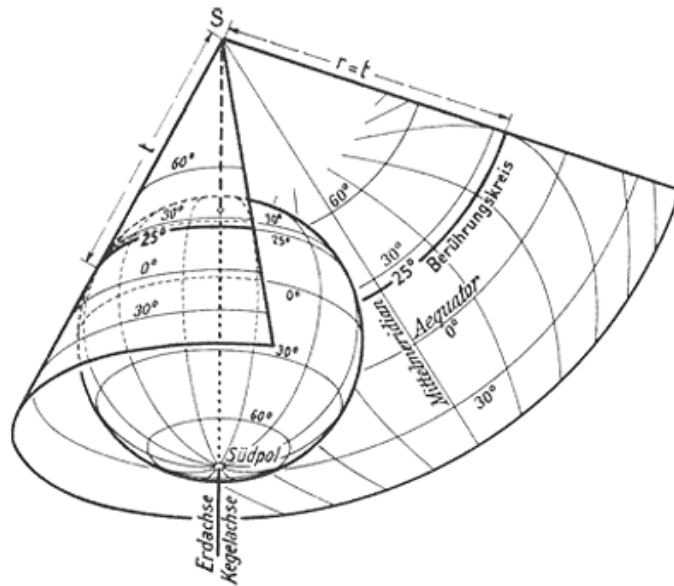
La trattatistica stereotomica predilige le proiezioni coniche, utilizzate ai fini di suddividere la superficie sferica, definita sinclastica<sup>175</sup> e non sviluppabile, in settori orizzontali secondo i paralleli, di cui è possibile dedurre lo sviluppo planare pari a quello della superficie laterale di un tronco di cono, sia perchè rendono più immediata la verifica morfologica delle facce dei conci, sia per il controllo degli angoli di curvatura degli stessi, a causa dell'isogonia che le caratterizza. Tali tracciati geometrici stereotomici derivanti dalle proiezioni coniche, descritti nel paragrafo II.3 di questo studio, sono riassunti nel metodo geometrico formulato da Alonso de Vandelvira nel *Libro de Traças de Cortes de Piedras*<sup>176</sup>.

Tale metodo di divisione della cupola in pietra da taglio, consistente nell'approssimare la sfera mediante la divisione della stessa in superfici coniche e troncoconiche sviluppabili, deriva geometricamente dal metodo studiato da Archimede di Siracusa ed esposto nella sua opera *Sulla sfera e sul cilindro* (Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου) datata al 225 a.C., in cui la sfera è suddivisa in coni e tronchi di cono inscritti in essa, aventi quindi l'altezza coincidente con l'asse della sfera.

---

<sup>175</sup> Dicesi sinclastico un elemento o una superficie che, in ogni punto, presenta curvature concave o convesse nello stesso senso in tutte le direzioni. Tratto da DocArtis ([www.docartis.com](http://www.docartis.com)); GULLI RICCARDO, *Struttura e Costruzione. Structure and Construction*, Firenze, Firenze University Press, 2012, pag. 10

<sup>176</sup> Si veda il paragrafo II.3



62.  
Proiezione conica  
cartografica



63. Claudio Tolomeo,  
Cartografia derivante  
da proiezione conica,  
1450-1475, British  
Library, Harley 7182,  
ff. 58v-59

---

Aumentando il numero di tali solidi all'interno della sfera e riducendone quindi l'altezza, Archimede approssimò la superficie sferica per poterla misurare e quindi calcolare.

Egli dedusse, come si legge nella *Proposizione 33*, che la superficie sferica è pari al quadruplo dell'area di un suo cerchio massimo, ovvero  $A_s = 4\pi r^2$ , e nella *Proposizione 34* scrisse che «ogni sfera è quadrupla del cono avente base uguale al cerchio massimo della sfera, e per altezza il raggio della sfera»<sup>177</sup>. Il corollario seguente afferma che «dimostrate queste cose, è evidente che ogni cilindro avente per base il cerchio massimo della sfera e l'altezza uguale al diametro della sfera è una volta e mezza la sfera, e la sua superficie, comprese le basi, è una volta e mezza la superficie della sfera»<sup>178</sup>.

È noto, come affermano le parole di Marco Tullio Cicerone nelle sue *Tusculanae disputationes*, che Archimede volle incisa sulla propria tomba solo la figura di una sfera ed un cilindro<sup>179</sup>, dimostrando l'importanza dello studio delle relazioni proporzionali tra i volumi nello spazio.

I disegni di Leonardo da Vinci (FIG.64), presenti nel *Paris Manuscript G, 61v*<sup>180</sup> illustrano le proiezioni cilindriche e coniche ed i rapporti della sfera e del cilindro inscritti in un cubo, studi necessari al fine di

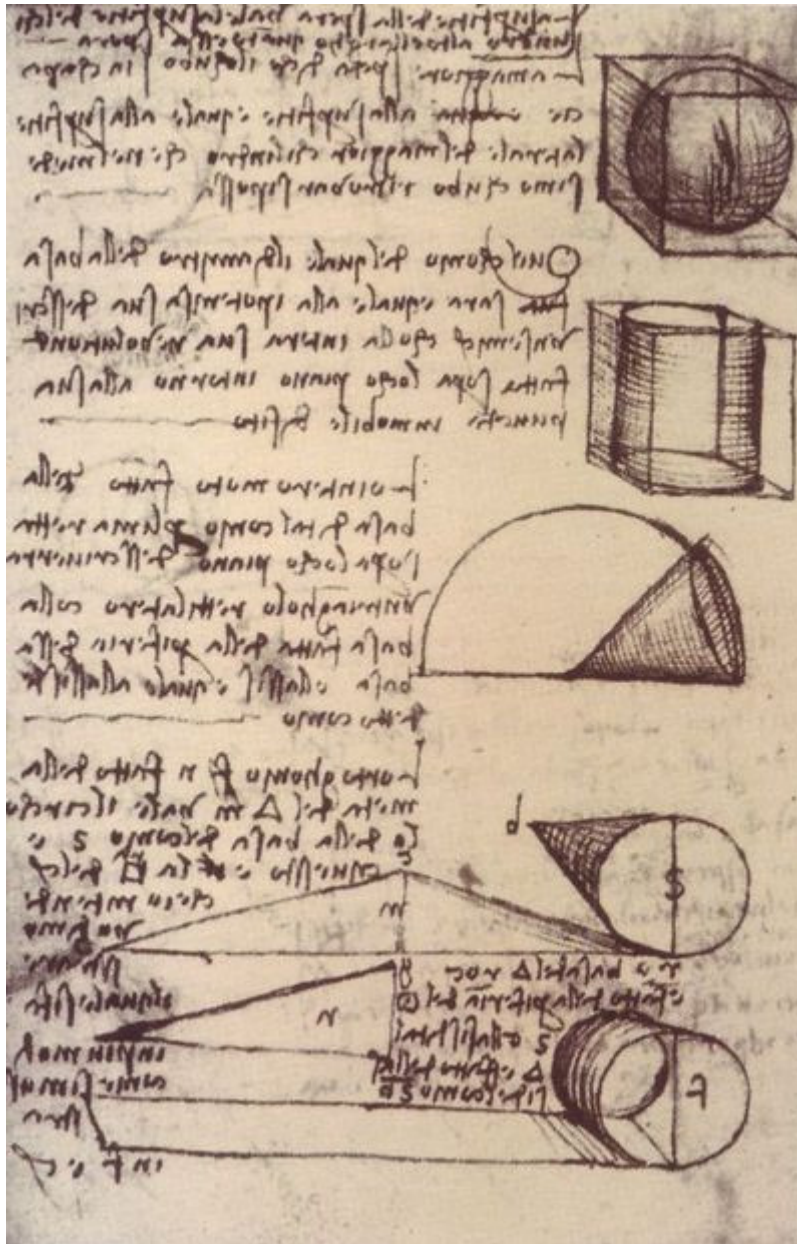
---

<sup>177</sup> BRENTEGANI MARINA, GATTI FRANCESCA, *Sul volume dei solidi: Archimede, Keplero e Cavalieri*, seminario tenuto presso l'Università degli Studi di Trento, Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali, Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004, pag. 20

<sup>178</sup> Ivi, pag. 21

<sup>179</sup> CICERONE MARCO TULLIO, *Tusculanae disputationes*, 45 a.C. ca., V 23, 64-66: «Tenebam enim quosdam senariolos, quos in eius monumento esse inscriptos acceperam, qui declarabant in summo sepulcro sphaeram esse positam cum cylindro. Ego autem cum omnia collustrarem oculis - est enim ad portas Atragantinas magna frequentia sepulcrorum - animum adverti columellam non multum e dumis eminentem, in qua inerat sphaerae figura er cylindri (Tenevo, infatti, alcuni piccoli senari, che avevo sentito essere scritti nel suo sepolcro, i quali dichiaravano che alla sommità del sepolcro era posta una sfera con un cilindro. Io, poi, osservando con gl'occhi tutte le cose - c'è, infatti, alle porte Agrigentine una grande abbondanza di sepolcri - volsi l'attenzione ad una colonnetta non molto sporgente in fuori da dei cespugli, sulla quale c'era sopra la figura di una sfera e di un cilindro)».

<sup>180</sup> LEONARDO DA VINCI, *Paris Manuscript (Manoscritto di Francia) G, 1492-1516*, foglio 61 verso, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo



64. Leonardo da Vinci, Proiezioni cilindriche e coniche e rapporti della sfera e del cilindro inscritti in un cubo, 1492-1516, "Paris Manuscript G", 61v, Institut de France

determinare un altro metodo proiettivo di suddivisione della sfera attraverso il poliedro sferico descritto pochi fogli più avanti nel *Paris Manuscript G*, 66v<sup>181</sup>(FIG.65) e nel *foglio 665v* del *Codice Atlantico*<sup>182</sup>, riscontrato nella cartografia attraverso la proiezione della superficie sferica terrestre sul poliedro ad essa circoscritto o inscritto e sul suo successivo sviluppo piano.

Un importante esempio è costituito dalla proiezione ottante attribuita a Leonardo da Vinci a causa della presenza di alcuni disegni che la raffigurano nel *foglio 521r* del suo *Codice Atlantico* (1478-1519)<sup>183</sup> (FIG.66). Nella stessa pagina si ritrovano altri studi di proiezioni cartografiche eseguiti da Leonardo, derivanti probabilmente dalle proiezioni cartografiche allora conosciute ed un suo disegno raffigurante la proiezione ottante, ovvero la divisione della sfera, secondo un ottaedro sferico, in otto triangoli sferici detti ottanti. Lo sviluppo piano di questa proiezione descritto da Leonardo, consta di otto triangoli, ovvero quattro per ogni emisfero, che successivamente verranno definiti “triangoli di Reuleaux” dal nome dell'ingegnere meccanico tedesco Franz Reuleaux che studiò ed applicò tale forma a problemi pratici di cinematica.

Tale triangolo si disegna a partire dalla costruzione del triangolo equilatero enunciata da Euclide nel primo libro degli *Elementi*<sup>184</sup>,

---

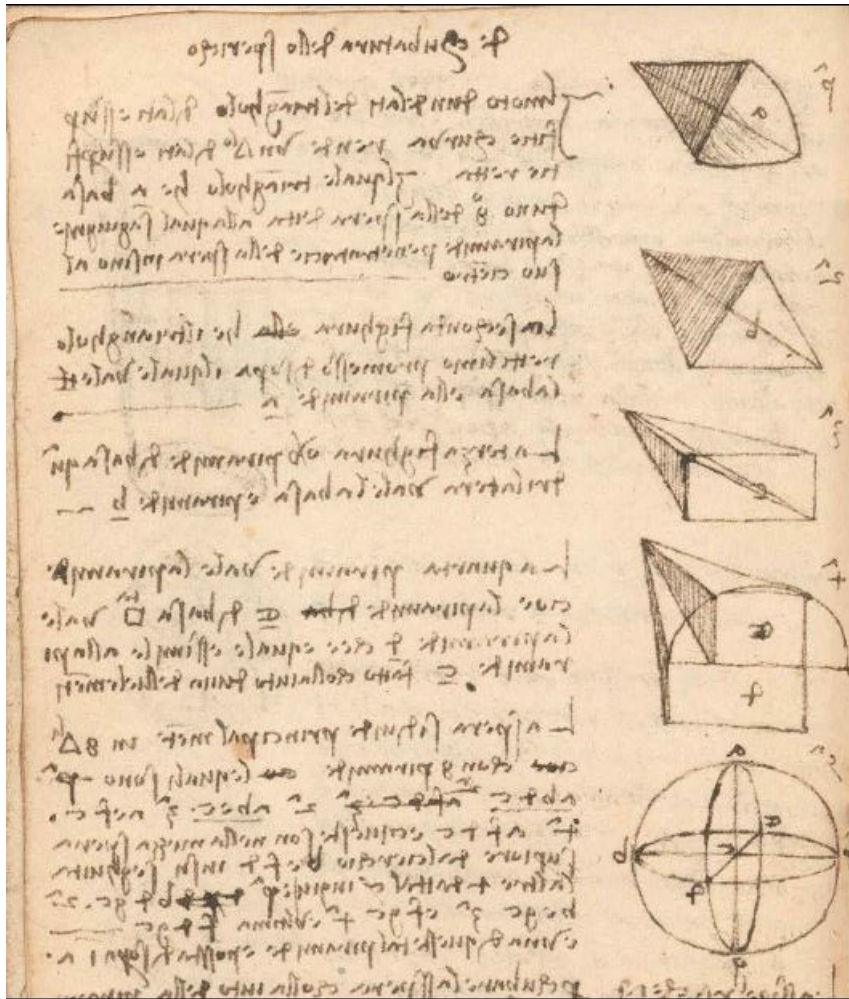
<sup>181</sup> Ivi, *Paris Manuscript G*, foglio 66 verso

<sup>182</sup> LEONARDO DA VINCI, *Codex Atlanticus (Codice Atlantico)*, 1478-1518, foglio 665 verso, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su “e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza”, Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano

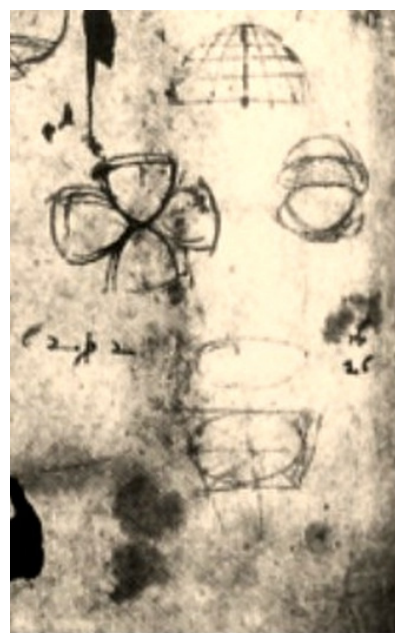
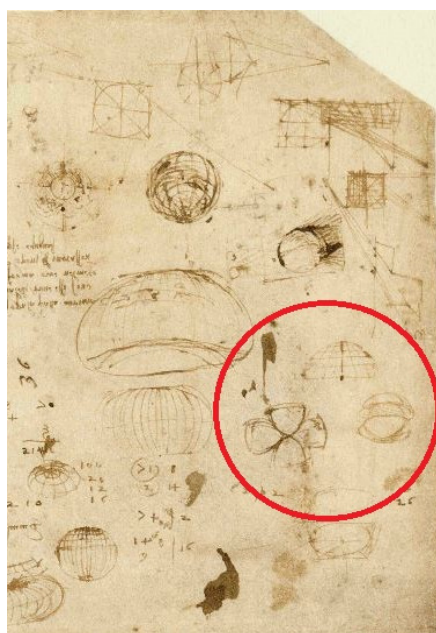
<sup>183</sup> LEONARDO DA VINCI, *Codex Atlanticus (Codice Atlantico)*, 1478-1518, foglio 521 recto, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su “e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza”, Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano. La paternità di Leonardo da Vinci della proiezione ottante è dimostrata in “Leonardo da Vinci's World Map” di Tyler W. Christofer, City University, London, 2014

<sup>184</sup> COMMANDINO FEDERICO, *De gli Elementi d'Euclide, libri quindici, con gli scholii antichi. Tradotti prima in lingua latina da M. Federico Commandino da Urbino e con Commentarij illustrati trasportati nella nostra vulgare e da lui riveduti. Con privilegio*, in Urbino, Appresso Domenico Frisolino, 1575, libro I, pag. 8





65. Leonardo da Vinci, *De cubatura dello sferico*, studi sul metodo proiettivo di suddivisione della sfera, 1492-1516, "Paris Manuscript G", 66v, Institut de France



66. Leonardo da Vinci, *Proiezione ottante*, 1478-1518, "Codice Atlantico", foglio 521r, Biblioteca Ambrosiana, Milano

ovvero dato un segmento AB di lunghezza L, si punta il compasso in A e si traccia una circonferenza di raggio pari a L, poi si punta il compasso in B e si traccia una circonferenza di raggio sempre pari alla lunghezza L. Quindi le due circonferenze così disegnate si intersecano in due punti equidistanti dal punto medio del segmento AB. Congiungendo uno di questi due punti con il punto A ed il punto B, si ottiene un triangolo equilatero ABC. Fin qui il procedimento illustrato da Euclide. Puntando il compasso in C con ampiezza AB, si delinea un terzo arco di circonferenza che congiunge i punti A e B.

Il triangolo di Reuleaux è costituito dall'intera area delimitata dai tre archi di circonferenza che congiungono i punti A, B e C.

Tale triangolo è una curva ad ampiezza costante, ovvero una curva piana e convessa la cui ampiezza, definita come la distanza ortogonale tra due linee parallele aventi ciascuna un punto in comune con il perimetro della curva, è sempre la stessa indipendentemente dall'orientamento della curva. La rotazione eccentrica del triangolo di Reuleaux spazza infatti un'area approssimativamente pari a quella di un quadrato. Questa proprietà è correntemente applicata nella meccanica per la configurazione delle punte di alcuni trapani al fine di realizzare fori approssimativamente quadrati attraverso la loro rotazione eccentrica<sup>185</sup>. Leonardo da Vinci descrisse la costruzione di questo particolare triangolo nel *Paris Manuscript A, 15v*<sup>186</sup> (FIG.67), nel *Paris Manuscript G, 66v*<sup>187</sup> e nel *Codice Atlantico, 923r*<sup>188</sup>(FIG.68),

---

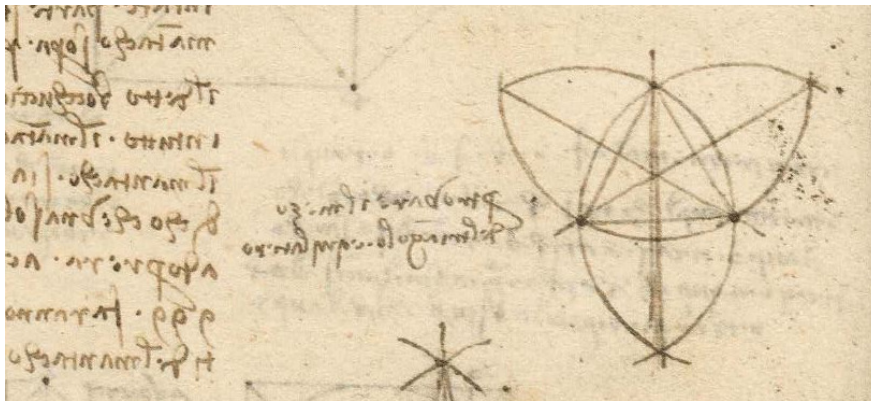
<sup>185</sup> La rotazione eccentrica di una figura avviene con movimento rototraslatorio della stessa ottenuto dal movimento rotatorio del centro della figura lungo il perimetro di una curva chiusa il cui centro non è quindi coincidente con il centro della figura stessa.

<sup>186</sup> LEONARDO DA VINCI, *Paris Manuscript (Manoscritto di Francia) A*, 1492-1516, foglio 15 verso, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su “e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza”, Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Firenze, Giunti Barbèra, 1990, proprietà degli originali: Institut de France, Parigi; in “Leonardo da Vinci's World Map” di Tyler W. Christofer, City University, London, 2014, pag. 10

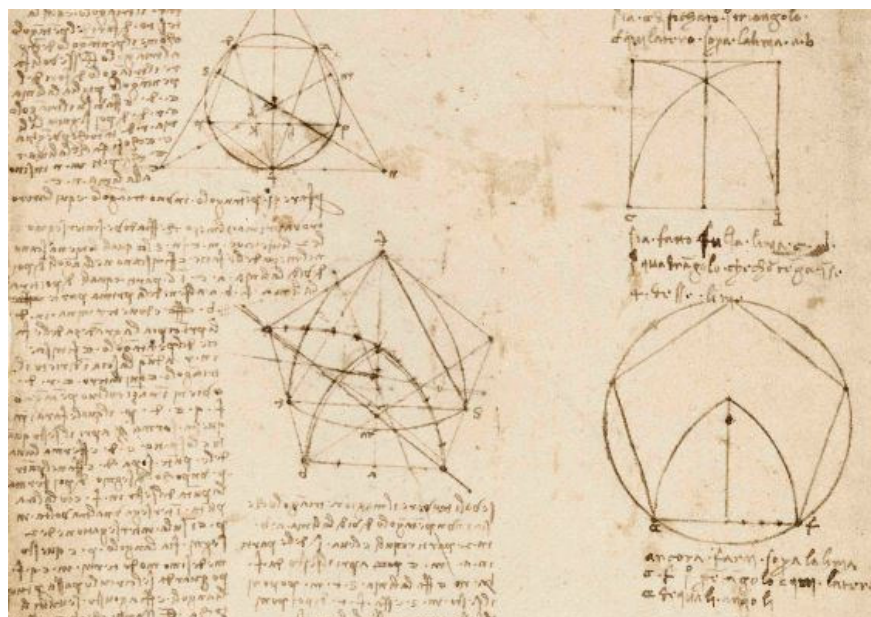
<sup>187</sup> Ivi, *Paris Manuscript G*, foglio 66 verso

<sup>188</sup> LEONARDO DA VINCI, *Codex Atlanticus (Codice Atlantico)*, 1478-1518, foglio 923 recto, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su “e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza”, Edizione facsimilare utilizzata per

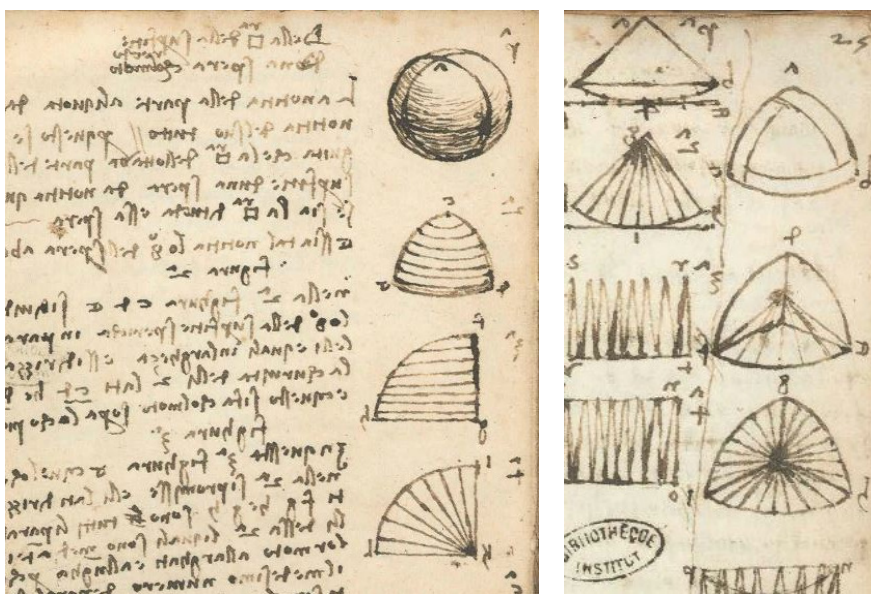




67. Leonardo da Vinci, Studi sul triangolo sferico, 1492-1516, "Paris Manuscript A", 15v, Institut de France



68. Leonardo da Vinci, Studi sul triangolo sferico, 1478-1518, "Codice Atlantico", 923r, Biblioteca Ambrosiana, Milano



69. Leonardo da Vinci, Studi sul triangolo sferico, 1492-1516, "Paris Manuscript E", 24v (sinistra), 25r (destra), Institut de France

le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano

mentre nel *Paris Manuscript E 24v, 25r*<sup>189</sup> (FIG.69), sono contenuti i suoi studi sui vari metodi di divisione dell'ottaedro sferico al fine di approssimarne il volume e quindi poterlo quantificare<sup>190</sup>.

Tale triangolo così ottenuto, costituisce dunque l'esatto sviluppo planare del corrispondente triangolo sferico, ottava porzione dell'ottaedro sferico. Il disegno della sua sagoma su un supporto flessibile può essere piegato e giuntato sui bordi con le altre sette sagome a questa uguali, componendo la superficie sferica. In questa figura disegnata da Leonardo si constata, dunque, la ricerca della corrispondenza grafica planare del poligono sferico.

Il disegno (FIG.70), della proiezione cartografica ottante attribuito a Leonardo nella sua più completa definizione è conservato nella Royal Library, presso il Castello di Windsor, ed è datato al 1508-1514, costituendo quindi una delle prime cartografie su cui appare il nome "America".

Successivamente il cartografo ed astronomo Oronce Finé conosciuto anche come Oronzio Fineo, nella sua opera *Le Sphere du Monde* (1549)<sup>191</sup>, rappresentò (FIG.71), lo sviluppo piano di uno degli otto triangoli che compongono l'ottaedro sferico della proiezione ottante, attribuita a Leonardo ed illustrata da Daniel Angelocrator (FIG.72) nella sua opera *Doctrina de ponderibus, monetis et mensuris per totum terrarum orbem usitatis* (1628)<sup>192</sup> che rappresenta l'intera proiezione ottante con il disegno della superficie terrestre sugli otto triangoli caratteristici.

---

<sup>189</sup> LEONARDO DA VINCI, *Paris Manuscript (Manoscritto di Francia) E*, 1492-1516, fogli 24 verso, 25 recto, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Firenze, Giunti Barbèra, 1989, proprietà degli originali: Institut de France, Parigi

<sup>190</sup> TYLER W. CHRISTOFER, *Leonardo da Vinci's World Map*, City University, London, 2014, pag. 12

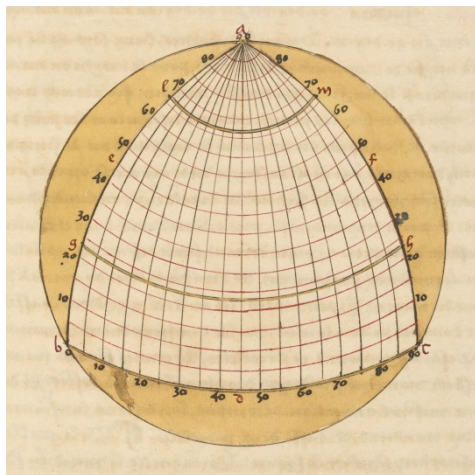
<sup>191</sup> FINÈ ORONCE, *Le Sphere du Monde, proprement dicte Cosmographie*, Paris, 1549, manoscritto MS Typ 57, foglio 66, seq.141, conservato presso Harvard University - Houghton Library, Cambridge, Mass

<sup>192</sup> ANGELOCRATOR DANIEL, *Doctrina de ponderibus, monetis et mensuris per totum terrarum orbem usitatis*, Frankfurt, Johann Nicolaus Stoltzenberger, 1628





70. Leonardo da Vinci, Proiezione cartografica ottante, 1508-1514, Royal Library, Castello di Windsor



71. Oronce Finé, Triangolo sferico, 1549, in "Le Sphere du Monde", Harvard University Houghton Library, Cambridge, Mass



72. Daniel Angelocrator, Proiezione cartografica ottante, 1628, in "Doctrina de ponderibus, monetis et mensuris per totum terrarum orbem usitatis"

Nel 1919 l'architetto e cartografo Bernard Joseph Stanislaus Cahill pubblicò la proiezione ottante da lui modificata e denominata *Butterfly Map* (FIG.73), che egli brevettò nel 1913, così denominata a causa della disposizione planare della proiezione che ricorda la forma di una farfalla.

La proiezione è modificata nei lati del triangolo caratteristico costituiti da diversi segmenti rettilinei per minimizzare la distorsione che nelle mappe poliedriche è maggiore nei pressi dei vertici e degli spigoli, dove le facce del poliedro si distanziano maggiormente dalla sfera inscritta, inoltre le terre emerse sono attentamente collocate all'interno dei triangoli caratteristici, per evitarne l'interruzione e determinare una proiezione più omogenea. Questo è favorito dalla maggior ampiezza dei triangoli sferici dell'ottaedro rispetto ad altri poliedri sferici aventi un numero maggiore di facce, e quindi di porzioni poligonali sferiche. La proiezione ottante ha come vantaggio, rispetto ad una tradizionale proiezione, la buona approssimazione delle superfici rappresentate, determinata dalla riduzione della distorsione del disegno, attraverso la maggiore suddivisione della sfera in porzioni più piccole e tutte uguali tra loro, limitando la deformazione ad ogni triangolo caratteristico di dimensioni inferiori rispetto all'intero sviluppo planare del globo o dei suoi emisferi.

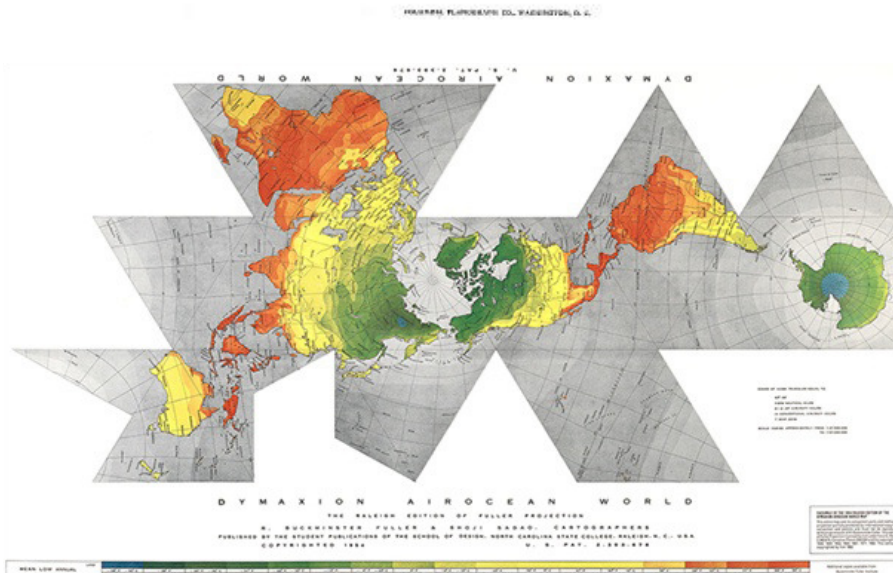
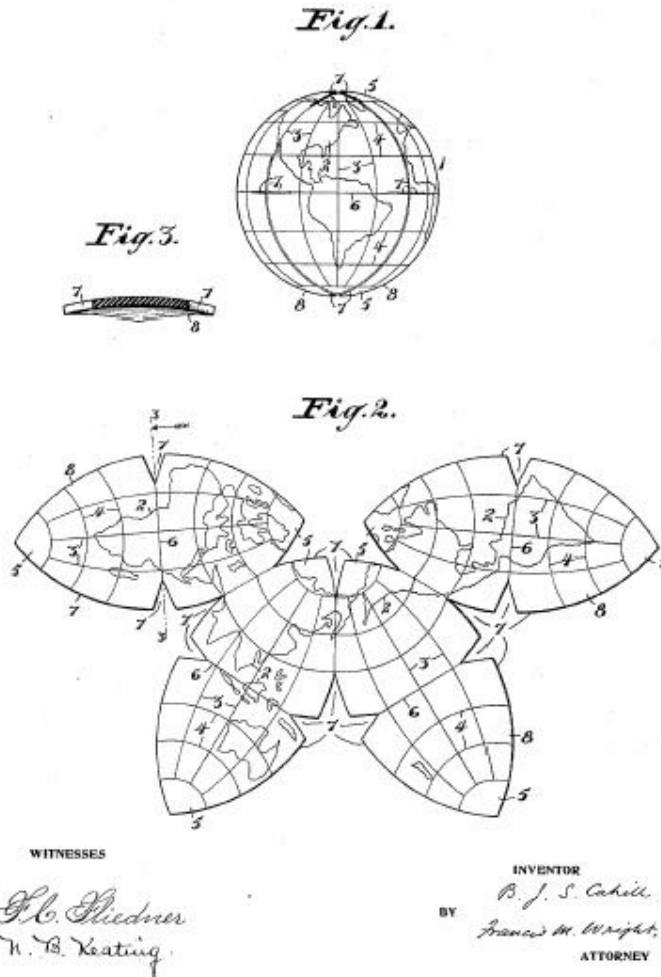
Un esempio pratico volto a dimostrare questo ragionamento può essere costituito dalla sfera di gomma morbida cava, che Cahill chiama «soft rubber hollow ball» nella descrizione del suo brevetto ottenuto nel 1913<sup>193</sup>. Se tale sfera viene suddivisa secondo la proiezione poliedrica ottante, potrà adagiarsi senza lacune sul piano attraverso il suo sviluppo. Se invece la stessa sfera viene tagliata in due porzioni emisferiche e posta sul piano, evidentemente si aprirà determinando lacune sulla sua superficie che corrispondono a distorsioni maggiori, che nelle proiezioni cartografiche di sviluppo non poliedrico, esposte in precedenza, vengono sempre risolte con approssimazioni proiettive

---

<sup>193</sup> CAHILL BERNARD JOSEPH STANISLAUS (Assegnatario), Patent US 1081207 A, *Geographical globe*, data di pubblicazione: 09/12/1913, data di registrazione: 11/02/1913, Serial No. 747,717, United States Patent Office, visualizzabile su <https://www.google.si/patents/US1081207>

1,081,207. E. J. S. CAHILL. Patented Dec. 9, 1913.  
GEOGRAPHICAL GLOBE.  
APPLICATION FILED FEB. 11, 1913.

73. B. J. S.  
Cahill, *Butterfly*  
*Map*, 1913,  
tavola di brevetto,  
United States  
Patent Office



74. R. B. Fuller,  
*Dymaxion Map*,  
1954

dettate dall'approssimazione della superficie sferica per mezzo di altri solidi geometrici sviluppabili di riferimento, quali il cono ed il cilindro.

Nel 1946 l'architetto statunitense Richard Buckminster Fuller (1895-1983) brevetta una carta geografica basata sulla divisione della sfera secondo un cubottaedro sferico.

Successivamente, nel 1954 egli presentò *The AirOcean World Map* conosciuta anche come *Dymaxion Map*<sup>194</sup> (FIG.74), che si basava sulla proiezione di un icosaedro leggermente modificato sulla sfera ad esso circoscritta o inscritta.

Come nella proiezione ottante, anche questo tipo di proiezione presenta meno distorsioni relative alle aree disegnate poiché anch'essa approssima la superficie sferica dividendola in aree più piccole e limitando a queste la distorsione, che risulterà quindi uguale per tutte le porzioni sulle quali, nella carta di Fuller, la superficie terrestre viene rappresentata attraverso la proiezione gnomonica.

Il limite di questa proiezione, rispetto alla proiezione ottante, però, è costituito proprio dal numero elevato di divisioni, causate dal numero elevato di facce del poliedro, che interrompono molto frequentemente i continenti e che "spezzano" numerose volte sui lati dei triangoli, le linee che compongono il reticolo formato dai meridiani e paralleli. Poiché lo scopo della cartografia è restituire in piano l'immagine della superficie sferica con il minor possibile numero di aberrazioni e la maggiore continuità, essa non richiede carte la cui maggiore divisione crea un maggior numero di distorsioni della rappresentazione, che non la ottimizzano in piano.

Al contrario la divisione della superficie sferica ai fini architettonici richiede, per essere ottimizzata, la sua suddivisione in un numero elevato di porzioni uguali tra loro, come lo stesso R. B. Fuller dimostra nella progettazione delle cupole geodetiche, derivate dallo

---

<sup>194</sup> La parola "Dymaxion" è una sincrasi delle tre parole "DY (dynamic), MAX (maximum), e ION (tension)", come afferma Jay Baldwin nell'articolo "Dimaxion House", pubblicato sulla pagina Internet del "Buckminster Fuller Institute", al link riportato di seguito: <https://www.bfi.org/about-fuller/big-ideas/dymaxion-world/dymaxion-house>

studio dei poliedri, dove il frequente ed uguale ripetersi di un numero contenuto di aste diverse tra loro su tutta la superficie della struttura poliedrica, ne razionalizza la costruzione, secondo un metodo costruttivo anticipato anch'esso da Leonardo da Vinci nella progettazione delle strutture reciproche lignee basate sul mutuo sostegno di aste tutte uguali tra loro, riportate nel *Codice Atlantico*<sup>195</sup>, che saranno descritte nel capitolo III.

Queste considerazioni dimostrano chiaramente come il metodo geometrico non sia ugualmente efficace per tutti gli scopi applicativi a cui è rivolto, ma sicuramente determina il sostrato culturale comune che si rende necessario per affrontare problemi di natura rappresentativa e costruttiva, come anche dimostrato dalla tavola sintetica<sup>196</sup> di Jean-Baptiste Rondelet che rappresenta lo sviluppo delle superfici dei solidi fondamentali quali cono, cilindro e sfera, desunti dai precedenti studi stereotomici e geometrici al fine della suddivisione architettonica di superfici complesse.

L' analogia tra rappresentazione cartografica e disegno architettonico, dimostra, infatti, come la conoscenza delle regole geometriche trascenda le singole discipline in cui viene applicata, divenendo fondamento universale per il controllo della forma che si vuol rappresentare, ma dimostra anche come le singole discipline portino ad una maggiore definizione del sapere geometrico ed al suo sviluppo, quando questo viene richiesto ed adoperato per la risoluzione di problemi di natura pratica che necessitano di una risposta geometricamente definita.

---

<sup>195</sup> LEONARDO DA VINCI, *Codex Atlanticus (Codice Atlantico)*, 1478-1518, fogli 69 recto, 71 verso, 899 verso, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su “e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza”, Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano

<sup>196</sup> RONDELET JEAN-BAPTISTE, *Traité théorique et pratique de l'Art de Bâtir* (Trattato teorico e pratico dell'arte di edificare), Parigi, 1803; Ed. it. a cura di Basilio Soresina, Napoli, Tipografia Del Gallo, 1839, tavola XXVI. Citato in “Architettura e stereotomia. Caratteri dell'architettura in pietra da taglio in area mediterranea” di Francesco Defilippis, Roma, Gangemi Editore, 2012 (I Ed. Bari, PolibaPress-Arti Grafiche Favia, 2010), pag. 76



Come si è detto, allo stato dell'arte attuale, nessun metodo proiettivo è risolutivo, poiché non è possibile conservare l'isogonia, l'equidistanza e l'equivalenza nel passaggio dal piano alla superficie sferica.

Le diversità delle scelte di rappresentazione effettuate per rispondere efficacemente al problema della corrispondenza geometrica planare con quella sferica, sono quindi motivate dai diversi obiettivi che si intendono raggiungere nelle diverse discipline.

La cartografia vuole mantenere quanto più possibile inalterate le proporzioni dimensionali della superficie quasi sferica terrestre sul piano; nel presente studio architettonico si vuole mantenere quanto più possibile inalterata la tassellazione planare, dove l'elevata congruenza tra le parti è più facilmente rispettata, sulla superficie sferica.

Occorre dunque ricercare una soluzione che possa ridurre al minimo le deformazioni che la tassellazione planare subisce sulla superficie sferica rivelandosi così utile alla razionalizzazione costruttiva della cupola architettonica.

Per raggiungere tale obiettivo, è necessario, come detto in precedenza, suddividere ulteriormente il triangolo caratteristico minimo sferico attraverso una geometria di tassellazione che possieda il più alto numero di parti uguali tra loro.

I metodi per suddividere quindi il triangolo caratteristico minimo sono essenzialmente due:

- ♦ il primo consiste nella suddivisione dello stesso determinata dalla numerosa sfaccettatura del poliedro inscritto alla sfera che ne approssimerà la curvatura fino al limite possibile di tangenza e che poi, se necessario, sarà proiettata sulla superficie sferica. Con tale metodo si cerca dunque di approssimare la sfera attraverso l'aumento del numero delle facce del poliedro

ad essa inscritto, potendo considerare la sfera come superficie approssimata da «un poliedro regolare d'infinita faccie»<sup>197</sup>.

La divisione della sfera e quindi la sfaccettatura del poliedro, deve essere numerosa affinché risultino ridotte le dimensioni dei tasselli geometrici, che saranno tradotti morfologicamente nei conci costituenti l'apparecchiatura della cupola, ovvero dell'emisfera architettonica. Contemporaneamente, però, deve essere ricercato anche un numero elevato di facce congruenti tra loro, per massimizzare il numero dei tasselli strutturali invariati, sapendo che in poliedri con un numero di facce superiore a dodici (quelle del dodecaedro platonico) l'aumentare del loro numero comporta anche l'aumentare della diversità tra esse, oppure a parità di uguaglianza, implica l'irregolarità del poliedro che non è preferibile nelle operazioni geometrico-proiettive con cui si vuole approssimare con regolarità la superficie sferica;

- ♦ il secondo consiste nella suddivisione del corrispondente triangolo planare caratteristico minimo, costituente una faccia del poliedro inscritto alla sfera, la cui proiezione radiale sulla sfera determina la tassellazione tridimensionale del triangolo caratteristico minimo sferico.

A questo riguardo occorre definire quale triangolo caratteristico minimo planare può costituire il piano più idoneo su cui disegnare la suddivisione e proiettarla radialmente sulla sfera minimizzandone la deformazione.

Minimizzare la deformazione della suddivisione significa mantenere quanto più possibile la divisione data dalla geometria planare, che rispondendo alle regole geometriche dei poligoni regolari, risulta essere composta da un numero di suddivisioni uguali tra loro sempre più alto rispetto a quanto

---

<sup>197</sup> MARIE JOSEPH FRANÇOIS, *Lezioni elementari di matematiche del sig. AB. Marie tradotte ed illustrate da Stanislao Canovai e Gaetano Del-Ricco*, Firenze, Presso Pietro Allegrini alla Croce Rossa Con Licenza de' Superiori, 1803, V Ed., pag. 214

avviene sulla superficie sferica, a causa della deformazione data dalla doppia curvatura.

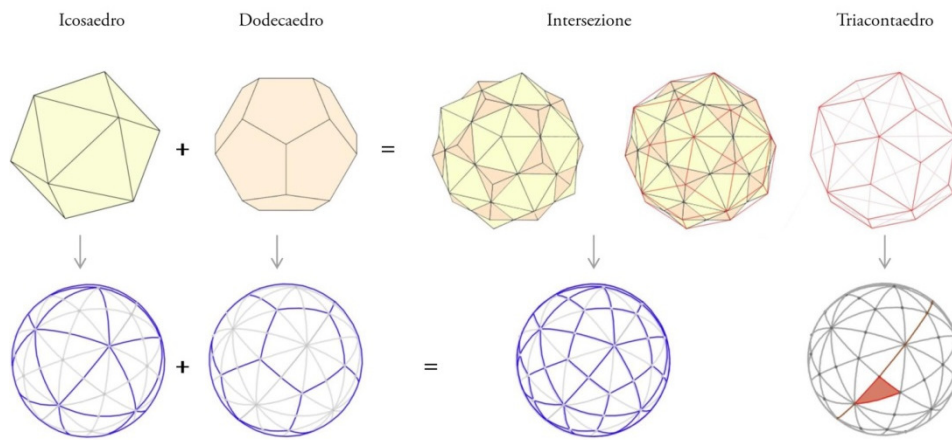
Si ricerca (FIGG. 75, 77) dunque il poliedro che ha per faccia il triangolo caratteristico minimo planare corrispondente a quello sferico, dato dalla suddivisione massima della sfera in parti uguali tra loro. Come detto in nel paragrafo III.3.1, questa suddivisione corrisponde al gruppo di simmetria dell'icosaedro-dodecaedro, proiezione della relazione di dualità tra l'icosaedro ed il dodecaedro sulla superficie sferica. Traslando questo ragionamento al poliedro che si vuole ricercare, si intersecano in modo duale l'icosaedro ed il dodecaedro regolare in modo che lo spigolo di un poliedro interseca lo spigolo del poliedro duale nel suo punto medio, secondo l'intersfera comune ad entrambi i poliedri.

L'intersfera di un poliedro è quella sfera il cui centro coincide con il centro del poliedro, e risulta tangente ad ogni spigolo del poliedro, quindi tocca ogni spigolo del poliedro in un punto, che nel caso del poliedro duale composto icosaedro-dodecaedro, corrisponde al punto medio di ciascuno spigolo di un poliedro o dell'altro. Tale sfera è così denominata poiché costituisce la sfera intermedia tra la sfera inscritta al poliedro, tangente ad ogni sua faccia, e quella circoscritta ad esso, passante per tutti i suoi vertici. Dunque nel caso del poliedro duale composto icosaedro-dodecaedro, i vertici del dodecaedro giacciono sull'intersfera dell'icosaedro, di diametro intermedio tra quello della sfera inscritta e quello della sfera circoscritta ad esso, invece i vertici dell'icosaedro giacciono tutti sulla sfera circoscritta ad esso.

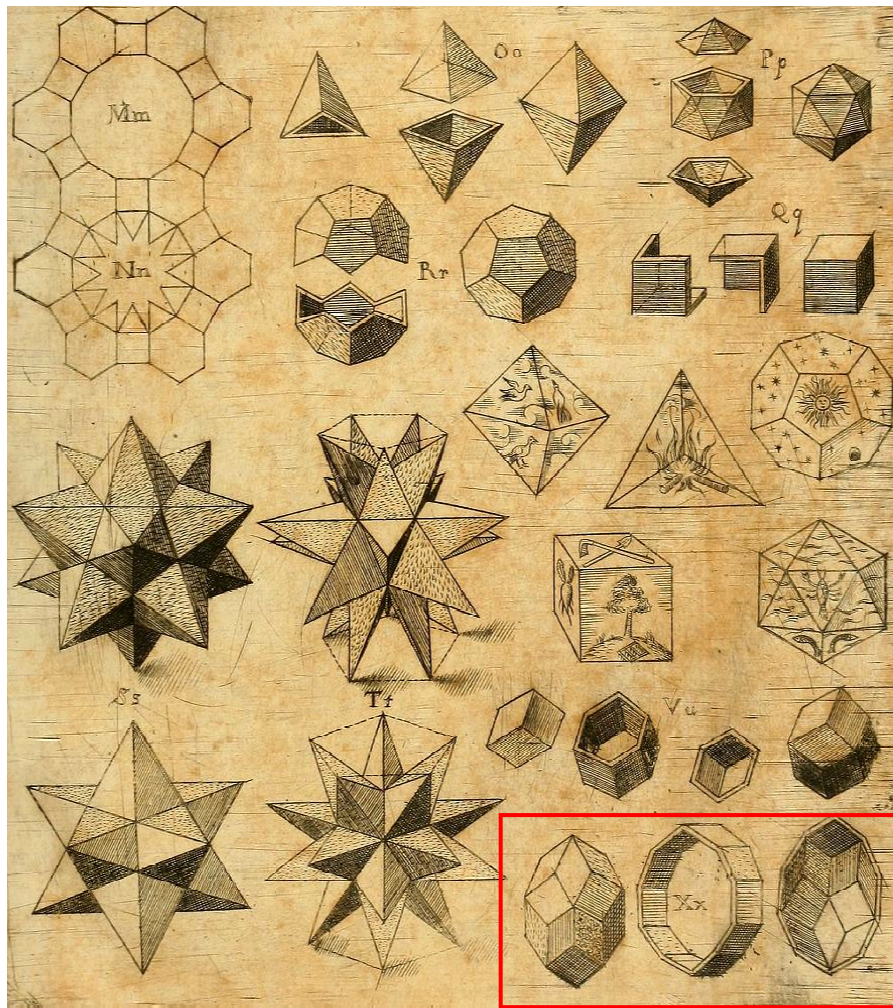
Si ha quindi che i vertici dell'icosaedro e quelli del dodecaedro non giacciono tutti sulla stessa sfera, congiungendo tali vertici con segmenti rettilinei si ottiene un poliedro irregolare, detto triacontaedro rombico aureo, descritto per la prima volta da Johannes von Kepler nell'*Harmonices Mundi*<sup>198</sup>(FIG.76),

---

<sup>198</sup> VON KEPLER JOHANNES, *Harmonices Mundi*, Francoforte, Lincii Austriae, Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof. Excudebat Ioannes Plancus,



75. R. Gadaleta,  
*Derivazione  
geometrica della  
suddivisione  
massima sferica  
in parti uguali  
(triangolo minimo  
e suo simmetrico),  
disegno  
infografico*



76. J. von Kepler,  
Triacontaedro,  
1619, in  
"Harmonices  
Mundi",  
Smithsonian  
Libraries,  
Washington,  
D.C.

1619, Liber II, De Congruentia Figurarum Harmonicarum, illustrazione Xx nel foglio posto tra pag. 58 e pag. 59 e XXVII Propositio, pag. 61, conservato presso Smithsonian Libraries, Washington, D.C.

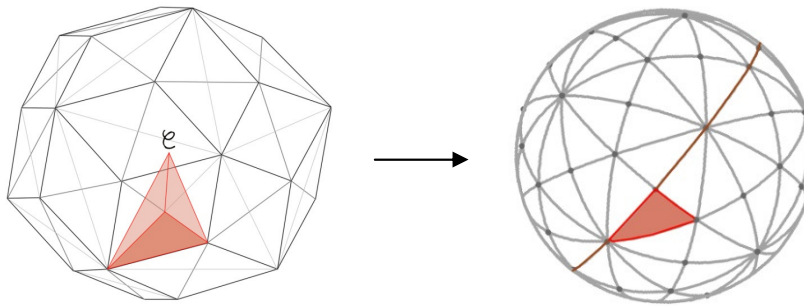
avente gli spigoli costituiti dai segmenti rettilinei passanti per i vertici del poliedro composto duale icosaedro-dodecaedro. Le trenta facce rombiche del triacontaedro dal greco antico τριάκοντα (triaconta) “trenta” ed ἔδρα (edra) “faccia”, sono divisibili, secondo le loro diagonali, in quattro triangoli rettangoli, di cui uno costituisce il triangolo minimo caratteristico planare cercato. Il triacontaedro è un poliedro derivato, facente parte dei tredici solidi di Catalan<sup>199</sup>, duali dei tredici poliedri archimedei, dunque costituisce il poliedro duale dell'icosidodecaedro archimedeo e possiede, al contrario di quest'ultimo, facce uniformi ma non i vertici. Infatti i vertici del triacontaedro, come si è appena affermato, non giacciono tutti sulla stessa sfera, ma su due sfere diverse a gruppi simmetrici di cinque (FIG.78).

Dunque per ottenere una approssimazione maggiore e migliore della superficie sferica e quindi della proiezione su di essa della suddivisione planare del triangolo caratteristico minimo, si proiettano radialmente tutti i vertici del triacontaedro sulla stessa sfera, ottenendo un “triacontaedro geodetico” (FIG.79), In questo modo la proiezione risulta essere molto meno distorta, poiché il piano triangolare di proiezione è tangente alla sfera inscritta al poliedro, mentre i suoi vertici giacciono tutti sulla sfera ad esso circoscritta, e costituisce quindi la faccia di un “triacontaedro regolarizzato”.

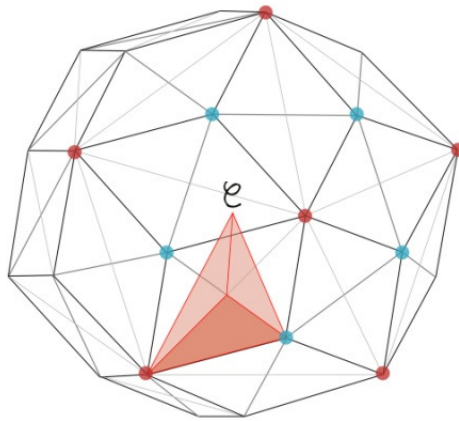
A tal punto dello studio, dunque, si potrebbe dedurre la necessità del proiettare radialmente sulla sfera la suddivisione del triangolo caratteristico minimo planare, quando questo ha tutti i vertici sulla superficie sferica, ma occorre ricordare che tale triangolo così configurato non avrà una geometria regolare in piano, dunque la sua suddivisione non risponderà alle regole di ottimizzazione geometrica relative alla geometria piana, dove la congruenza, dunque l'uguaglianza tra le parti viene meglio rispettata, consentendo una ottimizzazione maggiore

---

<sup>199</sup> I solidi o poliedri di Catalan derivano il loro nome dal matematico belga Eugène Charles Catalan (1814-1894) che per primo li descrisse nel 1865



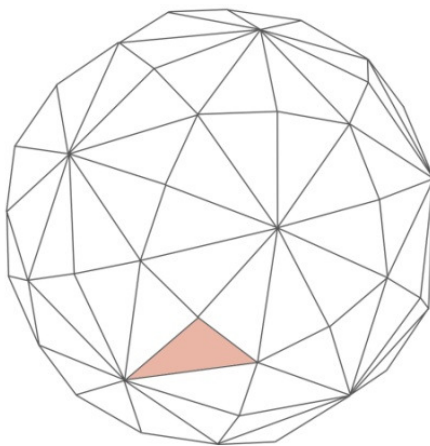
77. R. Gadaleta,  
*Corrispondenza topologica tra il triacontaedro e la divisione sferica secondo gruppo di simmetria icosaedro/dodecaedro*, disegno infografico tridimensionale



Vertici sfera 1

Vertici sfera 2

78. R. Gadaleta,  
*Vertici del triacontaedro evidenziati con colori diversi, poiché giacenti su due sfere differenti*, disegno infografico tridimensionale



Tutti i vertici giacciono sulla stessa sfera

79. R. Gadaleta,  
*Triacontaedro geodetico*, disegno infografico tridimensionale

della suddivisione. Se infatti la suddivisione contiene già un numero maggiore di porzioni diverse tra loro, sulla sfera tale numero sarà maggiormente aumentato a causa della deformazione. Dunque è possibile affermare che occorre avere una suddivisione planare quanto più regolare ed ottimizzata possibile. Questo accade suddividendo direttamente la porzione della faccia di un poliedro regolare (in quanto composto naturalmente da poligoni regolari) corrispondente al triangolo caratteristico, per poi proiettare radialmente tale suddivisione sulla superficie sferica.

Tutte le considerazioni qui esposte derivano da riflessioni compiute attraverso conoscenze di geometria teorica, ma sono state studiate e verificate attraverso i software di modellazione infografica tridimensionale *AutoCAD® 2012*, *Rhinoceros® 5.0* e *3ds Max 2015 (3d Studio Max 2015)* ed il software *Stella4D* di geometria poliedrica, che hanno conferito immediata certezza matematica alle osservazioni compiute. In questo modo, molti metodi di divisione sono stati provati e poi scartati, poiché non rispondevano a criteri di razionalizzazione della tassellazione sferica, come sarà dimostrato nel paragrafo III.5.2.

In entrambi i metodi descritti quindi occorre controllare la relazione esistente tra le regole geometriche di suddivisione planare e quelle di suddivisione sferica, ovvero occorre considerare la non corrispondenza delle regole di tassellazione valide nel piano, con quelle di tassellazione valide nello spazio.

Ricordando che il termine tassellazione proveniente dal greco antico *τάσσω* (tasso) “mettere in ordine” e dal latino *tessella-ae* “tassello per lavori a mosaico o ad intarsio”, indica una configurazione costituita dalla ripetizione di figure che ricoprono continuamente una superficie, senza lacune, è possibile affermare che gli stessi poligoni che possono costituire una tassellazione piana, non possono costituire una tassellazione sferica rispettandone la definizione geometrica.

Quindi l'esagono tassella periodicamente il piano, ovvero ricopre continuamente la superficie planare attraverso la sua ripetizione



regolare, quindi invariante per traslazione, rotazione e simmetria, ma l'accostamento spaziale della sua forma geometrica attraverso la piegatura rigida di più poligoni esagonali lungo i loro lati determinando angoli solidi, non chiude lo spazio senza lacune, ovvero non costituisce una tassellazione spaziale.

Al contrario il pentagono, come ben dimostrato dall'*illustrazione 33* di Albrecht Dürer<sup>200</sup> (FIG.80), presente nell'*Underweysung der messung*, non tassella continuamente il piano, ma l'accostamento spaziale della sua forma geometrica attraverso la rotazione rigida di più poligoni pentagonali lungo i loro lati, determinando opportuni angoli diedrali, chiude lo spazio senza lacune, costituendo il dodecaedro platonico.

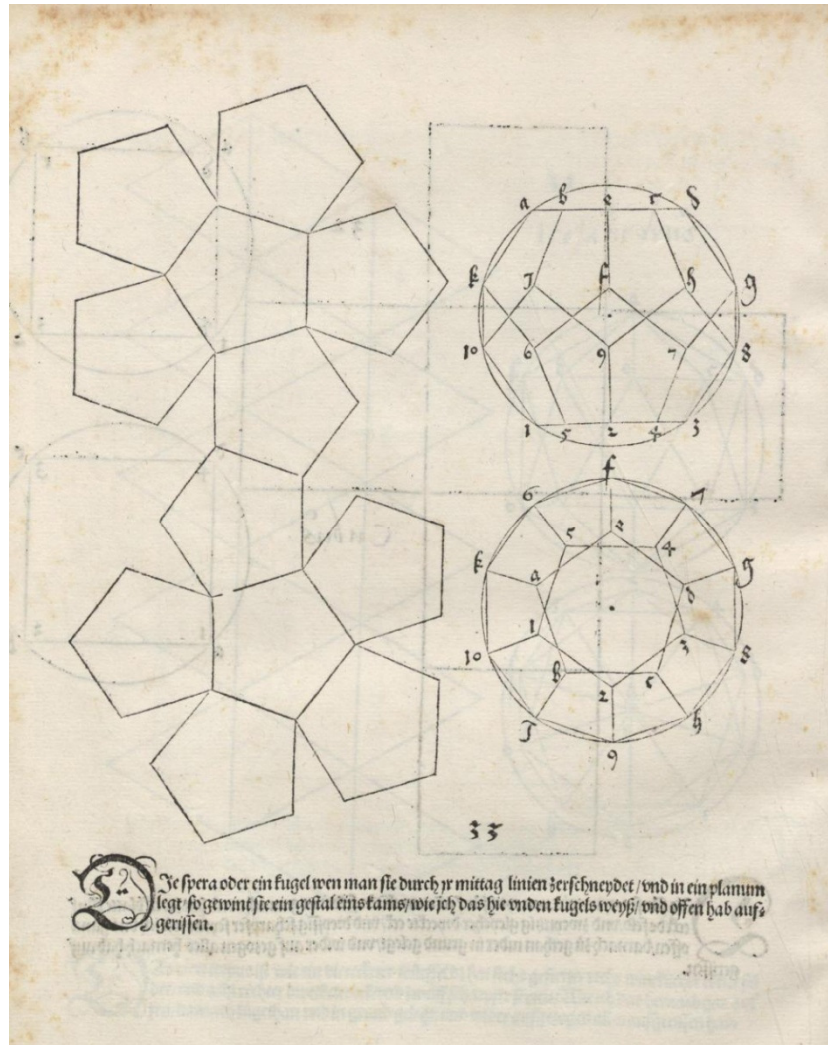
Le regole geometriche secondo le quali i poligoni regolari compongono tassellazioni spaziali tridimensionali sono state enunciate da Euclide il quale negli *Elementi*, dimostra che non sono possibili altri poliedri regolari oltre ai cinque platonici, costituenti la geometria di base da cui derivano tutti gli altri poliedri, poiché per creare un angoloide<sup>201</sup> in ogni vertice occorrono almeno tre facce e la somma degli angoli delle facce che concorrono in quel vertice deve essere minore di 360 gradi. In caso contrario, infatti, le facce risulterebbero poste in uno stesso piano. Questo implica che ciascun vertice di ciascuna faccia può contribuire alla creazione dell'angoloide con un angolo pari a 120 gradi al massimo, e dunque non è possibile ottenere un poliedro con sole facce esagonali o con un numero maggiore di lati, dato che questi poligoni possiedono angoli maggiori di 120 gradi. La somma degli angoli deve infatti, risultare minore di 360 gradi per l'esistenza di un poliedro con facce regolari, secondo il celebre "invariante" o "caratteristica di Eulero" da lui definita nel 1758

---

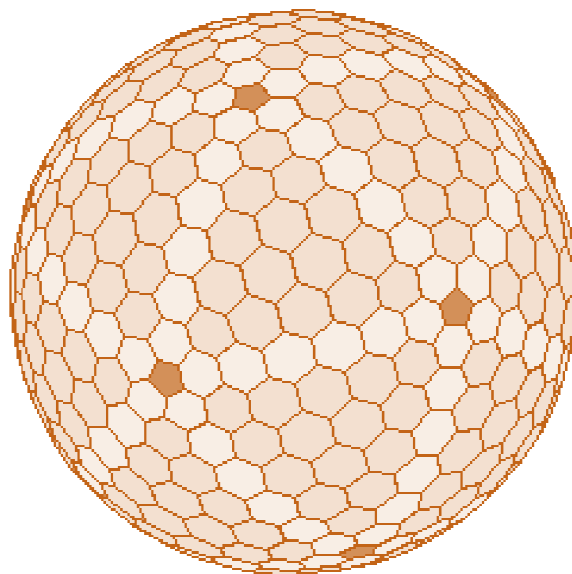
<sup>200</sup> DÜRER ALBRECHT, *Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebenen unnd gantzen corporen (Istruzioni per la misurazione con riga e compasso di figure nel piano e nello spazio)*, Nuremberg, Hieronymus Andreas Formschneider, 1525, Das Viert Büchlein (IV Libretto), illustrazione 33, conservato presso SLUB Dresden, segnatura: S.B.616

<sup>201</sup> Dicesi angoloide la parte di spazio delimitata da una piramide indefinita. Esso è l'angolo solido determinato da almeno tre facce consecutive convergenti in uno stesso punto, aventi quindi un vertice comune.

80. Albrecht Dürer,  
Dodecaedro  
platonico e suo  
sviluppo planare,  
1525, in  
"Underweysung  
der messung",  
SLUB Dresden



81. R. Gadaleta,  
*Poliedro di  
Goldberg G(7,0)*,  
che dimostra  
come in poliedri  
con facce irregolari  
vi sono sempre  
pentagoni regolari  
(in rosso scuro),  
rielaborazione  
infografica del  
disegno di  
Tomruen  
per "English  
Wikipedia"



attraverso la formula  $v - s + f = 2$ , dove  $v$  sta per il numero dei vertici,  $s$  quello degli spigoli del poliedro, ed  $f$  quello delle facce dello stesso.

Questo il motivo per il quale, in poliedri non regolari caratterizzati da un numero elevato di facce costituite da esagoni irregolari, vi sono sempre dei pentagoni regolari che permettono il giusto angolo di curvatura che determina la chiusura dello spazio e quindi l'esistenza del poliedro (FIG.81).

Tale poliedro molto sfaccettato segue sempre la stessa simmetria del poliedro regolare da cui deriva e di cui ne costituisce la maggiore suddivisione, assorbendo la distorsione sferica nell'irregolarità delle sue facce causata dall'elevata divisione della faccia del poliedro regolare.

La maglia di facce irregolari si viene quindi a collocare nel luogo dello spazio posto tra i vertici del poliedro che assumeranno la configurazione geometrica regolare propria della simmetria del poliedro originario: in generale nei vertici vengono a formarsi pentagoni regolari nel caso della simmetria icosaedrica (data dal gruppo icosaedro-dodecaedro), triangoli nel caso della simmetria tetraedrica (gruppo tetraedro) e quadrati nel caso della simmetria ottaedrica (gruppo cubo-ottaedro).

Tale configurazione viene determinata nella sua interezza geometrica da una sola faccia del poliedro, oppure attraverso la sua suddivisione triangolata, come nel caso delle sfere geodetiche.

La suddivisione data dal gruppo di simmetria icosaedro-dodecaedro costituisce all'interno della geometria poliedrica la configurazione più regolare di approssimazione della superficie sferica, conservando maggiori rapporti di similarità tra le molteplici facce di cui è costituita. Una spiegazione può essere sicuramente determinata dalle proprietà geometriche del dodecaedro platonico, che risulta essere il solido regolare più simile alla sfera, poichè occupa circa il 66,49% del volume della sfera in cui è iscritto, mentre un icosaedro iscritto nella stessa sfera, ne occupa circa il 60,54% del volume<sup>202</sup>.

---

<sup>202</sup> POPKO EDWARD S., *Divided Spheres: Geodesics and the Orderly Subdivision of the Sphere*, Boca Raton (USA), A K Peters Book/CRC Press Taylor & Francis Group, 2012, pag.134

Il pentagono, la cui geometria è determinata dal rapporto aureo, è dunque l'elemento che permette l'esistenza dei poliedri più complessi e sfaccettati, che tendono maggiormente alla sfera, costituendone le approssimazioni più precise.

Quindi ai fini architettonici del presente studio il problema teorico-pratico che si pone, legato a quello geometrico-costruttivo, consiste nel ricercare sia una elevata suddivisione, e quindi approssimazione, della superficie sferica, sia un maggiore numero di piccole parti strutturali lapidee uguali tra loro, avendo consapevolezza dell'intrinseca discordanza di questi due aspetti, che rende il problema irrisolvibile «Qual è 'l geometra che tutto s'affige / per misurar lo cerchio», secondo le efficaci parole di Dante Alighieri<sup>203</sup>, ma a cui qui si vuole trovare una risposta che possa costituire una buona soluzione di compromesso tra i due aspetti antitetici ai fini dell'ottimizzazione della forma costruita.

---

<sup>203</sup> ALIGHIERI DANTE, *Divina Commedia*, (1304-1321), *Paradiso*, XXXIII, vv. 133-134

### III. 5 Individuazione della tassellazione in pietra da taglio

#### III.5.1 Requisiti che la tassellazione deve soddisfare

Individuare la morfologia dell'apparecchiatura lapidea, ovvero la tassellazione tridimensionale che costruisce lo spazio, significa determinarne precisi e molteplici requisiti che devono essere soddisfatti. Tali requisiti, di seguito esposti, sono strettamente interdipendenti tra loro, e la loro determinazione deve avvenire contemporaneamente in fase di progetto.

- ◆ REQUISITI STATICI

L'apparecchiatura deve rispettare i requisiti statici all'interno della compagine muraria della cupola, dove la staticità è ottenuta sia attraverso lo sfalsamento dei giunti verticali appartenenti ai filari orizzontali, atti ad esercitare un'azione efficace di cerchiatura che si oppone alle spinte radiali dalla sommità della cupola alla sua base, lungo le curve generatrici della superficie, sia attraverso la configurazione dei conci cuneiformi i cui giunti sono orientati verso un unico centro.

Maggiore resistenza è garantita dalla curvatura delle facce di intradosso e di estradosso del concio, anche se questa risulta lievemente percepibile in ogni singolo elemento se l'approssimazione della curvatura sferica è raggiunta attraverso un numero elevato di conci.

La curvatura delle facce di estradosso ed intradosso dei conci che giacciono su una superficie sferica, che sono state determinate, nella storia della Stereotomia, con i metodi di taglio della pietra attraverso *panneaux* e *biveaux*, sagome flessibili per poter seguire la curvatura di taglio, sono esposti in diversi trattati di Stereotomia di cui si citano le illustrazioni più rappresentative contenute nel trattato *La pratique du trait*

à preuves di Abraham Bosse (FIG.83) e nel *Traité de la coupe des pierres* di Jean-Babtiste de La Rue<sup>204</sup> (FIG.82).

La curvatura delle facce dei conci risponde meglio a requisiti statici poiché segue la forma resistente della curvatura della cupola e quindi anche della linea curva delle pressioni valutate nell'arco equivalente. Tale linea curva rappresenta il luogo geometrico dei centri di pressione che, se interni allo spessore dei conci, assicura la stabilità della cupola «nell'ipotesi che non vi sia scorrimento dei conci e che non sia superata localmente la resistenza a compressione del materiale»<sup>205</sup>.

Come è noto, e come si è detto nel paragrafo I.2.1, è proprio la curvatura che caratterizza la resistenza della forma dell'arco, come scrisse Leon Battista Alberti nel *De re aedificatoria (Liber III, Caput XIII)*, «che il più solido di tutti sia l'arco intero, si può constatare con i fatti e dimostrare col ragionamento»<sup>206</sup>. «Nel muro ogni pietra e ogni filare sono disposti e uniti insieme osservando rigorosamente l'orizzontalità e la verticalità, mentre nella volta i filari sono curvi e tutte le giunture delle pietre sono rivolte verso il centro proprio dell'arco»<sup>207</sup>.

---

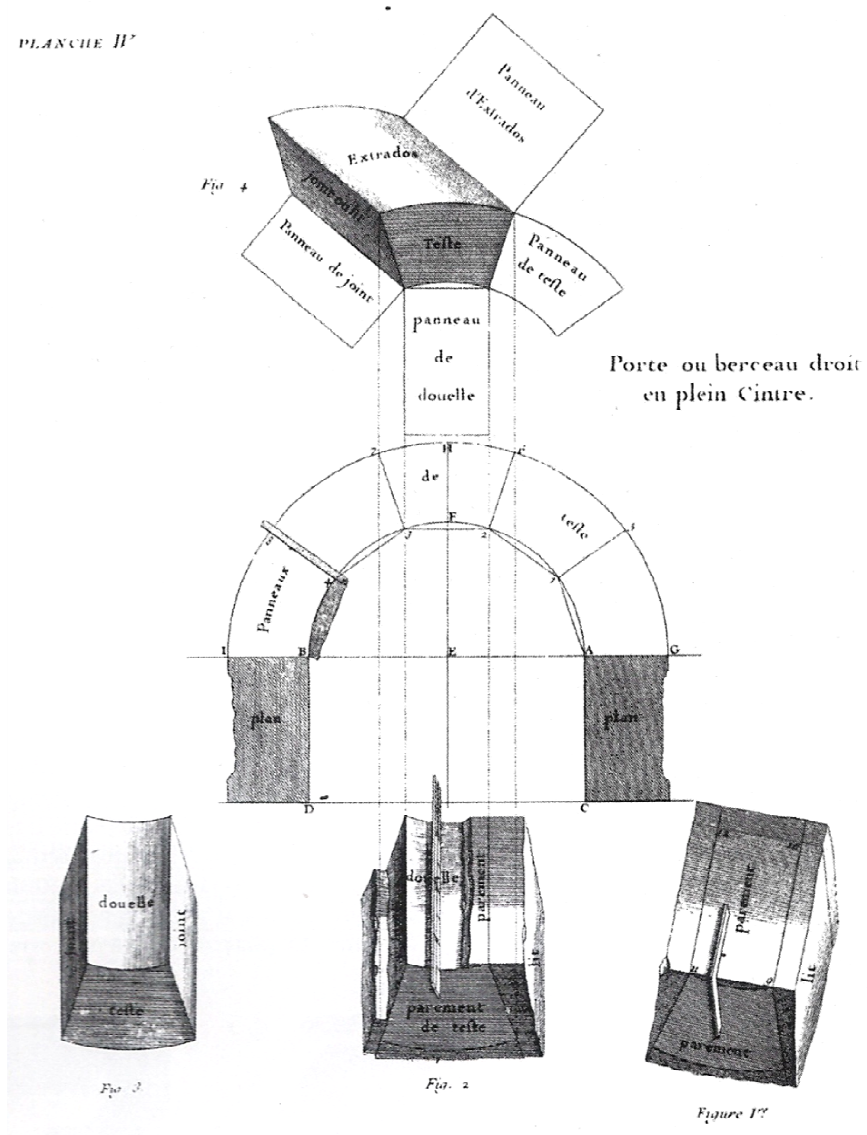
<sup>204</sup> BOSSE ABRAHAM, *La pratique du trait à preuves, de Mr Desargues Lyonnais, pour la coupe des pierres en l'architecture*, Paris, De l'Imprimerie de Pierre Des-Hayes Rue de la Harpe à la Roze Rouge, 1643, tavola 6, tavola 53;

DE LA RUE JEAN-BABTISTE, *Traité de la coupe des pierres*, Parigi, Imprimerie Royale, 1728, tavola IV, tavola V

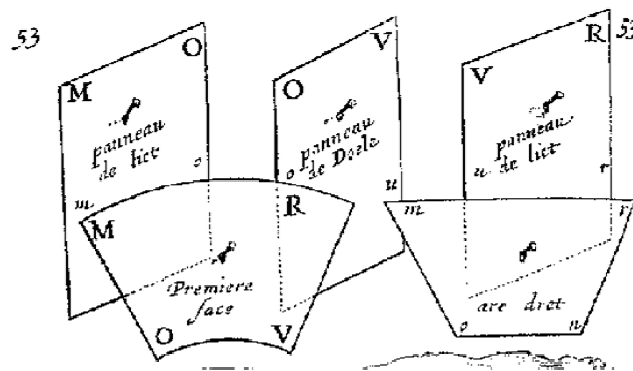
<sup>205</sup> D'AMATO GUERRIERI CLAUDIO, FALLACARA GIUSEPPE, *Archetipi costruttivi dell'architettura in pietra*, in "Città di Pietra/Cities of Stone. Pietre di Puglia. Costruire in pietra portante/Stones of Apulia. To Build load-bearing Stone", La Biennale di Venezia e Sensi Contemporanei, Venezia, Marsilio, 2006, pag. 54

<sup>206</sup> ALBERTI LEON BATTISTA, *L'architettura (De re aedificatoria)*, testo latino e traduzione a cura di Giovanni Orlandi. Introduzione e note di Paolo Portoghesi, 2 Tomi, Milano, Edizioni Il Polifilo, 1966, Tomo I, Libro III, Capitolo XIII, trad. italiana a pag. 234, testo latino a pag. 235: «Rectum arcum omnium esse firmissimum cum re ipsa constat tum ratione argumentoque monstratur».

<sup>207</sup> Ivi, Tomo I, Libro III, Capitolo XIV, trad. italiana a pag. 242, testo latino a pag. 243 : «quod in pariete ad rectam regulam normamque et libellam lapide set singuli ordines coagmentantur atque componuntur, in testudine autem ordines



82. J. B. de La Rue, Taglio dei conci con superfici curve, 1728 in "Traité de la coupe des pierres", Pl. IV



83. A. Bosse, Taglio dei conci con superfici curve, 1643, in "La pratique du trait à preuves", Tav. 53

ad flexam regulam et lapidis omnes conclausurae ad sui arcus centrum diriguntur».



Poiché in questo studio sperimentale la suddivisione della superficie sferica sarà attuata mediante morfologia poliedrica e non seguendo la suddivisione usuale in meridiani e paralleli, ottenuta la suddivisione del triangolo caratteristico minimo, questa deve essere correttamente ammorsata con i triangoli ad esso adiacenti, in modo che non siano presenti linee di discontinuità all'interno della maglia strutturale resistente.

Seguendo l'esempio fornito dall'architettura costruita in pietra da taglio, un primo dimensionamento di massima in fase ideativa degli elementi strutturali, prevede conci lapidei inscrivibili in un cubo ideale il cui spigolo misura dai 30 cm ai 40 cm. In base a tali dimensioni, ponendo lo spessore dei conci uguale per tutta la sezione della cupola, nella logica del presente studio che ricerca un maggiore numero di elementi invarianti ripetibili secondo simmetria poliedrica, si procede con il dimensionamento della luce da coprire, come descritto nel paragrafo III.5.3, sapendo che «in una cupola emisferica lo spessore minimo è il 4,2% del raggio»<sup>208</sup>. Le dimensioni della cupola lapidea sono volutamente spinte al caso limite concretamente realizzabile in sicurezza, necessario per il presente studio, prevedendo di coprire una luce di circa 10 metri con piccoli conci. In tal modo si valuta il numero minimo ottenibile di conci invarianti, rispetto ad una grande luce da coprire, rendendo massima la difficoltà del problema di ricerca. È chiaramente noto, infatti, che riducendo la luce coperta, il numero dei conci invarianti si riduce notevolmente. Verrà anche messa a punto una soluzione diversa di piccole dimensioni, ai fini di effettuare una analisi architettonica comparata dei due modelli della cupola. Si ricorda che poichè l'apparecchiatura ricercata deriva da geometria poliedrica, al pari delle cupole geodetiche, non è possibile scalare dimensionalmente un dato progetto di configurazione della

---

<sup>208</sup> CAZZANI ANTONIO, lezione *Archi, Volte e Cupole*, Dipartimento di Ingegneria Meccanica e Strutturale, Università degli Studi di Trento, diapositiva 123

cupola al fine di variarne le dimensioni, ma ogni cupola deve essere progettata in base alla luce che si vuole coprire.

Per queste motivazioni il presente studio si pone anche l'obiettivo di divulgare il metodo adoperato per il disegno di progetto architettonico della cupola costruita attraverso l'apparecchiatura scelta.

Importante risulta inoltre la scelta corretta del materiale, ovvero il litotipo da adoperare, in base alle sue caratteristiche di resistenza, lavorabilità e durabilità, cercando di «ottenere la ricercata leggerezza sempre a vantaggio de' muri»<sup>209</sup>.

◆ REQUISITI GEOMETRICI

La tassellazione deve rispettare le proprietà geometriche del poliedro da cui è originata, di cui ne assume la simmetria e da cui derivano le caratteristiche geometriche di suddivisione del triangolo caratteristico minimo.

I requisiti geometrici sono strettamente interdipendenti da quelli statici, in quanto la suddivisione deve rispettare i criteri di ammorsamento dei tasselli sia all'interno del triangolo minimo caratteristico, sia tra quest'ultimo ed i triangoli adiacenti. Inoltre poiché la cupola corrisponde alla semisfera suddivisa secondo morfologia poliedrica, è necessario comprendere dove passi il piano di taglio, che divide la sfera in due porzioni emisferiche, ai fini di produrre meno conci speciali alla base della cupola, generati dal taglio della maglia strutturale.

---

<sup>209</sup> VALADIER GIUSEPPE, *L'Architettura Pratica dettata nella scuola e cattedra dell'insigne accademia di S. Luca*, 5 voll., Roma, Incisori d'Architettura Giacomo Rocruè ed Eleuterio Catesi, con permesso de'superiori, 1833, Tomo IV, Sezione XVII, articolo LXV "Sul meccanismo e costruzione delle volte con rispettive figure"

◆ REQUISITI FORMALI

L'espressività formale è data dalla maglia strutturale, che si individua come «decorazione costruita»<sup>210</sup>, «décoration qui se construit»<sup>211</sup>, ottenuta attraverso l'intenzionalità di evidenziare la geometria costitutiva della tassellazione che determina la sua «espressività costruttiva»<sup>212</sup>. Le scelte di orientamento della tessitura vengono effettuate in base al controllo del soddisfacimento dei requisiti statici e geometrici ed in base alla volontà di rendere chiaramente leggibili i caratteri dell'organismo cupolato, quali la centralità, la radialità e la continuità conclusa della sua simmetria.

◆ REQUISITI TIPOLOGICI

Come affermato nel paragrafo I.2.2, lo spazio cupolato, soprattutto in area mediterranea, si definisce come δομή (domè) “costruzione” della cellula minima abitativa, della dimora, in greco antico δόμος (domos), da cui il latino *domus*. Il vano cupolato si caratterizza spesso come antica cellula abitativa autonoma che definisce la sua centralità attraverso una planimetria circolare, data dalla coincidenza primitiva di spazio abitabile e copertura, «sintesi massima dell'organismo unitario»<sup>213</sup>, «prodotto di un unico atto costruttivo»<sup>214</sup>, «forma

---

<sup>210</sup> Da una intervista rilasciata da Perret nel 1941, riportata da M. Gauthier nell'articolo *Pour une architecture sociale*, in “Beaux-Arts”(n. 14, pag. 8) citato in “Architettura e stereotomia. Caratteri dell'architettura in pietra da taglio in area mediterranea” di Francesco Defilippis, Roma, Gangemi Editore, 2012 (I Ed. Bari, PolibaPress-Arti Grafiche Favia, 2010), pag. 121

<sup>211</sup> BLANC CHARLES, *Grammaire des arts de dessin. Architecture, sculpture, peinture*, Parigi, 1867, citato in “Architettura e stereotomia. Caratteri dell'architettura in pietra da taglio in area mediterranea” di Francesco Defilippis, Roma, Gangemi Editore, 2012 (I Ed. Bari, PolibaPress-Arti Grafiche Favia, 2010), pag. 121

<sup>212</sup> D'AMATO CLAUDIO, *Espressività costruttiva di Mario Ridolfi*, in “Mario Ridolfi. Manuale delle tecniche tradizionali del costruire. Il ciclo delle Marmore”, a cura di F. Cellini e C. D'Amato, Milano, Electa, 1997

<sup>213</sup> STRAPPA GIUSEPPE, *Unità dell'organismo architettonico. Note sulla formazione e trasformazione dei caratteri degli edifici*, Bari, Edizioni Dedalo, 1995, pag. 90

<sup>214</sup> Ivi, pag. 92

assolutamente unitaria per l'assoluta concorrenza delle componenti statica, costruttiva, distributiva»<sup>215</sup>.

Un esempio di spazio unitario abitativo voltato a carattere massivo, determinato quindi dal sistema murario, è costituito dal tipo pugliese del trullo, anche se in tal caso la copertura è costituita da una pseudocupola.

Con la crescita dell'unità abitativa attraverso l'aggiunta di altre cellule elementari, lo spazio centrale cupolato si caratterizza come vano *dominante* nodale, centro della casa, previsto anche nell'antica abitazione egizia tradizionale, la cui copertura era realizzata con il "compasso ligneo" adoperato successivamente anche da Hassan Fathy, che analogamente alla randa, consente di costruire cupole senza l'utilizzo di strutture di sostegno, attraverso un'asta lignea mobile di cui una estremità è incernierata in corrispondenza del centro della cupola e l'altra è posta a contatto con la faccia di intradosso dell'elemento costruttivo, individuandone l'esatta posizione di messa in opera all'interno di ogni filare. Nel caso di cupole emisferiche l'asta lignea ha lunghezza pari al raggio della sfera di intradosso. In area pugliese «l'uso della randa, intesa come esperienza concreta delle linee di costruzione geometrica, consente la determinazione dei conci attraverso un primitivo procedimento proiettivo all'interno del continuum murario: avvalendosi della stessa randa è possibile tracciare il taglio dei letti sui conci squadrati presentati in opera. Una volta tracciati, i conci possono essere tagliati a terra e quindi ricollocati definitivamente all'interno della compagine muraria»<sup>216</sup>.

Le prime forme di abitazione erano dunque circolari, come rotondo era anche l'ἑστία (estia), il sacro focolare domestico di cui l'antica divinità greca Ἑστία (Estia) ne costituiva la

---

<sup>215</sup> Ivi, pag. 93

<sup>216</sup> LEONARDIS ENRICA, *Architettura romanica pugliese. Il progetto e la costruzione in pietra portante dell'edificio per il culto*, Roma Gangemi Editore, 2015, pag. 223

personificazione, simbolo della vita domestica svoltasi intorno alla fiamma che illumina, riscalda, cucina.

Attraverso uno storico processo di mutazione tipologica la planimetria circolare della capanna primitiva diviene il tempio circolare periptero di Vesta presso Tivoli, che «corrispondeva all'idea primordiale di casa, testimoniando la migrazione di significato dall'abitazione al tempio della divinità dove veniva custodito e tramandato il fuoco, simbolo della continuità»<sup>217</sup>, individuando ancora una volta l'origine dell'architettura nella capanna primitiva, «il modello a partire dal quale ogni magnificenza architettonica è stata concepita»<sup>218</sup>, come illustrato nel frontespizio dell' *Essai sur l'Architecture*<sup>219</sup> di Marc-Antoine Laugier.

L'abitazione è dunque il luogo originario dello spazio sacro: nella casa era conservato il sacro focolare domestico e nella casa, detta *domus ecclesiae* o casa dell'assemblea, si svolgevano le prime assemblee dedite al culto paleocristiano, origine della *chiesa*, luogo sacro concepito come *Domus Dei*, dimora di Dio, indicato con il termine *Duomo*.

Attraverso tale processo di direzionamento, gerarchizzazione e specializzazione della *domus*, il vano *dominante* cupolato dell'abitazione mediterranea si ripete assialmente a costituire il tipo pugliese di chiesa a cupole in asse, che caratterizza il *duomo*, termine con cui nel medioevo si denotava la cattedrale,

---

<sup>217</sup> STRAPPA GIUSEPPE, *Unità dell'organismo architettonico. Note sulla formazione e trasformazione dei caratteri degli edifici*, Bari, Edizioni Dedalo, 1995, pag. 30

<sup>218</sup> UGO VITTORIO (a cura di), *Marc-Antoine Laugier, Saggio sull'Architettura*, Palermo, Aesthetica Edizioni, 1987, pag. 48. Citato in "Studiare l'architettura, un vademecum e un dialogo" di C. D'Amato, Roma, Gangemi Editore, 2014, pp. 27

<sup>219</sup> LAUGIER MARC-ANTOINE, *Essai sur l'Architecture*, 1753 (manoscritto); *Essai sur l'Architecture – Nouvelle édition revue, corrigée et augmentée*, Paris, Duchesne, 1755; Edizione italiana: V. Ugo (a cura di), *Marc-Antoine Laugier, Saggio sull'Architettura*, Palermo, Aesthetica Edizioni, 1987. Citato in "Studiare l'architettura, un vademecum e un dialogo" di C. D'Amato, Roma, Gangemi Editore, 2014, pp. 27, 28, 252

indicata con il termine tedesco *dom* attualmente in uso, da cui deriva la parola inglese *dome* che designa la *cupola*.

«La Chiesa di Ognissanti a Valenzano<sup>220</sup>, pur nella sua autonoma leggibilità, è uno degli esempi più cristallini in traduzione di un tipo edilizio. Dal modo in cui l'edificio è stato costruito si comprende come gli artefici abbiano pensato ad uno spazio derivato dall'esperienza della casa d'abitazione, ripetibile fino ad ottenere il vano nodale per addizioni successive»<sup>221</sup>.

Le cupole derivano dal riutilizzo dell'esperienza costruttiva delle tholos presenti, ad esempio, nelle costruzioni domestiche pugliesi, adoperando una soluzione che ricerca la rappresentazione formale della maggiore rilevanza attribuita allo spazio sacro attraverso una configurazione statico-geometrica differente, maggiormente definita e codificata nella sua morfologia architettonica emisferica. Il passaggio dalla tholos alla cupola costituisce un primo atto di ricerca critica formale che si fonda sul sostrato culturale acquisito, «perfettamente noto e presente nella coscienza spontanea del costruttore»<sup>222</sup>.

A partire dai grandi edifici specialistici della Roma antica, lo spazio voltato assume carattere aulico come rappresentazione architettonica di valori universali collettivi, evidenziando la sua forte valenza simbolica attraverso il linguaggio leggibile della volta e della cupola, permettendo ad Andrea Palladio di affermare «che la figura ritonda, nella quale non è alcun angolo, ai Tempj sommamente si convenga»<sup>223</sup>.

In questo lavoro si sceglie di porre le dimensioni della luce da coprire pari a circa 10 metri, ai fini dello studio sull'ottimizzazione dell'apparecchiatura come precedentemente

---

<sup>220</sup> Di cui si è detto nel paragrafo II.1

<sup>221</sup> STRAPPA GIUSEPPE, *Unità dell'organismo architettonico. Note sulla formazione e trasformazione dei caratteri degli edifici*, Bari, Edizioni Dedalo, 1995, pag. 161

<sup>222</sup> Ivi, pag. 162

<sup>223</sup> PALLADIO ANDREA, *I quattro Libri dell'Architettura*, Venezia, appresso Domenico de'Franceschi, 1570, Liber IV, 6

esposto, ma anche per la scelta di ricondurre la luce da coprire in determinati limiti dimensionali efficaci morfologicamente e tipologicamente in architettura, maggiormente adoperabili per la copertura di vani nodali, ovvero «vani unitari gerarchicamente preponderanti rispetto agli altri vani associati»<sup>224</sup>, che costituiscono «una nodalità spaziale, costruttiva, funzionale che unifica l'intero organismo»<sup>225</sup> divenendo «luogo in cui si concentra l'intenzione espressiva e simbolica del costruttore»<sup>226</sup>. Ma una siffatta cupola può anche essere adoperata per la copertura di vani polari, ovvero vani unitari che possiedono gerarchizzazione massima rispetto ai vani periferici subordinati, «organizzati intorno ad un polo origine di assi equivalenti»<sup>227</sup>, possedendo così «il maggior grado possibile di organicità»<sup>228</sup>. Ulteriori considerazioni in merito verranno effettuate successivamente, in base alle caratteristiche geometriche e statiche dell'apparecchiatura configurata.

Si vuole qui ricordare che la forma cupolata si è storicamente diffusa in area mediterranea anche perché risponde bene alle esigenze climatiche, rappresentando un buon esempio di architettura passiva. Poiché l'incidenza dei raggi solari su una superficie curva emisferica è maggiore rispetto a quella proiettata su un tetto piano o a falde, nel periodo invernale si ottiene una migliore insolazione che favorisce il riscaldamento dello spazio interno, mentre nel periodo estivo, a causa dell'irraggiamento solare zenitale che non permette l'uguale riscaldamento su tutti i punti della superficie curva, «la temperatura della superficie unitaria irradiata si riduce rispetto ad una corrispondente copertura piana, mantenendo più fresco

---

<sup>224</sup> STRAPPA GIUSEPPE, *Unità dell'organismo architettonico. Note sulla formazione e trasformazione dei caratteri degli edifici*, Bari, Edizioni Dedalo, 1995, pag. 126

<sup>225</sup> *Ibidem*

<sup>226</sup> *Ibidem*

<sup>227</sup> *Ibidem*

<sup>228</sup> Ivi, pag. 146



l'ambiente»<sup>229</sup> sottostante, «poiché nelle ore notturne la maggiore superficie a contatto con l'esterno agevola la sottrazione di calore all'interno dell'edificio. Durante il giorno, per la maggior parte del tempo i raggi solari non sono zenitali e quindi, sia in inverno che in estate, con angoli di incidenza diversi, una cupola è irraggiata dal sole diagonalmente. Ciò comporta il fatto che una cupola ha sempre una parte in ombra e una al sole; la differenza di temperatura che si viene a creare tra le due parti genera, all'interno dello spazio sottostante, un movimento d'aria che mantiene più fresco l'ambiente. Inoltre, avendo la cupola un volume coperto maggiore rispetto a una copertura piana equivalente, l'aria calda tende a salire e a stratificarsi in alto lasciando l'ambiente di calpestio più fresco»<sup>230</sup>. Inoltre, riguardo agli aspetti propri della ventilazione la morfologia della cupola, «agevola e intensifica proprio i moti di areazione [...]. Nel periodo estivo, facendo convogliare l'aria all'interno di un edificio attraverso apposite aperture poste sulla sommità della cupola e predisponendo un'adeguata via d'uscita, si generano nell'ambiente moti d'aria particolari dati dalla specifica conformazione arrotondata delle superfici, che aumentano la ventilazione, il raffrescamento e l'espulsione dell'aria esausta. Il passaggio del vento attraverso un lucernario posto sulla sommità della cupola può innescare nell'ambiente sottostante una depressione dell'aria, che viene risucchiata verso la sommità ed espulsa all'esterno [...]. In una copertura a cupola anche l'impatto del vento sulle superfici risulta minore, poiché questo defluisce senza incontrare particolari impedimenti sulle pareti arrotondate. Il vento aumenta la sua velocità al superamento dell'ostacolo, con un maggiore potere di raffrescamento delle superfici, innescando, in tal modo, richiami ed espulsioni di aria dalle zone calde vicine. Durante

---

<sup>229</sup> RUSSO STEFANO, *L'altopiano iranico fonte di civiltà e ispirazione*, Architettura sostenibile, Roma, Gangemi Editore, 2009, pp. 53,54,55

<sup>230</sup> *Ibidem*

il surriscaldamento del lato della cupola irraggiato dal sole, nello spazio sottostante si hanno differenti temperature e ciò oltre a generare, come già detto, un movimento d'aria orizzontale all'interno della calotta, innesca anche dei flussi di ventilazione verticale. Tutti questi fattori confermano che la cupola è un elemento architettonico bioclimatico di rilevante importanza, [...] bellezza e grande efficienza per quanto riguarda il controllo termico ed illuminotecnico»<sup>231</sup>.

Anche in tal caso, ulteriori considerazioni sulla possibilità di bucatura dell'apparecchiatura configurata nel presente studio, verranno effettuate successivamente, in base alle caratteristiche geometriche e statiche di quest'ultima.

---

<sup>231</sup> *Ibidem*

### **III.5.2 Ricerca della tassellazione stereotomica ottimizzata attraverso l'analisi dei metodi di suddivisione strutturale della sfera**

Si ricerca la tassellazione stereotomica ottimale per rispondere all'obiettivo del presente studio attraverso l'analisi approfondita delle possibili definizioni morfologiche derivate dai due metodi di divisione del triangolo minimo caratteristico sferico, descritti nel paragrafo III.4. Dal primo metodo, ossia quello di suddividere il triangolo minimo attraverso una sfaccettatura numerosa del poliedro inscritto alla sfera, definendo una suddivisione da proiettare poi sulla sua superficie, derivano tre tipi di divisione morfologica: la prima riguarda la suddivisione geodetica, la seconda riguarda la divisione duale della geodetica, mentre la terza suddivisione si basa sul nodo reciproco, geometricamente derivato dalle prime due suddivisioni citate.

Dal secondo metodo, ossia quello di suddividere il triangolo minimo con una divisione planare che, proiettata radialmente sulla sfera, determina la tassellazione tridimensionale del triangolo caratteristico minimo sferico, deriva un altro tipo di divisione morfologica caratterizzato dalla tassellazione avente simmetria quinaria.

Di seguito vengono esposti i quattro metodi di suddivisione sferica individuati ai fini di questo studio.

- ◆ DIVISIONE GEODETICA

“Geodetica” si definisce una «linea di minima lunghezza che collega due punti di una superficie e che giace per intero sulla superficie»<sup>232</sup>. Il termine deriva etimologicamente<sup>233</sup> dalla parola *geodesia*, che si riferisce allo studio della forma semplificata della Terra e delle sue dimensioni, termine proveniente dal greco antico γῆ (ghe) “terra” e δαῖσις (daisis)

---

<sup>232</sup> DEVOTO GIACOMO, OLI GIAN CARLO, *Nuovo vocabolario illustrato della lingua italiana*, 2 voll., Milano, Edizioni di Selezione dal Reader's Digest S.p.A. grandi opere, 1991 (I Ed. 1987), vol. I

<sup>233</sup> PIANIGIANI PIETRO OTTORINO, *Vocabolario etimologico della lingua italiana*, 2 voll., Roma, Albrighi & Segati, 1907, consultabile su: <http://www.etimo.it/>

“lottizzazione”<sup>234</sup>, quest’ultimo termine derivato da δαίωμα (daiomai) “dividere”<sup>235</sup>, riferendosi ancora una volta alla ripartizione di una superficie sferica molto simile a quella della Terra.

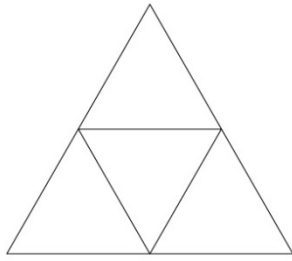
Come si è detto nel paragrafo III.3, una linea geodetica giace su un cerchio massimo della sfera e costituisce quindi la distanza minore tra due punti sulla sua superficie, dunque una sfera geodetica è costituita da una ripartizione della stessa attraverso le linee costituite dai suoi cerchi massimi. Per determinare la suddivisione geodetica della sfera si predilige il gruppo di simmetria icosaedrico poiché, come detto nel paragrafo III.4, costituisce la configurazione più regolare di suddivisione della superficie sferica con maggiori rapporti di similarità tra le molteplici parti di cui è costituita.

La cupola geodetica viene determinata attraverso la suddivisione planare delle facce di un icosaedro regolare ottenuta congiungendo i punti medi degli spigoli di ciascuna faccia e ripetendo tale procedimento per ognuno dei quattro triangoli che si formano attraverso tale metodo di suddivisione, che si definisce “Class I” o “alternate”, quest’ultimo termine conferito da R. B. Fuller per individuare tale metodo come “alternativo” rispetto alla suddivisione allora maggiormente utilizzata denominata “Class II” o “triacon” ottenuta effettuando la copia speculare planare del triangolo minimo, con asse di simmetria coincidente con il lato del triangolo corrispondente alla faccia dell’ icosaedro (FIG.84). Congiungendo i punti medi dei lati del triangolo isoscele planare costituito dal triangolo caratteristico e dal suo simmetrico, e ripetendo tale suddivisione in modo speculare su tutti i sei triangoli in cui è divisa la faccia del poliedro, si ottiene la divisione triacon, così denominata poichè derivante dalla simmetria propria del triacontaedro rombico, di cui il

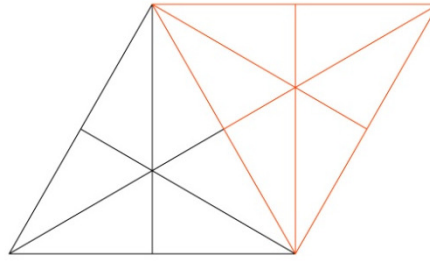
---

<sup>234</sup> MONTANARI FRANCO, *Vocabolario della lingua greca*, Milano, Loescher Editore, 2003, (I Ed. 1995)

<sup>235</sup> *Ibidem*

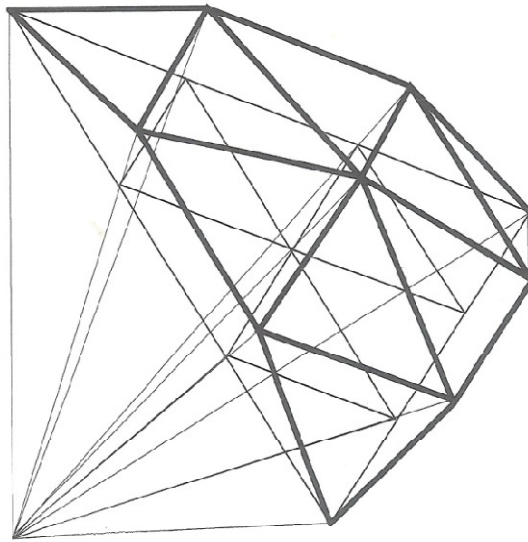


Class I / Alternate

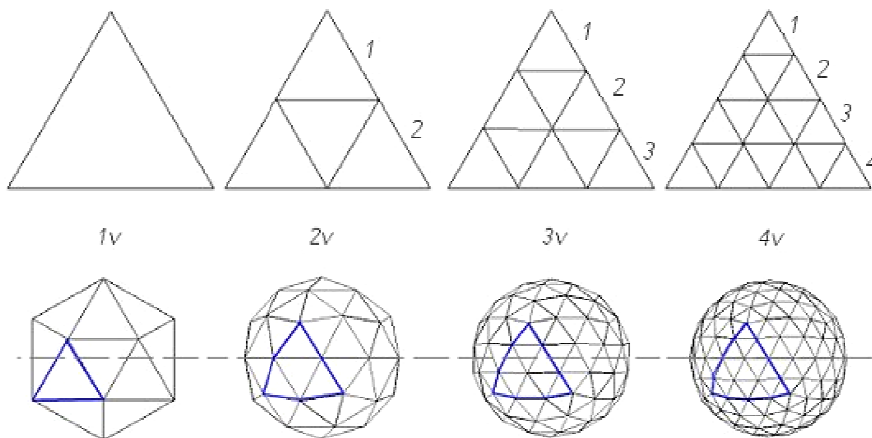


Class II / Triacon

84. R. Gadaleta,  
*Suddivisione della  
faccia triangolare  
dell'icosaedro con  
Class I/Alternate  
e Class II/Triacon,*  
disegno infografico



85. Biagio di Carlo,  
*Proiezione della  
divisione planare  
sulla sfera, 2010, in  
"Strutture geodetiche"*



86. Frequenza  
di suddivisione  
geodetica

triangolo minimo ed il suo simmetrico costituiscono la metà esatta di una delle sue trenta facce rombiche congruenti tra loro. I due metodi sono stati descritti in un lavoro<sup>236</sup> pubblicato dalla NASA di Joseph D. Clinton, il quale ha instaurato con R. B. Fuller una lunga collaborazione professionale; nel 1970, infatti, J. D. Clinton ha lavorato nella School of Technology presso la Southern Illinois University, dove Fuller insegnava.

Successivamente, attraverso proiezione radiale, si pongono tutti i vertici dei triangoli formatisi attraverso uno dei due metodi di suddivisione (Class I o Class II) sulla sfera circoscritta all'icosaedro. I segmenti rettilinei che collegano i vertici tra loro determinano le numerose facce triangolari del poliedro geodetico così ottenuto, i cui vertici giacciono sui cerchi massimi della sfera ad esso circoscritta (FIG.85).

Il numero di divisioni operate sulla faccia del poliedro si definisce "frequenza" di suddivisione della cupola geodetica, usualmente indicata con " $v$ "<sup>237</sup>, che corrisponde al numero di segmenti in cui viene suddiviso lo spigolo del poliedro, quindi, ad esempio, la prima suddivisione della faccia dell'icosaedro è detta frequenza " $2v$ ", poiché lo spigolo del poliedro viene diviso in due segmenti. Chiaramente più alta è la frequenza di suddivisione, maggiore sarà l'approssimazione raggiunta della superficie sferica e più piccole saranno le porzioni in cui la faccia del poliedro viene ripartita. Queste saranno uguali in piano, ma diverse tra loro nella configurazione geodetica in corrispondenza della porzione della faccia corrispondente al triangolo caratteristico minimo, ovvero uno dei sei triangoli rettangoli che si ottengono dividendo la faccia dell'icosaedro secondo le sue mediane (FIG.86).

---

<sup>236</sup> CLINTON JOSEPH D., *Advanced Structural Geometry Studies, Part I: Polyhedral Subdivision Concepts for Structural Applications*, in "NASA Contractor Report", Washington, D.C., National Aeronautics and Space Administration (N.A.S.A.), 1971

<sup>237</sup> DI CARLO BIAGIO, *Strutture geodetiche*, Pescara, DC Books, lulu.com editions, 2010, pag. 21

La geometria poliedrica geodetica è stata utilizzata in architettura al fine di discretizzare la sfera per costruire coperture minimizzando gli elementi strutturali. Studi a riguardo sono stati condotti da Leonardo da Vinci, nelle sue indagini di stereometria citate in precedenza sulla divisione della sfera attraverso la proiezione poliedrica, non solo ottante, ma anche geodetica, come illustra il foglio 67r<sup>238</sup> del *Paris Manuscript G*, intitolato *Del risolvere in piramide il corpo sferico*<sup>239</sup> dove Leonardo si propone di risolvere «in piramidi il corpo sferico, le quali abbino base triangolare, e li loro assi sieno fatti del semidiametro della sua sfera»<sup>240</sup> secondo le parole da lui scritte accanto al disegno di una sfera geodetica (FIG.87).

Questi studi di Leonardo estendono la *Proposizione 17*<sup>241</sup> euclidea, riguardante la divisione dello spicchio sferico attraverso piramidi a base quadrata di area progressivamente decrescente procedendo dalla base fino alla sommità della cupola, al poliedro sferico, dividendo quindi la sfera in piramidi a base triangolare di area simile.

Tale ragionamento è stato successivamente ripreso, ai fini di risolvere la crisi degli alloggi post-bellica, da Richard Buckminster Fuller che ottenne il brevetto<sup>242</sup> nel 1954 (FIG.88) per la costruzione di cupole geodetiche di grande diametro con

---

<sup>238</sup> LEONARDO DA VINCI, *Paris Manuscript (Manoscritto di Francia) G*, 1492-1516, foglio 67 recto, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su “e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza”, Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Firenze, Giunti Barbèra, 1990, proprietà degli originali: Institut de France, Parigi

<sup>239</sup> *Ibidem*

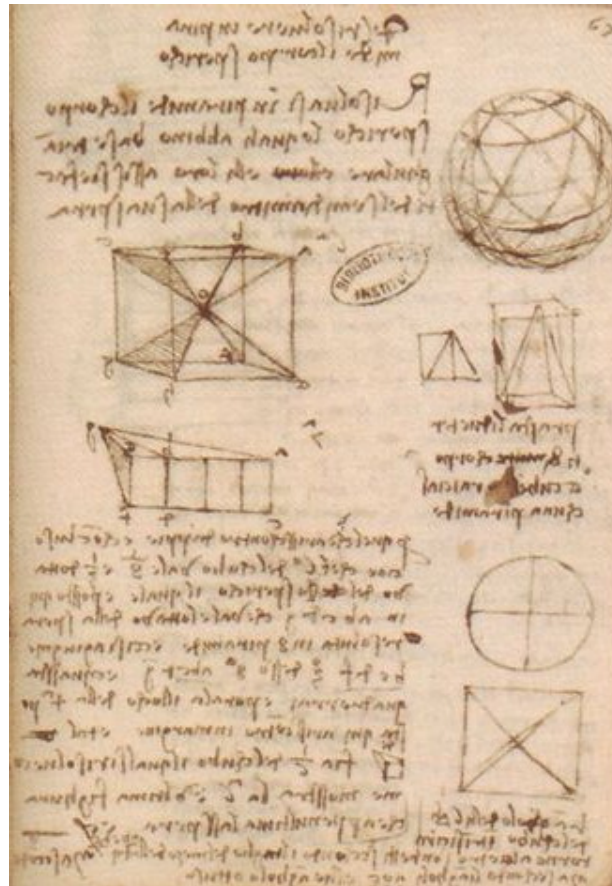
<sup>240</sup> *Ibidem*

<sup>241</sup> COMMANDINO FEDERICO, *De gli Elementi d'Euclide, libri quindici, con gli scholii antichi. Tradotti prima in lingua latina da M. Federico Commandino da Urbino e con Commentarij illustrati trasportati nella nostra vulgare e da lui riveduti. Con privilegio*, in Urbino, Appresso Domenico Frisolino, 1575, libro XII, pp. 244-245, proposizione descritta e commentata nel paragrafo III.2 di questo studio

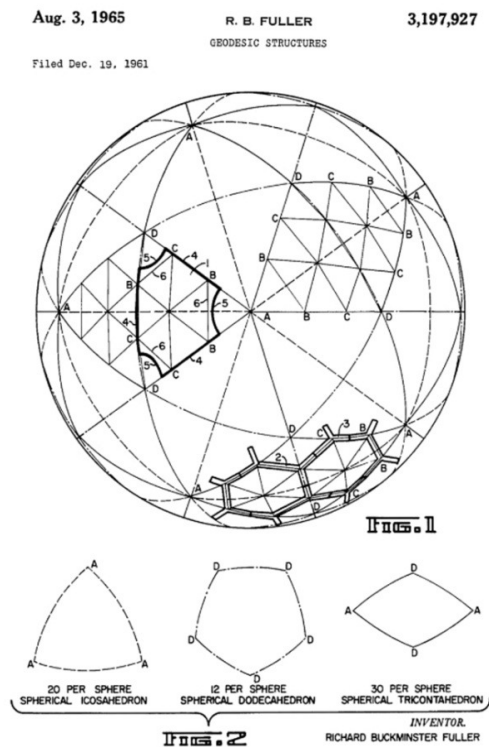
<sup>242</sup> FULLER RICHARD BUCKMINSTER (Assegnatario), Patent US2682235 A, *Building construction*, data di pubblicazione: 29/06/1954, data di registrazione:



87. Leonardo da Vinci, *Del risolvere in piramide il corpo sferico*, divisione sferica secondo linee attualmente definite geodetiche, 1492-1516, in "Paris Manuscript G", foglio 67r, Institut de France



88. R. B. Fuller, *Geodesic structures*, divisione geodetica della sfera, 1954, tavola di brevetto, United States Patent Office



12/12/1951, United States Patent Office, visualizzabile online su <https://www.google.com/patents/US2682235>

piccole aste in alluminio, ottimizzate nel numero e nelle dimensioni rispetto a quelle che occorrerebbero per costruire una cupola in alluminio con metodo tradizionale a parità di luce coperta.

R. B. Fuller realizzò in Europa il primo prototipo di cupola geodetica in cartone impermeabile, in occasione della X Esposizione Internazionale della triennale di Milano svoltasi nel 1954 (FIG.89) e successivamente, nel 1967 realizzò in occasione dell'Esposizione Universale e Internazionale presso Montréal, in rappresentanza del padiglione americano, una sfera geodetica quasi completa in acciaio, avente diametro pari a 76 metri che attualmente ospita un museo (FIG.90). Le morfologie geodetiche si rivelano vantaggiose poichè divengono proporzionalmente più resistenti all'aumentare delle loro dimensioni, inoltre conservano il rapporto massimo fra volume racchiuso e peso, ovvero contengono il volume massimo possedendo il minimo peso, se confrontate con altre strutture costruite con elementi strutturali lineari.

Si vuole qui citare il sistema studiato da Eugène Emmanuel Viollet-le-Duc, che utilizza la geometria poliedrica per suddividere uno spazio voltato di grandi dimensioni in porzioni di dimensioni minori corrispondenti alle facce del poliedro, voltate tradizionalmente in muratura, che collabora con la struttura del poliedro, individuata dai suoi spigoli, realizzata in ferro laminato.

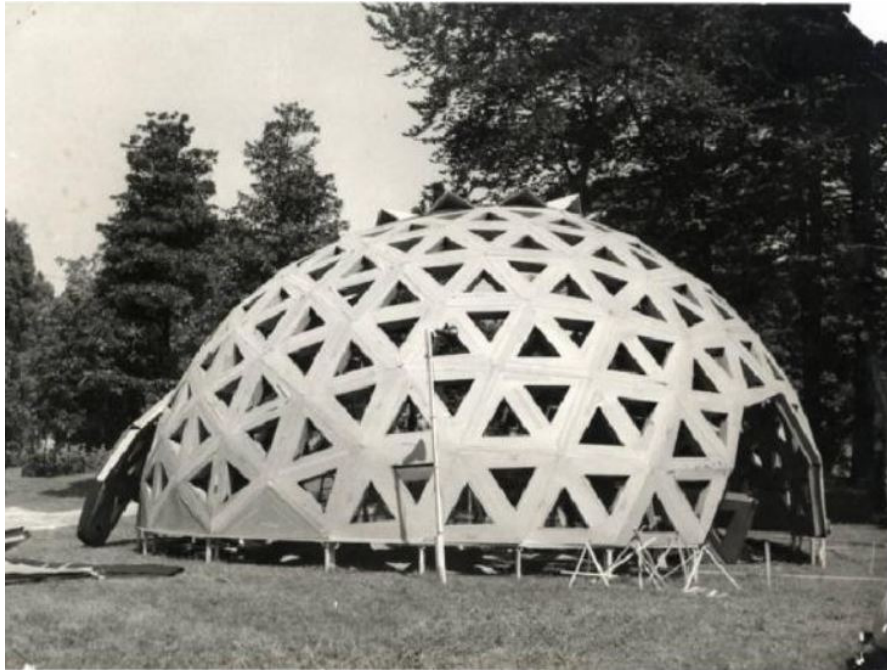
Questo metodo, anche se diverso da quello percorso in questo studio che ricerca la ripartizione in piccoli elementi della superficie sferica costituendo una cupola realizzata con lo stesso materiale o con tipi diversi dello stesso materiale lapideo, è stato analizzato<sup>243</sup> ai fini di comprendere i vantaggi dell'applicazione della geometria poliedrica in architettura,

---

<sup>243</sup> Lo studio del sistema ideato da Eugène Emmanuel Viollet-le-Duc, è stato studiato attraverso la consultazione di:

CAMPA MARIA RITA, *E. E. Viollet-le-Duc: innovazione e tradizione in architettura. Linguaggio formale e coincidenza tra forma e struttura nella*

89. R. B. Fuller,  
Primo prototipo  
di cupola  
geodetica, 1954,  
X Esposizione  
Internazionale,  
Triennale di  
Milano



90. R. B. Fuller,  
*Montréal Biosphère*,  
cupola geodetica,  
1967, Esposizione  
Universale e  
Internazionale,  
Montréal



---

*concezione di volte poliedriche*, Tesi di Dottorato di Ricerca in “Progettazione Architettonica per i Paesi del Mediterraneo” (XX ciclo), Tutor: Prof. Arch. Claudio D'Amato Guerrieri, Facoltà di Architettura, Politecnico di Bari, maggio 2008; CAMPA MARIA RITA, *E. E. Viollet-le-Duc: innovazione e tradizione in architettura. Linguaggio formale e coincidenza tra forma e struttura nella concezione di volte poliedriche*, Roma, Gangemi Editore, 2015

anticipando, nella configurazione in ferro degli spigoli del poliedro, le stutture delle cupole geodetiche successivamente realizzate. Un esempio significativo si può rintracciare nel progetto di E. E. Viollet-le-Duc per una sala concerti con tremila posti a sedere, illustrata nel suo *XII Entretien sur l'architecture*<sup>244</sup>.

◆ DIVISIONE DUALE DELLA GEOMETRIA GEODETICA

Tale suddivisione si ottiene trasformando il poliedro geodetico nel suo duale, ossia un poliedro i cui spigoli sono costituiti dai segmenti che uniscono i baricentri delle facce del poliedro geodetico. Tale poliedro, avente quindi i vertici nel baricentro delle facce del poliedro geodetico, è denominato “poliedro di Goldberg” descritto per la prima volta dall’ingegnere elettrico e matematico statunitense Michael Goldberg nel 1937<sup>245</sup>. Il poliedro di Goldberg costituisce una tassellazione spaziale tridimensionale a simmetria di rotazione icosaedrica, quindi basata sull’esistenza di dodici pentagoni regolari posti nei vertici dell’icosaedro da cui il poliedro deriva, rispettando la caratteristica di Eulero precedentemente descritta, e da esagoni non regolari, la cui deformazione aumenta al variare della frequenza.

I poliedri più semplici di Goldberg, da cui gli altri derivano, sono infatti costituiti dal dodecaedro regolare platonico e dall’icosaedro troncato archimedeo, ottenuto troncando le 12 cuspidi dell’icosaedro regolare ad un terzo della lunghezza del suo spigolo. I poliedri più complessi di Goldberg, ovvero caratterizzati da un numero più alto di facce, possono essere

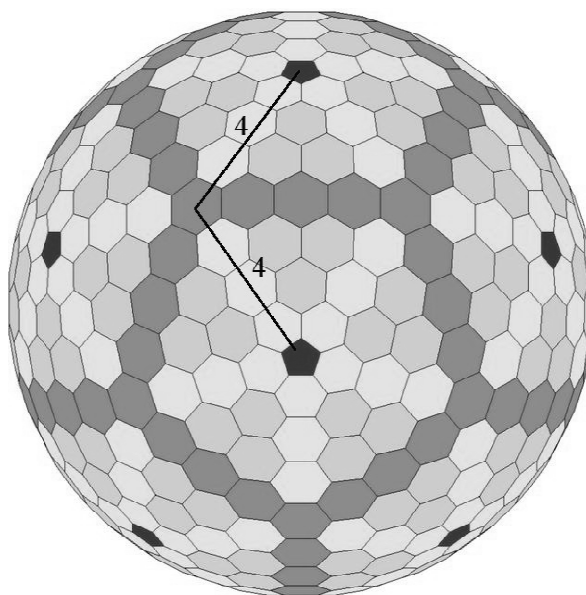
---

<sup>244</sup> VIOLLET-LE-DUC EUGÈNE EMMANUEL, *Entretiens sur l'architecture*, Paris, A. Morel & Cie Libraires-Éditeurs, 1872, Douzième Entretien, foglio posto tra pag. 94 e pag. 95, figura 18, conservato presso la Bibliothèque Nationale de France

<sup>245</sup> GOLDBERG MICHAEL, *A Class of Multi-Symmetric Polyhedra*, Tohoku Mathematical Journal, First Series, vol. 43, 1937 (paper received on March 1936) pp. 104-108



91. R. Gadaleta,  
*Poliedro di  
Goldberg, G(4,4)*,  
rielaborazione  
infografica del  
disegno di  
Tomruen  
per English  
Wikipedia



92. Radome,  
Cupola del  
Ballistic Missile  
Early Warning  
System, 1958-  
1964, RAF  
Fylingdales,  
North Yorkshire  
(UK). Dal libro  
“Lost buildings”  
di J. Glancey,  
2008



descritti attraverso “i movimenti” necessari per collegare due pentagoni eseguendo un percorso detto “chess knight” poiché ricorda il movimento che compie il pezzo del cavallo nel gioco degli scacchi. Il movimento si esegue, partendo da un pentagono, lungo la linea che passa attraverso i punti medi delle facce del poliedro, attraversando  $m$  poligoni in una direzione e dopo aver compiuto una rotazione pari a  $60^\circ$ , attraversando  $n$  poligoni nell'altra direzione che giunge al pentagono successivo. Il conteggio avviene escludendo il pentagono di partenza ed includendo quello di arrivo. Quindi ogni poliedro di Goldberg è denotato attraverso la nomenclatura  $G_V(m,n)$  dove  $G$  sta per Goldberg, il pedice  $V$  indica il numero romano cinque che corrisponde alla simmetria icosaedrica (data dal gruppo icosaedro-dodecaedro) ed  $m$  ed  $n$  sono, come si è appena detto, il numero di facce che separano due pentagoni lungo due determinate direzioni. Di conseguenza un dodecaedro si denota con  $G(1,0)$ , mentre l'icosaedro troncato si denota con  $G(1,1)$ . Poiché sono possibili poliedri di Goldberg a simmetria tetraedrica ed ottaedrica si indicheranno rispettivamente con  $G_{III}(m,n)$  e  $G_{IV}(m,n)$  (FIG.91).

I fullereni, classe di sostanze allotropi molecolari del carbonio, assumono una configurazione corrispondente ai poliedri di Goldberg, disponendo ogni atomo di carbonio nei suoi vertici. Nel 1996 è stato assegnato il Premio Nobel per la Chimica a Robert Floyd Curl, Harold Walter Kroto e Richard Errett Smalley per la scoperta, avvenuta nel settembre del 1985<sup>246</sup>, del fullerene  $C_{60}$  dove gli atomi di carbonio si dispongono nei vertici di un icosaedro troncato, «le cui straordinarie proprietà elettroniche suggeriscono un vasta gamma di usi nei settori delle nanoscienze applicative»<sup>247</sup>. Questa particolare tipologia

---

<sup>246</sup> KROTO HAROLD W., *Symmetry, space, stars and  $C_{60}$* , articolo del 7 dicembre 1996, pubblicato in “Nobel Lecture, Chemistry 1996-2000”, Editor Ingmar Grenthe, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2003, pag.44

<sup>247</sup> Enciclopedia Treccani, consultabile online ad vocem “fullereni”

di fullereni, che ne costituisce la forma più piccola, è stata denominata *Buckminsterfullerene*, in onore di R. B. Fuller che studiò tali forme poliedriche per la costruzione delle cupole geodetiche.

Genericamente con il termine *buckyball* si designano i fullereni di forma approssimativamente sferica o ellissoidale, con il termine *buckytube*, quelli di forma tubolare.

Una delle prime realizzazioni architettoniche di un poliedro complesso di Goldberg, è rintracciabile nella cupola del *Ballistic Missile Early Warning System* (BMEWS, 474L System), una “radome” ovvero una struttura protettiva cupolata per antenne radar costruita dagli Stati Uniti tra il 1958 ed il 1964, durante la Guerra Fredda, presso RAF Fylingdales, la base radar della Royal Air Force sita a Fylingdales nel North Yorkshire (UK). Questa struttura cupolata che corrisponde ad una sfera quasi completa, una delle tre realizzate dette “golfballs”, è stata sostituita tra il 1989 ed il 1992 da una antenna a struttura tetraedrica detta “piramide”, ma è possibile trovare la sua descrizione corredata da documentazione fotografica nel libro *Lost Buildings* di Jonathan Glancey<sup>248</sup> (FIG.92).

◆ DIVISIONE RECIPROCA

La divisione della sfera attraverso il nodo reciproco deriva dalla divisione geodetica e dalla sua duale, ruotando «tutti gli spigoli del poliedro di uno stesso angolo intorno all'asse radiale che passa per il centro dello spigolo. L'angolo in questione potrà variare da 0 a  $\pi/2$  estremi inclusi»<sup>249</sup> poiché il primo valore

---

<sup>248</sup> JONATHAN GLANCEY, *Lost Buildings: Demolished, Destroyed, Imagined, Reborn*, London, Goodman Books, 2008

<sup>249</sup> BROCATO MAURIZIO, MONDARDINI LUCIA, *Un sistema voltato di nuova concezione basato sull'apparecchiatura della volta piana di Joseph Abeille*, in “Atti del Primo Congresso Internazionale di Rete Vitruvio, Rete Interuniversitaria Italiana di Architettura” a cura di Claudio D'Amato, 5 voll., Bari, PolibaPress / Arti Grafiche Favia, 2011, vol. 4 “Il progetto di architettura fra didattica e ricerca”, pag. 1945



origina una sfera geodetica ed il secondo la sua duale costituita dal poliedro di Goldberg. Nella costruzione di tali strutture reciproche, lo spigolo così determinato corrisponde ad un elemento costruttivo lineare (asta) la cui estremità dovrà essere collocata, tramite semplice appoggio oppure attraverso l'incastro, nel punto medio dell'elemento strutturale ad esso adiacente, in modo da formare un circuito chiuso, composto da almeno tre elementi costruttivi, modulo di base ovvero condizione necessaria per l'esistenza di tali strutture in cui gli elementi sono reciprocamente sostenuti (FIG.93).

Gli studi di stereometria svolti da Leonardo da Vinci sulla ripartizione della sfera attraverso divisione geodetica, contenuti nel *Paris Manuscript G, 67r*<sup>250</sup> e succitati nel sottoparagrafo "divisione geodetica", derivano dall'ottima conoscenza dei poliedri che Leonardo aveva ben dimostrato disegnando le strutture lignee degli stessi nel *Divina proportione*<sup>251</sup> di Luca Pacioli. Si pensa che Leonardo si sia servito di modelli lignei per disegnare la struttura portante "vacua" dei solidi, ipotesi verosimile poiché «alcuni documenti coevi della città di Firenze riferiscono che una serie di modelli lignei di poliedri, appartenuti a Pacioli, furono acquistati dal comune per una pubblica esposizione»<sup>252</sup> e molto probabilmente da questi studi è derivato il suo pensiero di costruire coperture utilizzando geometria poliedrica, che permette di avere diverse aste lignee ottimizzate sia nelle dimensioni, aumentando la frequenza di

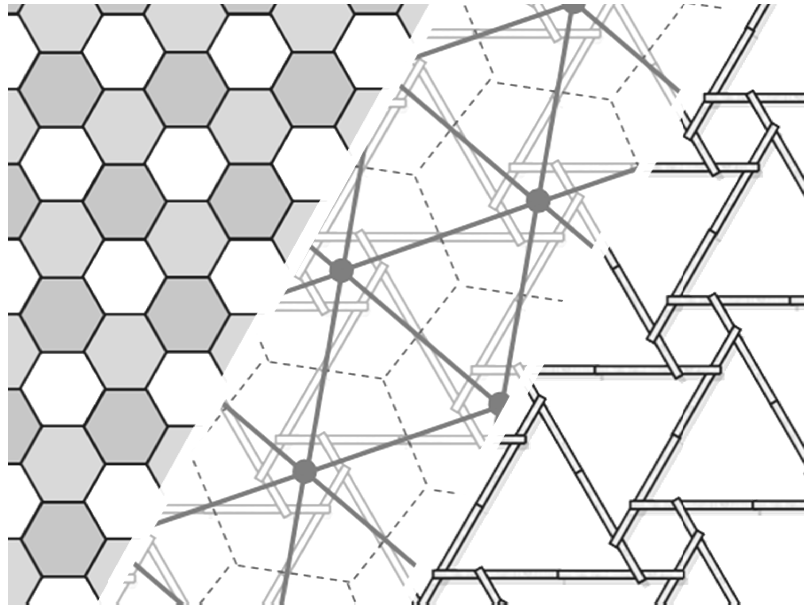
---

<sup>250</sup> LEONARDO DA VINCI, *Paris Manuscript (Manoscritto di Francia) G, 1492-1516*, foglio 67 recto, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Firenze, Giunti Barbèra, 1990, proprietà degli originali: Institut de France, Parigi

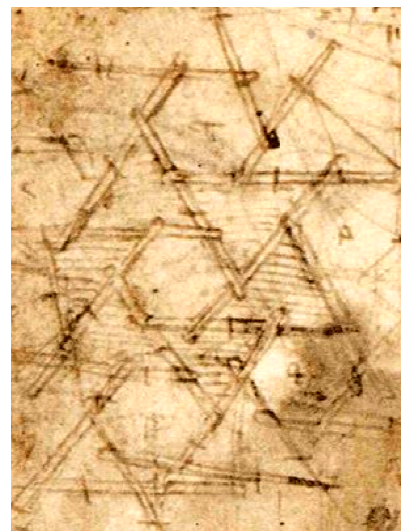
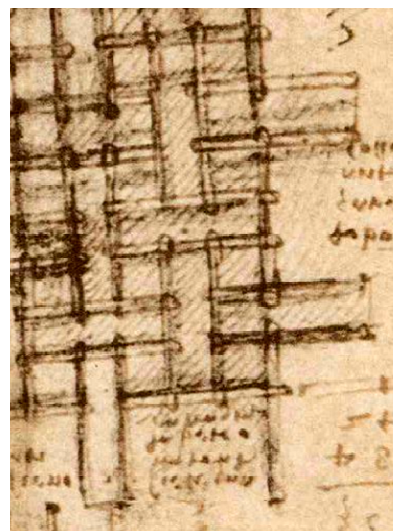
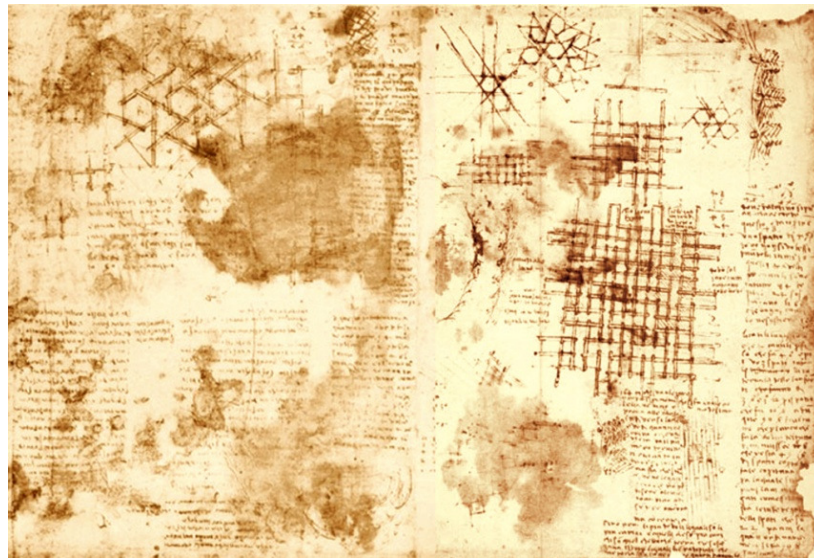
<sup>251</sup> PACIOLI LUCA, *Divina proportione*, Venezia, Paganino Paganini, 1509, opera conservata presso la Biblioteca Ambrosiana di Milano

<sup>252</sup> LIVIO MARIO, *La sezione aurea. Storia di un numero e di un mistero che durava tremila anni*, Ariccia (RM), Biblioteca Universale Rizzoli, 2007, (I Ed. 2003), pag. 203

93. Derivazione della geometria reciproca (maglia triangolare ed esagonale in figura) dalla divisione geodetica (triangolare in figura) e dalla sua duale (esagonale in figura), 2013, in "Reciprocal Frame Structure Made Easy" SIGGRAPH 2013



94. Leonardo da Vinci, Strutture reciproche lignees, 1478-1518, in "Codice Atlantico", foglio 899v, Biblioteca Ambrosiana, Milano



suddivisione, sia nel numero, poichè esse si ripetono ad intervalli regolari, essendo derivate da poliedri regolari, quindi con facce congruenti. Questa affermazione è testimoniata dall'ulteriore ottimizzazione a cui giungono gli studi di Leonardo illustrati nel *foglio 899v* del *Codice Atlantico*<sup>253</sup> dove variando l'eccentricità delle aste rispetto al nodo, ovvero «ruotando ciascun lato della tassellazione dello stesso angolo intorno al suo punto medio»<sup>254</sup> è possibile ottenere una struttura reciproca dove le dimensioni delle aste sono tutte uguali tra loro e dove ogni elemento strutturale sostiene ed è sostenuto reciprocamente dagli elementi adiacenti, determinando sistemi strutturali «leggerissimi et forti»<sup>255</sup> di luce assai maggiore rispetto ai singoli elementi che li compongono (FIG.94). Tali strutture permettono, infatti, la realizzazione di molteplici morfologie ottenendo delle configurazioni finali sorprendentemente stabili e calpestabili, tali da poter sostenere carichi considerevoli. Le strutture reciproche così configurate, erano pensate e progettate per essere provvisorie, facili da montare e trasportare in ambito

---

<sup>253</sup> LEONARDO DA VINCI, *Codex Atlanticus (Codice Atlantico)*, 1478-1518, foglio 899 verso, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su “e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza”, Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano

<sup>254</sup> BROCATO MAURIZIO, MONDARDINI LUCIA, *Un sistema voltato di nuova concezione basato sull'apparecchiatura della volta piana di Joseph Abeille*, in “Atti del Primo Congresso Internazionale di Rete Vitruvio, Rete Interuniversitaria Italiana di Architettura” a cura di Claudio D'Amato, 5 voll., Bari, PolibaPress / Arti Grafiche Favia, 2011, vol. 4 “Il progetto di architettura fra didattica e ricerca”, pag. 1945

<sup>255</sup> Estratto dalla lettera di Leonardo da Vinci a Ludovico Maria Sforza detto il Moro, 1482 circa, *Codex Atlanticus (Codice Atlantico)*, foglio 1082 recto, «1. Ho modi de ponti leggerissimi et forti, et acti ad portare facilissimamente et cum quelli seguire et alcuna volta [secondo le occurrentie] fuggire li inimici, et altri securi et inoffensibili da foco et battaglia, facili et commodi da levare et ponere; et modi de arder et disfare quelli de l' inimico», Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su “e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza”, Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano

militare, dove la velocità costituisce un importante alleato in termini difensivi. La struttura provvisoria progettata ed illustrata da Leonardo nel succitato *foglio 899v*, copre uno spazio di 45 braccia senza puntelli al centro, ed è costituita da 84 travelli o cantili di cui 24 esterni sostengono i 60 travelli interni, di conseguenza ogni cantile esterno dovrà sostenere il peso di 2 cantili e mezzo. I cantili sono lunghi 10 braccia (circa 5.83 metri) sono disposti in lunghezza 4 cantili per un totale di 40 braccia; ci sono poi 3 spazi tra le fronti dei cantili, ciascuno di 3 braccia per un totale di altre 10 braccia. Quindi complessivamente si può coprire uno spazio pari a 50 braccia, una struttura che, come scrive Leonardo, «per l'arco che fa la volta del tutto»<sup>256</sup> ovvero per lo stato collaborativo dell'intera struttura voltata, diminuisce di 5 braccia: ne risultano 45 braccia (circa 26,23 metri) di spazio coperto da tale struttura spaziale in travelli di legno incastrati collaboranti.

Leonardo dimostra, infatti, che la curvatura di tale struttura reciproca, di cui precedenti attestazioni si ritrovano nel *foglio 45* del *Carnet*<sup>257</sup> di Villard de Honnecourt (XIII secolo) riguardo un solaio ligneo piano, incrementa la sua resistenza, come dimostrato nel *foglio 69r* e nel *foglio 71v* del *Codice Atlantico*<sup>258</sup> dove è raffigurato un ponte progettato utilizzando tale principio costruttivo (FIG.95).

Come attesta anche il trattato *I Sette Libri dell'Architettura* di Sebastiano Serlio, dove è illustrato un solaio ligneo piano costituito da quattro travi portanti ad incastro reciproco<sup>259</sup>,

---

<sup>256</sup> *Ibidem*

<sup>257</sup> VILLARD DE HONNECOURT, *Carnet o Livre de portraiture*, Bibliothèque Nationale de France, Parigi, XIII secolo

<sup>258</sup> LEONARDO DA VINCI, *Codex Atlanticus (Codice Atlantico)*, 1478-1518, foglio 69 recto e foglio 71 verso, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano

<sup>259</sup> SERLIO SEBASTIANO, *I Sette libri dell'Architettura*, Libro Primo, Venezia, appresso Gio. Battista et Marchio Sessa fratelli, 1559, pag. 26: «Diversi accidenti vengono alle mani de l'Architetto, come saria questo che volendo,

storicamente le proporzioni delle opere di carpenteria furono condizionate soprattutto dalla difficoltà di procurare travi di grande lunghezza e sufficiente robustezza, un problema che indusse la cultura della costruzione architettonica a maturare esperienza nel progetto e nella realizzazione di strutture lignee con elementi di piccole dimensioni, opportunamente giuntati tra loro; i legni potevano essere così reperiti con cospicuo risparmio di tempo e costi per il cantiere.

Seguendo lo stesso percorso logico di Leonardo, anche R.B. Fuller giunge all'ottimizzazione della cupola geodetica attraverso la progettazione delle strutture tensile-integrity (tensegrity), che seguono la geometria di quelle reciproche variando il nodo costruttivo costituito in questo caso non dall'incastro, ma da cavi posti in tensione, per le quali ottenne il brevetto<sup>260</sup> nel 1962 (FIG.96).

È necessario ai fini del presente studio, affermare che le strutture reciproche di Leonardo erano costituite da aste tutte uguali tra loro, ottenendo la massima ottimizzazione della realizzazione della copertura lignea. Il nodo era costituito dal semplice appoggio delle travi corte, legate le une alle altre per mezzo di corde, come evidenziato nei succitati *fogli 69r e 71v* del *Codice Atlantico*, oppure dall'incastro fra esse, ottenuto praticando «quattro busi» ovvero quattro fori o intagli in corrispondenza delle intersezioni tra le aste lignee, servendosi comunque delle corde per fermarle durante la fase costruttiva,

---

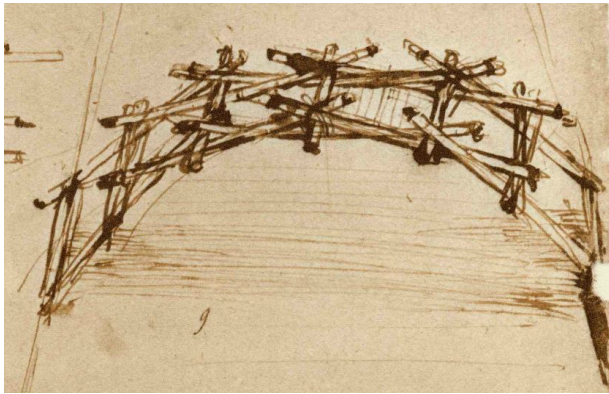
esempio gratia, fare un palco o solaro o tasello, che dir lo vogliamo, il loco del quale sarà de piedi quindici, ma haverà una quantità di travicelli li quali non saran di tanta longhezza, ma gliene mancherà un braccio a ciascuno, nondimeno egli se ne vorrà servire. In tal bisogno non havendo altro legname, in quel loco potrà tenere il modo qui a canto domostrato, & l'opra sua sarà fortissima, mettendo un travicello nel muro da un lato & l'altro capo suspeso, come qui si vede espresso».

<sup>260</sup> FULLER RICHARD BUCKMINSTER (Assegnatario), Patent US3063521 A, *Tensile-integrity structures*, data di pubblicazione: 13/11/1962, data di registrazione: 31/08/1959, United States Patent Office, visualizzabile online su <https://www.google.com/patents/US3063521>

come scrisse Leonardo nel *foglio 899v* del *Codice Atlantico*<sup>261</sup>. La struttura completata possedeva molte aste corte ed una lieve curvatura, fattori per i quali è possibile conservare l'unicità dell'elemento costruttivo invariante. Unicità che è possibile conservare nel caso di disposizione reciproca delle aste derivata da poliedri regolari sferici, dove l'elemento curvo si ripete uguale a se stesso su tutta la superficie sferica, ad esempio la sfera reciproca generata dalla geometria dell'icosaedro è composta da 30 elementi uguali tra loro, quella generata dall'ottaedro può essere composta da 24 elementi uguali tra loro, come praticamente dimostrato dalle sfere lignee *Leonardo da Vinci's Bar Grids* costruite dal matematico e scultore Rinus Roelofs durante il convegno internazionale "Leonardo 2003: Architecture and Mathematics" organizzato dall'architetto Kim Williams fondatrice del Nexus Network Journal, e tenutosi nel 2003 presso la città di Vinci (FIG.97). Nel caso di sfere reciproche di diametro maggiore, costituite da molte aste, quindi originate da un poliedro più complesso, sono necessari più elementi invarianti differenti, così come accade in una sfera geodetica o nella sua duale. Gli studi e le realizzazioni appena citate riguardano costruzioni realizzate attraverso la giunzione di aste, ovvero elementi costruttivi lineari lignei oppure realizzati in alluminio o in acciaio.

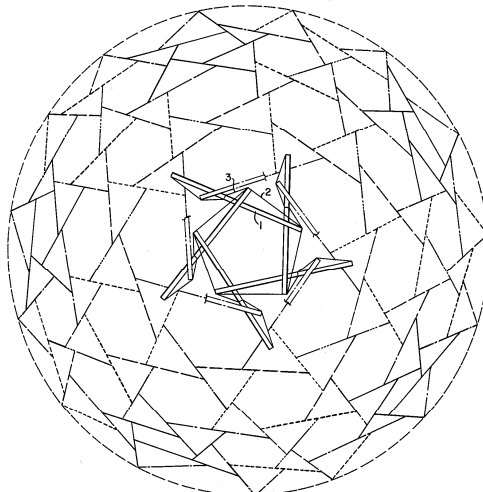
---

<sup>261</sup> LEONARDO DA VINCI, *Codex Atlanticus (Codice Atlantico)*, 1478-1518, foglio 899 verso, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano: «Ciascun di questi legni ha 4 busi, eccetto li 24 che posano in terra. [...] Sien legnami tondi, d'abete o castagni. Debbon s'alzare tutti a un tratto colle lieve. 164 corde v'ha a legare e compresi in mentre che si fa, a un tempo medesimo[...] ma fa che sien bene legati a ciò che, rompendosene alcuni, non abbino a discendere a terra. Ma con certezza si romperà li più deboli, li quali son li più carichi, e quelli che son più carichi, son quelli che toccan terra, che sostengano il tutto; li quali sien raddoppiati, che ne tocca a sostenere tre quarti di cantile».



95. Leonardo da Vinci, Ponte reciproco ligneo, in "Codice Atlantico", 1478-1518, foglio 69r, Biblioteca Ambrosiana, Milano

Nov. 13, 1962 R. B. FULLER 3,063,521  
TENSILE-INTEGRITY STRUCTURES  
Filed Aug. 31, 1959 13 Sheets-Sheet 6



FIGS. 1-10

INVENTOR.  
R. BUCKMINSTER FULLER  
BY  
*Pollock, Johnston, Smyth & Robertson*  
ATTORNEYS.

96. R. B. Fuller, *Tensile-integrity structures*, 1962, tavola di brevetto, United States Patent Office



97. Rinus Roelofs, *Leonardo da Vinci's Bar Grid*, Sfera lignea reciproca, 2003



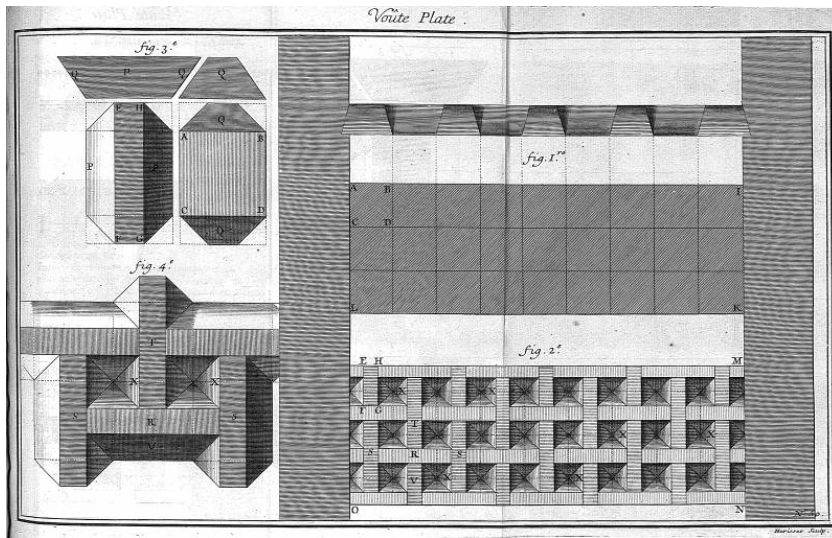
Il sistema costruttivo che traspone la logica della struttura reciproca lignea alla costruzione in pietra da taglio è rappresentato dal brevetto dell'ingegnere francese Joseph Abeille pubblicato nel 1699 in *Machines et inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences*<sup>262</sup> (FIG.98). che prevede l'apparecchiatura reciproca di una volta piana lapidea con un unico concio-tipo stereotomicamente configurato, avente sezioni assiali trapezoidali. All'interno del solaio piano ad orditura bidirezionale, «ogni concio sostiene ed è sostenuto in maniera che la volta entra in funzione esclusivamente a montaggio completo [...]. La volta piana è ottimizzata proprio in base all'unica forma del concio-tipo. La sola conformazione geometrica di un concio garantisce il mutuo sostegno dei blocchi all'interno del sistema voltato».<sup>263</sup>

La volta siffatta presenta due superfici diverse: una maglia planare omogenea e continua all'intradosso, composta dall'accostamento delle facce inferiori quadrate di conci lapidei, ed una maglia formante un motivo ad intreccio tessile all'estradosso, a causa della presenza dei fori piramidali tra i conci. Tale sistema costruttivo è ottimizzato rispetto ai tradizionali sistemi di copertura ed inoltre i fori piramidali alleggeriscono staticamente la struttura. L'estradosso ad opera terminata non risultava visibile, poiché per i vuoti era previsto un riempimento con malta e materiale di alleggerimento per ospitare poi la pavimentazione superiore. In alternativa, Abeille propose di riempire i vuoti con piccoli blocchi lapidei della stessa forma piramidale a base quadrata, posati su malta, in modo tale da rendere continua e calpestabile la superficie di estradosso, il cui motivo intrecciato avrebbe potuto essere

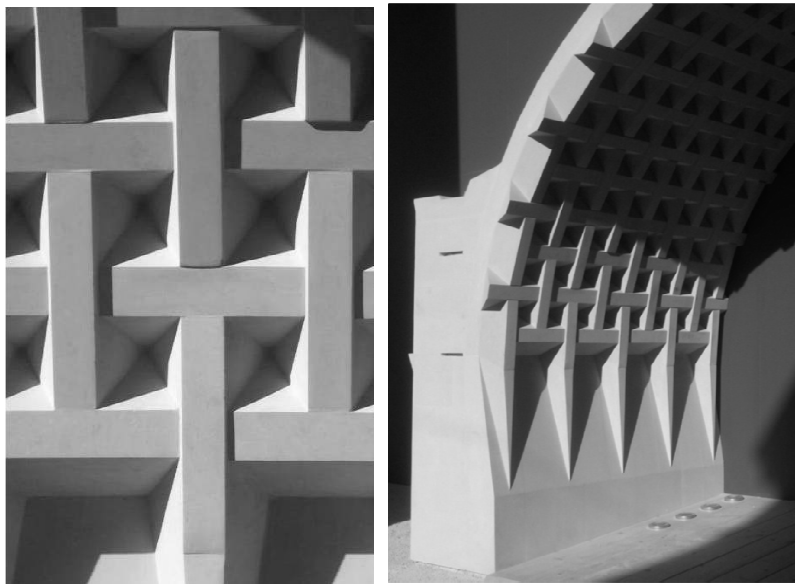
---

<sup>262</sup> *Machines et inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences*, Tome Premier Deouis 1666 jusqu'en 1701, Paris, Chez Gabriel Martin, Jean-Baptiste Coignard, Fils, Hippolyte-Louis Guerin, Rue S. Jacques, 1735, Voute plate par M. Abeille, pp. 159,160,161 e tavola 50

<sup>263</sup> FALLACARA GIUSEPPE, *Verso una progettazione stereotomica. Nozioni di stereotomia, stereotomia digitale e trasformazioni topologiche: ragionamenti intorno alla costruzione della forma*, Roma, Aracne editrice, 2007, pag. 119



98. Joseph Abeille, *Voûte Plate*, 1699, in "Machines et inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences"



99. Claudio D'Amato, Giuseppe Fallacara, *Portale Abeille*, 2006, La Biennale di Venezia, X Mostra Internazionale di Architettura, Venezia, fotografie tratte da "Verso una Progettazione Stereotomica" di G. Fallacara, 2007, pp. 149,151



gradevolmente leggibile se la pietra di questi piccoli blocchi di riempimento, fosse stata di colore differente rispetto a quella dei conci<sup>264</sup>. Nello stesso anno, l'Académie Royale des Sciences pubblica anche il brevetto <sup>265</sup> (FIG.100) del matematico carmelitano Jean Truchet, detto Pere Sebastien, che risolve il riempimento dei vuoti presenti nella volta di Abeille, configurando diversamente il concio lapideo. Quest'ultimo è un solido costituito da una base quadrata inferiore ed una base superiore mistilinea, «composta da quattro archi di cerchio

---

<sup>264</sup> *Machines et inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences*, Tome Premier Deouis 1666 jusqu'en 1701, Paris, Chez Gabriel Martin, Jean-Baptiste Coignard, Fils, Hippolyte-Louis Guerin, Rue S. Jacques, 1735, Voute plate par M. Abeille, pp. 160,161: «Mais par la disposition de ces clavaux leurs quarrés de douelle remplissant toute la surface du plat-fond, les rectangles de l'extrados ne remplissent pas entièrement la surface supérieure, ils laissent des vuides comme X en forme de pyramide quarrés renvrsée; mais loin de nuire ils donnent lieu à quelque agrément: car ces vuides formant de petits quarrés à cette surface, il sera facile de les remplir par d petits pavés de même grandeur assis sur du mortier jetté dans le fond de ces vuides, ce qui formara en tout un compartiment agréable, surtout si la pierre de ces petits pavés quarrés est de couleur differente de celle des clavaux. Il faut observer que le vuides dont on vient d parler paroissent dans cette Figure plus considérables qu'ils ne le feront dans l'exécution, en suivant pour la coupe du clavau les régles qui été prescrites ci-dessus [ma per la disposizione di questi conci i loro quadrati della douelle (intradosso della volta piana) riempiono l'intera superficie della superficie piana, i rettangoli dell'estradosso non riempiono interamente la superficie superiore, questi lasciano dei vuoti come una X a forma di piramide quadrata capovolta; ma danno luogo a qualche approvazione: perché questi vuoti formano piccoli quadrati in questa superficie e sarà facile riempirli con piccoli blocchi della stessa grandezza seduti su malta gettata sul fondo di questi spazi vuoti, che formerà una partizione gradevole, soprattutto se la pietra di questi piccoli lastricati quadrati è di colore differente rispetto a quello dei conci. Si deve osservare che i vuoti di cui abbiamo appena parlato, sembrano in questa figura più considerevoli che in esecuzione, seguendo per il taglio del concio le regole che sono state sopra prescrite]» traduzione italiana a cura dell'autrice R. Gadaleta.

<sup>264</sup> *Machines et inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences*, Tome Premier Deouis 1666 jusqu'en 1701, Paris, Chez Gabriel Martin, Jean-Baptiste Coignard, Fils, Hippolyte-Louis Guerin, Rue S. Jacques, 1735, Voute plate par M. Abeille, pp. 159,160,161 e tavola 50

<sup>265</sup> *Machines et inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences*, Tome Premier Deouis 1666 jusqu'en 1701, Paris, Chez Gabriel Martin, Jean-Baptiste Coignard, Fils, Hippolyte-Louis Guerin, Rue S. Jacques, 1735, Voute plate par le Pere Sebastien, pp. 163,164 e tavola 51

identici disposti in coppia sui lati paralleli del quadrato in modo da formare curve concave e convesse, raccordate da superfici rigate»<sup>266</sup>. In questo modo si garantisce una finale tassellazione continua sia all'intradosso che all'estradosso, semplificando notevolmente il cantiere ed ottenendo un gradevole ornato. Una mirabile sintesi di entrambi i brevetti ed una raccolta di ulteriori soluzioni date dalla variazione morfologica del concio lapideo, è rappresentata nella *planche 31* del trattato <sup>267</sup> di Frézier (FIG.101), dove accanto all'illustrazione del principio statico-costruttivo della piattabanda, sono raffigurate le due soluzioni lignee reciproche di base per coprire planimetrie rettangolari, con nodo tettonico a maglia quadrata, o circolari, con nodo a maglia triangolare. Inoltre sono proposte altre due varianti formali del concio di Truchet che originano altre interessanti configurazioni morfologiche di estradosso. Nel 1769 circa, l'architetto Julián Sánchez Bort costruisce in modo inverso la volta piana lapidea di Abeille, nella torre nord della *Catedral de Santa María* presso Lugo in Spagna<sup>268</sup>, ottenendo quindi l'intradosso "cassettonato" e l'estradosso piano, semplificando e velocizzando il cantiere e garantendo un intradosso ornato che rimanda teoricamente ad una litizzazione del tradizionale cassettonato ligneo.

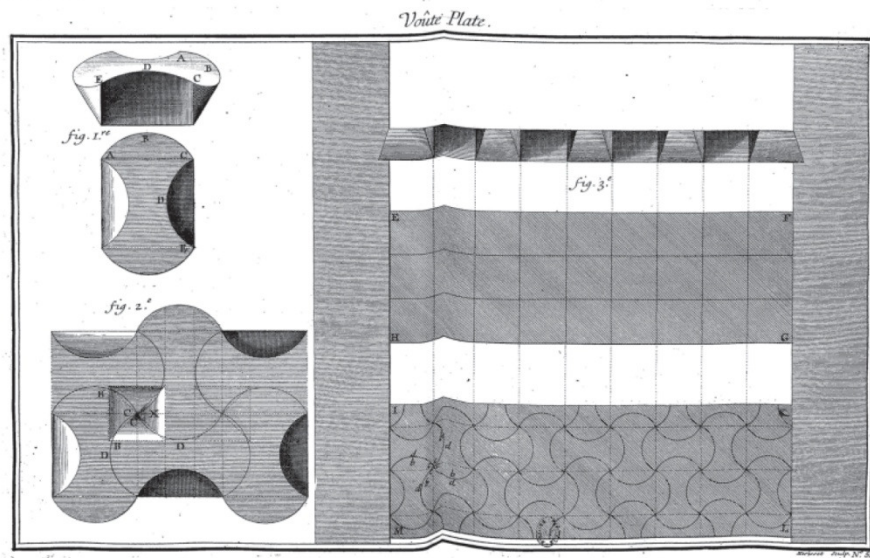
---

<sup>266</sup> FALLACARA GIUSEPPE, *Verso una progettazione stereotomica. Nozioni di stereotomia, stereotomia digitale e trasformazioni topologiche: ragionamenti intorno alla costruzione della forma*, Roma, Aracne editrice, 2007, pag. 122

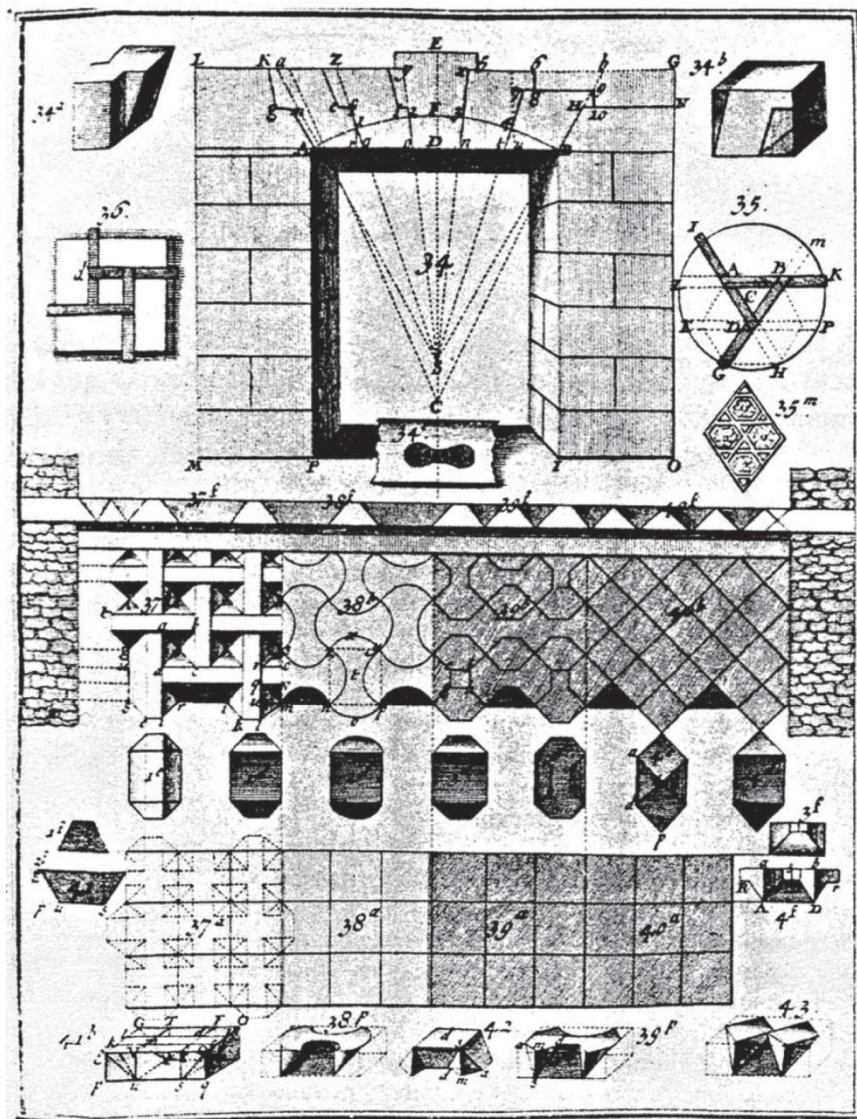
<sup>267</sup> FRÉZIER AMÉDÉE FRANÇOIS, *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des bâtimens civils & militaires, ou Traité de stereotomie à l'usage de l'architecture*, 2 tomi, Strasburgo-Parigi, 1737-1739; ristampato da Jacques LAGET-L.A.M.E., Nogent-le-Roi, 1980, Tome second, Planche 31, pag. 77

<sup>268</sup> ELIANA DE NICHILLO, *Sistemi architettonici archivoltati e cupolati nei secoli XVI-XIX in Spagna. Sequenze, nodi tettonici e tecniche stereotomiche a confronto*, Tesi di Dottorato di Ricerca in "Progettazione Architettonica per i Paesi del Mediterraneo" (XIV ciclo), Tutors: Prof. Arch. Claudio D'Amato Guerrieri, Prof. Enrique Rabasa Diaz, Facoltà di Architettura, Politecnico di Bari, dicembre 2002

100. J. Truchet,  
*Voute Plate*, 1699,  
 in "Machines et  
 inventions  
 approuvées par  
 l'Académie Royale  
 des Sciences"



101. A.F. Frézier,  
*Strutture reciproche  
 ligne e lapidee*,  
 1737-1739, in  
 "La Théorie et la  
 Pratique de la  
 coupe des pierres  
 et des bois",  
 planche 31



Gli studi condotti dal Prof. Claudio D'Amato e dal Prof. Giuseppe Fallacara <sup>269</sup> hanno permesso di teorizzare e sperimentare la deformazione topologica di tale morfologia lapidea reciproca planare in una superficie semicilindrica corrispondente ad una volta a botte, giungendo alla costruzione del *Portale Abeille* (FIG.99), una porzione di volta a botte a tutto sesto con intradosso ad intreccio realizzato attraverso la ripetizione di due tipi di conci lapidei invariati reciprocamente interconnessi, in occasione della X Mostra Internazionale di Architettura svoltasi a Venezia nel 2006. «La pietra utilizzata è stata quella leccese (2200 kg/mc), un calcare sedimentario compatto e fortemente omogeneo di colore bianco/giallo paglierino, proveniente dalle cave di Cursi (Lecce) per un peso totale di circa 10 tonnellate. La lavorazione di tutte le parti componenti (conci-tipo, piedritti e rinfianchi) sono state eseguite con tecniche CAD-CAM (progetto) e taglio assistito CNC (esecuzione), consentendo una razionalizzazione progettuale ed una ottimizzazione esecutiva di altissima precisione. Il montaggio del portale è stato eseguito 'a secco' utilizzando una centina metallica e la precisione esecutiva di tutte le parti componenti ha consentito lo smontaggio ed il ri-montaggio a dimora definitiva dell'opera»<sup>270</sup>. Secondo il principio costruttivo reciproco è stato successivamente progettato e realizzato il *Ponte Truchet*, ponte

---

<sup>269</sup> FALLACARA GIUSEPPE, *Il paradigma stereotomico nell'arte del costruire. Dalla natura sincretica della modellazione digitale alla progettazione/costruzione di elementi architettonici in pietra da taglio*, Tesi di Dottorato di Ricerca in "Progettazione Architettonica per i Paesi del Mediterraneo" (XVI ciclo), Tutors: Prof. Arch. Claudio D'Amato Guerrieri, Facoltà di Architettura, Dipartimento di Scienze dell'Ingegneria civile e dell'Architettura (ICAR), Politecnico di Bari, dicembre 2003

<sup>270</sup> D'AMATO GUERRIERI CLAUDIO, FALLACARA GIUSEPPE, *Archetipi costruttivi dell'architettura in pietra*, in "Città di Pietra/Cities of Stone. Pietre di Puglia. Costruire in pietra portante/Stones of Apulia. To Build load-bearing Stone", La Biennale di Venezia e Sensi Contemporanei, Venezia, Marsilio, 2006, pp. 44, 45. Il "Portale Abeille" è stato esposto in "La Biennale di Venezia, X Mostra Internazionale di Architettura", sezione "Città di Pietra" a cura di Claudio D'Amato Guerrieri, 10 settembre - 19 novembre 2006



obliquo lapideo apparecchiato adoperando il concio di Truchet nuovamente configurato, realizzato a Madrid nel 2007<sup>271</sup>, utilizzando 24 conci invarianti. Estendendo la tassellazione stereotomica lapidea reciproca alla superficie sferica, è stato progettato e realizzato *Sphera*, «il prototipo di una volta sferica, apparecchiata con uno stesso identico concio tratto dal brevetto Abeille, progettata in risposta alla massima semplificazione delle esigenze costruttive. La tassellazione di una superficie sferica con una sola forma geometrica, come è noto, non è possibile, si è pensato quindi di usare i necessari giunti tra i conci come “compensatori” delle irregolarità che consentono al blocco tipo di “chiudere” la superficie sferica: conci identici/giunti differenziati»<sup>272</sup> che assorbono le deformazioni della doppia curvatura sferica.

Il prototipo così ottenuto è detto *nexorade*, dal latino *nexus* “legame, intreccio, connessione”, come si è affermato nel paragrafo I.2.2. Nexors (sing. *nexor*) sono infatti denominati gli elementi strutturali che connessi reciprocamente attraverso il nodo tettonico opportunamente progettato, determinano un sistema costruttivo ad intreccio detto *nexorade*.

Lo studio statico del prototipo, è stato condotto da Maurizio Brocato e Lucia Mondardini che hanno messo a punto un «algoritmo originale per la progettazione di volte sferiche apparecchiata secondo una generalizzazione della maniera di Abeille, per la conseguente analisi meccanica computazionale e per la generazione delle informazioni necessarie alla

---

<sup>271</sup> ETLIN RICHARD, FALLACARA GIUSEPPE, TAMBORERO LUC, *Plaited Stereotomy. Stone Vaults for the Modern World*, Roma, Aracne Editrice, 2008. Il “Ponte Truchet” è stato realizzato durante la Summer School svoltasi presso l'Universidad San Pablo CEU, Madrid, 2007

<sup>272</sup> FALLACARA GIUSEPPE, *Prototipi e temi sperimentali dell'architettura litica*, in “Progettare e costruire: la costruzione. Lezioni ed esercitazioni di Progettazione architettonica per gli studenti del I anno” a cura di Hilde Grazia Teresita Romanazzi, Bari, PolibaPress/Arti Grafiche Favia, 2009. Il prototipo, realizzato in collaborazione con SNBR è stato esposto in occasione del “Marmomacc, Fiera Internazionale di Marmo, Design e Tecnologie”, svoltasi a Verona nel 2008



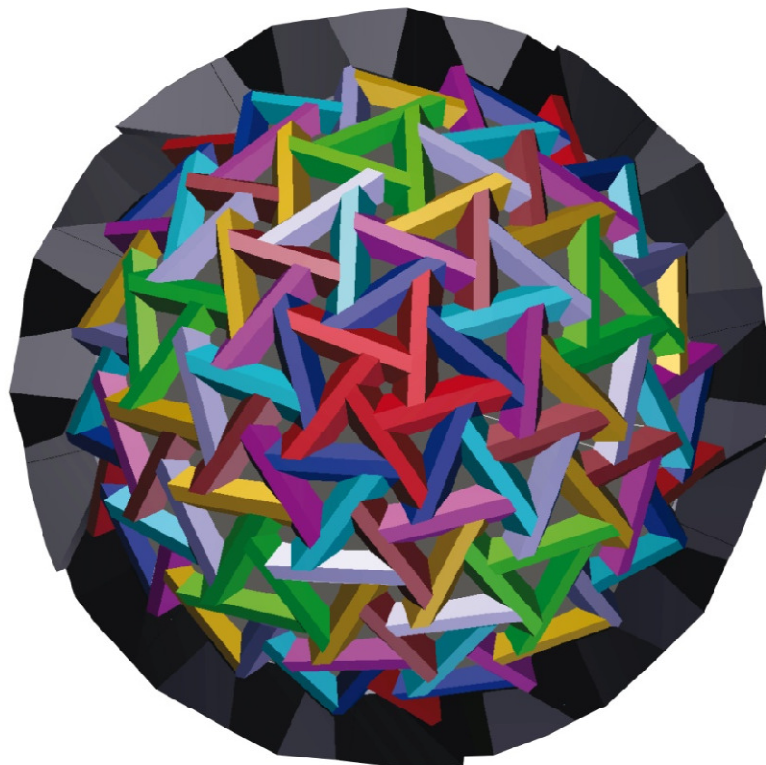
fabbricazione»<sup>273</sup>. La progettazione delle strutture reciproche, infatti, è resa attualmente semplificata grazie ai software di modellazione infografica, che forniscono strumenti utili di configurazione e calcolo di tali strutture spaziali collaboranti. In particolare, oltre all'importante studio di M. Brocato e L. Mondardini sulla configurazione della cupola reciproca lapidea, si citano qui gli studiosi Peng Song, Chi-Wing Fu, Prashant Goswami, Jianmin Zheng, Niloy J. Mitra e Daniel Cohen-Or, che hanno presentato un software avanzato che permette la definizione geometrica del passaggio dalla maglia reciproca bidimensionale a quella tridimensionale, realizzata attraverso il sistema costruttivo con aste e nodi, presentato in occasione di "SIGGRAPH, 40th International Conference and Exhibition on Computer Graphics and Interactive Techniques", svoltasi nel luglio 2013 ad Anaheim (USA)<sup>274</sup>. Lo studio del prototipo originato dal sistema di Abeille, ha condotto Giuseppe Fallacara alla realizzazione della cupola lapidea reciproca *Bin Jassim Dome* (FIG.102), costruita in Qatar nel 2012 per conto della società EDM Paris Projects, posta a copertura dell'hammam progettato dall'arch. Joseph Caspari per il committente Hamad bin Jassim bin Jaber al-Thani, primo ministro del Qatar dall'aprile 2007 al giugno 2013. La cupola, realizzata con la collaborazione di Maurizio Brocato e Lucia Mondardini per lo sviluppo del modello matematico e del calcolo strutturale, dell'impresa edile Mecastone di Luc

---

<sup>273</sup> BROCATO MAURIZIO, MONDARDINI LUCIA, *Un sistema voltato di nuova concezione basato sull'apparecchiatura della volta piana di Joseph Abeille*, in "Atti del Primo Congresso Internazionale di Rete Vitruvio, Rete Interuniversitaria Italiana di Architettura" a cura di Claudio D'Amato, 5 voll., Bari, PolibaPress / Arti Grafiche Favia, 2011, vol. 4 "Il progetto di architettura fra didattica e ricerca", pag. 1943

<sup>274</sup> SONG PENG, FU CHI-WING, GOSWAMI PRASHANT, ZHENG JIANMIN, MITRA NILOY J. E COHEN-OR DANIEL, *Reciprocal Frame Structures Made Easy*, articolo presentato in occasione di "SIGGRAPH, 40th International Conference and Exhibition on Computer Graphics and Interactive Techniques", Anaheim (USA), luglio 2013

102. G. Fallacara,  
*Bin Jassim Dome*,  
Realizzazione (vista  
dell'intradosso) e  
schema di  
montaggio (vista  
dell'estradosso):  
a conci-tipo uguali  
sono assegnati  
colori uguali, 2012,  
Qatar



Tamborero, della società SNBR per il taglio dei conci e dell'azienda Protostyle per la realizzazione della centina costituita da una sagoma in polystyrene, misura circa 6 metri di diametro all'estradosso<sup>275</sup> ed è costituita da 110 conci lapidei trapezoidali, di cui 8 sono i conci-tipo invarianti, la cui faccia esterna di estradosso misura in lunghezza circa un metro. I conci trapezoidali si incastrano nei dieci conci di dimensioni maggiori corrispondenti a dieci grandi porzioni del segmento sferico a due basi in cui è suddivisa la base della cupola, ottenendo complessivamente 120 conci realizzati in pietra calcarea dura di colore "beige fine"<sup>276</sup>.

Questa morfologia strutturale, che costituisce il primo esempio architettonico costruito di cupola reciproca lapidea, si rivela vantaggiosa rispetto ad una cupola tradizionale riguardo il peso, alleggerito attraverso la presenza delle aperture determinate dagli spazi geometrici tra i conci, l'ottimizzazione della compressione degli elementi strutturali data dalla particolare tassellazione reciproca adoperata, la velocità di montaggio avvenuto complessivamente in ventidue giorni, a partire dal posizionamento dei conci di base e della centina, fino alle operazioni finali di pulitura<sup>277</sup>. Inoltre la morfologia reciproca conferisce una alta qualità formale dello spazio cupolato, intrinseca alla sua struttura. La *Bin Jassim Dome* costituisce dunque un esempio concreto del legame presente fra tradizione ed innovazione, determinando un aggiornamento dei metodi progettuali e costruttivi tradizionali attraverso l'originalità progettuale costituita dall'applicazione della deformazione topologica allo spazio sferico e dalle

---

<sup>275</sup> TAMBORERO LUC, *The Bin Jassim Dome*, in "Stereotomy. Stone Architecture and New Research" di Giuseppe Fallacara, Paris, Presses des Ponts, 2012, pag. 122

<sup>276</sup> Le informazioni costruttive sono state tratte dai dati e dal modello tridimensionale gentilmente fornitomi dal Prof. Giuseppe Fallacara, dalle fonti sopra citate (si veda la nota 275), nonché dalle informazioni reperibili online sui siti internet ufficiali della società SNBR e della società EDM Paris Projects.

<sup>277</sup> Si veda la nota 275

tecniche progettuali e costruttive innovative che apportano notevoli vantaggi in architettura.

◆ DIVISIONE SECONDO SIMMETRIA QUINARIA

Differentemente dalle modalità di ripartizione della superficie sferica appena esposte, la divisione secondo simmetria quinaria è originata dalla suddivisione planare, secondo tale geometria, del triangolo caratteristico minimo, portata successivamente sulla superficie sferica attraverso la proiezione radiale delle facce del poliedro su cui essa giace.

Si ottiene quindi la suddivisione della sfera attraverso il poliedro sferico così generato, suddiviso in facce sferiche corrispondenti ai triangoli sferici minimi caratteristici, ripartiti secondo una tassellazione sferica avente simmetria quinaria, poiché il triangolo minimo caratteristico ed il suo simmetrico costituiscono la proiezione sferica corrispondente ad uno dei cinque triangoli isosceli congruenti tra loro in cui è suddivisibile il pentagono attraverso le congiungenti il centro di esso ai suoi vertici, ovvero linee di simmetria quinaria.

Occorre dividere il triangolo minimo caratteristico secondo una tassellazione che sia geometricamente simmetrica rispetto a tali linee, per poter rispettare le regole geometriche di simmetria quinaria proprie della massima divisione sferica in porzioni triangolari minime uguali e simmetriche tra loro, divisione secondo i cerchi massimi derivati dalla corrispondenza duale dell'icosaedro e del dodecaedro sferico, che suddividono la sfera in pentagoni sferici aventi simmetria quinaria, dal latino *quinarius* "quinario" derivato da *quini* "cinque per volta, a cinque a cinque", detta anche simmetria quintupla ovvero di ordine "cinque", *quinque* in latino, analogamente indicata come simmetria pentagonale.

Tali pentagoni sferici sono maggiormente determinabili considerando le porzioni minime triangolari sferiche comprese nel dodecaedro sferico, dove essi sono adiacenti e non sovrapposti, ma essi sono presenti anche nell'icosaedro sferico

seppur in modo sovrapposto, determinando simmetria quinaria.

Il pentagono regolare, infatti possiede simmetria quinaria, ovvero risulta invariante rispetto a rotazioni di  $72^\circ$  intorno al suo centro, dato che attraverso la circonferenza ad esso circoscritta è possibile determinare l'ampiezza degli angoli al centro della circonferenza coincidente con il centro del poligono pentagonale, che sottendono ciascuno dei lati di quest'ultimo, infatti si ha che  $\alpha = 2\pi/5 = 72^\circ$ , dove  $2\pi$  indica la lunghezza della circonferenza goniometrica corrispondente ad un angolo giro ovvero a  $360^\circ$ . Tale risultato è ottenuto attraverso le regole matematiche e geometriche espresse dalla trigonometria, ovvero la misurazione del triangolo a partire dai suoi angoli e dalla circonferenza in cui sono iscritti, dal greco antico τρίγωνον (trígonon) "triangolo" e μέτρον (métron) "misura". «Poiché la circonferenza goniometrica ha raggio unitario, la lunghezza dell'arco e l'ampiezza dell'angolo in radianti, hanno misure espresse dallo stesso numero, quindi se la lunghezza della circonferenza misura  $2\pi$ , l'angolo giro misura  $2\pi$  radianti<sup>278</sup>, ovvero  $360$  gradi [ $^\circ$ ]<sup>279</sup>.

Gli angoli al vertice del pentagono misurano invece  $108^\circ$  motivo per cui non possono costituire una tassellazione planare continua (FIG.104), dato che l'accostamento di tre pentagoni lungo i loro lati, produce un riempimento del piano pari a  $324^\circ = 108^\circ \times 3$ , con un difetto di  $36^\circ$  rispetto ai  $360^\circ$  dell'angolo giro necessari per una tassellazione uniforme del piano. Al contrario i  $324^\circ$  formano correttamente un angoloide tridimensionale, permettendo la tassellazione spaziale uniforme attraverso il pentagono individuata nel dodecaedro platonico, come si è altrimenti detto in precedenza.

---

<sup>278</sup> «Si chiama radiante l'angolo al centro del cerchio goniometrico che insiste su un arco di lunghezza che misura 1» in "La trigonometria" di Massimo Bergamini, Anna Trifone, Bologna, Zanichelli, 2006 (I Ed. 2001), pag. 4

<sup>279</sup> BERGAMINI MASSIMO, TRIFONE ANNA, *La trigonometria*, Bologna, Zanichelli, 2006 (I Ed. 2001), pag. 4





Questo può costituire un limite della figura pentagonale, poiché non adoperata per ricoprire facilmente il piano in modo uniforme attraverso la ripetizione di un solo tassello dato unicamente dalla sua figura, ma può costituire anche un punto di forza a causa delle interessanti configurazioni originate dall'accostamento planare di pentagoni regolari lungo i loro lati. Queste configurazioni, studiate da Albrecht Dürer nell' *Underweysung der messung*<sup>280</sup>(FIG.103), e successivamente da Johannes von Kepler nell'*Harmonices Mundi*<sup>281</sup>(FIG.104), costituiscono geometrie planari costituite dalla ripetizione non periodica delle figure che ricoprono continuamente una superficie, ammettendo spazi tra esse e sovrapposizioni, ma dotate di forte regolarità in piccole porzioni di spazio (periodicità locale), intervallate da irregolarità aperiodiche che su vasta scala si individuano nuovamente come riconducibili alla stessa simmetria regolare quinary individuabile in piccola scala.

Tale proprietà è detta frattale dal latino *fractus* "frammento", ovvero una figura che si ripete creando configurazioni proporzionalmente autosimilari in diversa scala dimensionale, permettendo dunque che una piccola parte della tassellazione conservi le stesse proporzioni del tutto.

Una caratteristica presente ampiamente in Natura, dove la foglia della *felce*, il *broccolo romanesco* e le ramificazioni del *taràssaco* (*Taraxacum*), costituiscono gli esempi più significativi nella forte evidenza della loro precisa geometria, che segue una

---

<sup>280</sup> DÜRER ALBRECHT, *Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebnen unnd gantzen corporen (Istruzioni per la misurazione con riga e compasso di figure nel piano e nello spazio)*, Nuremberg, Hieronymus Andreas Formschneider, 1525, Das Zweites Büchlein (II Libretto), illustrazioni 24, 26, conservato presso SLUB Dresden, segnatura: S.B.616

<sup>281</sup> VON KEPLER JOHANNES, *Harmonices Mundi*, Francoforte, Lincii Austriae, Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof. Excudebat Ioannes Plancus, 1619, Liber II, De Congruentia Figurarum Harmonicarum, conservato presso Smithsonian Libraries, Washington DC, tassellazioni quinary aperiodiche principalmente espresse dalla figura H nel foglio posto tra pag. 58 e pag. 59 e figure Y, Z, Aa, Bb, Ll, tra pag. 58 e pag. 59



disposizione basata su proporzione aurea, particolare requisito della spirale logaritmica che rappresenta la curva secondo la quale crescono molte forme strutturali naturali, di cui la conchiglia del *Nautilus Pompilius* costituisce l'esempio più rappresentativo.

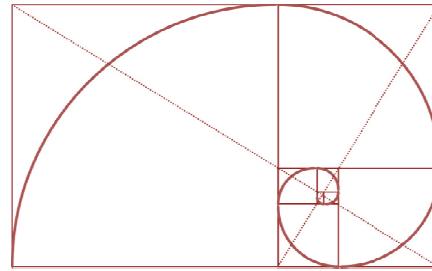
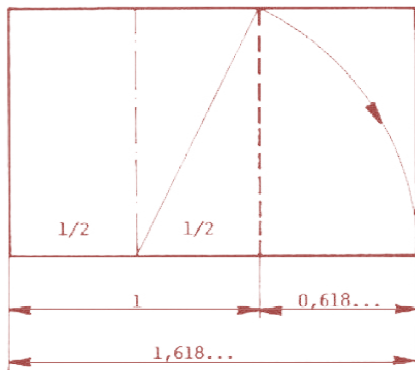
La spirale logaritmica è inscritta in un rettangolo aureo suddiviso in un quadrato ed in un secondo rettangolo ad esso autosimile suddiviso allo stesso modo del primo (FIG.105). Essa si determina congiungendo i punti delle estremità superiori di tutti i segmenti che dividono all'infinito ogni quadrato da ogni rettangolo aureo così determinati. Tutte le diagonali di ogni rettangolo aureo si incontrano nello stesso punto, ove si avvolge all'infinito la spirale logaritmica. Quest'ultima «si può ricavare anche da un triangolo aureo [...] (un triangolo isoscele in cui il rapporto di lunghezza tra i lati uguali e la base è pari a  $\phi$ ) e bisecando un angolo alla base si ottiene un triangolo aureo più piccolo. Continuando indefinitivamente a bisecare gli angoli alla base»<sup>282</sup> dei triangoli così formati «si forma un vortice di triangoli sempre più piccoli»<sup>283</sup> i cui vertici sono collegati dalla spirale logaritmica (FIG.106).

Il triangolo aureo appena descritto corrisponde alla porzione di un pentagono di lato unitario, compresa nei due segmenti di lunghezza pari a  $\phi$  che congiungono un vertice di esso con le estremità del lato ad esso opposto, ovvero la porzione di spazio delimitata da due diagonali del pentagono concorrenti nello stesso vertice. Le cinque diagonali del pentagono che uniscono tutti i suoi vertici compongono la figura detta “pentagono stellato” detto anche “pentagramma” dal greco *πεντάγραμμος* (pentagrammos) ovvero “cinque linee”, simbolo della scuola pitagorica.

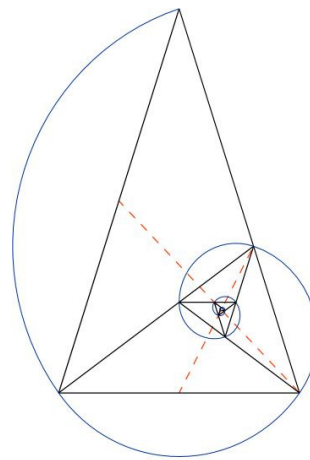
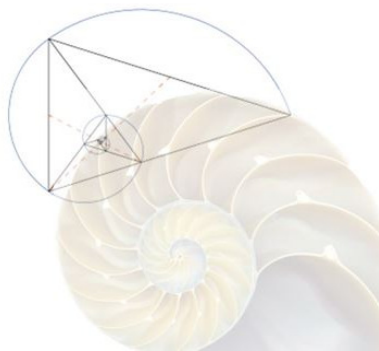
---

<sup>282</sup> LIVIO MARIO, *La sezione aurea. Storia di un numero e di un mistero che durava tremila anni*, Ariccia (RM), Biblioteca Universale Rizzoli, 2007, (I Ed. 2003), pag. 180

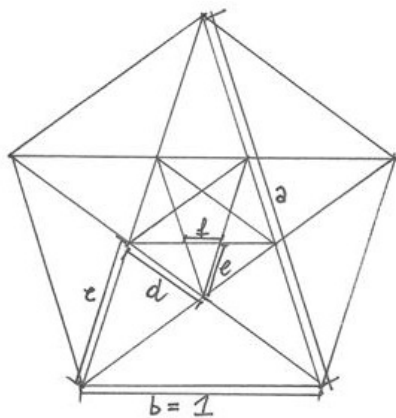
<sup>283</sup> *Ibidem*



105. R. Gadaleta,  
*Rettangolo aureo e spirale logaritmica*,  
rielaborazione  
infografica

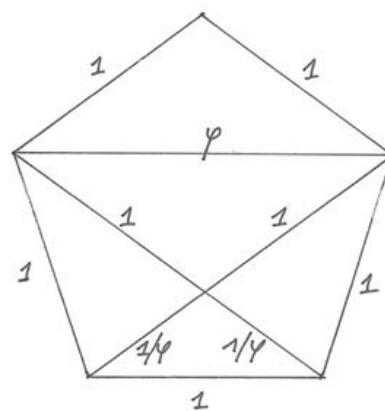
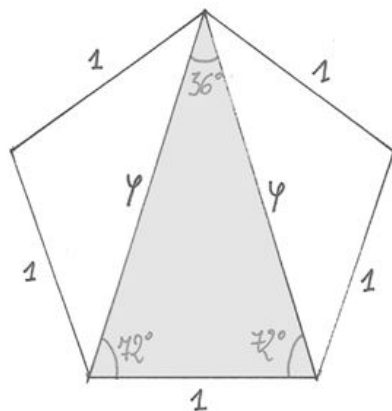


106. R. Gadaleta,  
*Spirale logaritmica e triangolo aureo*,  
rielaborazione  
infografica



$$\begin{aligned} a/b &= \varphi \\ b/c &= \varphi \\ d/c &= \varphi \\ e/f &= \varphi \end{aligned}$$

107. R. Gadaleta,  
*Proporzione aurea nel pentagono*,  
disegni eseguiti  
a mano



L'intersezione delle cinque diagonali crea uno spazio pentagonale centrale autosimile al pentagono di partenza in cui è possibile incrivere un altro pentagramma. Il rapporto tra i segmenti di dimensioni progressivamente ridotte generati da tale procedimento è pari al numero aureo  $\varphi = 1,6180^{284}$ .

I due triangoli congruenti che costituiscono le altre due porzioni risultanti dalla suddivisione del pentagono attraverso il triangolo aureo sono detti gnomoni aurei aventi il rapporto lato base uguale a  $1/\varphi$ , caratterizzati quindi da due lati unitari ed uno di lunghezza pari a  $\varphi$  coincidente con uno dei due lati uguali del triangolo aureo (FIG.107).

Questo excursus è servito a motivare la ragione per cui le tassellazioni a simmetria quinaria, generate dal pentagono, rispondono a regola di proporzione aurea, e costituisce la premessa per la loro descrizione ai fini del presente studio.

Esse costituiscono, infatti, una valida alternativa per ricoprire il piano, vantaggiosa per la composizione molto intrecciata dei tasselli che, trasposta tridimensionalmente nella logica costruttiva lapidea, favorisce un maggiore grado di incastro tra i tasselli o conci che configurano l'apparecchiatura della cupola, determinando fortemente ornato strutturale.

La tassellazione riportata da Kepler nella *figura Aa*<sup>285</sup> dell'*Harmonices Mundi* (FIG.104), costituisce l'esempio più significativo di tassellazione quinaria da lui studiata, sia per la sua maggiore estensione che favorisce la comprensione della regola geometrica che la determina, sia per l'esiguo numero dei tasselli che la determinano pari a 4.

Di questi quattro, tre sono i prototasselli o tasselli fondamentali costituiti dal pentagono, dal pentagramma e dal decagono, ed uno è costituito dal doppio decagono ovvero dall'unione sovrapposta di due decagoni adiacenti.

---

<sup>284</sup> Ivi, pag. 58

<sup>285</sup> VON KEPLER JOHANNES, *Harmonices Mundi*, Francoforte, Lincii Austriae, Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof. Excudebat Ioannes Plancus, 1619, Liber II, De Congruentia Figurarum Harmonicarum, conservato presso Smithsonian Libraries, Washington DC, figura Aa, tra pag. 58 e pag. 59

Roger Penrose, matematico, fisico, cosmologo e filosofo britannico, studiò tale tassellazione descritta da Kepler (FIG.108-A.) e la suddivise ulteriormente<sup>286</sup> ottenendo nel 1974<sup>287</sup> la *tassellazione aperiodica quinaria di Penrose P1*<sup>288</sup> (FIG.108-B.) composta da 4 tasselli, di cui 3 sono prototasselli: il rombo derivato dall'intersezione dei due decagoni formatasi nel doppio decagono disegnato da Kepler, il pentagono ed il pentagramma; un tassello è derivato dal pentagramma, costituito da una porzione di esso.

R. Penrose suddivise ulteriormente questa configurazione in una tassellazione aperiodica avente simmetria quinaria che porta il suo nome, riducendo il numero di tasselli a 2, cosiddetti "kite and dart", ovvero "aquilone e dardo" (FIG.108-C.).

I due tasselli derivano dal rombo aureo contenuto nel pentagono e determinato dallo gnomone aureo e dalla sua copia speculare rispetto all'asse di simmetria dato dalla diagonale del pentagono. La proiezione di un lato del rombo aureo sulla sua diagonale maggiore origina un punto che se unito attraverso due segmenti agli angoli opposti del rombo, determinati dall'unione dei suoi lati sulla diagonale minore, origina i due tasselli freccia ed aquilone (FIG.109).

Aggregando tali figure secondo precise regole di corrispondenza dette "matching rules" tra i lati (ad esempio congiungendo lati contrassegnati da frecce poste nello stesso verso come indica la FIG.110, definite affinché la tassellazione

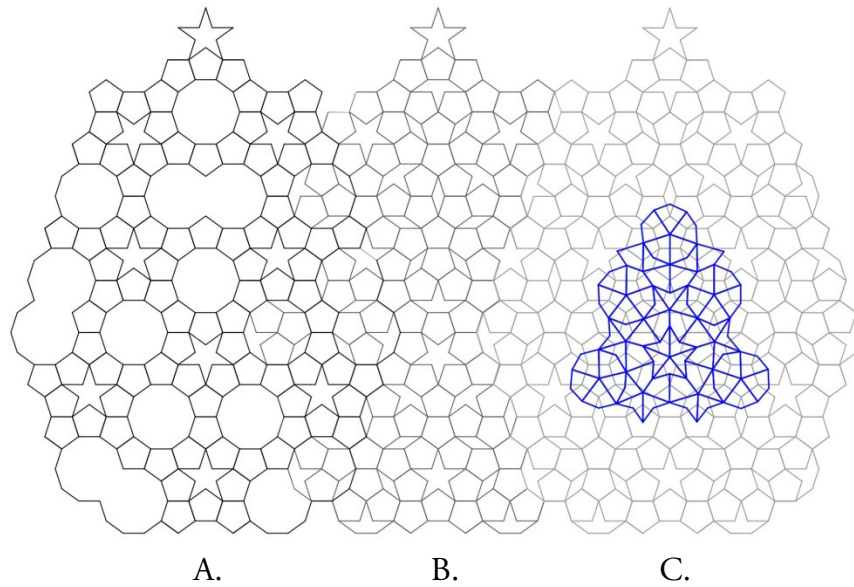
---

<sup>286</sup> PENROSE ROGER, *Pentaplexity*, in "Eureka", n. 39, 1978, pp. 16-32. Articolo ristampato sulla rivista "Mathematical Intelligencer", n. 2, 1979/80, 32-37

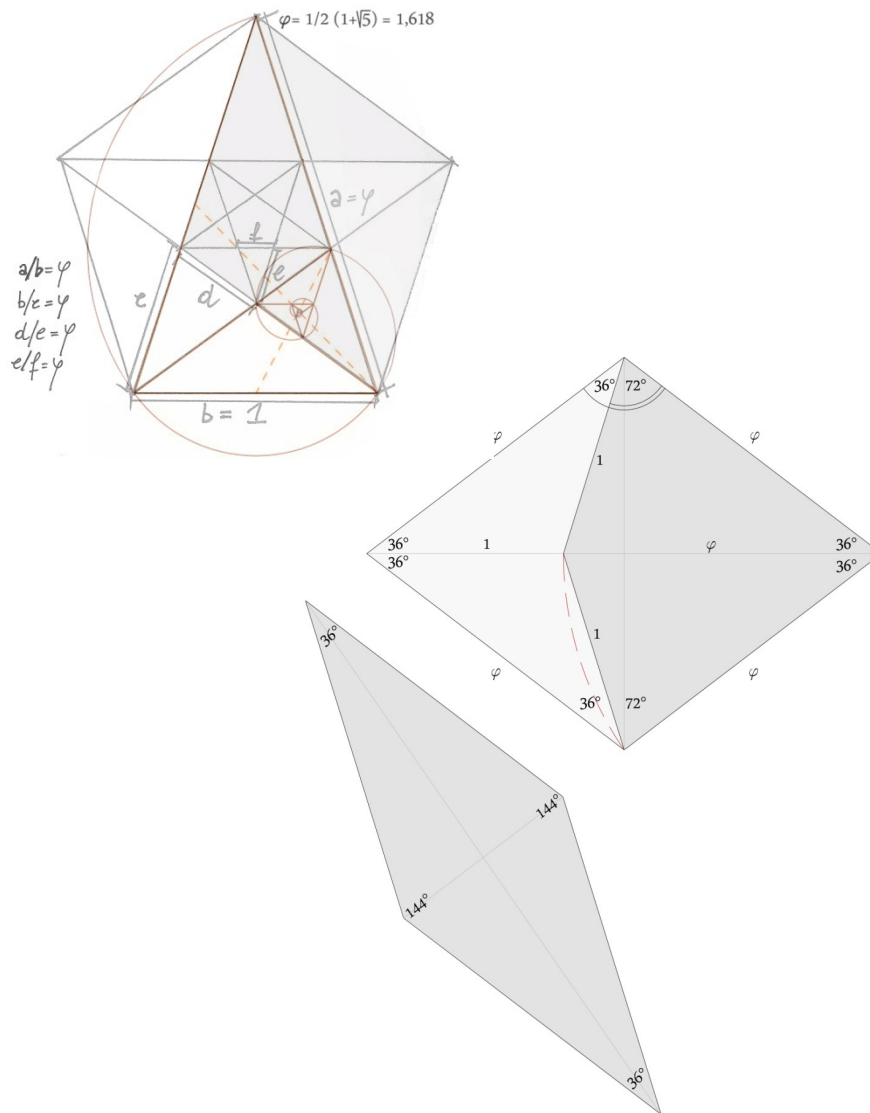
<sup>287</sup> PENROSE ROGER, *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research*, in "Bulletin of the Institute of Mathematics and its Applications", vol. 10, 1974, pp. 266 - 271

<sup>288</sup> FASSINO MAURO, *La progettazione parametrica come strumento di analisi: dai pattern algoritmici decorativi ai pattern performanti. Esempi nei Beni Culturali*, Tesi di Dottorato di Ricerca in "Beni Culturali" (XXIV ciclo), Tutor: Prof. Anna Marotta, Dipartimento DICAS, Politecnico di Torino, giugno 2012, pag. 48

108. R. Gadaleta,  
*Derivazione  
 geometrica delle  
 tassellazioni  
 quinarie e loro  
 corrispondenze,*  
 A. J. von Kepler,  
 B. Penrose P1  
 C. Penrose P2,  
 rielaborazione  
 attraverso  
 sovrapposizione  
 infografica



109. R. Gadaleta,  
*Tassellazione  
 di Penrose e  
 pentagono  
 aureo, disegni  
 infografici*



non diventi uniformemente periodica<sup>289</sup>, si ottiene la *tassellazione aperiodica quinaria di Penrose P2* (FIG.108-C.).

Suddividendo il tassello aquilone attraverso il suo asse di simmetria si ottengono due triangoli aurei che uniti tra loro lungo loro base, generando un tassello detto rombo prolato, dal latino *prolatus* ovvero “allungato”, distinto dal rombo aureo formato dall’unione dei due tasselli freccia ed auilone detto rombo oblato, dal latino *oblatus* ovvero “largo”.

Il rombo prolato e quello oblato, se aggregati secondo precise regole di corrispondenza tra i lati obbedienti a simmetria di rotazione quintupla, costituiscono i due tasselli della *tassellazione aperiodica quinaria di Penrose P3*, da lui descritta<sup>290</sup> (FIG.111).

Le tre tassellazioni di Penrose qui brevemente esposte, ripondono a regola frattale. Tale autosimilarità è ottenuta dalla corrispondenza geometrica delle figure tra loro data dalla proporzione aurea. Poichè il rombo aureo, ovvero rombo “oblato”, diviso lungo la sua diagonale maggiore determina due gnomoni aurei congruenti ciascuno divisibile in due triangoli corrispondenti uno alla metà del tassello “freccia” e l’altro alla metà del tassello “aquilone”, è possibile ripetere la suddivisione indefinitamente anche per la metà della freccia, costituita da uno gnomone aureo di dimensioni minori. Dall’aggregazione radiale di tale triangolo suddiviso in modo autosimile, è possibile inoltre ottenere la configurazione “star” ovvero “stella” poiché originata da cinque frecce aggregate radialmente intorno al centro in cui convergono le loro “punte”.

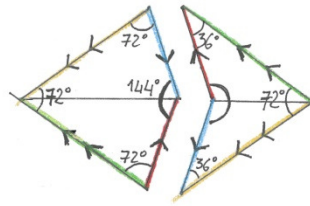
È possibile estendere tale procedimento anche alla metà del tassello “aquilone” composta dal triangolo aureo divisibile in un tassello aquilone ed in un tassello corrispondente a metà della freccia. Dall’aggregazione radiale di tale triangolo così suddiviso in modo autosimile si ottiene la configurazione

---

<sup>289</sup> Ivi, pag.52

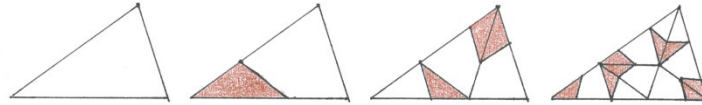
<sup>290</sup> Ivi, pp. 50,51

110. R. Gadaleta,  
*Tassellazione di Penrose P2, disegni eseguiti a mano*

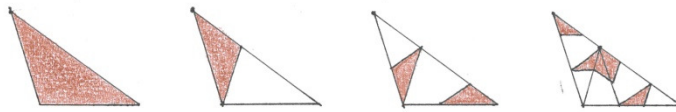


REGOLE AGGREGATIVE (MATCHING RULES)

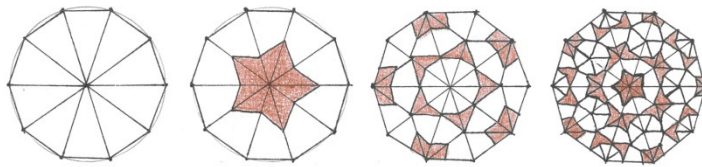
SCOMPOSIZIONE DELLA METÀ DEL TASSELLO "AQUILONE"



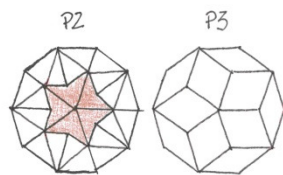
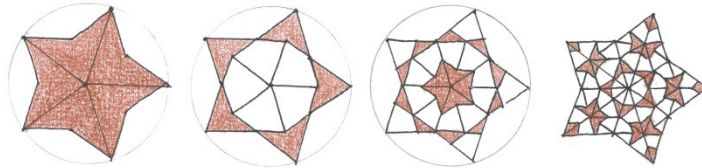
SCOMPOSIZIONE DELLA METÀ DEL TASSELLO "FRECCIA"



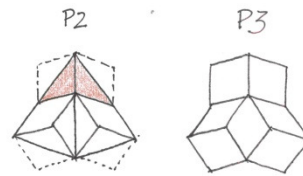
CONFIGURAZIONE "SOLE" E SUA SCOMPOSIZIONE



CONFIGURAZIONE "STELLA" E SUA SCOMPOSIZIONE

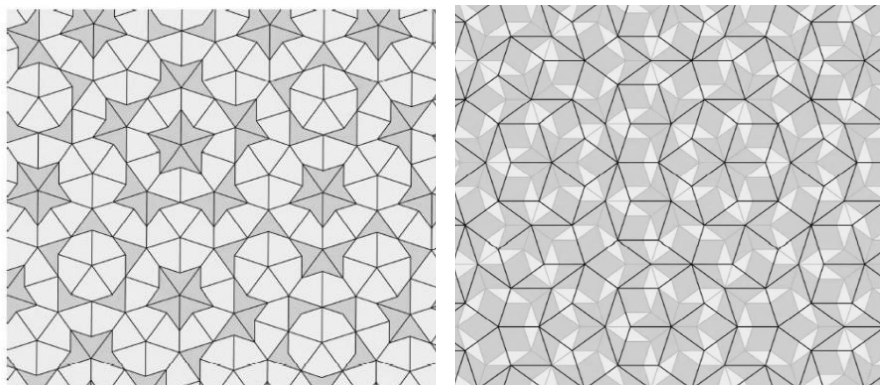


CORRISPONDENZA DELLE TASSELLAZIONI P2 E P3 DI PENROSE



CORRISPONDENZA DELLE TASSELLAZIONI P2 E P3 DI PENROSE

111. Tassellazioni di Penrose P2 (a sinistra) e P3 (a destra). Nella tassellazione P3, è evidenziata la regola frattale di auto-similarità a diversa scala, M. Fassino





“sun”, “sole”, poiché originata da cinque quiloni aggregati radialmente intorno al centro in cui convergono le loro “code” (FIG.110). Nel 1976 il matematico Robert Ammann, individuò una coppia di romboedri aurei che possono tassellare lo spazio tridimensionale senza lacune, secondo simmetria quinaria. Questa tassellazione, che costituisce l’analogo tridimensionale della tassellazione bidimensionale di Penrose P3, produce una struttura aggregativa dei due diversi rombi aurei che determina una configurazione tridimensionale determinata dall’affiancamento ripetuto del triacontaedro rombico aureo, poliedro convesso formato, come si è detto, da trenta facce rombiche congruenti tra loro, e dell’ esacontaedro rombico aureo (rhombic hexecontaedron)<sup>291</sup> poliedro non convesso le cui sessanta facce, congruenti tra loro e costituite da rombi aurei, possono ospitare l’alloggiamento di un triacontaedro rombico, costituendone il “negativo” (FIG.112).

Questa configurazione tridimensionale ad incastro, che avviene secondo precise regole di unione <sup>292</sup>, corrisponde all’aggregazione dei quasicristalli a simmetria icosaedrica, scoperti dal fisico israeliano naturalizzato statunitense Dan Schechtman nel 1984, per questo insignito del Premio Nobel per la Chimica nel 2011 (FIG.113).

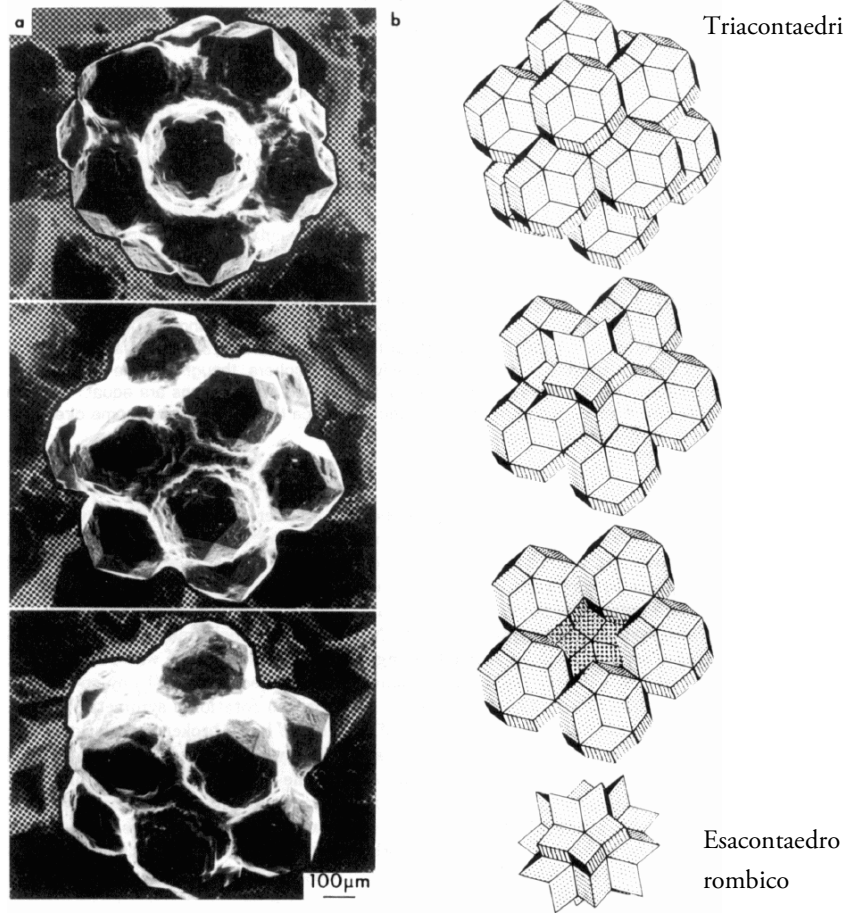
La forma esterna dei quasicristalli, corrispondente alle singole unità dell’aggregazione, vista al microscopio elettronico è costituita infatti da una morfologia icosaedrica, caratterizzata spesso del triacontaedro rombico oppure da sue forme derivate

---

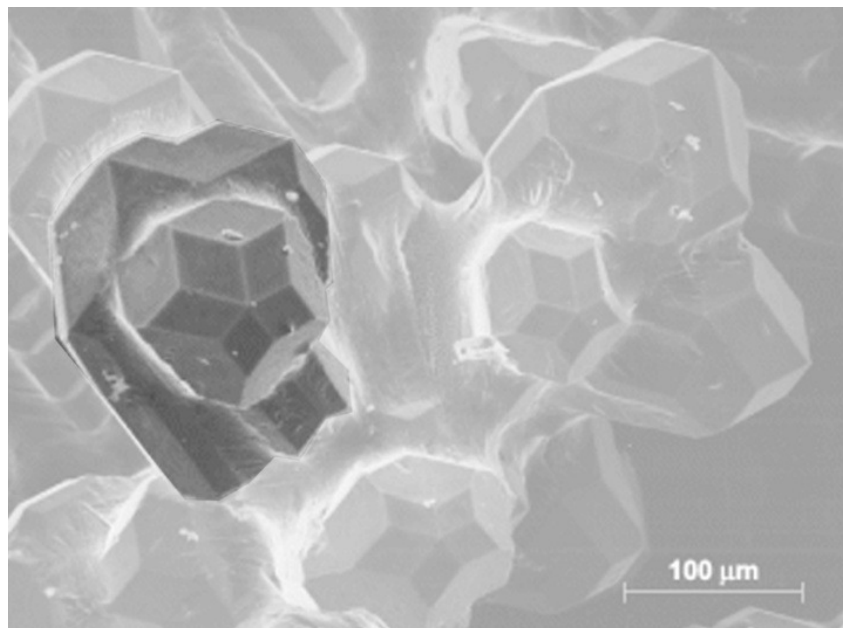
<sup>291</sup> KABAI SÁNDOR, *Inside and Outside the Rhombic Hexecontahedron. A study of Possible Structures with Rhombic Hexecontahedron with the Help of Physical Models and Wolfram Mathematica*, in “Bridges Coimbra. Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture. Conference Proceedings”, University of Coimbra, Tessellations Publishing, 2011, pp. 387-394

<sup>292</sup> MADISON ALEXEY E., *Substitution rules for icosahedral quasicrystals*, Royal Society of Chemistry, RSC Advances, n. 5, 2015, (paper received on August 2014), pp. 5745-5753

112. Aggregazione  
dei quasicristalli  
secondo regole  
di corrispondenza  
fra triacontaedro  
rombico ed  
esacontaedro  
rombico, Sethna  
James P., 1991



113. R. Gadaleta,  
Quasicristallo  
a simmetria  
icosaedrica visto  
al microscopio,  
rielaborazione  
grafica che  
evidenzia la  
morfologia  
triacontaedrica  
con un colore più  
scuro



più complesse o dalle forme più semplici da cui esso è derivato, quali l'icosidodecaedro, l'icosaedro o il dodecaedro.

Tale «morfologia è espressione della loro disposizione atomica interna»<sup>293</sup>, infatti lo schema di diffrazione elettronica ottenuta da un quasicristallo icosaedrico evidenzia la simmetria quinaria della sua struttura atomica derivata dalla simmetria della forma esterna del quasicristallo (FIG.114).

Questo avviene poiché i quasicristalli, diversamente dai cristalli, non hanno disposizione ordinata e periodica degli atomi a conformare il cosiddetto “reticolo cristallino” o “reticolo di Bravais”, dal nome del fisico cristallografo francese Auguste Bravais che per primo lo descrisse nel 1848, costituito da un insieme infinito di punti aventi una disposizione geometrica sempre uguale in tutto lo spazio, ma hanno una disposizione atomica secondo simmetria quinaria, dunque regolare solo in determinate porzioni dello spazio, ma non in ogni parte di esso.

Secondo il teorema di restrizione cristallografica, «poiché i soli tasselli che possono ricoprire tutto il piano in modo periodico sono quelli quadrati (a simmetria quadrupla), triangolari (a simmetria tripla) ed esagonali (a simmetria sestupla), si pensava che non potessero esistere che cristalli a simmetria tripla, quadrupla e sestupla. I cristalli di Schectman causarono un completo disorientamento, perché erano sia altamente ordinati (come i cristalli periodici), sia organizzati secondo una simmetria quintupla (o icosaedrica)»<sup>294</sup> come afferma l'astrofisico Mario Livio.

L'immagine in microscopia elettronica a trasmissione ad alta risoluzione del quasicristallo a simmetria icosaedrica (FIG.115), mostra un modello atomico caratterizzato da simmetria quinaria, sovrapponibile al metodo di tassellazione descritto da

---

<sup>293</sup> KLEIN CORNELIS, *Mineralogia. Prima edizione italiana condotta sulla ventiduesima edizione americana*, Bologna, Zanichelli editore, 2004, pag. 17

<sup>294</sup> LIVIO MARIO, *La sezione aurea. Storia di un numero e di un mistero che durava tremila anni*, Ariccia (RM), Biblioteca Universale Rizzoli, 2007, (I Ed. 2003), pag. 305

Penrose, derivante dalla tassellazione studiata da Kepler, come si è detto. Studi<sup>295</sup> scientifici approfonditi sul modello atomico dei quasicristalli hanno rivelato un reticolo planare, dove gli atomi sono rappresentati attraverso piccoli punti, esattamente coincidente<sup>296</sup> con la tassellazione descritta da Kepler nell'*illustrazione Aa* presente nell'*Harmonices Mundi* (FIGG.116,117).

È sorprendentemente meraviglioso constatare che questa tassellazione quinaria ben proporzionata, ovvero ben connessa dunque armonica, dal greco antico ἀρμονία (armonia) “connessione, concordia, struttura proporzionata, accordo”<sup>297</sup> individuata da Keplero, possa essere oggi osservata nella morfologia strutturale dei quasicristalli, dove la distanza tra i centri di alcune configurazioni atomiche corrispondenti ai tasselli di Kepler, coincide con il numero aureo<sup>298</sup>, concludendo ancora una volta che la Natura costruisce il Bello con il necessario. Queste configurazioni atomiche, infatti, tendono ad «ottimizzare la densità dei raggruppamenti. In altre parole, la struttura quasi-periodica corrisponde a un sistema

---

<sup>295</sup> TSAI AN PANG, GUO JUNQING, ABE EIJI, TAKAKURA HIROYUKI, SATO TAKU J., *Alloys: A stable binary quasicrystal*, in “Nature”, n. 408, pp. 537,538, 30 novembre 2000;

BEELI CONRADIN, NISSEN HANS-UDE, *Electron Microscopy and Surface Investigations of Quasicrystals*, in “Quasicrystals: An Introduction to Structure, Physical Properties and Applications”, di Jens-Boie Suck, Michael Schreiber, Peter Häussler, Berlin, Springer, 2002, pag. 136;

TAKAKURA HIROYUKI, GÓMEZ CESAR PAY, YAMAMOTO AKIJI, DE BOISSIEU MARC, TSAI AN PANG, *Atomic structure of the binary icosahedral Yb-Cd quasicrystal*, in “Nature Materials” n. 6, pp. 58-63, 2007; *Locating atoms in a quasicrystal*, ESRF -The European Synchrotron, articolo disponibile online sul sito ufficiale di European Synchrotron Radiation Facility (ESRF): <http://www.esrf.eu/news/spotlight/spotlight44>, 2007

<sup>296</sup> Una illustrazione è raffigurata sulla locandina della conferenza *La révolution des quasicristaux*, tenuta da Dan Schechtman insignito del Premio Nobel per la Chimica, Grenoble, 17-22 ottobre 2012

<sup>297</sup> MONTANARI FRANCO, *Vocabolario della lingua greca*, Milano, Loescher Editore, 2003, (I Ed. 1995)

<sup>298</sup> *Locating atoms in a quasicrystal*, ESRF -The European Synchrotron, articolo disponibile online su: <http://www.esrf.eu/news/spotlight/spotlight44>, 2007

più stabile, caratterizzato da maggiore densità e minore energia»<sup>299</sup>.

Il reticolo atomico dei quasicristalli così formato, intrecciato secondo simmetria quinaria, ostacola il processo di dislocazione dovuto allo scorrimento delle sue sezioni, impedendo la deformazione del materiale che costituisce, determinandone conseguentemente elevata durezza e resistenza strutturale a rottura<sup>300</sup>.

Questo particolare tipo di tassellazioni, possiede un alto grado morfologico di intreccio della trama, che in architettura favorisce l'ammorsamento dei conci creando una struttura altamente resistente per forma e determinando contemporaneamente forte espressività estetica.

Un esempio di tassellazione architettonica a simmetria quinaria è rappresentato dal muro *Decowall*<sup>301</sup> (FIG.118) progettato per un complesso termale sito a Városliget Park presso Budapest. Il muro, che raggiunge i 5 metri in altezza, è costituito da conci sagomati secondo i tasselli “aquilone” e “fraccia” componenti la *tassellazione aperiodica quinaria di*

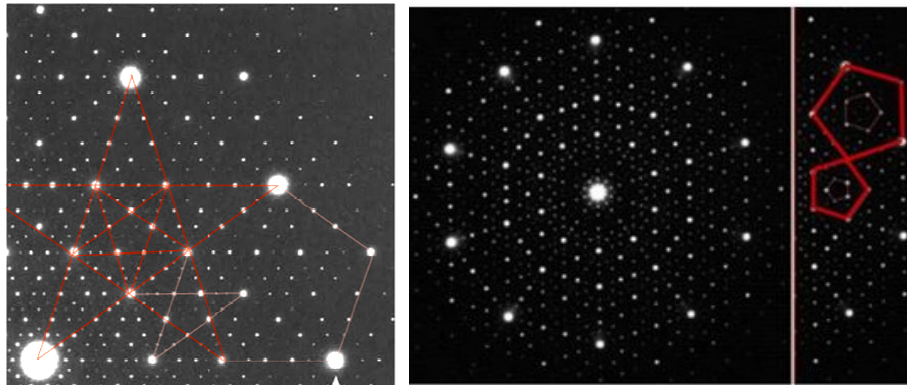
---

<sup>299</sup> LIVIO MARIO, *La sezione aurea. Storia di un numero e di un mistero che durava tremila anni*, Ariccia (RM), Biblioteca Universale Rizzoli, 2007, (I Ed. 2003), pag. 307

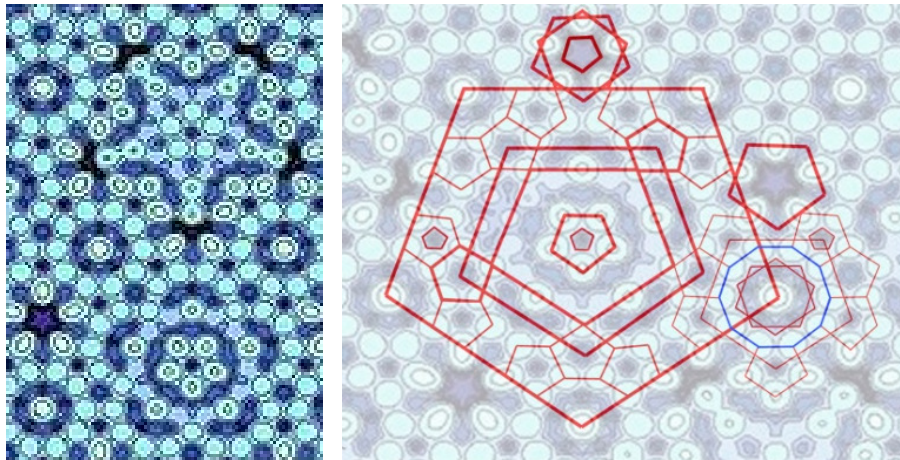
<sup>300</sup> BENEDETTI GIORGIO, *Lezione Strutture solide di simmetria “impossibile”: I quasicristalli*, Enciclopedia Treccani, Treccani Scuola, consultabile online su [http://www.treccani.it/scuola/lezioni/scienze\\_naturali/quasicristalli.html](http://www.treccani.it/scuola/lezioni/scienze_naturali/quasicristalli.html)

<sup>301</sup> FALLACARA GIUSEPPE, *Decowall 2011, Stone-wall Decoration. Thermal Bath Project for the Blind in Városliget Park, Budapest*, Óbuda University e Bulletin, Vol. 3, No.1, 2012, pag. 127-133. *Decowall* è un progetto che nasce all'interno della Tesi di Laurea “Budapest, stone-wall decoration. Thermal Bath Project for the Blind in Városliget Park”, coordinatori: Prof. Arch. Claudio D'Amato Guerrieri, Prof. Arch. Giuseppe Fallacara, collegio docenti: Prof. Arch. Claudio D'Amato Guerrieri, Prof. Arch. Giuseppe Fallacara, Prof. Arch. Gyorgy Radvanyi, Prog. Ing. Domenico Raffaele, studenti: Claudia Cancellieri, Nicola Ladisa, Alessandra Maria Loglisci, Marianna Recchia, Lorenzo Sciascia, a.a. 2010-2011, Dipartimento DICAR, Facoltà di Architettura, Politecnico di Bari. Contributi matematici sulla tassellazione: Prof. Maurizio Paolini e Prof. Alessandro Musesti, dell'Università Cattolica del Sacro Cuore di Brescia. Un prototipo di *Decowall* è stato esposto in occasione del “Marmomacc, Fiera Internazionale di Marmo, Design e Tecnologie”, svoltasi a Verona nel 2011

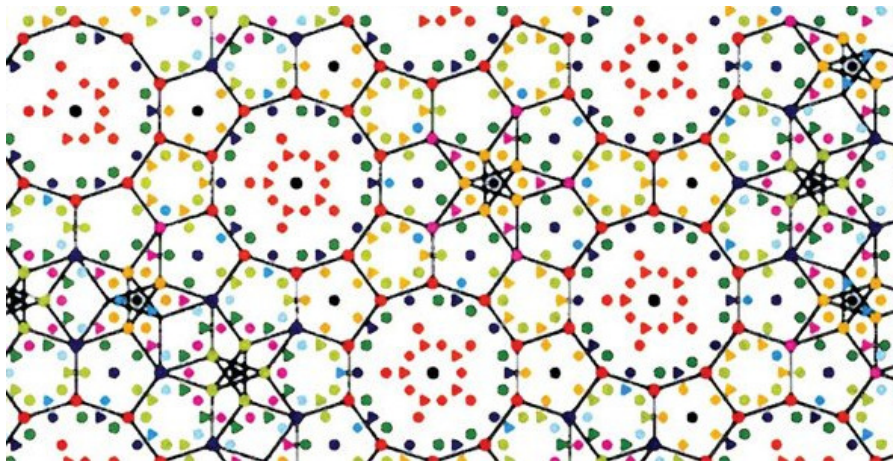
114. Conradin Beeli, Diffrazione elettronica del quasicristallo  $Al_{70}Co_{11}Ni_{19}$ , rielaborazione grafica di R. Gadaleta in figura a sinistra



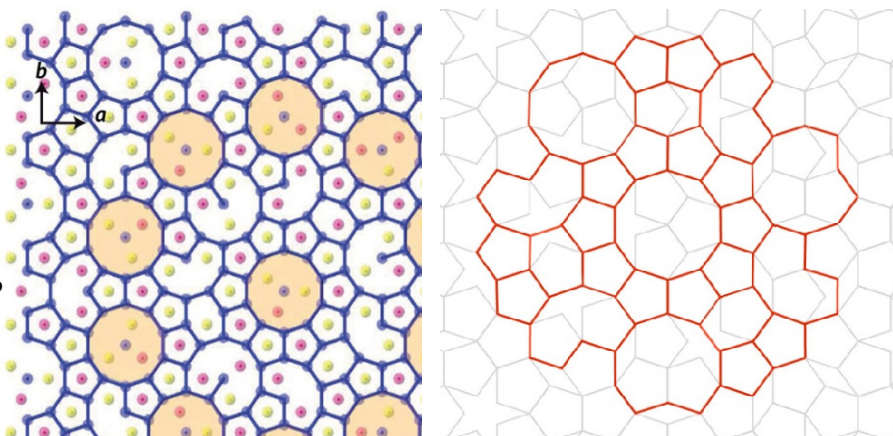
115. Modello atomico del quasicristallo con immagine a microscopia elettronica. R. Gadaleta, rielaborazione infografica (fig. a destra)



116. Disposizione atomica del quasicristallo sovrapponibile alla tassellazione Aa di von Kepler



117. Disposizione atomica quasicris. (foto di P.A. Tsai, J. Guo, E. Abe, H. Takakura, T. Sato, 2000) e disegno infografico di R. Gadaleta (fig. a destra)



*Penrose P2*, che ne costituisce l'apparecchiatura, migliorandone la staticità<sup>302</sup>.

Il miglioramento dell'incastro tra i conci lapidei ottenuto attraverso la loro configurazione poligonale è storicamente individuabile nell'*opus polygonalis* romana (FIG.119), dove la forma irregolare dei conci migliora il comportamento statico del muro, rendendolo più resistente a causa dell'alto grado di ammorsamento degli stessi<sup>303</sup>.

I conci sono distinti sia attraverso il profilo smussato nei pressi del giunto che determina zone d'ombra lungo i loro bordi, sia attraverso l'impiego di differenti litotipi di pietra spazzolata e liscia presenti in loco aventi differenti qualità cromatiche che enfatizzano la diversità dei tasselli costituenti la particolare regola quinaria di tassellazione individuata da Penrose.

Le più antiche tassellazioni a simmetria quinaria aperiodica adoperate in architettura come rivestimento decorativo, sono costituite dalle tassellazioni *Girih* in persiano گره (girih) che significa "nodo", sono infatti caratterizzate da cinque tasselli di forma decagonale, pentagonale, esagonale convessa allungata, esagonale non convessa irregolare (a farfalla) e rombica, decorate con linee dette appunto *Girih* rese più visibili dei contorni degli stessi tasselli. Queste linee sono costruite dall'incontro di due di esse nel punto medio di ogni lato della piastrella che le contiene, formando tra loro un angolo di  $54^\circ$  ( $3\pi/10$ ), creando una texture ovvero una tessitura ad intreccio aperiodica, adoperata storicamente nei rivestimenti delle architetture islamiche come nel caso della decorazione posta sul portale del santuario di *Darb-i Imam* (امام درب امامزاده) sito ad Isfahan in Iran e costruito nel 1453 circa, studiata<sup>304</sup> nel

---

<sup>302</sup> Ivi, pag. 131

<sup>303</sup> Ivi, pag. 130

<sup>304</sup> FLAMMINI EMANUELA, *Sulle tassellazioni di Penrose*, Sintesi della Tesi di Laurea Magistrale in Matematica, Università degli Studi Roma Tre, Facoltà di Scienza M. F. N., relatore: Prof. Andrea Bruno, a.a. 2006-2007, febbraio 2008, pag.3



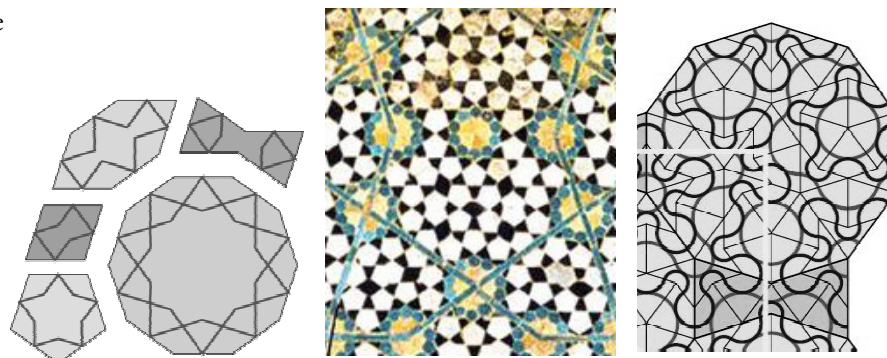
118. G. Fallacara,  
*Decowall*, 2011



119. Opus  
polygonalis  
romana



120. Tassellazione  
Girih e studio di  
Peter J. Lu (terza  
fig. a destra)



2007 da Peter J. Lu studente dell'Università di Fisica di Harvard e dal Prof. Paul Steinhardt, e scomposta nei tasselli di R. Penrose<sup>305</sup>, dimostrando l'antica origine di tale geometria (FIG.120).

Paul Steinhardt e Luca Bindi hanno individuato<sup>306</sup> il primo campione naturale di quasicristallo di icosaedrite  $Al_{63}Cu_{24}Fe_{13}$ , quindi non sintetico, in un frammento di roccia risalente a circa 4,5 miliardi di anni fa, conservato presso il Museo di Storia Naturale dell'Università degli Studi di Firenze, rinvenuto nel 1979 a Khatyrka nella regione di Chukotka in Russia. Nel quasicristallo «sono state individuate inclusioni di stishovite, un polimorfo del biossido di silicio (quarzo) che si forma solo a pressioni elevatissime, superiori rispettivamente ai 10 gigapascal e ai 1500 kelvin, condizioni che possono determinarsi in crateri da impatto di meteoriti o in profondità sotto la crosta terrestre. L'analisi mediante spettrometria di massa degli isotopi di ossigeno presenti nella roccia, ha permesso di stabilire che la sua origine è extraterrestre»<sup>307</sup>.

Una recente pubblicazione<sup>308</sup> afferma che il quasicristallo può essere originato da uno scontro di asteroidi avvenuto nello spazio. Questi studi possono rivelare particolari interessanti sull'origine della Terra e sulla sua composizione.

Inoltre le proprietà fisiche e chimiche dei quasicristalli come la bassa conduttività termica, la buona resistenza a deformazione,

---

<sup>305</sup> J. LU PETER, STEINHARDT PAUL, *Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture*, in "Science", Vol. 315, Issue 5815, 23 febbraio 2007, pp. 1106 -1110

<sup>306</sup> BINDI LUCA, EILER JOHN M., GUAN YUNBIN, HOLLISTER LINCOLN S., MACPHERSON GLENN, STEINHARDT PAUL J., YAO NAN, *Evidence for the extraterrestrial origin of a natural quasicrystal*, in "PNAS", Vol. 109 n. 5, dicembre 2012, pp. 1396 -1401

<sup>307</sup> BENEDETTI GIORGIO, *Lezione Strutture solide di simmetria "impossibile": i quasicristalli*, Enciclopedia Treccani, Treccani Scuola, consultabile online su [http://www.treccani.it/scuola/lezioni/scienze\\_naturali/quasicristalli.html](http://www.treccani.it/scuola/lezioni/scienze_naturali/quasicristalli.html)

<sup>308</sup> BINDI LUCA, LIN CHANEY, MA CHI, STEINHARDT PAUL J., *Collisions in outer space produced an icosahedral phase in the Khatyrka meteorite never observed previously in the laboratory*, in "Scientific Reports", n. 6, 8 dicembre 2016, (paper received on September 2016)

a logoramento, alla corrosione ed all'ossidazione, possono fornire nuove risposte dal punto di vista del comportamento vantaggioso dei materiali.

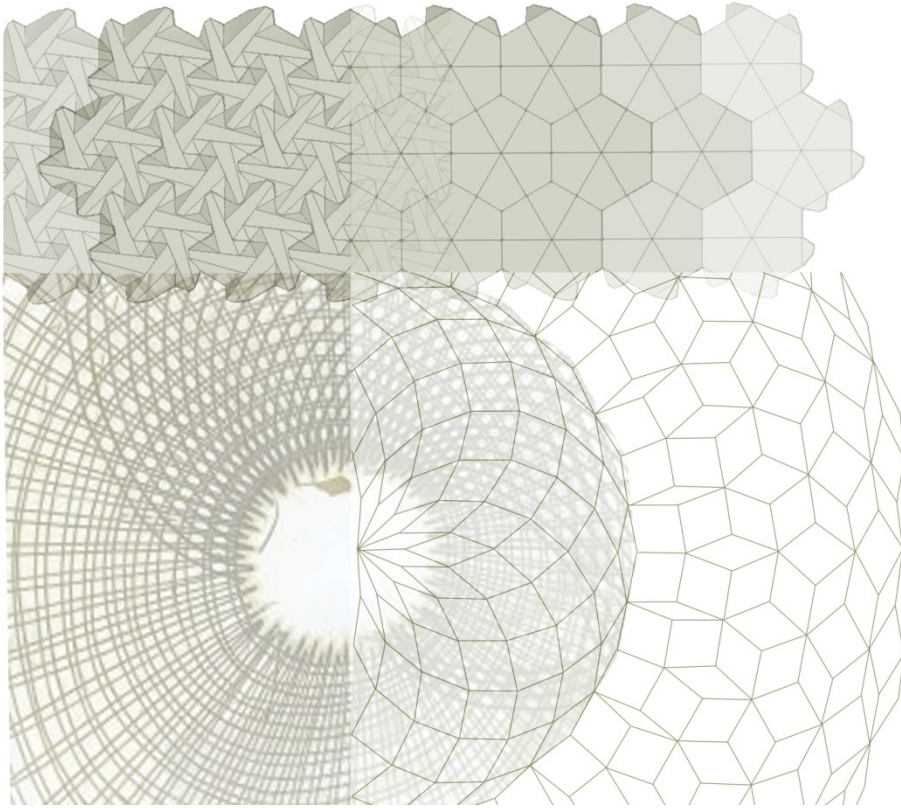
Nel 1989 Ludwig Danzer a partire dalle scoperte sui quasicristalli come egli afferma in un suo scritto dove presenta il suo lavoro<sup>309</sup>, ha individuato una tassellazione quinaria tridimensionale, analoga alla tassellazione planare di Penrose.

Essa si basa su 4 tasselli fondamentali costituiti da 4 tetraedri che si aggregano nello spazio secondo precise regole di corrispondenza, costituendo una tassellazione tridimensionale aperiodica a simmetria quinaria, che copre continuamente lo spazio, senza lacune né sovrapposizioni descritta nel capitolo IV.

Concludendo è possibile affermare che la trasposizione di questo tipo di tassellazione a simmetria quinaria in architettura possiede notevoli vantaggi, sia strutturali, poiché migliora l'ammorsamento dei conci-tasselli, generando una trama fortemente intrecciata dunque resistente, sia formali, poiché in questo tipo di tassellazioni proporzionate secondo regola aurea, l'armonica composizione geometrica ed il particolare disegno dell'intreccio, costituiscono un ricamo fortemente espressivo.

---

<sup>309</sup> DANZER LUDWIG, *Three-dimensional analogs of the planar Penrose tilings and quasicrystals*, in "Discrete Mathematics", n. 76, 1989, pp.1-7 (paper received on October 1988)



120B. R. Gadaleta,  
*La tettonica  
dell'intreccio,*  
relazione determinata  
dal nodo organico,  
tra l'apparechiatura  
lapidea reciproca  
(in alto), l'intreccio  
tessile del cestino in  
paglia viennese (in  
basso a sinistra) e la  
tassellazione quinaria  
di Penrose (in basso  
a destra), disegno  
infografico.



### **III.5.3 Primo dimensionamento della cupola**

Per poter stabilire quale dei quattro metodi di tassellazione sferica appena esposti ottimizza l'apparecchiatura lapidea, quindi per poter individuare il numero minimo dei conci-invarianti in rapporto al diametro della cupola ed alle dimensioni dei conci, occorre effettuare un primo calcolo dimensionale della stessa.

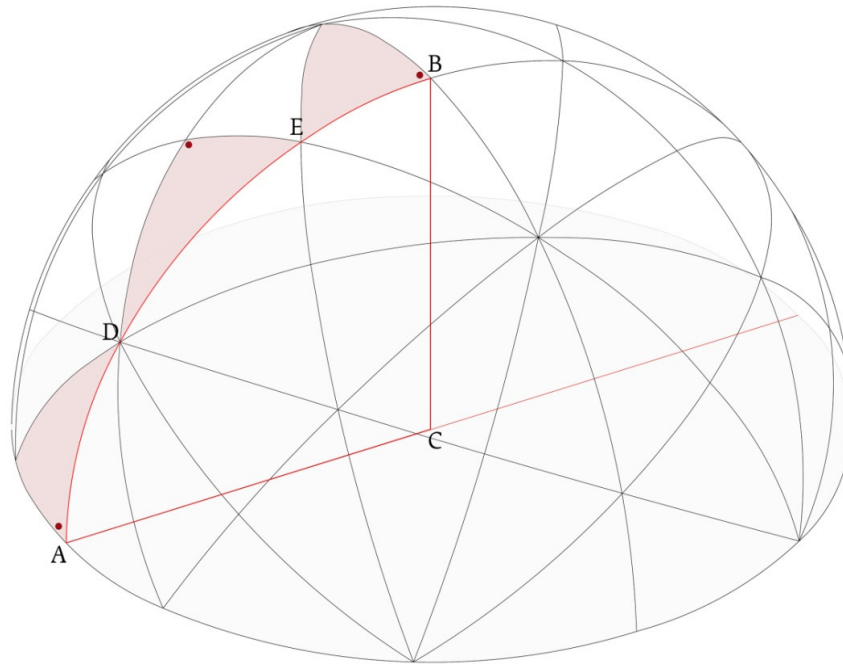
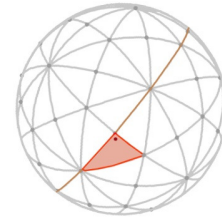
Tale calcolo è stato effettuato partendo dalla divisione della sfera secondo cerchi massimi a simmetria icosaedrica, ovvero originati, come si è detto, dal gruppo di simmetria del dodecaedro sferico e dell'icosaedro sferico, che suddividono la superficie sferica in triangoli minimi caratteristici uguali tra loro, aventi dimensioni minori rispetto alle suddivisioni triangolari determinate dagli altri gruppi di simmetria.

Si suddivide dunque la sfera in triangoli minimi caratteristici attraverso il software di modellazione infografica tridimensionale *AutoCAD® 2012*, effettuando una operazione booleana di intersezione tra il triacontaedro rombico solido, costituito dall'aggregazione di piramidi solide aventi per base il triangolo rettangolo che costituisce un quarto della faccia rombica del triacontaedro, ottenuto quindi dividendo quest'ultima attraverso le sue diagonali, e la sfera il cui centro coincide con il centro del poliedro ed il cui raggio ha dimensioni minori dello spigolo di una delle piramidi che compongono il triacontaedro. Si ottiene quindi una sfera solida suddivisa secondo simmetria icosaedrica, in triangoli minimi caratteristici. Secondo tale geometria è possibile dividere la sfera in due emisferi lungo uno dei cerchi massimi, determinando la suddivisione icosaedrica triangolare della cupola, struttura geometrica a fondamento della determinazione della tassellazione da cui si origina l'apparecchiatura stereotomica (FIG.121).

Per poter calcolare il diametro dato da un certo numero di conci che saranno presenti all'interno di questa suddivisione poliedrica, si quantificano i conci che occupano i lati del triangolo caratteristico minimo, per poter dedurre indicazioni sulla scelta della tassellazione più conveniente da adoperare. In base alla posizione del triangolo



121. R. Gadaleta,  
*Dimensionamento  
della cupola secondo  
geometria*, disegno  
infografico  
tridimensionale



Diametro sfera: 10 m

$$AC = r = 5 \text{ m}$$

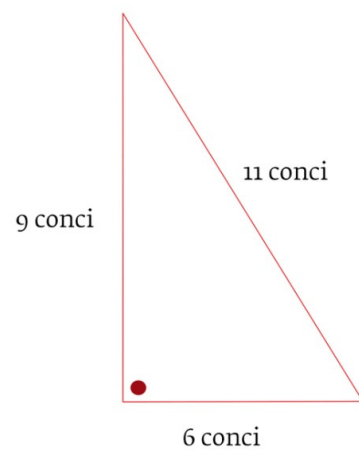
$$\text{Perimetro equatoriale: } 2\pi r = (2 \times 3,14 \times 5 \text{ m}) = 31,4 \text{ m}$$

$$AB = \text{Pe} / 4 = 7,85 \text{ m}$$

$$AD = 2,77 \text{ m} / 0,30 \text{ m} = 9 \text{ conci}$$

$$DE = 3,27 \text{ m} / 0,30 \text{ m} = 11 \text{ conci}$$

$$EB = 1,81 \text{ m} / 0,30 \text{ m} = 6 \text{ conci}$$





sferico minimo all'interno della configurazione geometrica dell'emisfera, si deduce che un quarto del cerchio massimo è definito dall'adiacenza dei segmenti sferici corrispondenti ai tre diversi lati del triangolo minimo sferico, ovvero un quarto del cerchio massimo è divisibile nei tre lati sferici del triangolo minimo.

In FIG.121, è evidenziato in rosso chiaro il triangolo sferico minimo, la cui posizione è individuata attraverso l'angolo, indicato con un cerchio in colore Bordeaux, corrispondente all'angolo retto dello stesso triangolo minimo planare, ovvero la base triangolare di una delle piramidi che costituiscono il triacontaedro rombico.

La somma del numero dei conci individuati sui tre lati del triangolo minimo, costituisce dunque il numero di conci posti su un quarto del cerchio massimo della sfera, ovvero del suo perimetro equatoriale. Moltiplicando quindi tale numero per 0,30, numero corrispondente alla dimensione in metri del lato di un concio ipotizzato pari a 30 cm, si ottiene la dimensione in metri di un quarto del perimetro equatoriale occupato dai conci lapidei. Moltiplicando tale cifra per quattro, si ottiene la dimensione dell'intero perimetro equatoriale composto da conci lapidei aventi spigolo pari a 30 cm o 40 cm.

Poiché il perimetro equatoriale si calcola attraverso la formula  $2\pi r$ , dove  $\pi$  corrisponde al numero 3,14 ed  $r$  al raggio della sfera, si calcola quest'ultimo dividendo la cifra corrispondente all'intero perimetro equatoriale costituito dai conci, per  $2\pi$ , ovvero 6,28. Moltiplicando per due tale risultato, si ottiene il diametro in metri della sfera, ovvero dell'estradosso della cupola, considerando quindi la geometria determinata dalla suddivisione a simmetria icosaedrica appartenente alla superficie esterna della cupola.

Attraverso tale calcolo, approssimativamente<sup>310</sup>, è possibile affermare che per ottenere un diametro di circa 10 metri, i lati del triangolo devono essere composti rispettivamente da circa 6, 9 e 11 conci.

---

<sup>310</sup> In questo paragrafo con il termine "approssimativamente" si indica un errore del centimetro, dato dalla proiezione sferica del poliedro. Le dimensioni sono state ricavate attraverso misurazioni eseguite in *AutoCAD*® 2012 del poliedro solido ottenuto con il software *Stella4D*.

Di seguito si riporta l'esempio di calcolo effettuato:

6 conci primo lato + 9 conci secondo lato + 11 conci terzo lato = 26 numero dei conci sul perimetro del triangolo minimo;  $26 \times 0,30$  m dimensioni della lunghezza della faccia di estradosso del concio sul perimetro del triangolo minimo = 7,8 m dimensioni di un quarto del perimetro equatoriale occupato da conci lapidei;  $7,8 \text{ m} \times 4 = 31,2$  m intero perimetro equatoriale occupato da conci lapidei;  $31,2\text{m}/6,28 = 4,96\text{m}$  raggio della sfera;  $4,96\text{m} \times 2 = 9,92$  m diametro di estradosso della sfera costituita dai conci lapidei.

#### III.5.4 Tabella comparativa delle suddivisioni dell'emisfera in elementi strutturali

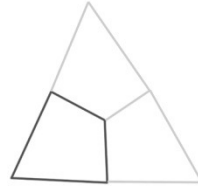
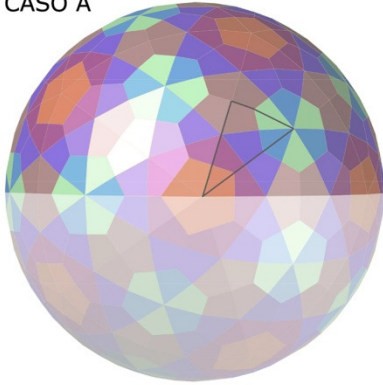
Per poter valutare quale metodo di tassellazione sferica abbia maggiore convenienza architettonica ai fini dell'ottimizzazione degli elementi strutturali rispetto alle dimensioni dei conci ed alla luce da coprire, ricercando la maggiore qualità statica ed estetica dell'apparecchiatura, il problema che si pone è dunque quello di trovare il solido geometrico, o la suddivisione planare di una delle sue facce, che minimizza il numero dei conci-tipo invarianti avendo un data luce da coprire, che nel presente studio è pari a 10 metri.

A tal fine è stata redatta una tabella comparativa (FIG.124) dove vengono messi in relazione il numero, la morfologia, le dimensioni degli elementi-invarianti ed il diametro della cupola emisferica, con i diversi metodi di suddivisione della sfera descritti sia in precedenza, sia illustrati di seguito, dunque precedenti la tabella comparativa.

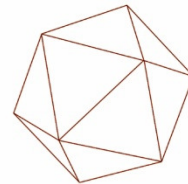
Per ogni suddivisione è riportato il disegno corrispondente, che è stato realizzato attraverso l'utilizzo dei software infografici *AutoCAD*® 2012 e *Stella4D*, quest'ultimo specialistico nella definizione delle forme poliedriche e delle loro caratteristiche variazionali. Attraverso colori uguali sono evidenziate le figure uguali che si ripetono su tutta la

122. R. Gadaleta,  
*Disegni infografici  
tridimensionali di  
suddivisione sferica*  
(caso A, caso B,  
caso C)

CASO A

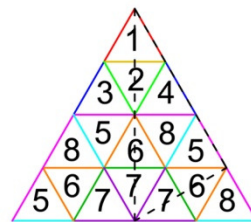
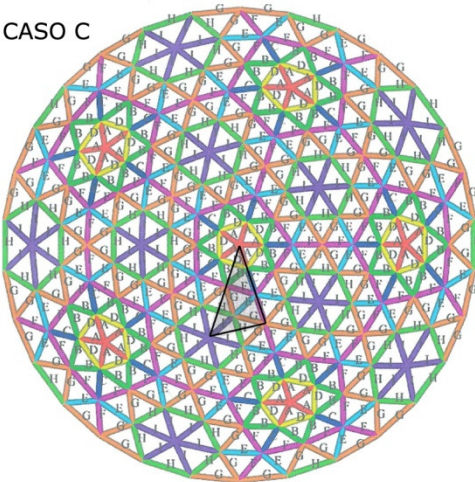


CASO B



Icosaedro

CASO C



TASSELLAZIONE  
STEREODOMICA



CONCIO  
TIPO

superficie sferica e che dovranno successivamente essere tradotte in elementi strutturali lapidei.

Si vuole trovare la tassellazione lapidea, quindi caratterizzata dal corretto nodo tettonico organico ovvero dal giusto incastro topologico strutturale degli elementi costruttivi che riponda ai requisiti da soddisfare esposti nel paragrafo III.5.1, che copra il diametro massimo ipotizzato (pari a 10 metri) con molti elementi di piccole dimensioni (inscrivibili per ipotesi in un cubo avente lo spigolo pari a 30 cm oppure a 40 cm).

Si analizzano le tassellazioni derivate dal primo metodo di suddivisione del triangolo minimo caratteristico, sempre evidenziato nelle figure, ricercando una numerosa sfaccettatura del poliedro che riduca le figure che si ripetono in modo invariato, in modo da cercare di ottenere, come si è detto, molti piccoli elementi strutturali invarianti. A questo scopo le tassellazioni vengono originate da poliedri aventi un numero più alto possibile di facce uguali tra loro, in modo da ridurre le differenze tra i tasselli che si originano da un numero alto di sfaccettature o frequenza di suddivisione, quindi posta non inferiore a 3. Inoltre il conteggio degli elementi invarianti deve essere effettuato ricordando che, volendo successivamente proiettare la suddivisione sulla superficie sferica ai fini di ottenere conci con faccia di estradosso e faccia di intradosso caratterizzate da curvatura che segue quella sferica incrementando, come si è detto, la resistenza della cupola lapidea, alcuni di essi risultano simmetrici e non invarianti a rotazione rigida conservando la posizione delle facce di estradosso ed intradosso sulla superficie della sfera, verificando il criterio di non sovrapposibilità di triangoli sferici simmetrici già enunciato nell'opera *Sphaerica* di Menelao di Alessandria, come precedentemente affermato nel paragrafo III.3.1. Tra i molti casi analizzati, in tabella si riportano quelli più significativi.

Dall'icosaedro, solido platonico costituito da venti facce triangolari equilateri congruenti tra loro, si originano i tre casi indicati in tabella come "caso A", "caso B" e "caso C" (FIG.122).

Il "caso A" (FIG.122) è ottenuto dalla suddivisione geodetica di frequenza pari a 3 della faccia dell'icosaedro che produce tre tipi di

facce triangolari diverse come illustrato in tabella, successivamente divise secondo il loro baricentro che è stato proiettato sulla sfera circoscritta al poliedro. Si originano quindi 6 elementi diversi, morfologicamente simili ad aquiloni, che si ripetono in modo uguale sulla superficie sferica, di cui tre di essi essendo simmetrici ma non invarianti a rotazione rigida, a causa della non possibilità di essere ruotati di  $180^\circ$  lungo il lato del triangolo minimo, poiché aventi superficie di estradosso ed intradosso caratterizzate da curvatura sferica, devono moltiplicarsi per due.

Dunque si hanno 9 elementi tipo invarianti ripetibili in modo identico su tutta la sfera.

Secondo il calcolo dimensionale precedentemente esposto si ha approssimativamente, ponendo la lunghezza massima della faccia di estradosso del concio pari a 30 cm, si ha che il primo lato è composto da quattro conci le cui dimensioni della lunghezza della faccia di estradosso posta sul perimetro del triangolo minimo sono  $(0,36 + 0,20 + 0,30 + 0,10)\text{m} = 0,96 \text{ m}$ ; il secondo lato è composto da quattro conci le cui dimensioni della lunghezza della faccia di estradosso posta sul perimetro del triangolo minimo sono  $(0,25 + 0,26 + 0,30 + 0,30)\text{m} = 1,11 \text{ m}$ ; il terzo lato è composto da due conci le cui dimensioni della lunghezza della faccia di estradosso posta sul perimetro del triangolo minimo sono  $(0,32 + 0,30)\text{m} = 0,62 \text{ m}$ . In totale il perimetro del triangolo minimo misura 2,69 m, pari alla misura di un quarto del perimetro equatoriale occupato da conci lapidei;  $2,69 \text{ m} \times 4 = 10,76 \text{ m}$ , intero perimetro equatoriale occupato da conci lapidei;  $10,76 \text{ m} / 6,28 = 1,71 \text{ m}$ , raggio della sfera;  $1,71 \text{ m} \times 2 = 3,42 \text{ m}$ , diametro della sfera costituita dai conci lapidei così configurati. Se invece si pone la lunghezza massima della faccia di estradosso del concio pari a 40 cm, si ha effettuando lo stesso calcolo, aggiungendo dieci centimetri proporzionalmente ad ogni misura dello spigolo dei conci prima effettuata, si ottiene infine un diametro pari a 4,7 metri.

Il “caso B” (FIG.122) è ottenuto dalla suddivisione geodetica di frequenza pari a 5 della faccia dell’icosaedro e dalla sua successiva divisione secondo il baricentro delle facce triangolari ottenute,

secondo lo stesso ragionamento effettuato per il caso precedente. Si originano quindi 15 elementi diversi, morfologicamente simili ad aquiloni, che si ripetono in modo uguale sulla superficie sferica, di cui 8 di essi essendo simmetrici ma non invarianti a rotazione rigida, devono moltiplicarsi per due. Dunque si ottengono 23 elementi tipo invarianti ripetibili in modo identico su tutta la sfera. Si determina approssimativamente, ponendo la lunghezza massima della faccia di estradosso del concio pari a 30 cm, che il primo lato è composto da sette conci le cui dimensioni della lunghezza della faccia di estradosso posta sul perimetro del triangolo minimo sono  $(0,30 + 0,17 + 0,38 + 0,46 + 0,23 + 0,23 + 0,11)\text{m} = 1,88\text{ m}$ ; il secondo lato è composto da tre conci le cui dimensioni della lunghezza della faccia di estradosso posta sul perimetro del triangolo minimo sono  $(0,43 + 0,20 + 0,46)\text{m} = 1,09\text{ m}$ ; il terzo lato è composto da cinque conci le cui dimensioni della lunghezza della faccia di estradosso posta sul perimetro del triangolo minimo sono  $(0,37 + 0,35 + 0,36 + 0,28 + 0,26)\text{m} = 1,62\text{ m}$ . In totale il perimetro del triangolo minimo misura 4,59 m;  $4,59\text{ m} \times 4 = 18,36\text{ m}$ , intero perimetro equatoriale occupato da conci lapidei;  $18,36\text{ m}/6,28 = 2,92\text{ m}$ , raggio della sfera;  $2,92\text{ m} \times 2 = 5,84\text{ m}$ , diametro della sfera costituita dai conci lapidei così configurati. Se invece si pone la lunghezza massima della faccia di estradosso del concio pari a 40 cm, si ottiene infine un diametro pari a 7,74 metri. In entrambi questi due casi appena analizzati i conci individuati possono avere morfologia ad aquilone, trasponendo direttamente la forma geometrica nella forma del concio, ma una tale tassellazione non è ben ammorsata ed ha bisogno di collanti, zanche o grappe poste tra i giunti dei conci per garantirne la collaborazione statica. L'ammorsamento è debole ed il nodo tettonico in questo caso è seriale e non organico, non ponendosi in continuità con la logica tettonica della forma strutturale lapidea voltata stereotomica, data dall'incastro topologico ottenuto attraverso la corretta configurazione del taglio degli elementi strutturali, ovvero attraverso l' «arte della connessione»<sup>311</sup>, di cui si è detto nel paragrafo I.2.2.

---

<sup>311</sup> BORBEIN ADOLF HEINRICH, *Tektonik, zur Geschichte eines Begriffs der Archäology*, in "Archiv für Begriffsgeschichte", XXVI, n. 1, 1982. Citato in: K.

Il “caso C” (FIG.122) è ottenuto dalla suddivisione geodetica di frequenza pari a 6 della faccia dell’icosaedro. In questo caso non si è eseguita la successiva suddivisione secondo il baricentro delle facce triangolari ottenute, ma si vuole valutare una ripartizione alternativa a quelle appena esposte, considerando come elementi strutturali lapidei lo spazio triangolare solido formatosi tra le aste, traducendo quindi la forma del poliedro *vacuus* in quella del poliedro *solidus* ripartito, utilizzando le parole di Leonardo da Vinci presenti nel *Divina Proportione* di Luca Pacioli<sup>312</sup>.

Conoscendo le aste di lunghezza uguale, individuate con colori uguali anche attraverso l’abaco *Geodesic Dome Notes & Calculator* di cupole geodetiche consultabile online sul sito *Simply Differently.org*<sup>313</sup>, è possibile determinare il numero di elementi-tipo invarianti pari ad 8.

Si determina approssimativamente, ponendo la lunghezza massima della faccia di estradosso del concio pari a 30 cm, che il perimetro del triangolo minimo misura 3,2 m;  $3,2 \text{ m} \times 4 = 12,8 \text{ m}$ , intero perimetro equatoriale occupato da conci lapidei;  $12,8 \text{ m} / 6,28 = 2,03 \text{ m}$ , raggio della sfera;  $2,03 \text{ m} \times 2 = 4,06 \text{ m}$ , diametro della sfera costituita dai conci lapidei così configurati. Se invece si pone la lunghezza massima della faccia di estradosso del concio pari a 40 cm, si ottiene infine un diametro pari a 5,22 metri.

Gli elementi triangolari non sono traducibili direttamente in conci lapidei, poiché tale forma non permette l’ammorsamento, né si rivela staticamente efficace nella muratura che costituisce il sistema organico cupolato. Per questo motivo si ipotizzano conci con giunti

---

Frampton, “Tettonica e architettura. Poetica della forma architettonica nel XIX e XX secolo”, Ginevra-Milano, Skira, 2007, pag. 22

<sup>312</sup> PACIOLI LUCA, *Divina proportione*, Venezia, Paganino Paganini, 1509, opera conservata presso la Biblioteca Ambrosiana di Milano

<sup>313</sup> *Simply differently.org temporary buildings:studying, planning,building and living in*, consultabile su: [https://simplydifferently.org/Geodesic\\_Dome\\_Notes](https://simplydifferently.org/Geodesic_Dome_Notes)  
Tale sito Internet offre un abaco molto ricco di cupole geodetiche di diverse dimensioni, diversa frequenza di suddivisione e diverso gruppo di simmetria di appartenenza. Le aste di lunghezza uguale sono contraddistinte da colori uguali e lettere uguali. E’ stato scelto questo abaco, sia perché risulta essere molto chiaro nella divulgazione delle caratteristiche geometriche delle strutture geodetiche, sia perché si dimostra ricco di molteplici differenti soluzioni da queste originate.



osteomorfi<sup>314</sup> ad andamento sinusoidale quindi concavo-convesso, caratterizzati dalla curvatura delle facce di estradosso ed intradosso che giacciono su superfici sferiche concentriche, chiaramente aventi diverso raggio.

Un'altra ipotesi riguardo il miglioramento dell'ammorsamento consiste nell'ottenere la morfologia del concio a giunti osteomorfi attraverso l'unione di due tasselli geometrici triangolari. Questa ipotesi non si dimostra risolutiva, poiché restano numerose le linee oblique su cui sono allineati i giunti, costituendo svantaggiose linee di discontinuità all'interno della muratura. Per cercare di risolvere questo inconveniente si è pensato di ottenere una maglia triangolare con un maggiore grado di ammorsamento, individuato nella configurazione della tassellazione reciproca sferica, costituendo il "caso D" (FIG.123). A tal fine si determina la matrice geometrica sferica da cui è possibile dedurre la sua configurazione reciproca che origina spazi vuoti di forma triangolare, pentagonale ed esagonale tra gli elementi costruttivi. Tale morfologia è determinata, come si è detto, «ruotando ciascun lato della tassellazione dello stesso angolo intorno al suo punto medio»<sup>315</sup> che può variare da 0 a  $\pi/2$  estremi esclusi, e per la sua

---

<sup>314</sup> Osteomorfo: dal greco antico ὀστούν (ostun) "osso" e μορφή (morfè) "forma", ovvero "morfologicamente simile ad un osso". I conci osteomorfi sono caratterizzati da giunti aventi superficie concavo-convessa simili al giunto osseo individuato nella rotula umana. Tali giunti migliorano il mutuo contatto e l'incastro tra i conci evitando i moti torsionali e favorendo una buona distribuzione delle pressioni. Esempi applicativi si riscontrano:

- nell' *Obelisco Alexandros*, realizzato nel 2006 dal Prof. Claudio D'Amato e dal Prof. Giuseppe Fallacara in occasione della X Mostra Internazionale, La Biennale di Venezia, pubblicato in "Città di Pietra/Cities of Stone. Pietre di Puglia. Costruire in pietra portante/Stones of Apulia. To Build load-bearing Stone" a cura di Claudio D'Amato Guerrieri, La Biennale di Venezia e Sensi Contemporanei, Venezia, Marsilio, 2006, pp. 39 - 64;

- in *Wave Blockwall*, applicazione del brevetto di Yuri Estrin e del suo team di ricerca (A. Dyskin, E. Pasternak, Knor Han Chuan, G. Simon, A. Molotnikov, L. Goldin) progettato insieme a Giuseppe Fallacara e Vincenzo Minenna, esposto in occasione di "Inside Marmomacc & Abitare il TempoVeronafiere", Verona, 2014 e pubblicato in "Stereotomic Design" di G. Fallacara, V. Minenna, Maglie (Lecce), Edizioni Gioffreda, 2014, pp. 11,12,13, 68, 69

<sup>315</sup> BROCATO MAURIZIO, MONDARDINI LUCIA, *Un sistema voltato di nuova concezione basato sull'apparecchiatura della volta piana di Joseph Abeille*, in "Atti del Primo Congresso Internazionale di Rete Vitruvio, Rete Interuniversitaria

determinazione geometrica si può ricorrere alla suddivisione della sfera determinata dall'icosaedro troncato rettificato camuso o simo dal latino *simus* "camuso, smussato", termine adoperato da Kepler nella sua opera *Harmonices Mundi*<sup>316</sup>, che indica lo smussamento di alcuni vertici del poliedro. L'icosaedro troncato rettificato simo, possiede facce triangolari che separano le facce pentagonali ed esagonali regolari tra loro secondo precisa geometria e precisi troncamenti apportati al solido. Il termine simo, *snub* nella lingua inglese, indica la geometria determinatasi dall'allontamento radiale uniforme delle facce pentagonali ed esagonali ruotate intorno ai loro centri, attraverso l'opportuna collocazione di facce triangolari, centrate sui vertici del poliedro di partenza e disposte a coppie sugli spigoli di quest'ultimo. Il poliedro così determinato può essere visto come un ampliamento di un poliedro regolare. Per ottenere una espansione successiva di tale poliedro occorre scegliere un poliedro composto da un maggiore numero di facce pentagonali ed esagonali rispetto all'icosaedro troncato, ovvero è necessario scegliere un poliedro di Goldberg più sfaccettato. Si sceglie il G(3,0) ovvero il pentacisdodecaedro troncato (truncated pentakis dodecahedron), solido duale della suddivisione geodetica triangolata di frequenza 3 applicata all'icosaedro platonico. Il pentacisdodecaedro troncato è costituito da dodici pentagoni, venti esagoni regolari e sessanta esagoni irregolari e deriva da un'operazione di taglio dei vertici o troncamento del pentacisdodecaedro, solido di Catalan, duale dell'icosaedro troncato archimedeo. Applicando quindi al pentacisdodecaedro troncato l'operazione simo di smussamento, si ottiene un distanziamento delle sue facce attraverso altre facce triangolari, ottenendo il poliedro che costituisce la matrice geometrica

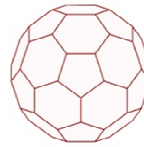
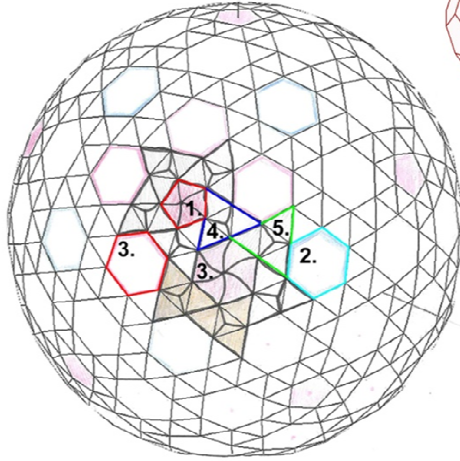
---

Italiana di Architettura" a cura di Claudio D'Amato, 5 voll., Bari, PolibaPress / Arti Grafiche Favia, 2011, vol. 4 "Il progetto di architettura fra didattica e ricerca", pag. 1945

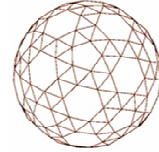
<sup>316</sup> VON KEPLER JOHANNES, *Harmonices Mundi*, Francoforte, Lincii Austriae, Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof. Excudebat Ioannes Plancus, 1619, Liber II, De Congruentia Figurarum Harmonicarum, conservato presso Smithsonian Libraries, Washington DC, pag. 62: «Cubus simus», «Dodecaedron simum»

123. R. Gadaleta,  
*Disegni infografici  
tridimensionali di  
suddivisione sferica*  
(caso D, caso E,  
caso F)

CASO D



Icosaedro  
troncato



Icosaedro  
troncato  
rettificato simo

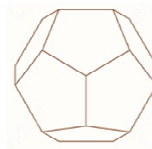
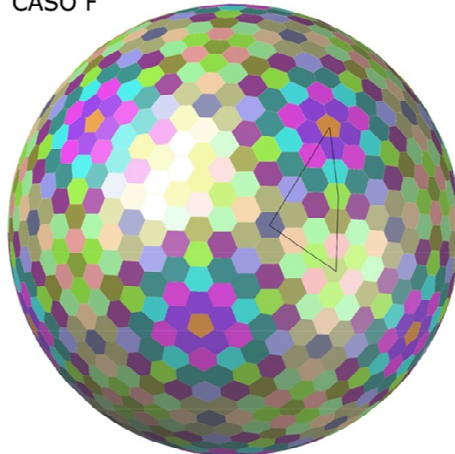


CASO E



Icosidodecaedro

CASO F



Dodecaedro

della tassellazione sferica reciproca che qui si descrive, scelta per la maggiore sfaccettatura rispetto ai poliedri platonici.

Attraverso l'operazione di smussamento le facce pentagonali ed esagonali del pentacisdodecaedro troncato appaiono ruotate intorno ai loro centri, proprietà che favorisce la determinazione della posizione reciproca di queste ultime e dei triangoli che le separano, come evidenziato in FIG.123.

Si determina quindi la suddivisione di tali triangoli secondo la morfologia ad aquilone e quella triangolare, nell'ottica di favore un maggior incastro tra i conci lapidei che ne derivano. Questo incastro si rivela debole come il precedente, nonostante la geometria reciproca dalla quale è derivato. Questo accade poiché la reciprocità tra le figure poligonali non viene esattamente rispettata dalla suddivisione in piccoli elementi aventi morfologia ad aquilone. Per costituire una tassellazione reciproca più efficace, infatti, le facce pentagonali ed esagonali devono essere costituite da un solo concio, oppure se vengono divise radialmente in più conci, le facce triangolari devono essere unite in gruppi che ne contengano quattro, come mostrato in FIG.123. La tassellazione reciproca maggiormente efficace, dunque, risulta quella che traduce direttamente l'asta nel concio, mantenendo la linearità dell'elemento costruttivo come accade nella *Bin Jassim Dome*<sup>317</sup>.

Mantenendo la massima suddivisione delle facce ai fini di avere un maggior numero di elementi strutturali di piccole dimensioni, si ipotizza dunque che l'incastro a giunti ostomorfi possa aumentare l'efficacia statica di questa tassellazione.

Ogni faccia pentagonale origina cinque elementi costruttivi uguali, come anche ogni faccia esagonale regolare, invece ogni faccia esagonale irregolare origina quattro elementi differenti. I cinque gruppi costituiti da quattro facce triangolari che ruotano reciprocamente intorno alla faccia pentagonale, originano tre elementi ad aquilone differenti, mentre i sei gruppi costituiti da quattro facce triangolari che ruotano

---

<sup>317</sup> TAMBORERO LUC, *The Bin Jassim Dome*, in "Stereotomy. Stone Architecture and New Research" di Giuseppe Fallacara, Paris, Presses des Ponts, 2012, pag. 122

reciprocamente intorno alla faccia esagonale regolare, originano altri tre elementi ad aquilone differenti, diversi dai precedenti. A questi dodici conci-tipo, si aggiungono due tipi di conci all'imposta della cupola, derivanti dal taglio della suddivisione geometrica attraverso il piano passante per il centro della sfera, poiché un cerchio massimo non viene definito mediante tale geometria. Complessivamente questa tassellazione derivata dall'espansione del pentacisdodecaedro troncato, origina 14 conci tipo diversi tra loro che risultano invarianti, ovvero si ripetono in modo uguale su tutta la superficie sferica. Eseguendo il calcolo descritto in precedenza, ponendo la lunghezza massima della faccia di estradosso del concio pari a 30 cm, questa tassellazione consta di un diametro della sfera pari a circa 4,20 metri, essendo undici i conci che compongono un quarto del perimetro equatoriale. Se invece si pone la lunghezza massima della faccia di estradosso del concio pari a 40 cm, si ottiene infine un diametro pari a circa 5,60 metri.

Il "caso E" (FIG.123) deriva dall'icosidodecaedro, poliedro archimedeo composto da dodici facce pentagonali e venti facce triangolari equilateri, ottenuto dal troncamento delle dodici cuspidi dell'icosaedro ad  $\frac{1}{2}$  della lunghezza del suo spigolo.

La divisione duale della suddivisione geodetica di frequenza 6 dell'icosidodecaedro, origina una ripartizione della superficie sferica in esagoni e pentagoni dando luogo a 19 elementi tipo invarianti. Se si pone la lunghezza massima della faccia di estradosso del concio pari a 30 cm, con dimensione massima raggiunta pari a 43 cm a causa della deformazione sferica, si determina approssimativamente che il perimetro del triangolo minimo misura 5,36 m;  $5,36 \text{ m} \times 4 = 21,44 \text{ m}$ , intero perimetro equatoriale occupato da conci lapidei;  $21,44 \text{ m} / 6,28 = 3,41 \text{ m}$ , raggio della sfera;  $3,41 \text{ m} \times 2 = 6,82 \text{ m}$ , diametro della sfera costituita dai conci lapidei così configurati. Se invece si pone la lunghezza massima della faccia di estradosso del concio pari a 40 cm, con dimensione massima raggiunta pari a 53 cm a causa della deformazione sferica, si ottiene infine un diametro pari a 9,5 metri.

Traducendo direttamente il tassello esagonale e pentagonale in conci lapidei, si ottiene una apparecchiatura più ammorsata rispetto alle precedenti, caratterizzata dallo sfalsamento dei giunti costituiti dai lati

degli esagoni, ottenendo anche un buon rapporto tra numero di conci invarianti e diametro della cupola all'estradosso.




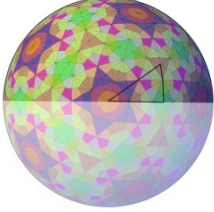

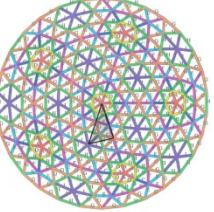



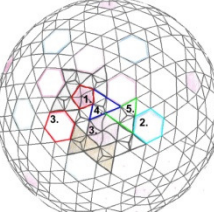







Se inoltre tali conci fossero costituiti da giunti osteomorfi o da un tipo di incastro stereotomico praticato sulle loro superfici, sarebbe migliorato il comportamento statico dell'intera cupola.

Il "caso F" (FIG.123) è costituito dalla divisione duale della suddivisione geodetica di frequenza 6 del dodecaedro, che origina una ripartizione della superficie sferica in esagoni e pentagoni dando luogo a 16 elementi tipo invarianti. Se si pone la lunghezza massima della faccia di estradosso del concio più piccolo pari a 30 cm, si determina approssimativamente che il perimetro del triangolo minimo misura 3,57 m;  $3,57 \text{ m} \times 4 = 14,28 \text{ m}$ , intero perimetro equatoriale occupato da conci lapidei;  $14,28 \text{ m} / 6,28 = 2,27 \text{ m}$ , raggio della sfera;  $2,27 \text{ m} \times 2 = 4,54 \text{ m}$ , diametro della sfera costituita dai conci lapidei così configurati. Se invece si pone la lunghezza massima della faccia di estradosso del concio pari a 40 cm, si ottiene infine un diametro pari a 7,22 metri. Si evince come a parità di tassellazione il "caso E" risulta più vantaggioso del "caso F", dimostrando come la geometria del poliedro di partenza si rivela fondamentale ai fini della tassellazione.

Le tassellazioni determinate da tutti i casi esaminati, escluso il "caso D", non necessitano della configurazione di ulteriori conci-tipo all'imposta della cupola, poiché la tassellazione è definita entro il perimetro del triangolo caratteristico minimo, che non viene tagliato nella tassellazione sferica da questo costituita, come si evince dallo schema geometrico necessario per il dimensionamento e l'individuazione dei conci invarianti, esposto nel paragrafo III.5.3.



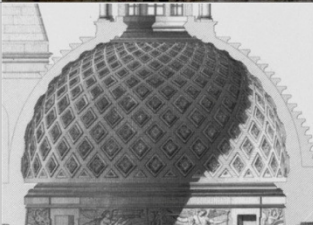
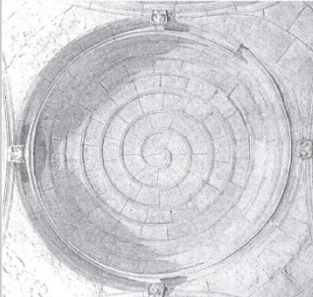
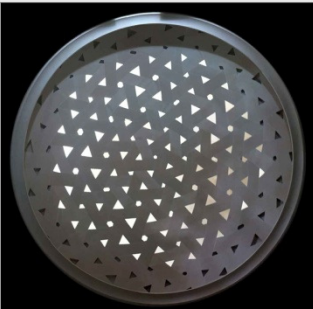
In FIG.124, è riportata la tabella sintetica delle configurazioni appena esposte, mentre in FIG.125 è riportata la tabella comparativa relativa alle cupole costruite precedentemente descritte, selezionandone gli esempi più significativi al fine di effettuare un confronto valutativo dei diversi metodi di suddivisione.

124. R. Gadaleta, *Tabella comparativa di suddivisione della superficie sferica*

Suddivisione geodetica della sfera						
Poliedro	Tipo di suddivisione	Disegno di suddivisione	Morfologia elementi costitutivi	Numero elementi-tipo	Lunghezza faccia elem. all'estradosso (cm)	Diametro sfera (m)
 Icosaedro	Suddivisione geod. di frequenza 3 e successiva divisione dei triangoli secondo il loro baricentro posto sulla sfera (CASO A)			9	30	3,42
					40	4,7
	Suddivisione geod. di frequenza 5 e successiva divisione dei triangoli secondo il loro baricentro posto sulla sfera (CASO B)			23	30	5,84
40					7,74	
Suddivisione geod. di frequenza 6 (CASO C)			8	30	4,06	
				40	5,22	
Suddivisione duale reciproca della geometria geodetica						
Poliedro	Tipo di suddivisione	Disegno di suddivisione	Morfologia elementi costitutivi	Numero elementi-tipo	Lunghezza faccia concii all'estradosso (cm)	Luce coperta (m)
 Icosaedro troncato  ↓  Icosaedro troncato rettificato simo	Suddivisione geod. reciproca del poliedro di Goldberg G(3,0), duale della suddivisione geodetica di frequenza 3 applicata all'icosaedro e successiva operazione snub di smussamento ed espansione (CASO D)			14	30	4,20
					40	5,60
		<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Pentagono regolare: 1 el.-tipo</li> <li>2. Esagono regolare: 1 el.-tipo</li> <li>3. Esagono irregolare: 4 el.-tipo</li> <li>4. Triangoli intorno al pentagono: 3 el.-tipo</li> <li>5. Triangoli intorno all'esagono regolare: 3 el.-tipo</li> </ol> Diametro sfera (imposta cupola): 2 el.-tipo per taglio sfera				
Suddivisione duale della geometria geodetica						
 Icosidodecaedro	Suddivisione duale di quella geod. di frequenza 6 (CASO E)			19	30/43	6,82
					40/53	9,5
 Dodecaedro	Suddivisione duale di quella geod. di frequenza 6 (CASO F)			16	30	4,54
					40	7,22



125. R. Gadaleta, *Tabella comparativa del metodo di apparecchiatura delle cupole lapidee costruite*

Suddivisione della sfera secondo meridiani e paralleli					
Collocazione	Documentazione fotografica/ archivistica	Numero conci-tipo	Numero totale conci	Lunghezza faccia conci all'estradosso (cm)	Luce coperta (m)
<i>Chiesa di Ognissanti, Valenzano (Bari) 1061-1078</i>		18	587 circa	30/40  con metodo geometrico: 24	5,5
<i>Duomo di San Corrado, Molfetta (Bari) metà XII sec.-XIII sec.</i>		34	1472 circa	20/30  con metodo geometrico: 25	8
<i>Royale Chapel, Château d'Anet, Anet, Francia 1547-1552</i>		28		20/50	8,21
Suddivisione della sfera secondo elicoide					
<i>Cattedrale di Murcia, Murcia, Spagna XVI sec.</i>		80 circa	80 circa	20/60	poco inferiore a 6
Suddivisione della sfera secondo geometria reciproca					
<i>Bin Jassim Dome, Qatar, 2012</i>		8	110	100 circa	6 (diametro cupola all' estradosso)

### III.5.5 Scelta della tassellazione di studio per l'apparecchiatura stereotomica

Dallo studio effettuato e dalla sua sintesi espressa dalla tabella in FIG.124, emerge che le tassellazioni più convenienti ai fini del presente studio, quindi della riduzione degli elementi costruttivi in rapporto alla luce coperta, sono costituite dalla tassellazione illustrata nel “caso E” e nel “caso F” ed in generale dalla divisione geometrica della superficie sferica composta da esagoni e pentagoni secondo il poliedro di Goldberg. La tabella in FIG. 125, illustra la comparazione dimensionale delle cupole realizzate in pietra, ai fini di ricordare sempre quali apparecchiature si rivelano più favorevoli nella pratica costruzione della forma.

La divisione secondo simmetria quinaria, che non caratterizza alcuna cupola lapidea costruita, favorisce un maggiore ammorsamento dei conci ed esprime la possibilità di determinare una apparecchiatura strutturalmente meglio configurata rispetto alla tassellazione data dal poliedro di Goldberg e formalmente molto espressiva che lascia all'architetto e quindi non solo alla geometria, il compito di progettarela, ovvero di definirla morfologicamente in base ai requisiti che tale tassellazione deve rispettare ai fini dell'architettura lapidea dello spazio voltato.

Inoltre la volontà di ricercare nuove morfologie architettoniche dello spazio cupolato lapideo, ha determinato la scelta di studiare la suddivisione secondo simmetria quinaria nel presente lavoro che indaga per la prima volta gli esiti di tale tassellazione nell'apparecchiatura della cupola in pietra da taglio.

## **CAPITOLO IV.**

### **Forma strutturale stereotomica della cupola in pietra da taglio a simmetria quinaria**

---

#### **IV.1 Primo caso applicativo: la tassellazione di L. Danzer. Vantaggi e criticità**

La ricerca sulle tassellazioni quinarie ha come punto di partenza la tassellazione tridimensionale di Ludwig Danzer (1927-2011).

Lo studio nasce da una esplicita richiesta effettuata nel mese di ottobre 2014 dal Prof. Maurizio Paolini<sup>318</sup> al Prof. Giuseppe Fallacara, con cui precedentemente aveva condiviso il progetto *Decowall*<sup>319</sup>(FIG.118) sulla possibilità di utilizzare la tassellazione descritta da L. Danzer, matematicamente poco indagata, come morfologia strutturale.

Ho subito accolto questa richiesta, che ho avuto modo di conoscere inizialmente attraverso il Prof. Claudio D'Amato, poiché coniugava la possibilità di effettuare ricerche sulla tassellazione stereotomica che mi ha affascinato sin dai primi anni di studio universitari per la potenzialità di coniugare mirabilmente forma e struttura in modo chiaramente visibile e leggibile, nell'espressione della bellezza della forma insita nella sua vera essenza costruttiva, sia per l'opportunità di poter rispondere ad una domanda concreta, molto stimolante per lo studio.

Per questo motivo viene qui riportato lo studio svolto sulla tassellazione architettonica di L. Danzer, che ha permesso di comprendere molti aspetti che sono stati esposti e risolti nei paragrafi precedenti, e che può permettere, a questo punto della trattazione, di verificare le considerazioni già presentate, e di comprendere i vantaggi e gli svantaggi dei procedimenti di definizione della tassellazione

---

<sup>318</sup> Maurizio Paolini, Professore Ordinario di Analisi Numerica, presso il Dipartimento di Matematica e Fisica "Niccolò Tartaglia" dell'Università Cattolica di Brescia.

<sup>319</sup> Come si è precedentemente affermato nel paragrafo III.5.2

sferica, al fine di arrivare alla nuova definizione dell'apparecchiatura dello spazio cupolato a cui giunge questo studio di ricerca.

La tassellazione codificata da L. Danzer, i cui esiti sono poco indagati in architettura, possiede particolari vantaggi, poiché consente di minimizzare il numero di invarianti strutturali, attraverso l'ottimizzazione e l'opportuna configurazione dell'elemento-tipo, garantendo elevata resistenza strutturale dell'intero sistema.

La tassellazione tridimensionale di L. Danzer, è stata studiata attraverso l'analisi dei suoi scritti<sup>320</sup> e di altri contributi scientifici sull'argomento trovati e citati nelle note ed in bibliografia, tra cui quelli del suo allievo Dirk Frettlöh<sup>321</sup>, professore di matematica presso l'Università di Bielefeld in Germania.

Si riporta di seguito la biografia di L. Danzer, non presente nella lingua italiana, che quindi costituisce la traduzione delle informazioni biografiche presenti nella prefazione *Special issue in honor of Ludwig Danzer's 80th birthday*<sup>322</sup>, edita dall' "European Journal of Combinatorics" in occasione dell'ottantesimo compleanno del matematico Prof. L. Danzer, celebrato il 15 novembre 2007, che raccoglie i contributi scientifici dei suoi studenti, colleghi, collaboratori e amici.

«Ludwig Danzer è nato nel 1927, ha frequentato la Technische Hochschule e l'Università Ludwig-Maximilians a Monaco, laureandosi con l'Esame di Stato nel 1951. Dopo sei anni di insegnamento presso il Ginnasio della Scuola Superiore, è divenuto Assistente del Prof. Martin Kneser a Monaco. Dopo aver ricevuto il

---

<sup>320</sup> DANZER LUDWIG, *Three-dimensional analogs of the planar Penrose tilings and quasicrystals*, in "Discrete Mathematics", n. 76, 1989, pp.1-7 (paper received on October 1988)

<sup>321</sup> FRETTLÖH DIRK, *Icosahedral tilings in  $R^3$ : the ABCK tilings*, consultabile online su <http://www.math.uni-bielefeld.de/baake/frettlloe/papers/ikosa.pdf>  
FRETTLÖH DIRK, *Substitution tilings with statistical circular symmetry*, in "European Journal of Combinatorics" Vol. 29, Issue 8, Londra, Academic Press Ltd., novembre 2008, pp. 1881 - 1893

<sup>322</sup> Le informazioni sulla biografia di L. Danzer costituiscono la traduzione italiana a cura dell'autrice R. Gadaleta, di quelle riportate nella premessa *Special issue in honor of Ludwig Danzer's 80<sup>th</sup> birthday*, di Nikolai Dolbilin, Egon Schulte, in European Journal of Combinatorics, Issue 8, n. 29, Elsevier, 2008, pp.1801-1802, il testo originale si riporta in VI. Apparati, paragrafo VI.2

Dottorato di Ricerca (Ph.D.) da Kneser nel 1960, è stato Assistant Professor durante l'Anno Accademico 1960-1961 presso l'Università di Washington a Seattle.

Nel 1963 L. Danzer si reca con Kneser a Göttingen, dove ha ricevuto l'Abilitazione come Docente presso la Georg-August-Universität presso Göttingen. Dal 1969 fino al suo ritiro avvenuto nel 1992 è stato Professore di Matematica presso l'Università di Dortmund. È stato uno dei tre padri fondatori del Dipartimento di Matematica presso l'Università di nuova fondazione ed è stato molto coinvolto nella costruzione e nella formazione dell'Università in generale. Dal 1992 è stato Professore Emerito presso l'Università di Dortmund. Come riconoscimento dei suoi motli contributi, l'Università ha organizzato un Cerimonia in suo onore il 16 novembre 2007.

I contributi più importanti del lavoro di ricerca di Ludwig Danzer si rilevano nella geometria discreta, combinatoria e convessa, ma i suoi interessi matematici sono stati più ampi ed hanno incluso aree dove la geometria discreta incontra la matematica, il calocolo combinatorio, la teoria del numero e la cristallografia. Egli conosceva bene la sua eccezionale capacità di intuizione geometrica e la sua abilità nella risoluzione dei problemi.

Le prime ricerche di L. Danzer sono state fortemente influenzate dalla scuola di geometria discreta del matematico ungherese László Fejes Tóth sita in Budapest, come dimostra la sua Tesi di Abilitazione *Finite Point-sets on  $S^2$  with Minimum Distance as Large as Possible*, come pure la sua risoluzione del Problema di Gallai. Riluttante alla pubblicazione dei suoi risultati di ricerca, L. Danzer non seguì esattamente il motto accademico “publish or perish” ovvero “pubblica o muori” e così è accaduto che la sua Tesi di Abilitazione e la sua risoluzione del Problema di Gallai apparvero sui giornali solo nel 1986 (in “Discrete Mathematics”, n. 60, 1986, pp. 3 – 66, e in “Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica” n. 21, 1986, pp. 111-134, rispettivamente). All'inizio del 1960 è stato co-autore del famoso articolo DGK con Branko Grünbaum e Victor Klee sulla geometria combinatoria, intitolato *Helly's Theorem and its Relatives*, che ha avuto un forte impatto sulla sua carriera successiva. Verso la fine del 1970 L.

Danzer e B. Grünbaum iniziarono la teoria moderna astratta sui politopi regolari ed i loro gruppi, una nuova area della ricerca ispirata dal classico lavoro di Coexter. Il Prof. Egon Schulte è stato Assistente di L. Danzer per molti anni ed ha collaborato con lui su questo tema. L. Danzer ebbe grande passione per la teoria sulla tassellazione ed ha collaborato con Branko Grünbaum e Geoffrey Shephard sulla tassellazione del piano e dello spazio di dimensioni superiori ed ha lavorato intensamente per quindici anni sulle tassellazioni aperiodiche. Danzer è stato uno dei primi matematici che ha studiato seriamente gli impegnativi problemi matematici sull'aperiodicità in risposta alla scoperta dei quasicristalli avvenuta nel 1984, ed è stato all'avanguardia in questo settore di ricerca per molti anni»<sup>323</sup>.

Come si è detto, la tassellazione tridimensionale formulata da L. Danzer è costituita dall'aggregazione di 4 tasselli che riempiono lo spazio senza lacune e sovrapposizioni.

Si è resa necessaria la sistematizzazione in tabella sintetica (FIG.126) delle informazioni dimensionali sui quattro tasselli tetraedrici A, B, C e K, tratte dagli scritti di Ludwig Danzer<sup>324</sup> e Dirk Frettlöh<sup>325</sup> e dagli studi del Prof. M. Paolini<sup>326</sup>, individuando le corrispondenze tra i quattro tasselli fondamentali, ai fini della loro aggregazione, si nota infatti come ciascun tetraedro contenga almeno una faccia di un altro dei quattro. Ogni tassello è proporzionato secondo regola aurea, insita nella geometria del pentagono regolare, quindi nella simmetria quintupla.

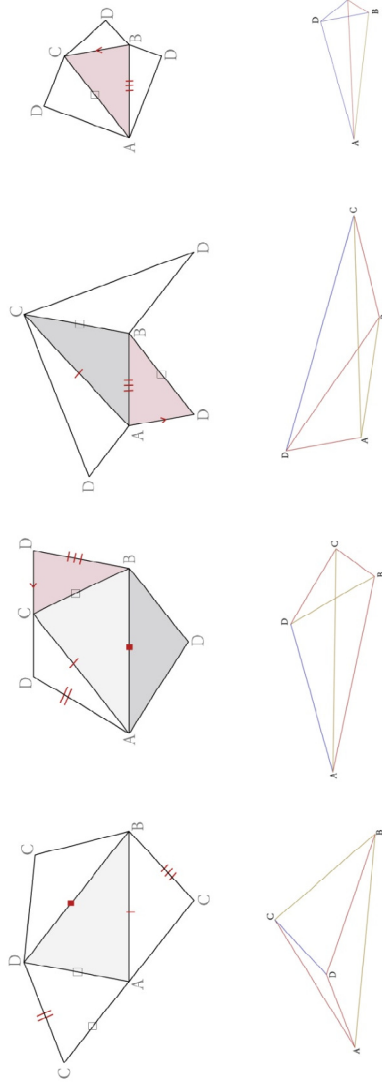
---

<sup>323</sup> Qui termina la traduzione italiana, a cura dell'autrice R. Gadaleta, delle informazioni biografiche di L. Danzer riportate nella premessa *Special issue in honor of Ludwig Danzer's 80<sup>th</sup> birthday*, di Nikolai Dolbilin, Egon Schulte, in *European Journal of Combinatorics*, Issue 8, n. 29, Elsevier, 2008, pp.1801-1802, il testo originale si riporta in VI. Apparati, paragrafo VI.2

<sup>324</sup> DANZER LUDWIG, *Three-dimensional analogs of the planar Penrose tilings and quasicrystals*, in "Discrete Mathematics", n. 76, 1989, pp.1-7 (paper received on October 1988), il testo originale si riporta in VI. Apparati, paragrafo VI.1

<sup>325</sup> FRETTLÖH DIRK, *Icosahedral tilings in  $R^3$ : the ABCK tilings*, consultabile online su <http://www.math.uni-bielefeld.de/baake/frettlöe/papers/ikosa.pdf>

<sup>326</sup> Le informazioni sono state tratte dai dati scritti e multimediali del Prof. M. Paolini presenti online su <http://danzer.dmf.unicatt.it/>



TILE A	TILE B	TILE C	TILE K
AD, AC	CD	AD	CB
BC	BC	CB, BD	AC
BD	AB		$= r\varphi^2 = 4,977$
AB	BD	AB	$= y\varphi = 2,802$
	AC	AC	$= y\varphi^2 = 4,532$
			$= \frac{1}{2} b = 1$
CD	AD		$= b\varphi = 3,236$
			$= (b\varphi)/2 = \varphi = 1,618$
		CD	$= b\varphi^2 = 5,234$
			$= \frac{1}{2} b\varphi^2 = \varphi^2 = 2,617$

126. R. Gadaleta,  
Tabella comparativa  
dei quattro tetraedri  
individuati da  
Ludwig Danzer



Questo determina che è possibile suddividere ogni tassello, analogamente a quanto avveniva nella tassellazione di R.Penrose, in copie simili ai tetraedri di partenza in modo frattale.

Attraverso la realizzazione di 48 modelli di carta dei quattro tasselli fondamentali (FIG.127) al fine di comprendere e verificare la loro morfologia, si deduce infatti che la loro aggregazione può essere composta da più tetraedri di tipi diversi oppure da più tetraedri dello stesso tipo aggregati con le loro rispettive copie speculari (FIG.128).

L'aggregazione può dunque costituire o meno un insieme autosimile ad uno dei quattro tetraedri di partenza.

All'aggregazione dei diversi tipi di tetraedri si riferiscono alcune esperienze che descrivono lo stato dell'arte sulla realizzazione della tassellazione di Danzer, ottenuta con sistema strutturale ad aste e nodi, come avviene nel progetto *Tetras* per un impianto di energia solare sito ad Abu Dhabi di Ann Preston e Roger White datato al 2010 (FIG.130), nell'installazione scultorea *Danzer* di Cecil Balmond esposta nel 2010 presso la Tokyo Opera City Art Gallery (FIG.132), nel contenimento del sistema illuminotecnico *Danzer Light* progettato dal GXN team<sup>327</sup> in Danimarca nel 2010 (FIG.133).

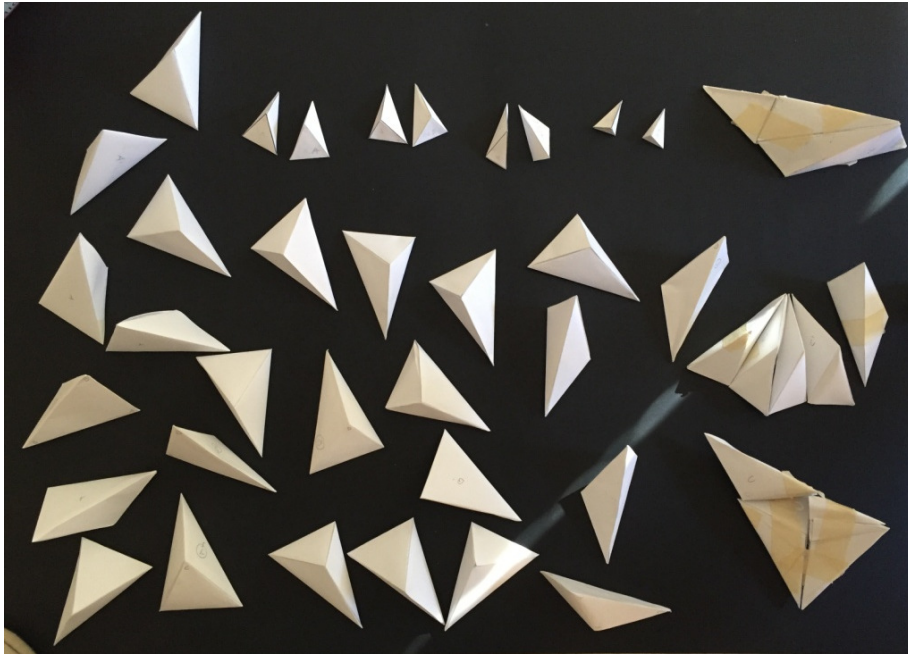
Cercando di ricondurre la tassellazione di Danzer alla morfologia della sfera e quindi all'apparecchiatura della cupola, forma intellegibile propria del linguaggio classico dell'architettura stereotomica, che trova eleganza nell'espressione euritmica della sua costruzione modulare che ne dichiara la legge compositiva, è stato condotto lo studio della tassellazione attraverso i modelli in carta ed il loro disegno attraverso i software di modellazione tridimensionale *AutoCAD*® 2012, *Rhinoceros*® 5.0, e *3ds Max 2015 (3d Studio Max 2015)*.

Da queste analisi e dagli studi di D. Frettlöh<sup>328</sup> sulla tassellazione di Danzer (FIG.129) si è dedotto che aggregando opportunamente copie di un tetraedro e del suo speculare, si ottengono tassellazioni spaziali a

---

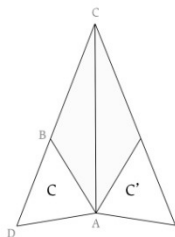
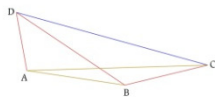
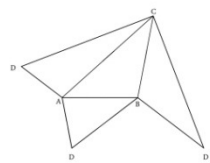
<sup>327</sup> *Danzer Light*, GXN team di ricerca di architettura & design, composto da Kim Herforth Nielsen, Kasper Guldager Jørgensen, Thiru Manickam, Thomas Holst Madsen and David Ole Wolthers, Copenhagen, Danimarca, 2010

<sup>328</sup> FRETTLÖH DIRK, *Icosahedral tilings in  $R^3$ : the ABCX tilings*, consultabile online su <http://www.math.uni-bielefeld.de/baake/frettlöe/papers/ikosa.pdf>



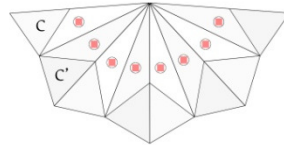
127. R.Gadaleta,  
*Alcuni dei modelli  
realizzati in carta  
dei tetraedri e  
delle loro copie  
speculari, fotografia*

Tetraedro C :

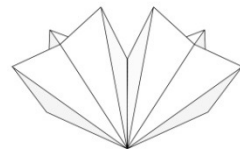


Aggregazione del tetraedro C  
con il speculare C',  
secondo lo spigolo AC

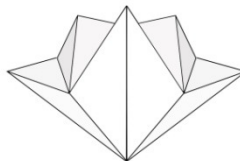
Fronte



Configurazione 1.

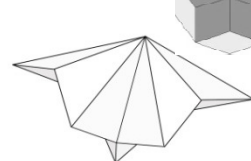
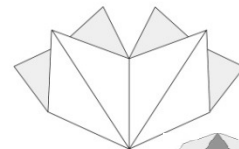
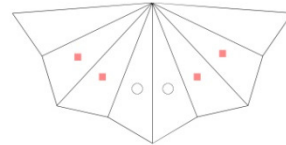


Configurazione 2., unendo ■

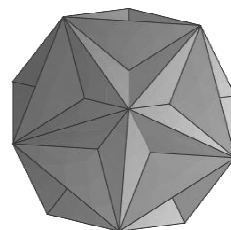
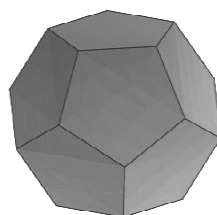
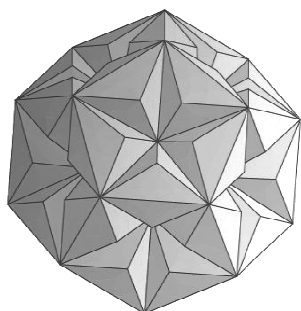


Configurazione 3., unendo ○

Retro

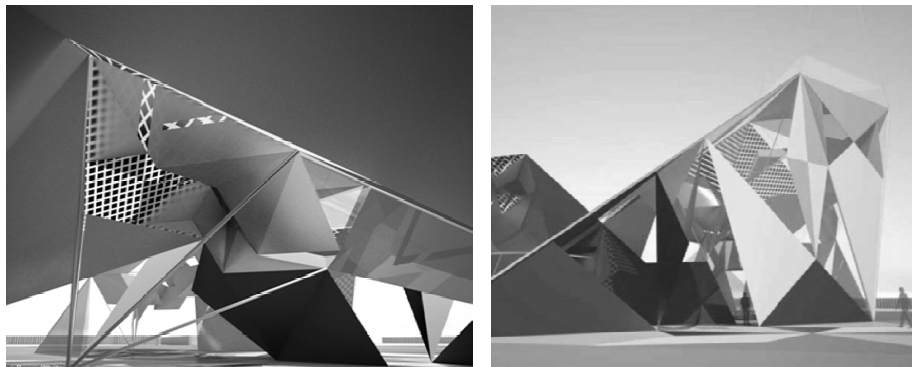


128. R. Gadaleta,  
*Aggregazione del  
tetraedro C con il  
suo simmetrico a  
formare simmetria  
quinaria, disegno  
infografico*



129. Dirk Frettlöh,  
*Icosahedral tilings in  
 $R^3$ : The ABCK tilings,*  
l'aggregazione di  
alcuni tetraedri e  
delle loro copie  
speculari genera  
poliedri a simmetria  
quinaria

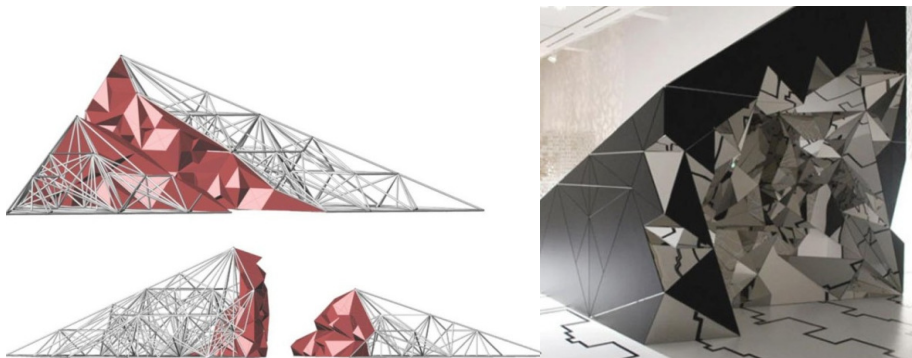
130. R. White,  
A. Preston,  
*Tetras*, Progetto  
per un impianto  
di energia solare,  
2010, Abu Dhabi



131. A. Preston,  
Aggregazione dei  
quattro tetraedri  
di L. Danzer,  
2010



132. C. Balmond,  
*Danzer*, 2010,  
Tokyo Opera  
City Art Gallery



133. GXN team,  
*Danzer Light*,  
2010, Danimarca



simmetria quinquaria, che chiudono lo spazio secondo forma geometrica regolare, spesso individuata da diversi tipi di poliedri (FIG.129) a cui è opportuno giungere per poter ricondurre sulla superficie della sfera, attraverso proiezione centrale, la tassellazione studiata.

In particolare essendo il tetraedro K, l'unico tassello con maggiore regolarità morfologica, poiché costituito da una piramide avente per base un triangolo rettangolo ed uno spigolo pari esattamente al numero aureo  $\phi$ , si è scelto di aggregare quest'ultimo con copie speculari dello stesso. Si aggregano quindi tre tasselli K e tre tasselli costituenti tre copie speculari dello stesso, facendo corrispondere tutti gli spigoli costituenti l'altezza delle sei piramidi. Aggregando venti copie dell'unione delle sei piramidi così ottenuta attraverso le loro facce, si ottiene il triacontaedro rombico aureo, composto da trenta facce uguali costituite da rombi aurei, morfologia che caratterizza la geometria quintupla dei quasicristalli (FIG.134). Questa geometria si rivela di particolare interesse poiché permette di giungere alla definizione di un poliedro attraverso uno dei tetraedri individuati da L. Danzer, ai fini di discretizzare la sfera attraverso la sua suddivisione che produce elementi autosimili incastrati secondo tassellazione a simmetria quinquaria, per studiarne la traducibilità in conci lapidei.

Per tradurre la geometria in forma costruita è quindi necessario il passaggio dalla morfologia del triacontaedro a quella del triacontaedro sferico (FIG.77). In tal modo è possibile ottenere una emisfera, quindi una cupola emisferica, divisa in triangoli sferici caratteristici minimi corrispondenti alla base sfericizzata del tetraedro K ed a quella del suo simmetrico (FIG.121). Come si è detto in precedenza, si verifica a questo punto della trattazione che per giungere alla definizione dell'apparecchiatura della cupola attraverso la suddivisione planare del triangolo minimo caratteristico, in questo caso seguendo la suddivisione studiata da Danzer, devono essere sempre considerate contemporaneamente entrambe le figure, quella del triacontaedro e del suo sferico.

Sapendo, infatti, che il tetraedro K può essere suddiviso secondo regola frattale in parti simili a se stesso ed agli altri tre tasselli fondamentali, secondo le relazioni individuate nella tabella redatta da



134.

R. Gadaleta,  
*Tassellazioni  
a simmetria  
quinaria,  
relazione  
tra Penrose,  
Danzer ed i  
quasicristalli,*  
tavola sintetica,  
disegno  
infografico

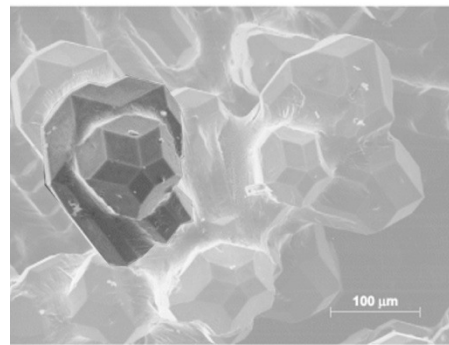
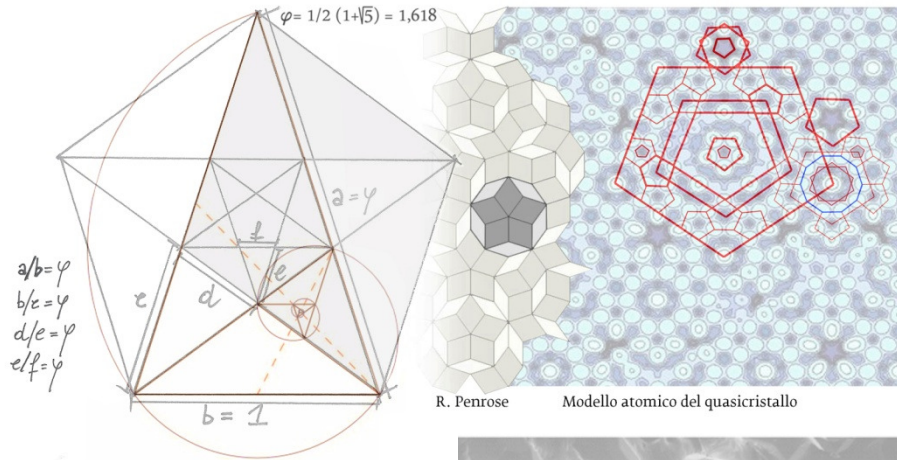
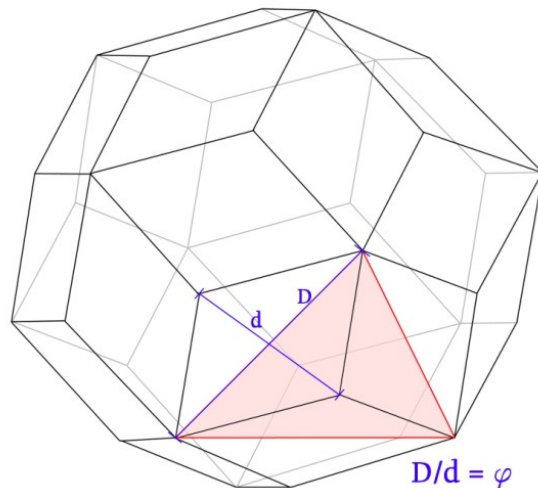
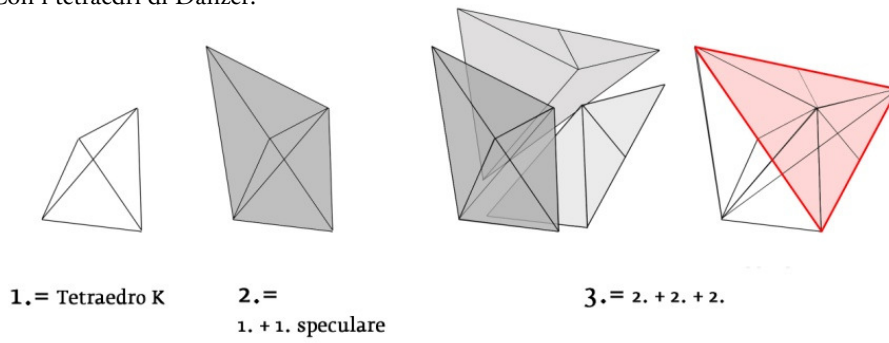


Immagine al microscopio del quasicristallo di alluminio, rame e ferro

Con i tetraedri di Danzer:



4. = Triacentaedro rombico,  
3. x 20

Charis Charalampous<sup>329</sup> (FIG.135) qui ridisegnata a mano al fine di comprenderne le regole di corrispondenza, poiché il triangolo rettangolo della base è simile a quello che ne costituisce la faccia laterale, si suddivide il tetraedro K nel suo autosimile TK' e nel tetraedro B. A sua volta il TK' può essere suddiviso nel suo autosimile TK'', autosimile quindi anche al tetraedro K di partenza, e nell'autosimile del tetraedro B, indicato con TB'. Inoltre anche il tetraedro B e quindi il anche suo autosimile TB', può suddividersi in parti simili ai tetraedri fondamentali K, C e B, come evidenziato dalla tabella di Charalampous<sup>330</sup>, secondo un procedimento che si ripete quindi all'infinito (FIG.136).

La suddivisione si ferma lì dove gli elementi raggiungono dimensioni medie, accettabili per il dimensionamento dei conci precedentemente effettuato che prevede le dimensioni massime della lunghezza della faccia di estradosso del concio pari a 30 cm o 40 cm.

Questa scomposizione geometrica è servita, infatti, per giungere alla suddivisione della base del tetraedro K, corrispondente al triangolo sferico caratteristico minimo, al fine di riportarla su tutta la superficie emisferica per tradurla in apparecchiatura lapidea.

Per determinare l'ammorsamento della tassellazione del triangolo minimo con quelli adiacenti è necessario affiancare planarmente tale triangolo con la sua copia speculare lungo il cateto maggiore e successivamente con la copia speculare dei due triangoli così ottenuti lungo i loro cateti minori, ottenendo il rombo aureo corrispondente ad una delle facce rombiche del triacontaedro.

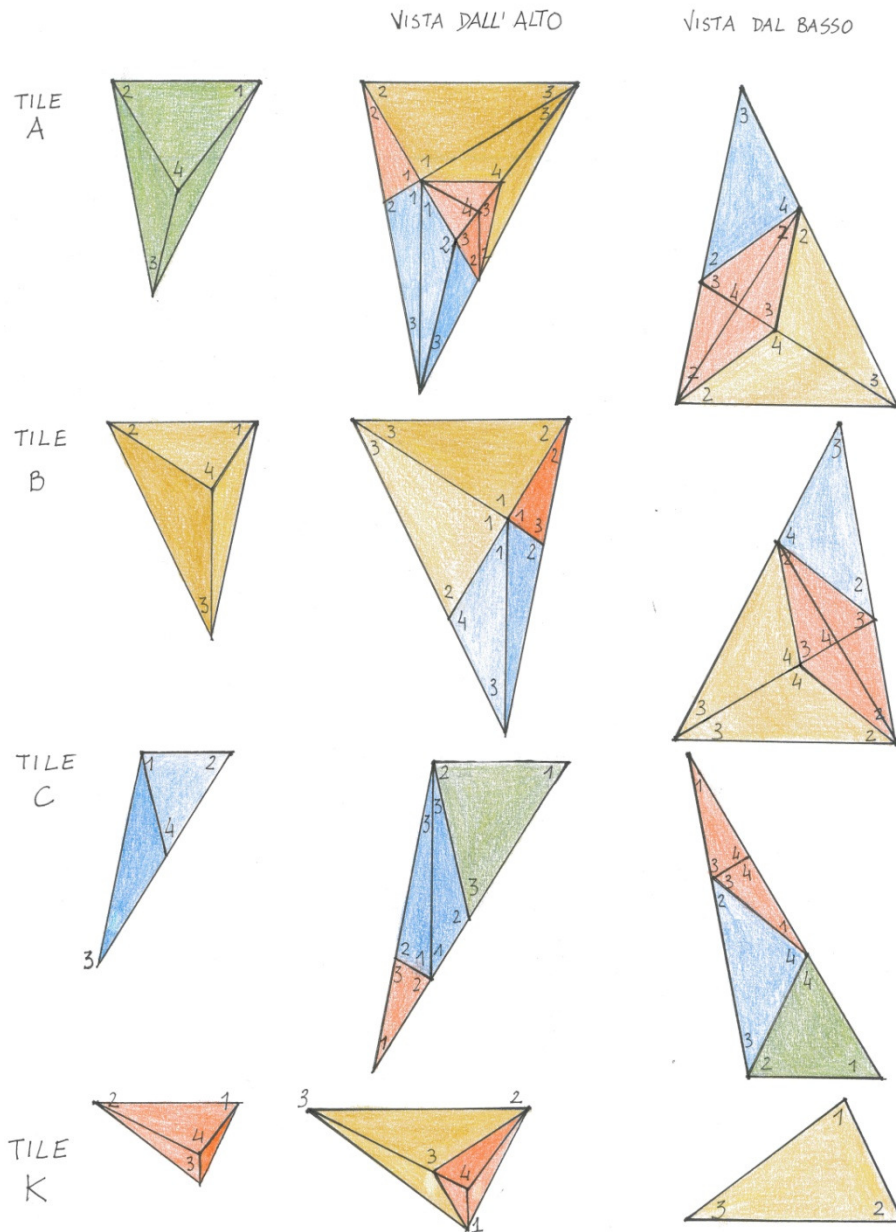
Come si evince dai disegni realizzati (FIG.137), il rombo aureo è anch'esso suddivisibile in modo autosimile secondo regola frattale, quindi ogni rombo contiene infiniti rombi aventi le sue stesse proporzioni in scala diversa.

---

<sup>329</sup> CHARALAMPOUS CHARIS, *Responsive spatial growth of the Danzer packing*, dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Adaptive Architecture & Computation from the University of London, Bartlett School of Graduate Studies University College London, September 2007, pag. 24

<sup>330</sup> *Ibidem*

135. R. Gadaleta,  
*Regole aggregative  
dei tetraedri,*  
ridisegno  
a mano della  
tabella di C.  
Charalampous

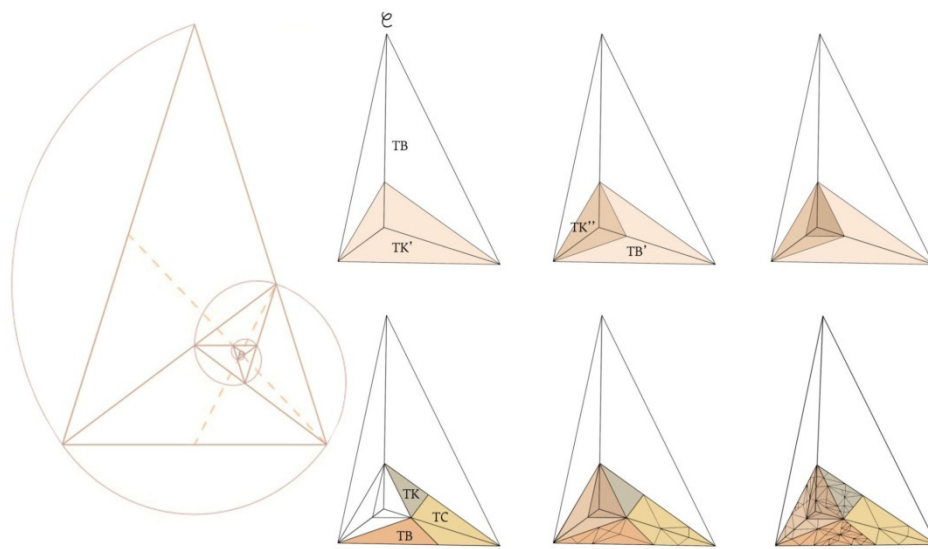




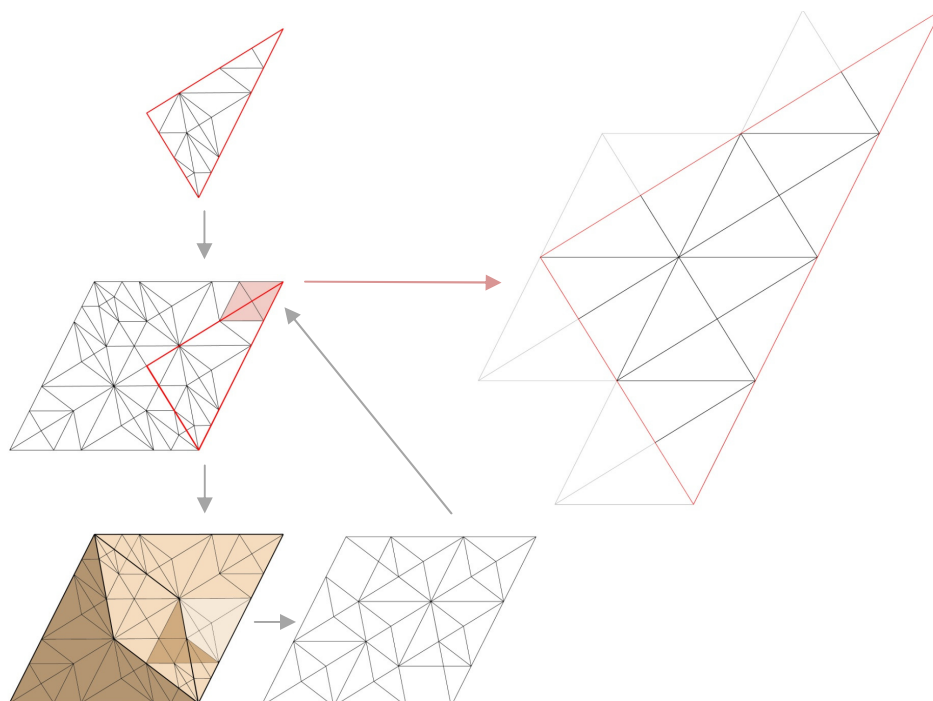
Viene a determinarsi una suddivisione del rombo aureo che individua un tassello “aquilone” ed uno “freccia” (evidenziati rispettivamente in sabbia e marrone in FIG.137) che si aggregano incastrandosi tra loro, similmente alla tassellazione di Penrose, ma non ugualmente.

Infatti il rombo aureo che costituisce una delle facce del triacontaedro avente il rapporto tra la diagonale maggiore e quella minore pari al numero aureo  $\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1,618$ , inscritto nel rettangolo aureo è diverso dal rombo aureo oblato caratteristico della tassellazione di Penrose. Quest'ultimo infatti tassella il piano secondo l'unione radiale dei suoi due lati intorno al centro costituito dal vertice posto sulla diagonale maggiore senza lacune, costituendo la stella pentagonale nella *tassellazione aperiodica quinaria di Penrose P3*, poiché tali rombi derivano dal pentagono e quindi compongono una figura pentagonale chiusa se accostati tra loro. Al contrario la stessa aggregazione radiale planare del rombo aureo costituente una delle trenta facce del triacontaedro non costituisce una configurazione chiusa, producendo una lacuna, poiché tali rombi si aggregano senza lacune soltanto nello spazio tridimensionale costituendo il poliedro del triacontaedro (FIG.138). Questa differenza spiega la relazione analogica che intercorre tra la tassellazione planare di R. Penrose e quella spaziale di R. Amman ed L. Danzer: la proiezione sul piano dell'aggregazione spaziale dei triacontaedri, aventi quindi facce rombiche uguali tra loro, produce la geometria composta da due rombi diversi della *tassellazione aperiodica quinaria di Penrose P3*, dove i rombi prolatti corrispondono alle proiezioni sul piano delle facce del triacontaedro che appaiono dunque viste di scorcio. Questo costituisce anche il legame tra struttura spaziale triacontaedrica del quasicristallo e la sua proiezione planare ottenuta in microscopia elettronica a trasmissione ad alta risoluzione, sovrapponibile ad una tassellazione bidimensionale avente simmetria quinaria di Kepler o di Penrose, dalla prima derivata, come si è detto in precedenza (FIG.134).

136. R. Gadaleta,  
*Divisione frattale*  
*del TK*, disegno  
infografico



137. R. Gadaleta,  
*Suddivisione del*  
*triangolo minimo*  
*con la tassellazione*  
*di L. Danzer*,  
disegno  
infografico



Tale legame porta ad una considerazione architettonica: se la cupola fosse composta dall'aggregazione di conci aventi morfologia triacontaedrica visibile all'intradosso, la proiezione di tale configurazione originerebbe una pavimentazione i cui tasselli risulterebbero uguali a quelli della *tassellazione aperiodica quinaria di Penrose P3*.

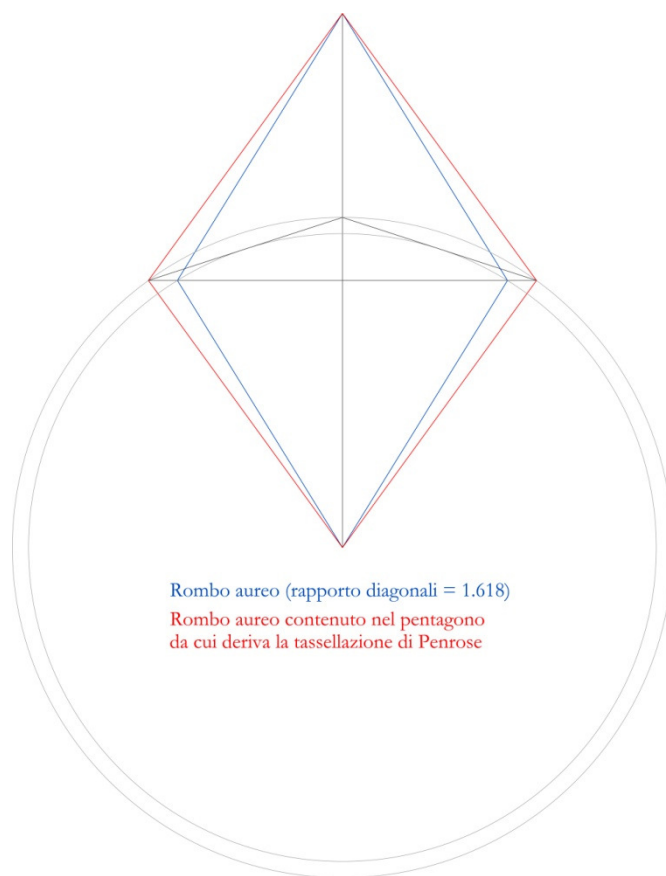
Tornando alla suddivisione planare del rombo di Danzer, ogni sua parte può essere quindi suddivisa in tasselli "frece" ed "aquiloni". Poiché i rombi autosimili hanno le stesse proporzioni, questa tassellazione ottenuta può essere ricondotta al rombo evidenziato in rosso in FIG.137, ridimensionando la tassellazione all'interno del triangolo che sarà suddiviso in due rombi e quattro semi-rombi, come evidenziato in FIG.137 al fine di ottenere una matrice geometrica quanto più omogenea possibile nelle proporzioni dei suoi tasselli costitutivi in modo da poterle tradurre più facilmente e più concretamente in conci lapidei.

Si deduce quindi che la divisione del rombo può essere costituita da numerose varianti date dalla diversa disposizione dei tasselli "frece" ed "aquiloni". In FIG.139 ne sono individuate tre, scelte in base alla loro aggregazione all'interno del triangolo secondo un criterio statico, che corrisponde al mutuo incastro ed allo sfalsamento degli elementi tra loro ed all'ammorsamento con gli elementi dei triangoli adiacenti, seguendo i gruppi di simmetria della figura, e secondo criterio estetico che permette l'equilibrata alternanza degli elementi di diversa geometria tra loro, cercando di definire una configurazione statica ed estetica interdipendenti nella tassellazione architettonica.

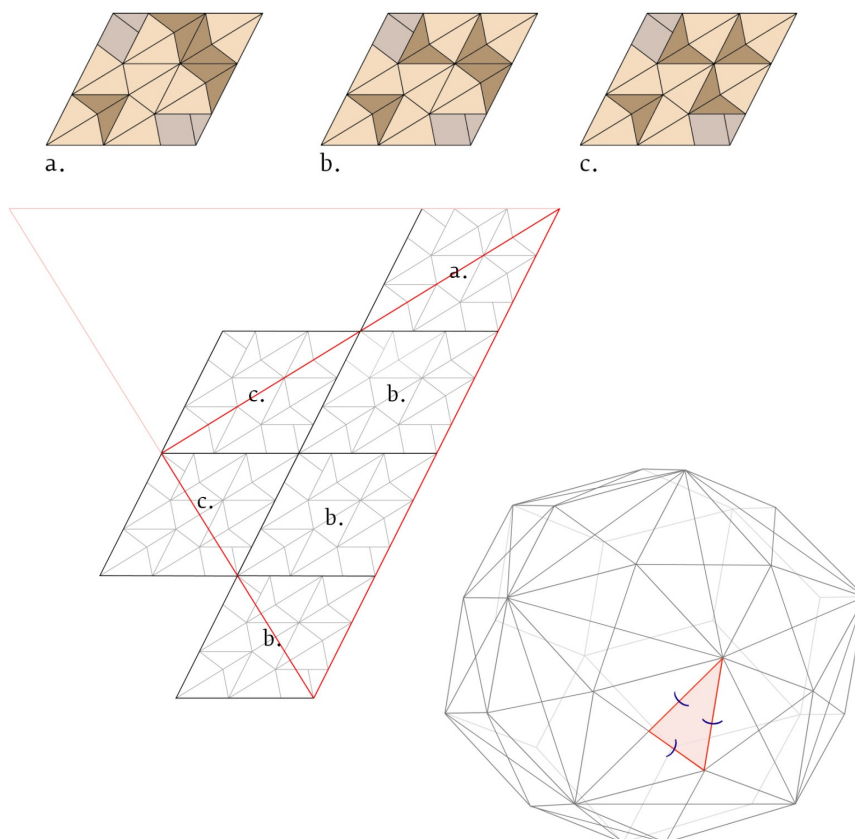
In questi passaggi logici si evince la ricerca della contemporanea osservanza dei requisiti che la tassellazione deve rispettare, di cui si è detto nel paragrafo III.5.1, sia geometrici, sia statici, sia estetici, valutati contemporaneamente nel piano e nella configurazione spaziale che potremmo determinare.

A questo punto dello studio si rende, infatti, necessario un disegno planare dello sviluppo tassellato della piramide pentagonale del triacontaedro evidenziata in rosso chiaro nella figura FIG.140, per verificare gli ammorsamenti tra i tasselli e definire la morfologia dei

138. R. Gadaleta,  
*Diversi rombi aurei*, disegno  
infografico



139. R. Gadaleta,  
*Composizione del triangolo minimo con i rombi divisi secondo geometria di L. Danzer*,  
disegno  
infografico



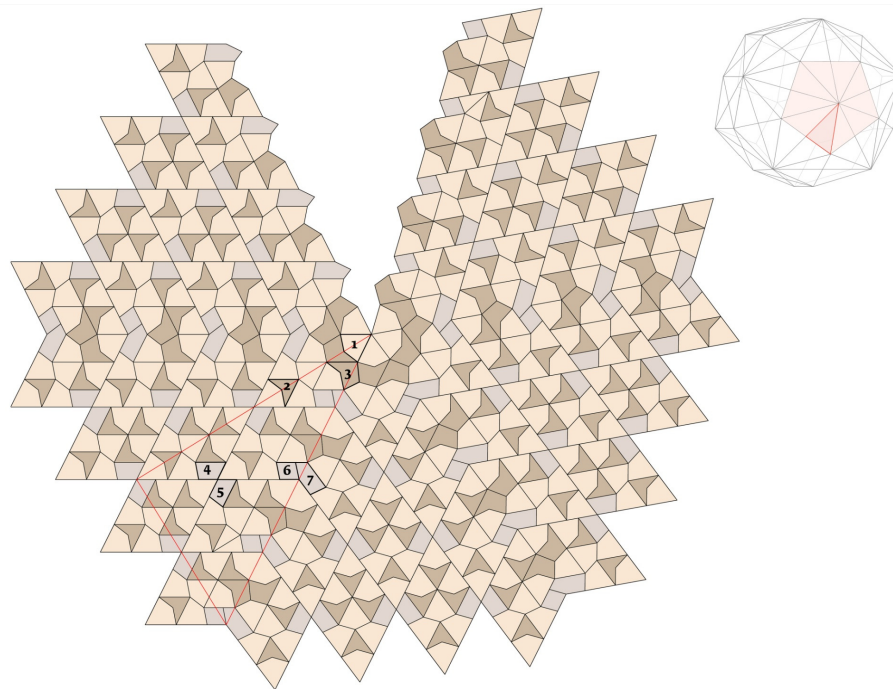
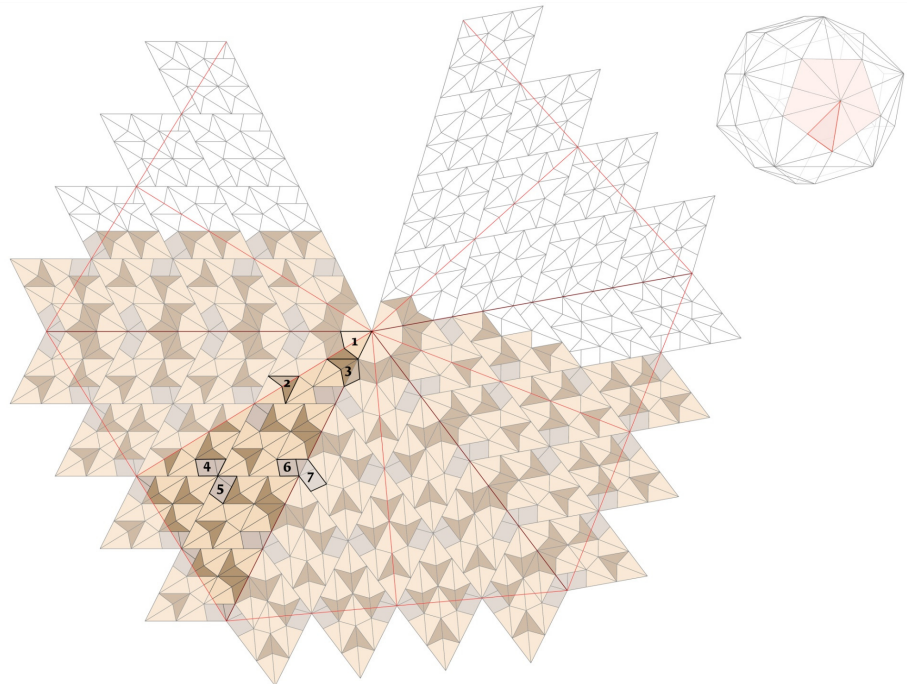
conci-tipo invarianti all'interno della cupola. Come si evince dalla FIG.140 in questa fase di studio si contano sette morfologie simili dei conci-tasselli (FIGG.140,141) uguali nel piano, ma non sulla superficie sferica a causa della deformazione inevitabile causata dal cambiamento delle caratteristiche spaziali della superficie bidimensionale rispetto a quella tridimensionale complessa a doppia curvatura. I conci-tasselli sono stati individuati in modo da garantire l'incastro che si origina all'interno dei rombi più piccoli in cui è suddiviso il triangolo minimo caratteristico evidenziato in FIG.139, lo sfalsamento dei conci sui lati dei rombi di dimensioni maggiori che lo compongono, e l'ammorsamento degli stessi sui lati del triangolo caratteristico con gli elementi adiacenti, in modo che non ci sia linea di separazione e quindi di discontinuità della maglia strutturale.

Le facce di letto di ogni concio sono porzioni sferiche, le facce laterali di giunto sono radialmente collocate verso il centro della semisfera inscritta nella cupola, mantenendo costanti tutti i giunti e lo spessore dei conci.

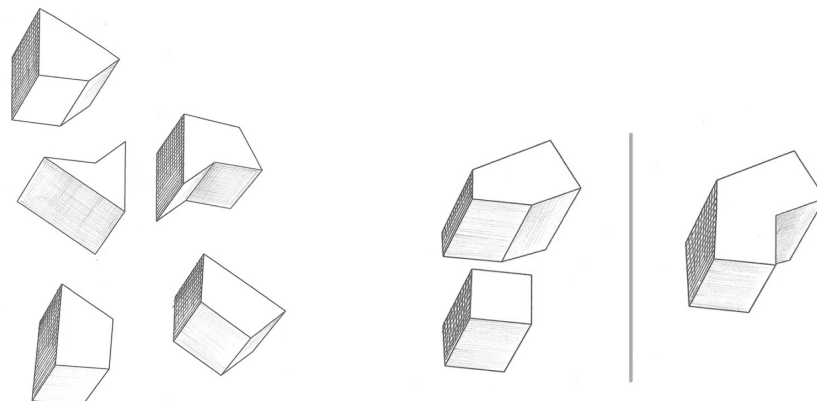
La FIG.142, illustra il metodo proiettivo adoperato per trasferire la tassellazione dal piano su cui essa giace costituito dalla faccia rombica del triacontaedro, alla superficie sferica, considerando la sfera contenuta nel poliedro ai fini di una più attuabile definizione del modello tridimensionale attraverso il software *AutoCAD® 2012*.

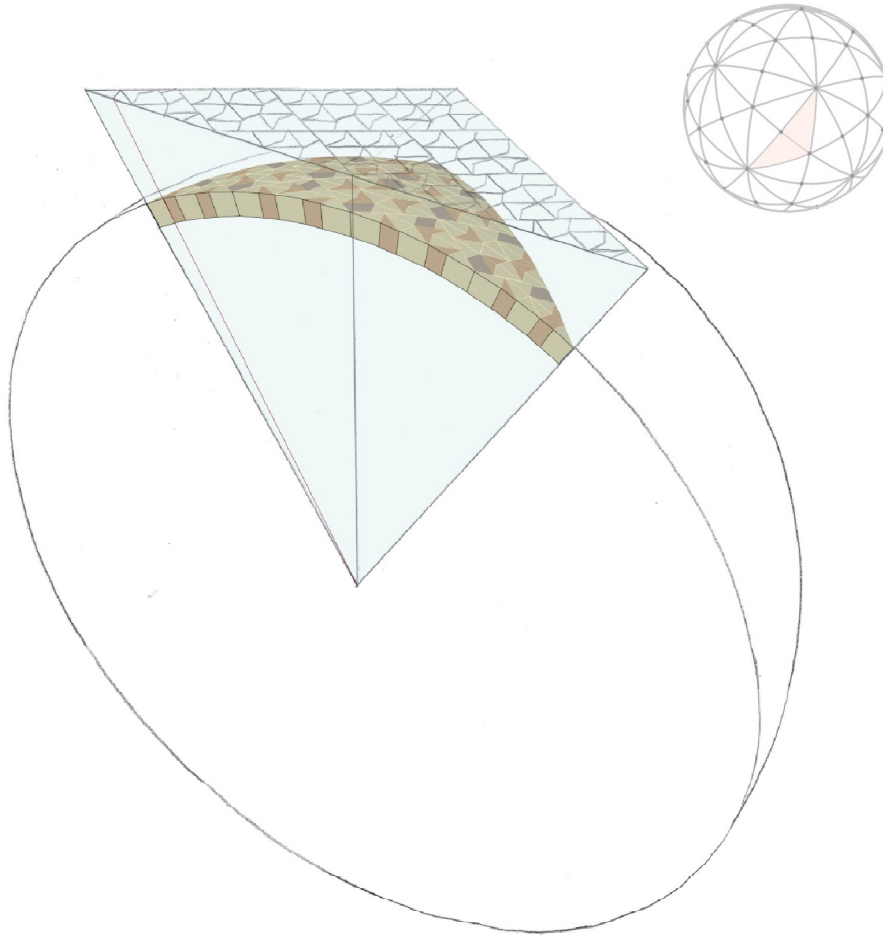
In FIG.143 è rappresentato il modello info-grafico tridimensionale ottenuto attraverso il software *AutoCAD® 2012*, aggregando radialmente e simmetricamente tutte le piramidi di cui è costituito il triacontaedro, corrispondenti al tetraedro K di Danzer, contenenti la corrispondente tassellazione sferica. La figura così determinata corrisponde alla trasformazione topologica sferica della piramide pentagonale evidenziata nella figura più piccola del triacontaedro in rosso. Considerando solo la tassellazione sferica, si ottiene così la calotta pentagonale rappresentata in FIG.145, avente spessore pari a 30 cm, corrispondente geometricamente ad una porzione della sfera, derivata dalla tassellazione di L. Danzer.

140. R. Gadaleta,  
*Disegno planare  
della tassellazione  
derivata dalla  
geometria di  
Danzer,*  
disegno  
infografico

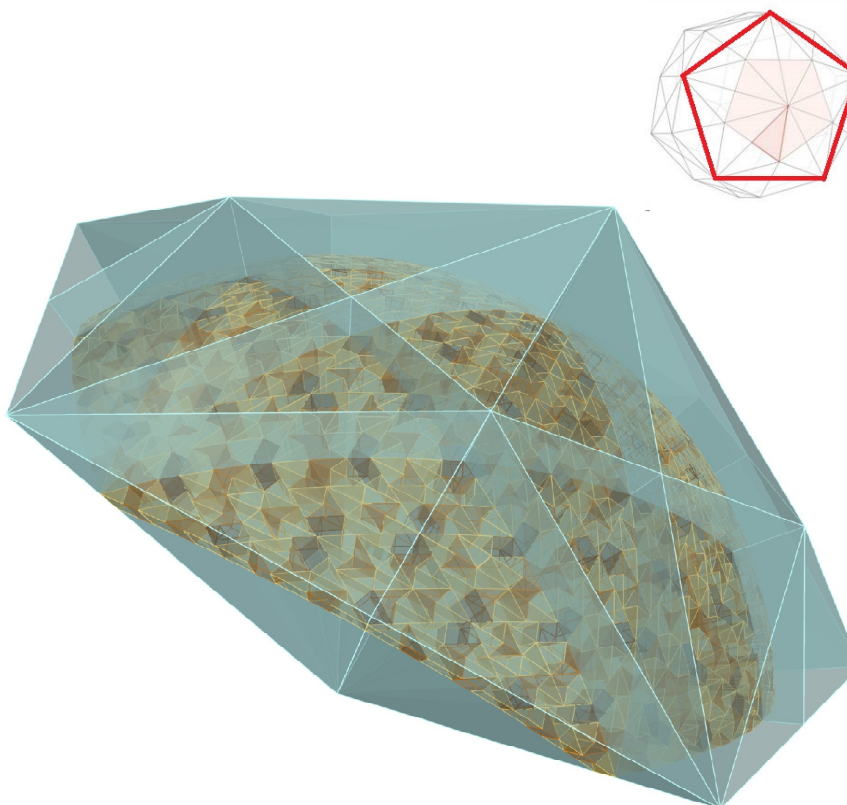


141. R. Gadaleta,  
*Configurazione  
ipotizzata dei conci  
aventi simile  
morfologia,*  
disegno a mano  
libera





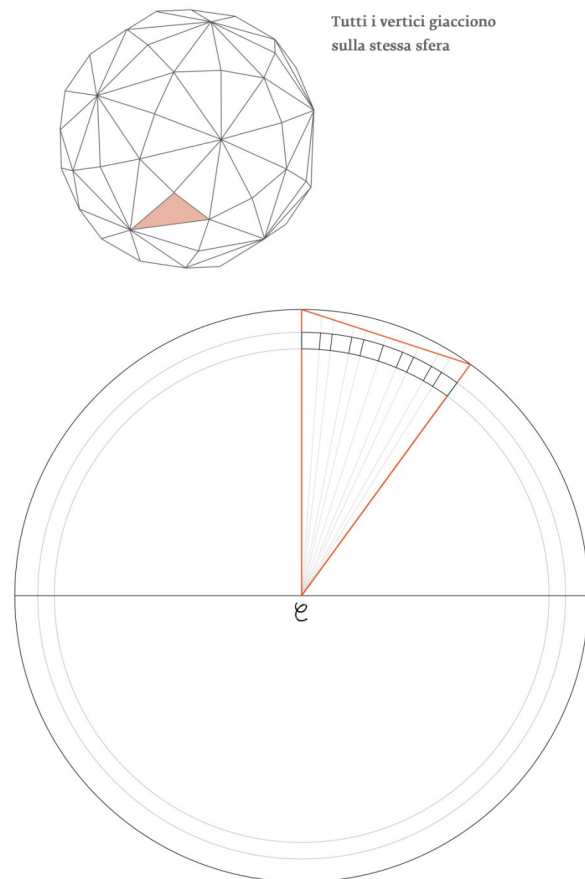
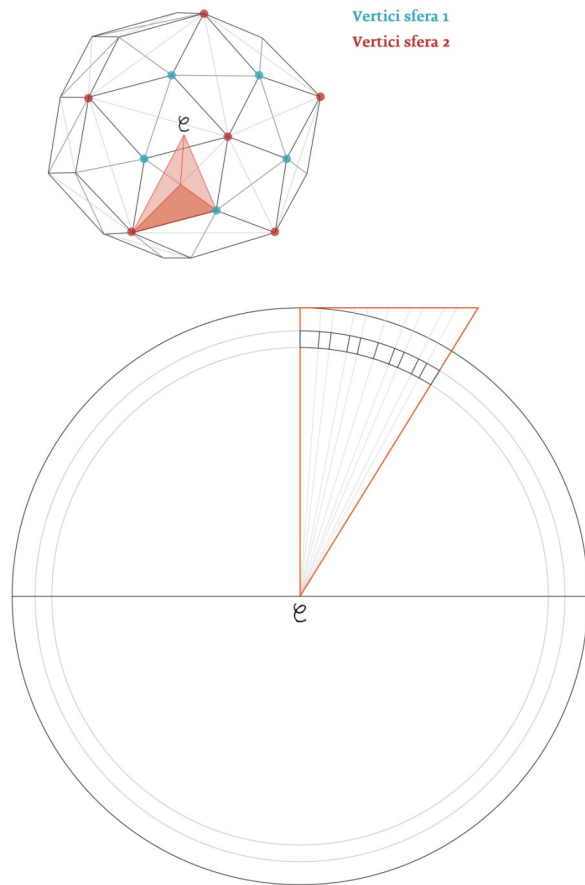
142. R. Gadaleta,  
*Dal triangolo  
minimo del poliedro  
al corrispondente  
sferico*, disegno a  
mano ed infografico



143. R. Gadaleta,  
*Aggregazione delle  
piramidi costituite  
dai tetraedri K,  
contenenti la  
corrispondente  
deformazione  
topologica sferica*,  
disegno infografico  
tridimensionale



144. R. Gadaleta,  
*Proiezioni di  
suddivisioni di  
facce poliedriche  
differenti sulla  
sfera, originano  
diversi risultati,  
disegno infografico*



Per estensione del metodo di simmetria radiale, ottenendo copie speculari di tale porzione così individuata, lungo il segmento congiungente il centro della calotta sferica con l'estradosso dei conci posti sul bordo di essa, è possibile rappresentare l'intera cupola (FIG.146).

Ponendo che il concio "aquilone" n.1 misuri 30 cm di spessore e 30 cm di lunghezza, si effettua nuovamente un calcolo dimensionale della cupola così ottenuta, avente quindi diametro pari a circa 9 metri.

Dal modello tridimensionale è emerso che i gruppi di conci di uno stesso tipo, quindi aventi la stessa geometria (FIGG.140,141), che si pensava inizialmente divergessero tra loro di pochi millimetri avendo approssimato la superficie sferica attraverso numerosi tasselli, differiscono tra loro di circa 4-5 cm, con una divergenza che aumenta progressivamente dal vertice del triangolo minimo caratteristico fino alla sua base. Il risultato è che il triangolo minimo caratteristico è composto da conci tutti diversi tra loro, numericamente pari a 65 conci-tipo invarianti, non considerando quelli del triangolo minimo simmetrico ad esso adiacente. Questo numero, quindi, non ottimizza la costruzione della cupola, se paragonato alle forme cupolate costruite descritte nel capitolo II ed alle forme presenti nelle tabelle illustrate nelle FIGG.124,125.

Proiettando radialmente sulla sfera la stessa suddivisione applicata alla faccia del triacontaedro geodetico, ottenuto ponendo tutti i suoi vertici ed i centri delle sue facce sulla medesima sfera, si ottiene una approssimazione più precisa ed uno scarto dimensionale dei conci ridotto, ma non se ne annullano le divergenze, permettendo di verificare e di comprendere come all'interno del triangolo minimo caratteristico non è possibile ottenere una divisione in molte porzioni uguali tra loro (FIG.144).

145. R. Gadaleta,  
*Suddivisione della  
sfera in elementi  
derivati dalla  
tassellazione di  
L. Danzer. Calotta  
pentagonale,*  
disegno infografico  
tridimensionale



146. R. Gadaleta,  
*Suddivisione della  
sfera in elementi  
derivati dalla  
tassellazione di  
L. Danzer. Calotta  
emisferica.* disegno  
infografico  
tridimensionale



L'apparecchiatura così individuata presente evidentemente molti punti critici: l'elevato numero dei conci, come si è detto, non ottimizza la forma architettonica cupolata, sono presenti piani di scorrimento obliqui costituiti dai lati dei rombi che non favoriscono l'azione efficace di cerchiatura svolta dai ricorsi orizzontali tradizionali, inoltre i conci aventi morfologia simili ad una "freccia" hanno angoli molto acuti che non permettono la lavorazione, quindi la produzione del concio, facilitandone la rottura.

Questa tassellazione, evidentemente non adoperabile come apparecchiatura della cupola, si è qui voluta comunque, poiché ha permesso di sviluppare lo studio verso un livello molto più alto di definizione e risoluzione dei problemi sopra descritti. Inoltre, permette di divulgare in lingua italiana il metodo la tassellazione di L. Danzer, poco conosciuto e di poter formulare delle ipotesi sull'ottimizzazione della tassellazione sferica appena descritta, dopo aver acquisito le conclusioni a cui giunge questo studio di ricerca.

## IV.2 Dalla tassellazione di Keplero all'apparecchiatura della cupola in pietra da taglio: dalla geometria alla forma costruita

### IV.2.1 La tassellazione quinaria definita da Kepler nell'*Harmonices Mundi*: deduzione planare dell'apparecchiatura stereotomica e definizione dei conci-invarianti

Riscontrando difficoltà nel tradurre la tassellazione matematica tetraedrica di L. Danzer in una apparecchiatura stereotomica costituita da conci in pietra da taglio, similmente a quanto avviene per la tassellazione di Penrose, ugualmente composta da tasselli aventi angoli molto acuti, si cerca di determinare conci di dimensioni maggiori costituiti da aggregazioni di più tasselli. Ma questo comporta la disgregazione della regola costitutiva della tassellazione e la sua bellezza, data dalle forme che si ripetono incastrandosi in modo alternato fra esse secondo simmetria quinaria, e vengono sempre a determinarsi problemi statici derivati dalle estese linee di discontinuità, e quindi di "smagliatura" all'interno della tessitura muraria.

Rilevando che la tassellazione definita da R. Penrose è composta da decagoni caratterizzati dalla suddivisione radiale dei tasselli al loro interno e sapendo che i conci all'interno del triangolo minimo, dopo essere stati proiettati sulla sfera, hanno dimensioni diverse tra loro ed avendo, inoltre, acquisito le regole del metodo proiettivo che trasferisce la geometria del poliedro sulla sfera ad esso circoscritta, si cerca una tassellazione analoga a quella di Penrose, avente figure circolari poste sui piani di simmetria del poliedro ovvero sui lati del triangolo caratteristico minimo, oppure poste in corrispondenza dei vertici del poliedro, in modo tale che la loro proiezione sulla sfera, determini la possibilità di scomporli in figure tutte uguali o simili tra loro riducendo il numero di conci diversi, attraverso l'utilizzo della simmetria icosaedrica, definita, come si è detto, dal gruppo di simmetria dato dalla corrispondenza duale del dodecaedro sferico e dall'icosaedro sferico. Poiché i poligoni decagonali sono presenti nella

tassellazione illustrata da Kepler nella *figura Aa*<sup>331</sup> presente nell'*Harmonices Mundi*, descritta nel paragrafo III.5.2., tassellazione che costituisce il modello storico da cui deriva la suddivisione di Penrose e successivamente quella di L. Danzer, si sceglie di studiare tale modello, dove sono è presente la forma decagonale di alcuni tasselli caratteristica della divisione di Penrose, ma sono assenti le “frecce” che costituivano tasselli aventi angoli acuti, di difficile traduzione nei conci lapidei sferici.

La configurazione dei tasselli nella *figura Aa* (FIGG.104,147) risulta, infatti, maggiormente traducibile nella morfologia dei conci lapidei a doppia curvatura sferica, poiché i tasselli definiti da Kepler non possiedono angoli acuti ad eccezione della stella costituita dal pentagramma che è possibile scomporre ed aggregare ai conci limitrofi.

Suddividendo la tassellazione di Kepler nel triangolo caratteristico minimo e nel suo simmetrico, costituenti uno dei cinque triangoli isosceli in cui è divisibile il pentagono secondo le sue mediane, come si è precedentemente illustrato, si determina la morfologia dei conci (FIG.147).

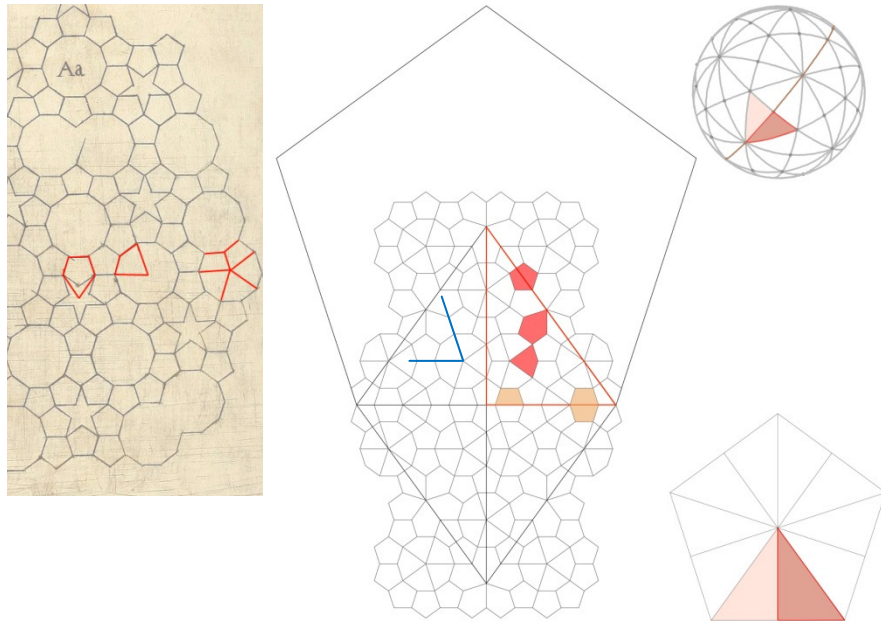
I pentagoni rimangono invariati, invece si suddivide la stella attraverso segmenti che collegano il suo centro agli angoli del pentagono toccati da due delle sue punte, ottenendo un concio pentagonale cuneiforme. Inoltre si suddividono i decagoni attraverso i segmenti che collegano il suo centro con cinque dei suoi vertici diametralmente opposti secondo cinque dei suoi assi di simmetria identificati con la metà di cinque delle sue diagonali, ottenendo conci morfologicamente simili agli “aquiloni” di Penrose, derivati appunto dalla suddivisione di Kepler.

Per determinare i conci di “cucitura” al bordo costituito dal lato minore del triangolo caratteristico, si esegue una copia speculare del triangolo caratteristico e del suo simmetrico così suddivisi, secondo il

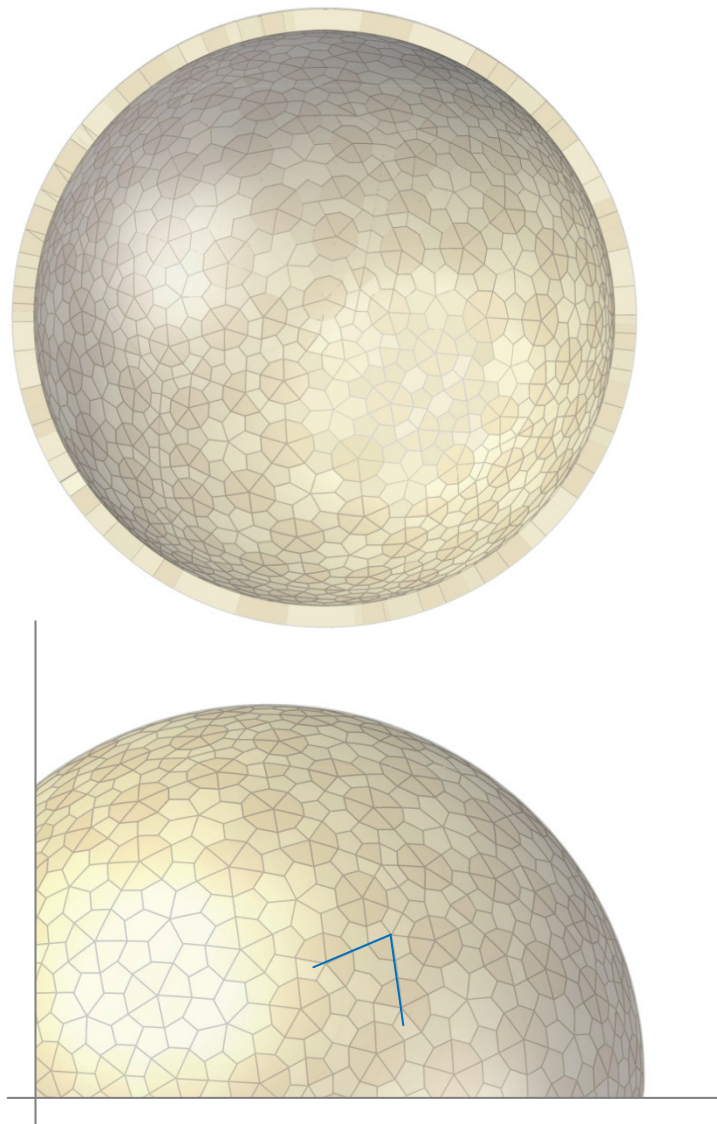
---

<sup>331</sup> VON KEPLER JOHANNES, *Harmonices Mundi*, Francoforte, Lincii Austriae, Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof. Excudebat Ioannes Plancus, 1619, Liber II, De Congruentia Figurarum Harmonicarum, conservato presso Smithsonian Libraries, Washington DC, figura Aa, tra pag. 58 e pag. 59

147. R. Gadaleta,  
*Studio della  
tassellazione di  
Kepler al fine di  
dedurne gli  
elementi costruttivi,*  
disegni infografici



148. R. Gadaleta,  
*Modello di studio  
dell'apparechiatura  
emisferica,* disegno  
infografico  
tridimensionale





loro cateto minore, configurando conci aventi forma di esagoni allungati sul bordo (FIG.147).

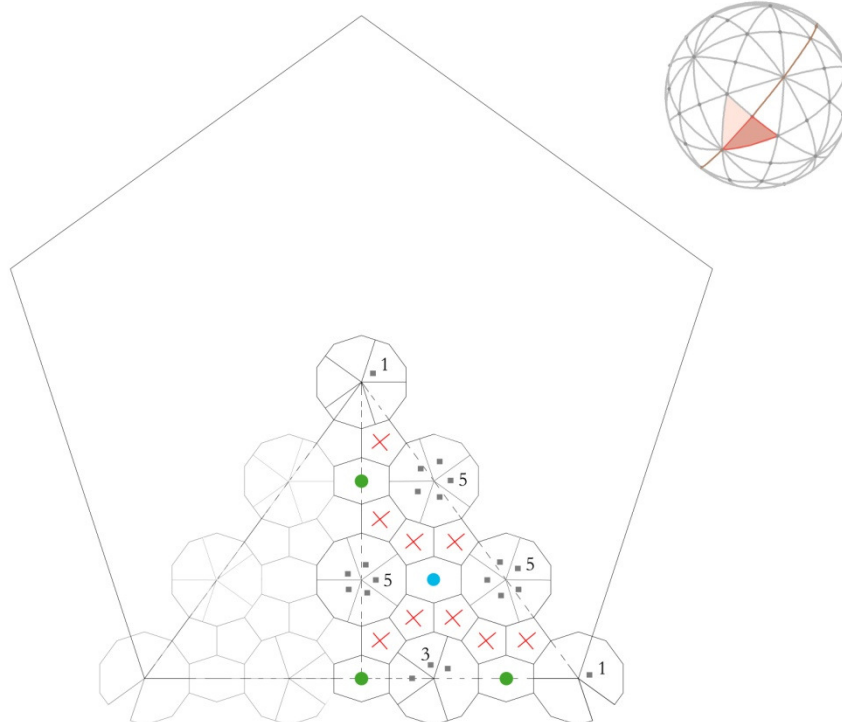
Si nota come sono ridotti i problemi di taglio dei conci lungo i lati del triangolo che coincideranno nella ripartizione sferica in triangoli caratteristici, con la base, ovvero con il piano di imposta della cupola. Il taglio avviene nella maggior parte dei casi lungo l'asse di simmetria dei conci, determinando dalla produzione di un concio due conci ugualmente adoperabili. Ma questo non avviene sempre, inoltre l'unione dei due decagoni nella tassellazione di Kepler produce tasselli di risulta trapezoidali che inficiano la morfologia della tassellazione, sia dal punto di vista geometrico, che da quello statico, poiché costituiscono prolungamenti dei giunti dei conci circostanti provocando linee di discontinuità della tessitura muraria, evidenziate con linee azzurre nelle FIGG.147,148.

Tali linee di discontinuità sono favorite dall'allineamento dei giunti corrispondenti alle facce laterali degli conci "aquiloni" con quelli dei conci limitrofi, questo suggerisce la rotazione dei giunti dei conci costituenti il decagono rispetto al suo centro cercando il corretto sfalsamento tra i giunti.

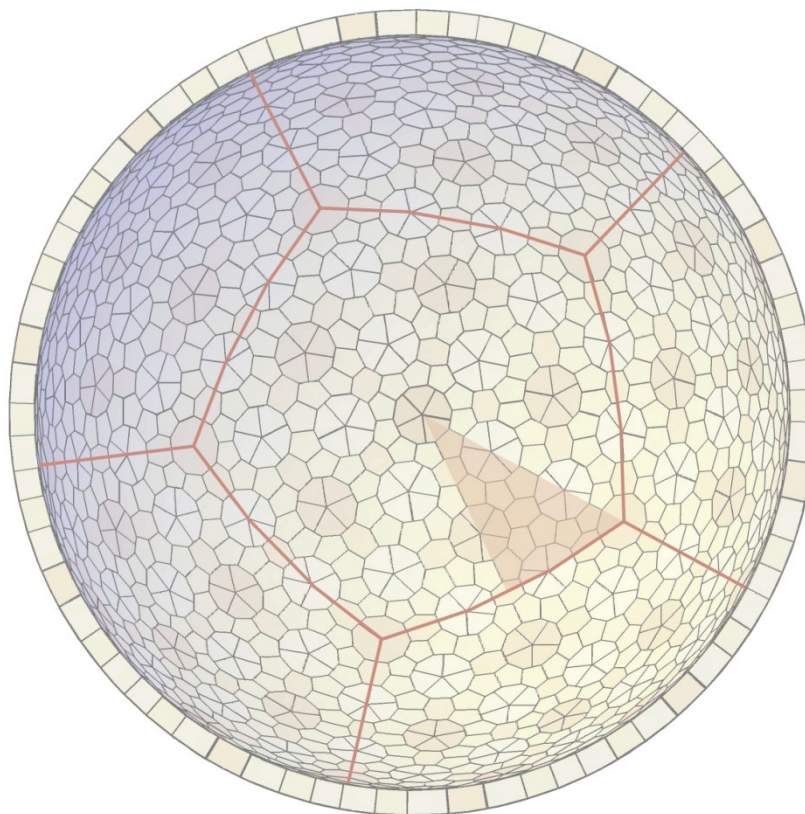
Inoltre una ulteriore problematica è data dalla corrispondenza di pochi decagoni con i vertici e con i lati del triangolo rettangolo caratteristico minimo, luoghi di simmetria della divisione sferica icosaedrica, che possono ridurre il numero dei conci invarianti, come avviene in questa divisione solo nei cinque conci uguali pentagonali allungati, originati dal pentagramma o stella di Kepler, posti al vertice del triangolo minimo, corrispondente con il centro del pentagono in cui è inscritto (FIG.147).

Inoltre dalla costruzione del modello infografico tridimensionale (FIG.148) secondo il metodo esposto precedentemente (FIGG.142,143) si evince che tale suddivisione geometrica non origina una apparecchiatura stereotomica efficace, sia per la non ottimizzazione del numero dei conci invarianti pari a 43, sia per la presenza di molte linee di discontinuità nella tessitura muraria, concause che determinano la non chiara definizione della geometria statica dell'apparecchiatura che determina la non chiara leggibilità della sua

149. R. Gadaleta,  
*Divisione del  
triangolo minimo  
con diversa  
tassellazione derivata  
dalla Aa di Kepler,  
disegno infografico*



150. R. Gadaleta,  
*Derivazione  
geometrica  
dell'apparecchiatura  
nella cupola  
emisferica, disegno  
infografico  
tridimensionale*



forma geometrica. Definizione strutturale e formale sono strettamente interdipendenti nella cupola in pietra da taglio e l'assenza dell'una determina contemporaneamente la mancata individuazione dell'altra. Al fine di risolvere tali problematiche si suddivide nuovamente il triangolo minimo planare secondo tassellazione radiale del pentagono, ovvero ponendo un decagono al suo centro coincidente con un vertice del triangolo e ponendo sul suo perimetro dieci pentagoni regolari in modo tale che i lati di questi ultimi coincidano con quelli del decagono. Sull'ipotenusa del triangolo si aggrega planarmente una copia speculare del decagono secondo l'asse di simmetria passante per il punto medio del pentagono che giace sull'ipotenusa e per il suo vertice che giace sul cateto maggiore. Eseguendo una copia speculare di tale suddivisione così ottenuta lungo l'asse di simmetria dato dal cateto maggiore del triangolo, si determina un tassello esagonale allungato (FIG.149).

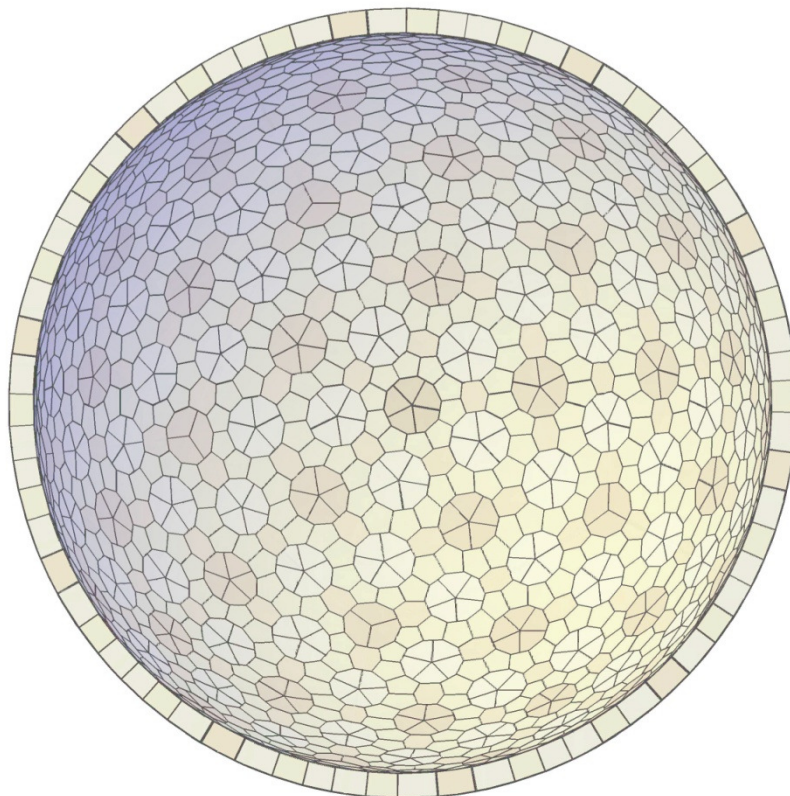
Secondo la stessa logica si continua la tassellazione eseguendo quindi una copia speculare planare dei due decagoni così originati lungo l'asse di simmetria passante per il punto medio dell'ipotenusa del triangolo, coincidente con il punto medio del lato del tassello pentagonale e per il vertice dello stesso pentagono opposto a tale lato.

Si ottiene una tassellazione radiale del pentagono in cui giace il triangolo minimo composta da tre tipologie di tasselli aventi morfologia pentagonale, decagonale ed esagonale allungata (FIG.149).

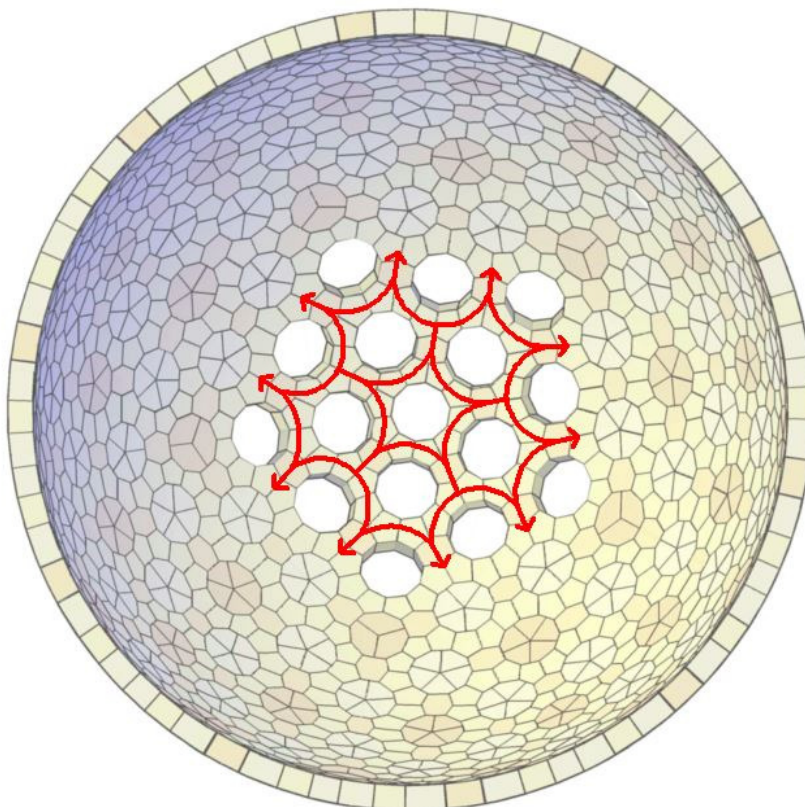
La radialità della tassellazione facilita la corrispondenza con le proprietà di simmetria del gruppo sferico icosaedro-dodecaedro, che conferiscono regola simmetrica anche alle deformazioni dei conci sulla superficie sferica, permettendo di controllare meglio la deformazione topologica della forma.

Questa tassellazione derivante da quella di Keplero, dispone diversamente i tasselli kepleriani favorendo una maggiore radialità e periodicità della suddivisione quinary, periodicità molto evidente sul piano, che corrisponde ad una aperiodicità sulla sfera, poiché la deformazione rende diversi e non sovrapponibili molti conci del triangolo minimo caratteristico, secondo le regole inalterabili della geometria.

151. R. Gadaleta,  
*Modello di studio  
dell'apparecchiatura  
nella cupola  
emisferica*, disegno  
infografico  
tridimensionale



152. R. Gadaleta,  
*Distribuzione  
statica delle forze  
all'interno dell'  
apparecchiatura per  
"archi di scarico",  
che offre la  
possibilità di  
effettuare opportune  
bucature*, disegno  
infografico  
tridimensionale



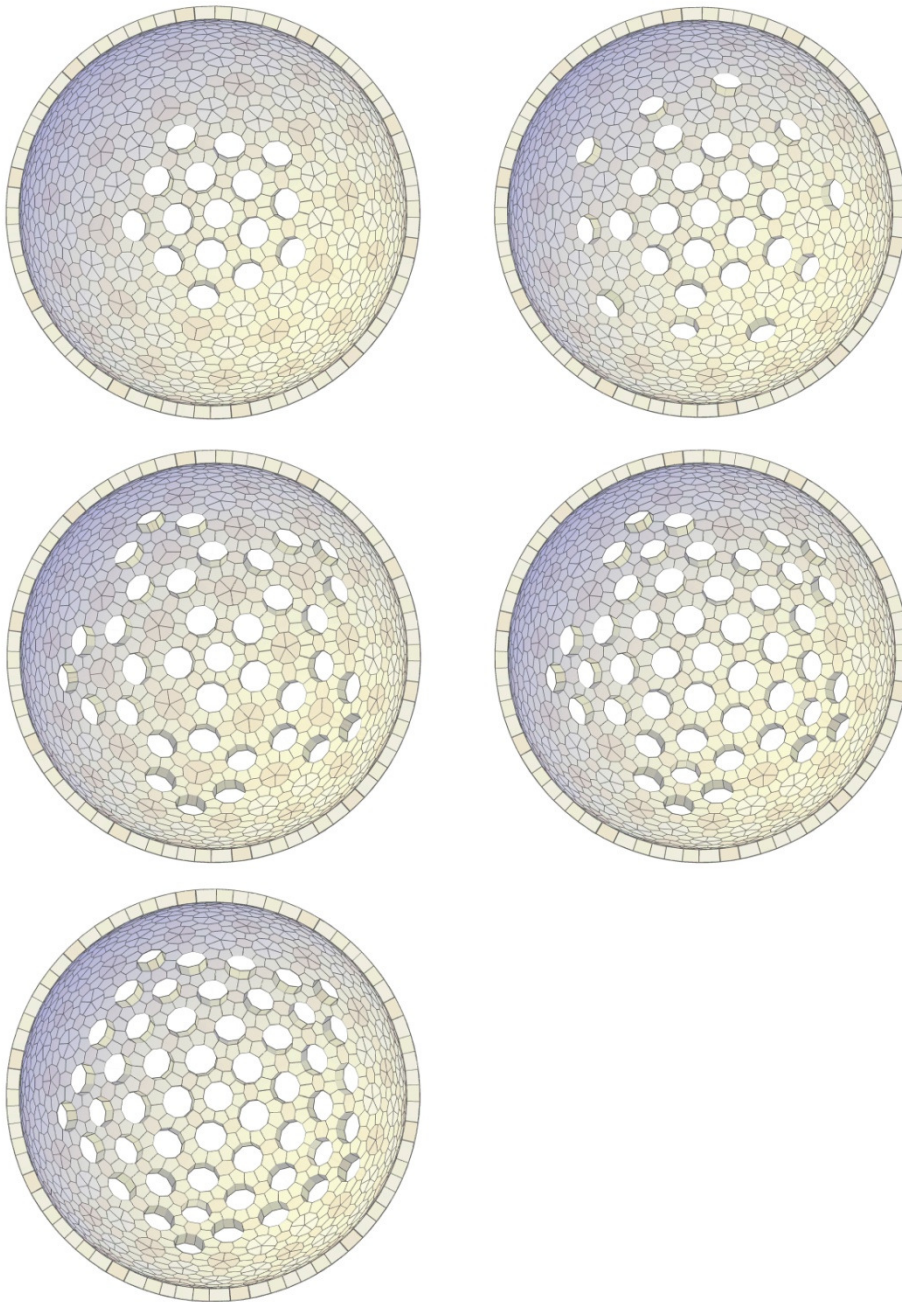
Una configurazione simile, ma maggiormente aperiodica, si nota nella configurazione determinata dalla disposizione degli atomi nei quasicristalli (FIG.117), che coincide, come si è descritto, con la *divisione Aa* di Kepler (FIG.104), testimoniando la forte relazione geometrica tra la tassellazione individuata in questo studio (FIG.149) e quella che caratterizza le tassellazioni quinarie storicamente studiate ed esistenti anche in natura e quest'ultima caratteristica ne dimostra i vantaggi.

Il calcolo del numero effettivo dei conci-invarianti e il controllo della loro morfologia, si deve effettuare tridimensionalmente con l'utilizzo dei software di modellazione infografica, poiché si deve tener conto della deformazione sferica che subiscono gli elementi.

Si costruisce quindi il modello tridimensionale solido con il software *AutoCAD® 2012* (FIGG.150,151), in modo da verificare e controllare secondo regola architettonica la forma dei conci determinata dalla superficie sferica, ed il loro numero, verificato attraverso il software *Rhinoceros® 5.0*, che permette, attraverso il comando "orienta3Pt" (orienta l'oggetto attraverso tre punti) una più rapida sovrapposizione dei tasselli tridimensionali al fine di comprenderne l'uguaglianza o la diversità tra essi. Si deduce quindi che vengono a definirsi nove conci all'interno del triangolo minimo, indicati con la x rossa in FIG.149, che devono sommarsi alle loro nove rispettive copie speculari contenute nel triangolo minimo simmetrico, poiché non sovrapponibili in quanto simmetriche ed in quanto caratterizzate dalla curvatura delle loro superfici di estradosso ed intradosso. Si determinano quindi 18 conci pentagonali invarianti. I 3 conci esagonali allungati indicati con un cerchio verde in figura FIG.149, invece, non si sommano alle loro copie simmetriche, poiché possono essere ruotati e sovrapposti ad esse, in quanto i loro assi di simmetria coincidono con quelli costituiti dai lati del triangolo minimo, quindi condivisi con le sue copie speculari radiali, sia planarmente, sia sulla sfera. È possibile verificare a questo punto della trattazione, come sia strettamente indispensabile il controllo contemporaneo della geometria determinata sul piano e della sua corrispondente tridimensionale sferica al fine di comprenderne le leggi e di adoperarle



153. R. Gadaleta,  
*Studio delle  
bucature  
nella cupola  
emisferica,*  
disegni  
infografici  
tridimensionali



per l'ottimizzazione dei conci-tasselli componenti l'apparecchiatura sferica.

L'esagono allungato indicato con un cerchio azzurro in figura FIG.149 deve sommarsi al suo simmetrico, in quanto esso non giace sui piani costituenti gli assi di simmetria del triangolo minimo e dunque della ripartizione sferica secondo il gruppo di simmetria icosaedrica, dunque tali conci saranno 2.

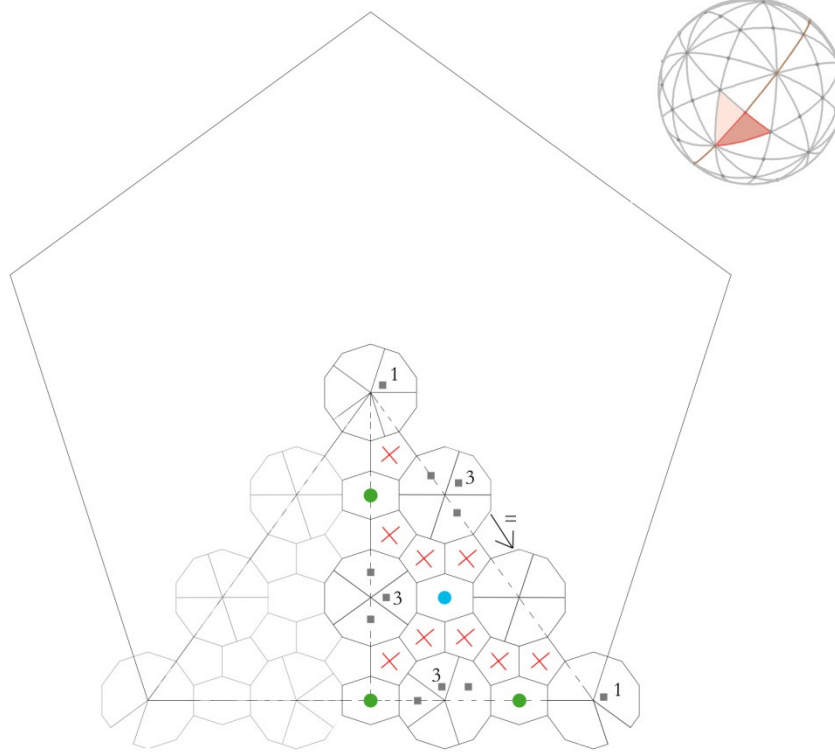
Per quanto riguarda i decagoni, essi sono stati suddivisi secondo le loro diagonali in cinque conci "aquiloni" come si è detto. Il decagono posto al vertice del triangolo minimo coincidente con il centro del pentagono è suddiviso in cinque conci uguali tra loro anche sulla superficie sferica, dunque può essere composto da 1 concio ripetuto cinque volte uguale a se stesso. Il decagono posto sul cateto minore del triangolo minimo non coincidente con nessuno dei suoi vertici, è suddiviso in cinque conci "aquiloni" di cui due sono copie simmetriche uguali, quindi consta di 3 conci da sagomare. Gli altri decagoni sono composti da cinque conci diversi tra loro per un totale di 15 conci. L'ennagono coincidente con il vertice del pentagono è composto da 3 conci-tipo uguali tra loro. Si hanno quindi 43 conci tipo-invarianti, costituendo un numero non ancora ottimizzato. La posizione dei conci tipo-invarianti all'interno dei decagoni e degli ennagoni è individuata con piccoli quadrati grigi in FIG.149.

La non ottimizzazione è data dalla suddivisione dei decagoni secondo linee di simmetria non coincidenti con quelle del triangolo minimo caratteristico, dunque si dividono nuovamente i quattro decagoni non ottimizzati che producono venti conci diversi.

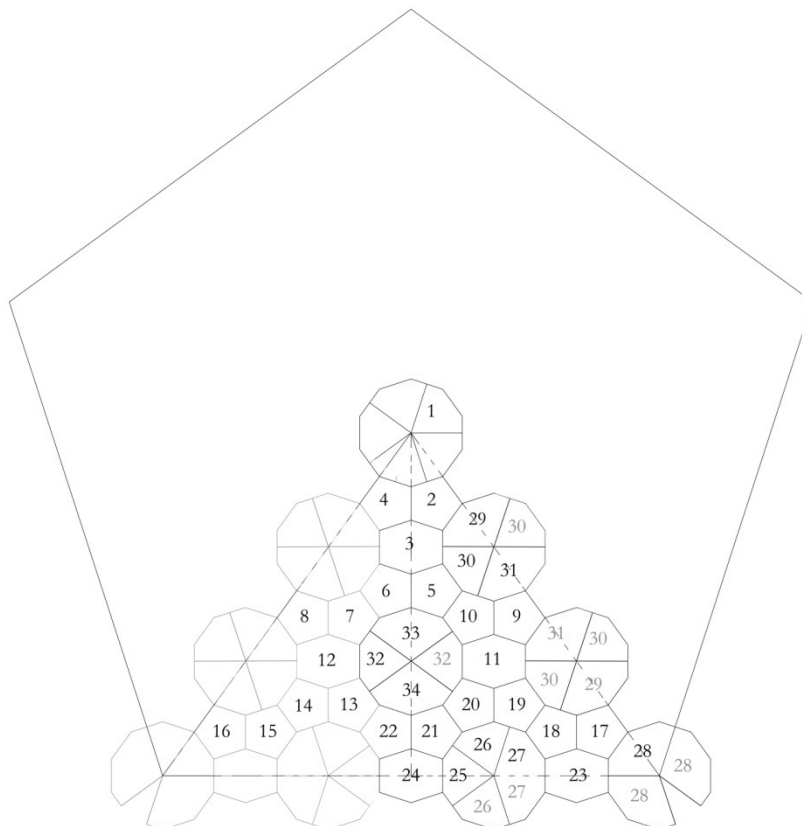
Con tale nuova suddivisione (FIG.154) si ha che il concio posto al vertice del triangolo minimo, coincidente con il vertice del pentagono è suddivisibile in tre conci uguali, determinando un ennagono sulla sfera costituito quindi da 1 concio ripetuto uguale a se stesso. Gli altri tre decagoni si suddividono ad  $x$  come mostrato in FIG.154, secondo due assi di simmetria passanti i punti medi di quattro lati del decagono, adiacenti ai lati i cui punti medi possono essere congiunti dalla linea orizzontale che divide il decagono a metà. Le suddivisioni sono determinate in modo tale che la linea di simmetria congiungente



154. R. Gadaleta,  
*Divisione del  
triangolo minimo  
con seconda diversa  
tassellazione derivata  
dalla Aa di Kepler,*  
disegno infografico



155. R. Gadaleta,  
*Numerazione  
dei conci-tipo  
invarianti,*  
disegno  
infografico



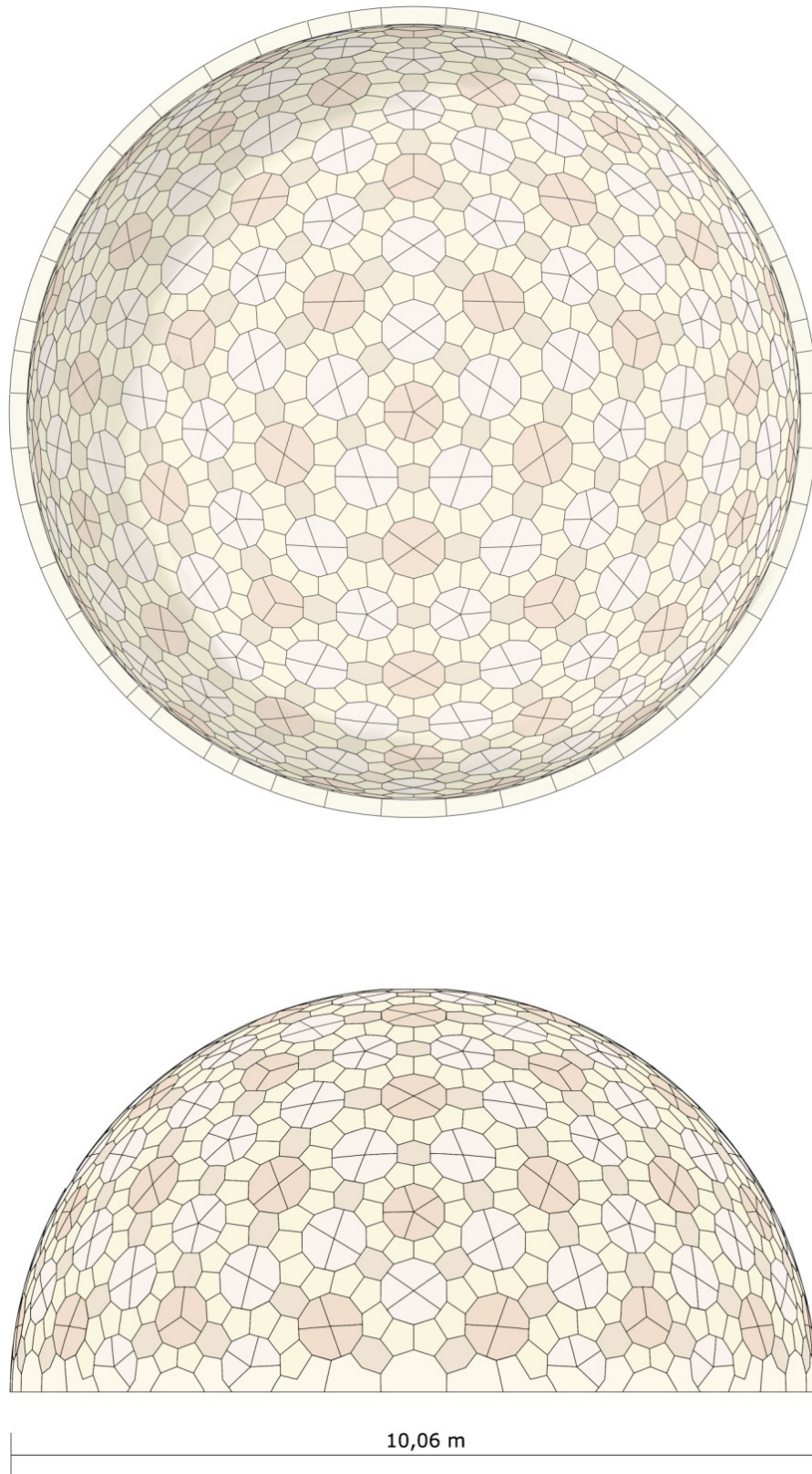
i vertici opposti del decagono tagliandolo verticalmente a metà, coincida con i lati del triangolo minimo. Il decagono che giace sul cateto maggiore di tale triangolo è così suddiviso in cinque conci di cui due sono speculari, quindi i conci da sagomare sono 3. Altresì dicasi per i due decagoni posti sull'ipotenusa del triangolo minimo, che essendo simmetrici rispetto al punto medio di tale lato, sono composti dagli stessi conci che li costituiscono posti in modo speculare rispetto alla linea congiungente passante per tale punto medio, perpendicolare alla stessa ipotenusa; dunque i conci da sagomare per ottenere questi due decagoni sono 3 uguali tra loro, ma diversi dai tre conci costituenti gli altri decagoni. Dunque i conci tipo-invarianti si riducono a 34, indicati in FIG.155, dove ognuno di essi è contrassegnato da un numero, permettendo la comprensione della loro disposizione secondo regola di simmetria propria della tassellazione sferica tridimensionale, e favorendo l'individuazione degli elementi strutturali invarianti all'interno del triangolo caratteristico minimo e del suo simmetrico.

È opportuno affermare che lo stesso ragionamento eseguito nella divisione ad  $x$  dei decagoni sui due lati lunghi del triangolo caratteristico, può ripetersi nel decagono posto sul suo cateto minore, riducendo ulteriormente il numero dei conci-tipo a 33 (un ragionamento analogo è riportato in FIGG.157,158). Ma si è deciso di non apportare tale modifica, sia perché la riduzione dei conci è irrilevante, sia perché la suddivisione in cinque conci del decagono sul cateto minore, permette alla tassellazione di essere maggiormente intrecciata, dunque ammorsata saldamente.

Il diametro all'estradosso della cupola misura 10,06 metri, quello all'intradosso misura 9,84 metri ed il cui spessore, posto uguale per tutta la calotta, al fine di poter ripetere i conci secondo simmetria poliedrica sulla sua superficie, misura 22 cm (FIG.156).

Lo spigolo dei conci varia da una misura pari a 25 cm per i conci prossimi al centro del pentagono corrispondente ad una delle facce del dodecaedro sferico, ad una pari a 41 cm nei decagoni che subiscono maggiore deformazione sferica.

156. R. Gadaleta,  
*Modello di studio  
della seconda  
apparecchiatura  
nella cupola  
emisferica,*  
disegno  
infografico  
tridimensionale



Tale configurazione risulta una buona proposta di ottimizzazione nel rapporto tra spessore, numero, dimensioni dei conci e diametro della cupola rispetto alle morfologie analizzate in questo studio.

Dal modello tridimensionale (FIG.156) si evince, seguendo la ripartizione della sfera data dal gruppo di simmetria composto dal dodecaedro sferico e dall'icosaedro sferico, per ottenere la corrispondenza del punto centrale con la sommità della cupola individuato dall'asse passante per il centro della sfera ad essa inscritta, così come raffigurato nelle precedenti illustrazioni, con il centro del pentagono corrispondente ad una delle facce del dodecaedro sferico, centro della tassellazione radiale asimmetria quinquaria definita in questo studio, occorre ruotare la tassellazione dell'intera sfera, facendo dunque coincidere il centro del pentagono con il centro posto alla sommità della cupola, conferendo l'unità formale e statica dell'andamento radiale, la cui geometria di riferimento derivata dal dodecaedro sferico è evidenziata in rosso nella FIG.150.

L'allineamento così ottenuto permette di raggiungere una definizione estetica soddisfacente che renda leggibili i caratteri di centralità e di radialità dello spazio cupolato.

La geometria radiale della tassellazione, infatti, presenta sia vantaggi statici, derivanti dalla migliore distribuzione delle forze secondo archi di scarico, evidenziati in FIG.152 attraverso le linee rosse, sia vantaggi formali derivanti dalla dichiarazione, effettuata attraverso la geometria dell'apparecchiatura, del carattere di centralità del sistema costruttivo cupolato e del carattere di irradiazione dal centro tipico della figura pentagonale e del pentagramma o pentagono stellato, che riporta alla forma simbolica della cupola come rappresentazione dello spazio celeste, il cui oculo centrale costituito dal decagono, è centro di irradiazione della forma nello spazio, analogamente al Sole, la stella madre del sistema solare che irradia la luce nello spazio.

«Imparare dalle stelle» potrebbe sembrare un invito esoterico ad allontanarsi dalla nostra terra, eppure la «stellarità», un messaggio di luce che proviene da remote lontananze e, partendo da un centro, si rivolge in ogni direzione, è divenuto un concetto della geometria e pervade [...] il mondo dell'architettura. «Stella», ha scritto Rudolf

Schwarz in *Vom Bau der Kirche*, “è luce che scaturisce originariamente. Tre cose costituiscono la sua struttura: il centro generatore, che è un punto raggiante, i raggi luminosi, che sono vie dal centro verso tutte le direzioni, il globo luminoso, che è la sfera crescente, nella quale va ampliandosi il centro. Questi tre elementi insieme costituiscono la forma stellare. Ciascuno è l'espressione e trasformazione dell'altro, e l'uno non è senza l'altro, la forma è perfettamente unitaria.

Il centro si amplia nel globo, i raggi scaturiscono dal punto centrale e producono la sfera avvolgente. Chi cita uno dei fattori, designa la totalità»<sup>332</sup>, scrive Paolo Portoghesi.

Si sceglie quindi di adottare questa configurazione, avendo consapevolezza che la rotazione della tassellazione comporta il problema del taglio della tessitura muraria sferica effettuato all'imposta della cupola la quale non coincide più con i lati dei triangoli caratteristici minimi, ma li taglia imponendo di progettare conci speciali di chiusura all'imposta. Essi sono stati individuati in 10 conci-tipo invarianti aventi lunghezza pari a 71 cm, ma essi possono anche essere ridotti ad un numero inferiore di elementi attraverso la loro unione a formare conci di lunghezza maggiore, che rendono la base della cupola più salda.

Un ragionamento analogo può essere effettuato per una cupola di diametro inferiore, che non si ottiene semplicemente scalando il modello appena descritto, perché così facendo, come è noto, diminuirebbero molto sia lo spessore dei conci, sia le loro dimensioni, giacché una simile operazione di ridimensionamento in scala può essere eseguita soltanto per la realizzazione di un plastico di studio, ovvero della maquette con differente materiale, del modello sopra descritto, parimenti a quanto affermò Galileo Galilei nella sua opera *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove Scienze*

---

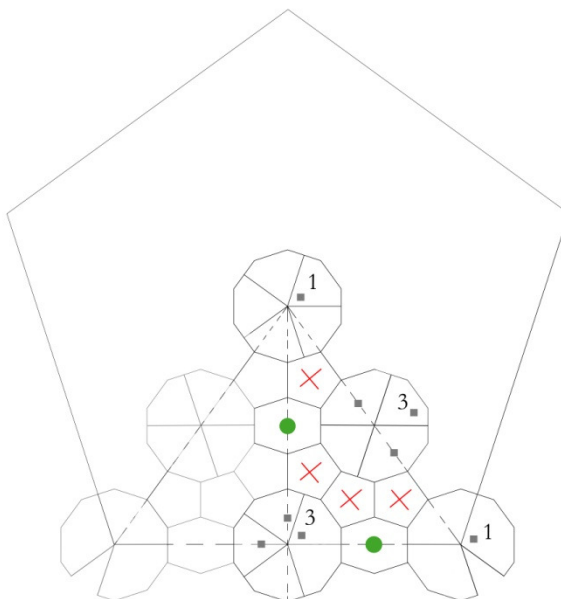
<sup>332</sup> PORTOGHESI PAOLO, *Geoarchitettura. Verso un'architettura della responsabilità*, a cura di Maria Ercadi e Donatella Scatena, Ginevra-Milano, Skira, 2005, pag. 165

*Attenenti alla Meccanica & i Movimenti Locali* del 1638<sup>333</sup>, dove descrivendo le limitazioni meccaniche a cui sono sottoposti gli organismi afferma che le ossa di animali di diversa massa non sono semplicemente copie più grandi o più piccole di essi, ma l'intera struttura deve essere modificata in proporzione per adattarsi alle nuove esigenze. Mantenendo quindi lo spessore dei conci e le loro dimensioni si esegue nuovamente il progetto della cupola partendo dal disegno planare del triangolo minimo (FIG.157), in cui si considera una porzione minore della tassellazione radiale a simmetria quinaria determinata. Effettuando il calcolo dei conci secondo quanto è stato esposto si ha che quattro sono i conci pentagonali indicati con le x in rosso che aggiunti ai loro rispettivi simmetrici raggiungono il numero di 8 conci invarianti su tutta la superficie sferica. I conci individuati dagli esagoni allungati sono 2 poiché essi giacciono sugli assi di simmetria costituiti dai lati del triangolo minimo, 3 sono i conci-invarianti costituenti il decagono il cui centro corrisponde al vertice del triangolo individuato dall'angolo retto fra i due cateti (che si riducono a 2 nel *caso B* in FIG.158), 1 è il concio-invariante componente l'ennagono il cui centro coincide con il vertice del triangolo corrispondente al vertice del pentagono in cui esso giace, 1 è il concio-invariante componente il decagono, diviso quindi in cinque conci uguali tra loro, il cui centro coincide con il vertice del triangolo corrispondente al centro del pentagono in cui esso giace, 3 sono i conci-invarianti costituenti il decagono il cui centro giace nel punto medio dell'ipotenusa del triangolo minimo. Quindi si ottengono 18 conci tipo-invarianti (che si riducono a 17 nel *caso B* in FIG.158) con cui si può tassellare l'intera cupola, a cui si aggiungono 8 conci speciali ottenuti dal taglio della maglia strutturale all'imposta, riducibili a 4 unendo i conci di dimensioni minori a coppie di due. La cupola così ottenuta ha spessore di 22 cm, diametro esterno pari a 7,12 metri e diametro interno pari a 6,9 metri (FIG.159).

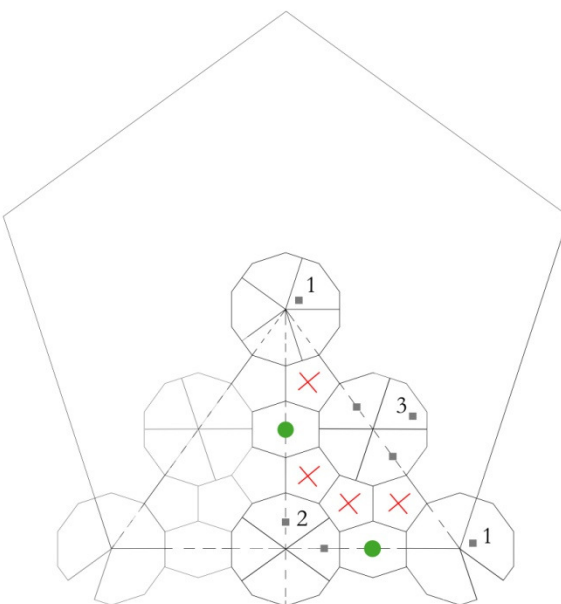
---

<sup>333</sup> GALILEI GALILEO, *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove Scienze Attenenti alla Meccanica & i Movimenti Locali*, Leida, Appresso gli Elsevirii, 1638, in "Le opere di Galileo Galilei" a cura di Antonio Favaro, 20 voll., Firenze, Tipografia di G. Barbera, 1898, vol.VIII, pag. 169

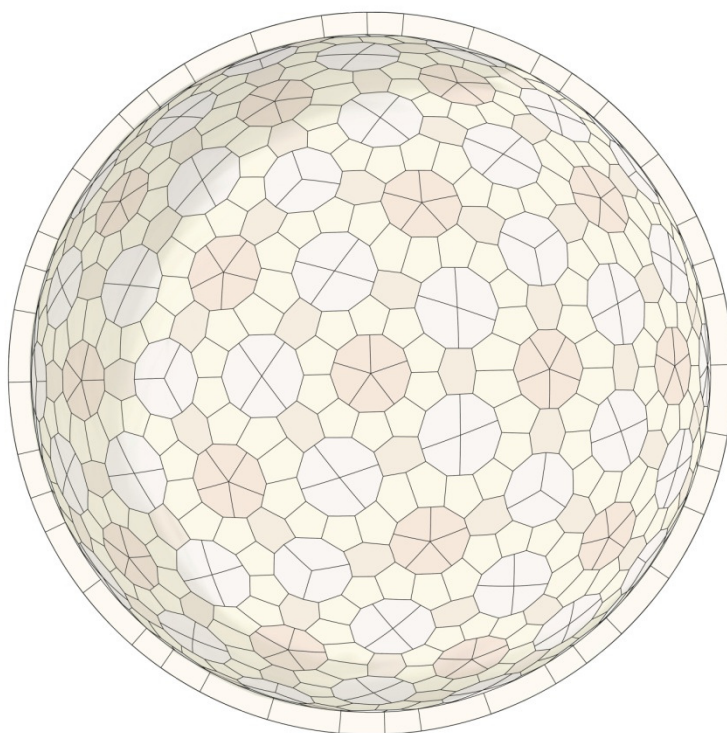
157. R. Gadaleta,  
*Divisione A del  
triangolo minimo  
nella cupola di  
minor diametro,*  
disegno infografico



158. R. Gadaleta,  
*Divisione B del  
triangolo minimo  
nella cupola di  
minor diametro,*  
disegno infografico







7,12 m

159. R. Gadaleta,  
*Modello di studio  
della cupola di  
minor diametro,*  
disegno  
infografico  
tridimensionale

#### IV.2.2 Costruzione del modello infografico tridimensionale

La costruzione del modello infografico tridimensionale è stata eseguita con i software di modellazione *AutoCAD*® 2012 e *Rhinoceros*® 5.0, attraverso successive operazioni eseguite direttamente sulla morfologia dei conci e quindi dell'intera cupola, mediante comandi successivi.

Tali operazioni richiedono maggiore tempo rispetto alla modellazione parametrica eseguibile con il software *Grasshopper*™ che, definito il procedimento da eseguire attraverso una sequenza generativa determinata da particolari comandi operatori, permette di modificare velocemente un elemento o un insieme di elementi applicando ad esso un determinato parametro numerico, con la conseguente rapida modifica di tutta la struttura originata dalla composizione architettonica di più elementi uguali o simili tra loro.

A fronte dei tempi di disegno tridimensionale più lunghi, la modellazione eseguita in *AutoCAD*® 2012 permette di effettuare, e quindi di conoscere, tutte le operazioni geometriche necessarie per determinare la morfologia dei conci, in una sequenza progressiva di comandi e di operazioni non automatizzate dal computer che l'architetto progetta, ovvero pre-vede e poi esegue, per raggiungere un determinato risultato.

Tale metodologia determina la corrispondenza dell'architetto con l'antico "tailleur de pierre", tagliatore della pietra o stereotomista che ben conosceva le regole geometriche e la sequenza necessaria per riprodurle sul materiale sagomandolo. In tal senso l'architetto taglia i conci e definisce il modello tridimensionale infografico dell'intero sistema architettonico con logica costruttiva che rende tale processo molto più vicino al reale che al virtuale. «Supponiamo di voler rappresentare un poliedro e, segnatamente, il dodecaedro. Esistono almeno due possibili strategie: la prima consiste nell'immaginare il solido sviluppato nel pian per richiuderlo poi nello spazio, simulando le operazioni che s potrebbero compiere, fisicamente, con un modello di cartone; la seconda consiste, invece, nello sfruttare alcune proprietà del solido per collocarne i vertici nella giusta posizione nello spazio. In entrambi i casi la costruzione segue, per così dire, i gesti e le

operazioni di misura di un artefice che volesse realizzare fisicamente un dodecaedro, e ciò vale sia per il disegno manuale e bidimensionale, eseguito con la riga ed il compasso, sia per il disegno digitale nello spazio virtuale a tre dimensioni»<sup>334</sup> che permette l'immediata visualizzazione e comprensione della tridimensionalità dell'oggetto rappresentato, della sua "vera forma".

Come il metodo computerizzato per la definizione degli elementi strutturali eseguito attraverso *AutoCAD*® non richiede la conoscenza approfondita di tutta la sequenza delle operazioni di disegno proprie della geometria descrittiva e proiettiva che permette la determinazione degli oggetti tridimensionali, delle ombre e delle intersezioni tra essi facendo uso del solo disegno bidimensionale, così i moderni software di progettazione parametrica non richiedono l'esecuzione "manuale" della successione di quelle operazioni geometriche indispensabili per determinare la morfologia degli elementi tridimensionali nella modellazione tridimensionale eseguita attraverso *AutoCAD*®.

Per tali motivazioni è sempre chiaramente auspicabile una conoscenza geometrica ed architettonica approfondita che affianchi tutti i metodi di disegno infografico tridimensionale, permettendo quindi di controllare la forma avendo piena padronanza del processo geometrico che la determina.

Di seguito si riporta la descrizione del metodo seguito per disegnare il modello infografico tridimensionale.

Per costruire la cupola apparecchiata secondo la configurazione quinaria determinata, derivante dalla tassellazione descritta da Kepler, si è disegnato bidimensionalmente con *AutoCAD*® 2012, il triangolo minimo caratteristico ottenuto suddividendo il pentagono regolare di cui ne costituisce la decima parte, come si è descritto in precedenza.

---

<sup>334</sup> MIGLIARI RICCARDO, *La Geometria descrittiva nel quadro storico della sua evoluzione dalle origini alla rappresentazione digitale*, in "Attualità della geometria descrittiva" a cura di Laura Carlevaris, Laura De Carlo, Riccardo Migliari, Atti del Seminario nazionale sul rinnovamento della geometria descrittiva svoltosi presso l'Università di Roma La Sapienza, Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura, Dottorato in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo, dicembre 2009-marzo 2010, Roma, Gangemi Editore, 2012, pag. 21

Successivamente si è posta tale tassellazione bidimensionale sul pentagono planare costituente la faccia superiore del dodecaedro tridimensionale platonico, precedentemente costruito come solido in *AutoCAD*® 2012. Effettuando un'operazione di taglio del dodecaedro platonico, si estrapola il tetraedro avente come base il triangolo minimo planare e come vertice il centro del poliedro.

A tal punto si suddivide il solido costituito dal tetraedro appena descritto, secondo le piramidi aventi vertice nel vertice del tetraedro e aventi come base i tasselli che compongono la suddivisione quinaria disegnata bidimensionalmente sulla base del tetraedro, similmente a quanto disegnato in FIG.142.

Questo significa che è stata effettuata un'operazione di taglio del tetraedro ripetuta per quasi tutti i lati di ogni tassello solido piramidale, attraverso il comando "trancia secondo tre punti", quindi selezionando i tre punti per cui passa il piano lungo cui si effettua il taglio. Si determinano così tante piramidi solide aventi per base ogni tassello, quanti sono i tasselli costitutivi il triangolo minimo. Tale operazione è quella che richiede maggior tempo di esecuzione, anche perché occorre controllare la precisione del taglio che determina la radialità delle facce dei conci, quindi dei giunti convergenti al centro del poliedro, coincidente con il centro della cupola, verificando che non vi siano spazi tra essi.

A questo punto è necessario disegnare tridimensionalmente la sfera di diametro inferiore rispetto agli spigoli del tetraedro, avente centro concidente con il suo vertice, e spessore pari a 22 cm, ovvero lo spessore dei conci. Per ottenere questo risultato si disegna una seconda sfera inscritta alla prima avente il diametro inferiore di 22 cm (il valore immesso è pari a 0,22 poiché si disegna avendo una unità di misura corrispondente al metro, al fine di ottenere un disegno in scala 1:1) a quello della prima sfera. Attraverso un'operazione booleana di sottrazione della seconda sfera dalla prima, si definisce la prima sfera di spessore pari a 22 cm che, tagliata lungo il piano orizzontale passante per il suo centro, determina la calotta sferica continua pari al volume occupato dalla cupola.

Per ogni tassello si effettua quindi un'operazione booleana di intersezione di quest'ultimo con la semisfera di spessore assegnato così determinata. Anche questa operazione richiede tempo, ma di durata inferiore rispetto alla suddivisione del tetraedro.

Si determina così il triangolo sferico suddiviso secondo la tassellazione scelta che, replicato simmetricamente rispetto alle linee congiungenti l'estradosso dei conci con il centro della semisfera, corrispondenti agli spigoli del tetraedro, origina l'apparecchiatura della sfera che tagliata lungo il piano orizzontale passante per il suo centro, determina la semisfera e quindi la cupola così apparecchiata. Successivamente si definiscono i conci posti alla base della cupola attraverso l'operazione booleana di unione degli elementi distinti determinati dal taglio.

Si è scelto di proiettare la suddivisione sulla superficie sferica dalla faccia planare del dodecaedro, sia perchè il triangolo rettangolo minimo ha forma più regolare di quello ottenuto dallo sviluppo del triacontaedro geodetico e diviene quindi divisibile individuando molto bene le regole di corrispondenza simmetrica tra le parti, sia perché la deformazione sferica conseguente non è molto maggiore rispetto a quella determinata dal triacontaedro geodetico, che produce comunque 34 conci-tipo invarianti. Queste deduzioni sono state effettuate attraverso l'analisi dei disegni ottenuti con i modelli info-grafici tridimensionali di entrambe le proiezioni condotte dai differenti poliedri, che ne attestano i vantaggi e le criticità.

159. François Derand,  
Costruzione della  
maquette, in  
"L'Architecture des  
voûtes", 1643,  
tratto da "Forma y  
construcción en  
piedra. De la cantería  
medieval a la  
estereotomía del  
siglo XIX" di E. R.  
Díaz, Madrid,  
Ediciones Akal,  
2000, pag. 336



### IV.2.3 Costruzione del modello fisico tridimensionale o maquette: dalla stampa 3D degli elementi al processo di montaggio dell'apparecchiatura

Dal modello info-grafico tridimensionale è stato possibile prototipare i conci in materiale PLA con macchina *Ultimaker*<sup>2</sup> presso il laboratorio di stampa *ApuliaMakers3D* sito a Bari. Il modello è realizzato in scala 1:14,37, il diametro della cupola misura 70cm e la lunghezza massima della faccia di estradosso dei conci così ottenuti oscilla da un minimo di 1,5 cm ad un massimo di 4 cm.

Dopo aver numerato manualmente e classificato tutti i conci (FIGG.169,170), si è proceduto al montaggio della maquette seguendo un modello tridimensionale preparato per tale scopo in cui i conci tipo-invarianti uguali sono caratterizzati da numero, colore uguale e da stesso layer informatico di appartenenza (FIGG.162,163). L'apparecchiatura della cupola si configura quindi come in FIG. 160.

Seguendo con attenzione i disegni numerati preparati (FIGG.162,163), il montaggio si è rivelato veloce e semplice, poiché a causa della simmetria quintupla del dodecaedro sferico, sulla superficie laterale della cupola (FIG.163) si ripete cinque volte lo stesso pentagono sferico (evidenziato in rosso in FIG.164) composto quindi dagli stessi conci che si ripetono in ugual modo (FIG.165). Un altro pentagono sferico completo, posto alla sommità della cupola, ne conclude la morfologia (FIGG.162,165). Quindi per ogni filare, procedendo naturalmente dal basso, si posiziona un numero preciso di conci-tipo invarianti uguali tra loro, alcuni di essi sono numerati in FIG.164 in modo da rendere maggiormente comprensibile quanto si è appena affermato.

Poiché il materiale è molto leggero e le facce dei conci sono in prevalenza molto lisce, viene meno l'attito dato dal peso e dalla scabrosità del materiale lapideo, determinante ai fini della costruzione in scala reale. Per risolvere tale inconveniente si è utilizzata una goccia di colla vinilica (FIG.174) tra alcune facce di giunto dei conci, in modo da esercitare una certa aderenza, senza fissare saldamente ed in modo irreversibile i piccoli elementi tra loro. Non su tutte le facce di giunto è stata apposta colla vinilica, alcuni conci sono semplicemente



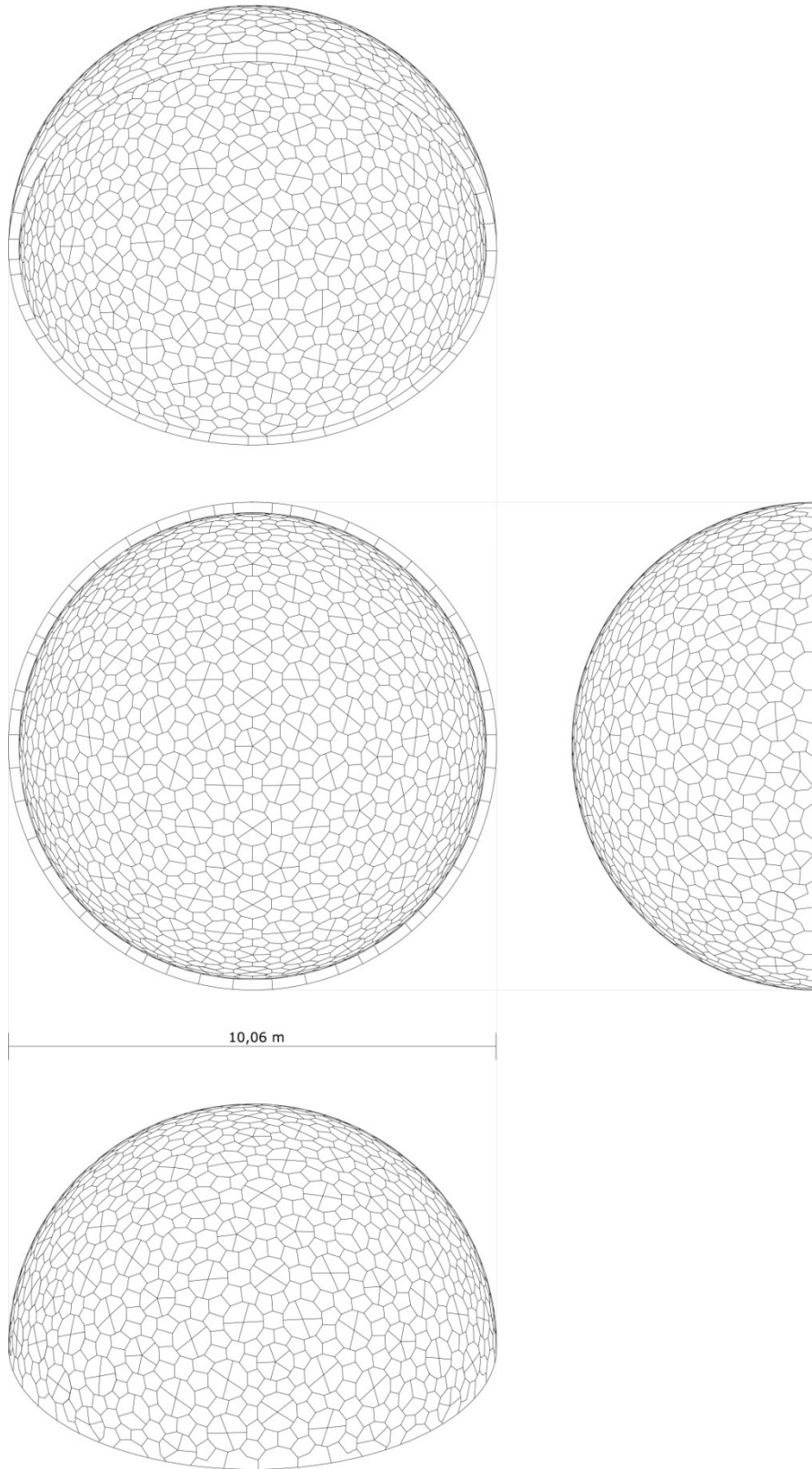
ammorsati ad incastro topologico. Esercitare una pressione costante durante la messa in opera si è rivelato molto importante ai fini del corretto incastro e aderenza tra i conci, che si è rivelato anch'esso appropriato alla funzione di cuneo che svolgono nella costruzione.

Il montaggio (FIGG.171-183) è avvenuto senza l'uso della centina, attraverso la tecnica tradizionale costruttiva che si serve dell'ausilio della randa, ottenuta attraverso una piccola asta in legno di lunghezza pari al raggio della sfera inscritta nella cupola, avente una estremità coincidente con il centro della cupola e l'altra con la faccia di paramento dei conci, che consente la definizione della perfetta sfericità dell'intradosso.

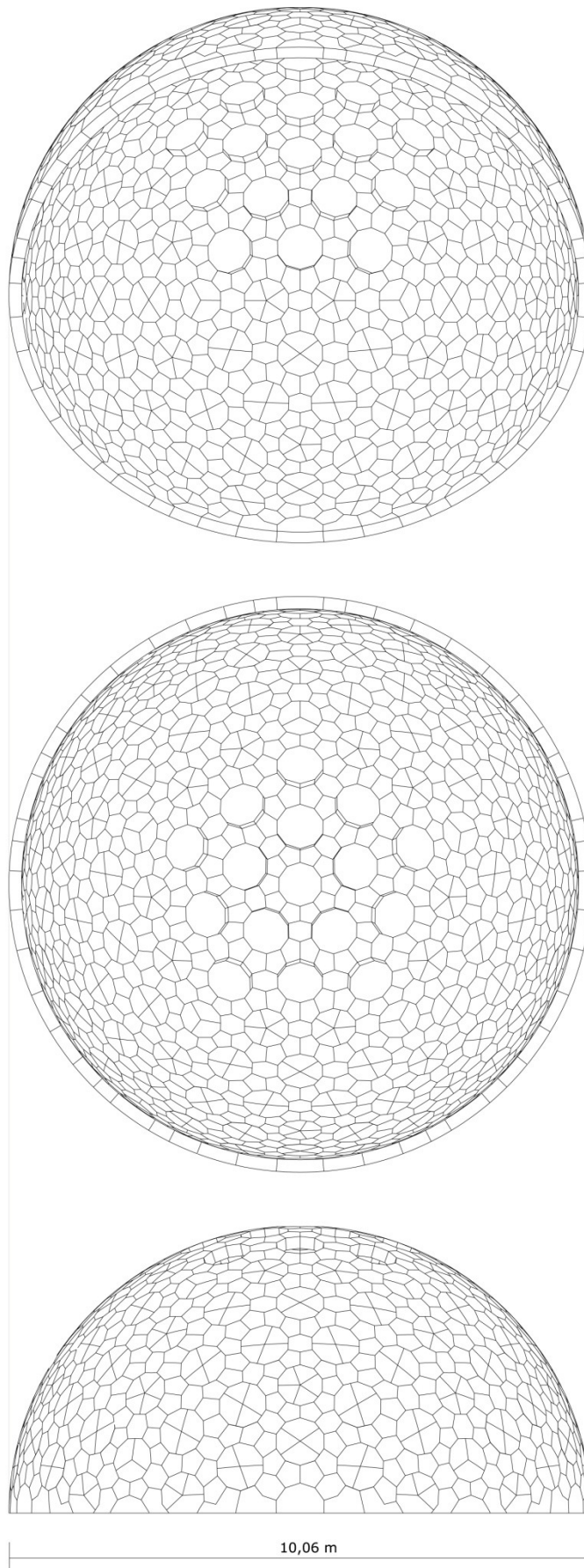
Poiché, come più volte affermato in questo studio, la costruzione stereotomica si fonda su esattezza progettuale e precisione esecutiva, bisogna riscontrare che a valle di un modello infografico esatto, vi è stata una imprecisione del taglio degli elementi che ha rallentato di due giorni lavorativi, il processo di montaggio, a causa dell'operazione di limatura eseguita sulle facce di giunto di alcuni conci che presentavano delle piccole protuberanze di materiale. Altresì alcuni spazi, seppur piccolissimi e pari d 1 mm, presenti tra i conci in alcune porzioni dell'apparecchiatura, sono causati dall'imprecisione del taglio dovuta non solo alla stampante tridimensionale, ma anche al passaggio dal modello teorico progettato su carta e poi costruito al computer, a quello pratico, che porta inevitabilmente alcune piccole imprecisioni, che divengono maggiormente rilevanti in scala ridotta.

Il processo di costruzione della maquette si è concluso in cinque giorni lavorativi pieni, ed a montaggio terminato si è pulita la superficie di estradosso e di intradosso con una spugna leggermente imbevuta di acqua e sapone, attraverso il foro circolare praticato nella base di compensato pari al cerchio massimo di intradosso all'imposta della cupola. Tale apertura ha permesso di osservare l'apparecchiatura di intradosso e di controllare l'allineamento dei conci, soprattutto oltre il piano delle reni, quando questi raggiungevano la sommità della cupola. La realizzazione della maquette è molto servita per poter verificare l'ammorsamento raggiunto dall'apparecchiatura e comprenderne bene le regole più efficaci di posa in opera.

160. R. Gadaleta,  
*Modello della cupola  
per la realizzazione  
della maquette,*  
disegno infografico



161. R. Gadaleta,  
*Modello della cupola  
con bucatore per la  
realizzazione della  
maquette*, disegno  
infografico  
tridimensionale





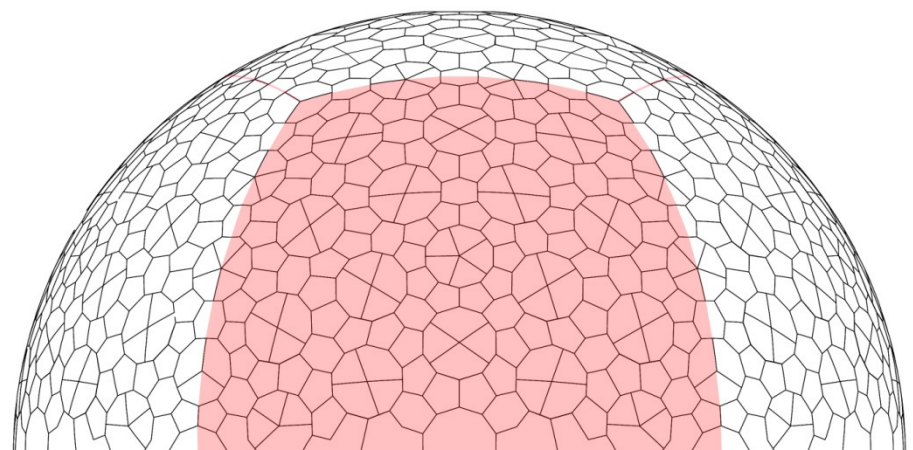
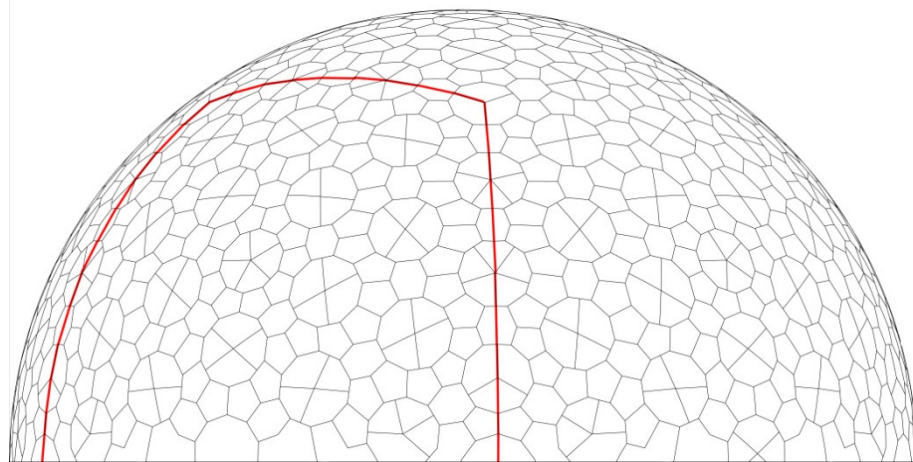
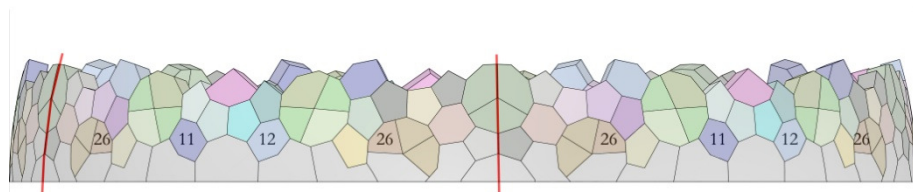
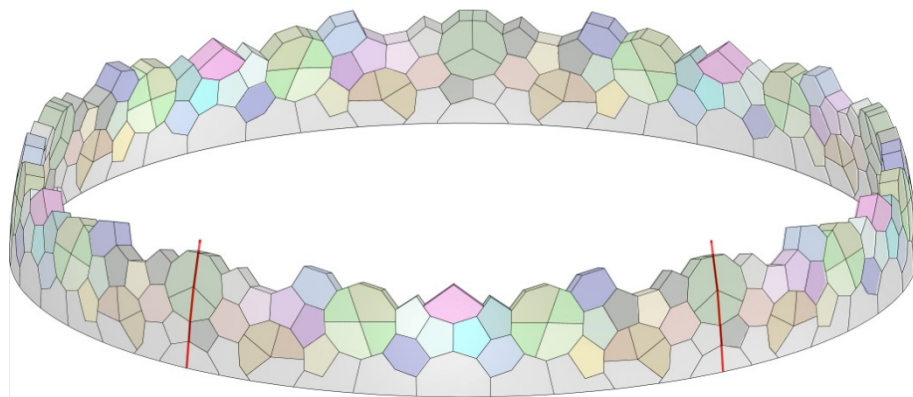
162. R. Gadaleta,  
*Schema a colori per  
il montaggio della  
maquette, vista  
dall'alto, disegno  
infografico  
tridimensionale*



163. R. Gadaleta,  
*Schema a colori per  
il montaggio della  
maquette, vista  
laterale, disegno  
infografico  
tridimensionale*



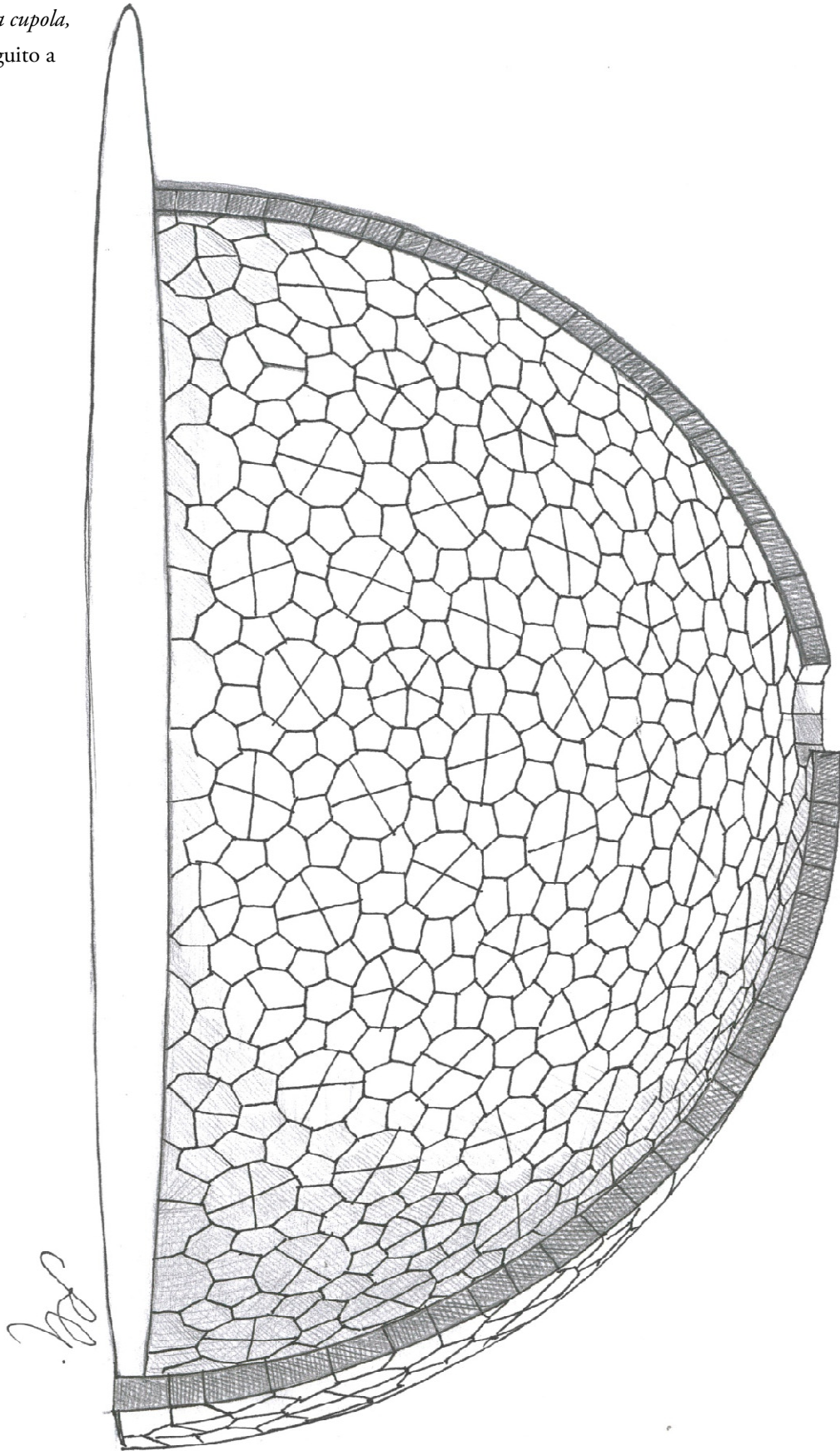
164. R. Gadaleta,  
*Montaggio della  
maquette  
individuando  
la ripetizione  
dei conci tipo-  
invarianti,*  
disegni  
infografici  
tridimensionali



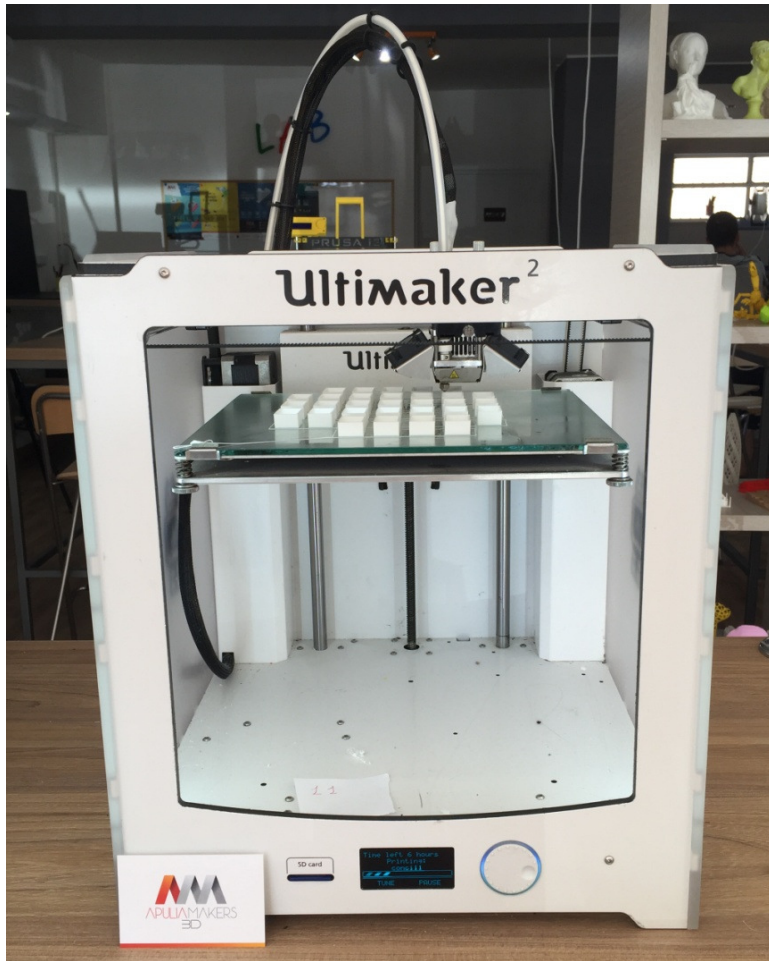


165. R. Gadaleta,  
*Schema geometrico  
e di montaggio,*  
i conci uguali sono  
contrassegnati da  
colori uguali,  
disegno infografico  
tridimensionale

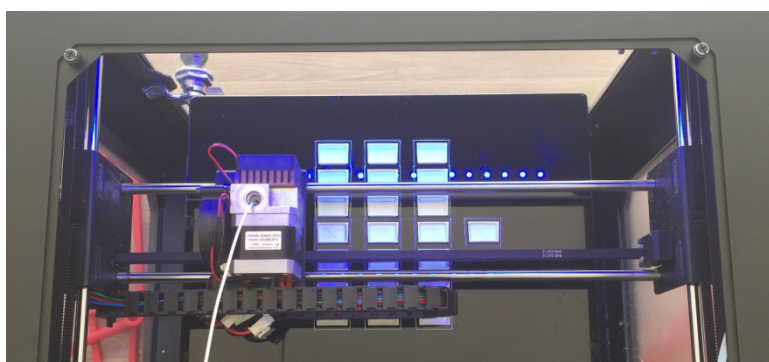
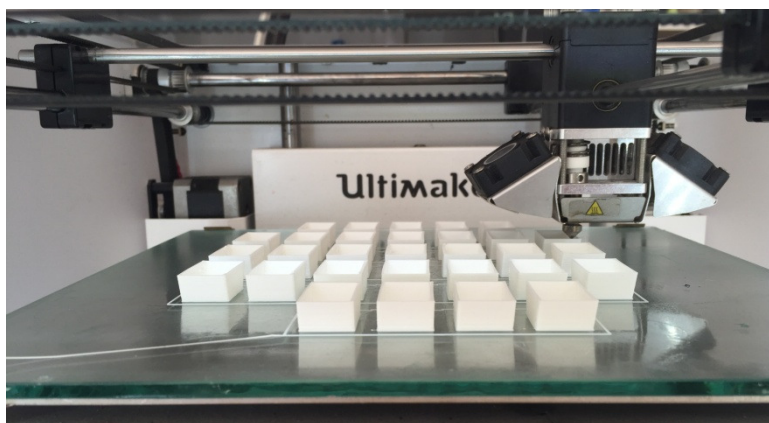
166. R. Gadaleta,  
*Sezione della cupola*,  
disegno eseguito a  
mano libera



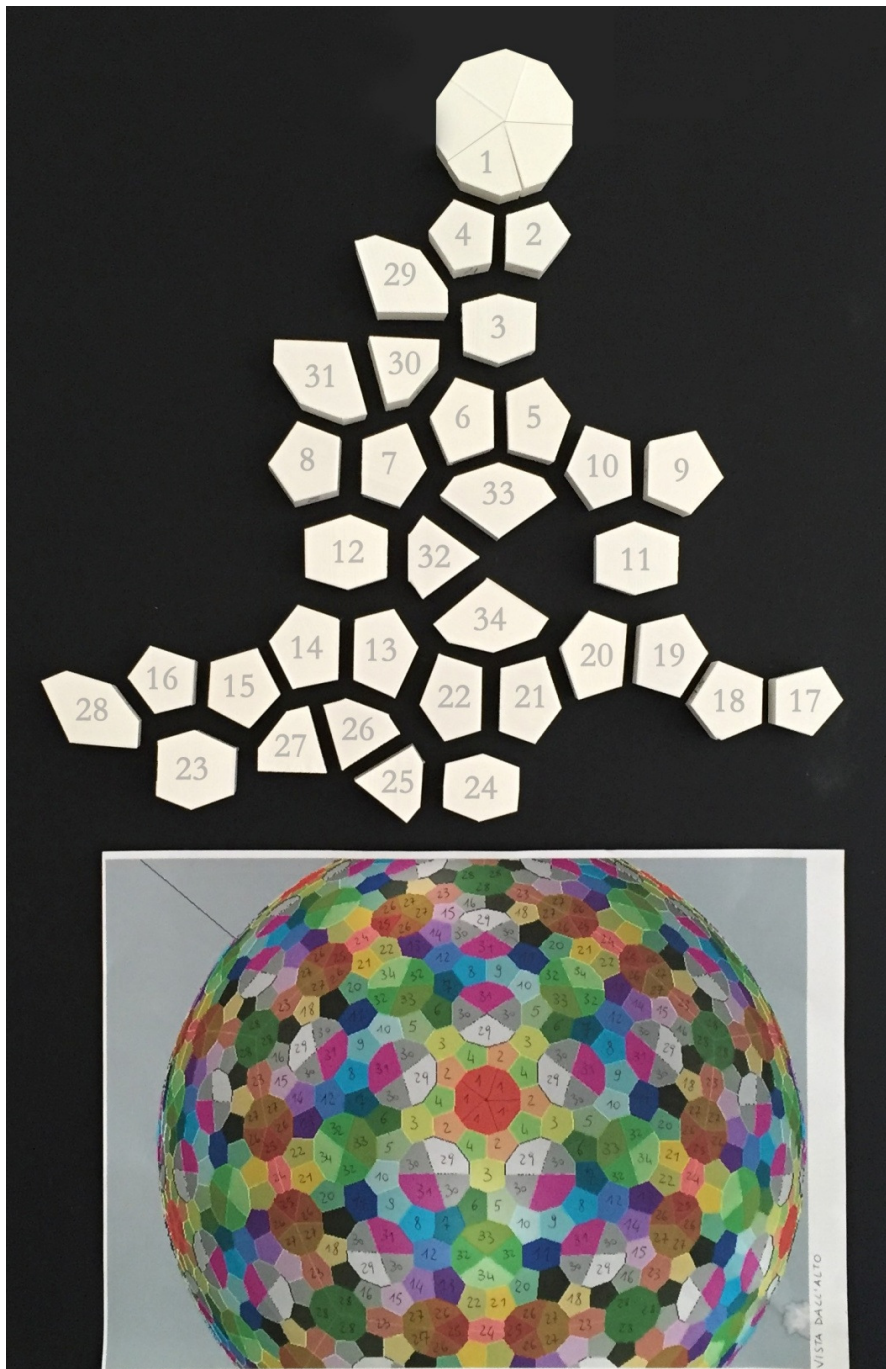




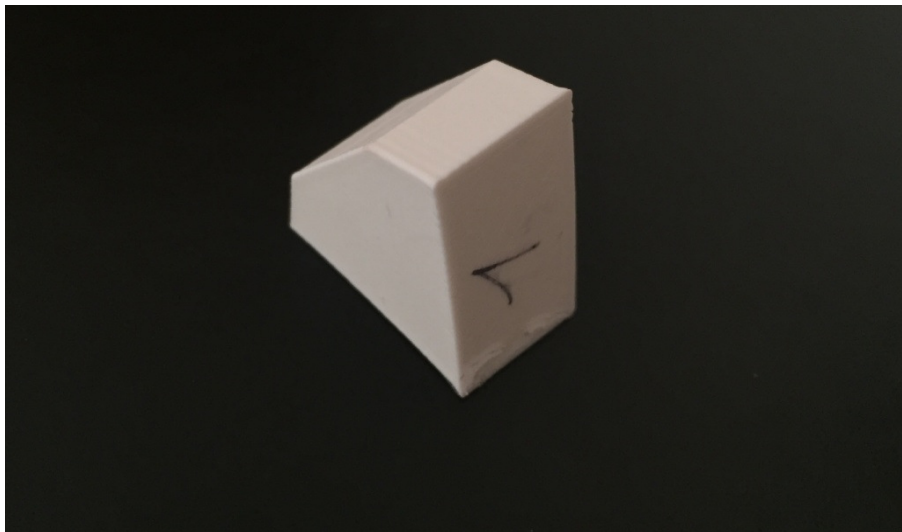
167. Stampa dei  
conci con la  
macchina Ultimaker<sup>2</sup>  
presso il laboratorio  
“ApuliaMakers3D”,  
Bari, fotografie di  
R. Gadaleta



168. I 34 concio-  
tipo invarianti  
numerati,  
fotografia di  
R. Gadaleta







169. Singolo  
concio numerato  
con penna,  
fotografia di  
R. Gadaleta



170. Conci  
numerati con  
penna e suddivisi  
in base a  
numerazione  
uguale che ne  
individua uguale  
tipo, fotografie  
di R. Gadaleta



171. Fase 1 di  
montaggio della  
maquette,  
fotografia di  
R.Gadaleta



172. Fase 2 di  
montaggio della  
maquette,  
fotografia di  
R.Gadaleta







173. Fase 3 di montaggio della maquette, fotografia di R. Gadaleta



174. Apposizione di una goccia di colla vinilica tra alcuni giunti, fotografia di R. Gadaleta

175. Fase di  
montaggio  
della maquette,  
particolare,  
fotografia di  
R. Gadaleta





176. Fase 4 di montaggio della maquette, fotografia di R.Gadaleta



177. Fase 5 di montaggio della maquette, fotografia di R.Gadaleta

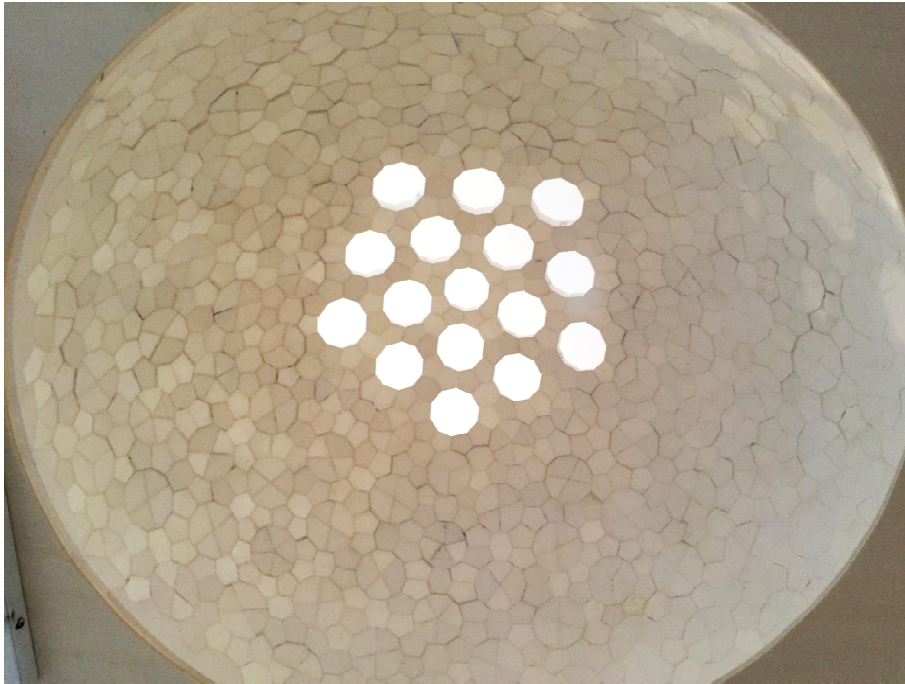


178. Fase 6,  
montaggio  
completo della  
maquette,  
vista laterale,  
fotografia di  
R. Gadaleta

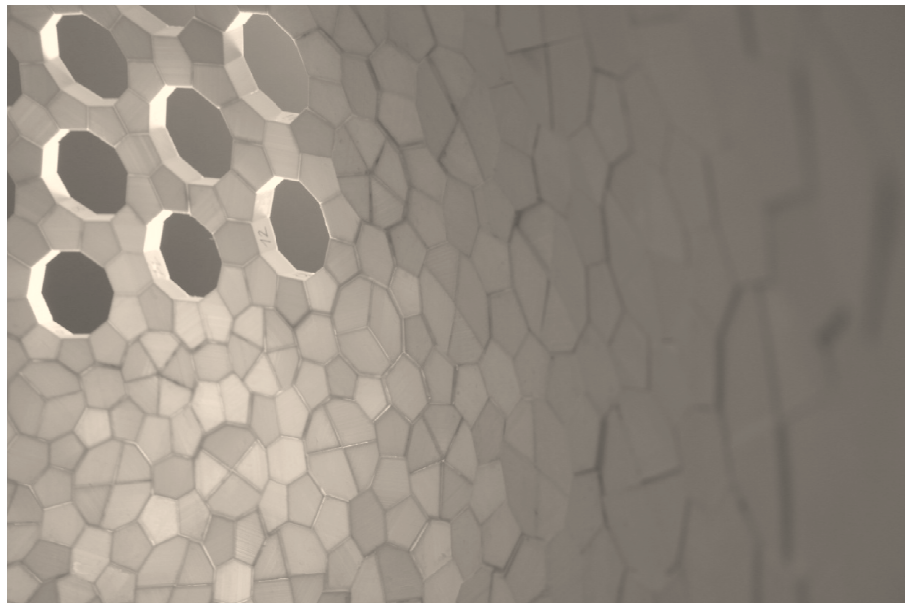


179. Fase 6,  
montaggio  
completo della  
maquette,  
vista dall'alto,  
fotografia di  
R. Gadaleta





180. Montaggio completo della maquette, vista dal basso dell'intradosso della cupola, fotografia di R. Gadaleta

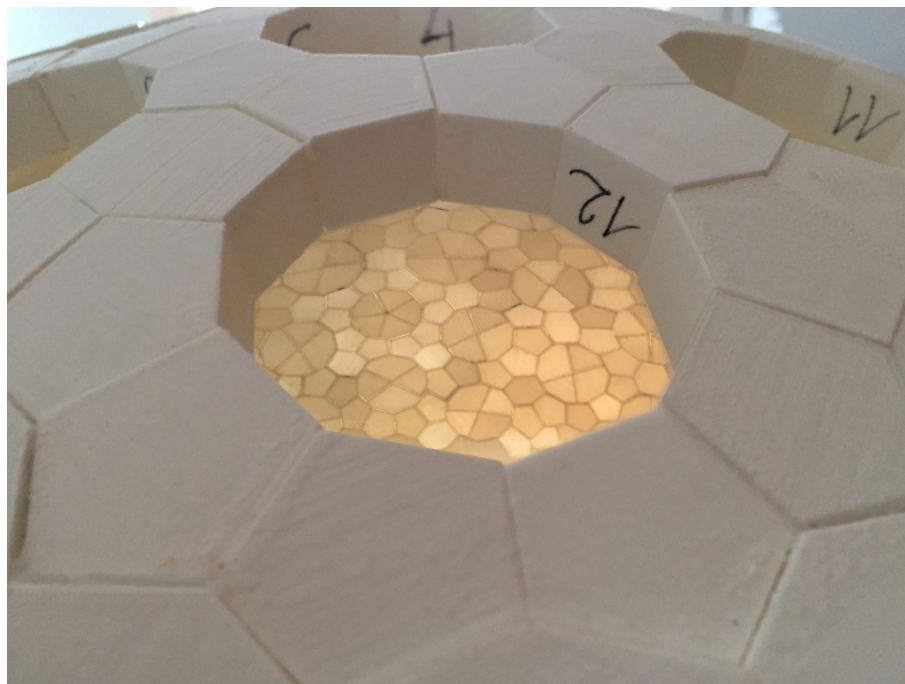


181. Vista dell'intradosso della cupola, particolare, fotografia di R. Gadaleta

182. Montaggio completo, vista dell'intradosso  
fotografia di R.Gadaleta



183. Montaggio completo, vista dell'estradosso,  
particolare,  
fotografia di R.Gadaleta





**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

Concio-tipo	Numero di copie nella cupola
1	30
2	30
3	30
4	30
5	30
6	30
7	30
8	30
9	30
10	30
11	30
12	30
13	25
14	25
15	25
16	30
17	30

Concio-tipo	Numero di copie nella cupola
18	25
19	25
20	25
21	25
22	25
23	30
24	10
25	20
26	50
27	60
28	30
29	55
30	110
31	55
32	60
33	30
34	30

184. R. Gadaleta,  
*Numero di ripetizioni di ciascun concio-tipo all'interno della cupola priva di bucatore*

#### **IV.2.4 Verifica statica attraverso il modello informatico geometrico-matematico e definizione delle condizioni limite della morfologia considerata**

È stata effettuata una verifica statica attraverso modellazione numerica dall'Ing. Daniele Malomo, dottorando presso il Dipartimento di Ingegneria Civile e Architettura (DICAr) dell'Università degli Studi di Pavia, collaboratore di *EUCENTRE, European Centre for Training and Research in Earthquake Engineering*, centro europeo di formazione e ricerca in ingegneria sismica con sede a Pavia, e più volte collaboratore nei progetti di stereotomia condotti dal Prof. Claudio D'Amato e dal Prof. Giuseppe Fallacara.

L'Ing. Daniele Malomo ha condotto una analisi statica agli elementi finiti sulla forma strutturale proposta, ovvero sulla cupola stereotomica in pietra da taglio configurata nel presente studio, nell'ipotesi semplificativa di materiale isotropo omogeneo elastico lineare, al fine di verificare l'influenza dell'apparecchiatura sul comportamento meccanico globale.

La presente analisi agli elementi finiti è stata svolta nell'ipotesi di giunti retti e spessore costante. I conci si considerano assemblati a secco ed arrangiati "a regola d'arte". Il metodo F.E.M. (Finite Element Method) di analisi agli elementi finiti consiste nel discretizzare un elemento in un numero, anche molto grande, di elementi di forma definita e dimensioni contenute, attraverso la creazione di una griglia o mesh composta da elementi finiti di forma codificata. Ogni singolo elemento viene considerato come un campo di integrazione numerica di caratteristiche omogenee.

Sono state eseguite tre diverse simulazioni numeriche, ai fini di effettuare una verifica sui limiti di bucatatura della cupola senza comprometterne l'equilibrio statico, considerando configurazioni in cui varia il numero dei conci presenti, sottratti a partire dalla chiave in modo da forare la struttura a maglie pentagonali, con conseguente alleggerimento della maglia strutturale. Nello specifico si enumera la quantità di conci presenti nelle varie soluzioni:

Caso A, Cupola piena composta complessivamente da 1210 conci;

Caso B, Cupola forata nella calotta sferica pentagonale superiore, composta complessivamente da 1145 conci;

Caso C, Cupola forata fino alle reni (massima bucatatura ipotizzata), composta complessivamente da 1020 conci.

La cupola è stata considerata incastrata alla base, la superficie di interfaccia è posta come quella tra il concio e la linea di terra.

I carichi applicati sono relativi al solo peso proprio.

La superficie, ottenuta dall'importazione nel software del modello solido tridimensionale della cupola, è stata discretizzata con una mesh triangolare di circa 357987 elementi.

Il litotipo utilizzato è costituito dalla pietra leccese, modellato come un materiale isotropo omogeneo a comportamento elastico lineare. Questa ipotesi estremamente semplificativa è stata formulata in virtù del fatto che la linea delle pressioni, verificata secondo l'approccio dell'Analisi Limite<sup>335</sup> ed eseguita considerando un arco equivalente, risulta interna allo spessore della muratura: i conci, pertanto, in ogni punto della superficie non subiscono tensioni di trazione, anche grazie all'assenza di carichi verticali aggiuntivi e/o carichi laterali, rimanendo idealmente in campo elastico lineare che non si fessura data la notevole resistenza a compressione della pietra e l'assenza di malta.

Lo spessore della cupola è pari a 0,218 m, con altezza di 5,02 m all'estradosso ed un diametro di 10,06 m.

In virtù dell'elasticità lineare ed essendo il rapporto raggio/spessore  $[R/t=(5,03/0,218)m=23,07 \text{ m}]$  superiore a 20, una membrana di rivoluzione può essere matematicamente utilizzata per modellare la cupola, poiché lo spessore della volta è molto piccolo se comparato alle altre dimensioni della struttura ( $R/t > 20$ )<sup>336</sup>, la quale sarà in grado di trasmettere solo sforzi interni giacenti sul piano tangente, ovvero le

---

<sup>335</sup> HEYMAN JACQUES, *The stone skeleton: structural engineering of masonry architecture*, Cambridge, Cambridge University Press, 1995

<sup>336</sup> Lo spessore della cupola studiata (0,22 m) è quindi maggiore dello spessore minimo di una cupola emisferica pari al 4,2% del suo raggio (si veda nota 208), considerando che il 4,2% di 5,03 m (raggio di estradosso) è pari a 0,21m, ed il 4,2% di 4,81 (raggio di intradosso) è pari a 0,20 m.

forze che agiscono sulla membrana si trasformano in stati tensionali di trazione o di compressione contenuti nel suo spessore.

La superficie è stata modellata secondo un approccio continuo, previa verifica dell'assenza di scorrimento tra i conci come indicato nel seguito, ma si è tenuto conto dell'apparecchiatura variando l'orientamento del sistema di riferimento locale dei conci come riportato in A. Romano<sup>337</sup> e S. Cattari<sup>338</sup>.

#### PROPRIETÀ MECCANICHE DELLA PIETRA LECCESE

$\gamma$ [kg/m <sup>3</sup> ]	E [MPa]	G [MPa]	fc [MPa]	ft [MPa]
1730	12967	5187	20,40	2,30

#### PROPRIETÀ STATICHE DELLA CUPOLA

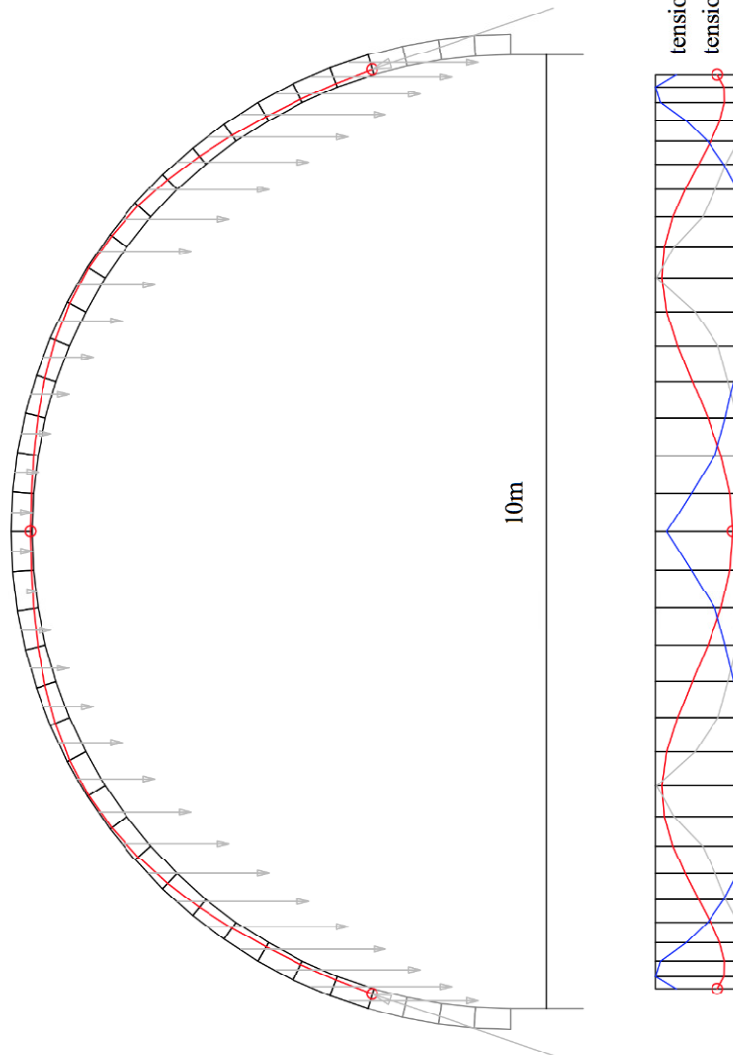
-	Volume [m <sup>3</sup> ]	Massa Totale [kg]	Peso Totale [kN]
Caso A	33	57228	5614
Caso B	31	53630	5555
Caso C	28	48440	4752

Nelle tabelle sopra riportate si leggono le proprietà statiche della pietra leccese e quelle della cupola nella sua interezza, nelle quali  $\gamma$  [kg/m<sup>3</sup>] indica la densità, E [MPa] il modulo elastico, G [MPa] il modulo tangenziale, fc [MPa] la resistenza a compressione uni assiale, ft [MPa] la resistenza a trazione indiretta per flessione.

<sup>337</sup> ROMANO A., GRANDE E., *Masonry barrel vaults: influence of the pattern*, articolo pubblicato in occasione della "14th World Conference on Earthquake Engineering", Beijing (Cina), October 12-17, 2008.

<sup>338</sup> CATTARI SERENA, RESEMINI SONIA, LAGOMARSINO SERGIO, *Modelling of vaults as equivalent diaphragms in 3D seismic analysis of masonry buildings*, 2008, in "Structural Analysis of Historic Construction. Preserving Safety and Significance" di Dina D'Ayala & Enrico Fodde, Department of Architecture & Civil Engineering, University of Bath (UK), London, CRC Press Taylor & Francis Group, 2008, Volume I, pp. 517-524





tensione estradosso max = 1,84 MPa  
tensione intradosso max = 1,87 MPa

185. D. Malomo,  
*Curva delle pressioni,*  
disegno infografico

A questo punto si esegue l'analisi limite sull'arco equivalente alla sezione della cupola, e si determinano la tensione massima all'estradosso, pari a 1,84 MPa e la tensione massima all'intradosso, pari a 1,87 MPa. Come si può notare dalla FIG. 185 la curva delle pressioni rimane interna allo spessore della muratura, e le massime tensioni di compressione sono molto inferiori a quella di progetto (20.40 MPa >>1.87 MPa). Questo assicura la stabilità della cupola «nell'ipotesi che non vi sia scorrimento dei conci e che non sia superata localmente la resistenza a compressione del materiale»<sup>339</sup>.

A tal fine nella tabella seguente sono riportati i valori di verificadello scorrimento dei conci, dove  $\varphi$  [°] indica il coefficiente di attrito interno (o angolo di resistenza al taglio),  $\mu = \tan \varphi$  [-] indica il coefficiente di attrito statico, T [kN] rappresenta la forza di taglio tra i conci (alle reni), N [kN] indica la forza di compressione dei conci (alle reni) ed il micronewton  $\mu N$  [kN] costituisce l'espressione della misura della forza di scorrimento.

#### VERIFICA SCORRIMENTO CONCI

$\varphi$ [°]		$\mu = \tan \varphi$ [-]	
33		0,78	
T [kN]	N [kN]	$\mu N$ [kN]	
5,71	64,35	50,20	

I valori di T ed N sono stati valutati punto per punto lungo tutto lo sviluppo del profilo della cupola, ed il rapporto critico è stato individuato alle reni. Poiché  $T \ll \mu N$  non si verifica scorrimento nella sezione individuata e per analogia anche nel resto delle interfacce.

Di seguito vengono esaminati, attraverso il modello matematico infografico i tre casi sopra riportati:

<sup>339</sup> D'AMATO GUERRIERI CLAUDIO, FALLACARA GIUSEPPE, *Archetipi costruttivi dell'architettura in pietra*, in "Città di Pietra/Cities of Stone. Pietre di Puglia. Costruire in pietra portante/Stones of Apulia. To Build load-bearing Stone", La Biennale di Venezia e Sensi Contemporanei, Venezia, Marsilio, 2006, pag. 54

CASO A, CUPOLA PIENA (FIGG.188,189)

Dalle figure si può evincere come la modesta entità del carico ha generato un campo di spostamenti estremamente esiguo, inferiori al millimetro, ma in linea con le aspettative, sia in chiave che alle imposte. Lo stato tensionale degli elementi è stato valutato sia secondo le tre direzioni principali (prime tre figure da sinistra in FIG.189) che secondo il criterio di von Mises delle tensioni ideali, sintesi delle tre figure. Secondo quest'ultimo (quarta ed ultima figura FIG.189), non sono presenti tensioni di trazione, infatti non sono presenti termini negativi nella legenda, come previsto dall'analisi limite precedente. La massima tensione di compressione, 2,2 MPa, è nettamente inferiore al limite di progetto 20,40 MPa.

CASO B, CUPOLA FORATA NELLA CALOTTA SFERICA PENTAGONALE SUPERIORE (FIG. 190)

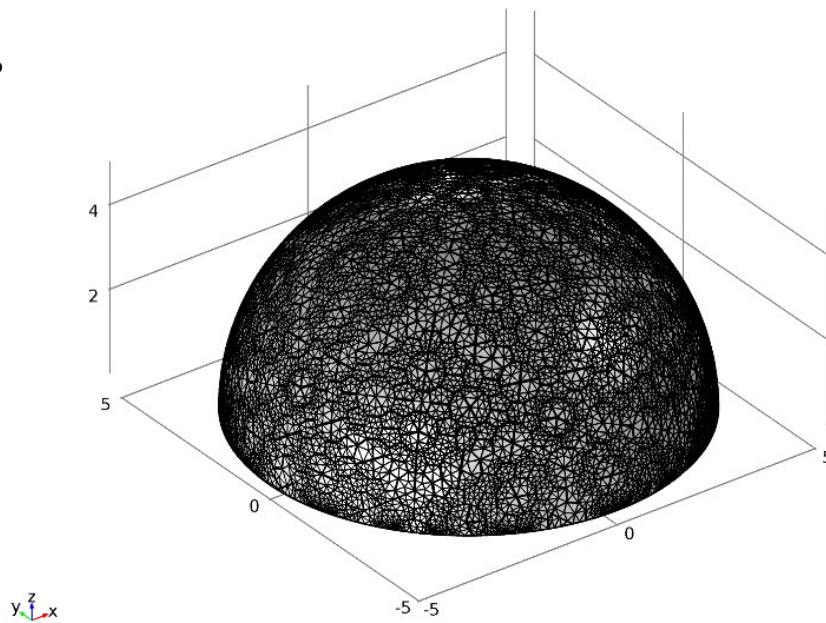
Il confronto con il Caso A viene eseguito direttamente mediante i dati relativi al criterio di von Mises, poichè non avrebbe senso farlo anche per spostamenti, in quanto sottraendo materiale è naturale che le tensioni saranno inferiori con la progressiva diminuzione del materiale. Lo sforzo alle imposte risulta minore, ed anche le tensioni di von Mises lo sono.

Si verificano concentrazioni di sforzo nei pressi dell'oculo, causate dall'assenza del comportamento membranale tipico dei gusci che qui viene meno avendo sottratto conci. Tuttavia, nonostante sia staticamente verificata anche la configurazione precedente, questa soluzione appare migliore poiché sottopone a sforzi minori l'imposta garantendo al contempo risparmio di materiale e morfologie più varie.

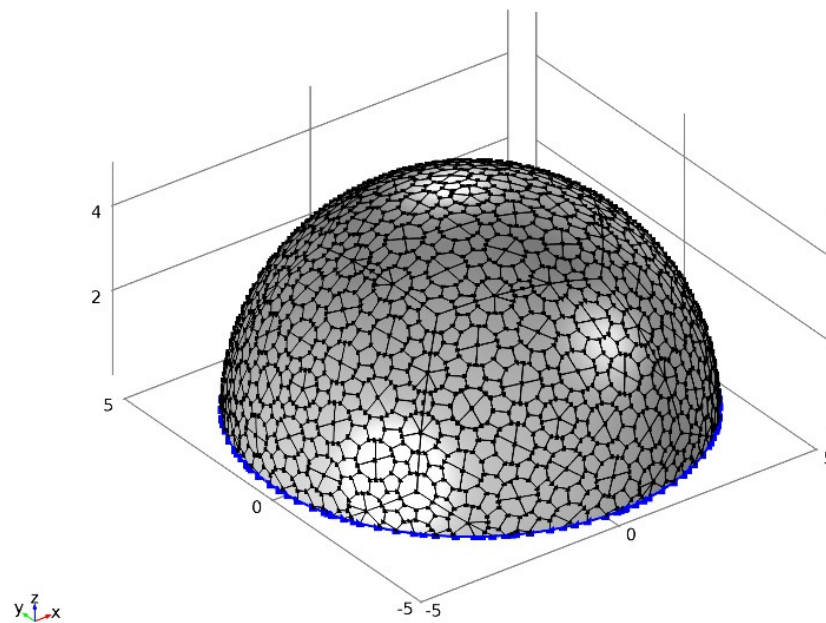
CASO C, CUPOLA FORATA FINO ALLE RENI (MASSIMA BUCATURA IPOTIZZATA) (FIG.191)

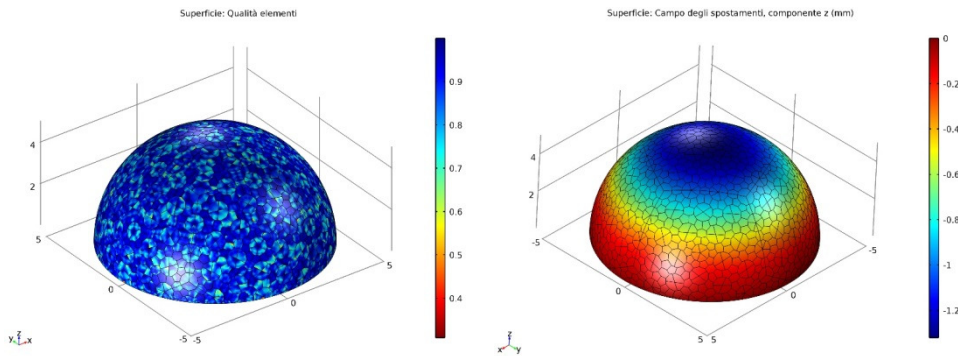
I confronti con i Casi A e B vengono eseguiti direttamente mediante i dati relativi al criterio di von Mises, poiché non avrebbe senso farlo anche per spostamenti, in quanto sottraendo materiale è naturale che le tensioni saranno inferiori con la progressiva diminuzione del materiale, come si è detto per il Caso B.

186. D. Malomo,  
*Mesch della cupola*,  
disegno infografico



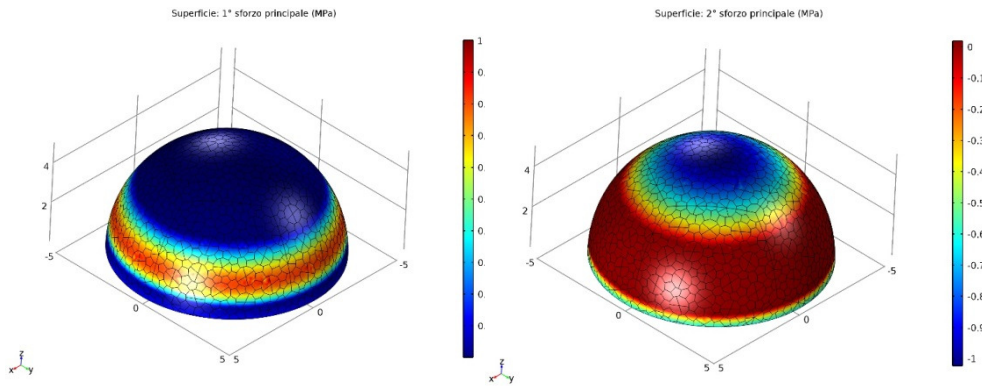
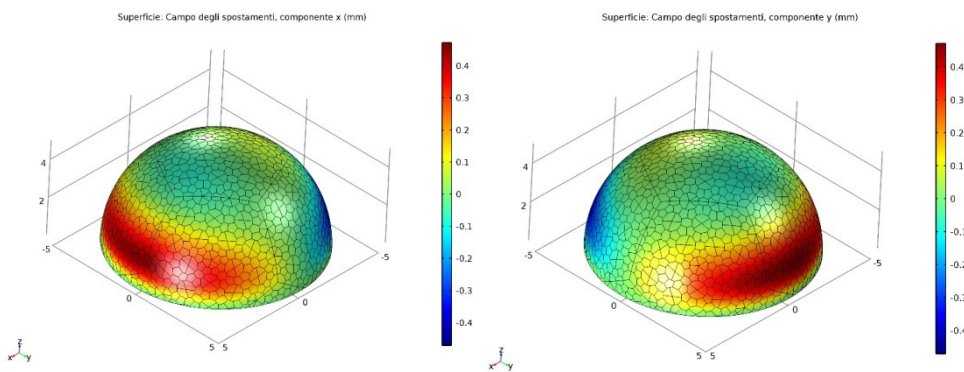
187. D. Malomo,  
*Condizioni al  
contorno*, disegno  
infografico





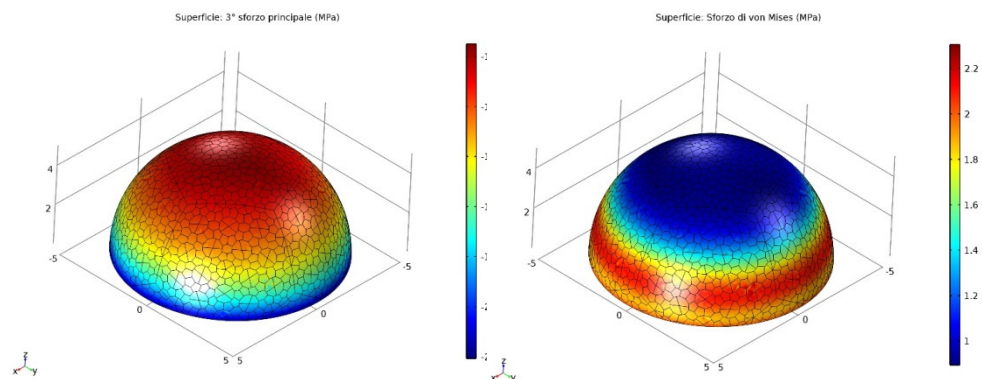
188.

D. Malomo,  
*Campo di Spostamenti*,  
disegno  
infografico



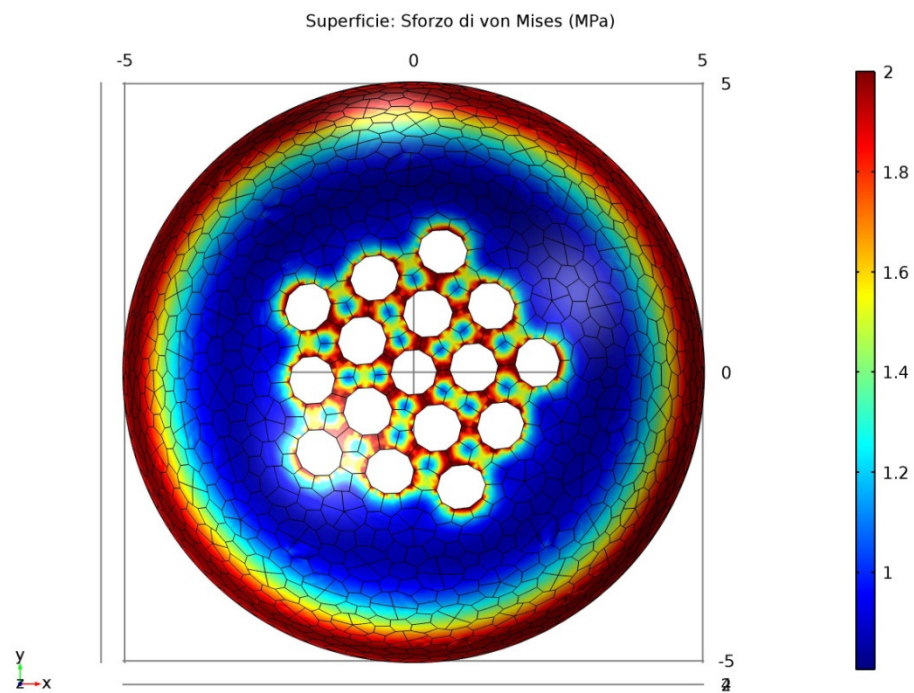
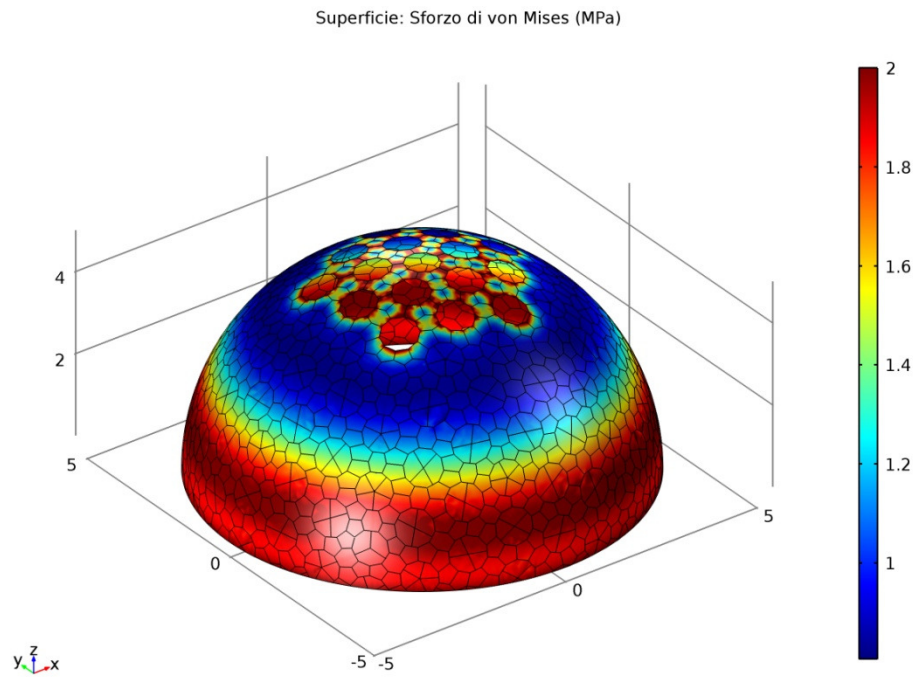
189.

D. Malomo,  
*1°, 2° e 3° sforzo principale*  
(prime tre figure  
da sinistra),  
*tensioni di von Mises*  
(ultima figura  
in basso a destra),

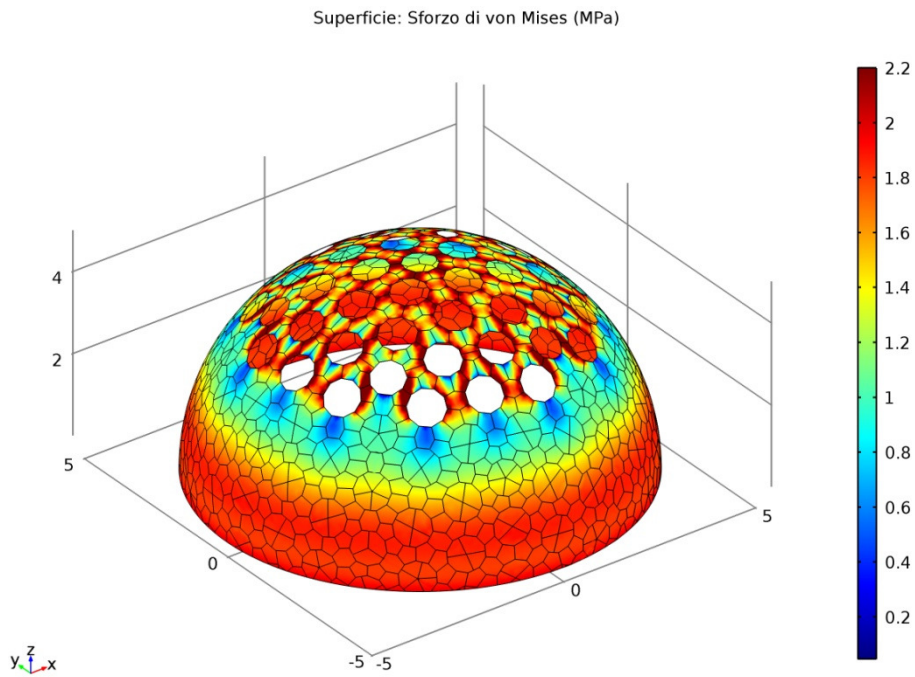


disegno  
infografico

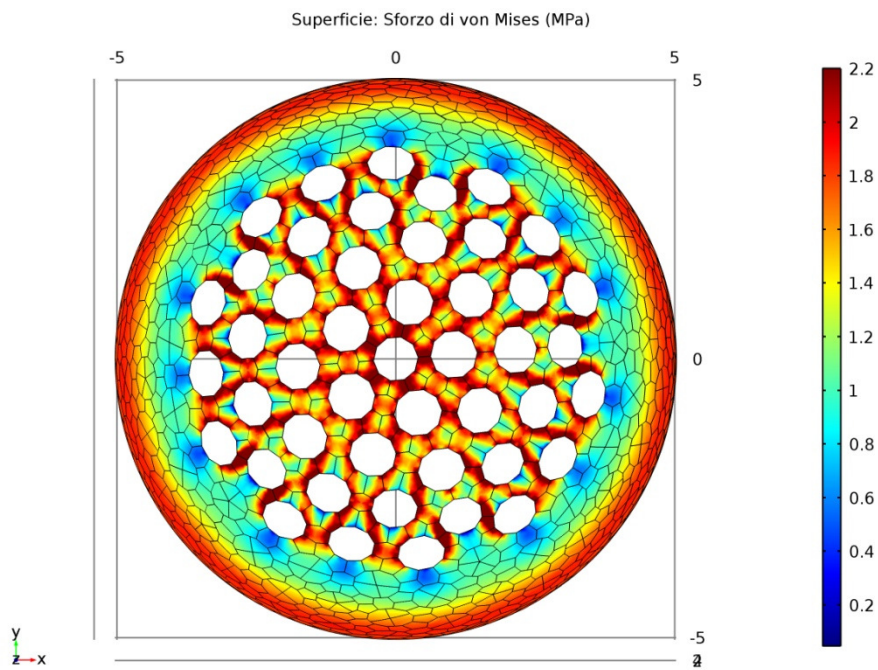
190. D. Malomo,  
Caso B, analisi  
con il criterio  
di von Mises,  
disegno  
infografico







191. D. Malomo,  
Caso C, analisi  
con il criterio  
di von Mises,  
disegno  
infografico





Questa ultima soluzione risulta vantaggiosa dal punto di vista della massa complessiva e del relativo sforzo che grava sulle imposte, ma gli sforzi locali raggiungono valori più alti con una concentrazione notevole di sforzi al limite della trazione (evidenziati in blu nelle figure) nella zona delle reni che potrebbe causare danneggiamenti e fessurazioni, in aggiunta considerando che queste aree sono indebolite dai fori.

Quindi le tre configurazioni analizzate sono tutte staticamente equilibrate e verificate. Tuttavia la soluzione che sembra coniugare al meglio risparmio di materiale, distribuzione e valori delle tensioni agenti è quella relativa al Caso B.

La realizzazione delle bucatore ritenute possibili nell'apparecchiatura della cupola, è una tecnica storicamente utilizzata sia per motivi strutturali, sia motivi formali, sia per motivi climatici.

Tali bucatore opportunamente previste all'interno della compagine muraria, si rivelano staticamente vantaggiose, poiché alleggeriscono la forma strutturale «a vantaggio de' muri»<sup>340</sup>, inoltre l'apertura costituita dell'oculo è resa possibile poiché, a differenza dell'arco o delle volte dove il concio in chiave è fondamentale per la determinazione statica dell'intero sistema costruttivo, la cupola può ospitare una bucatore in corrispondenza della sua sommità, poiché essa è resa progressivamente stabile durante la sua costruzione al completamento di ogni anello concentrico autoportante di elementi costruttivi, posti chiaramente procedendo dalla base verso la sua sommità<sup>341</sup>.

Nella configurazione dell'apparecchiatura proposta in questo studio, pur non essendoci filari concentrici sovrapposti, la cerchiatura di compressione è garantita dall'incastro topologico tra i conci per fasce successive dato dalla geometria della maglia strutturale, come illustrato

---

<sup>340</sup> VALADIER GIUSEPPE, *L'Architettura Pratica dettata nella scuola e cattedra dell'insigne accademia di S. Luca*, 5 voll., Roma, Incisori d'Architettura Giacomo Rocruè ed Eleuterio Catesi, con permesso de'superiori, 1833, Tomo IV, Sezione XVII, articolo LXV "Sul meccanismo e costruzione delle volte con rispettive figure"

<sup>341</sup> HOURIHANE COLUM, *The Grove Encyclopedia of Medieval Art and Architecture*, Oxford University Press, OUP USA, Tion. Ed., 2012, pag. 302

in FIG. 164. Avendo acquisito che la cupola può ospitare la bucatina in corrispondenza dell'oculo poiché  $T \ll \mu N$ , e dunque non si verifica scorrimento dei conci, va comunque ricordato che le tensioni di compressione in chiave sono generalmente più basse di quelle alle imposte, e questo può causare, se  $T \geq \mu N$ , lo scorrimento dei conci. Il posizionamento nella sommità delle cupole di lanterne largamente e pesantemente adornate è stato, infatti, uno degli stratagemmi adoperati sin dall'antichità per ovviare a tale problema inducendo compressione anche negli strati superiori della superficie, stabilizzando la forma strutturale.

Per tali motivi si ricorda che nel caso proposto in questo lavoro, qualora ragioni di ordine pratico o particolari normative lo richiedessero, è sempre possibile scegliere di chiudere l'oculo decagonale preferibilmente mediante l'apposizione dei cinque conci previsti che ne costituiscono il riempimento (FIG.156), oppure attraverso un unico concio decagonale.

La porzione superiore della cupola è quindi sempre compressa ed è supportata lateralmente dalla muratura<sup>342</sup> e proprio a causa di questo le cupole possono avere spessore più sottile di archi che coprono la stessa luce. «Nondimeno la volta sferica, unica fra tutte, non richiede armatura: poiché essa non è fatta soltanto d'archi, ma anche di anelli sovrapposti; e non è possibile immaginare fino a che punto gli uni e gli altri risultino reciprocamente collegati in innumerevoli intersezioni ed angoli uguali e disuguali, sicché in qualunque punto della volta si ponga una pietra, ci si accorgerà di aver posto con essa un concio appartenente a molti archi ed anelli. E una volta che si siano costruiti gli anelli uno sull'altro, e allo stesso modo gli archi, anche facendo l'ipotesi che la costruzione voglia crollare, non si vede da che parte potrebbe cominciare, soprattutto perché i conci con ugual peso e forza gravitano tutti verso un sol centro»<sup>343</sup>.

---

<sup>342</sup> HUERTA FERNÁNDEZ SANTIAGO, AROCA HERNÁNDEZ-ROS RICARDO, *Masonry domes: a study on proportion and similarity*, in "Proceedings of IASS 30th Anniversary World Congress, Madrid, 11-15 September 1989", Madrid, E.T.S. Arquitectura (UPM), 1989, pag. 13

<sup>343</sup> ALBERTI LEON BATTISTA, *L'architettura (De re aedificatoria)*, testo latino e traduzione a cura di Giovanni Orlandi. Introduzione e note di Paolo

La sottrazione dei conci che compongono i decagoni sferici, porta sia alla visualizzazione della distribuzione delle forze (evidenziate in rosso in FIG.152) secondo progressivi archi di scarico, similmente alla distribuzione statica che caratterizza la cupola della *Cappella della Sacra Sindone* opera di Guarino Guarini, sia al potenziamento dell'espressività formale dell'apparecchiatura muraria, evidenziandone maggiormente le regole compositive di simmetria quinary ed alleggerendone il carattere di massività, dimostrando ancora una volta come nella forma costruita stereotomica, configurazione statica ed estetica coincidono mirabilmente.

Formalmente l'apertura dell'oculo oltre a possedere carattere evocativo riguardo l'architettura classica antica, il cui esempio più significativo è costituito dal *Pantheon* (FIG.7) e riguardo l'origine dello spazio abitativo caratterizzato dall'apertura centrale sulla sua copertura per l'ingresso della luce e dell'aria e l'uscita del fumo prodotto dal focolare, costituisce anche quel «centro di emanazione raggianti»<sup>344</sup> che consente l'illuminazione naturale dello spazio cupolato, in analogia simbolica con il Sole nell'emisfera celeste visibile dalla superficie terrestre. Inoltre il carattere di radialità e centralità dell'apparecchiatura viene maggiormente evidenziato dall'irradiazione della luce naturale dal suo centro posto in sommità della cupola. Quest'ultima, in analogia simbolica con una stella, diviene sintesi tra la definizione conclusa e delimitata dello spazio sferico ed il suo carattere di apertura ed espansione raggianti in ugual modo ed in ogni direzione da un sol centro.

---

Portoghesi, 2 Tomi, Milano, Edizioni Il Polifilo, 1966, Tomo I, Libro III, Capitolo XIII, trad. italiana a pag. 244, testo latino a pag. 245: «Est tamen inter testudines una omnium recta spherica, quae armamenta non postulet, quando ea quidem non ex arcibus solum constat, verum etiam coronis. Et quis possit referre aut meditari animo, quam sint horum uterque innumerabiles herentes adacti sese mutuo intersecantes ad pares angulos et ad impares, utquotocunque loco per universam testudinem istiusmodi aliquem interserueris lapidem, plurimorum intelligas te et arcum et coronarum cuneum apposuisse? Et coronam qui coronae superastruxerit, et in arcum qui alterum arcum perduxerit, fingito velle id opus labescere, unde incipiet? Cuncti praesertim cuneis unicum centrum petentibus pari et viribus et innixu».

<sup>344</sup> ZAVIZIANO COSTANTINO, *Sugli avvenimenti preistorici*, Napoli, Tipografia Morano, 1872, vol. II, pag. 89

Il passaggio dell'aria e della luce all'interno dello spazio cupolato costituisce la giustificazione di carattere climatico per la presenza delle bucatore nella cupola, le quali favoriscono moti di ventilazione che, nei periodi caldi, contribuiscono al raffrescamento dello spazio interno garantendo un maggiore benessere termoigrometrico.

Si prevede che alcune bucatore possano essere aperte, altre invece chiuse opportunamente attraverso superfici vetrate.

L'opportuna collocazione della morfologia cupolata configurata nel presente studio, è determinata quindi da:

- motivi strutturali che auspicano un carico ridotto quanto più possibile sulle pareti ed una finitura di copertura all'estradosso molto leggera, ricordando che «è inoltre buona norma che il completamento delle volte sia fatto di pietra leggerissima, per evitare che le pareti vengano danneggiate da un eccesso di peso»<sup>345</sup>, come scrisse l'Alberti, anche se lo spessore dei conci è minimo;
- motivi climatici che favoriscono la bucatore della cupola per il passaggio della luce naturale e dell'aria, migliorando il benessere termoigrometrico proprio della morfologia cupolata che costituisce un esempio di architettura passiva, come esposto nel paragrafo III.5.1;
- motivi formali insiti nella configurazione della apparecchiatura che essendo ricercata per rispondere contemporaneamente ed efficacemente a requisiti statici ed estetici di cui si è precedentemente argomentato, si presta ad essere rappresentativa di caratteri universali, quindi ad occupare luoghi di rappresentanza come vani polari e nodali, «luogo in cui si concentra l'intenzione espressiva e simbolica del costruttore»<sup>346</sup> come affermato nel paragrafo III.5.1.

---

<sup>345</sup> ALBERTI LEON BATTISTA, *L'architettura (De re aedificatoria)*, testo latino e traduzione a cura di Giovanni Orlandi. Introduzione e note di Paolo Portoghesi, 2 Tomi, Milano, Edizioni Il Polifilo, 1966, Tomo I, Libro III, Capitolo XIII, trad. italiana a pag. 242, testo latino a pag. 245: «monentque testudinum complementa absolvas lapide levissimo, nequid muri iniquo abhinc pondere fatigentur».

<sup>346</sup> *Ibidem*

Alla luce di queste considerazioni di natura strutturale, formale e climatica, è possibile affermare che la cupola costituita dall'apparecchiatura individuata nel presente lavoro si addice ad occupare la copertura ultima di vani nodali e polari.

#### IV.2.5 Considerazioni sulla prototipazione a controllo numerico

È stato eseguito un prototipo in pietra presso la società francese SNBR, allo scopo di verificare la fattibilità della lavorazione dei conci e del montaggio dell'apparecchiatura.

Diversamente dalla maquette, è stato eseguito il prototipo della cupola di minor diametro presentata in questo studio (FIG.159), ulteriormente semplificata poiché i decagoni e gli ennagoni sono costituiti da un solo concio, date le dimensioni esigue degli elementi costruttivi costitutivi del prototipo, aventi lunghezza della faccia all'estradosso pari a circa 10 cm. Il prototipo misura 1,20 metri di diametro all'intradosso, con spessore dei conci pari a 4 cm. I conci, realizzati in pierre de Lens, sono stati tagliati dal robot in sessanta ore e sono stati prima numerati e poi messi in opera attraverso l'ausilio di una centina in poliuretano, preparata in quattro ore dal robot, su cui è stato trasferito, tramite incisione, il disegno di progetto dell'apparecchiatura (FIGG.162,163). L'esecuzione di tale disegno sulla centina non risulta essere indispensabile per la costruzione della cupola, così come dimostrato dalla maquette realizzata in PLA, ma è servito per velocizzare i tempi di montaggio, avvenuto in due giorni lavorativi ad opera di due persone, inclusa la pulitura del prototipo a montaggio ultimato. Poiché anche in questo caso, come nella maquette, si è presentata la problematica del peso esiguo dei conci e della mancanza di attrito fra essi, è stato posto del silicone tra le facce di giunto dei conci al fine di stabilizzare l'apparecchiatura.

Tale prototipo si è rivelato utile per una verifica di fattibilità nel montaggio e nella produzione dei conci così sagomati in materiale lapideo.



192. Produzione  
e numerazione  
dei conci lapidei,  
SNBR,  
Sainte-Savine,  
Francia,  
fotografia

193. Produzione  
e numerazione  
dei conci lapidei,  
SNBR,  
Sainte-Savine,  
Francia,  
fotografia





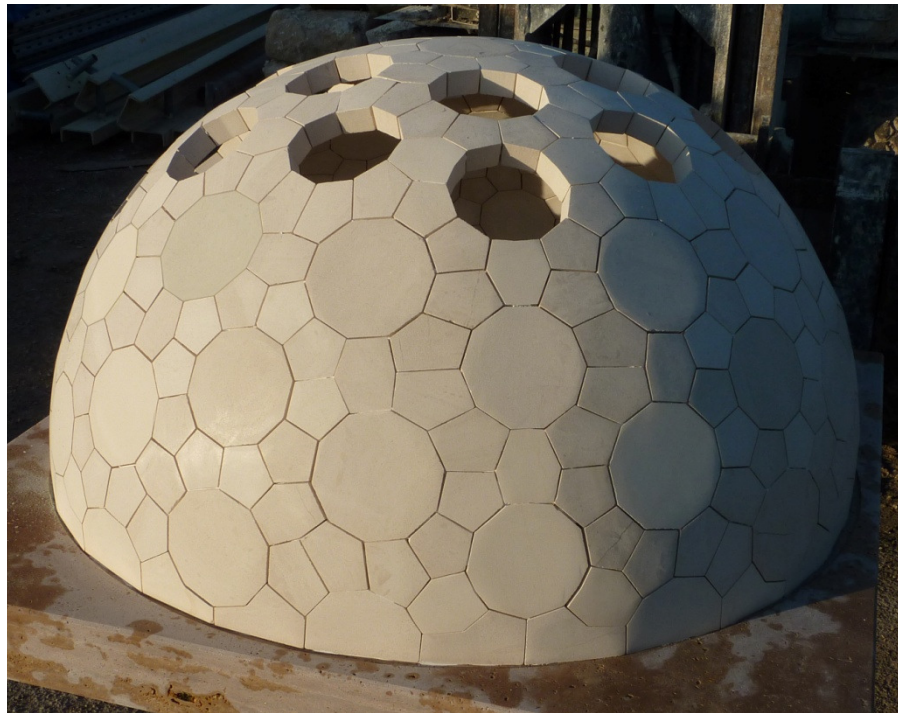


194. Montaggio del prototipo, SNBR, Sainte-Savine, Francia, fotografia

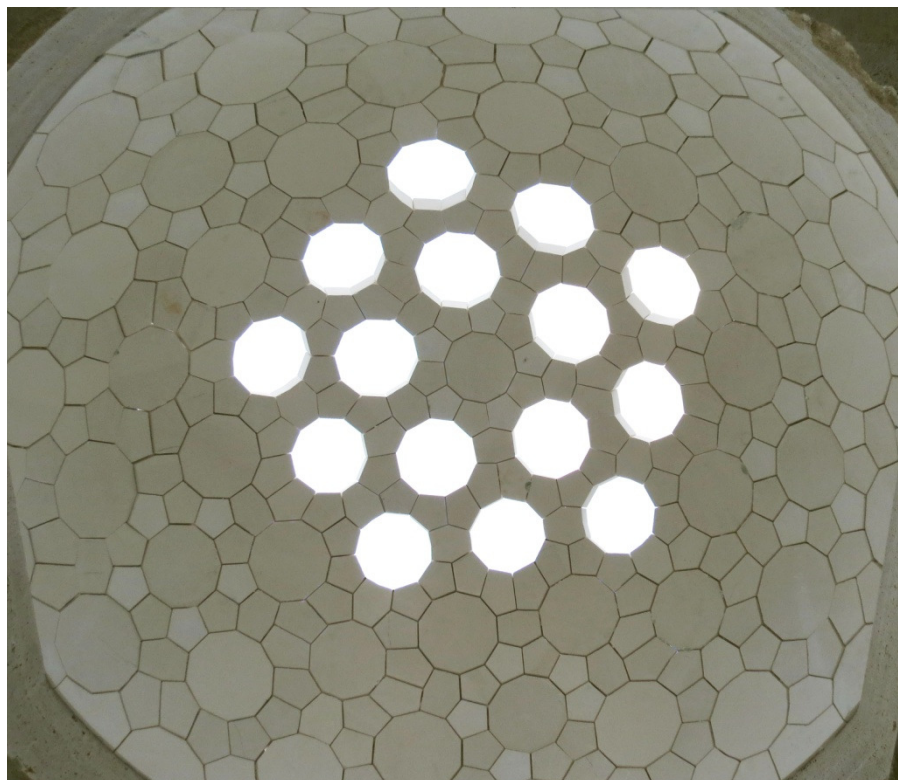


195. Montaggio del prototipo, SNBR, Sainte-Savine, Francia, fotografia

196. Prototipo  
ultimato, vista  
laterale, SNBR,  
Sainte-Savine,  
Francia,  
fotografia



197. Prototipo  
ultimato, vista  
dell'intradosso,  
SNBR,  
Sainte-Savine,  
Francia,  
fotografia



## **CAPITOLO V.**

### **Considerazioni conclusive e prospettive dello studio di ricerca**

---

Questo studio di ricerca individua una concreta risposta architettonica riguardo l'innovazione della morfologia di apparecchiatura tradizionale dello spazio cupolato in pietra da taglio, verificandone l'attualità attraverso i vantaggi che ne derivano in termini di possibilità realizzativa, attraverso la ricerca della riduzione del numero degli elementi costruttivi invariati e le contemporanee tecnologie di progettazione e produzione di questi ultimi che ne facilitano il taglio e la lavorazione, in termini di qualità estetica e risposta statica, e di durata intrinseca alla forma costruita con materiale lapideo.

In tal modo è possibile aggiornare il patrimonio attraverso l'innovazione che permette di apprendere dalla lezione derivata dall'architettura storica, non solo i vantaggi pratici e dunque materiali che la forma strutturale cupolata offre, ma anche la sua rappresentazione simbolica che riporta l'attenzione umana alla sfera spirituale, permettendo di cogliere il significato profondo della forma.

Il presente studio di ricerca ha permesso di giungere ad un primo risultato di ottimizzazione del numero dei conci tipo-invarianti lapidei da produrre in relazione al mantenimento delle loro dimensioni ridotte, ed al diametro della cupola che essi costituiscono, grazie alla particolare configurazione dell'apparecchiatura data dalla geometria del poliedro sferico e dalla tassellazione a simmetria quaternaria, in questo studio per la prima volta adoperata e configurata per la costruzione di una cupola in pietra da taglio.

Tale possibile risposta architettonica può naturalmente essere migliorata e meglio definita in studi successivi, che, partendo dalle conoscenze esposte e raggiunte del presente lavoro, potranno pervenire a risultati ulteriormente ottimizzati. In tal senso, questo lavoro, traducendo in lingua italiana, molte nozioni geometriche apprese prevalentemente dalla letteratura straniera, relative alla suddivisione della superficie sferica, e orientando tali conoscenze alla riduzione del numero dei piccoli elementi costruttivi-tipo che la compongono, si

pone come importante risorsa per qualsiasi studio architettonico sulla divisione della copertura emisferica. Inoltre contribuisce alla divulgazione in lingua italiana della tassellazione di L. Danzer, poco nota, da cui possono scaturire interessanti considerazioni architettoniche.

La mancanza di letteratura italiana su alcuni aspetti geometrici trattati nel presente studio, denota una progressiva perdita del sapere geometrico costruttivo storico, basato sulle regole della geometria classica, di cui molto spesso, non si individua l'applicabilità concreta. Le proposizioni sulla geometria sferica, contenute negli *Elementi* di Euclide, si rivelano indispensabili, come si è dimostrato, per non commettere errori di suddivisione di tale superficie a doppia curvatura e giungere più rapidamente alla definizione logica della forma costruita che ne deriva. Il sapere geometrico, basato non soltanto sull'acquisizione del corretto metodo di disegno descrittivo e proiettivo, ma sulla conoscenza delle proprietà e delle regole di proporzione che legano le figure tra loro, come ad esempio la relazione che intercorre tra le forme poliedriche e la loro proiezione sulla sfera ad essi circoscritta o inscritta affrontata in questo studio, costituisce il fondamento conoscitivo importante che permette il controllo consapevole della modellazione tridimensionale eseguita con gli attuali mezzi infografici volti a facilitare la visualizzazione spaziale dell'architettura ed a semplificarne la realizzazione attraverso le macchine a prototipazione rapida (RP) ed a controllo numerico (CNC) come si è dimostrato.

L'intuizione descritta nel presente lavoro, di configurare l'apparecchiatura della cupola lapidea secondo geometria poliedrica, ha permesso di giungere alla definizione di un metodo di progetto e di disegno di tale soluzione, i cui risultati si sono rivelati soddisfacenti.

La ricerca, volutamente spinta ai limiti ammissibili della difficoltà di apparecchiare una cupola lapidea di diametro pari a circa 10 metri, attraverso conci topologicamente ben incastrati tra loro, minimizzandone sia il numero degli elementi-tipo invarianti, sia le loro dimensioni, ottenendo spessori ridotti, ha permesso di individuare, infatti, le regole compositive che determinano una

possibile risposta architettonica rispetto alla ricerca di una forma costruita ottimizzata, esteticamente gradevole per la connessione euritmica ed armonica tra le parti e staticamente efficiente.

La nuova tessitura lapidea emisferica configurata nel presente lavoro, infatti, determina contemporaneamente una buona trama resistente ed un ricamo fortemente espressivo in cui convergono la geometria che caratterizza la struttura atomica dei quasicristalli e quella poliedrica platonica portata sulla sfera, rappresentazione dello spazio celeste, unendo nell'architettura della forma cupolata lapidea, la rappresentazione concreta del principio di verità strutturale della forma, chiaramente leggibile nella consustanzialità di *venustas*, *firmitas*, *utilitas*.

## **VI. APPENDICE**

---

### **VI.1. Scritto di L. Danzer sulla tassellazione da lui codificata**

DANZER LUDWIG, *Three-dimensional analogs of the planar Penrose tilings and quasicrystals*, in "Discrete Mathematics", n. 76, 1989, pp.1-7 (paper received on October 1988)



INVITED PAPER

**THREE-DIMENSIONAL ANALOGS OF THE PLANAR  
PENROSE TILINGS AND QUASICRYSTALS**

L. DANZER

*Mathematisches Institut der Universität, Postfach 50 05 00, D-46 Dortmund 50, F.R. Germany*

Communicated by B. Grünbaum  
Received 14 October 1988

**1. Introduction**

In 1984 Shechtman et al. [10] discovered alloys with a novel kind of structure, intermediate between crystalline and amorphous. These alloys, called *quasicrystals* [8], exhibit long-range orientational order but no translational symmetry. Since fivefold and even icosahedral symmetry is observed, several authors conjectured that the so-called “golden rhombohedra” yield a geometric explanation, in analogy to the “Penrose pieces” (see [3, 9]) in the plane. N.G. de Bruijn and others [1, 5, 6, 7, 11] developed the “projection method”, using cubic lattices in higher dimensions to obtain nonperiodic tilings with golden rhombohedra. Guided by the idea that the long-range order of the quasicrystals must stem from some *local* conditions, I have sought families of prototiles which become aperiodic when subject to appropriate *matching* conditions – as do the Penrose pieces. I restricted my search to subfamilies  $\mathcal{F}$  of a certain family  $\mathcal{P} := \{A, B, C, \dots, P\}$  of fifteen tetrahedra, which are derived from the Platonic icosahedron (see below), and succeeded in finding a four-member family  $\mathcal{F}_1$ . To my knowledge, the work of Katz [4] is the only attempt to give matching conditions for the golden rhombohedra which force aperiodicity. His proof is along completely different lines, using algebraic topology in place of inflation/deflation. In fact, his family consists of 22 prototiles (14 congruent to one and 8 to the other golden rhombohedron); they differ in their decorations (matching conditions).

In this note I first give a semi-axiomatic approach to the subject, and then describe a realization.

**2. Basic conditions for a family of prototiles**

Let  $\mathcal{F}$  be a *protoset*, i.e. a family of prototiles  $S_1, S_2, \dots, S_m$ , where each  $S_\mu$  is a polyhedron with facets  $S_\mu^1, \dots, S_\mu^r$ . On the set of all the facets let  $\sim$  be a given



equivalence relation which is at least as fine as the Euclidean congruence (see Section 5). An  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling is defined as a tiling  $\mathcal{P}$  (of the whole plane, or some part of it) by tiles each of which is congruent to some  $S_\mu$ , and satisfying the *matching conditions*:

- (A)  $\mathcal{P}$  is face-to-face; only equivalent faces may meet (see Sections 5 and 6(c)( $\alpha$ ) below).

In case  $\mathcal{P}$  is finite and the union  $U$  of its members is homeomorphic to a ball,  $\mathcal{P}$  is called a *patch*. If  $U$  is the whole space,  $\mathcal{P}$  is called a *global tiling*.

Two other basic conditions are (I) and (D):

- (I) There exists a constant  $\eta$ , with  $\eta > 1$ , and to every prototile  $S_\mu$  a fixed dissection of  $S_\mu$  which forms an  $(\eta^{-1}\mathcal{F}, \sim)$ -tiling. These tilings generate equivalent dissections in equivalent facets (see Section 5).

If we apply (I) to all the tiles of an  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling  $\mathcal{P}$  we obtain a  $(\eta^{-1}\mathcal{F}, \sim)$ -tiling  $\mathcal{Q}$  with  $U(\mathcal{Q}) = U(\mathcal{P})$ , called the *inflation* of  $\mathcal{P}$  and denoted by  $\text{infl}(\mathcal{P})$ . If  $\mathcal{P}$  is an  $(\mathcal{F}, \sim)$ -patch, so is  $\eta\mathcal{Q}$ ; we call  $\eta\mathcal{Q}$  an *expansion* of  $\mathcal{Q}$ .

- (D) To every *global*  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling  $\mathcal{P}$  there is *exactly one*  $(\eta\mathcal{F}, \sim)$ -tiling  $\mathcal{Q}$  such that  $\text{infl}(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$ .  
 $\mathcal{Q}$  is called the *deflation* of  $\mathcal{P}$  and denoted by  $\text{defl}(\mathcal{P})$ .

**Proposition 1.** (I) implies: The inflation can be iterated. Hence D. König's lemma guarantees the existence of global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tilings.

We shall write  $\text{infl}^k(\mathcal{P})$  for the  $k$ th iteration of the inflation operation.

**Proposition 2.** (I) and (D) imply: The deflation can be iterated. Hence the system  $(\mathcal{F}, \sim)$  is aperiodic, that is, there exist global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tilings, but all are nonperiodic.

### 3. Additional conditions

- (M)  $\mathcal{F}$  is *minimal*, that is, no proper subfamily  $\mathcal{F}'$  of  $\mathcal{F}$  satisfies (I), (D) with the same relation  $\sim$  and the same inflation or any power of it.

**Theorem 1.** (I), (D) and (M) imply: There is a natural number  $J$  such that for every  $j \geq J$ , every  $\mu$  and every  $\nu$ , the prototile  $S_\mu$  occurs in the patch  $\text{infl}^j(\eta^j S_\nu)$ . Moreover, for every  $\mu$  there is a  $\delta_\mu$ , with  $0 < \delta_\mu \leq 1$ , such that  $\delta_\mu$  is the density of the copies of  $S_\mu$  in every global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling.

Let  $e$  be an inner vertex of a tiling  $\mathcal{P}$ . Then  $\mathcal{P}$  generates a tiling of a neighborhood of  $e$  which may be projected onto the unit sphere centered at  $e$ .

The resulting spherical tiling  $\mathcal{S}$  is called the *vertex-figure* of  $\mathcal{P}$  at  $e$ . We may assign to each of its (spherical) tiles the label  $\mu$  of the corresponding tile  $S_\mu$  of  $\mathcal{P}$ , and in addition we may assign marks that show how  $S_\mu$  lies in the projection cone (see Section 5). In this way we obtain the *extended vertex-figure* (EVF) of  $\mathcal{P}$  at  $e$ . The last condition we need is:

- (E) Let  $E$  be an EVF which occurs in at least one global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling; then for some  $h$  and for some  $\mu$ ,  $E$  shall also occur in the interior of the patch  $\text{infl}^h(\eta^h S_\mu)$ . In the sequel  $H$  denotes the maximal  $h$  that is necessary for some  $E$ .

**Theorem 2.** (I), (D), (M) and (E) imply: *There exists a constant  $\gamma$  such that whenever  $\mathcal{A}$  is a patch in a global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling lying in a ball of radius  $\rho$ , then in every global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling every ball of radius  $\gamma\rho$  contains a patch congruent to  $\mathcal{A}$ .*

In this theorem  $\rho$  may be arbitrarily large, but  $\gamma$  does not depend on  $\rho$ .

**Corollary.** *There does not exist an algorithm for deciding in finitely many steps whether two  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tilings  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{Q}$  are congruent or not.*

More precisely, the non-existence concerns the case in which the tilings are “given” just as families of tiles; the situation is quite different in case  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{Q}$  are given, for instance, by generating rules.

#### 4. Realization

Let  $X$  be a fixed regular icosahedron in  $\mathbb{E}^3$ . We consider the family  $\hat{\mathcal{T}}$  of all tetrahedra  $T$  with the property that every plane containing a facet of  $T$  is parallel to one of the 15 plane mirrors of  $X$ . Hence every edge of such a  $T$  with a dihedral angle of  $90^\circ$  is parallel to one of the 15 axes of twofold rotations of  $X$  (*red edges*). Similarly, there are 10 directions for edges with dihedral angles of  $60^\circ$  or  $120^\circ$  (*green*), and 6 directions for the remaining (*white*) edges, at which the dihedral angle is a multiple of  $36^\circ$ . It turns out that there are exactly 15 similarity classes of such tetrahedra. Each of them possesses at least one edge with a non-primitive angle (angles of  $36^\circ$ ,  $60^\circ$  and  $90^\circ$  are *primitive*). If a non-primitive angle is, for example,  $120^\circ$ , one may cut the tetrahedron in two smaller ones, each with an angle of  $60^\circ$ . (In most cases the opposite edge and the volume are divided in the golden ratio; otherwise they are cut into halves.) It is not too surprising that the resulting tetrahedra again belong to  $\hat{\mathcal{T}}$ . Hence we may represent the 15 classes by a subfamily  $\mathcal{T} := \{A, B, C, \dots, P\}$  of  $\hat{\mathcal{T}}$  with the following property. Every white edge has a length of type  $a\tau^n$ , where  $\tau := (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618034\dots$  and  $a := (\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})})/4 = 0.951057\dots$ ; then every green edge has a length of type  $b\tau^n$ , with  $b := \sqrt{3}/2$  (here  $n \in \mathbb{Z}$ ). The red edges have lengths a power of  $\tau$ , with

one exception: there is one tetrahedron, which we call  $K$ , with three red edges, each half as long.

Next we consider the subfamily  $\mathcal{F}_1 := \{A, B, C, K\}$  of  $\mathcal{F}$  (or, more precisely, of an appropriate  $\mathcal{F}$ , since  $\mathcal{F}$  was not uniquely defined), given by the following table. For each pair of vertices we specify the dihedral angle and the length of the corresponding edge.

Tetra- hedron	Edge					
	1-2	2-3	3-1	2-4	1-4	3-4
$A$	$36^\circ, a$	$60^\circ, \tau b$	$72^\circ, \tau a$	$108^\circ, a$	$90^\circ, 1$	$60^\circ, b$
$B$	$26^\circ, a$	$36^\circ, \tau a$	$60^\circ, \tau b$	$120^\circ, b$	$108^\circ, \tau^{-1}a$	$90^\circ, 1$
$C$	$36^\circ, \tau^{-1}a$	$60^\circ, \tau b$	$90^\circ, \tau$	$120^\circ, b$	$72^\circ, a$	$36^\circ, a$
$K$	$36^\circ, a$	$60^\circ, b$	$72^\circ, \tau^{-1}a$	$90^\circ, \tau/2$	$90^\circ, 1/2$	$60^\circ, \tau^{-1/2}$

We also define  $\sim_1$  as follows: If  $\Delta$  and  $\Delta'$  are two congruent facets without any red edge, then  $\Delta' \sim_1 \Delta$  shall mean the same as  $\Delta' \cong \Delta$  (compare Section 5). Otherwise  $\sim_1$  stands for the identity. In other words, if  $\Delta$  is a facet of a tetrahedron  $T$  with at least one red edge, then on the other side of  $\Delta$  has to be the mirror image of  $T$ . There are nine such “red” triangles. The other seven facets fall into three classes under  $\sim_1$ , the second being similar to the first (with ratio  $\tau$ ). At such a facet two different tetrahedra may match.

**Main theorem.** (a) With  $\eta := \tau$  the system  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$  satisfies (I), (D), (M), (E). It has  $H = 6$ , and we may choose  $J = 3$  and  $\gamma = 40$ .

(b) Because of the red edges, every  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$ -tiling can be split into octahedra  $\langle A \rangle, \langle B \rangle, \langle C \rangle, \langle K \rangle$ , where  $\langle K \rangle$  consists of eight copies of  $K$ , while the others consist of four congruent tetrahedra.

(c) The vertices of the prototiles fall into four classes such that at every vertex of an  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$ -tiling only vertices of the same class can meet (so they might represent atoms of four different elements).

(d) There are exactly three global  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$ -tilings with all (global) symmetries of the full icosahedral group. By inflation and subsequent expansion they are permuted cyclically. Besides these three there are many such tilings with fivefold and also many with threefold rotational (mostly even dihedral) symmetry.

(e) There are exactly 27 extended vertex-figures, which can occur in a  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$ -tiling; in global tilings there are only 22. Except for the one that belongs to the center of  $\langle K \rangle$ , every EVF after at most six inflations is turned into one of the three with full icosahedral group (see (d)).

The dissections that define the inflation of the system  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$  can all be described by repeated cuts of the type explained above (splitting a tetrahedron

into two). They give rise to the following *inflation-matrix*  $M$ :

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ \tau^{-1}A & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \tau^{-1}B & \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \tau^{-1}C & \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \\ \tau^{-1}D & \begin{bmatrix} 6 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

the meaning is that  $\text{infl}(A)$  consists of 3 copies of  $\tau^{-1}B$ , 2 copies of  $\tau^{-1}C$ , and 6 copies of  $\tau^{-1}D$ , etc. Now (M) follows immediately from the fact that

$$M^3 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 6 & 1 \\ 52 & 33 & 28 & 11 \\ 30 & 18 & 21 & 5 \\ 96 & 60 & 56 & 19 \end{bmatrix}$$

and hence there are no zero entries in any higher power of  $M$ .

### 5. Some additional remarks on the role of the equivalence relation $\sim$

If  $\Delta$  and  $\Delta'$  are two triangles, the statement  $\Delta \cong \Delta'$  is ambiguous, since it is not clear which vertex of  $\Delta'$  corresponds to which one of  $\Delta$ . Every triangle is trivially congruent to itself, but  $\Delta abc \cong \Delta bca$  must be interpreted as meaning that the triangle is equilateral. We have the same kind of difficulty with our  $\sim$ . Strictly speaking we have to deal with a certain set  $G$  of mappings  $\alpha$ , where every  $\alpha$  maps a certain facet of a certain prototile onto another one. So every member of  $G$  is the restriction of a Euclidean isometry to a certain facet. It defines a *unique* equivalence between two facets or a symmetry of one facet. Of course,  $G$  has to satisfy the analogs to the usual equivalence axioms, namely:

- (i) If  $F$  is a facet of a prototile then the identity on  $F$  belongs to  $G$ .
- (ii)  $\alpha \in G$  implies  $\alpha^{-1} \in G$ .
- (iii) If  $\alpha$  and  $\beta$  are in  $G$  and the image of  $\alpha$  equals the inverse image of  $\beta$ , then  $\beta \circ \alpha$  is in  $G$ .

### 6. Open problems

- (a) Which other subfamilies  $\mathcal{F}$  of  $\mathcal{J} \times \tau^{\mathbb{Z}}$  can play a role similar to  $\mathcal{F}_1$ ? More precisely:
  - For which  $\mathcal{F}$  are there global  $(\mathcal{F}, \cong)$ -tilings? For which are there global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tilings with some finer  $\sim$ ?
  - Which systems  $(\mathcal{F}, \sim)$  are aperiodic?
  - Which systems  $(\mathcal{F}, \sim)$  satisfy (I)? Which satisfy (I) and (D)? For example,

since  $\tau K = K \cup B$ , and in every global  $(\mathcal{F}_1, \sim)$ -tiling every copy of  $B$  is part of  $\tau K$  in this way, it follows that  $\mathcal{F}_2 := \{A, C, K, \tau K\}$  is essentially equivalent to  $\mathcal{F}_1$  and trivially satisfies (I), (D), (M), (E).

(b) Are the global tilings belonging to *different* aperiodic systems  $(\mathcal{F}, \sim)$  in some sense isomorphic? Or at least those satisfying (I), (D)?  $\mathcal{F}_1$  and  $\mathcal{F}_2$  may serve as a trivial example.

(c) Are there matching conditions different from (A), which could serve as well? For instance:

( $\alpha$ ) Let the facets be *oriented* and require different orientations for matching facets. (Suggested by R. Penrose, during a visit to Dortmund in May 1988.) This would rule out local reflections.

( $\beta$ ) Let besides  $\mathcal{F}$  be given a family  $\mathcal{E}$  of *proto-vertex-figures* (or *proto-EVF's*) and eliminate the role of  $\sim$ . Possibly it makes sense to require a priori that the vertices fall into finitely many classes, say  $V_1, \dots, V_p$ . Then  $\mathcal{E}$  could be replaced by  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_p$ .

(d) ( $\alpha$ ) Can all the nonperiodic tilings which are defined by the projection method [3, 4, 6, 9] also be explained by appropriate matching conditions? Katz [4] shows this to be true in the case of the "Penrose tilings" of the golden (or Ammann-) rhombohedra.

( $\beta$ ) Are there tilings of this kind, to which *no* inflation applies? (Compare [11] for the plane case  $n=7$  instead of  $n=5$ .) Katz is explicitly silent on this question.

(e) Is there a system  $(\mathcal{F}, \sim)$  as in (a), or a system  $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$  as in (c)( $\beta$ ), which gives a geometric explanation of the *quasicrystals* found by physicists?

(i) Consider those vertices of a global  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$ -tiling which belong to the same class in the sense of part (c) of the Main Theorem. What pattern do they form? Are they the vertices of another quasiperiodic tiling?

(g) Are there 3-dimensional analogs to the Ammann bars of the plane Penrose tilings (compare [2], p. 547 ff.)?

(h) Is there to every aperiodic system  $(\mathcal{F}, \sim)$  a patch  $\mathcal{P}$  such that the union  $U$  of its tiles does permit a lattice tiling? (Suggested by G. Ewald in a discussion in April 1988.) The resulting  $\mathcal{F}$ -tiling is supposed to be face-to-face, but of course cannot satisfy (A).

## References

- [1] N.G. de Bruijn, Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 84 (1981) 39–66
- [2] B. Grünbaum and G.C. Shephard, Tilings and Patterns (Freeman, New York, 1987).
- [3] R.K. Cuy, The Penrose pictures, Bull. London Math. Soc. 8 (1976) 9–10.
- [4] A. Katz, Theory of matching rules for the 3-dimensional Penrose tilings, Commun. Math. Phys. 118 (1988) 263–288.

- [5] P. Kramer, Non-periodic central spacefilling with icosahedral symmetry using copies of seven elementary cells, *Acta Cryst. A* 38 (1982) 257–264.
- [6] P. Kramer, Space-group theory for a non-periodic icosahedral quasilattice, *J. Math. Phys.* (to appear).
- [7] P. Kramer and R. Neri, On periodic and non-periodic space fillings on  $\mathbb{E}^m$  obtained by projections, *Acta Cryst. A* 40 (1984) 580–587.
- [8] R.D. Nelson, Quasicrystals, *Scient. Amer.* 255 (1986) 32–41.
- [9] R. Penrose, Pentaplexity, *Eureka* 39 (1978) 16–22.
- [10] D. Shechtman, I. Bleck, D. Gratias and J.W. Cahn, Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry, *Phys. Rev. Letter* 53 (1984) 1951–1953.
- [11] E.J.W. Whittaker and R.M. Whittaker, Some generalized Penrose patterns from projections of  $n$ -dimensional lattices, *Acta Cryst. A* 44 (1988) 105–112.

**Note added in proof**

It seems preferable to replace (A) by the following condition:

(A\*)  $\mathcal{P}$  is face-to-face; in  $\mathcal{P}$  there occurs no EVF, that does not also occur in the interior of some patch of type  $\text{infr}^h(\eta^h S_\mu)$ .

(A\*) Implies (A) but not vice versa. Under (A\*) (E) becomes trivial.

## **VI.2. Scritto su L. Danzer in occasione del suo 80° compleanno**

DOLBILIN NIKOLAI, SCHULTE EGON, *Special issue in honor of Ludwig Danzer's 80th birthday*, articolo pubblicato su ScienceDirect, European Journal of Combinatorics, 29, available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com), marzo 2008





ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



European Journal of Combinatorics 29 (2008) 1801–1802

European Journal  
of Combinatorics

[www.elsevier.com/locate/ejc](http://www.elsevier.com/locate/ejc)

## Foreword

# Special issue in honor of Ludwig Danzer's 80th birthday

We are pleased to dedicate this *Special Issue of the European Journal of Combinatorics* to *Ludwig Danzer* on the occasion of his 80th birthday, celebrated on November 15, 2007. This collection features research articles by a selected group of authors — some of his students, colleagues, collaborators, and friends.

Ludwig Danzer attended the Technische Hochschule and the Ludwig-Maximilians-Universität in Munich, graduating with a Staatsexamen in 1951. After six years of high school teaching at a gymnasium, he took a position as Assistant at the Mathematical Research Institute in Oberwolfach and then in 1959 became Assistant to Martin Kneser in Munich. After receiving his Ph.D. from Kneser in 1960, he spent the academic year 1960/61 as an Assistant Professor at the University of Washington in Seattle. Then in 1963, Ludwig Danzer moved with Kneser to Göttingen, where he received his Habilitation under Kneser and served as Dozent at the Georg-August-Universität Göttingen. From 1969 until his retirement in 1992, Ludwig Danzer served as Professor of Mathematics at the Universität Dortmund. He was one of the three founding “fathers” of the Abteilung Mathematik at the newly founded University and was heavily involved in building and shaping the University in general. Since 1992, he has been Professor Emeritus at the Universität Dortmund. In recognition of his many contributions the University held a Festkolloquium in his honor on November 16, 2007.

Ludwig Danzer's most important research contributions are in discrete, combinatorial and convex geometry, but his mathematical interests are much broader and include areas where discrete geometry meets algebra, combinatorics, number theory, and crystallography. He is well known for his outstanding geometric intuition and problem solving skills. Ludwig Danzer's early research interests were strongly influenced by László Fejes Toth's discrete geometry school in Budapest, as evidenced by his Habilitation thesis on *Finite Point-sets on  $S^2$  with Minimum Distance as Large as Possible*, as well as his solution to the Gallai Problem. Reluctant to publish his research findings, Ludwig Danzer did not exactly follow the publish-or-perish motto of academia, and so it happened that his Habilitation thesis and his solution to the Gallai Problem would appear in journals only in 1986 (in *Discrete Mathematics*, 60 (1986), 3–66, and *Studia Sci. Math. Hungar.* 21 (1986), 111–134, respectively), in today's competitive world a nearly suicidal approach for almost everyone else. In the early 1960's, Ludwig Danzer co-authored the famous DGK paper with Branko Grünbaum and Victor Klee on combinatorial geometry, entitled *Helly's Theorem and its Relatives*, which had a strong impact on his further career. In the late 1970's, Ludwig Danzer and Branko Grünbaum initiated the modern abstract theory of regular polytopes and their groups, a new area of research inspired by Coxeter's classical work. One of us, E.S., was Assistant to Ludwig Danzer for many years and collaborated with him in this area.

Ludwig Danzer has a passion for tiling theory. He has collaborated with Branko Grünbaum and Geoffrey Shephard on tilings of the plane and higher-dimensional spaces, and in the past fifteen years has extensively worked on aperiodic tilings. Ludwig Danzer was one of the first mathematicians to seriously study challenging mathematical problems on aperiodicity in response to the 1984 discovery of quasicrystals, and has been at the forefront of this area for all those years.

Ludwig Danzer has had a strong impact on the development of discrete geometry for well over forty years. For many years he regularly organized the discrete geometry conferences at Oberwolfach, attracting the leading experts in the field. Many of us unable to attend a meeting in Oberwolfach will remember receiving a warm postcard from Ludwig Danzer signed by participants of the meeting. Unforgettable also are the evenings in his company at Oberwolfach and his selection of excellent Rhine wine, that gives away a very distinguished wine taste. In his passion for photography he achieved a professional level. Many of his friends have received his perfect pictures from places around the world, often accompanied by a nice postcard.

Finally, our thanks go out to all contributing authors and to all referees of the sixteen articles in this collection. We also greatly appreciated input we have received from Gerd Wegner in preparing this brief foreword. And above all, we would like to wish Ludwig Danzer all the best for many more years — excellent health and enjoyable mathematical productivity.

*Guest editors*

Nikolai Dolbilin

*Mathematical Steklov Institute,  
Moscow, Russian Federation*

Egon Schulte\*

*Northeastern University,  
Boston, United States*

*E-mail address: schulte@neu.edu.*

Available online 20 March 2008

\* Corresponding editor.

## VII. BIBLIOGRAFIA TEMATICA

---

### CAPITOLO I.

#### La cupola in pietra da taglio come presenza di forma simbolica e forma costruita

ALBERTI LEON BATTISTA, *L'architettura (De re aedificatoria)*, testo latino e traduzione a cura di Giovanni Orlandi. Introduzione e note di Paolo Portoghesi, Milano, Edizioni Il Polifilo, 1966

ALIGHIERI DANTE, *Divina Commedia*. Annotata e commentata da Tommaso di Salvo con illustrazioni, Volume I-II-III, Bologna, Zanichelli, 2001

BAUMAN ZYGMUNT, *Modernità liquida*, Roma-Bari, Laterza, 2011 (I Ed. "Liquid Modernity", Cambridge, Polity Press, 2002)

BORBEIN ADOLF HEINRICH, *Tektonik, zur Geschichte eines Begriffs der Archäologie*, in "Archiv für Begriffsgeschichte", XXVI, n. 1, 1982

BRUNACCI VINCENZIO, *Corso di matematica sublime*, Tomo IV, Firenze, Presso Pietro Allegrini, 1808

CONFORTI CLAUDIA, *Lo specchio del cielo. Forme significati tecniche e funzioni della cupola dal Pantheon al Novecento*, Milano, Electa, 1997

D'AMATO CLAUDIO, *Consumismo e consumo in architettura*, lezione tenuta presso l'Accademia Nazionale di San Luca nel corso didattico "Arti visive e architettura nella società del consumismo" a cura di Paolo Portoghesi, Roma 2014

D'AMATO CLAUDIO, FALLACARA GIUSEPPE, *Progettare con la pietra tra tecnica e invenzione*, lezione tenuta presso la Facoltà di Architettura del Politecnico di Bari, Bari 2010

DELL'ARCO MARIO, *Roma Capricciosa. Miti leggende aneddoti fatti di ieri e di oggi narrati da Mario Dell'Arco*, Roma, Il Nuovo Cracas Editore, 1967

DI CARLO BIAGIO, *Strutture geodetiche*, Pescara, DC Books, 2010

EUDOSSO DI CNIDO, *Phaenomena*, perventuzi attraverso l'opera di M. T. Cicerone "Phaenomena Aratea", scritta circa nel 90-89 a.C.

FALLACARA GIUSEPPE, *Verso una progettazione stereotomica. Nozioni di stereotomia, stereotomia digitale e trasformazioni topologiche: ragionamenti intorno alla costruzione della forma*, Roma, Aracne editrice, 2007, pag. 36

FALLACARA GIUSEPPE, MINENNA VINCENZO, *Stereotomic Design*, Maglie (LE), Ed. Gioffreda, 2014

FRAMPTON KENNETH, *Tettonica e architettura. Poetica della forma architettonica nel XIX e XX secolo*, Milano, Skira Ed., 2007

KEPLER JOHANNES, *Mysterium Cosmographicum*, Tubinga, 1596

LALBAT CLAUDE, MARGUERITTE GILBERT, MARTIN JEAN, *De la stéréotomie médiévale : la coupe des pierres chez Villard de Honnecourt*, in Bulletin Monumental, tome 147, n.1, Parigi, 1989

MONEO RAFAEL, *L'altra modernità. Considerazioni sul futuro dell'architettura*, Milano, Christian Marinotti Edizioni, 2015

NOLLETTI ALBINO, "Parmenide profeta della globalizzazione? Che cos'è l'essere di Parmenide: spiegazione di un enigma filosofico", Teramo, 2004

PANOFSKY ERWIN, *La prospettiva come "forma simbolica"*, Milano, Abscondita, 2007

PARMENIDE, *Sulla Natura (Περὶ Φύσεως)*, V sec. a. C., *Il discorso sulla verità*, DK 28 B, frammento 8, in

PATAPIEVICI ROMAN HORIA, *Gli occhi di Beatrice. Com'era davvero il mondo di Dante?*, Milano, Bruno Mondadori, 2006

PÉROUSE DE MONTCLOS JEAN-MARIE, *L'architecture à la Française du milieu du XV siècle à la fin du XVIII siècle*, Paris, 1982

PINTO PUERTO FRANCISCO, *Las esferas de piedra. Sevilla como lugar de encuentro entre arte y ciencia en el Renacimiento*, Sevilla, Diputación de Sevilla, Servicio de Publicaciones, Sección Arte, RC Impresores, 2002

PLATONE, *Filebo*, 366-365 a.C. ca.

PLATONE, *Timeo. Testo greco a fronte*, a cura di Giovanni Reale, Milano, Bompiani Editore, 2000

PLOTINO, *Enneadi*, III-IV sec. d.C.

PORTOGHESI PAOLO, *Geoarchitettura. Verso un'architettura della responsabilità*, a cura di Maria Ercadi e Donatella Scatena Ginevra-Milano, Skira, 2005

PURINI FRANCO, *Comporre l'architettura*, Roma-Bari, Editori Laterza, 2000

ROVELLI CARLO, *Dante e Einstein nella tre-sfera*, articolo tratto da "Il Sole 24Ore" del 20-10-2010

RUSSO LUCIO, *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*, Milano, Universale Economica Feltrinelli, 2013, (I Ed. 1996)

RUSSO LUCIO, *Stelle, atomi, velieri. Percorsi di storia della scienza*, Milano, Mondadori, 2015

SANTAGATA MARCO, *L'io e il mondo. Un'interpretazione di Dante*, Bologna, Il Mulino, 2011

SCHMITTHENNER PAUL, *Das sanfte Gesetz in der Kunst, in Sonderheit in der Baukunst. Rede*. Hünenburg, Straßburg, 1943

*Septuaginta (LXX) o versione dei Settanta*, (III-I sec. a. C.), Genesi

SPIAZZI ANNA MARIA, *Giotto. La cappella degli Scrovegni di Padova*, contributi di Giuseppe Basile e Serenella Borsella, Ginevra-Milano, Skira Editore, 2013

STIFTER ADALBERT, *Bunte Steine*, Vienna, 1853 (trad. it. "Pietre colorate", Marsilio Editori, Venezia, 2005)

TORROJA EDUARDO, *Razòn y ser de los tipos estructurales*, Madrid, 1960, trad. it. *La concezione strutturale*, Milano, CittàStudi Ed., 1995

VIRGILIO (PUBLIO VIRGILIO MARONE in lat. PUBLIUS VERGILIUS MARO), *Eneide*, Liber I, vv. 360-368, trad. it. di Annibale Caro, XVI secolo

VON GOETHE JOHANN WOLFGANG, *Versuch die Metamorphose der Pflanzen zu erklären (Le Metamorfosi delle Piante)*, Gotha, bey Carl Wilhelm Ettinger, 1790

*Vulgata*, fine del IV secolo d.C., Liber Genesis; *Nova Vulgata*, 1979, Liber Genesis

WITTKOWER RUDOLF, *Principi architettonici nell'età dell'umanesimo*, Trento, Einaudi, 2010

ZAVIZIANO COSTANTINO, *Sugli avvenimenti preistorici*, Napoli, Tipografia Morano, 1872

## CAPITOLO II.

### **Analisi del metodo architettonico storico di suddivisione della cupola lapidea in elementi strutturali**

CALVO LÓPEZ JOSÉ, ALONSO RODRÍGUEZ MIGUEL ÁNGEL, RABASA DÍAZ ENRIQUE, LÓPEZ-MOZO ANA, *Cantería renacentista en la Catedral de Murcia*, Murcia, Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia, 2005

D'AMATO CLAUDIO, *Studiare l'architettura, un vademecum e un dialogo*, Roma, Gangemi Editore, 2014

D'AMATO GUERRIERI CLAUDIO, *Città di Pietra/Cities of Stone. Pietre di Puglia. Costruire in pietra portante/Stones of Apulia. To Build load-bearing Stone*, La Biennale di Venezia e Sensi Contemporanei, Venezia, Marsilio, 2006

DE VANDELVIRA ALONSO, *Libro de Traças de Cortes de Piedras (1575-1591)*, manoscritto *Exposición y declaración sobre el tratado de Cortes de Fábricas que escribió Alonso de Valdelvira por el excelente e insigne architecto, maestro mayor de obras de la Santa Iglesia de Toledo*, conservato presso la Biblioteca Universitaria della Escuela Técnica Superior de Arquitectura (E.T.S.), Universidad Politécnica de Madrid

DEFILIPPIS FRANCESCO, *Architettura e stereotomia. Caratteri dell'architettura in pietra da taglio in area mediterranea*, Roma, Gangemi Editore, 2012

DELORME PHILIBERT, *Premier Tome de l'Architecture*, Parigi, Chez Federic Morel, rue S.Jean de Beauvais, 1567

FALLACARA GIUSEPPE, *Il paradigma stereotomico nell'arte del costruire. Dalla natura sincretica della modellazione digitale alla progettazione /costruzione di elementi architettonici in pietra da taglio*, tutor: Prof. Claudio D'Amato Guerrieri, tesi di Dottorato di Ricerca in Progettazione Architettonica per i Paesi del Mediterraneo, Bari, 2003

FALLACARA GIUSEPPE, *Verso una progettazione stereotomica. Nozioni di stereotomia, stereotomia digitale e trasformazioni topologiche: ragionamenti intorno alla costruzione della forma*, Roma, Aracne editrice, 2007

FRÉZIER AMÉDÉE FRANÇOIS, *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des bâtimens civils & militaires, ou Traité de stereotomie à l'usage de l'architecture*, 2 tomi, Strasburgo-Parigi, 1737-1739; ristampato da Jacques LAGET-L.A.M.E., Nogent-le-Roi, 1980

HEYMAN JACQUES, *The stone skeleton. Structural Engineering of masonry architecture*, Cambridge, Cambridge University Press, 1995

LEONARDIS ENRICA, *Architettura romanica pugliese. Il progetto e la costruzione in pietra portante dell'edificio per il culto*, Roma Gangemi Editore, 2015

LOOS ADOLF, *Parole nel vuoto*, Milano, Adelphi Ed., 2007, pag.80, Ed. originale "Ins Leere gesprochen", Berlino, Verlag Der Sturm, 1921

PALACIOS GONZALO JOSÈ CARLOS, *Trazas y cortes de cantería en el Renacimiento español*, ICBR-Ministerio de Cultura, Madrid, 1990, pag. 135, citato in "Las esferas de piedra. Sevilla como lugar de encuentro entre arte y ciencia en el Renacimiento" di F. P. Puerto, Sevilla, Diputación de Sevilla, Servicio de Publicaciones, Sección Arte, RC Impresores, 2002



PFNOR RODOLPHE, *Monographie du Chateau d'Anet construit par Philibert de l'Orme en MDXLVIII, dessinée, gravée, et accompagnée d'un text historique & descriptif*, Parigi, 1867

PHILIPPE POTIÉ, *Philibert de l'Orme. Figures de la pensée constructive*, Marseille, Editions Parenthèses, 1996

PINTO PUERTO FRANCISCO, *Las esferas de piedra. Sevilla como lugar de encuentro entre arte y ciencia en el Renacimiento*, Sevilla, Diputación de Sevilla, Servicio de Publicaciones, Sección Arte, RC Impresores, 2002

MARZO MAURO, FABIAN LORENZO, *La ricerca che cambia: Atti del primo convegno nazionale dei dottorati italiani dell'architettura, della pianificazione e del design. Università IUAV di Venezia 19-20/11/2014*, Siracusa, LetteraVentidue Edizioni, 2015

MINENNA VINCENZO, *Forma e struttura dei sistemi voltati complessi nell'opera Vandelviresca, prolegomeni alla relazione tra la pratica della stereotomia e l'apparato decorativo del "Libro de Traças de Cortes de Piedras" di Alonso de Vandelvira*, tutors: Prof. Claudio D'Amato Guerrieri, José Carlos Palacios Gonzalo, tesi di Dottorato di Ricerca in Progettazione Architettonica per i Paesi del Mediterraneo, Bari, 2012

MINENNA VINCENZO, *Lo spazio Vandelviresco: forma e costruzione*, in "La ricerca che cambia: Atti del primo convegno nazionale dei dottorati italiani dell'architettura, della pianificazione e del design. Università IUAV di Venezia 19-20/11/2014" di Mauro Marzo e Lorenzo Fabian, Siracusa, LetteraVentidue Edizioni, 2015

MONEO RAFAEL, *L'altra modernità. Considerazioni sul futuro dell'architettura*, Milano, Christian Marinotti Edizioni, 2015

RABASA DÍAZ ENRIQUE, *Forma y construcción en piedra, de la cantería medieval a la estereotomía del siglo XIX*, Madrid, Ediciones Akal, 2000

RABASA DÍAZ ENRIQUE, *Estereotomía: teoría y práctica, justificación y alarde*, in "Informes de la construcción" a cura di E. Díaz, A. López-Mozo, CSIC, Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja, Consejo Superior de investigaciones científicas, Volumen 65, N° EXTRA-2, Madrid, ottobre 2013

RONDELET JEAN-BAPTISTE, *Traité théorique et pratique de l'Art de Bâtir* (Trattato teorico e pratico dell'arte di edificare), Parigi, 1803; Ed. it. a cura di Basilio Soresina, Napoli, Tipografia Del Gallo, 1839

RUIZ DE LA ROSA JOSÉ ANTONIO, *Fuentes para el estudio de la geometría fabrorum. Análisis de documentos*, in *Actas del Cuarto Congreso Nacional de Historia de la Construcción*, Instituto Juan de Herrera, SEHC, COAC, CAATC, Madrid, 2005

SENET-DOMINGUEZ ROSA, DE LLANO MOYA JUAN QUEIPO, RABASA DÍAZ ENRIQUE, LÓPEZ-MOZO ANA, *Informes de la construcción*, CSIC, Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja, Consejo Superior de investigaciones científicas, Volumen 65, N° EXTRA-2, Madrid, ottobre 2013

TOMASONI ELIDE, *Le volte in muratura negli edifici storici: tecniche costruttive e comportamento strutturale*, Tesi di Dottorato di Ricerca in "Ingegneria delle strutture - Modellazione, Conservazione e Controllo dei Materiali e delle Strutture" (XX ciclo), Università degli Studi di Trento, 2008

VIOLLET-LE-DUC EUGÈNE EMMANUEL nel *Dictionnaire raisonné de l'architecture française du XI au XVI siècle*, Édition BANCE-MOREL, 1854 -1868

### **CAPITOLO III.**

#### **Analisi del metodo architettonico di suddivisione della cupola in pietra da taglio in elementi strutturali attraverso i poliedri sferici**

ALBERTI LEON BATTISTA, *L'architettura (De re aedificatoria)*, testo latino e traduzione a cura di Giovanni Orlandi. Introduzione e note di Paolo Portoghesi, 2 Tomi, Milano, Edizioni Il Polifilo, 1966

ALIGHIERI DANTE, *Divina Commedia*. Annotata e commentata da Tommaso di Salvo con illustrazioni, Volume I-II-III, Bologna, Zanichelli, 2001

*Annali civili del Regno delle Due Sicilie*, Volume XIII, fascicolo XXV, Napoli, Tipografia del Real Ministero degli Affari Interni, 1837

ANGELOCATOR DANIEL, *Doctrina de ponderibus, monetis et mensuris per totum terrarum orbem usitatis*, Frankfurt, Johann Nicolaus Stoltzenberger, 1628

AUTOLICO DI PITANE, *Sulla sfera in moto*, 330 a.C. ca.,

BEELI CONRADIN, NISSEN HANS-UDE, *Electron Microscopy and Surface Investigations of Quasicrystals*, in "Quasicrystals: An Introduction to Structure, Physical Properties and Applications" di Jens-Boie Suck, Michael Schreiber, Peter Häussler, Berlin, Springer, 2002

BENEDETTI GIORGIO, Lezione *Strutture solide di simmetria "impossibile": i quasicristalli*, Enciclopedia Treccani, Treccani Scuola, su [http://www.treccani.it/scuola/lezioni/scienze\\_naturali/quasicristalli.htm](http://www.treccani.it/scuola/lezioni/scienze_naturali/quasicristalli.htm)

BERGAMINI MASSIMO, TRIFONE ANNA, *La trigonometria*, Bologna, Zanichelli, 2006 (I Ed. 2001)

BINDI LUCA, EILER JOHN M., GUAN YUNBIN, HOLLISTER LINCOLN S., MACPHERSON GLENN, STEINHARDT PAUL J., YAO NAN, *Evidence for the extraterrestrial origin of a natural quasicrystal*, in "PNAS", Vol. 109 n. 5, dicembre 2012

BINDI LUCA, LIN CHANEY, MA CHI, STEINHARDT PAUL J., *Collisions in outer space produced an icosahedral phase in the Khatyrka meteorite never observed previously in the laboratory*, in "Scientific Reports", n. 6, 8 dicembre 2016, (paper received on September 2016)

BLANC CHARLES, *Grammaire des arts de dessin. Architecture, sculpture, peinture*, Parigi, 1867, citato in "Architettura e stereotomia. Caratteri dell'architettura in pietra da taglio in area mediterranea" di Francesco Defilippis, Roma, Gangemi Editore, 2012 (I Ed. Bari, PolibaPress-Arti Grafiche Favia, 2010)

BOSSE ABRAHAM, *La pratique du trait à preuves, de Mr Desargues Lyonnois, pour la coupe des pierres en l'architecture*, Paris, De l'Imprimerie de Pierre Des-Hayes Rue de la Harpe à la Roze Rouge, 1643

BOSSE ABRAHAM, *Moyen Universel de pratiquer la Perspective sur les Tableaux, ou Surfaces Irregulieres. Ensemble Quelques particularitez concernant cet Art, e celuy de la Graueure en Taille-Douce*, Parigi, 1653

BRAIBANT SYLVIE, GIACOMELLI GIORGIO, SPURIO MAURIZIO, (Dipartimento di Fisica, Università di Bologna), *Particelle e interazioni fondamentali*, Milano, Springer, 2012

BRENTGANI MARINA, GATTI FRANCESCA, *Sul volume dei solidi: Archimede, Keplero e Cavalieri*, seminario tenuto presso l' Università degli Studi di Trento, Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali, Corso di Laurea in Matematica, a.a. 2003/2004

BRUSCHI ARNALDO, MALTESE CORRADO, TAFURI MANFREDO, BONELLI RENATO (a cura di), *Scritti rinascimentali di architettura*, Milano, Edizioni Il Polifilo, 1978

BURNET JOHN, *Platonis Opera*, 5 tomi, Oxford, University Press, 1903

BURNET JOHN, *Plato's Phaedo*, 5 tomi, Oxford, Clarendon Press, 1911

BUSCHERINI STEFANO, PANAINO ANTONIO CLEMENTE DOMENICO, *The table of chords and greek trigonometry*, in "Conservation Science in Cultural Heritage", Bologna, Pitagora Editrice, n. 10/2010

BROCATO MAURIZIO, MONDARDINI LUCIA, *Un sistema voltato di nuova concezione basato sull'apparecchiatura della volta piana di Joseph Abeille*, in "Atti del Primo Congresso Internazionale di Rete Vitruvio, Rete Interuniversitaria Italiana di Architettura" a cura di Claudio D'Amato, 5 voll., Bari, PolibaPress / Arti Grafiche Favia, 2011, vol. 4 "Il progetto di architettura fra didattica e ricerca"

CALIÒ LUIGI MARIA, *Asti. Studi sulla città greca*, Roma, Thiasos Monografie, Edizioni Quasar, 2012, pag. 115

CAMPA MARIA RITA, *E. E. Viollet-le-Duc: innovazione e tradizione in architettura. Linguaggio formale e coincidenza tra forma e struttura nella concezione di volte poliedriche*, Tesi di Dottorato di Ricerca in "Progettazione Architettonica per i Paesi del Mediterraneo" (XX ciclo), Tutor: Prof. Arch. Claudio D'Amato Guerrieri, Facoltà di Architettura, Politecnico di Bari, maggio 2008

CAMPA MARIA RITA, *E. E. Viollet-le-Duc: innovazione e tradizione in architettura. Linguaggio formale e coincidenza tra forma e struttura nella concezione di volte poliedriche*, Roma, Gangemi Editore, 2015

CELLINI FRANCESCO, D'AMATO CLAUDIO, Mario Ridolfi. *Manuale delle tecniche tradizionali del costruire. Il ciclo delle Marmore*, Milano, Electa, 1997

CICERONE MARCO TULLIO, *Tusculanae disputationes*, 45 a.C. ca.

CLINTON JOSEPH D., *Advanced Structural Geometry Studies, Part I: Polyhedral Subdivision Concepts for Structural Applications*, in "NASA Contractor Report", Washington, D.C., National Aeronautics and Space Administration (N.A.S.A.), 1971

COMMANDINO FEDERICO, *De gli Elementi d'Euclide, libri quindici, con gli scholii antichi. Tradotti prima in lingua latina da M. Federico Commandino da Urbino e con Commentarij illustrati trasportati nella nostra vulgare e da lui riveduti. Con privilegio*, in Urbino, Appresso Domenico Frisolino, 1575

D'AMATO CLAUDIO, *Studiare l'architettura, un vademecum e un dialogo*, Roma, Gangemi Editore, 2014

D'AMATO GUERRIERI CLAUDIO (a cura di), *Città di Pietra/Cities of Stone. Pietre di Puglia. Costruire in pietra portante/Stones of Apulia. To Build load-bearing Stone*, La Biennale di Venezia e Sensi Contemporanei, Venezia, Marsilio, 2006

DA VINCI LEONARDO, *Libro di pittura di M. Lionardo da Vinci pittore et scultore fiorentino*, Codice Vaticano Manoscritto Urbinate Lat. 1270 datato al 1540 ca., redatto da Francesco Melzi allievo di Leonardo

DANZER LUDWIG, *Three-dimensional analogs of the planar Penrose tilings and quasicrystals*, in "Discrete Mathematics", n. 76, 1989, pp.1-7 (paper received on October 1988)

DE LA RUE JEAN-BAPTISTE, *Traité de la coupe des pierres*, Parigi, Imprimerie Royale, 1728

DE VANDELVIRA ALONSO, *Libro de Traças de Cortes de Piedras* (1575-1591), manoscritto *Exposición y declaración sobre el tratado de Cortes de Fábricas que escribió Alonso de Valdelvira por el excelente e insigne architecto, maestro mayor de obras de la Santa Iglesia de Toledo*, conservato presso la Biblioteca Universitaria della Escuela Técnica Superior de Arquitectura (E.T.S.), Universidad Politécnica de Madrid

DEFILIPPIS FRANCESCO, *Architettura e stereotomia. Caratteri dell'architettura in pietra da taglio in area mediterranea*, Roma, Gangemi Editore, 2012 (I Ed. Bari, PolibaPress-Arti Grafiche Favia, 2010)

DI CARLO BIAGIO, *Strutture geodetiche*, Pescara, lulu.com editions, 2010

DI CARLO BIAGIO, *Poliedri e sezione aurea*, Pescara, lulu.com editions, 2010

DI CARLO BIAGIO, *Poliedri. Storia, modelli, definizioni*, Raleigh, lulu.com editions, 2013

DÜRER ALBRECHT, *Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebenen unnd gantzen corporen* (Istruzioni per la misurazione con riga e compasso di figure nel piano e nello spazio), Nuremberg, Hieronymus Andreas Formschneider, 1525

DYSKIN ARCADY, ESTRIN YURI, KANEL-BELOV ALEXEI, PASTERNAK ELENA, *A New Concept in Design of Materials: assemblies of interlocked tetrahedron shaped elements*, 2001

ELIANA DE NICHILLO, *Sistemi architettonici archivoltati e cupolati nei secoli XVI-XIX in Spagna. Sequenze, nodi tettonici e tecniche stereotomiche a confronto*, Tesi di Dottorato di Ricerca in "Progettazione Architettonica per i Paesi del Mediterraneo" (XIV ciclo), Tutors: Prof. Arch. Claudio D'Amato Guerrieri, Prof. Enrique Rabasa Diaz, Facoltà di Architettura, Politecnico di Bari, dicembre 2002

ETLIN RICHARD, FALLACARA GIUSEPPE, TAMBORERO LUC, *Plaited Stereotomy. Stone Vaults for the Modern World*, Roma, Aracne Editrice, 2008

EUCLIDE, *Ottica. Immagini di una teoria della visione*, a cura di Francesca Incardona, Roma, Editore Di Renzo, 2011

FALLACARA GIUSEPPE, *Il paradigma stereotomico nell'arte del costruire. Dalla natura sincretica della modellazione digitale alla progettazione/costruzione di elementi architettonici in pietra da taglio*, Tesi di Dottorato di Ricerca in "Progettazione Architettonica per i Paesi del Mediterraneo" (XVI ciclo), Tutors: Prof. Arch. Claudio D'Amato Guerrieri, Facoltà di Architettura, Dipartimento di Scienze dell'Ingegneria civile e dell'Architettura (ICAR), Politecnico di Bari, dicembre 2003

FALLACARA GIUSEPPE, *Verso una progettazione stereotomica. Nozioni di stereotomia, stereotomia digitale e trasformazioni topologiche: ragionamenti intorno alla costruzione della forma*, Roma, Aracne editrice, 2007

FALLACARA GIUSEPPE, *Decowall 2011, Stone-wall Decoration. Thermal Bath Project for the Blind in Városliget Park, Budapest*, Óbuda University e Bulletin, Vol. 3, No.1, 2012

FALLACARA GIUSEPPE, *Stereotomy. Stone Architecture and New Research*, Paris, Presses des Ponts, 2012

FALLACARA GIUSEPPE, MINENNA VINCENZO, *Stereotomic Design*, Maglie (LE), Ed. Gioffreda, 2014

FASSINO MAURO, *La progettazione parametrica come strumento di analisi: dai pattern algoritmici decorative ai pattern performanti. Esempi nei Beni Culturali*, Tesi di Dottorato di Ricerca in "Beni Culturali" (XXIV ciclo), Tutor: Prof. Anna Marotta, Dipartimento DICAS, Politecnico di Torino, giugno 2012

FINÈ ORONCE, *Le Sphere du Monde, proprement dicte Cosmographie*, Paris, 1549, manoscritto MS Typ 57, conservato presso Harvard University - Houghton Library, Cambridge

FLAMMINI EMANUELA, *Sulle tassellazioni di Penrose*, Sintesi della Tesi di Laurea Magistrale in Matematica, Università degli Studi Rome Tre, Facoltà di Scienza M. F. N., relatore: Prof. Andrea Bruno, a.a. 2006-2007, febbraio 2008



FOLICALDI FRANCESCA (a cura di), *Il numero e le sue forme. Storie di poliedri da Platone a Poincaré passando per Luca Pacioli*, Firenze, Nuova Grafica Fiorentina, per conto di Nardini Editore, 2005

FRAMPTON KENNETH, *Tettonica e architettura. Poetica della forma architettonica nel XIX e XX secolo*, Milano, Skira Ed., 2007

FREZIER AMEDEE FRANÇOIS, *La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des bâtimens civils & militaires, ou Traité de stereotomie à l'usage de l'architecture*, 2 tomi, Strasburgo-Parigi, 1737-1739; ristampato da Jacques LAGET-L.A.M.E., Nogent-le-Roi, 1980

GALIANI BERARDO, *L'architettura di Marco Vitruvio Pollione, tradotta e commentata dal marchese Berardo Galiani, accademico ercolanese e architetto di merito dell'Accademia di S. Luca*, Napoli, Fratelli Terres, 1790

GOLDBERG MICHAEL, *A Class of Multi-Symmetric Polyhedra*, Tohoku Mathematical Journal, First Series, vol. 43, 1937

J. LU PETER, STEINHARDT PAUL, *Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture*, in "Science", Vol. 315, Issue 5815, 23 febbraio 2007

JOHANNES KEPLER, *Mysterium Cosmographicum*, Tubinga, 1596, AW 796, Tab. III, between pp. 24-25, Zentralbibliothek Zürich

JOHANNES KEPLER, *Harmonices Mundi*, Francoforte, Lincii Austriae, Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof. Excudebat Ioannes Plancus, 1619

JONATHAN GLANCEY, *Lost Buildings: Demolished, Destroyed, Imagined, Reborn*, London, Goodman Books, 2008

KLEIN CORNELIS, *Mineralogia. Prima edizione italiana condotta sulla ventiduesima edizione americana*, Bologna, Zanichelli editore, 2004

KABAI SÁNDOR, *Inside and Outside the Rhombic Hexecontahedron. A study of Possible Structures with Rhombic Hexecontahedron with the Help of Physical Models and Wolfram Mathematica*, in "Bridges Coimbra. Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture. Conference Proceedings", University of Coimbra, Tessellations Publishing, 2011

KROTO HAROLD W., *Symmetry, space, stars and C<sub>60</sub>*, articolo del 7 dicembre 1996, pubblicato in "Nobel Lecture, Chemistry 1996-2000", Editor Ingmar Grenthe, World Scientific Publishing Co., Singapore, 2003

LAUGIER MARC-ANTOINE, *Essai sur l'Architecture*, 1753 (manoscritto); *Essai sur l'Architecture – Nouvelle édition revue, corrigée et augmentée*, Paris, Duchesne, 1755; Edizione italiana: V. Ugo (a cura di), *Marc-Antoine Laugier, Saggio sull'Architettura*, Palermo, Aesthetica Edizioni, 1987

LEONARDO DA VINCI, *Codex Atlanticus (Codice Atlantico)*, 1478-1518, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano

LEONARDIS ENRICA, *Architettura romanica pugliese. Il progetto e la costruzione in pietra portante dell'edificio per il culto*, Roma Gangemi Editore, 2015

LEONARDO DA VINCI, *Paris Manuscript (Manoscritto di Francia)*, 1492-1516, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Firenze, Giunti Barbèra, 1990, proprietà degli originali: Institut de France, Parigi

LIVIO MARIO, *La sezione aurea. Storia di un numero e di un mistero che dura da tremila anni*, dicembre 2007

*Machines et inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences,*  
Tome Premier Deouis 1666 jusqu'en 1701, Paris, Chez Gabriel  
Martin, Jean-Baptiste Coignard, Fils, Hippolyte-Louis Guerin, Rue S.  
Jacques, 1735

MADISON ALEXEY E., *Substitution rules for icosahedral quasicrystals,*  
Royal Society of Chemistry, RSC Advances, n. 5, 2015, (paper  
received on August 2014)

MARIE JOSEPH FRANÇOIS, *Lezioni elementari di matematiche del sig. AB.*  
*Marie tradotte ed illustrate da Stanislao Canovai e Gaetano Del-Ricco,*  
Firenze, Presso Pietro Allegrini alla Croce Rossa Con Licenza de'  
Superiori, 1803

MONEO RAFAEL, *L'altra modernità. Considerazioni sul futuro  
dell'architettura,* Milano, Christian Marinotti Edizioni, 2015

PACIOLI LUCA, *Divina proportione,* Venezia, Paganino Paganini, 1509,  
opera conservata presso la Biblioteca Ambrosiana di Milano

PALLADIO ANDREA, *I quattro Libri dell'Architettura,* Venezia, appresso  
Dominico de'Franceschi, 1570

PANOFSKY ERWIN, *La prospettiva come "forma simbolica",* Milano,  
Abscondita, 2007

PAOLINI MAURIZIO, *Construction of the four tetrahedra ABCK.*  
*Subdivision of the four tetrahedra. Construction of the four octahedra.*  
*Construction of the fractal version of the octahedral tiles.* Video:  
<http://danzer.dmf.unicatt.it/>, luglio 2013Maurizio Paolini, *La  
matematica nei puzzle infiniti,* lezione tenuta presso l'Università  
Cattolica di Brescia, Firenze, ottobre 2013

PENROSE ROGER, *Pentaplexity,* in "Eureka", n. 39, 1978, pp. 16-32.  
Articolo ristampato sulla rivista "Mathematical Intelligencer", n. 2,  
1979/80

PENROSE ROGER, *The role of aesthetics in pure and applied mathematical  
research,* in "Bulletin of the Institute of Mathematics and its  
Applications", vol. 10, 1974,

PINTO PUERTO FRANCISCO, *Las esferas de piedra. Sevilla como lugar de encuentro entre arte y ciencia en el Renacimiento*, Sevilla, Diputación de Sevilla, Servicio de Publicaciones, Sección Arte, RC Impresores, 2002

PLATONE, *Fedone*, 386 - 385 a.C. (IV sec. a.C.)

PLATONE, *Timeo. Testo greco a fronte*, a cura di Giovanni Reale, Milano, Bompiani Editore, 2000

POE EDGAR ALLAN, *Eureka. A Prose Poem*, New York, Geo. P. Putnam, 1848

POPKO EDWARD S., *Divided Spheres: Geodesics and the Orderly Subdivision of the Sphere*, Boca Raton (USA), A K Peters Book/CRC Press Taylor & Francis Group, 2012

PORTOGHESI PAOLO, *Geoarchitettura. Verso un'architettura della responsabilità*, a cura di Maria Ercadi e Donatella Scatena, Milano, Skira, 2005

ROMANAZZI HILDE GRAZIA TERESITA (a cura di), *Progettare e costruire: la costruzione. Lezioni ed esercitazioni di Progettazione architettonica per gli studenti del I anno*, Bari, PolibaPress/Arti Grafiche Favia, 2009

RONDELET JEAN-BAPTISTE, *Traité théorique et pratique de l'Art de Bâtir* (Trattato teorico e pratico dell'arte di edificare), Parigi, 1803; Ed. it. a cura di Basilio Soresina, Napoli, Tipografia Del Gallo, 1839

RUSSO LUCIO, *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*, Milano, Universale Economica Feltrinelli, 2013, (I Ed. 1996)

RUSSO LUCIO, *La rivoluzione dimenticata. Il pensiero scientifico greco e la scienza moderna*, Milano, Universale Economica Feltrinelli, 2013, (I Ed. 1996)

RUSSO LUCIO, *Stelle, atomi, velieri. Percorsi di storia della scienza*, Milano, Mondadori, 2015

SARACCO ALBERTO, *Caratteristica di Eulero-Poincaré, curvatura di Gauss e tassellazione di superfici architettoniche*, Dipartimento di Matematica e Facoltà di Architettura, Università di Parma, articolo sulla rivista 'Presenza Tecnica in Edilizia', pag.43, maggio 2011

SERLIO SEBASTIANO, *I Sette libri dell'Architettura*, Libro Primo, Venezia, appresso Gio. Battista et Marchio Sessa fratelli, 1559

SONG PENG, FU CHI-WING, GOSWAMI PRASHANT, ZHENG JIANMIN, MITRA NILOY J. E COHEN-OR DANIEL, *Reciprocal Frame Structures Made Easy*, articolo presentato in occasione di "SIGGRAPH, 40th International Conference and Exhibition on Computer Graphics and Interactive Techniques", Anaheim (USA), luglio 2013

STRAPPA GIUSEPPE, *Unità dell'organismo architettonico. Note sulla formazione e trasformazione dei caratteri degli edifici*, Bari, Edizioni Dedalo, 1995

TAKAKURA HIROYUKI, GÓMEZ CESAR PAY, YAMAMOTO AKIJI, DE BOISSIEU MARC, TSAI AN PANG, *Atomic structure of the binary icosahedral Yb-Cd quasicrystal*, in "Nature Materials" n. 6, 2007

TSAI AN PANG, GUO JUNQING , ABE EIJI, TAKAKURA HIROYUKI, SATO TAKU J., *Alloys: A stable binary quasicrystal*, in "Nature", n. 408, pp. 537,538, 30 novembre 2000

TUCCI SAVERIO, *Memoria sul ristoro della Calabria*, Napoli, Gabinetto Bibliografico e Tipografico, 1848

TYLER W. CHRISTOFER, *Leonardo da Vinci's World Map*, City University, London, 2014

UGO VITTORIO (a cura di), Marc-Antoine Laugier, *Saggio sull'Architettura*, Palermo, Aesthetica Edizioni, 1987

VALADIER GIUSEPPE, *L'Architettura Pratica dettata nella scuola e cattedra dell'insigne accademia di S. Luca*, 5 voll., Roma, Incisori d'Architettura Giacomo Rocruè ed Eleuterio Catesi, con permesso de'superiori, 1833

VANDERPOOL EUGENE, *News Letter from Greece*, in "American Journal of Archaeology", Vol. 62, No. 3 (Jul., 1958), Published by Archaeological Institute of America

VILLARD DE HONNECOURT, *Carnet o Livre de portraiture*, Bibliothèque Nationale de France, Parigi, XIII secolo

VIOLLET-LE-DUC EUGÈNE EMMANUEL, *Entretiens sur l'architecture*, Paris, A. Morel & Cie Libraires-Éditeurs, 1872, Bibliothèque Nationale de France

VON KEPLER JOHANNES, *Mysterium Cosmographicum*, Tubinga, 1596

VITRUVIO (MARCUS VITRUVIUS POLLIO), *De Architectura, Libri Decem*, I sec. a. C. (15 a. C. ca)

VON KEPLER JOHANNES, *Harmonices Mundi*, Francoforte, Lincii Austriae, Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof. Excudebat Ioannes Plancus, 1619

WADE DAVID, *Geometria fantastica. I poliedri e l'immaginario artistico nel Rinascimento*, Milano 2015

WENNINGER MAGNUS JOSEPH, *Spherical Models*, Mineola, New York, Dover Publications, Inc., 1999, pag. 1, (I Ed. Cambridge University Press, 1979)

WITTKOWER RUDOLF, *Principi architettonici nell'età dell'umanesimo*, Trento, Einaudi, 2010

#### **CAPITOLO IV.**

#### **Forma strutturale stereotomica della cupola in pietra da taglio a simmetria quinaria**

ALBERTI LEON BATTISTA, *L'architettura (De re aedificatoria)*, testo latino e traduzione a cura di Giovanni Orlandi. Introduzione e note di Paolo Portoghesi, 2 Tomi, Milano, Edizioni Il Polifilo, 1966

BELLINGERI PAOLO, *False congetture e premi Nobel: dall'informatica ai quasicristalli*, articolo su rivista XlaTangente, numero 30, pp. 30-33, dicembre 2011

CAMPA MARIA RITA, *E.E. Viollet-le-Duc : innovazione e tradizione in architettura. Linguaggio formale e coincidenza di struttura e forma nella concezione di volte poliedriche*, tesi di Dottorato di Ricerca in Progettazione Architettonica per i Paesi del Mediterraneo, XX ciclo (A.A.A.A.2005-2008) , tutor : Prof. Claudio D'Amato, Politecnico di Bari, Dipartimento di Scienze dell'Ingegneria Civile e dell'Architettura, Bari 2008

CARLEVARIS LAURA, DE CARLO LAURA, MIGLIARI RICCARDO, *Attualità della geometria descrittiva, Strumenti del Dottorato di Ricerca in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo, Università di Roma "Sapienza"*, Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell'Architettura, Roma 2010

CATTARI SERENA, RESEMINI SONIA, LAGOMARSINO SERGIO, *Modelling of vaults as equivalent diaphragms in 3D seismic analysis of masonry buildings*, 2008, in "Structural Analysis of Historic Construction. Preserving Safety and Significance" di Dina D'Ayala & Enrico Fodde, Department of Architecture & Civil Engineering, University of Bath (UK), London, CRC Press Taylor & Francis Group, 2008, Volume I

CHAFFIN BEN, *Aperiodic Tiling in Three Dimensions* , consultabile su <http://cs.williams.edu/~98bcc/tiling/index.html>

CHARALAMPOUS CHARIS, *Responsive spatial growth of the Danzer packing*, dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Adaptive Architecture & Computation from the University of London, Bartlett School of Graduate Studies University College London, September 2007

D'AMATO GUERRIERI CLAUDIO (a cura di), *Città di Pietra/Cities of Stone. Pietre di Puglia. Costruire in pietra portante/Stones of Apulia. To Build load-bearing Stone*, La Biennale di Venezia e Sensi Contemporanei, Venezia, Marsilio, 2006

DANZER LUDWIG, *Three-dimensional analogs of the planar Penrose tilings and quasicrystals*, in "Discrete Mathematics", n. 76, 1989, pp.1-7 (paper received on October 1988)



DOLBILIN NIKOLAI, SCHULTE EGON, *Special issue in honor of Ludwig Danzer's 80th birthday*, articolo pubblicato su ScienceDirect, European Journal of Combinatorics, 29, available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com), marzo 2008

ETLIN RICHARD, FALLACARA GIUSEPPE, TAMBORERO LUC, *Plaited Stereotomy. Stone vaults for the Modern World*, 2008

FLAMMINI EMANUELA, *Sulle tassellazioni di Penrose*, sintesi della tesi di Laurea Magistrale in Matematica, relatore : Prof. Andrea Bruno, A.A. 2006-2007, Università degli Studi Roma Tre, Facoltà di Scienze M.F.N., Roma, febbraio 2008

FRETTLÖH DIRK, *Icosahedral tilings in  $R^3$ : the ABCK tilings*, su <http://www.math.uni-bielefeld.de/baake/frettlloe/papers/ikosa.pdf>

FRETTLÖH DIRK, *Substitution tilings with statistical circular symmetry*, in "European Journal of Combinatorics" Vol. 29, Issue 8, Londra, Academic Press Ltd., novembre 2008, pp. 1881 - 1893

GALILEI GALILEO, *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove Scienze Attenenti alla Meccanica & i Movimenti Locali*, Leida, Appresso gli Elsevirii, 1638, in "Le opere di Galileo Galilei" a cura di Antonio Favaro, 20 voll., Firenze, Tipografia di G. Barbera, 1898

GARDNER MARTIN, *The Colossal Book of Mathematics*, cap. II. Plane Geometry, par. 7. Penrose Tiles, pag. 73, Londra 2001

HEYMAN J., *The stone skeleton: structural engineering of masonry architecture*, Cambridge, Cambridge University Press, 1995

HOURIHANE COLUM, *The Grove Encyclopedia of Medieval Art and Architecture*, Oxford University Press, OUP USA, Tion. Ed., 2012

HUERTA FERNÁNDEZ SANTIAGO, AROCA HERNÁNDEZ-ROS RICARDO, *Masonry domes: a study on proportion and similarity*, in "Proceedings of IASS 30th Anniversary World Congress, Madrid, 11-15 September 1989", Madrid, E.T.S. Arquitectura (UPM), 1989

MIGLIARI RICCARDO, *La Geometria descrittiva nel quadro storico della sua evoluzione dalle origini alla rappresentazione digitale*, in “Attualità della geometria descrittiva” a cura di Laura Carlevaris, Laura De Carlo, Riccardo Migliari, Atti del Seminario nazionale sul rinnovamento della geometria descrittiva svoltosi presso l’Università di Roma La Sapienza, Dipartimento di Storia, Disegno e Restauro dell’Architettura, Dottorato in Scienze della Rappresentazione e del Rilievo, dicembre 2009-marzo 2010, Roma, Gangemi Editore, 2012

PORTOGHESI PAOLO, *Geoarchitettura. Verso un’architettura della responsabilità*, a cura di Maria Ercadi e Donatella Scatena, Ginevra-Milano, Skira, 2005

RABASA DÍAZ ENRIQUE, *Forma y construcción en piedra. De la cantería medieval a la estereotomía del siglo XIX*, Madrid, Ediciones Akal, 2000

ROMANO A., GRANDE E., *Masonry barrel vaults: influence of the pattern*, articolo pubblicato in occasione della “14th World Conference on Earthquake Engineering”, Beijing (Cina), October 12-17, 2008

VON KEPLER JOHANNES, *Harmonices Mundi*, Francoforte, Lincii Austriae, Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof. Excudebat Ioannes Plancus, 1619, Liber II, De Congruentia Figurarum Harmonicarum, conservato presso Smithsonian Libraries, Washington DC

ZAVIZIANO COSTANTINO, *Sugli avvenimenti preistorici*, Napoli, Tipografia Morano, 1872





CONSORZIO ARGONAUTI (Politecnico di Bari / Università Roma Tre) - **DOTTORATO XXIX CICLO**  
**Architettura: Innovazione e Patrimonio**  
*gennaio 2014 - dicembre 2016*

Dottoranda: Arch. Roberta Gadaleta

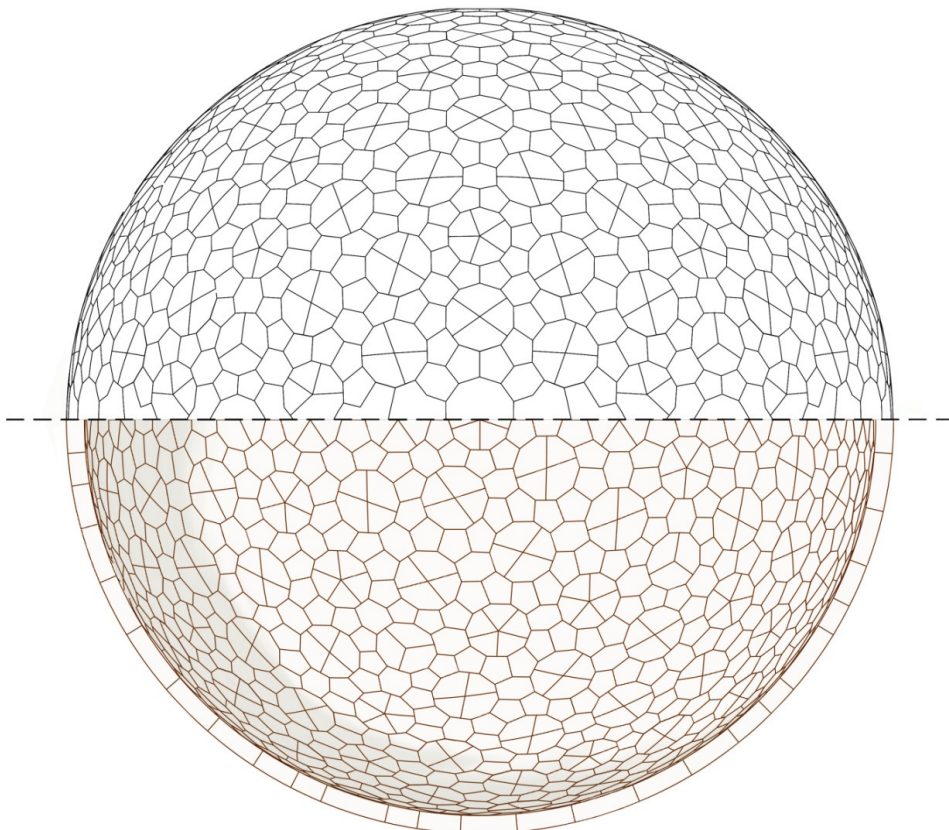
**STEREOTOMIA DELLA CUPOLA NELL'ARCHITETTURA DI PIETRA.**  
**STUDIO DELLA TRADIZIONE E RICERCA**  
**DI NUOVE MORFOLOGIE DI APPARECCHIATURA.**

*Stereotomy of dome in stone architecture.*  
*Study of tradition and research of new morphologies of bond.*

VOLUME II - FOTO ED ELABORAZIONI GRAFICHE ORIGINALI

Tutor: Prof. Arch. Giuseppe Fallacara

Co-Tutor: Prof. Arch. Claudio D'Amato Guerrieri



**Arch. Roberta Gadaleta**  
VOLUME II - Foto ed  
Elaborazioni grafiche originali

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.  
Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**INDICE VOLUME II – INDEX VOLUME II**

---

FOTO ED ELABORAZIONI GRAFICHE ORIGINALI – *PHOTOS AND ORIGINAL DRAWINGS*

**CAPITOLO II.**

**Analisi del metodo architettonico storico di suddivisione della cupola lapidea in elementi strutturali**

---

**FIG 16.** R. Gadaleta, *Geometria sottesa alla costruzione tradizionale delle cupole lapidee*, disegno a mano libera

**FIG. 21.** Cupola sull'altare maggiore del Duomo di San Corrado, seconda metà XII sec.-XIII sec., Molfetta (Bari), fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 24.** R. Gadaleta, *Divisione sferica attraverso proiezione cilindrica (a.) e conica (b.)*, ridisegno infografico

**FIG. 26.** R. Gadaleta, *Hiladas redondas, Hiladas cuadratas*, ridisegno eseguito a mano

**FIG. 27.** R. Gadaleta, *Geometria della volta a vela*, disegno infografico

**CAPITOLO III.**

**Analisi del metodo architettonico di suddivisione della cupola in pietra da taglio in elementi strutturali, attraverso i poliedri sferici**

---

**FIG. 48.** R. Gadaleta, *Dal dodecaedro al dodecaedro sferico*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 51.** R. Gadaleta, *Divisione della sfera secondo il gruppo di simmetria dato dall' icosaedro e dal dodecaedro sferico*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 75.** R. Gadaleta, *Derivazione geometrica della suddivisione massima sferica in parti uguali (triangolo minimo e suo simmetrico)*, disegno infografico

**FIG. 77.** R. Gadaleta, *Corrispondenza topologica tra il triacontaedro e la divisione sferica secondo gruppo di simmetria icosaedro/dodecaedro*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 78.** R. Gadaleta, *Vertici del triacontaedro evidenziati con colori diversi, poiché giacenti su due sfere differenti*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 79.** R. Gadaleta, *Triacontaedro geodetico*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 81.** R. Gadaleta, *Poliedro di Goldberg  $G(7,0)$* , che dimostra come in poliedri con facce irregolari vi sono sempre pentagoni regolari (in rosso scuro), rielaborazione infografica

**FIG. 84.** R. Gadaleta, *Suddivisione della faccia triangolare dell'icosaedro con Class I/Alternate e Class II/Triacon*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 91.** R. Gadaleta, *Poliedro di Goldberg,  $G(4,4)$* , rielaborazione infografica

**FIG. 105.** R. Gadaleta, *Rettangolo aureo e spirale logaritmica*, rielaborazione infografica

**FIG. 106.** R. Gadaleta, *Spirale logaritmica e triangolo aureo*, rielaborazione

**FIG. 107.** R. Gadaleta, *Proporzione aurea nel pentagono*, disegni eseguiti a mano

**FIG. 108.** R. Gadaleta, *Derivazione geometrica delle tassellazioni quinarie e loro corrispondenze*, A. J. von Kepler, B. Penrose P, C. Penrose P2, rielaborazione attraverso sovrapposizione infografica

**FIG. 109.** R. Gadaleta, *Tassellazione di Penrose e pentagono aureo*, disegni eseguiti a mano e disegni infografici eseguiti con AutoCAD® 2012, colorati con Adobe Photoshop® CS5 Extended

**FIG. 110.** R. Gadaleta, *Tassellazione di Penrose P2*, disegni eseguiti e colorati a mano

**FIG. 113.** R. Gadaleta, *Quasicristallo e Triacontaedro*, rielaborazione grafica

**FIG. 114.** R. Gadaleta, Rielaborazione infografica dell'immagine di Conradin Beeli



**FIG. 115.** R. Gadaleta, Elaborazione dell'immagine raffigurante il modello atomico del quasicristallo

**FIG. 117.** R. Gadaleta, *Relazione tra la tassellazione di von Kepler e la disposizione atomica dei quasicristalli (in rosso)*, disegno

**FIG. 120B.** R. Gadaleta, *La tettonica dell'intreccio*, disegno infografico

**FIG. 121.** R. Gadaleta, *Dimensionamento della cupola secondo geometria*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 122.** R. Gadaleta, *Disegni infografici tridimensionali di suddivisione sferica (caso A, caso B, caso C)*, disegni infografici tridimensionali

**FIG. 123.** R. Gadaleta, *Disegni infografici tridimensionali di suddivisione sferica (caso D, caso E, caso F)*, disegni infografici tridimensionali

**FIG. 124.** R. Gadaleta, *Tabella comparativa di suddivisione della superficie sferica*, disegni infografici tridimensionali

**FIG. 125.** R. Gadaleta, *Tabella comparativa del metodo di apparecchiatura delle cupole lapidee costruite*

#### **CAPITOLO IV.**

#### **Forma strutturale stereotomica della cupola in pietra da taglio a simmetria quinary**

---

**FIG. 126.** R. Gadaleta, *Tabella comparativa dei quattro tetraedri individuati da Ludwig Danzer*, disegno infografico

**FIG. 127.** R. Gadaleta, *Alcuni dei modelli realizzati in carta dei tetraedri e delle loro copie speculari*, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 128.** R. Gadaleta, *Aggregazione del tetraedro C con il suo simmetrico a formare simmetria quinary*, disegno infografico

**FIG. 134.** R. Gadaleta, *Tassellazioni a simmetria quinary, relazione tra Penrose, Danzer ed i quasicristalli*, disegni infografici ed eseguiti a mano e disegno infografico tridimensionale

- FIG. 135.** R. Gadaleta, *Regole aggregative dei tetraedri*, ridisegno eseguito a mano
- FIG. 136.** R. Gadaleta, *Divisione frattale del TK*, disegni infografici tridimensionali
- FIG. 137.** R. Gadaleta, *Suddivisione del triangolo minimo con la tassellazione di L. Danzer*, disegni infografici
- FIG. 138.** R. Gadaleta, *Diversi rombi aurei*, disegno infografico
- FIG. 139.** R. Gadaleta, *Composizione del triangolo minimo con i rombi divisi secondo geometria di L. Danzer*, disegni infografici
- FIG. 140 (1).** R. Gadaleta, *Disegno planare della tassellazione derivata dalla geometria di Danzer*, disegno infografico
- FIG. 140 (2).** R. Gadaleta, *Disegno planare della tassellazione derivata dalla geometria di Danzer*, disegno infografico
- FIG. 141.** R. Gadaleta, *Configurazione ipotizzata dei concetti aventi simile morfologia*, disegno a mano libera
- FIG. 142.** R. Gadaleta, *Dal triangolo minimo del poliedro al corrispondente sferico*, disegno a mano e disegno infografico
- FIG. 143.** R. Gadaleta, *Aggregazione delle piramidi costituite dai tetraedri K, contenenti la corrispondente deformazione topologica sferica*, disegno infografico tridimensionale
- FIG. 144 (1).** R. Gadaleta, *Proiezioni di suddivisioni di facce poliedriche differenti sulla sfera, originano diversi risultati*, disegno infografico tridimensionale
- FIG. 144 (2).** R. Gadaleta, *Proiezioni di suddivisioni di facce poliedriche differenti sulla sfera, originano diversi risultati*, disegno infografico tridimensionale
- FIG. 145.** R. Gadaleta, *Suddivisione della sfera in elementi derivati dalla tassellazione di L. Danzer. Calotta pentagonale*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012
- FIG. 146.** R. Gadaleta, *Suddivisione della sfera in elementi derivati dalla tassellazione di L. Danzer. Calotta emisferica*, disegno infografico tridimensionale
- FIG. 147.** R. Gadaleta, *Studio della tassellazione di Kepler al fine di dedurre gli elementi costruttivi*, disegni infografici bidimensionali e tridimensionali

**FIG. 148.** R. Gadaleta, *Modello di studio dell'apparecchiatura emisferica*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 149.** R. Gadaleta, *Divisione del triangolo minimo con diversa tassellazione derivata dalla Aa di Kepler*, disegno infografico bidimensionale e tridimensionale

**FIG. 150.** R. Gadaleta, *Derivazione geometrica dell'apparecchiatura nella cupola emisferica*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 151.** R. Gadaleta, *Modello di studio dell'apparecchiatura nella cupola emisferica*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 152.** R. Gadaleta, *Distribuzione statica delle forze all'interno dell'apparecchiatura per "archi di scarico", che offre la possibilità di effettuare opportune bucatore*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 153.** R. Gadaleta, *Studio delle bucatore nella cupola emisferica*, disegni infografici tridimensionali

**FIG. 154.** R. Gadaleta, *Divisione del triangolo minimo con seconda diversa tassellazione derivata dalla Aa di Kepler*, disegno infografico bidimensionale e tridimensionale

**FIG. 155.** R. Gadaleta, *Numerazione dei conci-tipo invarianti*, disegno infografico

**FIG. 156.** R. Gadaleta, *Modello di studio della seconda apparecchiatura nella cupola emisferica*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 157.** R. Gadaleta, *Divisione A del triangolo minimo nella cupola di minor diametro*, disegno infografico

**FIG. 158.** R. Gadaleta, *Divisione B del triangolo minimo nella cupola di minor diametro*, disegno infografico

**FIG. 159.** R. Gadaleta, *Modello di studio della cupola di minor diametro*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 160.** R. Gadaleta, *Modello della cupola per la realizzazione della maquette*, disegno infografico

**FIG. 161.** R. Gadaleta, *Modello della cupola con bucatore per la realizzazione della maquette*, disegno infografico

**FIG. 162.** R. Gadaleta, *Schema a colori per il montaggio della maquette, vista dall'alto*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 163.** R. Gadaleta, *Schema a colori per il montaggio della maquette, vista laterale*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 164.** R. Gadaleta, *Montaggio della maquette individuando la ripetizione dei conci tipo-invarianti*, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 165.** R. Gadaleta, *Schema geometrico e di montaggio*, i conci uguali sono contrassegnati da colori uguali, disegno infografico tridimensionale

**FIG. 166.** R. Gadaleta, *Sezione della cupola*, disegno eseguito a mano libera

**FIG. 167.** Stampa dei conci con la macchina Ultimaker<sup>2</sup> presso il laboratorio "ApuliaMakers3D", Bari, fotografie di R. Gadaleta

**FIG. 168.** I 34 conci-tipo invarianti numerati, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 169.** Singolo concio numerato con penna, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 170.** Conci numerati con penna e suddivisi in base a numerazione uguale che ne individua uguale tipo, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 171.** Fase 1 di montaggio della maquette, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 172.** Fase 2 di montaggio della maquette, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 173.** Fase 3 di montaggio della maquette, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 174.** Apposizione di una goccia di colla vinilica tra alcuni giunti, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 175.** Fase di montaggio della maquette, particolare, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 176.** Fase 4 di montaggio della maquette, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 177.** Fase 5 di montaggio della maquette, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 178.** Fase 6, montaggio completo della maquette, vista laterale, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 179.** Fase 6, montaggio completo della maquette, vista dall'alto, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 180.** Montaggio completo della maquette, vista dal basso dell'intradosso della cupola, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 181.** Vista dell'intradosso della cupola, particolare, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 182.** Montaggio completo, vista dell'intradosso fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 183.** Montaggio completo, vista dell'estradosso, particolare, fotografia di R. Gadaleta

**FIG. 184.** R. Gadaleta, *Numero di ripetizioni di ciascun concio-tipo all'interno della cupola priva di bucaure*

**FIG. 185.** Daniele Malomo, *Curva delle pressioni*, disegno infografico

**FIG. 186.** D. Malomo, *Mesch della cupola*, disegno infografico

**FIG. 187.** D. Malomo, *Condizioni al contorno*, disegno infografico

**FIG. 188.** D. Malomo, *Campo di spostamenti*, disegno infografico

**FIG. 189.** D. Malomo, *1°, 2° e 3° sforzo principale (prime tre figure da sinistra), tensioni di von Mises (ultima figura in basso a destra)*, disegno infografico

**FIG. 190.** D. Malomo, Caso B, analisi con il criterio di von Mises, disegno infografico

**FIG. 191.** D. Malomo, Caso C, analisi con il criterio di von Mises, disegno infografico

**FIG. 192.** Produzione e numerazione dei conci lapidei, SNBR, Sainte-Savine, Francia, fotografia

**FIG. 193.** Produzione e numerazione dei conci lapidei, SNBR, Sainte-Savine, Francia, fotografia

**FIG. 194.** Montaggio del prototipo, SNBR, Sainte-Savine, Francia, fotografia

**FIG. 195.** Montaggio del prototipo, SNBR, Sainte-Savine, Francia, fotografia

**FIG. 196.** Prototipo ultimato, vista laterale, SNBR, Sainte-Savine, Francia, fotografia

**FIG. 197.** Prototipo ultimato, vista dell'intradosso, SNBR, Sainte-Savine, Francia, fotografia

**Arch. Roberta Gadaleta**  
VOLUME II - Foto ed  
Elaborazioni grafiche originali

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.  
Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---

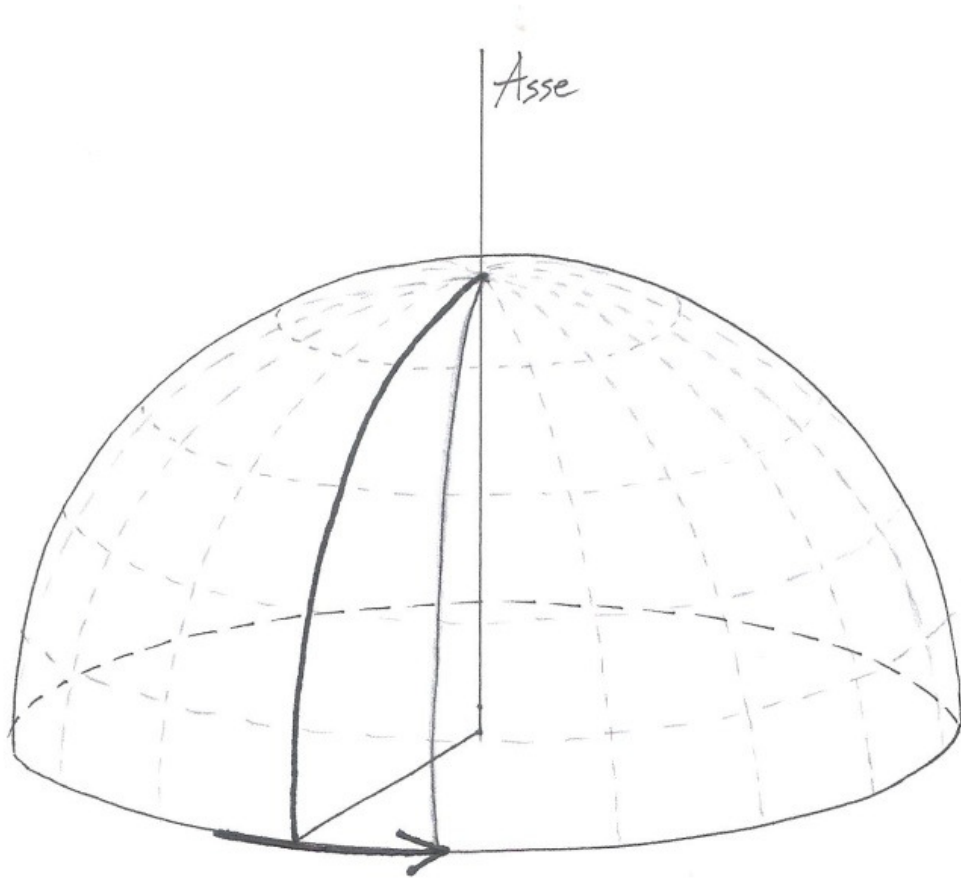


**CAPITOLO II.**

**Analisi del metodo architettonico storico di suddivisione della  
cupola lapidea in elementi strutturali**

---

**FIG 16.** R. Gadaleta, *Geometria sottesa alla costruzione tradizionale  
delle cupole lapidee*, disegno eseguito a mano libera



**FIG. 21.** Cupola sull'altare maggiore del Duomo di San Corrado, seconda metà XII sec.-XIII sec., Molfetta (Bari), fotografia dell'autrice R. Gadaleta, aprile 2016

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

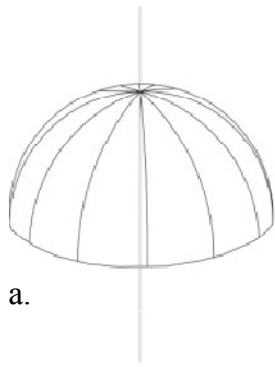
*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---

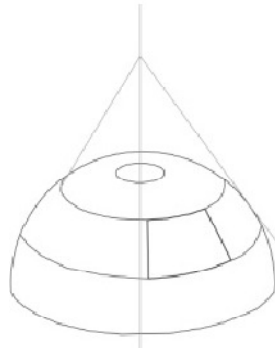
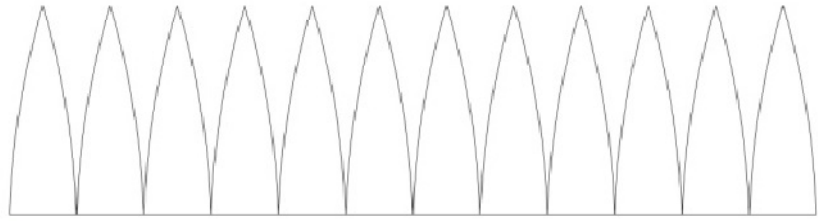


**FIG. 24.** R. Gadaleta, *Divisione sferica attraverso proiezione cilindrica (a.) e conica (b.)*, ridisegno infografico eseguito con AutoCAD® 2012

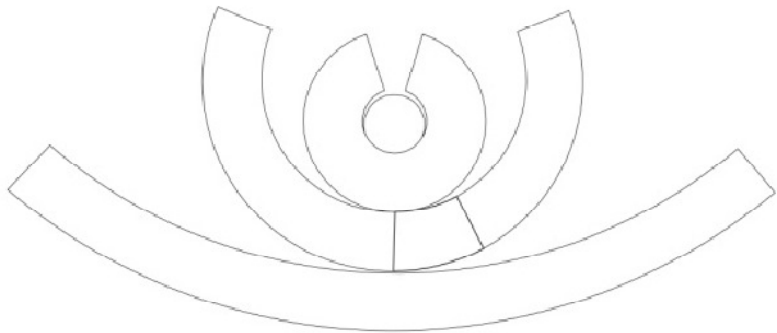
Fonte: Ridisegno delle illustrazioni presenti in “Canteria renacentista en la catedral de Murcia” di J. C. López, M. A. A. Rodríguez, E. R. Díaz, A. López-Mozo, Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia, 2005, pag. 59



a.



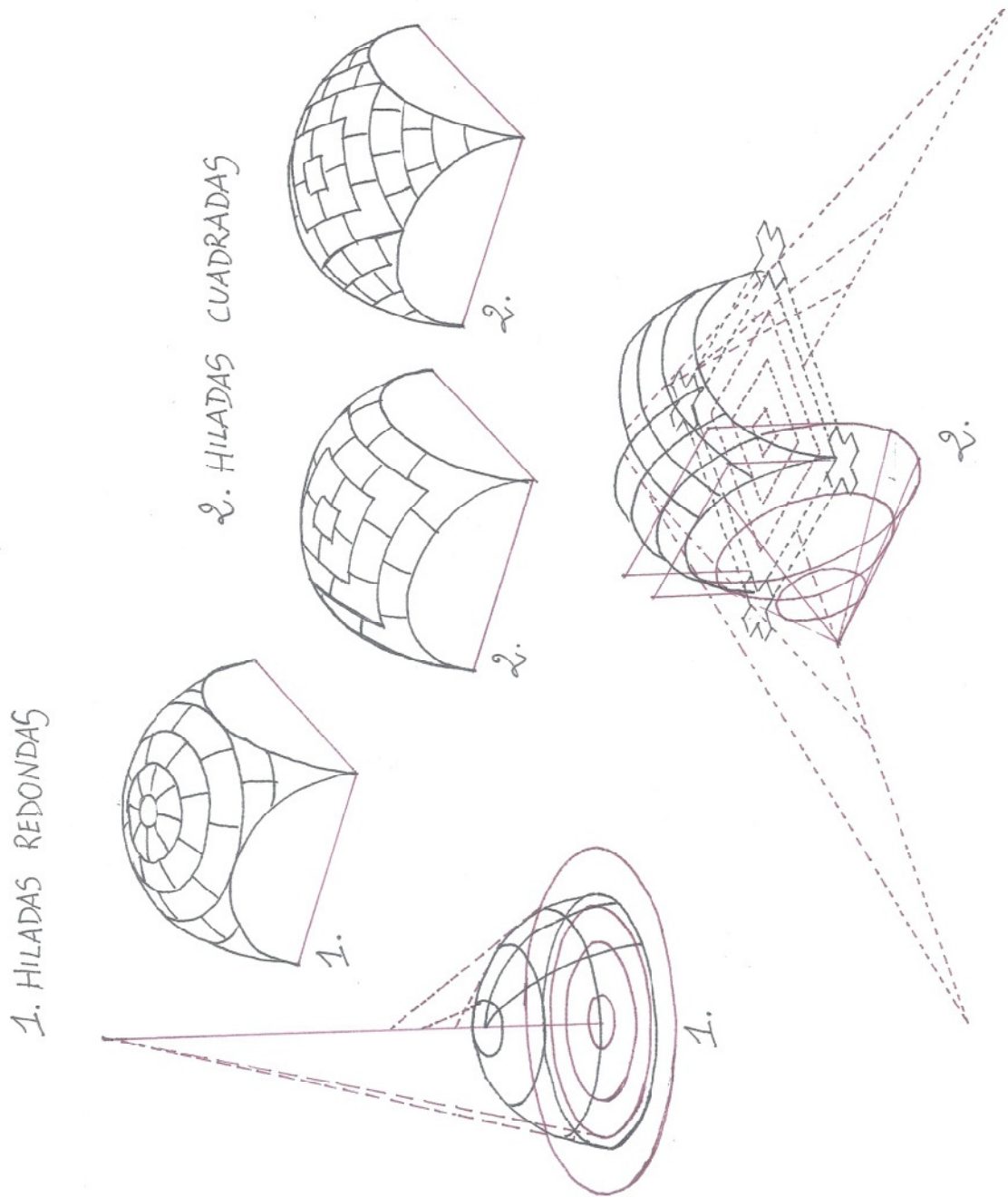
b.



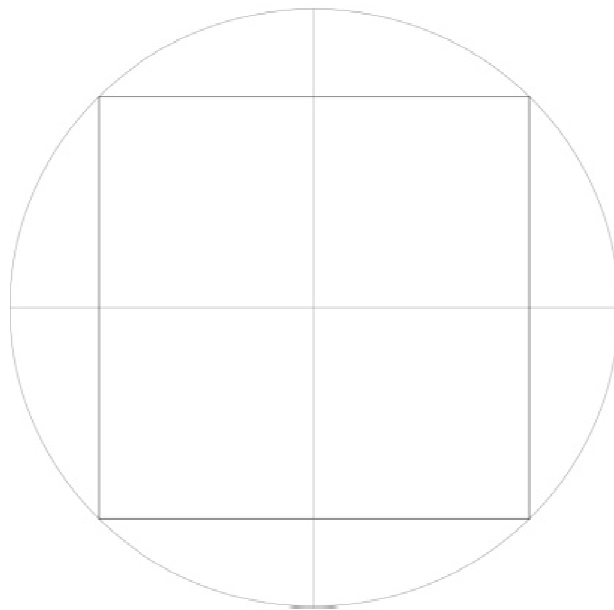
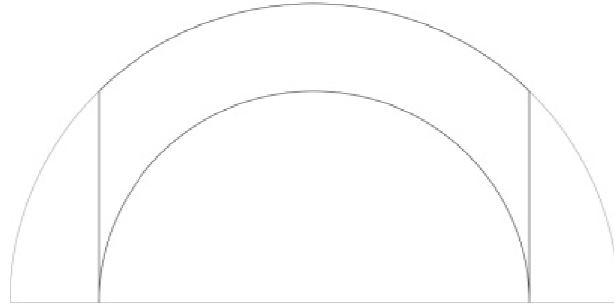
**FIG. 26.** R. Gadaleta, *Hiladas redondas, Hiladas cuadratas*, ridisegno eseguito a mano

Fonte: ridisegno delle illustrazioni presenti in: “Canteria renacentista en la catedral de Murcia” di J. C. López, M. A. A.Rodríguez, E. R. Díaz, A. López-Mozo, Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia, 2005, pag. 58; Ridisegno delle illustrazioni presenti in: “Lo spazio Vandelviresco: forma e costruzione”, di V. Minenna, in “La ricerca che cambia: Atti del primo convegno nazionale dei dottorati italiani dell'architettura, della pianificazione e del design. Università IUAV di Venezia 19-20/11/2014” di Mauro Marzo e Lorenzo Fabian, Siracusa, LetteraVentidue Edizioni, 2015, pag.149





**FIG. 27.** R. Gadaleta, *Geometria della volta a vela*, disegno infografico  
eseguito con AutoCAD® 2012

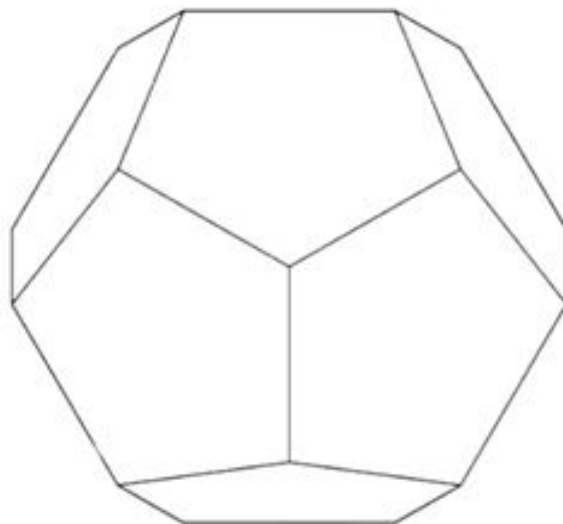


**CAPITOLO III.**

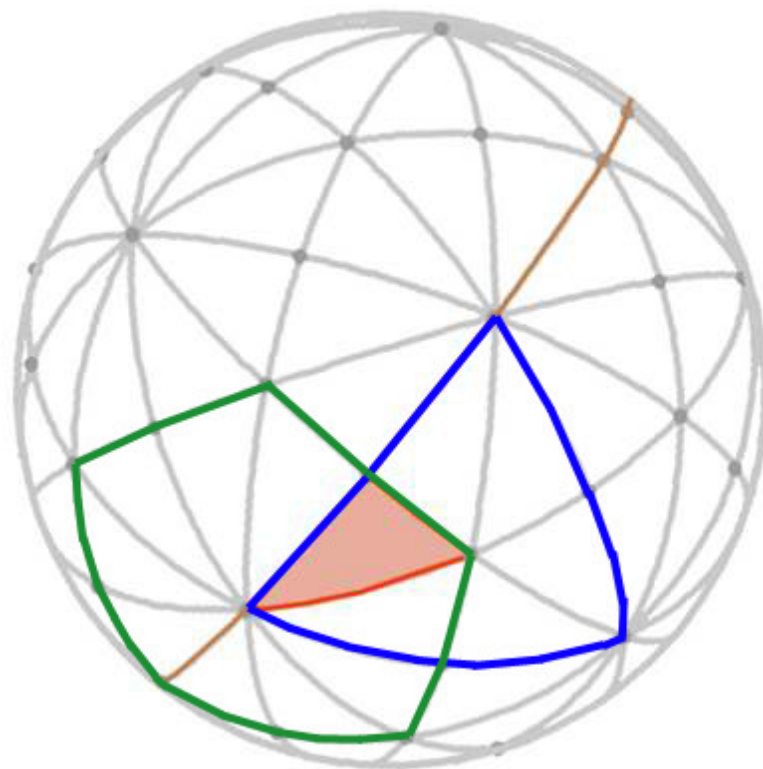
**Analisi del metodo architettonico di suddivisione della cupola in  
pietra da taglio in elementi strutturali, attraverso i poliedri sferici**

---

**FIG. 48.** R. Gadaleta, *Dal dodecaedro al dodecaedro sferico*, disegno  
infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012

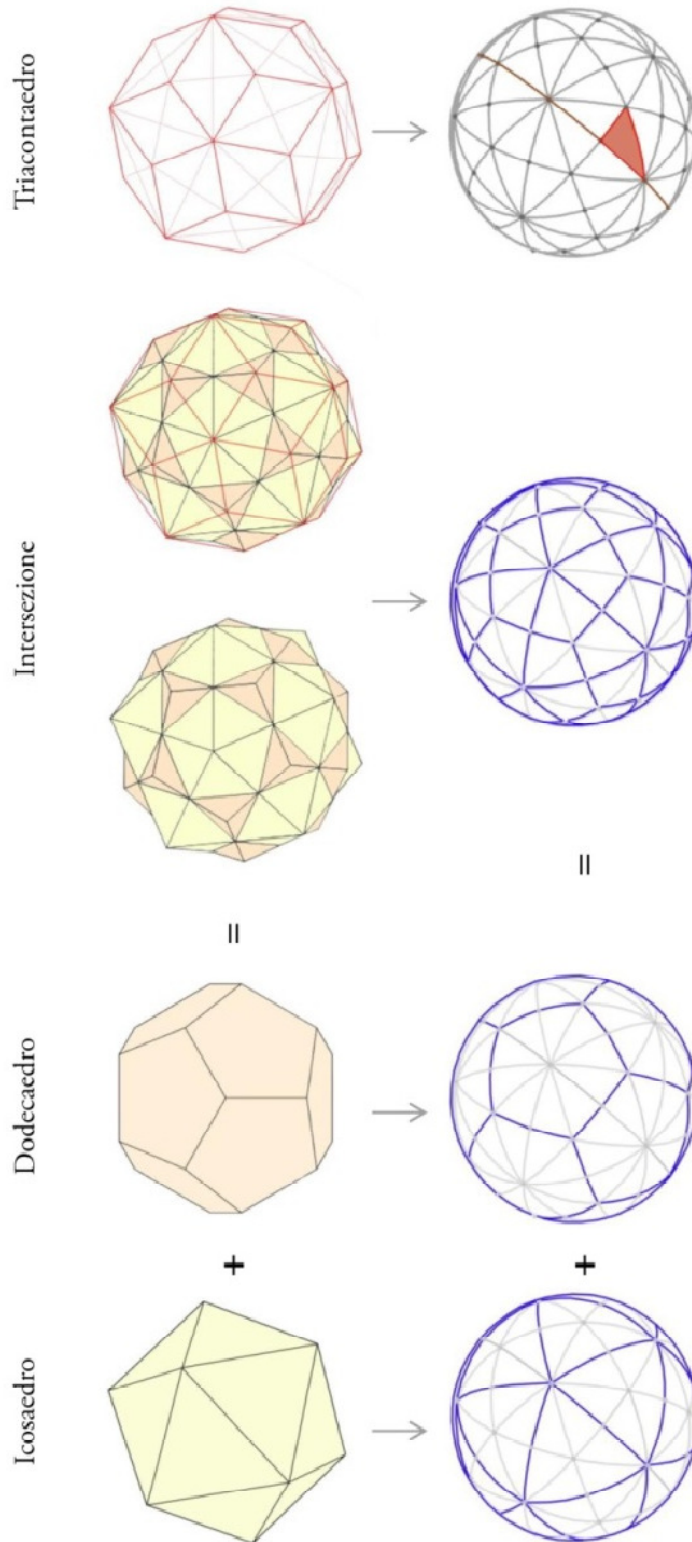


**FIG. 51.** R. Gadaleta, *Divisione della sfera secondo il gruppo di simmetria dato dall' icosaedro e dal dodecaedro sferico*, modello tridimensionale infografico eseguito con AutoCAD® 2012, colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended

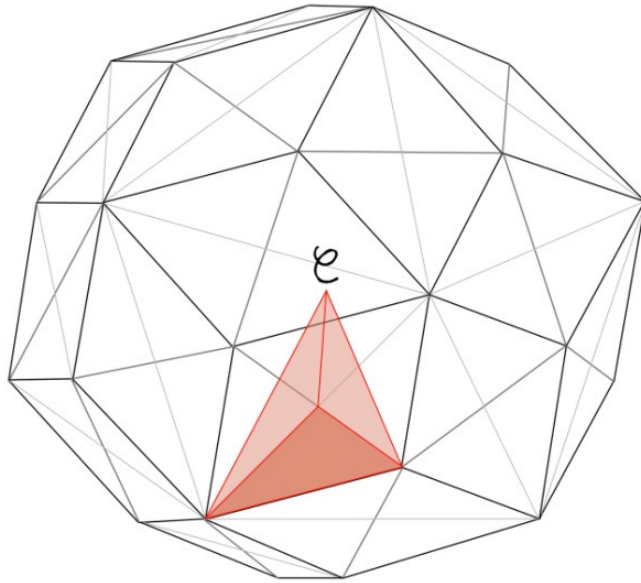




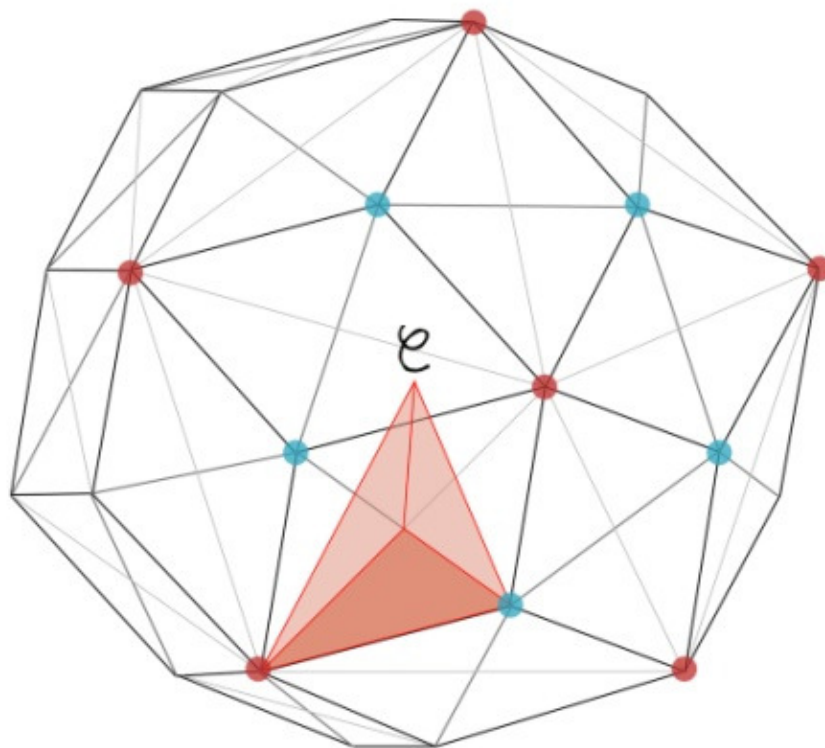
**FIG. 75.** R. Gadaleta, *Derivazione geometrica della suddivisione massima sferica in parti uguali (triangolo minimo e suo simmetrico)*, disegno infografico eseguito con AutoCAD® 2012 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended



**FIG. 77.** R. Gadaleta, *Corrispondenza topologica tra il triacontaedro e la divisione sferica secondo gruppo di simmetria icosaedro/dodecaedro*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012, colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended



**FIG. 78.** R. Gadaleta, *Vertici del triacontaedro evidenziati con colori diversi, poiché giacenti su due sfere differenti*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012, colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended

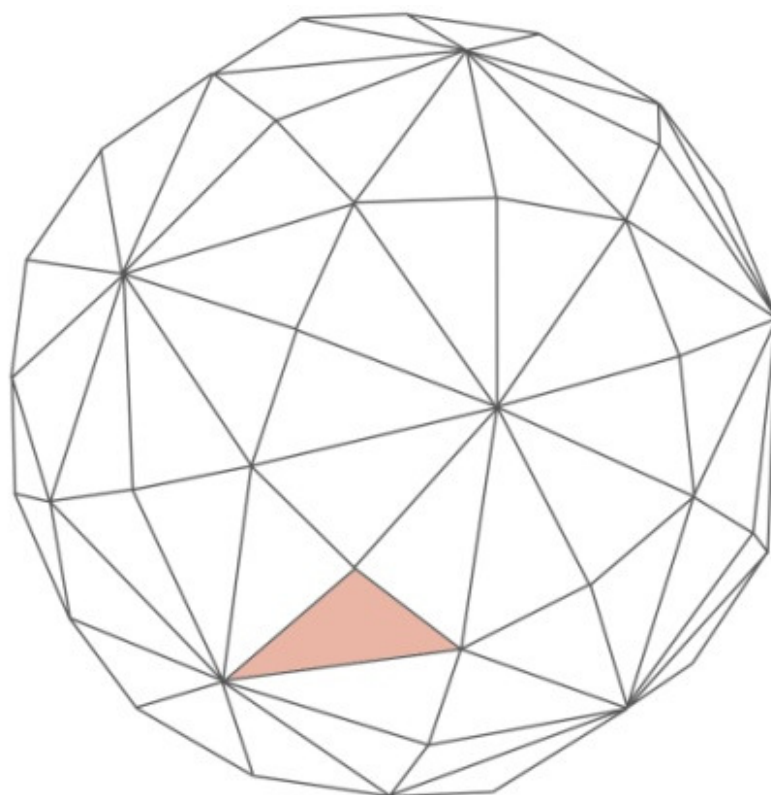


**Vertici sfera 1**

**Vertici sfera 2**

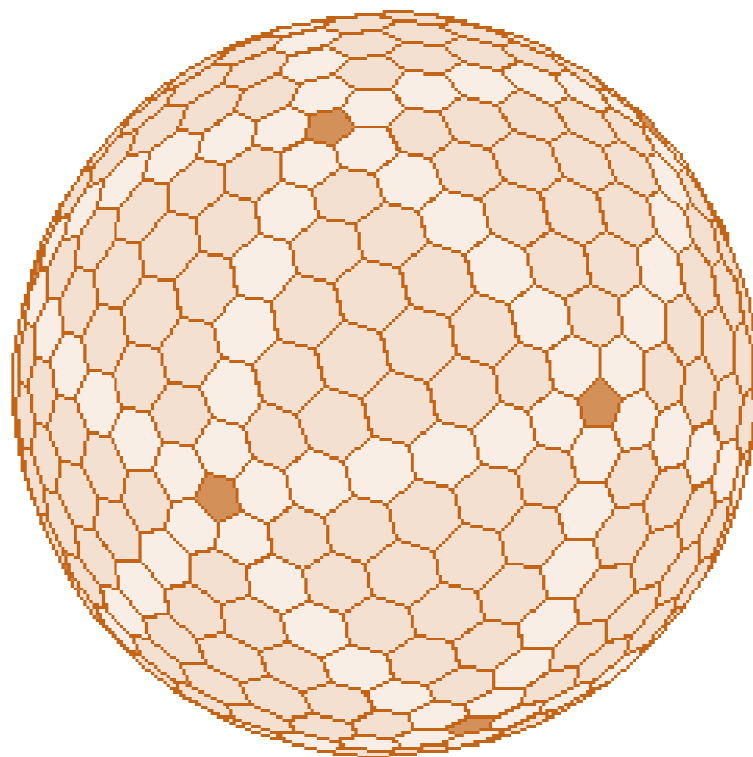
**FIG. 79.** R. Gadaleta, *Triacontaedro geodetico*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012, colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended



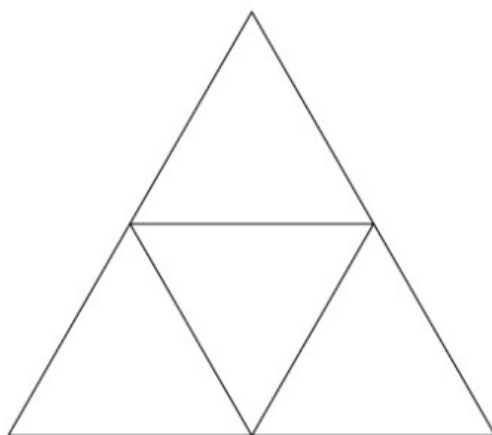


**Tutti i vertici giacciono  
sulla stessa sfera**

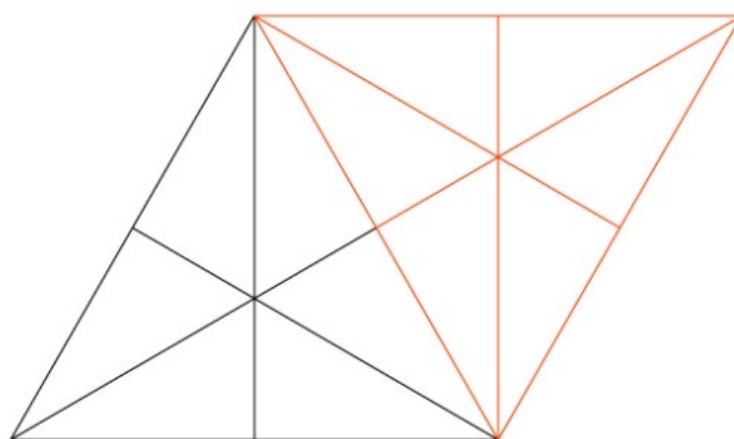
**FIG. 81.** R. Gadaleta, *Poliedro di Goldberg G(7,0)*, che dimostra come in poliedri con facce irregolari vi sono sempre pentagoni regolari (in rosso scuro), rielaborazione infografica con Adobe Photoshop® CS5 Extended del disegno di Tomruen per “English Wikipedia”



**FIG. 84.** R. Gadaleta, *Suddivisione della faccia triangolare dell'icosaedro con Class I/Alternate e Class II/Triacon*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012

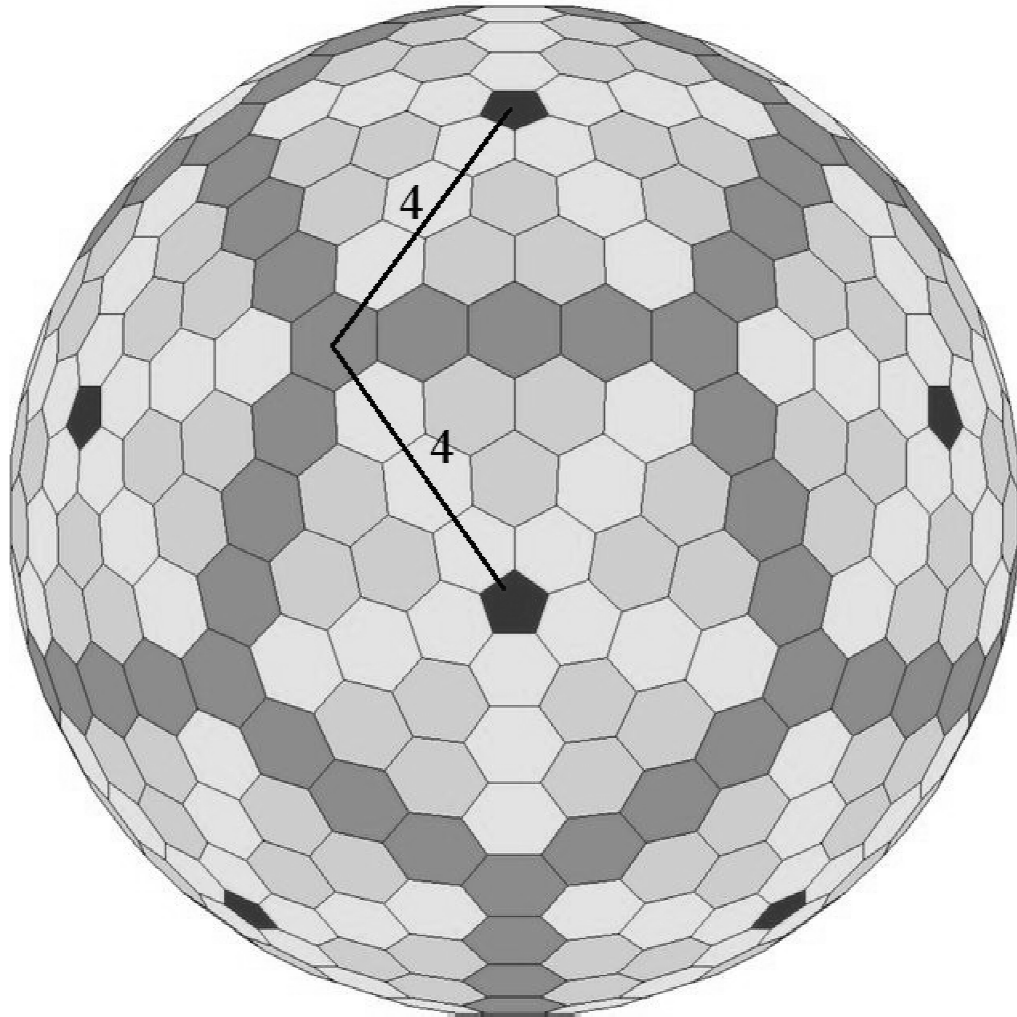


Class I / Alternate



Class II / Triacon

**FIG. 91.** R. Gadaleta, *Poliedro di Goldberg,  $G(4,4)$* , rielaborazione infografica con aggiunta di informazioni numeriche e grafiche per la comprensione del metodo di classificazione del poliedro di Goldberg, con Adobe Photoshop® CS5 Extended, del disegno di Tomruen per “English Wikipedia”



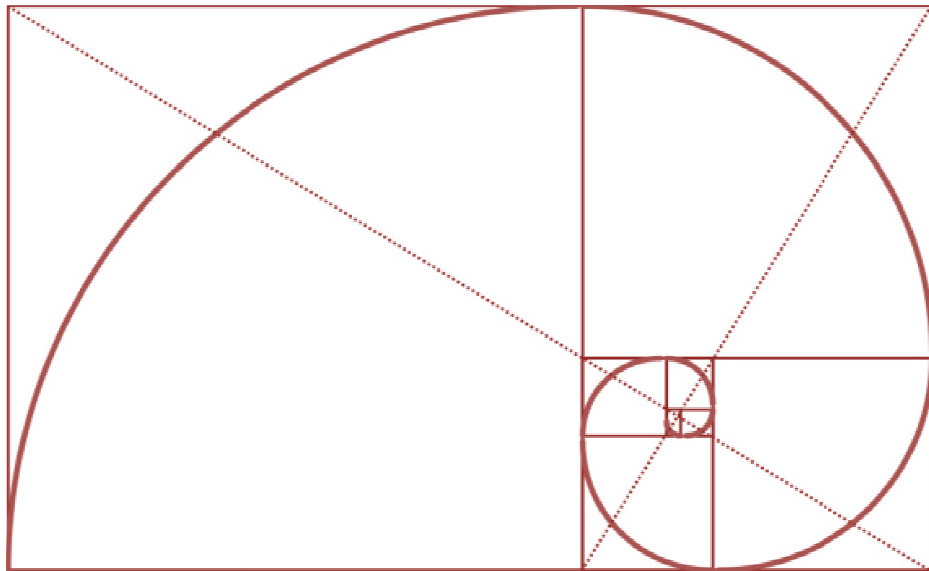
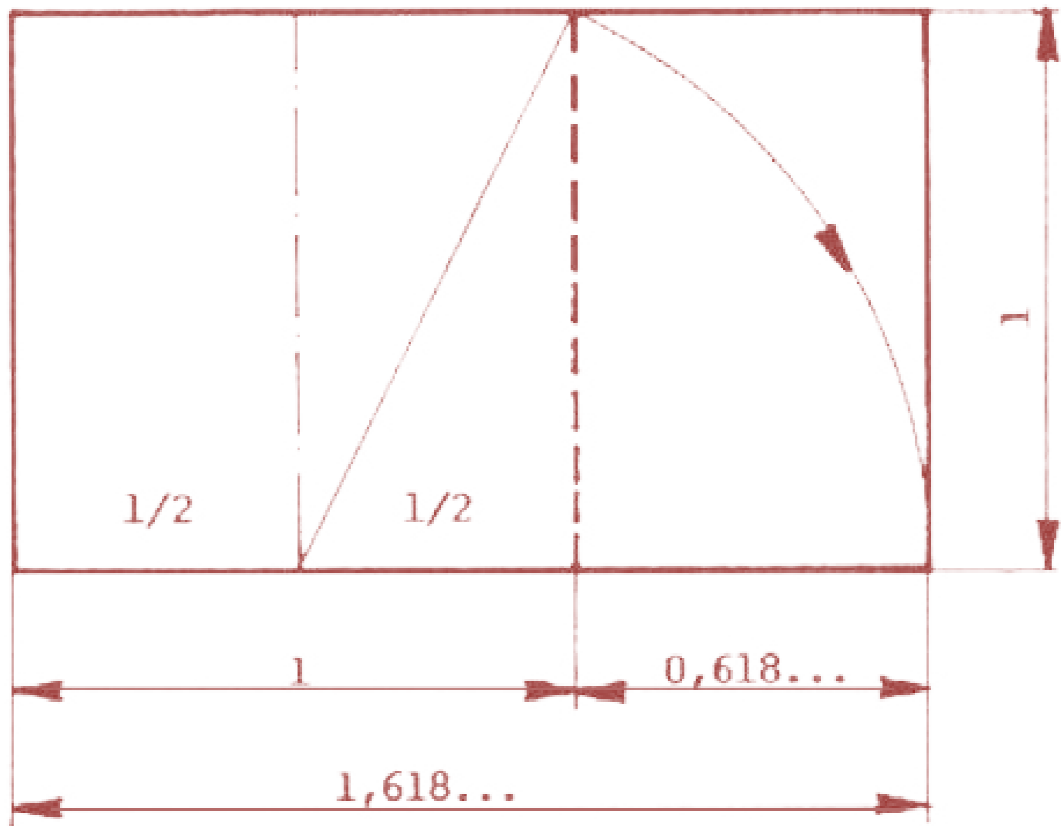


**FIG. 105.** R. Gadaleta,  *Rettangolo aureo e spirale logaritmica*, rielaborazione infografica di immagini disponibili online, eseguita con AutoCAD® 2012 e con Adobe Photoshop® CS5 Extended

Fonte: immagini originali presenti su

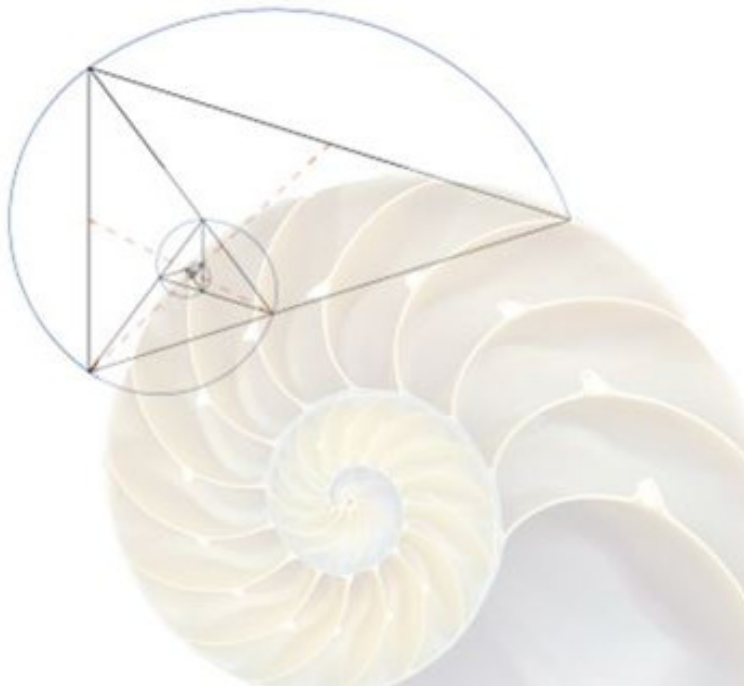
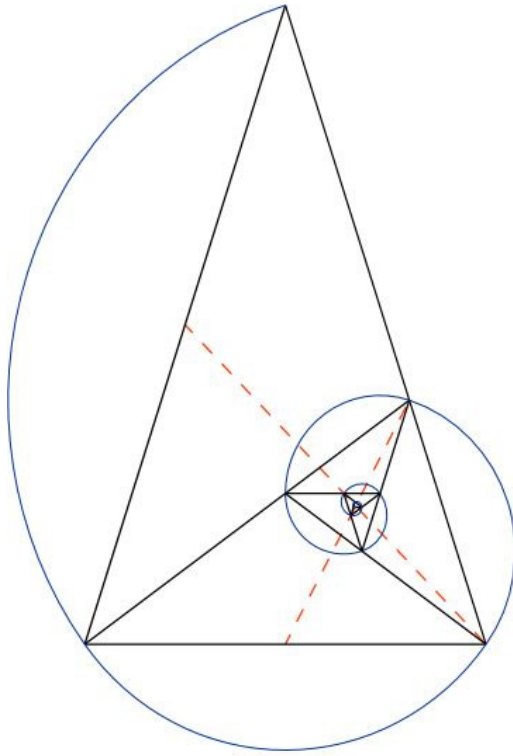
[http://www.webalice.it/gbarbella/piramide\\_di\\_cheope.html](http://www.webalice.it/gbarbella/piramide_di_cheope.html)

<http://www.gabrieledanesi.com/blog/?id=e1a4qwf2>

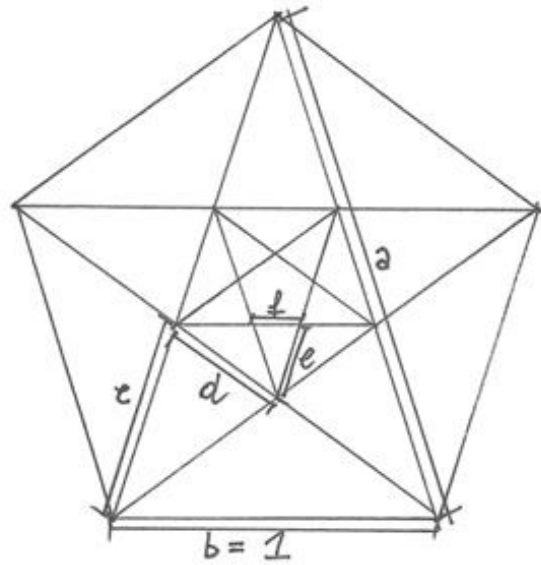


**FIG. 106.** R. Gadaleta, *Spirale logaritmica e triangolo aureo*, rielaborazione infografica e sovrapposizione della conchiglia del Nautilus Pompilius, eseguita con con Adobe Photoshop® CS5 Extended

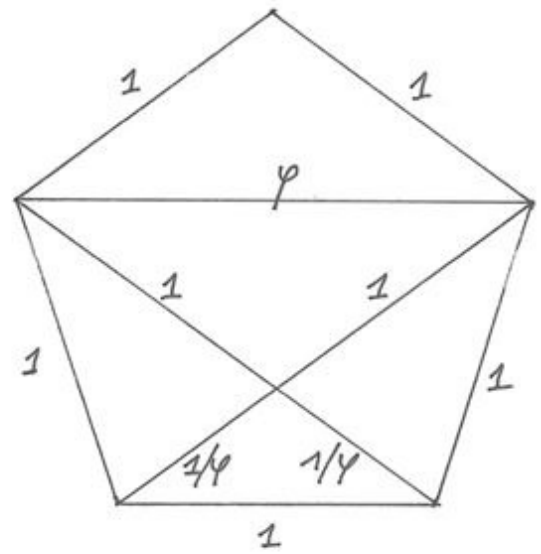
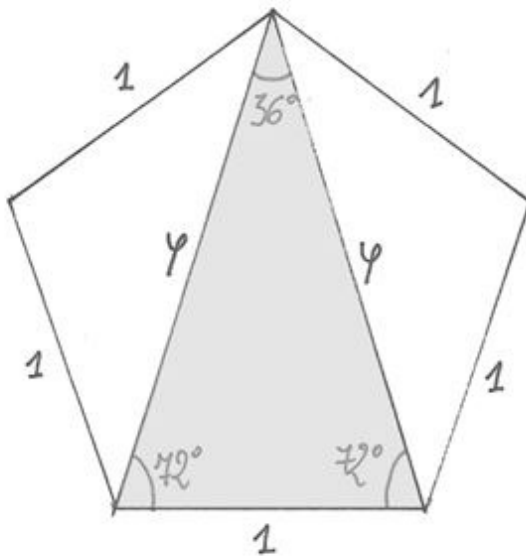
Fonte: immagine originale presente su  
[https://it.wikipedia.org/wiki/Triangolo\\_aureo](https://it.wikipedia.org/wiki/Triangolo_aureo)



**FIG. 107.** R. Gadaleta, *Proporzione aurea nel pentagono*, disegni eseguiti a mano



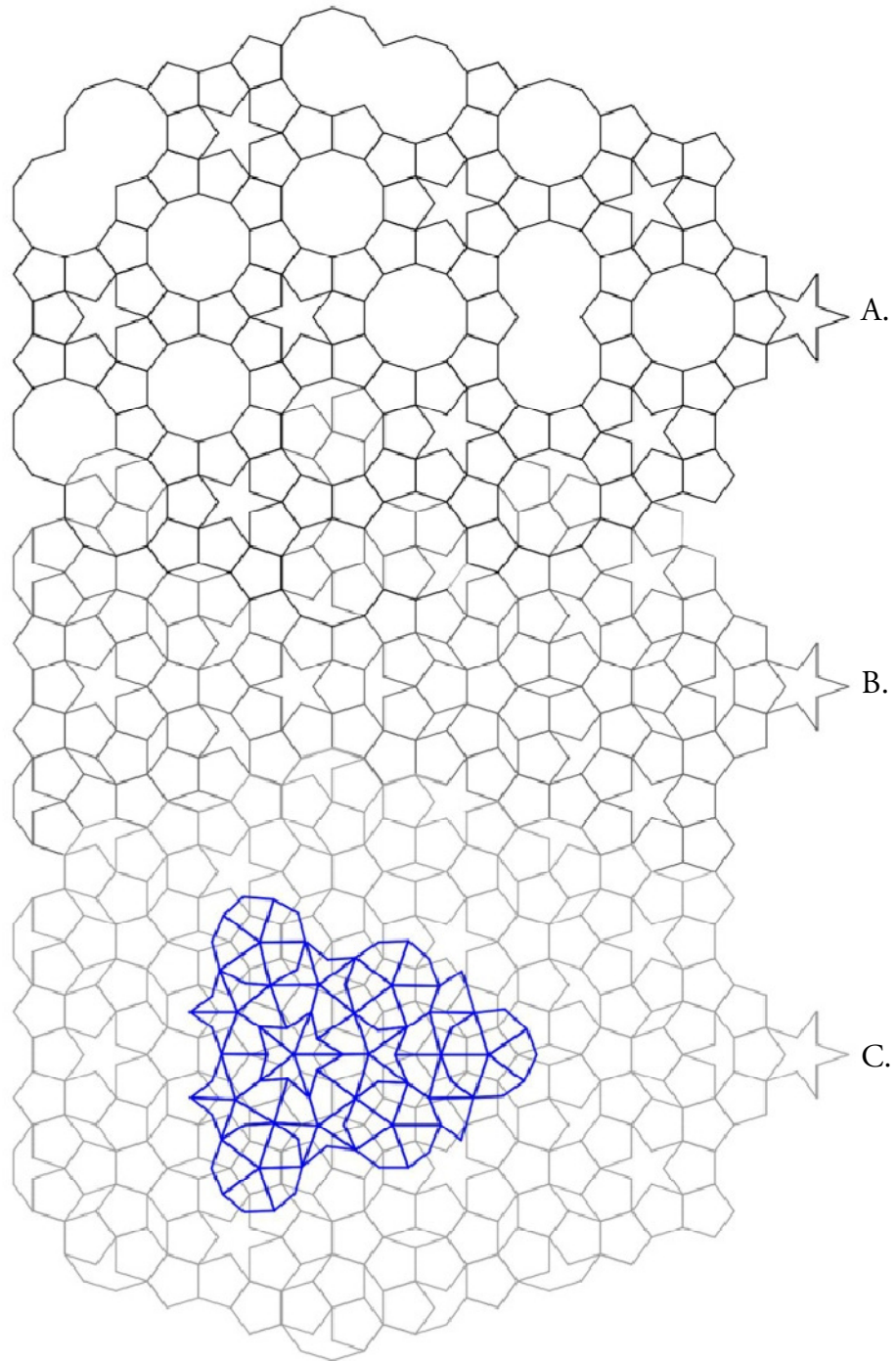
$$\begin{aligned} a/b &= \varphi \\ b/c &= \varphi \\ d/c &= \varphi \\ e/f &= \varphi \end{aligned}$$



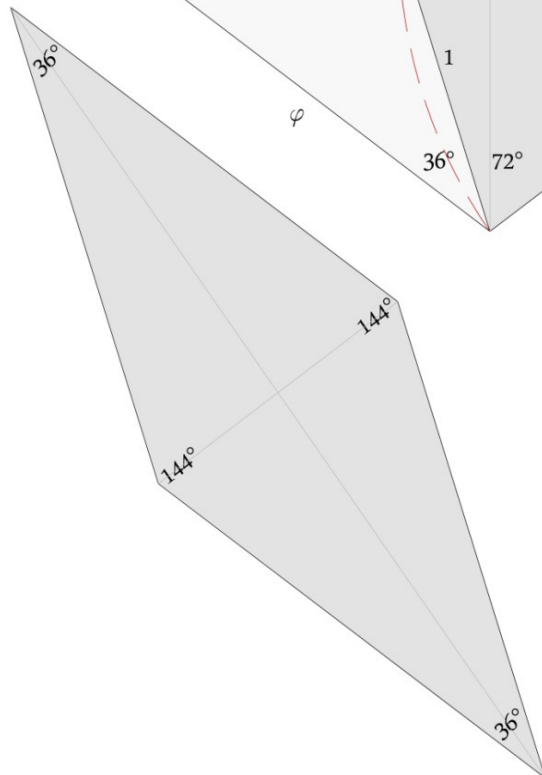
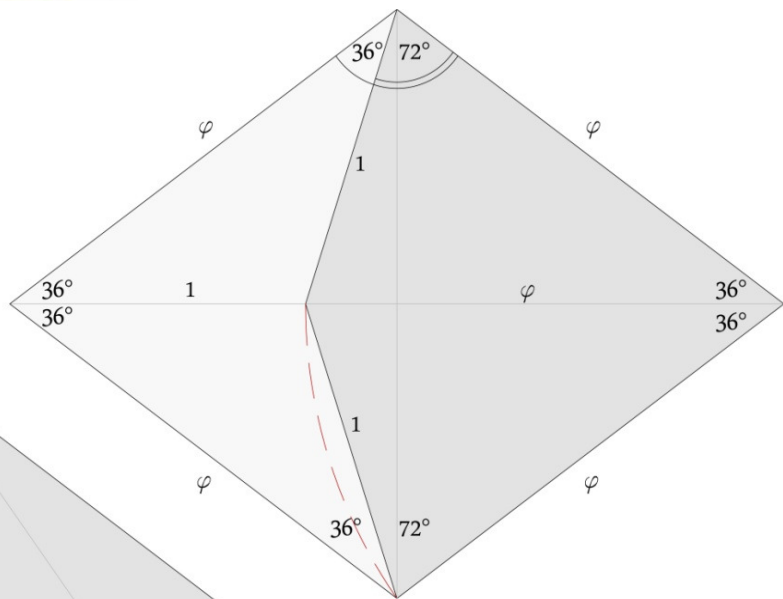
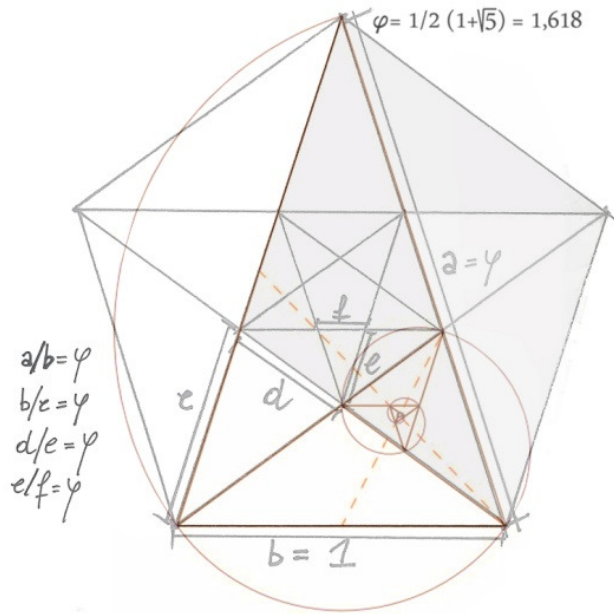
**FIG. 108.** R. Gadaleta, *Derivazione geometrica delle tassellazioni quinarie e loro corrispondenze*, A. J. von Kepler, B. Penrose P, C. Penrose P2, rielaborazione attraverso sovrapposizione infografica, eseguita con con Adobe Photoshop® CS5 Extended

Fonte: immagini originali presenti nell'articolo "Pavages" di Fernando Alcalde, 30 novembre 2011,  
<http://images.math.cnrs.fr/Pavages.html?lang=fr>

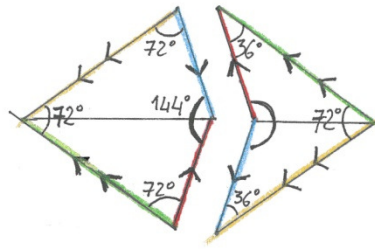




**FIG. 109.** R. Gadaleta, *Tassellazione di Penrose e pentagono aureo*,  
disegni eseguiti a mano e disegni infografici eseguiti con AutoCAD®  
2012, colorati con Adobe Photoshop® CS5 Extended

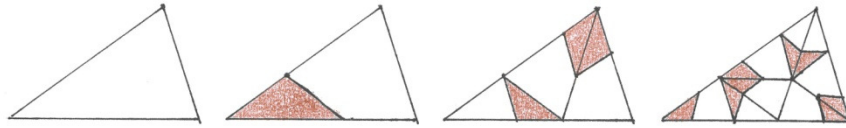


**FIG. 110.** R. Gadaleta, *Tassellazione di Penrose P2*, disegni eseguiti e colorati a mano

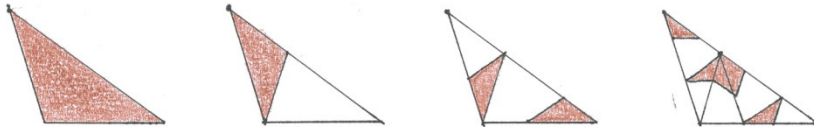


REGOLE  
AGGREGATIVE  
(MATCHING  
RULES)

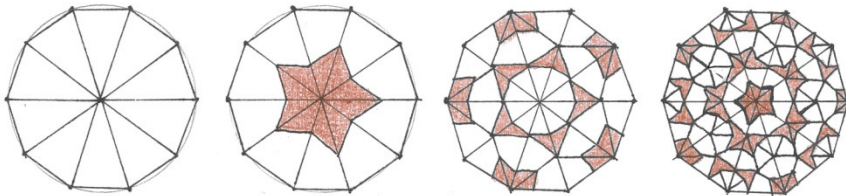
SCOMPOSIZIONE  
DELLA METÀ  
DEL TASSELLO  
"AQUILONE"



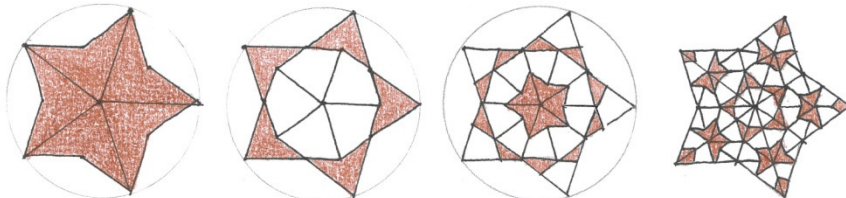
SCOMPOSIZIONE  
DELLA METÀ  
DEL TASSELLO  
"FRECCIA"



CONFIGURAZIONE  
"SOLE" ESUA  
SCOMPOSIZIONE

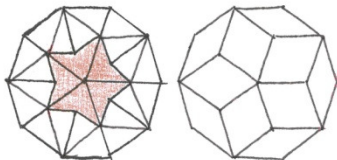


CONFIGURAZIONE  
"STELLA" ESUA  
SCOMPOSIZIONE



P2

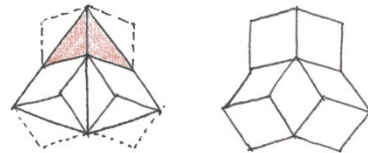
P3



CORRISPONDENZA DELLE  
TASSELLAZIONI P2 E P3  
DI PENROSE

P2

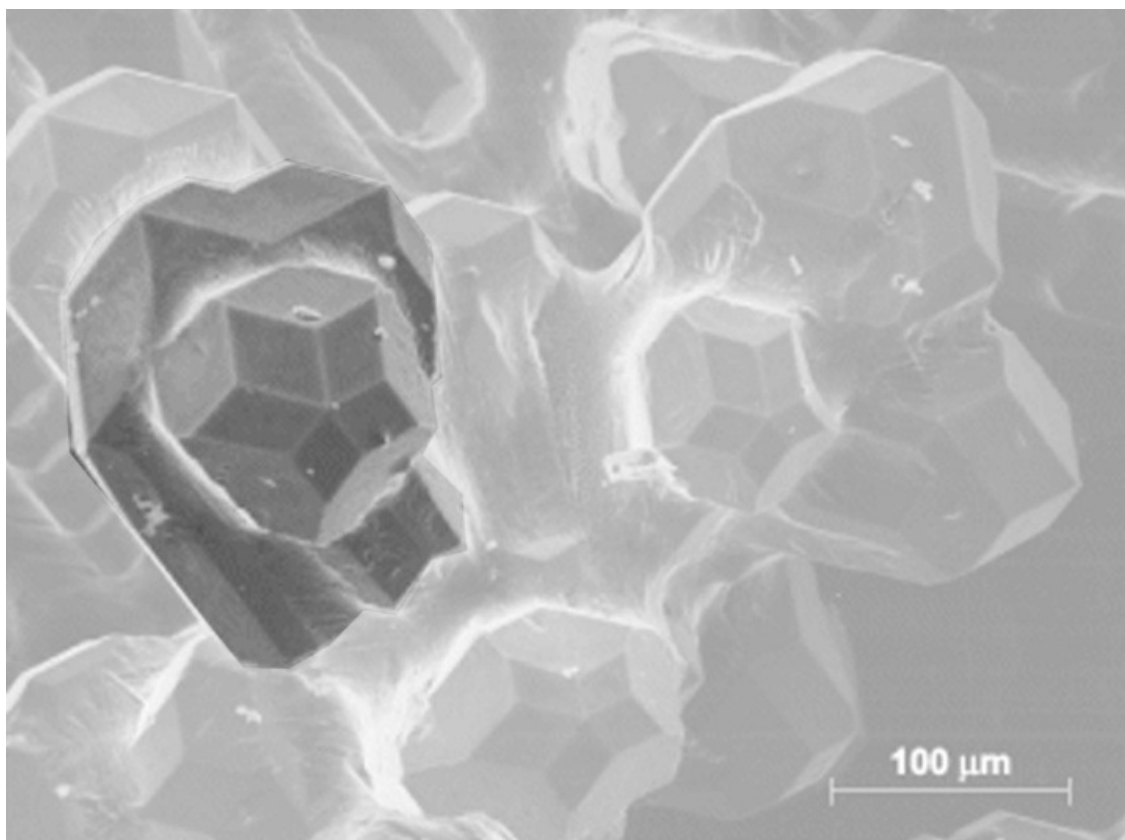
P3



CORRISPONDENZA DELLE TASSELLAZIONI  
P2 E P3 DI PENROSE

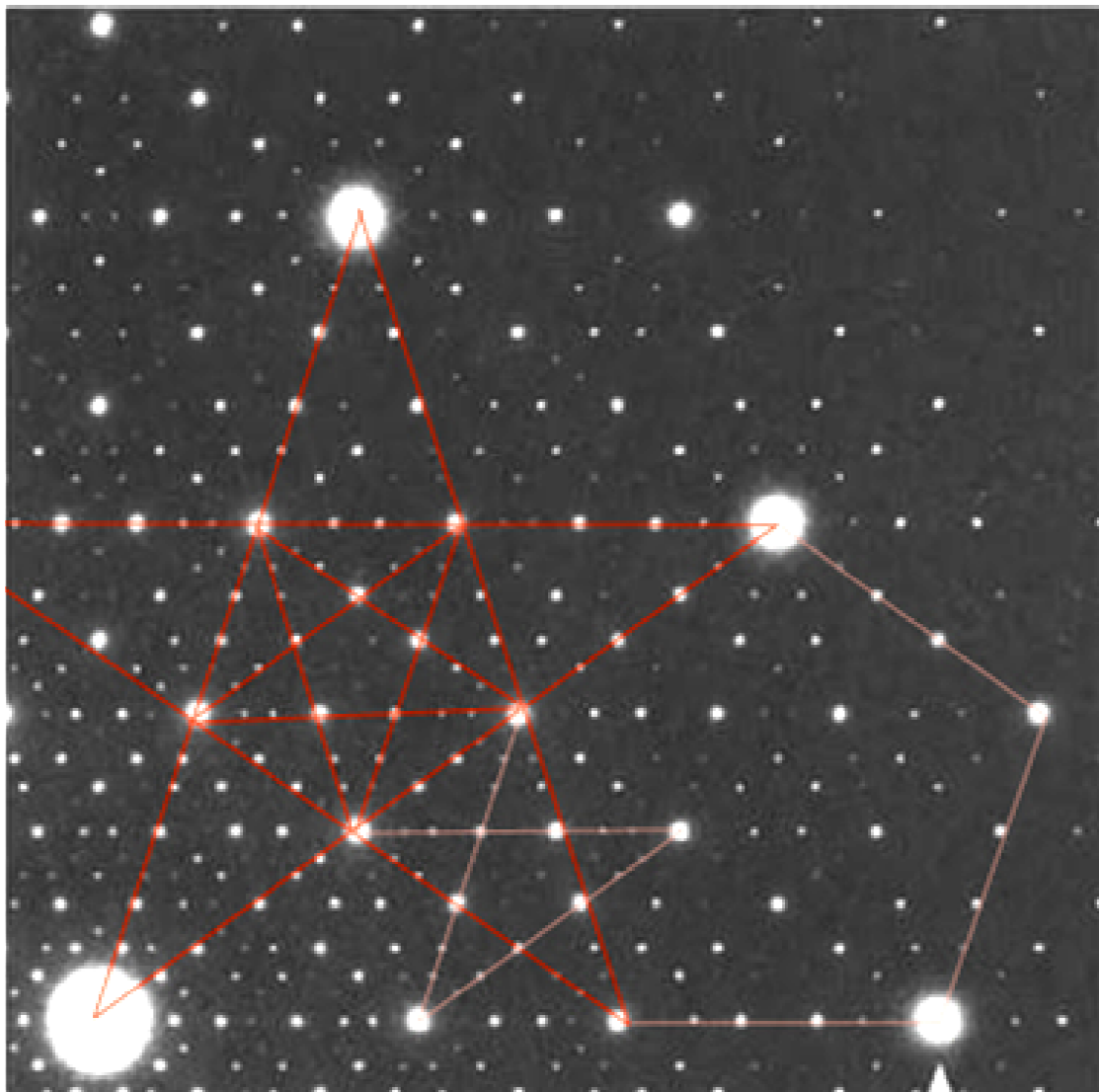
**FIG. 113.** R. Gadaleta, *Quasicristallo e Triacontaedro*, quasicristallo a simmetria icosaedrica visto al microscopio, rielaborazione grafica che evidenzia la morfologia triacontaedrica con un colore più scuro, tramite Adobe Photoshop® CS5 Extended

Fonte: immagine originale in “Les quasicristaux, des matériaux nouveaux à structure cristallographique non périodique”  
(<http://souspression.canalblog.com/archives/2011/03/07/20550985.htm>)

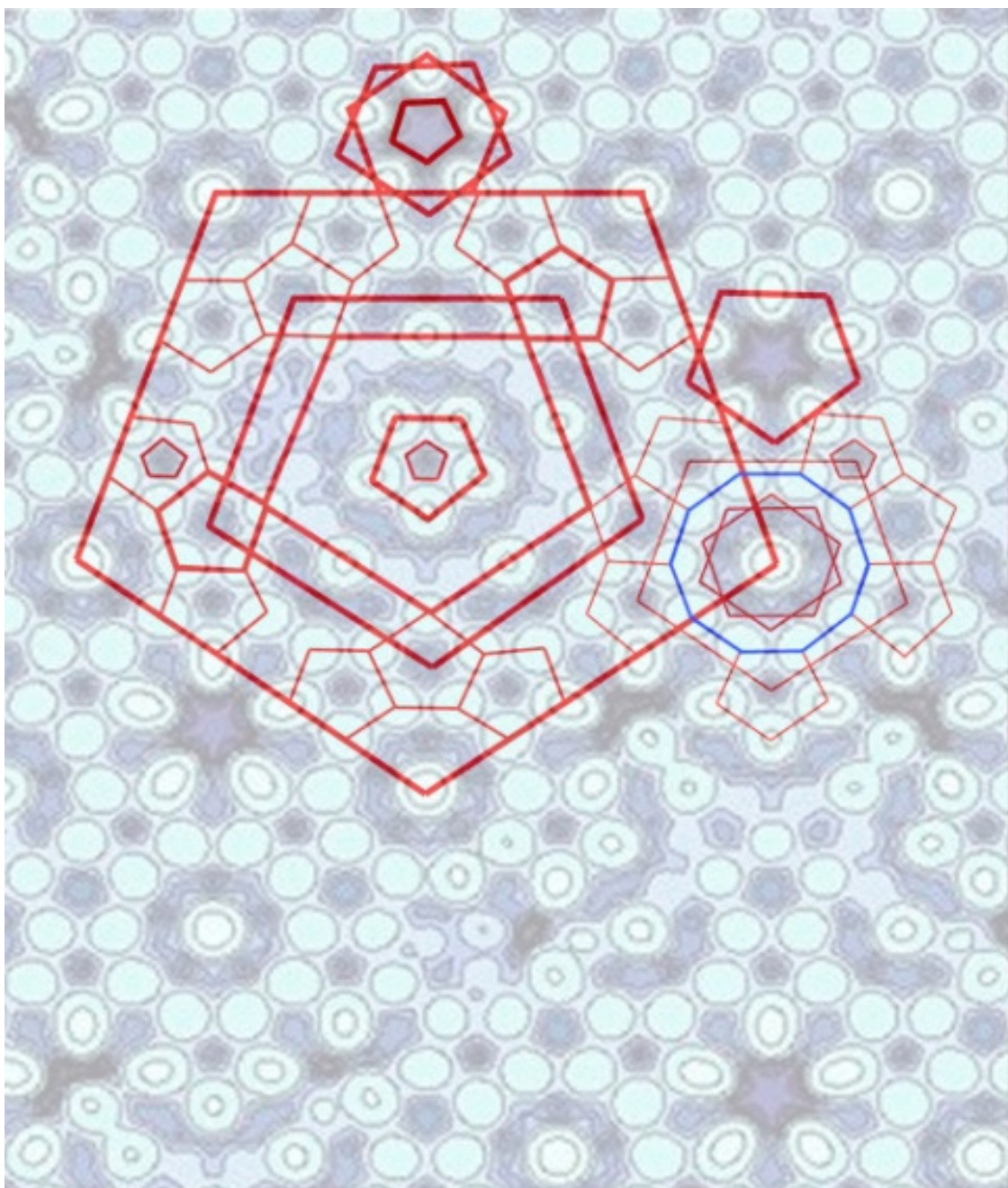




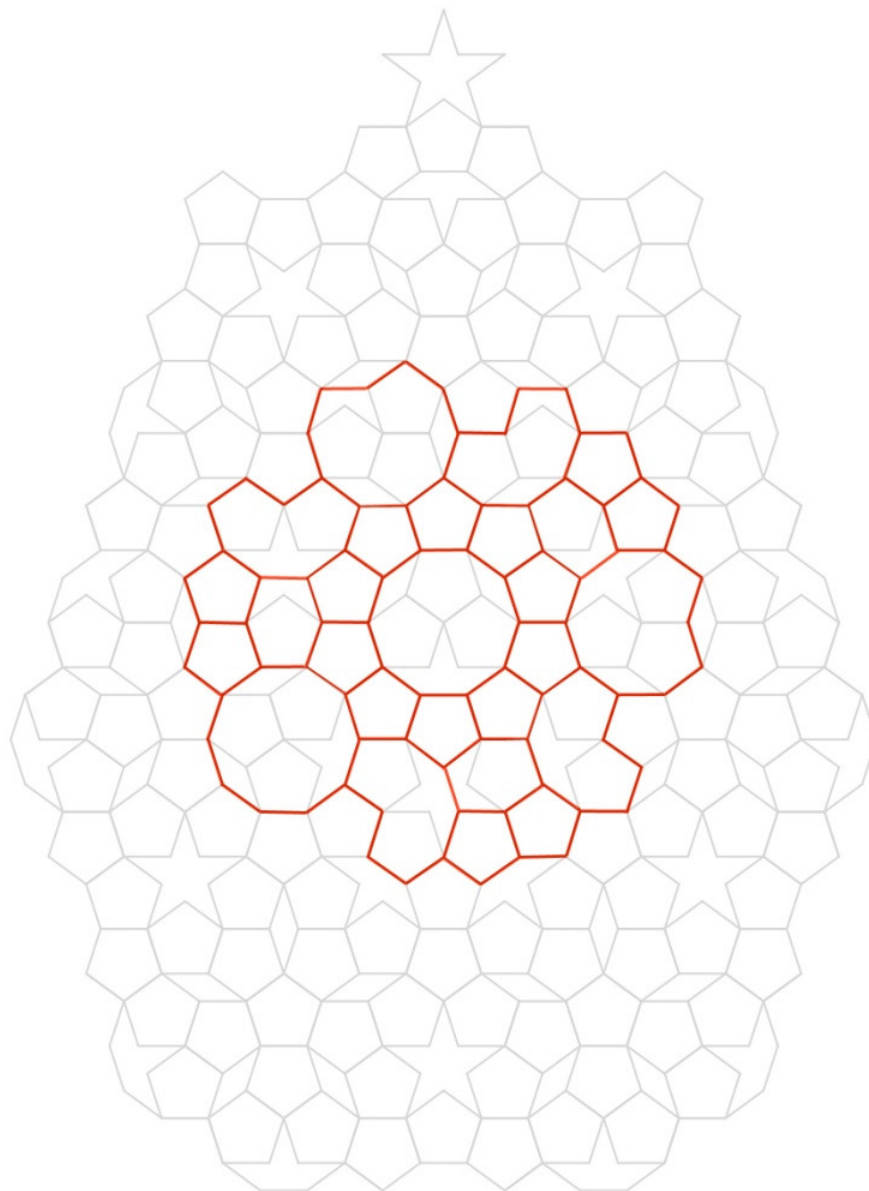
**FIG. 114.** R. Gadaleta, Rielaborazione infografica dell'immagine di Conradin Beeli rappresentante la diffrazione elettronica del quasicristallo  $Al_7Co_{11}Ni_{19}$ , che evidenzia la simmetria quinaria nei quasicristalli, disegno e sovrapposizione eseguiti con Adobe Photoshop® CS5 Extended



**FIG. 115.** R. Gadaleta, Elaborazione dell'immagine raffigurante il modello atomico del quasicristallo con immagine a microscopia elettronica, che ne evidenzia la simmetria quinquaria, disegno e sovrapposizione eseguiti con Adobe Photoshop® CS5 Extended

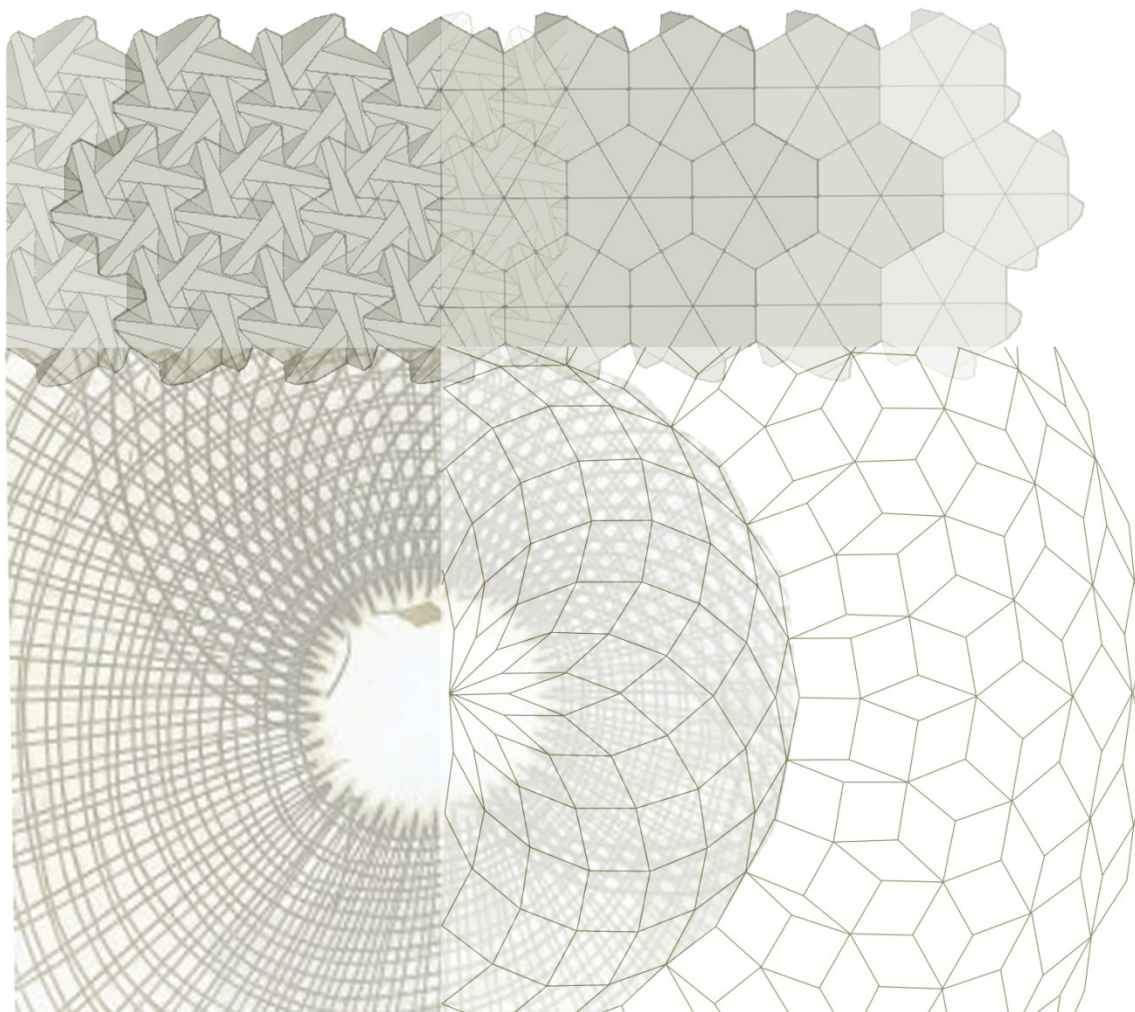


**FIG. 117.** R. Gadaleta, *Relazione tra la tassellazione di von Kepler e la disposizione atomica dei quasicristalli (in rosso)*, disegno e sovrapposizione eseguiti con Adobe Photoshop® CS5 Extended

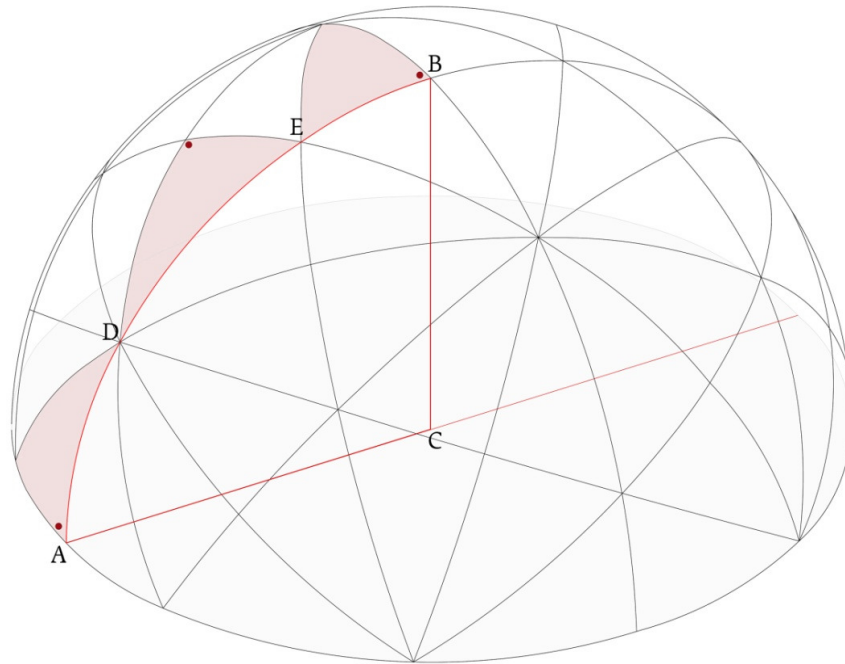
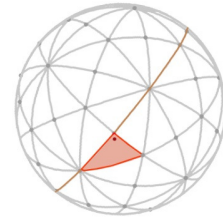


**FIG. 120B.** R. Gadaleta, *La tettonica dell'intreccio*, relazione determinata dal nodo organico, tra l'apparecchiatura lapidea reciproca (in alto), l'intreccio tessile del cestino in paglia viennese (in basso a sinistra) e la tassellazione quinaria di Penrose (in basso a destra), disegno infografico eseguito con Adobe Photoshop® CS5 Extended





**FIG. 121.** R. Gadaleta, *Dimensionamento della cupola secondo geometria*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended



**Diametro sfera: 10 m**

$$AC = r = 5 \text{ m}$$

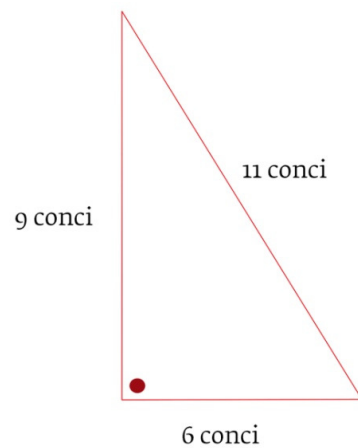
$$\text{Perimetro equatoriale: } 2\pi r = (2 \times 3,14 \times 5 \text{ m}) = 31,4 \text{ m}$$

$$AB = Pe / 4 = 7,85 \text{ m}$$

$$AD = 2,77 \text{ m} / 0,30 \text{ m} = 9 \text{ conchi}$$

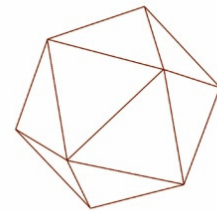
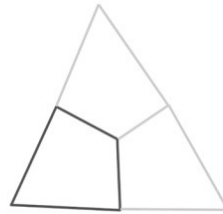
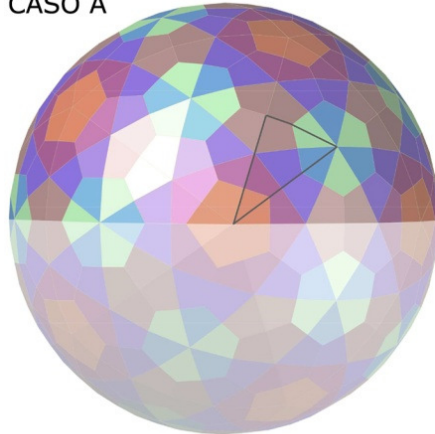
$$DE = 3,27 \text{ m} / 0,30 \text{ m} = 11 \text{ conchi}$$

$$EB = 1,81 \text{ m} / 0,30 \text{ m} = 6 \text{ conchi}$$



**FIG. 122.** R. Gadaleta, *Disegni infografici tridimensionali di suddivisione sferica (caso A, caso B, caso C)*, disegni infografici tridimensionali eseguiti con AutoCAD® 2012, Stella4D, e colorati anche con Adobe Photoshop® CS5 Extended

CASO A

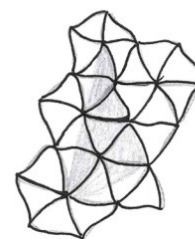
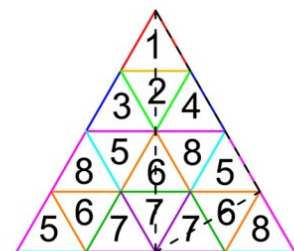
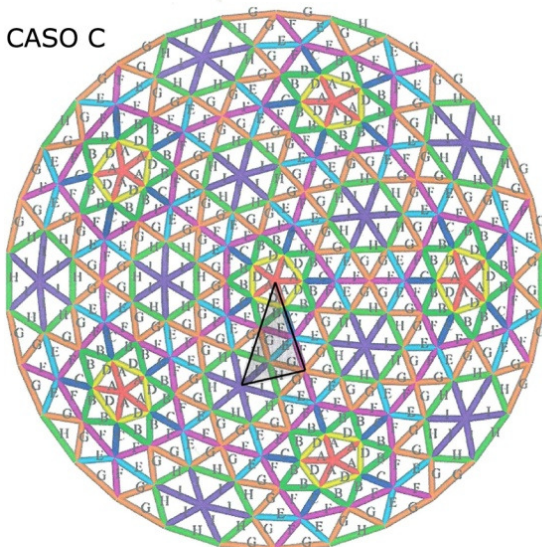


Icosaedro

CASO B



CASO C



TASSELLAZIONE  
STEREOTOMICA

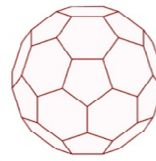
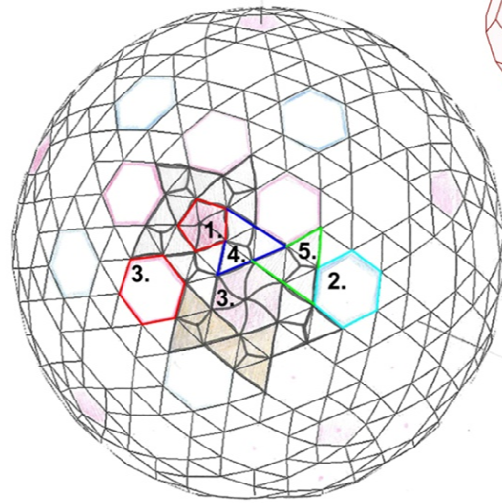


CONCIO  
TIPO

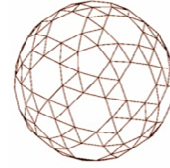
**FIG. 123.** R. Gadaleta, *Disegni infografici tridimensionali di suddivisione sferica (caso D, caso E, caso F)*, disegni infografici tridimensionali eseguiti con AutoCAD® 2012, Stella4D, e colorati anche con Adobe Photoshop® CS5 Extended



**CASO D**



Icosaedro  
troncato



Icosaedro  
troncato  
rettificato simo

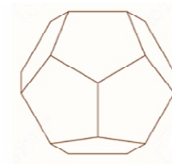
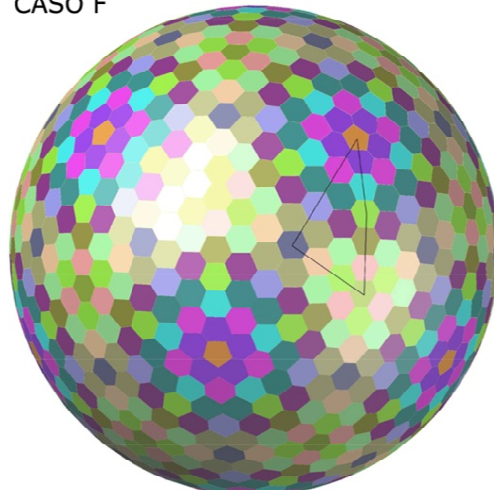


**CASO E**



Icosidodecaedro

**CASO F**






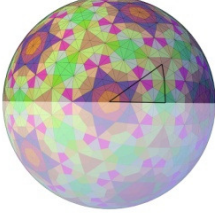

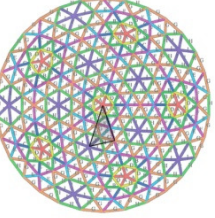

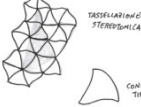


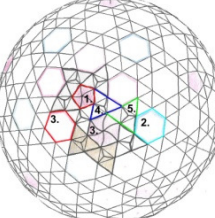

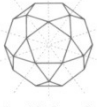





Dodecaedro



**FIG. 124.** R. Gadaleta, *Tabella comparativa di suddivisione della superficie sferica*, disegni infografici tridimensionali eseguiti con AutoCAD® 2012, Stella4D, e colorati anche con Adobe Photoshop® CS5 Extended

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**


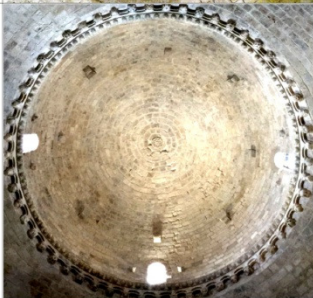
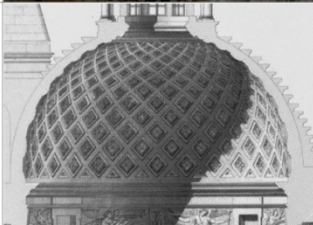
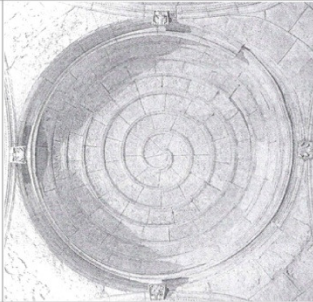

DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)

Suddivisione geodetica della sfera						
Poliedro	Tipo di suddivisione	Disegno di suddivisione	Morfologia elementi costitutivi	Numero elementi-tipo	Lunghezza faccia elem. all'estradosso (cm)	Diametro sfera (m)
 Icosaedro	Suddivisione geod. di frequenza 3 e successiva divisione dei triangoli secondo il loro baricentro posto sulla sfera (CASO A)			9	30 40	3,42 4,7
	Suddivisione geod. di frequenza 5 e successiva divisione dei triangoli secondo il loro baricentro posto sulla sfera (CASO B)			23	30 40	5,84 7,74
	Suddivisione geod. di frequenza 6 (CASO C)		  TASSILLAZIONE SFERICA CONICO TIPO	8	30 40	4,06 5,22
Suddivisione duale reciproca della geometria geodetica						
Poliedro	Tipo di suddivisione	Disegno di suddivisione	Morfologia elementi costitutivi	Numero elementi-tipo	Lunghezza faccia concii all'estradosso (cm)	Luce coperta (m)
 Icosaedro troncato ↓  Icosaedro troncato rettificato simo	Suddivisione geod. reciproca del poliedro di Goldberg G(3,0), duale della suddivisione geodetica di frequenza 3 applicata all'icosaedro e successiva operazione snub di smussamento ed espansione (CASO D)	 1. Pentagono regolare: 1 el.-tipo 2. Esagono regolare: 1 el.-tipo 3. Esagono irregolare: 4 el.-tipo 4. Triangoli intorno al pentagono: 3 el.-tipo 5. Triangoli intorno all'esagono regolare: 3 el.-tipo Diametro sfera (imposta cupola): 2 el.-tipo per taglio sfera		14	30 40	4,20 5,60
Suddivisione duale della geometria geodetica						
 Icosidodecaedro	Suddivisione duale di quella geod. di frequenza 6 (CASO E)			19	30/43 40/53	6,82 9,5
 Dodecaedro	Suddivisione duale di quella geod. di frequenza 6 (CASO F)			16	30 40	4,54 7,22

**FIG. 125.** R. Gadaleta, *Tabella comparativa del metodo di apparecchiatura delle cupole lapidee costruite*

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione, XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

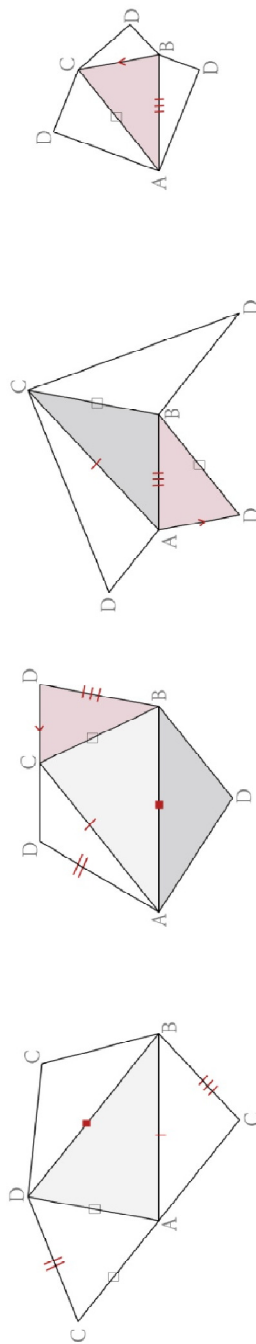
Suddivisione della sfera secondo meridiani e paralleli					
Collocazione	Documentazione fotografica/ archivistica	Numero conci-tipo	Numero totale conci	Lunghezza faccia conci all'estradosso (cm)	Luce coperta (m)
<i>Chiesa di Ognissanti, Valenzano (Bari) 1061-1078</i>		18	587 circa	30/40  con metodo geometrico: 24	5,5
<i>Duomo di San Corrado, Molfetta (Bari) metà XII sec.-XIII sec.</i>		34	1472 circa	20/30  con metodo geometrico: 25	8
<i>Royale Chapel, Château d'Anet, Anet, Francia 1547-1552</i>		28		20/50	8,21
Suddivisione della sfera secondo elicoide					
<i>Cattedrale di Murcia, Murcia, Spagna XVI sec.</i>		80 circa	80 circa	20/60	poco inferiore a 6
Suddivisione della sfera secondo geometria reciproca					
<i>Bin Jassim Dome, Qatar, 2012</i>		8	110	100 circa	6 (diametro cupola all' estradosso)

**CAPITOLO IV.**

**Forma strutturale stereotomica della cupola in pietra da taglio a  
simmetria quinaria**

---

**FIG. 126.** R. Gadaleta, *Tabella comparativa dei quattro tetraedri individuati da Ludwig Danzer*, disegno infografico eseguito con AutoCAD® 2012, e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended



TILE A	TILE B	TILE C	TILE K
AD, AC	CD	AD	CB = $r = 1,902$
BD	BC	CB, BD	AC = $r\varphi = 3,077$
BC	AB	AB	= $r\varphi^2 = 4,977$
AB	BD	AC	= $y\varphi = 2,802$
	AC		= $y\varphi^2 = 4,532$
CD	AD		= $\frac{1}{2} b = 1$
			= $b\varphi = 3,236$
		CD	= $(b\varphi)/2 = \varphi = 1,618$
			= $b\varphi^2 = 5,234$
		AD	= $\frac{1}{2} b\varphi^2 = \varphi^2 = 2,617$

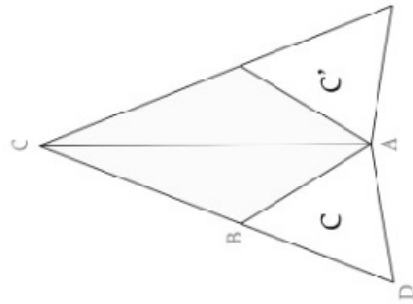
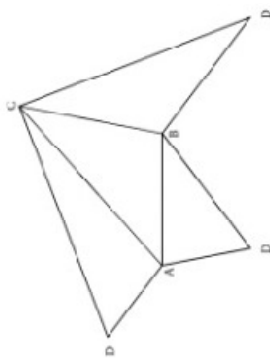
**FIG. 127.** R.Gadaleta, *Alcuni dei modelli realizzati in carta dei tetraedri e delle loro copie speculari*, fotografia dell'autrice





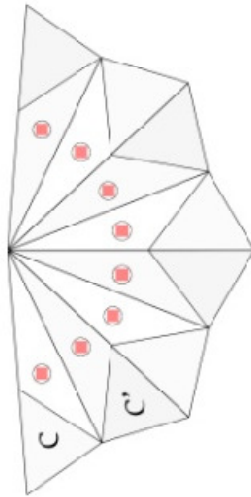
**FIG. 128.** R. Gadaleta, *Aggregazione del tetraedro C con il suo simmetrico a formare simmetria quinary*, disegno infografico eseguito con AutoCAD® 2012, e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended

Tetraedro C:

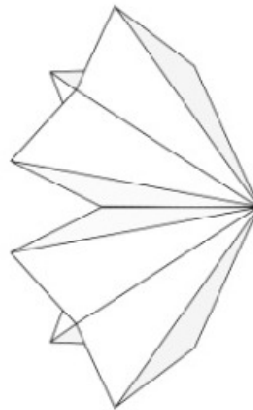


Aggregazione del tetraedro C  
con il suo speculare C',  
secondo lo spigolo AC

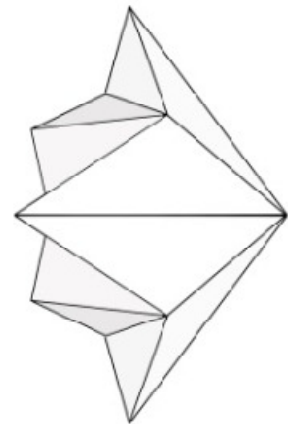
Fronte



Configurazione 1.

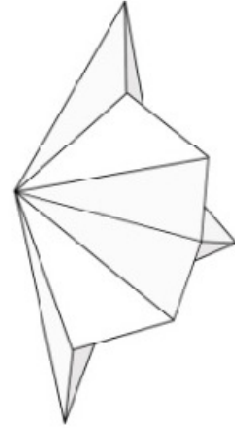
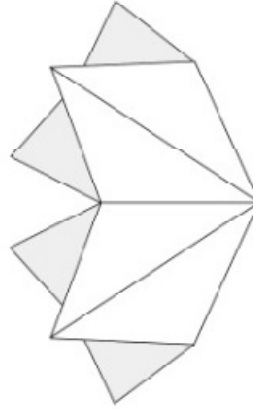
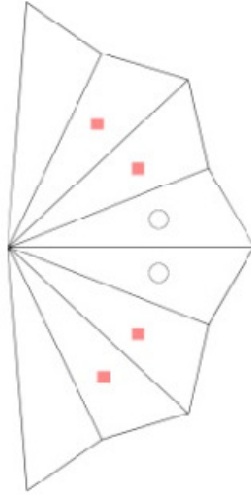


Configurazione 2., unendo ■

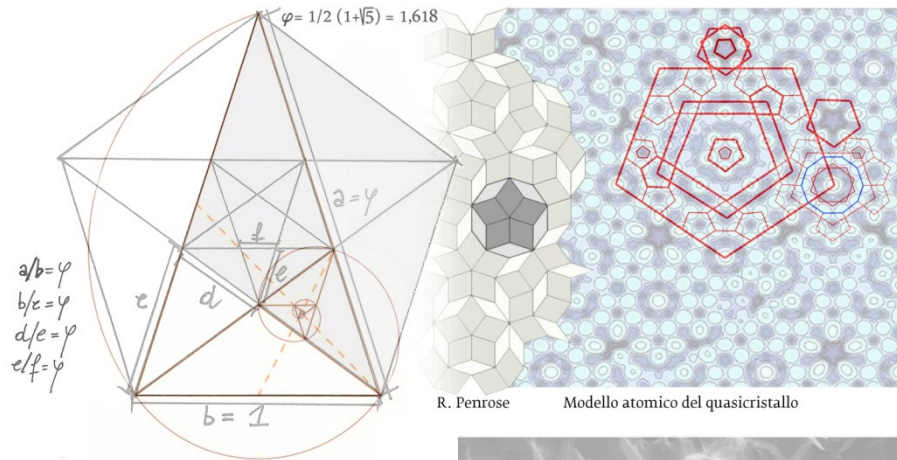


Configurazione 3., unendo ○

Retro



**FIG. 134.** R. Gadaleta, *Tassellazioni a simmetria quinaria, relazione tra Penrose, Danzer ed i quasicristalli*, tavola sintetica, disegni infografici ed eseguiti a mano e disegno infografico tridimensionale dei tetraedri e del triacontaedro rombico eseguito con AutoCAD® 2012. Sovrapposizioni e colore ottenuti con Adobe Photoshop® CS5 Extended



R. Penrose      Modello atomico del quasicristallo

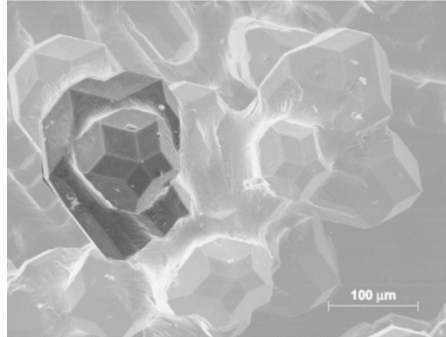
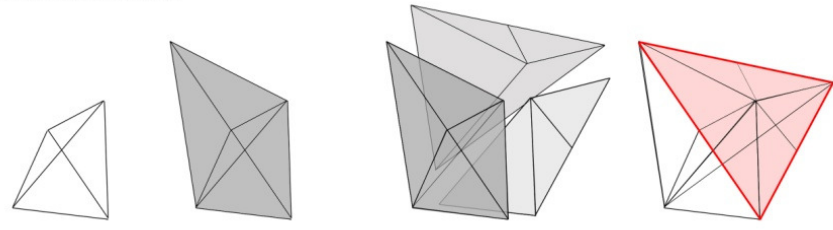
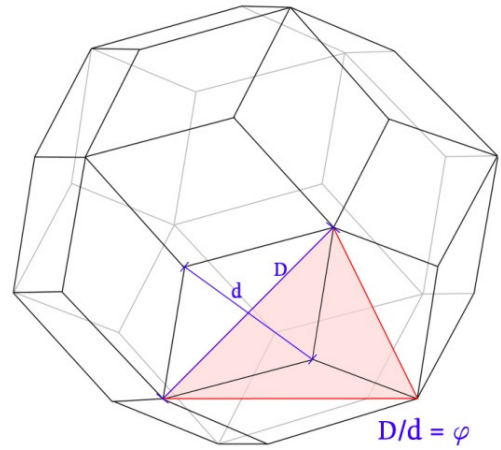


Immagine al microscopio del quasicristallo di alluminio, rame e ferro

Con i tetraedri di Danzer:



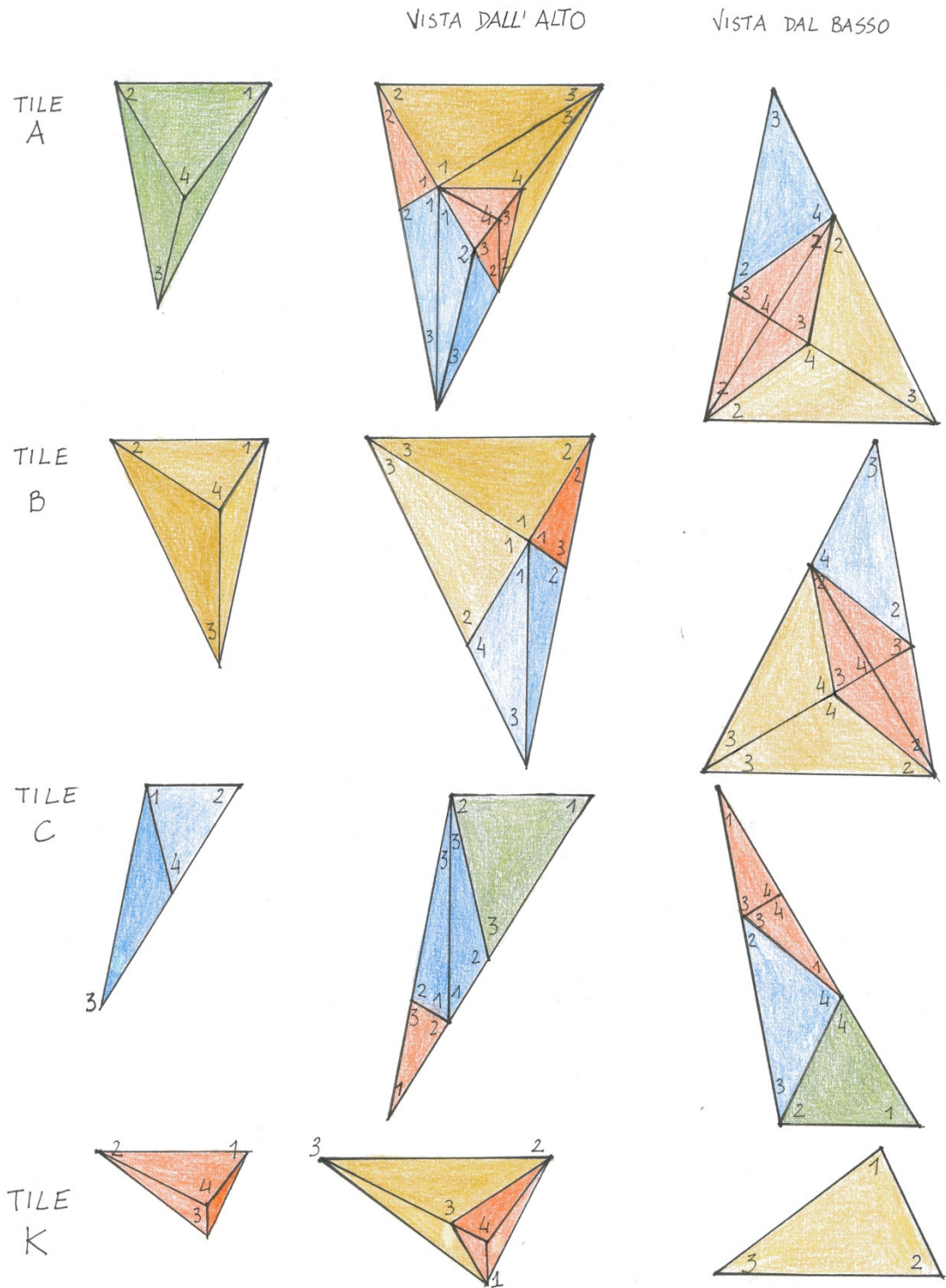
- 1. = Tetraedro K
- 2. = 1. + 1. speculare
- 3. = 2. + 2. + 2.



- 4. = Triantaetro rombico, 3. x 20

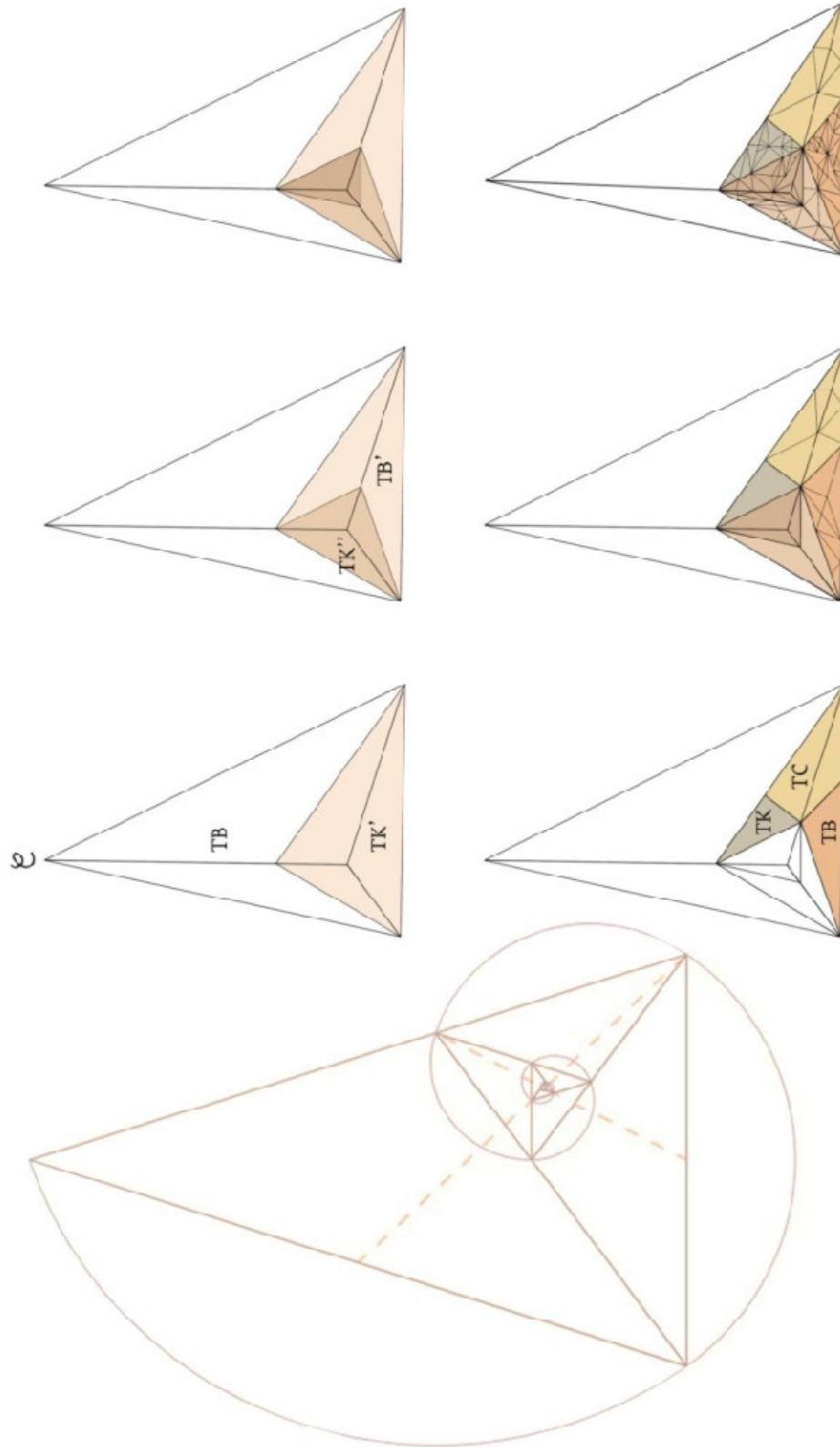
**FIG. 135.** R. Gadaleta, *Regole aggregative dei tetraedri*, ridisegno eseguito a mano della tabella di C. Charalampous

Fonte: Charalampous Charis, "Responsive spatial growth of the Danzer packing", dissertation submitted in partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science in Adaptive Architecture & Computation from the University of London, Bartlett School of Graduate Studies University College London, September 2007, pag. 24

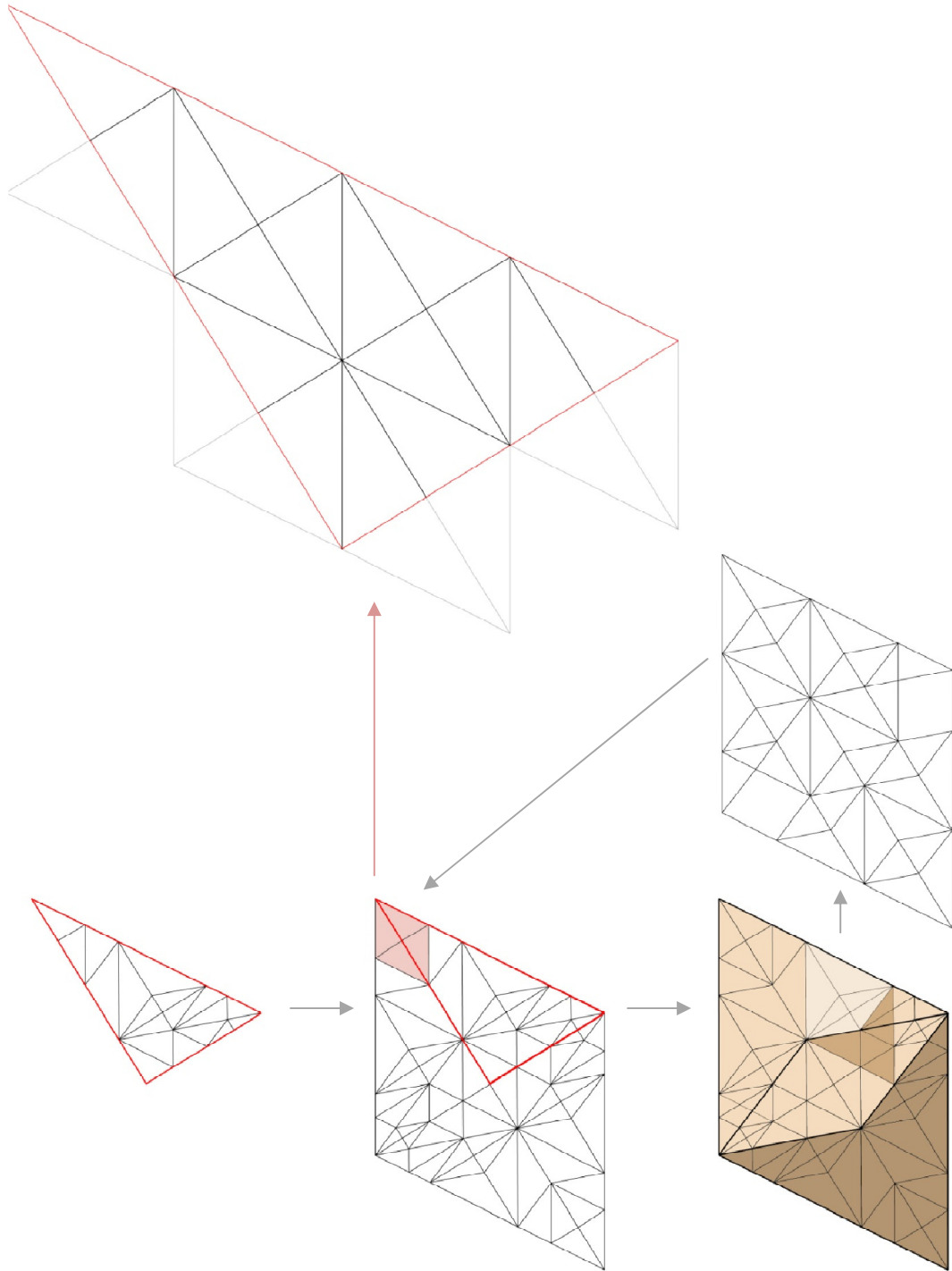




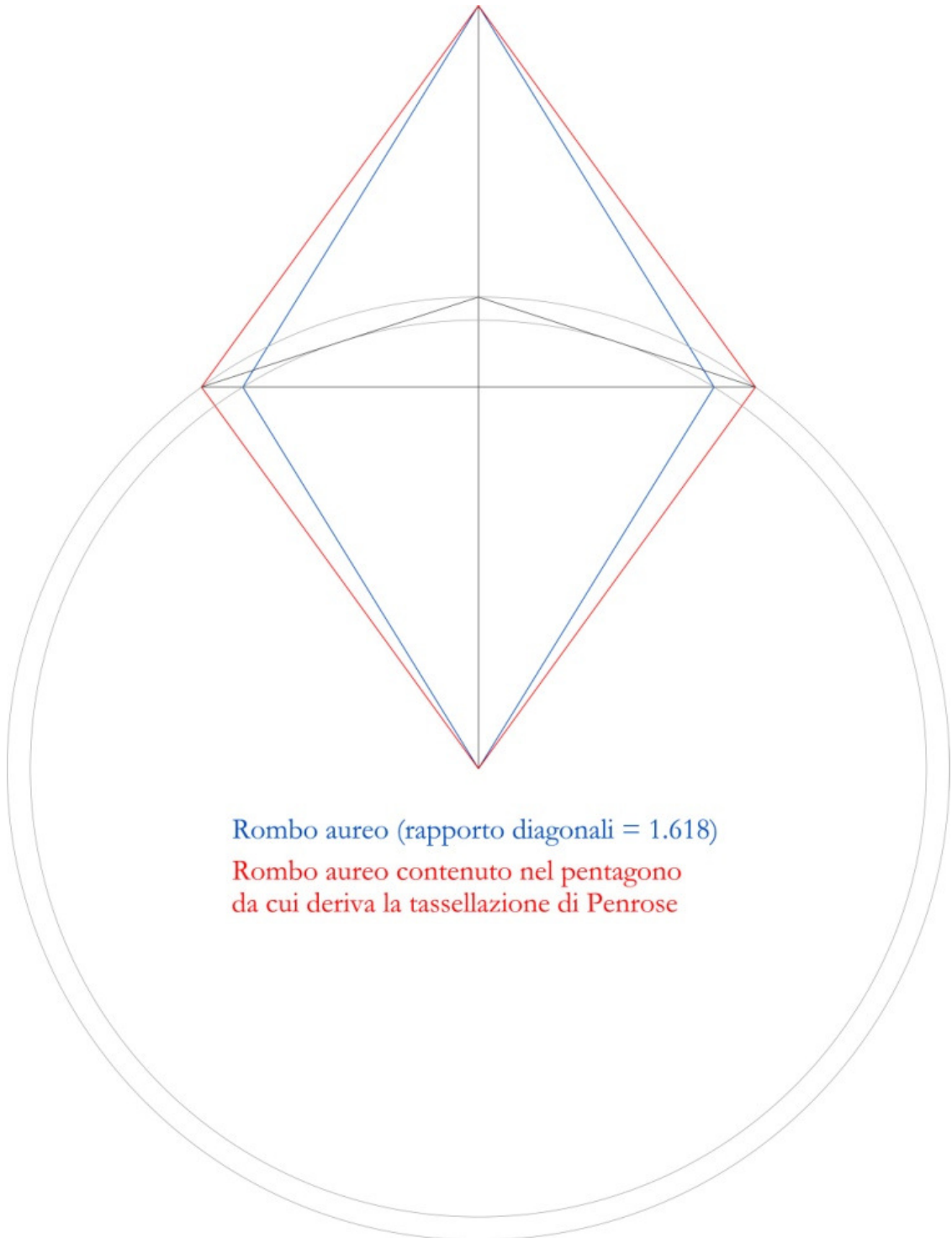
**FIG. 136.** R. Gadaleta, *Divisione frattale del TK*, disegni infografici tridimensionali eseguiti con AutoCAD® 2012 e colorati con Adobe Photoshop® CS5 Extended



**FIG. 137.** R. Gadaleta, *Suddivisione del triangolo minimo con la tassellazione di L. Danzer*, disegni infografici eseguiti con AutoCAD® 2012 e colorati con Adobe Photoshop® CS5 Extended

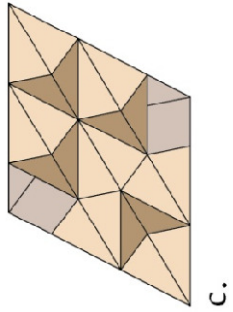


**FIG. 138.** R. Gadaleta, *Diversi rombi aurei*, disegno infografico  
eseguito con AutoCAD® 2012

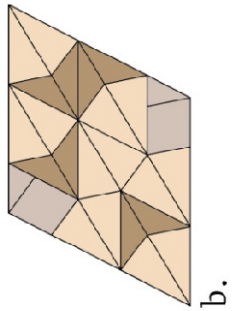


**FIG. 139.** R. Gadaleta, *Composizione del triangolo minimo con i rombi divisi secondo geometria di L. Danzer*, disegni infografici eseguiti con AutoCAD® 2012 e colorati con Adobe Photoshop® CS5 Extended

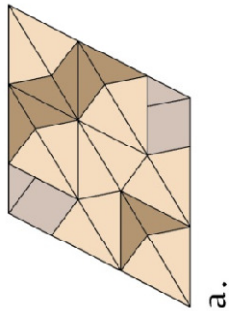




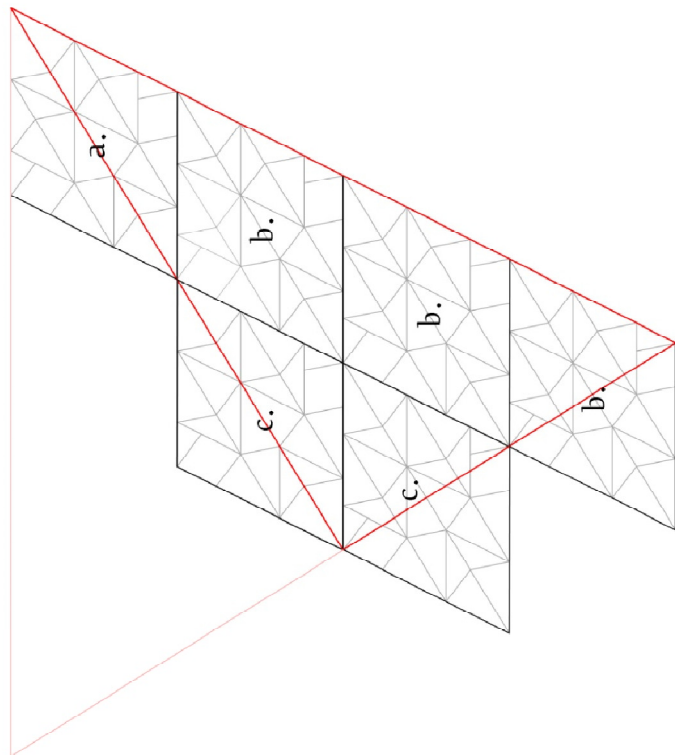
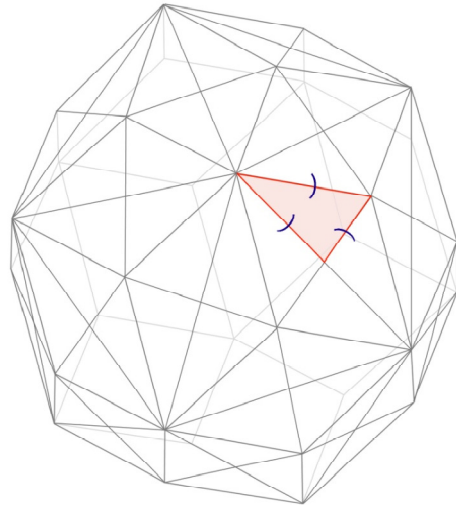
c.



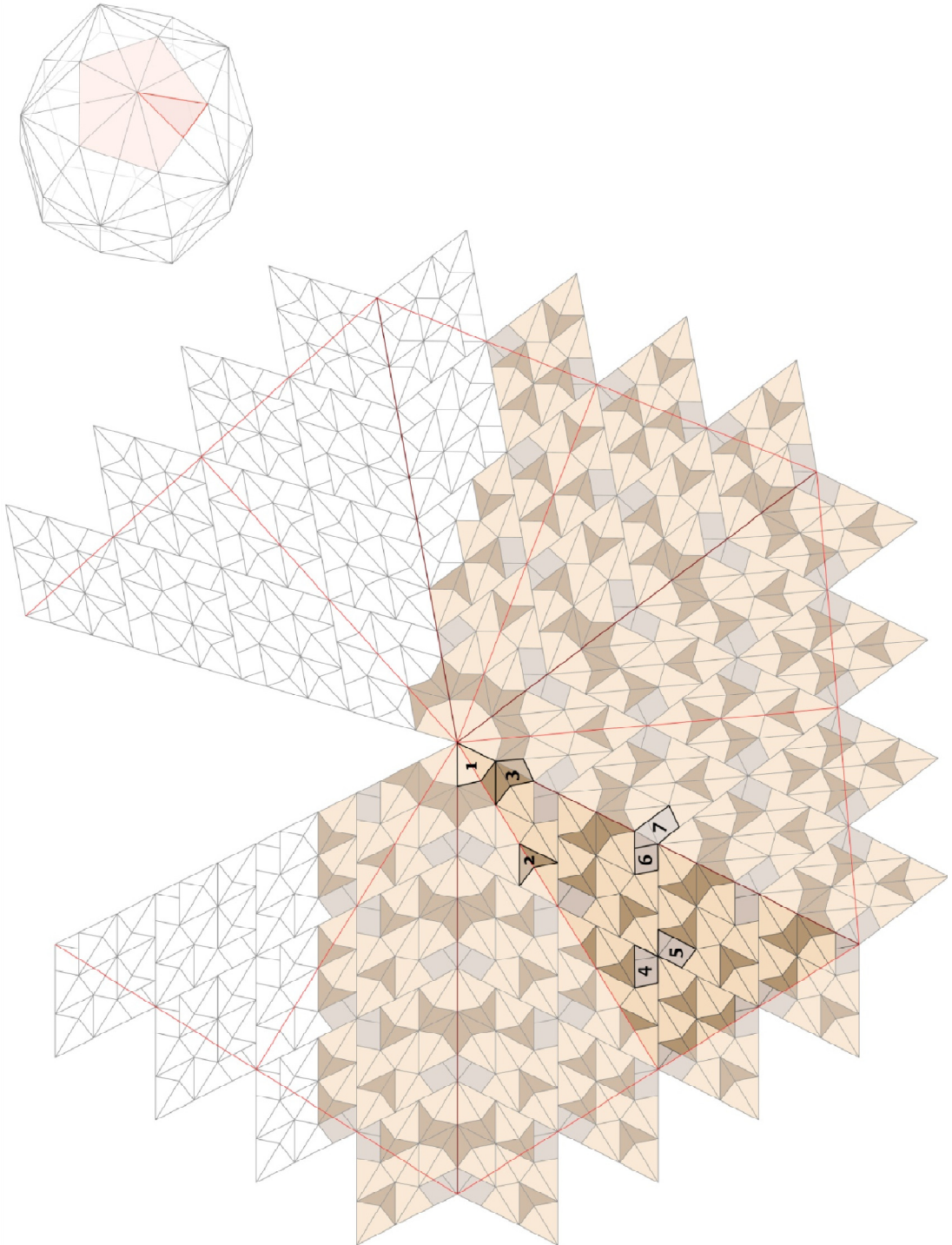
b.



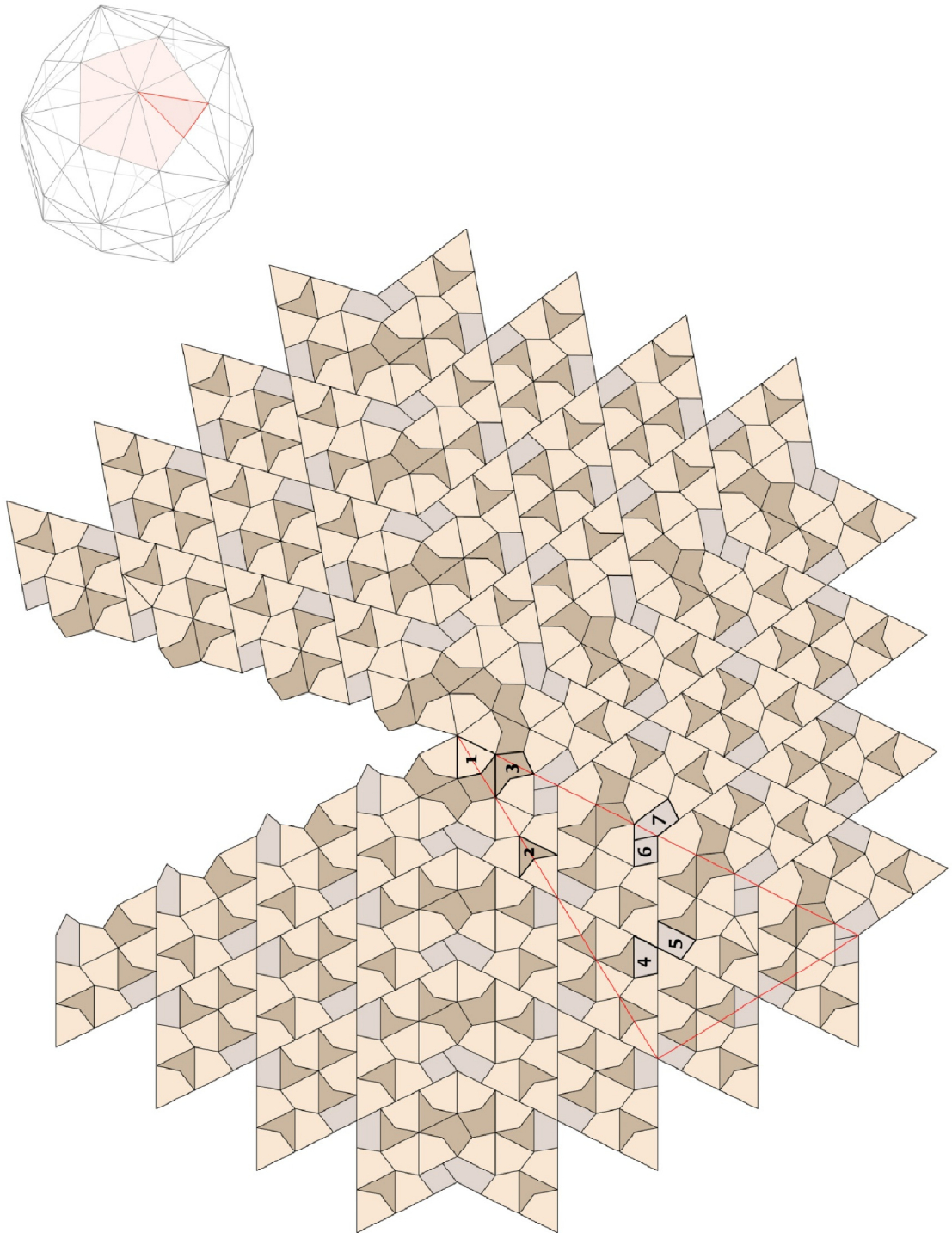
a.



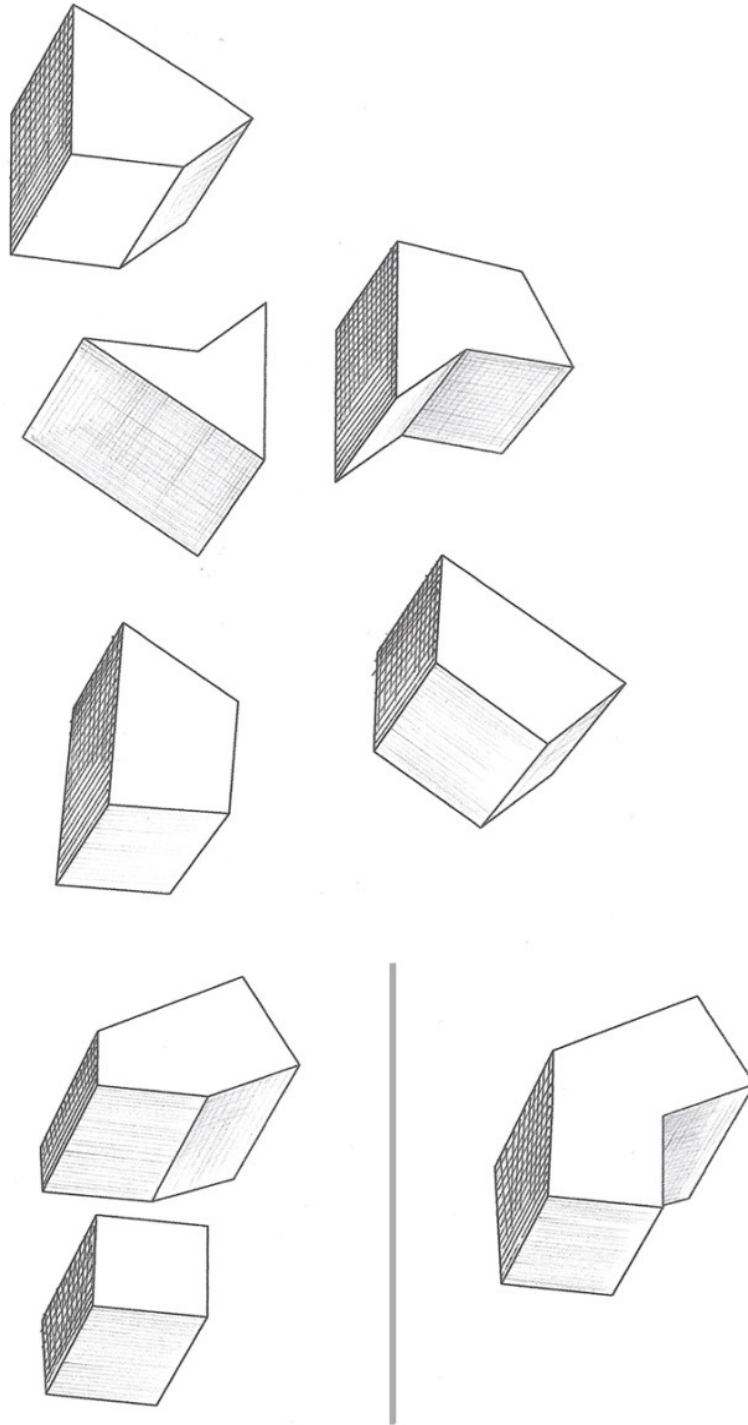
**FIG. 140 (1).** R. Gadaleta, *Disegno planare della tassellazione derivata dalla geometria di Danzer*, disegno infografico eseguito con AutoCAD® 2012 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended



**FIG. 140 (2).** R. Gadaleta, *Disegno planare della tassellazione derivata dalla geometria di Danzer*, disegno infografico eseguito con AutoCAD® 2012 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended

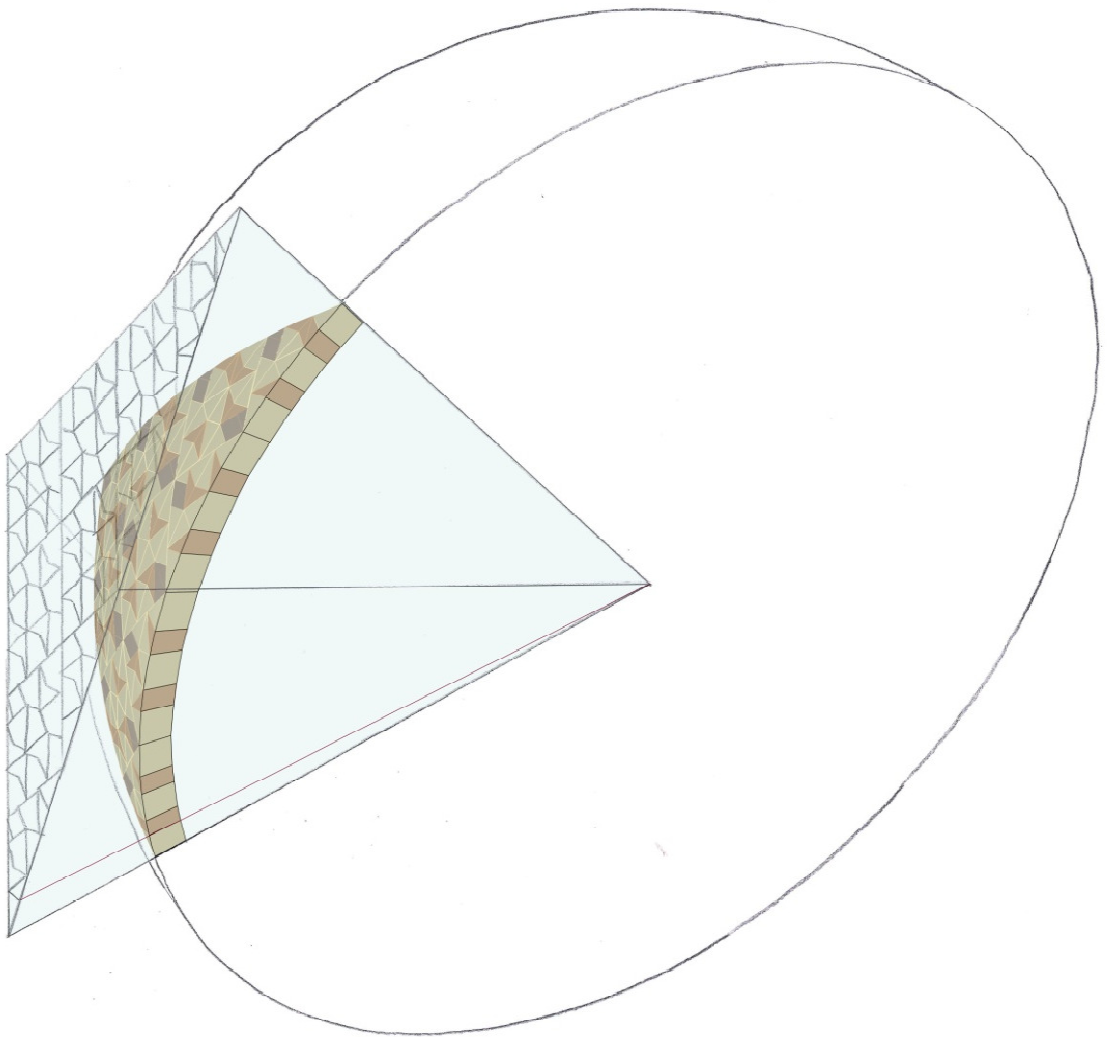
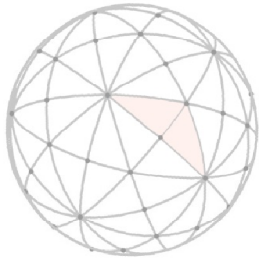


**FIG. 141.** R. Gadaleta, *Configurazione ipotizzata dei conci aventi simile morfologia*, disegno a mano libera

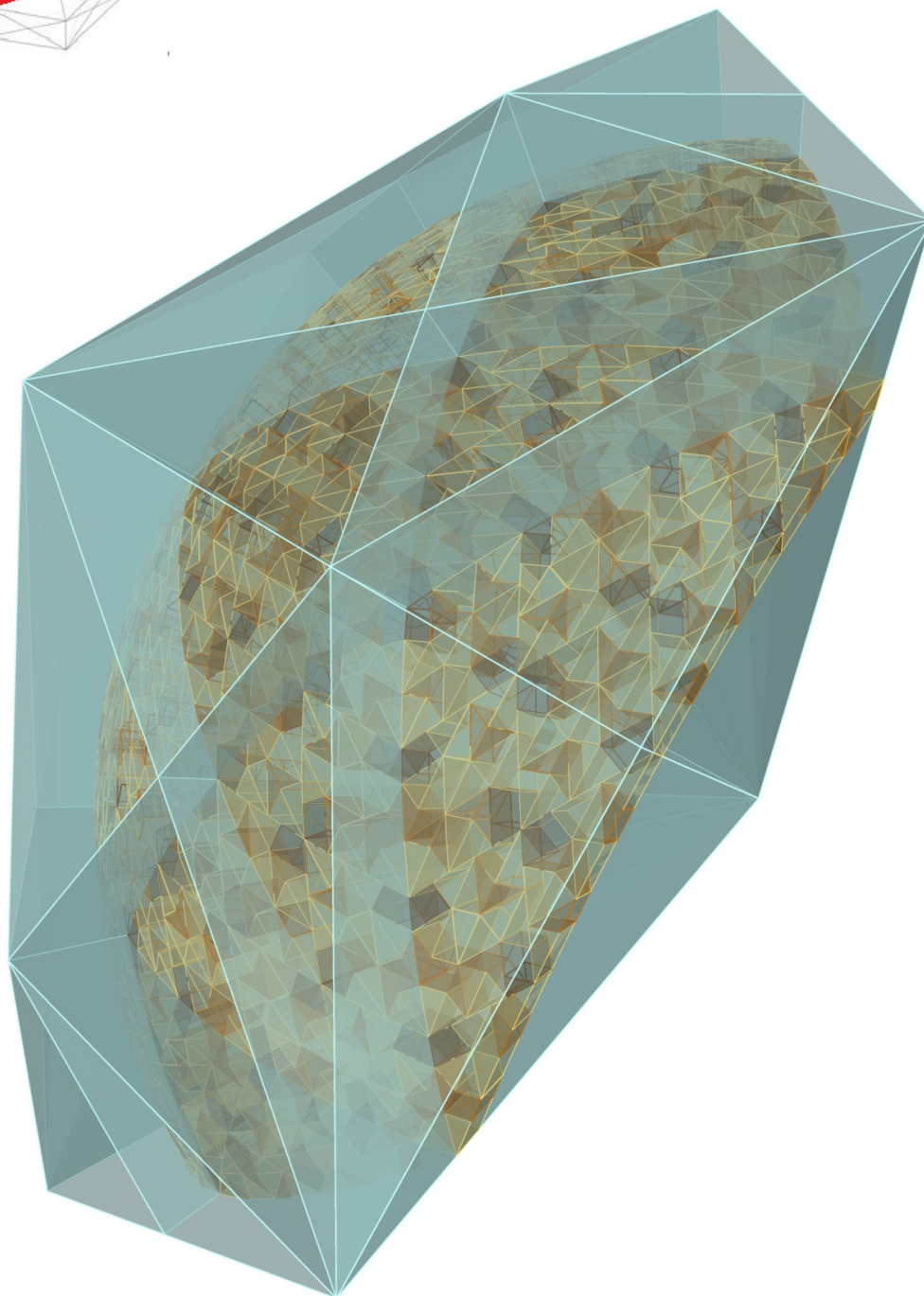
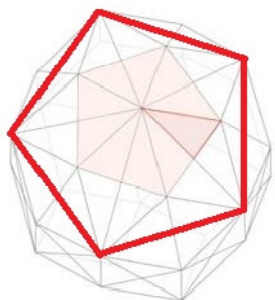




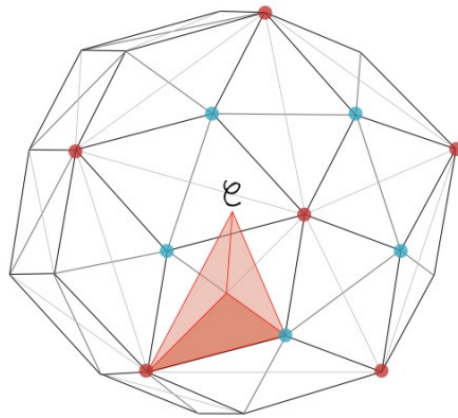
**FIG. 142.** R. Gadaleta, *Dal triangolo minimo del poliedro al corrispondente sferico*, disegno a mano e disegno infografico eseguito con AutoCAD® 2012, sovrapposizione dei disegni e colore ottenuti con Adobe Photoshop® CS5 Extended



**FIG. 143.** R. Gadaleta, *Aggregazione delle piramidi costituite dai tetraedri K, contenenti la corrispondente deformazione topologica sferica*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012

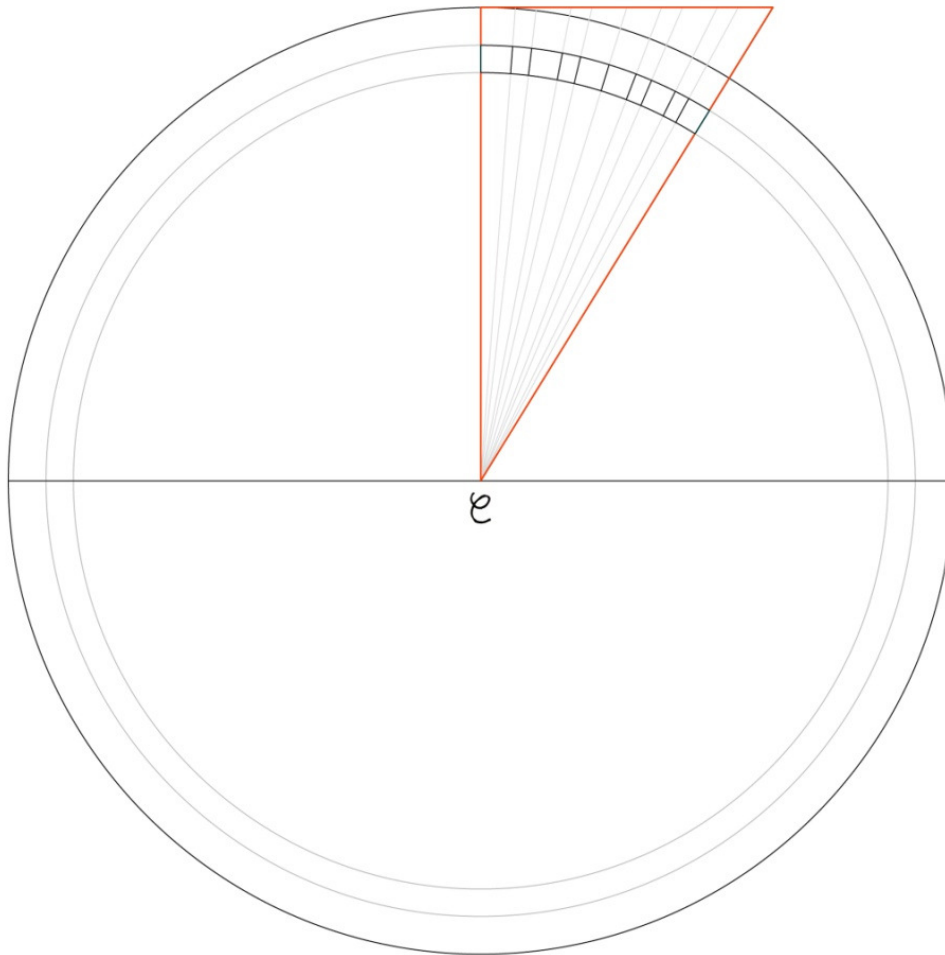


**FIG. 144 (1).** R. Gadaleta, *Proiezioni di suddivisioni di facce poliedriche differenti sulla sfera, originano diversi risultati*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended



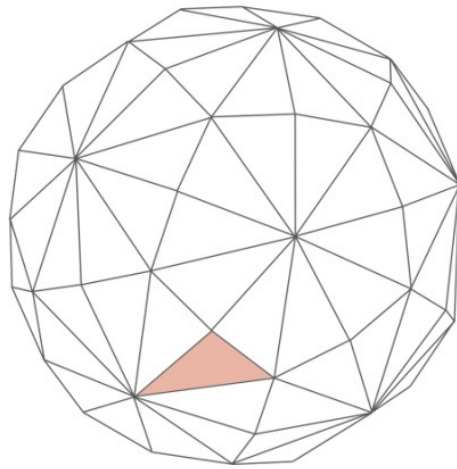
Vertici sfera 1

Vertici sfera 2

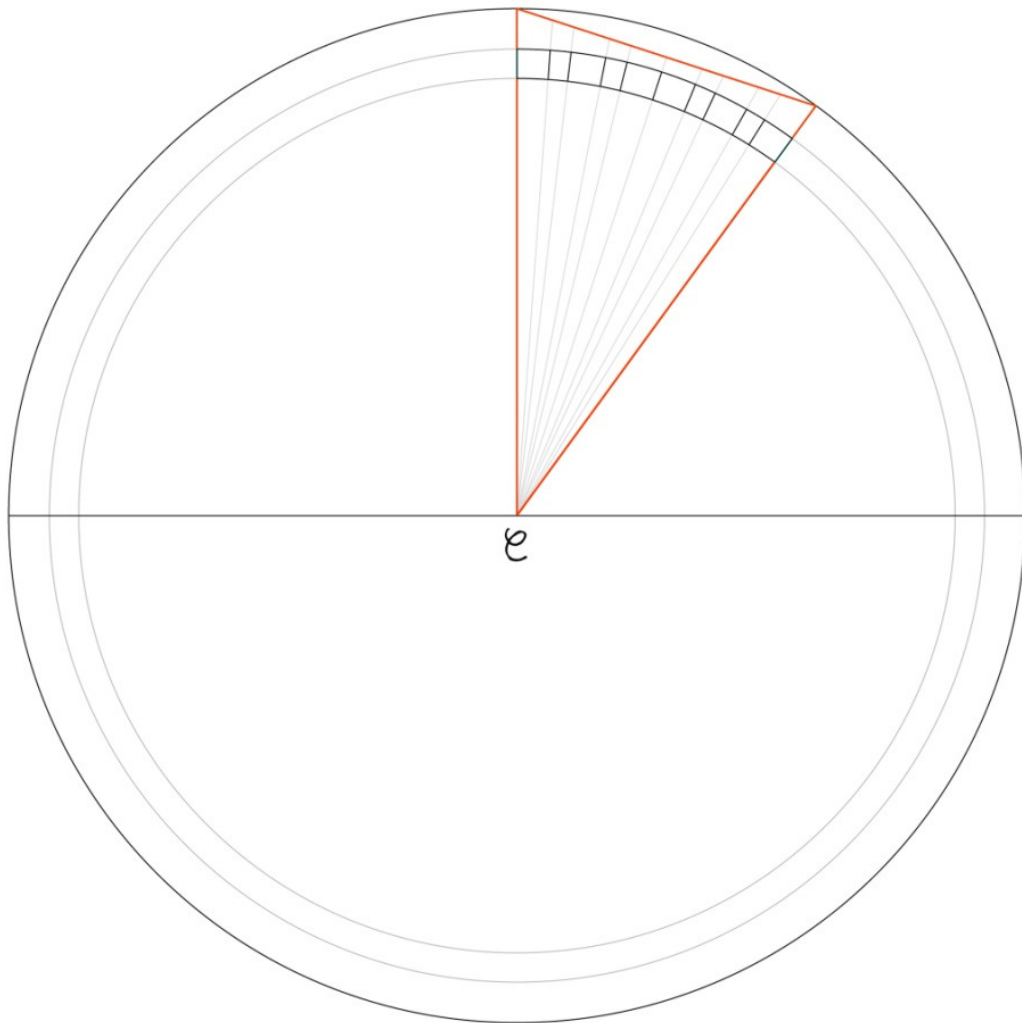


**FIG. 144 (2).** R. Gadaleta, *Proiezioni di suddivisioni di facce poliedriche differenti sulla sfera, originano diversi risultati*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended

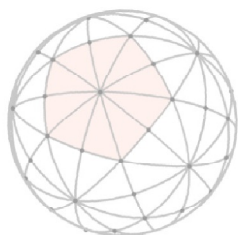




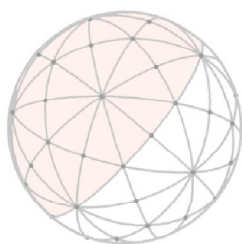
**Tutti i vertici giacciono  
sulla stessa sfera**



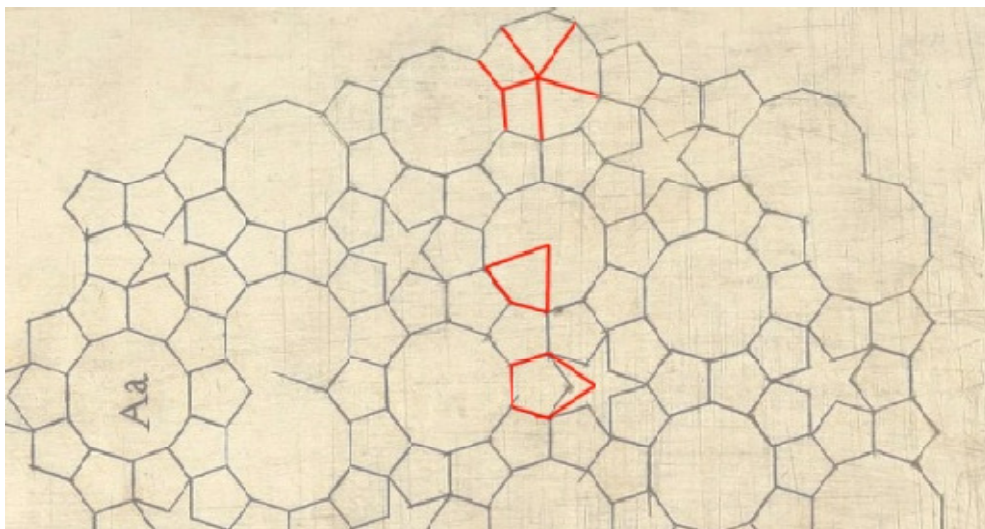
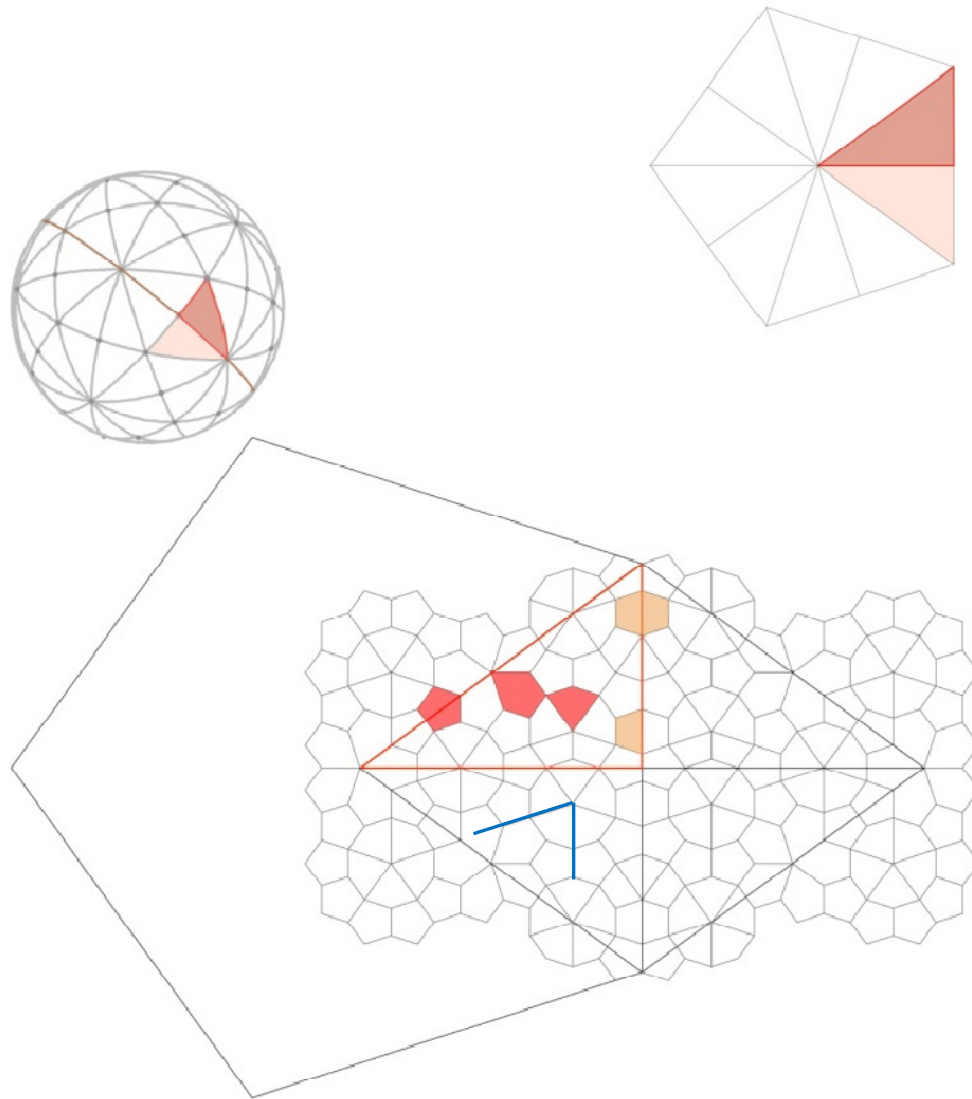
**FIG. 145.** R. Gadaleta, *Suddivisione della sfera in elementi derivati dalla tassellazione di L. Danzer. Calotta pentagonale*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012



**FIG. 146.** R. Gadaleta, *Suddivisione della sfera in elementi derivati dalla tassellazione di L. Danzer. Calotta emisferica*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012

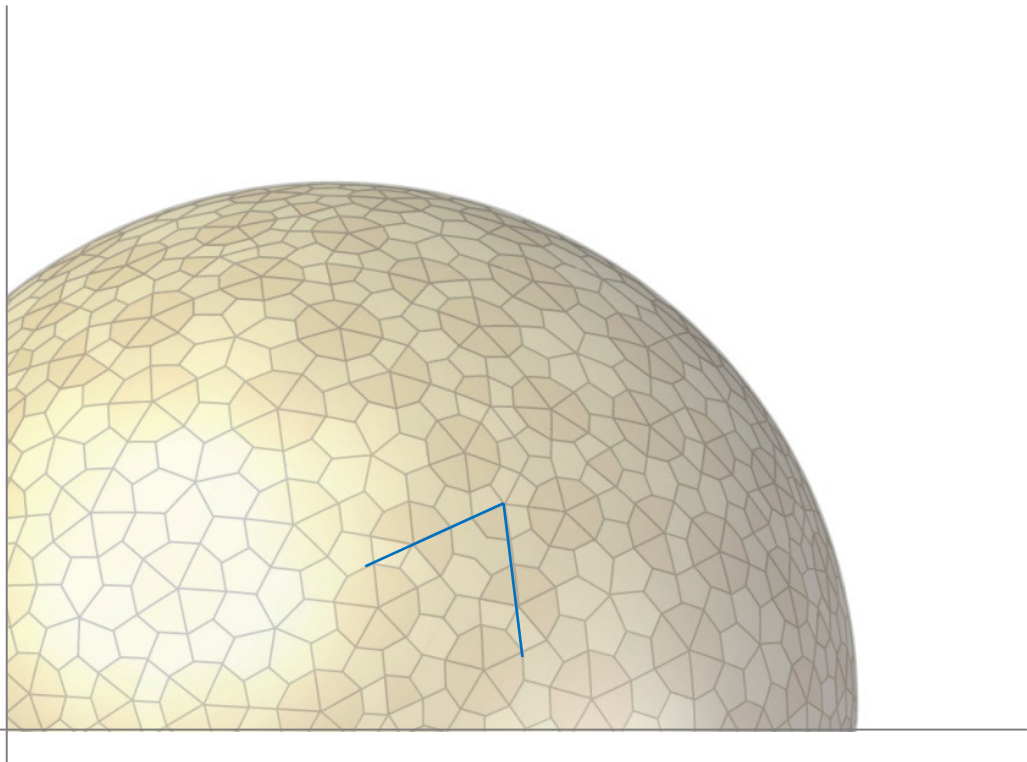
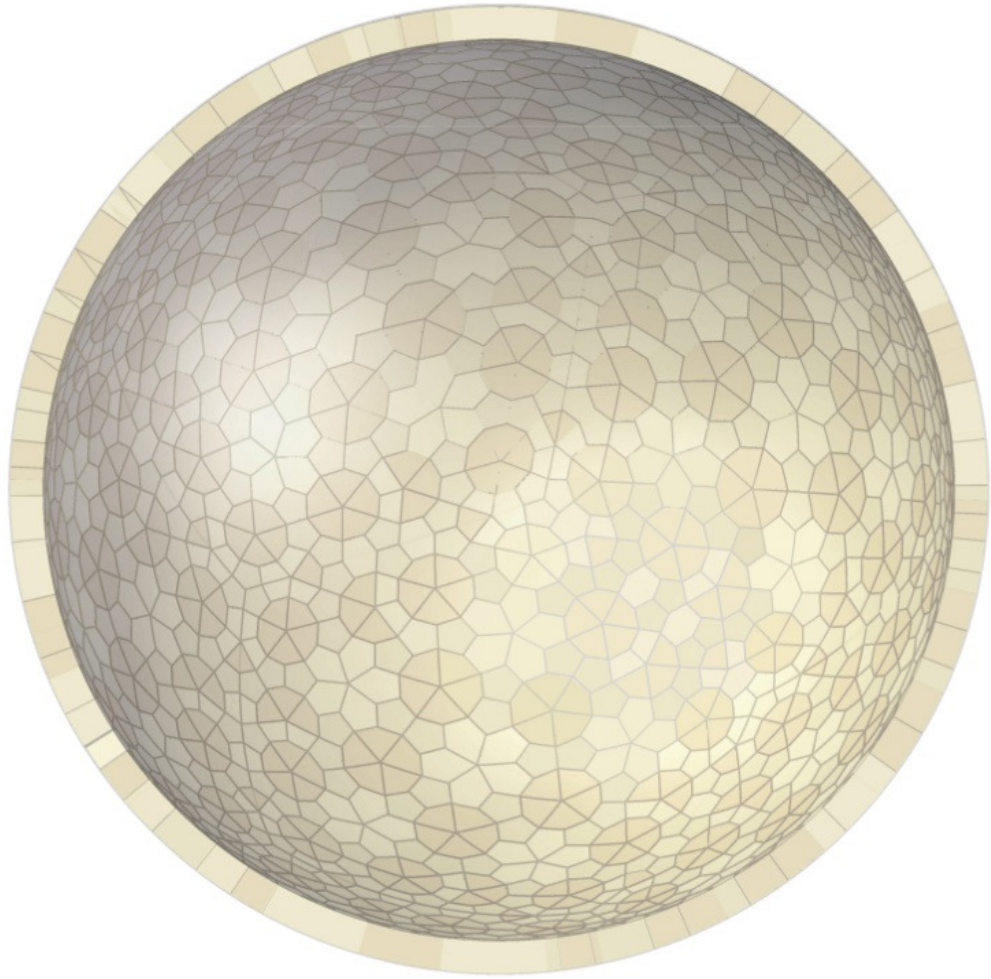


**FIG. 147.** R. Gadaleta, *Studio della tassellazione di Kepler al fine di dedurne gli elementi costruttivi*, disegni infografici bidimensionali e tridimensionali eseguiti con AutoCAD® 2012 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended

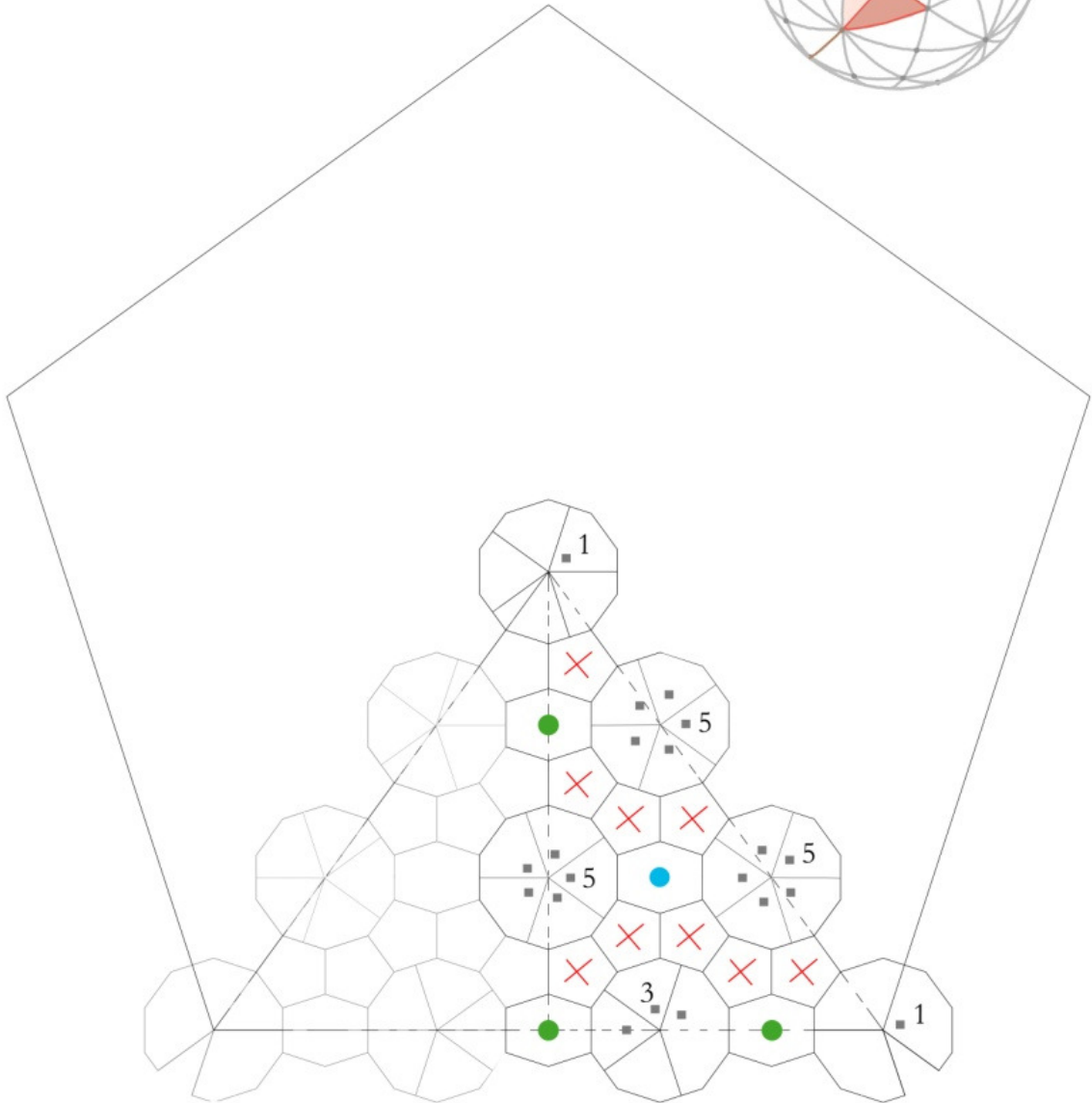
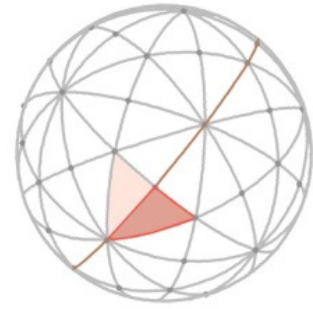




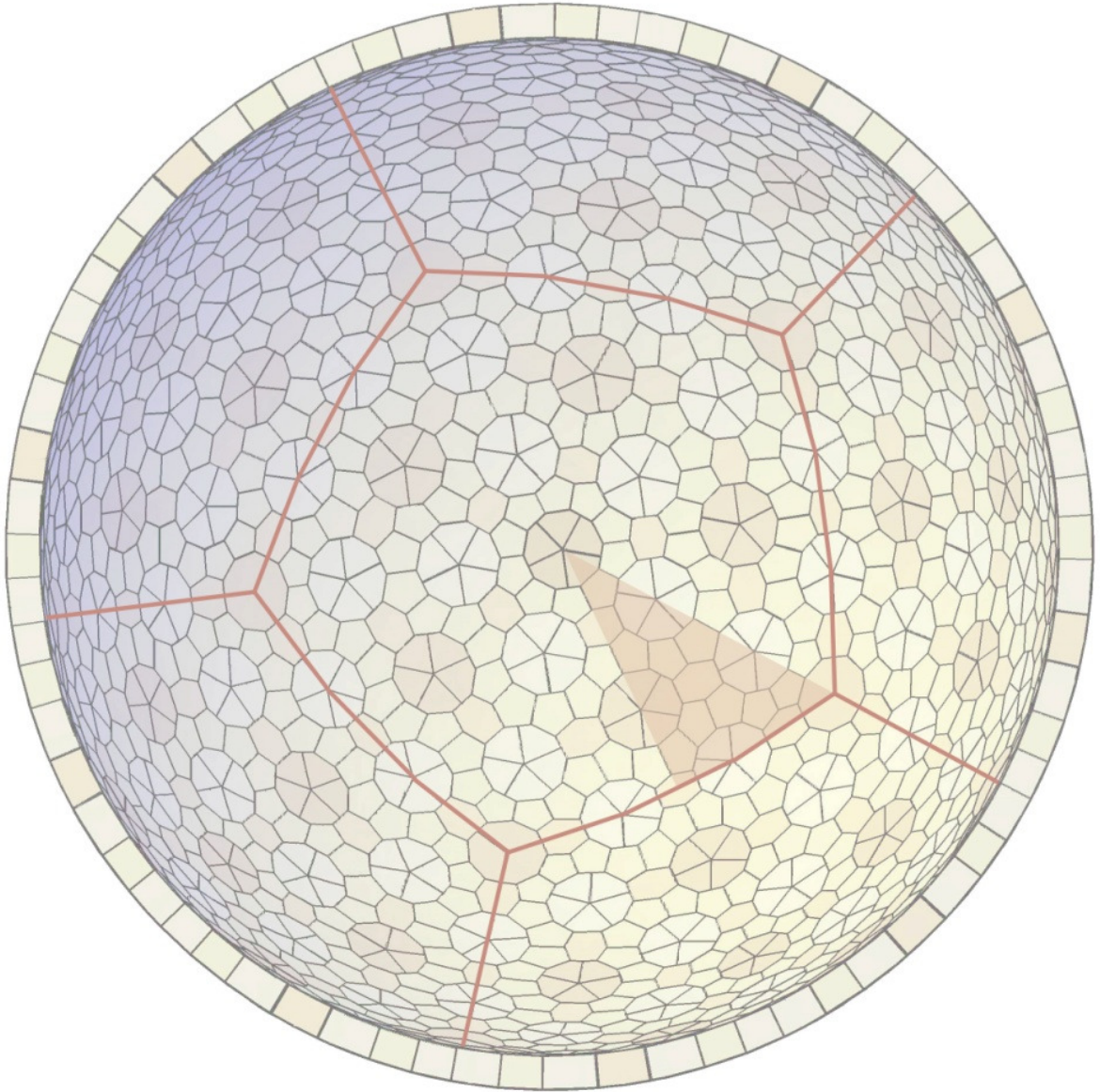
**FIG. 148.** R. Gadaleta, *Modello di studio dell'apparecchiatura emisferica*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended



**FIG. 149.** R. Gadaleta, *Divisione del triangolo minimo con diversa tassellazione derivata dalla Aa di Kepler*, disegno infografico bidimensionale e tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended

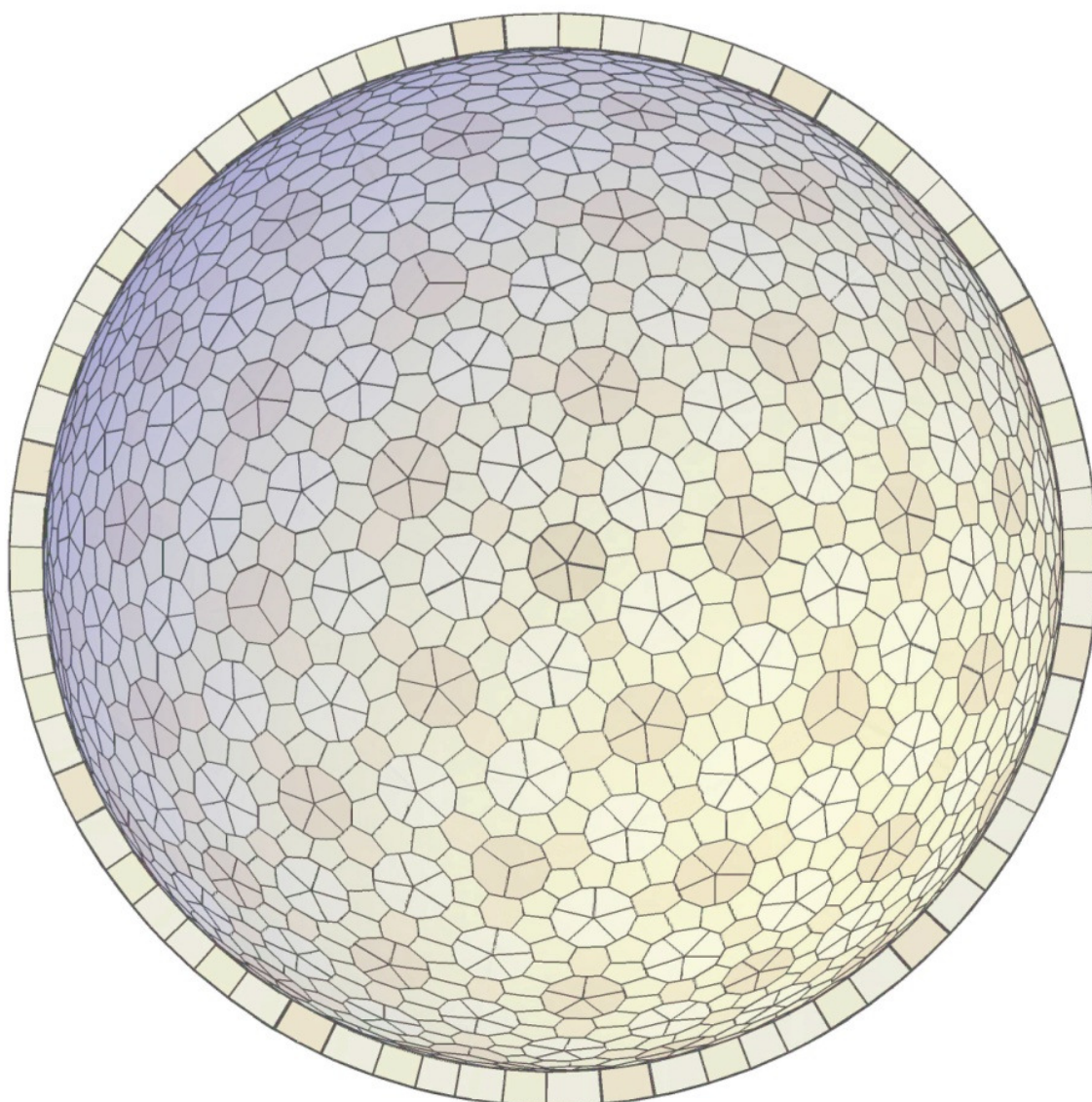


**FIG. 150.** R. Gadaleta, *Derivazione geometrica dell'apparecchiatura nella cupola emisferica*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012 e geometria evidenziata con Adobe Photoshop® CS5 Extended

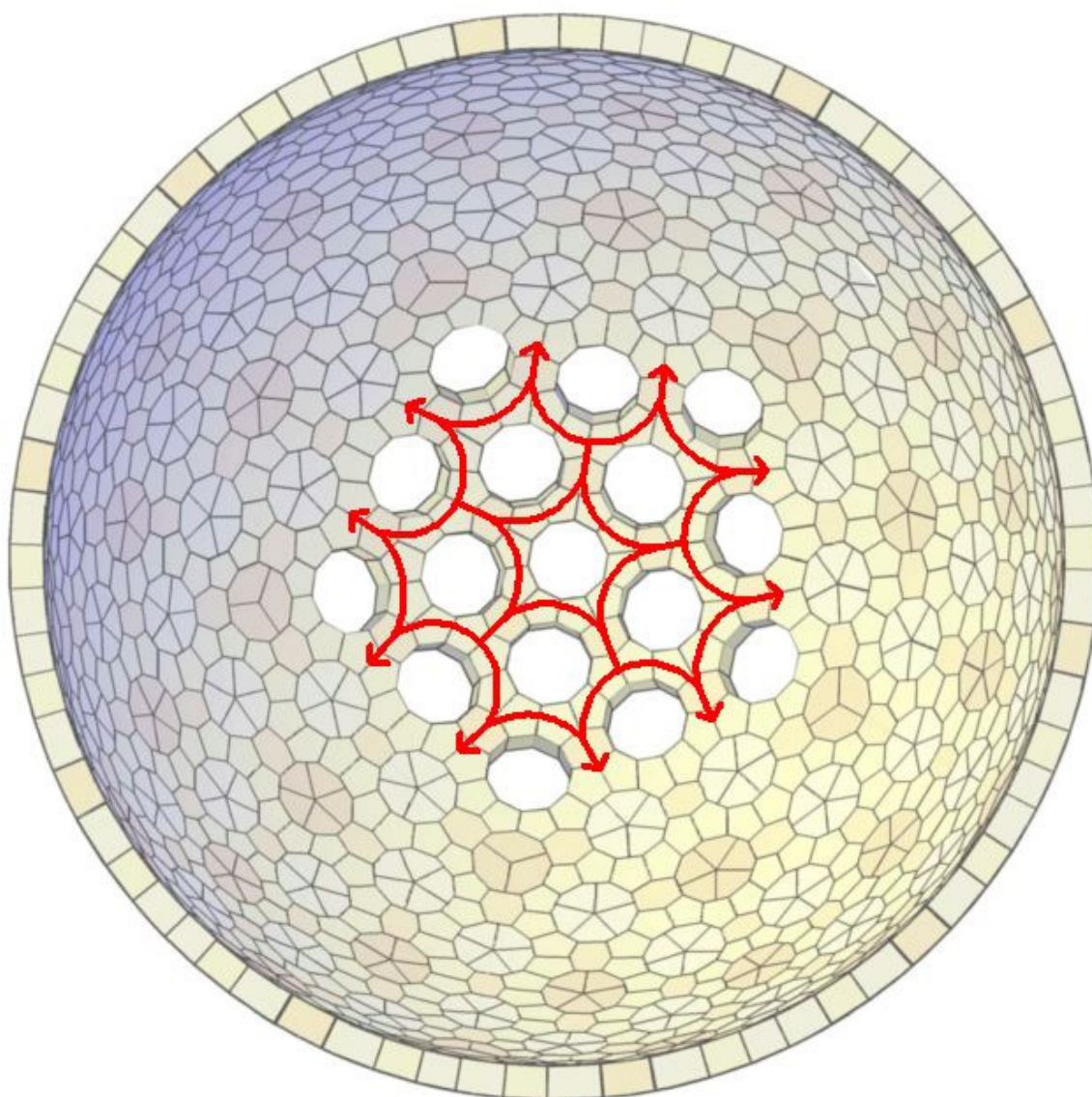


**FIG. 151.** R. Gadaleta, *Modello di studio dell'apparecchiatura nella cupola emisferica*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012



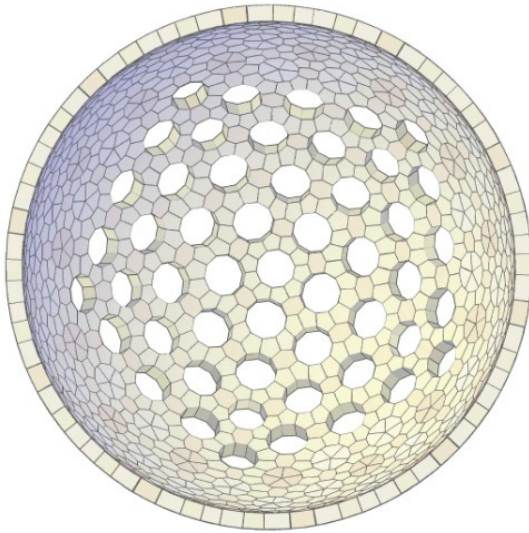
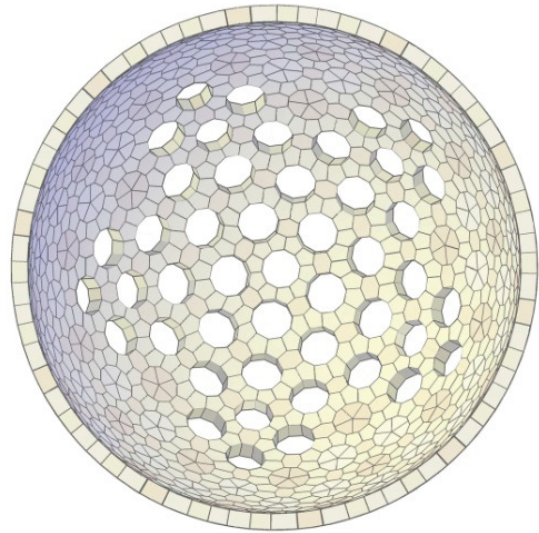
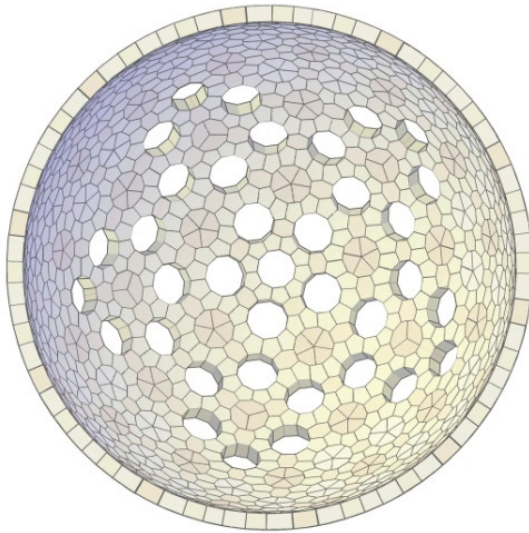
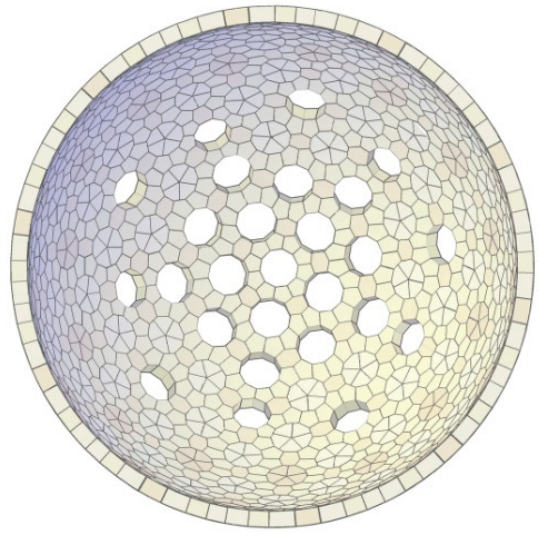
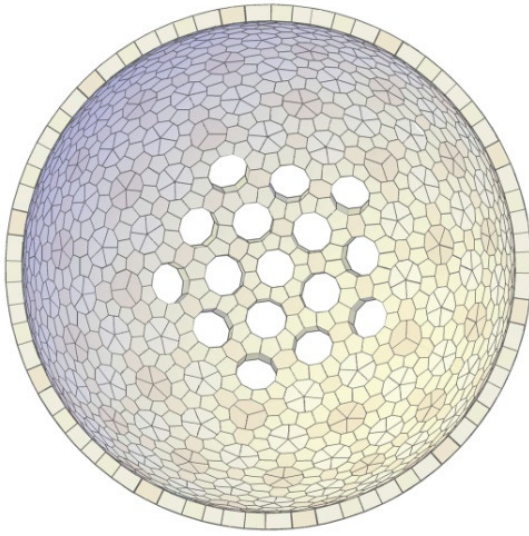


**FIG. 152.** R. Gadaleta, *Distribuzione statica delle forze all'interno dell'apparecchiatura per "archi di scarico", che offre la possibilità di effettuare opportune bucatore*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012

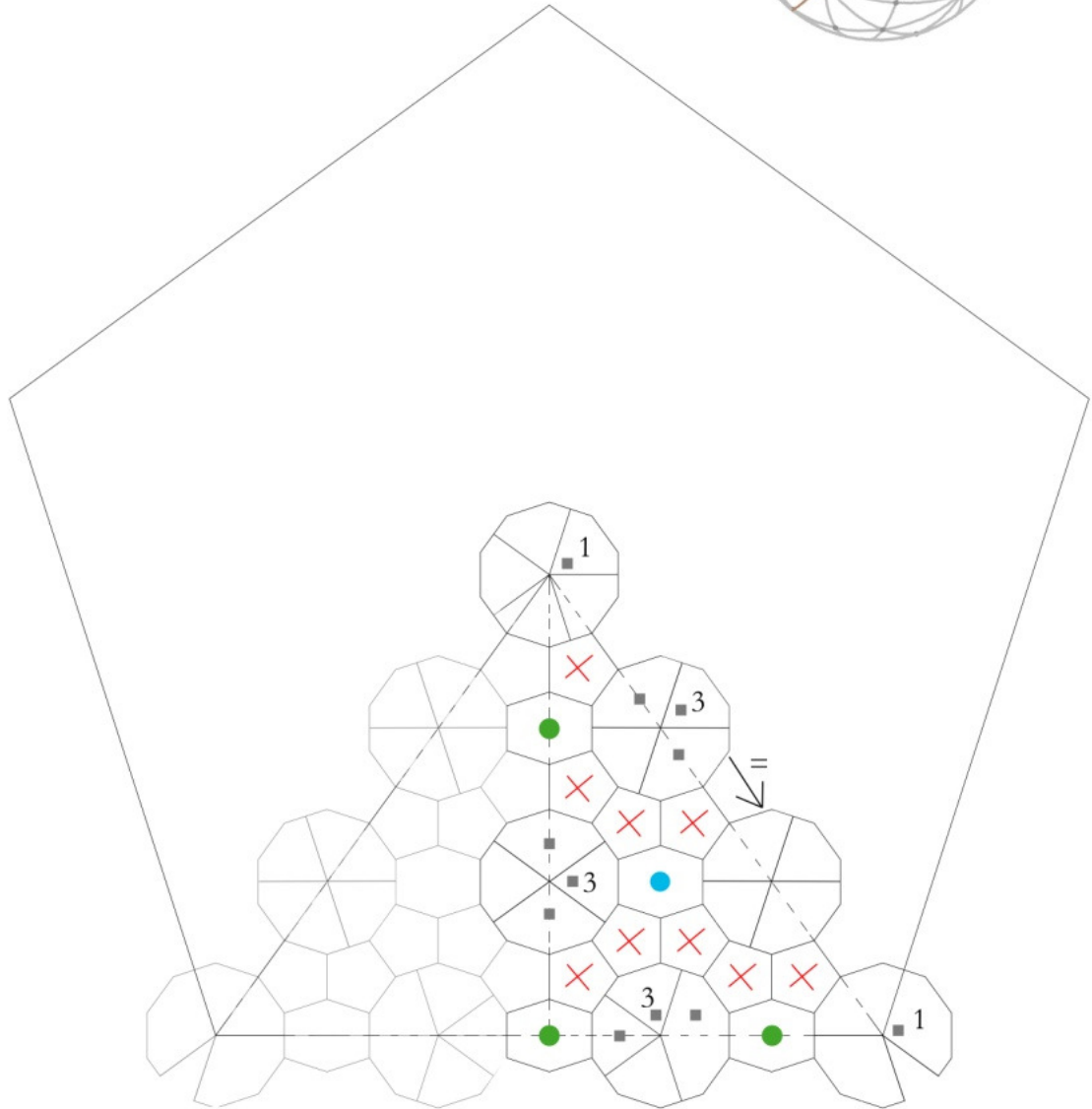
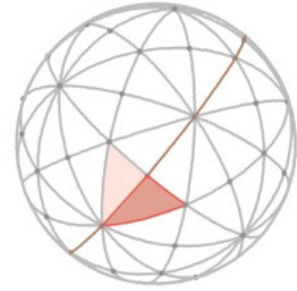


**FIG. 153.** R. Gadaleta, *Studio delle bucatore nella cupola emisferica*,  
disegni infografici tridimensionali eseguiti con AutoCAD® 2012



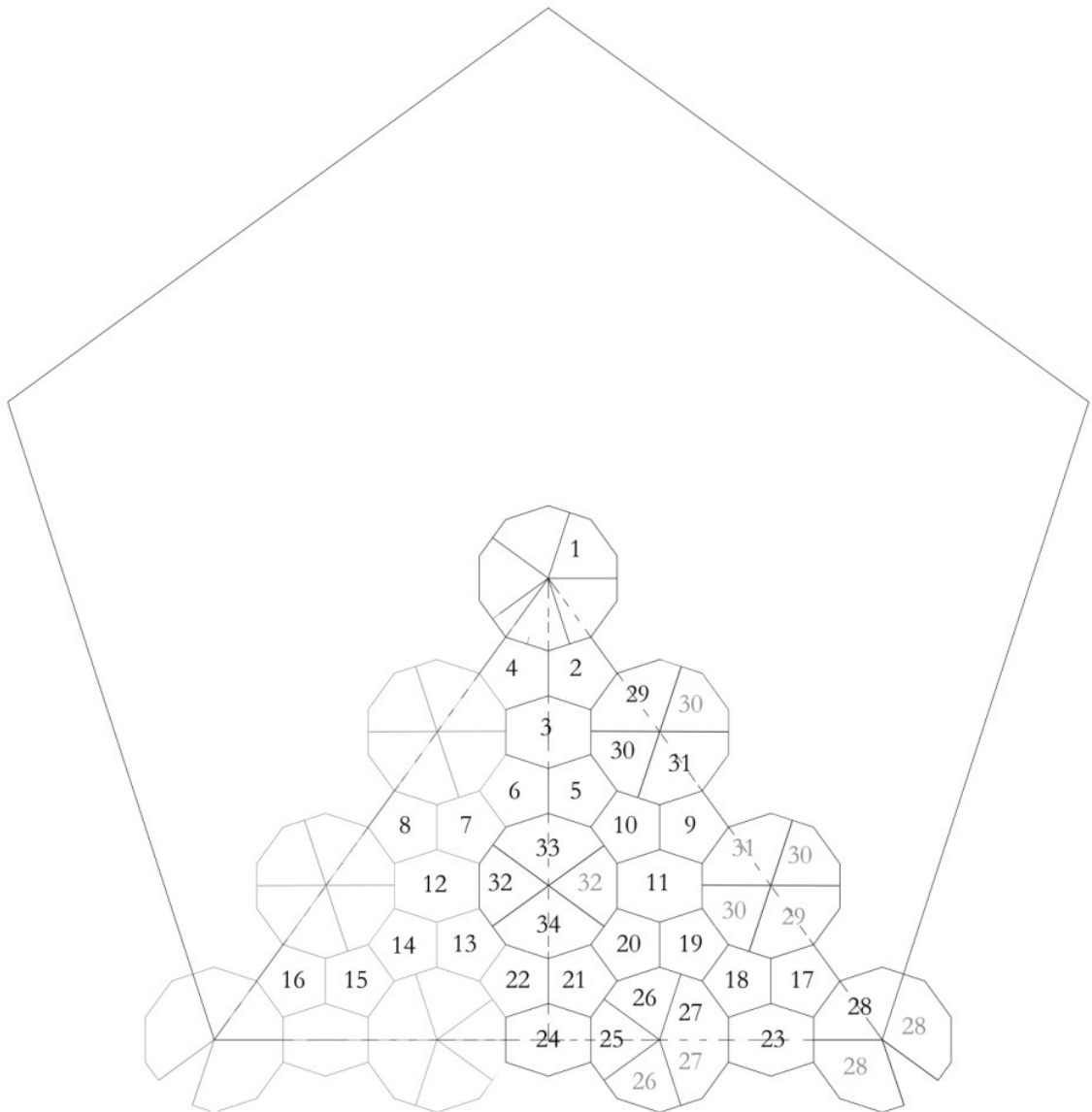


**FIG. 154.** R. Gadaleta, *Divisione del triangolo minimo con seconda diversa tassellazione derivata dalla Aa di Kepler*, disegno infografico bidimensionale e tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended

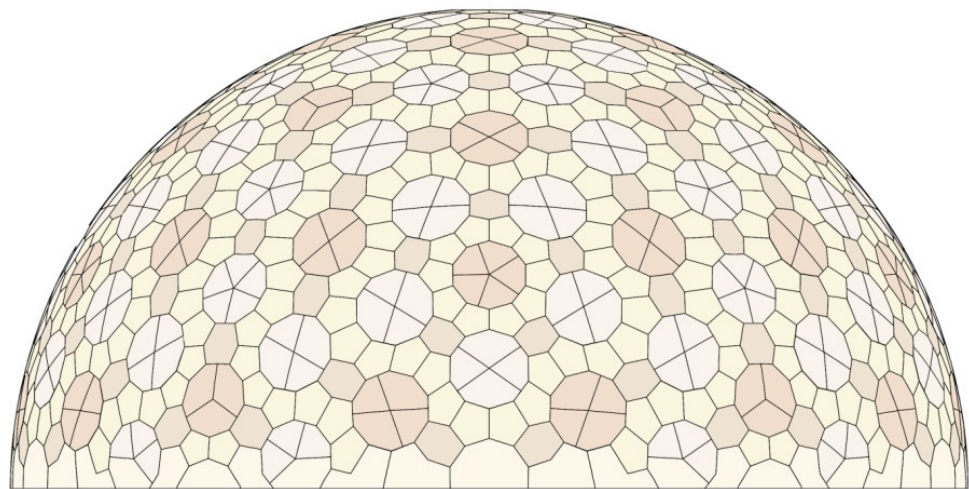
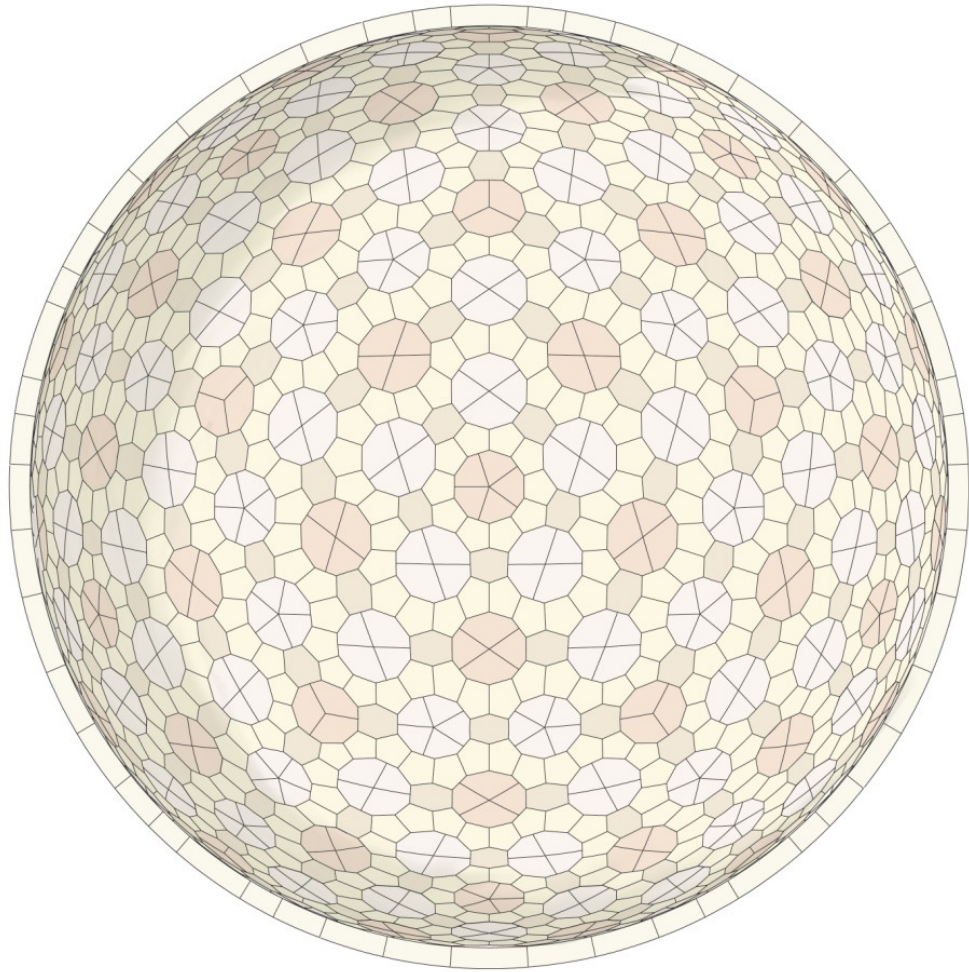




**FIG. 155.** R. Gadaleta, *Numerazione dei conci-tipo invarianti*, disegno infografico eseguito con AutoCAD® 2012 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended

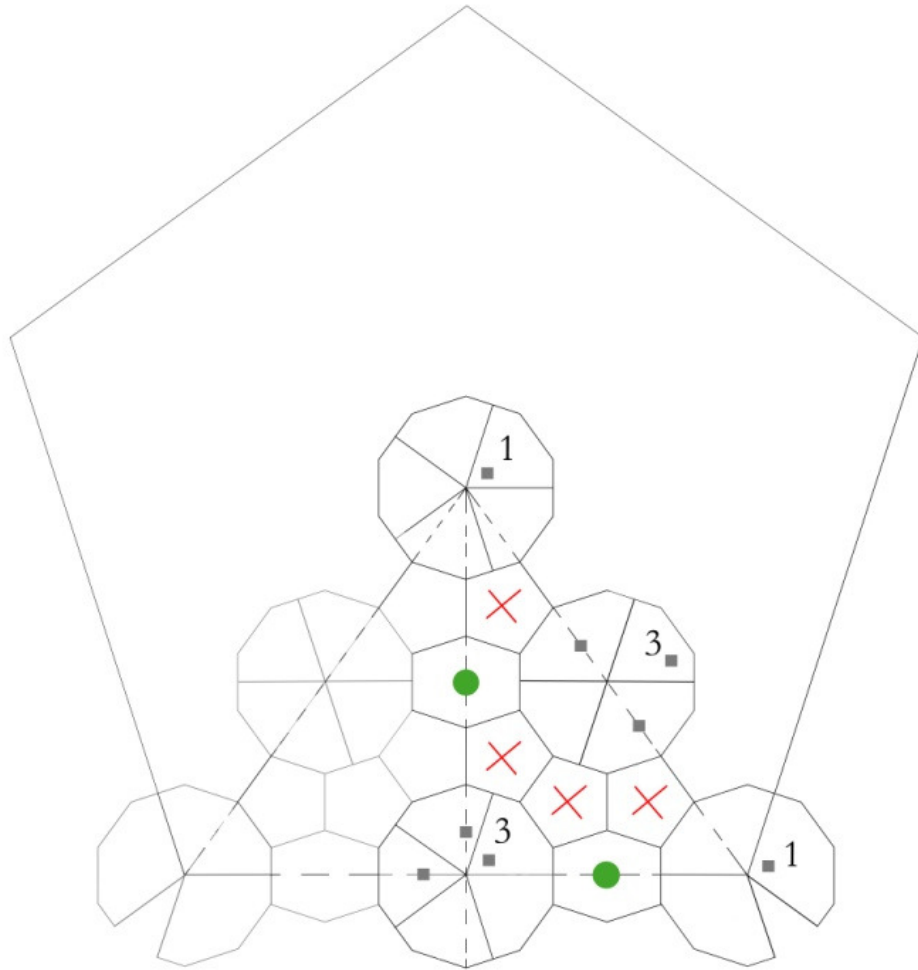


**FIG. 156.** R. Gadaleta, *Modello di studio della seconda apparecchiatura nella cupola emisferica*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012, Rhinoceros® 5.0 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended



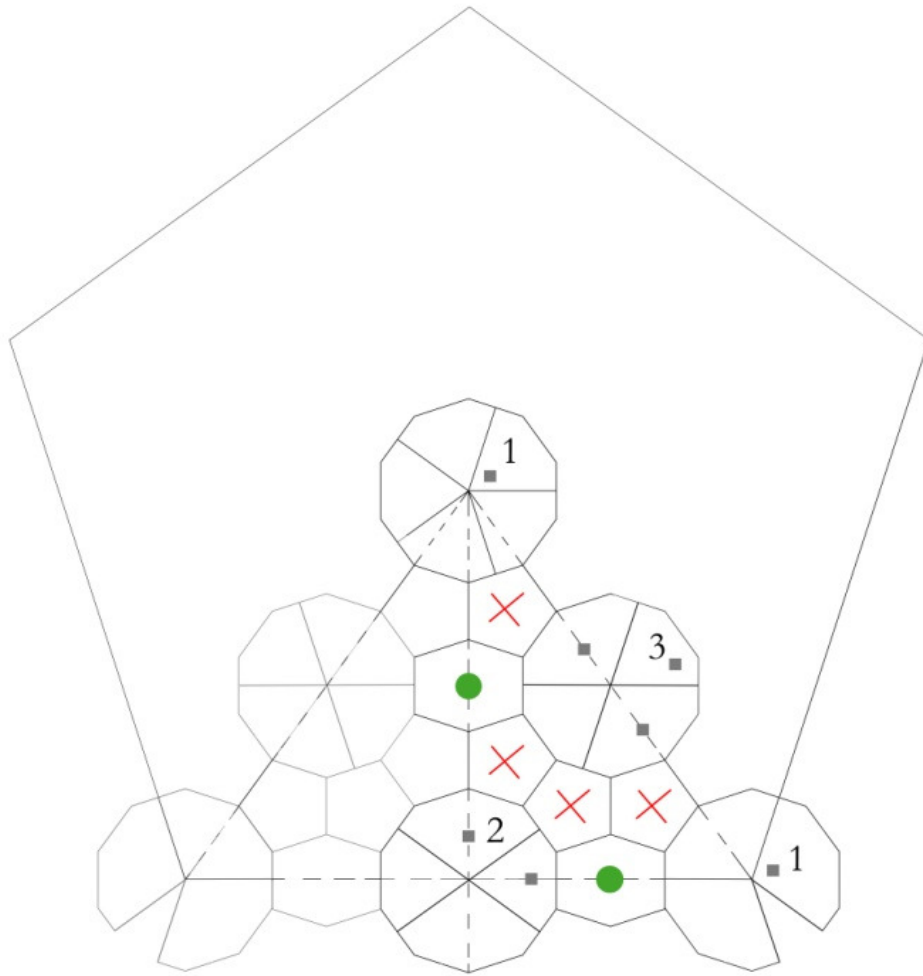
10,06 m

**FIG. 157.** R. Gadaleta, *Divisione A del triangolo minimo nella cupola di minor diametro*, disegno infografico eseguito con AutoCAD® 2012 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended

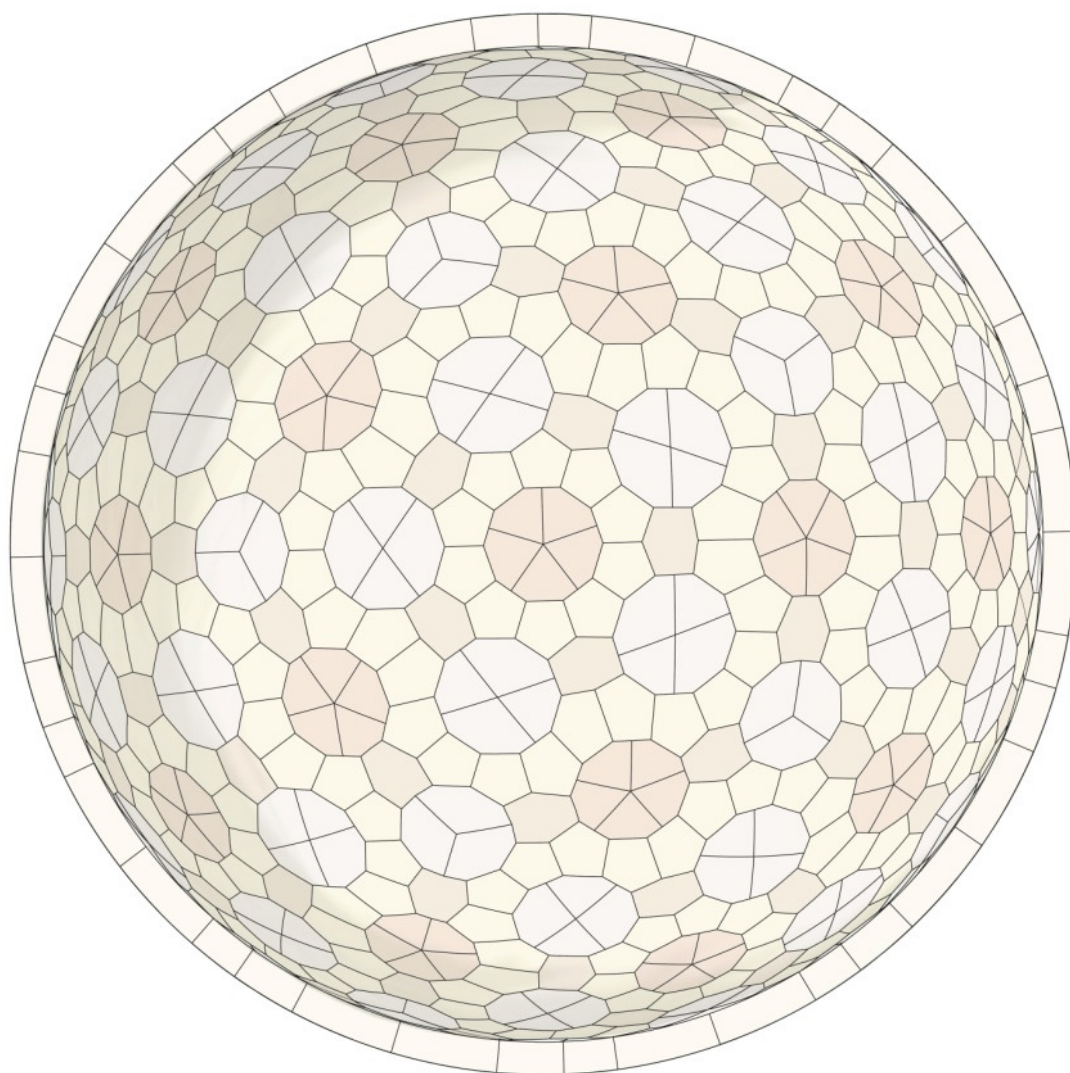


**FIG. 158.** R. Gadaleta, *Divisione B del triangolo minimo nella cupola di minor diametro*, disegno infografico eseguito con AutoCAD® 2012 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended



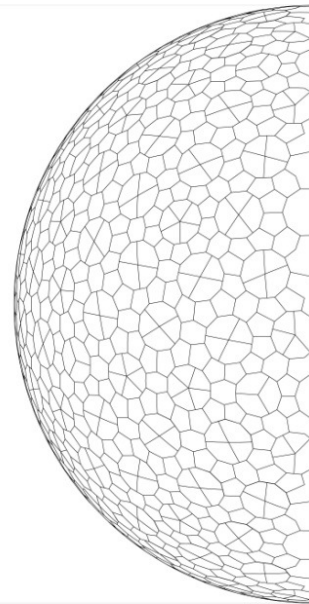
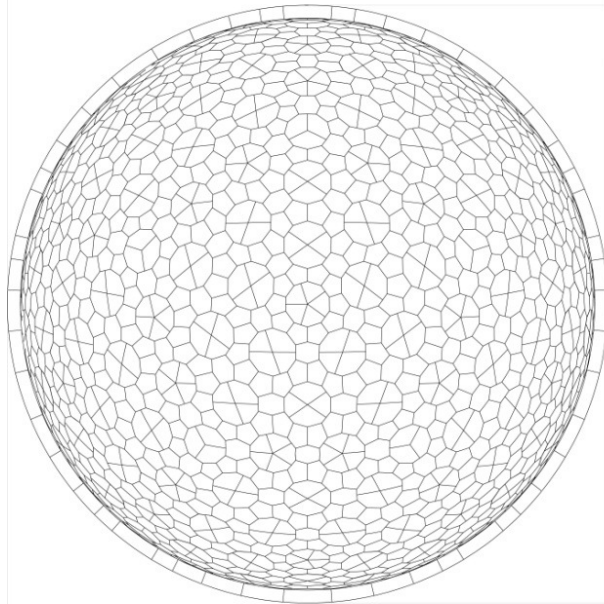
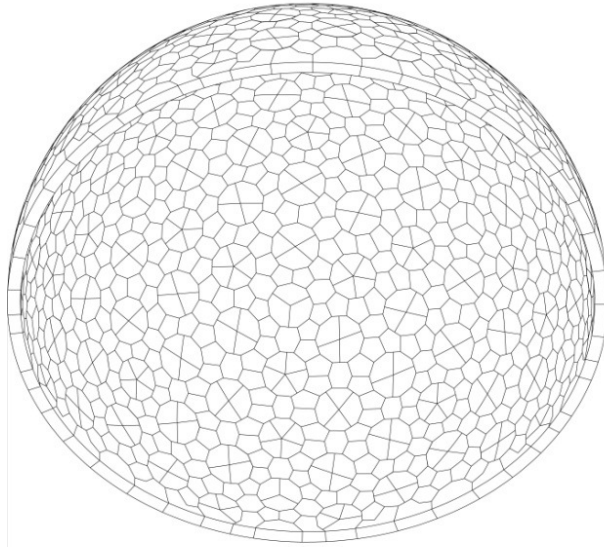


**FIG. 159.** R. Gadaleta, *Modello di studio della cupola di minor diametro*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012, Rhinoceros® 5.0 e colorato con Adobe Photoshop® CS5 Extended

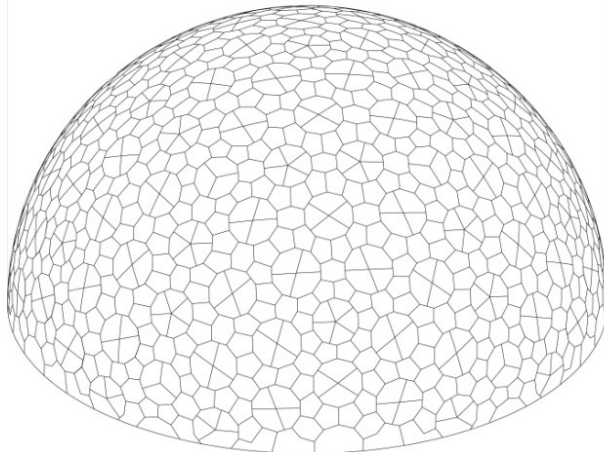


7,12 m

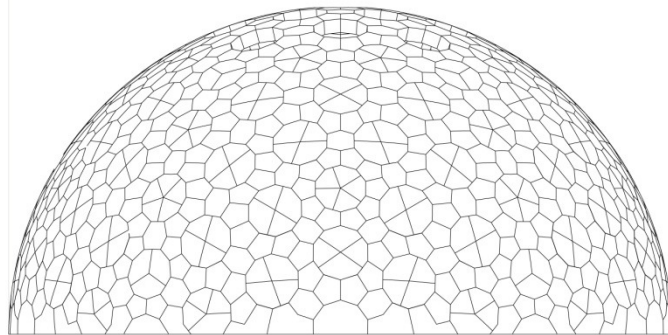
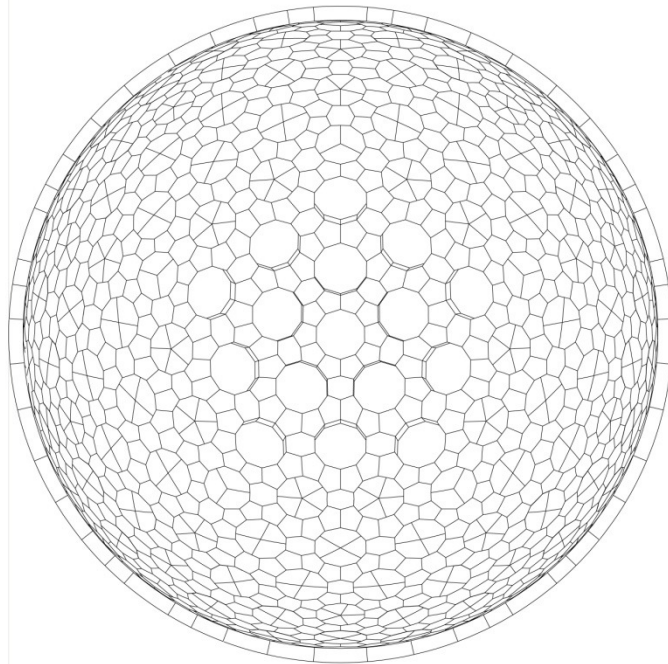
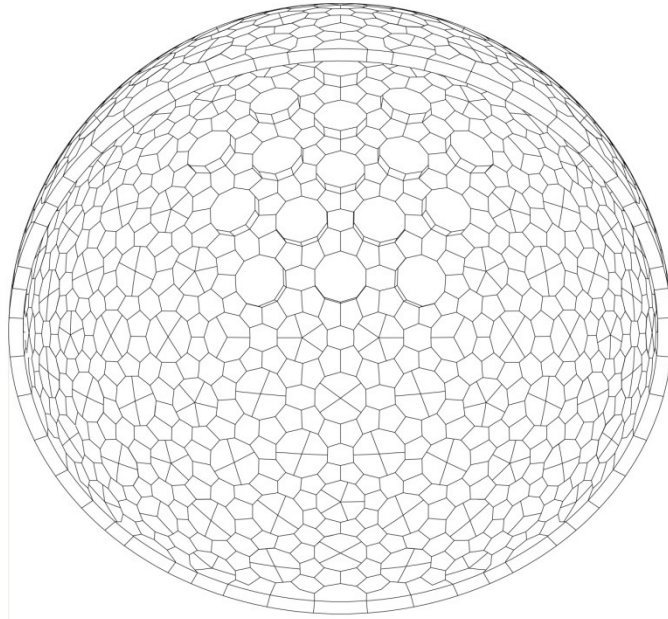
**FIG. 160.** R. Gadaleta, *Modello della cupola per la realizzazione della maquette*, disegno infografico eseguito con AutoCAD® 2012 e Rhinoceros® 5.0



10,06 m



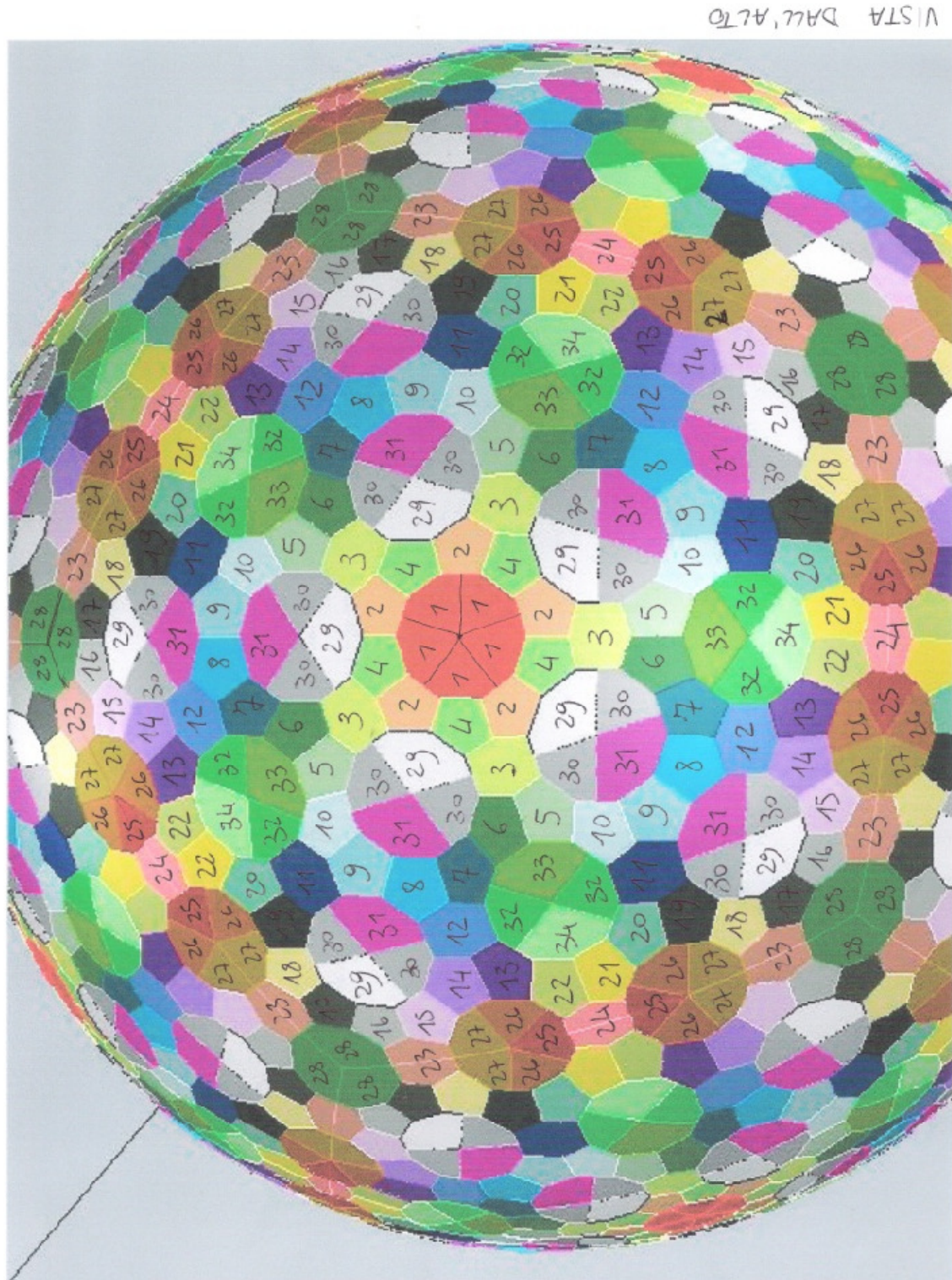
**FIG. 161.** R. Gadaleta, *Modello della cupola con bucatore per la realizzazione della maquette*, disegno infografico eseguito con AutoCAD® 2012 e Rhinoceros® 5.0



10,06 m



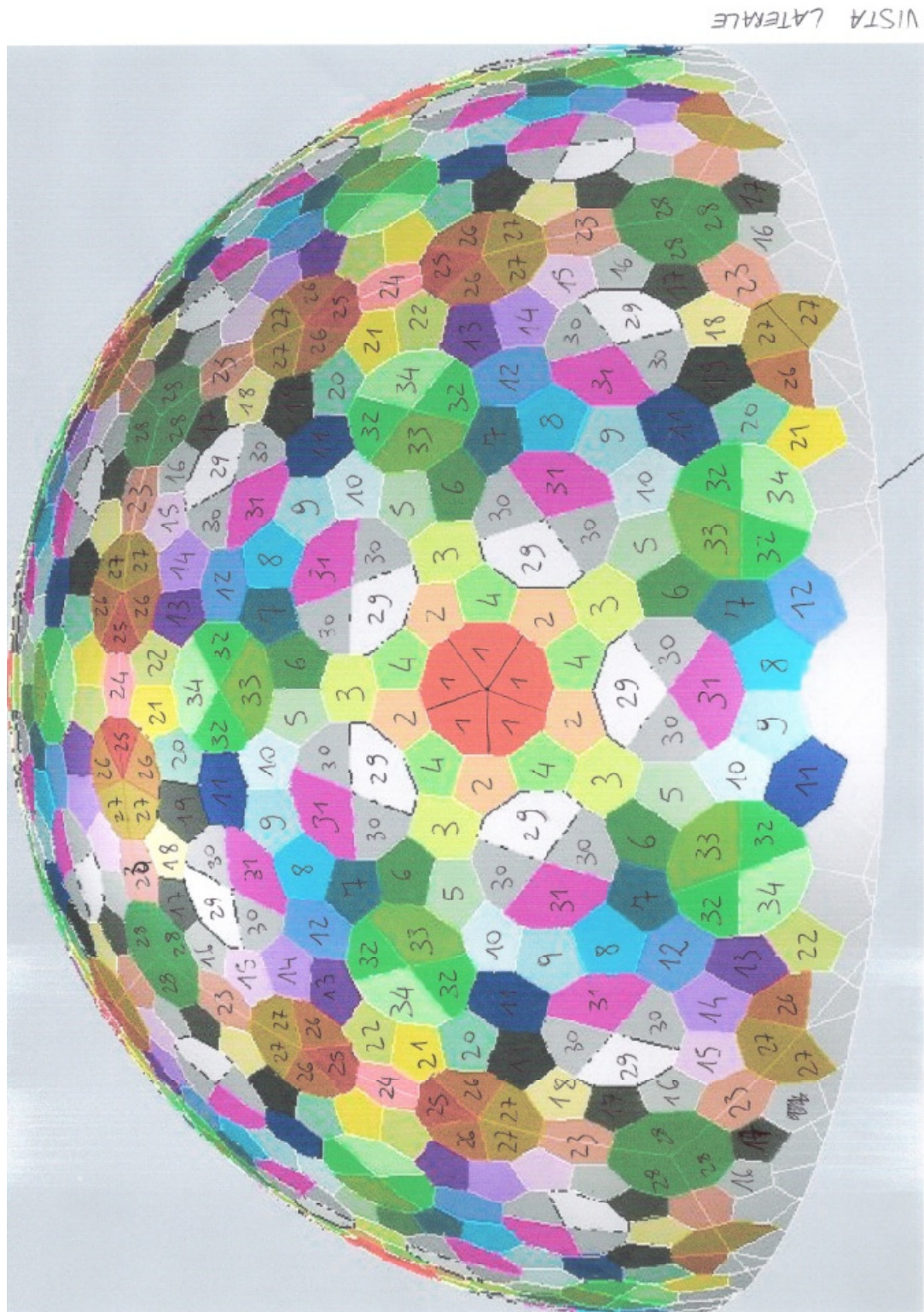
**FIG. 162.** R. Gadaleta, *Schema a colori per il montaggio della maquette, vista dall'alto*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012 e Rhinoceros® 5.0



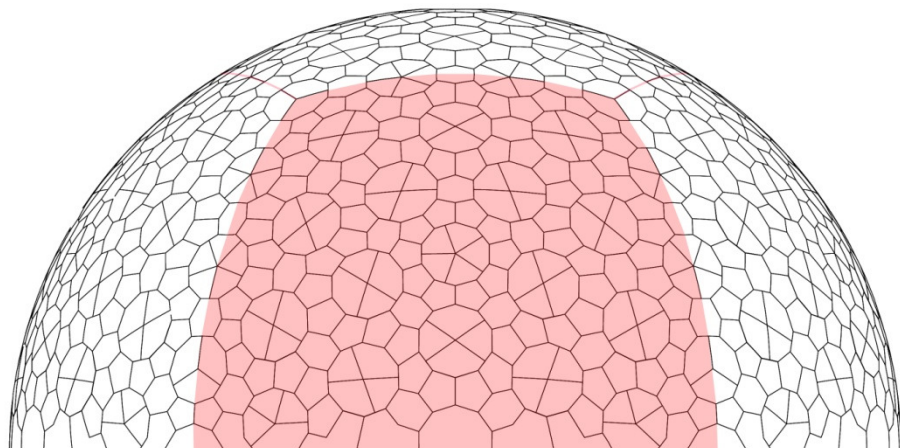
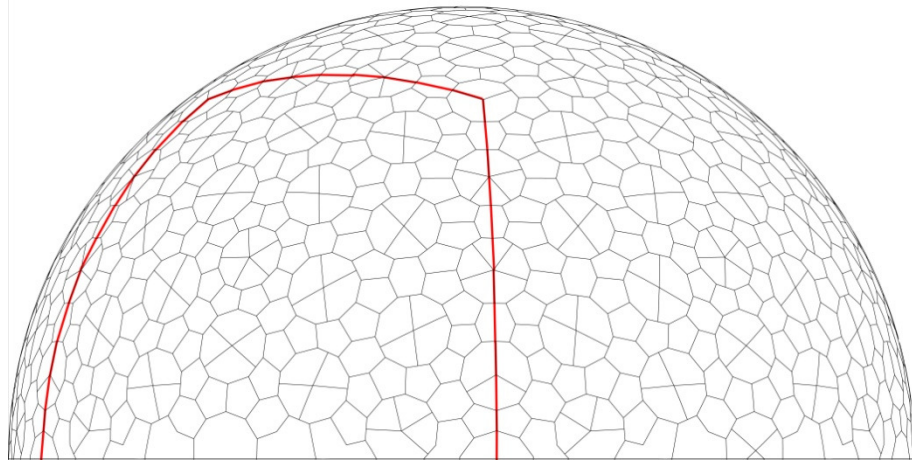
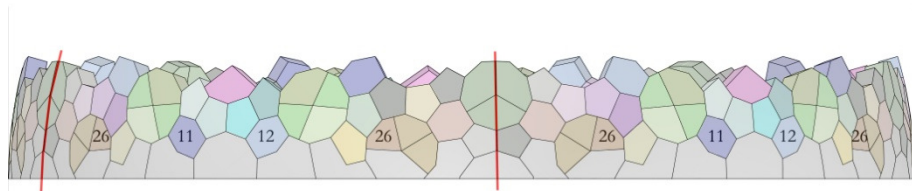
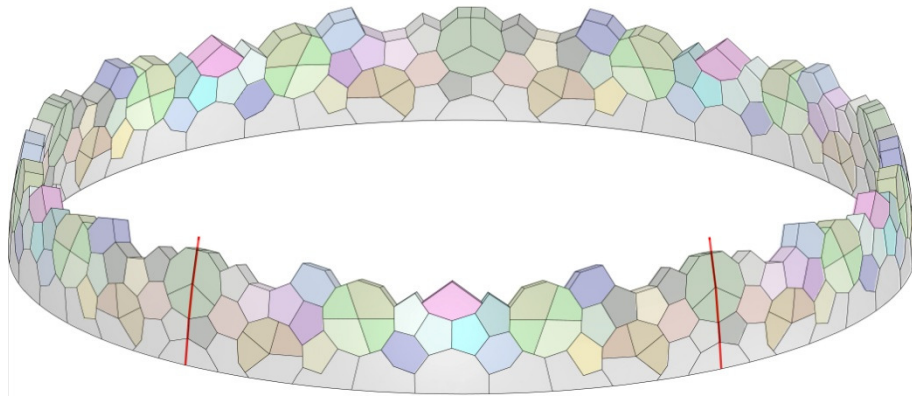
VISTA DALL'ALTO

**FIG. 163.** R. Gadaleta, *Schema a colori per il montaggio della maquette, vista laterale*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012 e Rhinoceros® 5.0





**FIG. 164.** R. Gadaleta, *Montaggio della maquette individuando la ripetizione dei conci tipo-invarianti*, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012 e Rhinoceros® 5.0



**FIG. 165.** R. Gadaleta, *Schema geometrico e di montaggio*, i conci uguali sono contrassegnati da colori uguali, disegno infografico tridimensionale eseguito con AutoCAD® 2012 e Rhinoceros® 5.0



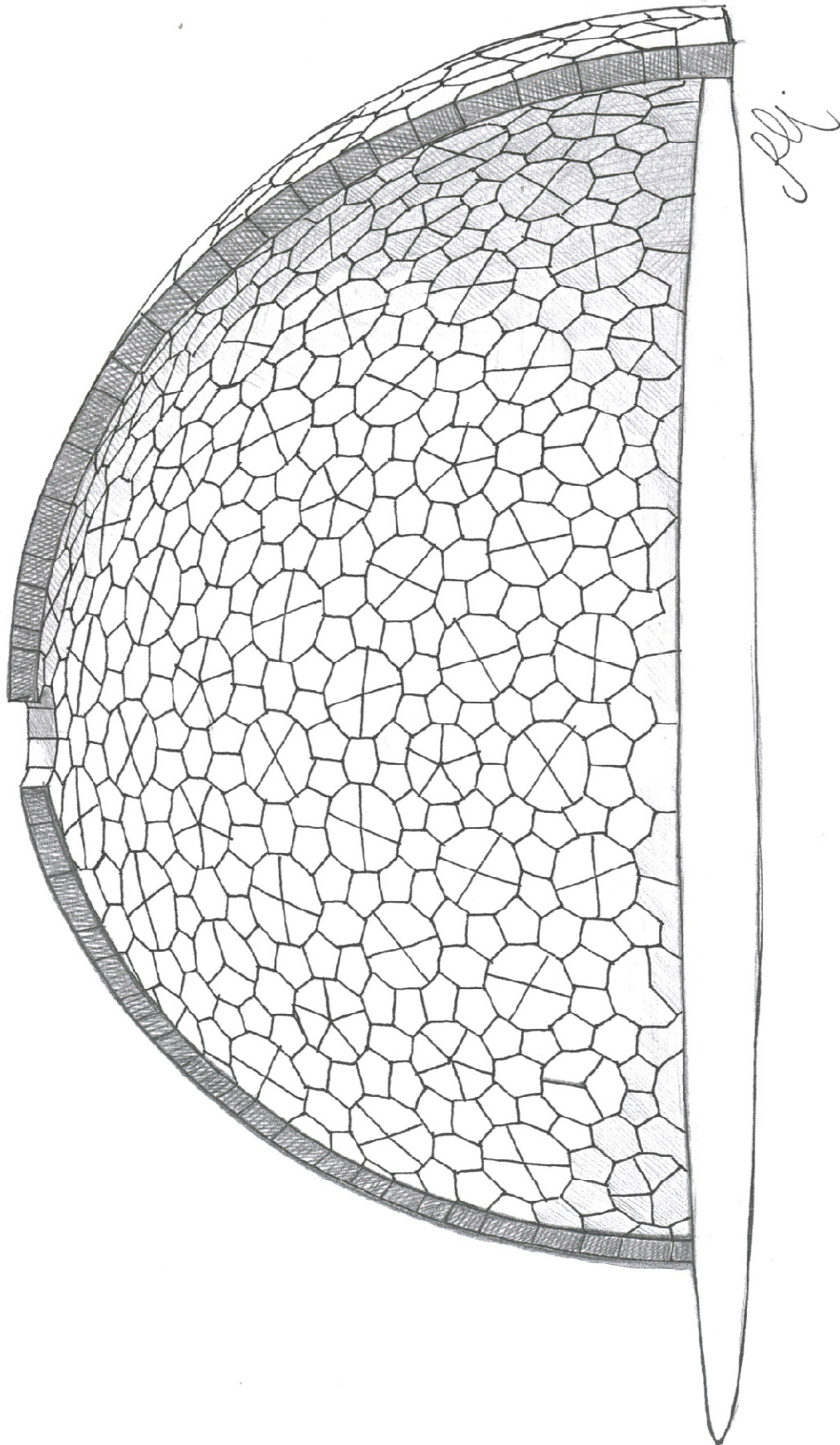
**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**FIG. 166.** R. Gadaleta, *Sezione della cupola*, disegno eseguito a mano libera



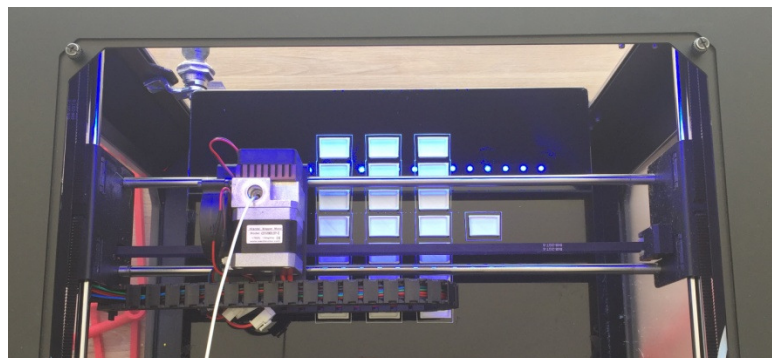
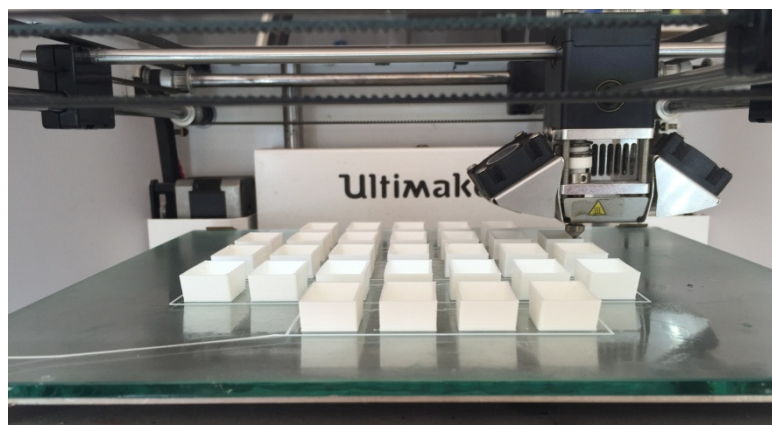
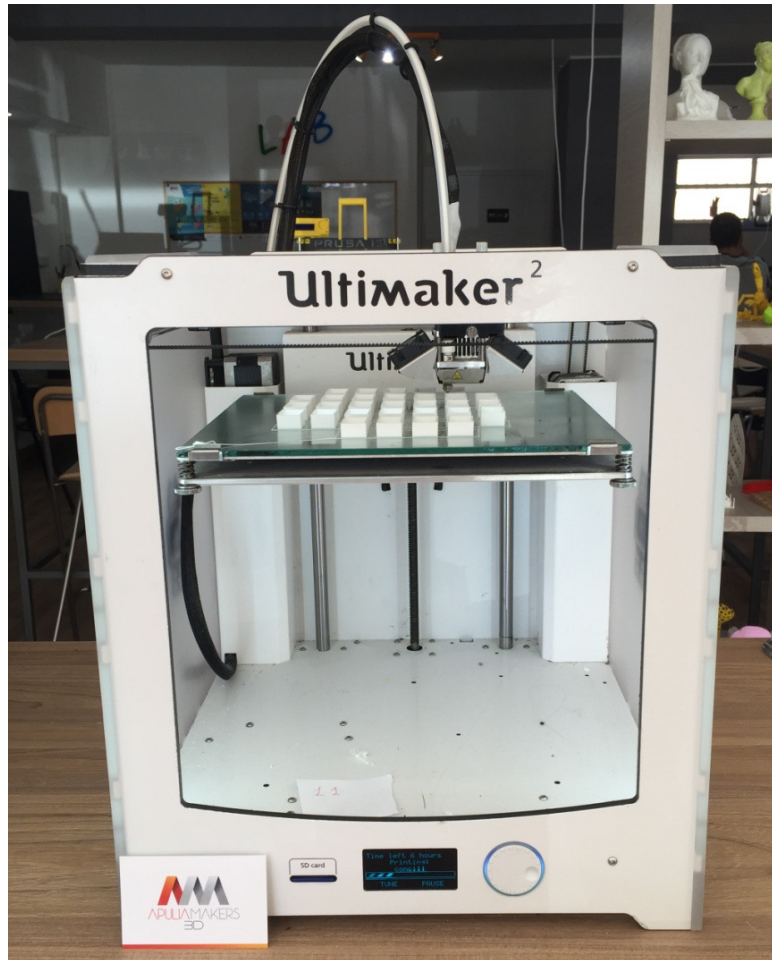
**FIG. 167.** Stampa dei conci con la macchina Ultimaker<sup>2</sup> presso il laboratorio "ApuliaMakers3D", Bari, fotografie di R. Gadaleta



**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**FIG. 168.** I 34 conci-tipo invarianti numerati, fotografia di R. Gadaleta



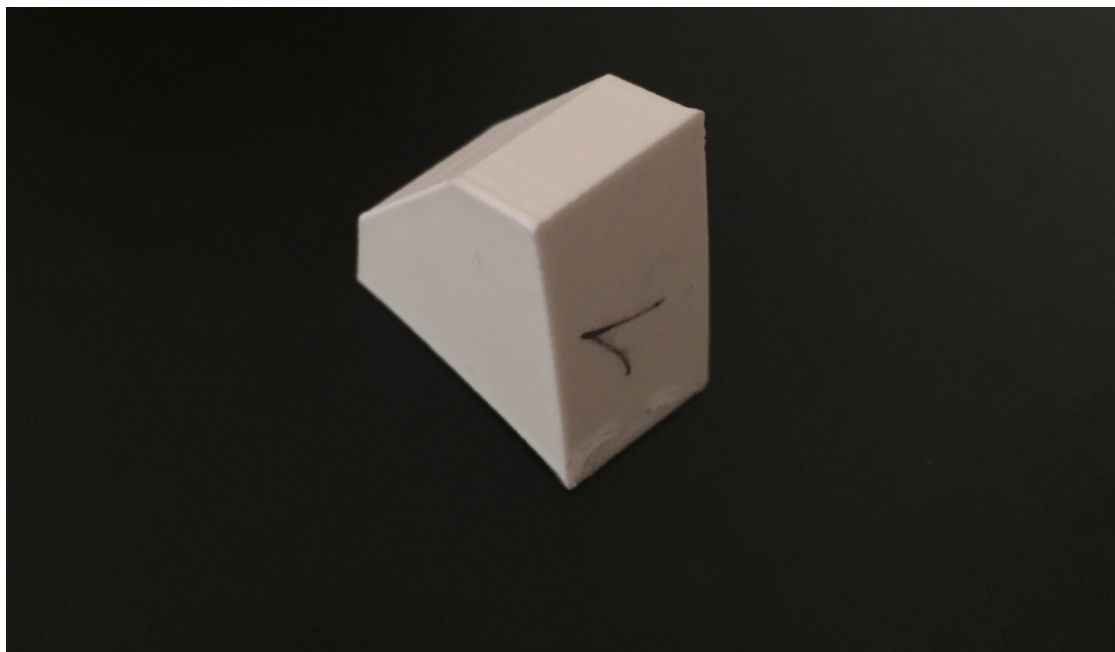


**FIG. 169.** Singolo concio numerato con penna, fotografia di R. Gadaleta

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**FIG. 170.** Conci numerati con penna e suddivisi in base a numerazione uguale che ne individua uguale tipo, fotografie di R. Gadaleta



**FIG. 171.** Fase 1 di montaggio della maquette, fotografia di R. Gadaleta



**FIG. 172.** Fase 2 di montaggio della maquette, fotografia di R. Gadaleta





**FIG. 173.** Fase 3 di montaggio della maquette, fotografia di R. Gadaleta



**FIG. 174.** Apposizione di una goccia di colla vinilica tra alcuni giunti, fotografia di R. Gadaleta



**FIG. 175.** Fase di montaggio della maquette, particolare, fotografia di  
R. Gadaleta



**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---





**FIG. 176.** Fase 4 di montaggio della maquette, fotografia di R. Gadaleta



**FIG. 177.** Fase 5 di montaggio della maquette, fotografia di R. Gadaleta

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**FIG. 178.** Fase 6, montaggio completo della maquette, vista laterale,  
fotografia di R. Gadaleta

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---

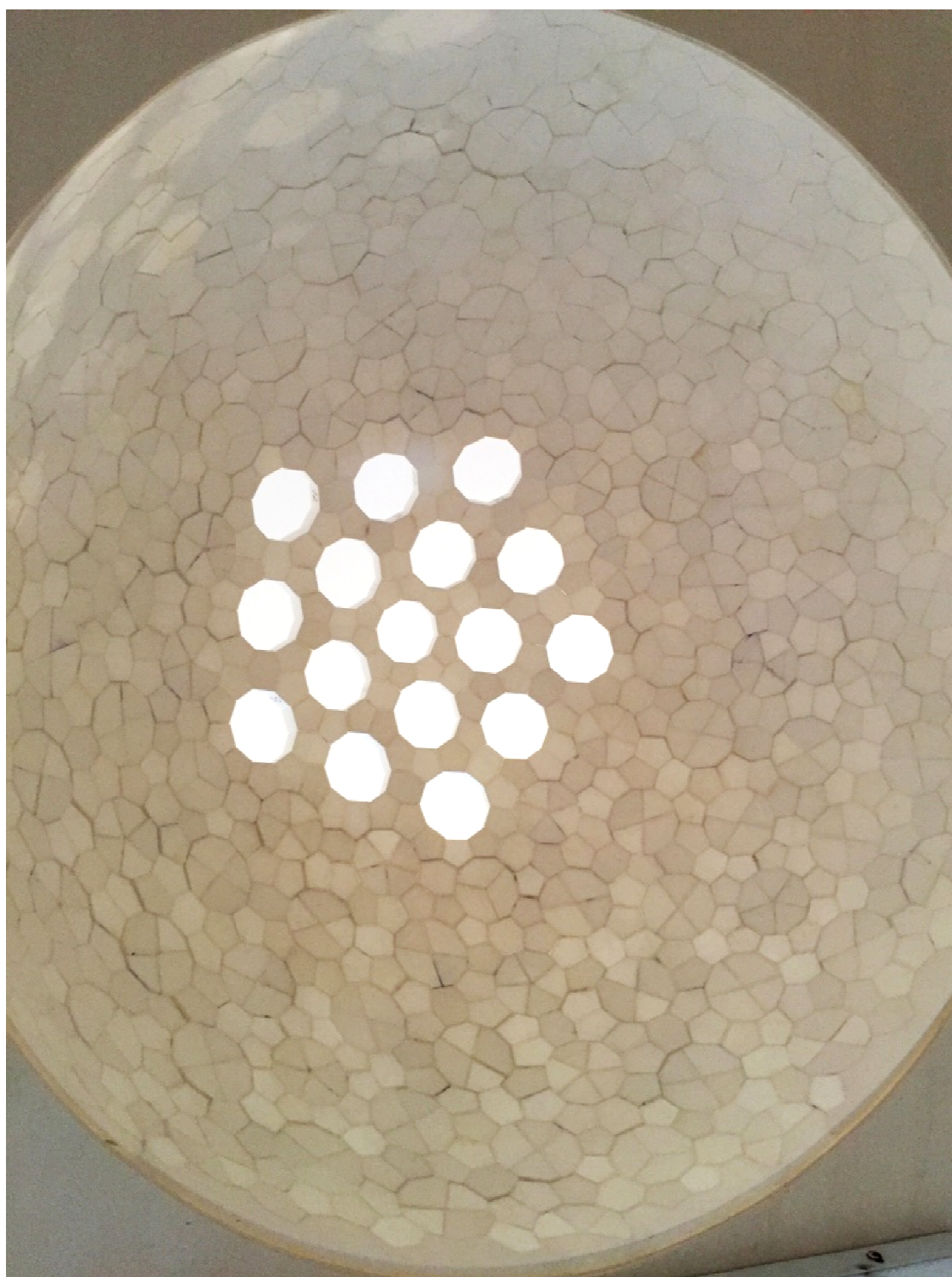


**FIG. 179.** Fase 6, montaggio completo della maquette, vista dall'alto,  
fotografia di R. Gadaleta

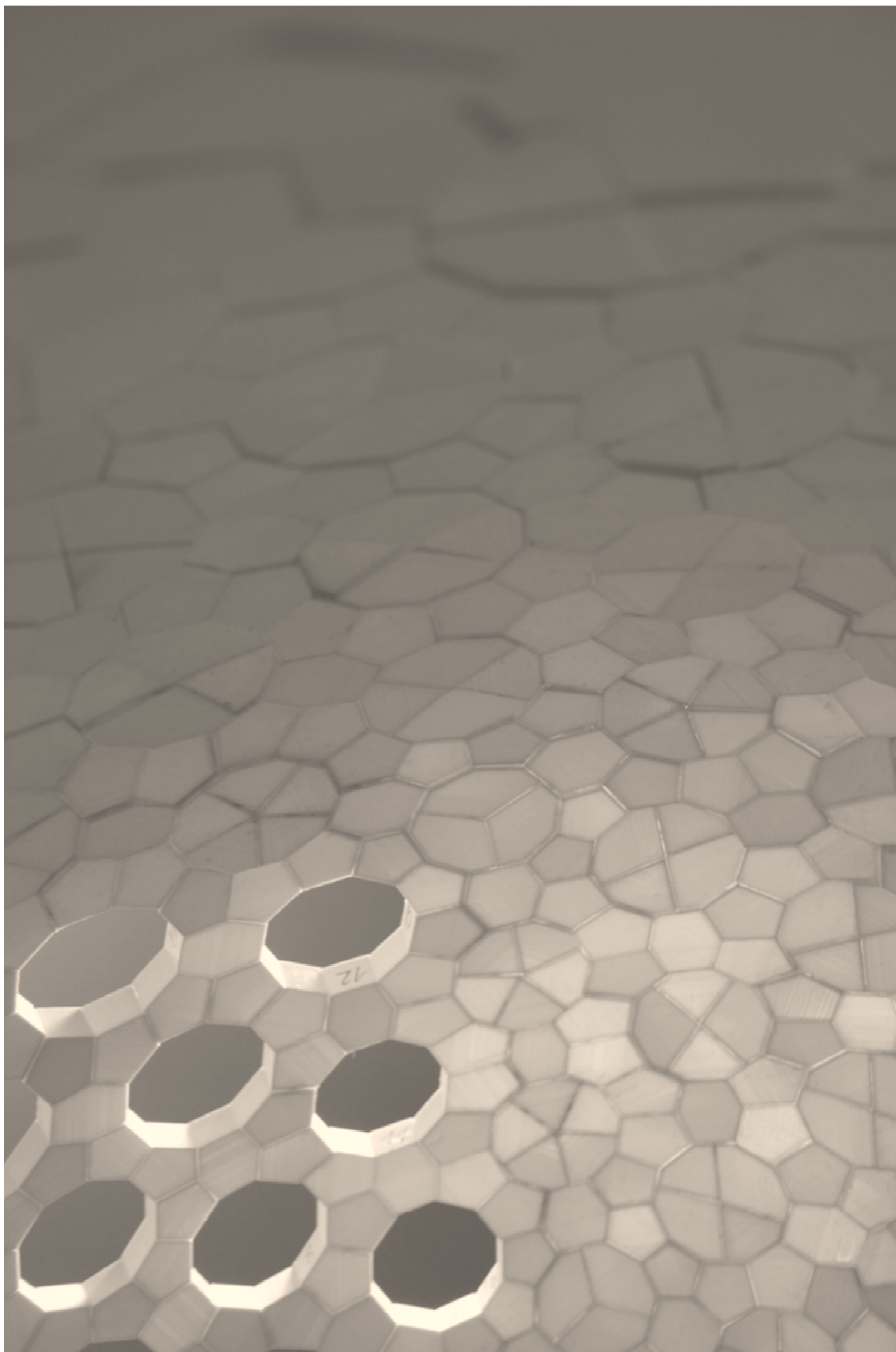




**FIG. 180.** Montaggio completo della maquette, vista dal basso dell'intradosso della cupola, fotografia di R. Gadaleta



**FIG. 181.** Vista dell'intradosso della cupola, particolare, fotografia di  
R. Gadaleta



**FIG. 182.** Montaggio completo, vista dell'intradosso, fotografia di R. Gadaleta







**FIG. 183.** Montaggio completo, vista dell'estradosso, particolare, fotografia di R. Gadaleta



**FIG. 184.** R. Gadaleta, *Numero di ripetizioni di ciascun concio-tipo  
all'interno della cupola priva di bucatore*

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---

Concio-tipo	Numero di copie nella cupola
1	30
2	30
3	30
4	30
5	30
6	30
7	30
8	30
9	30
10	30
11	30
12	30
13	25
14	25
15	25
16	30
17	30

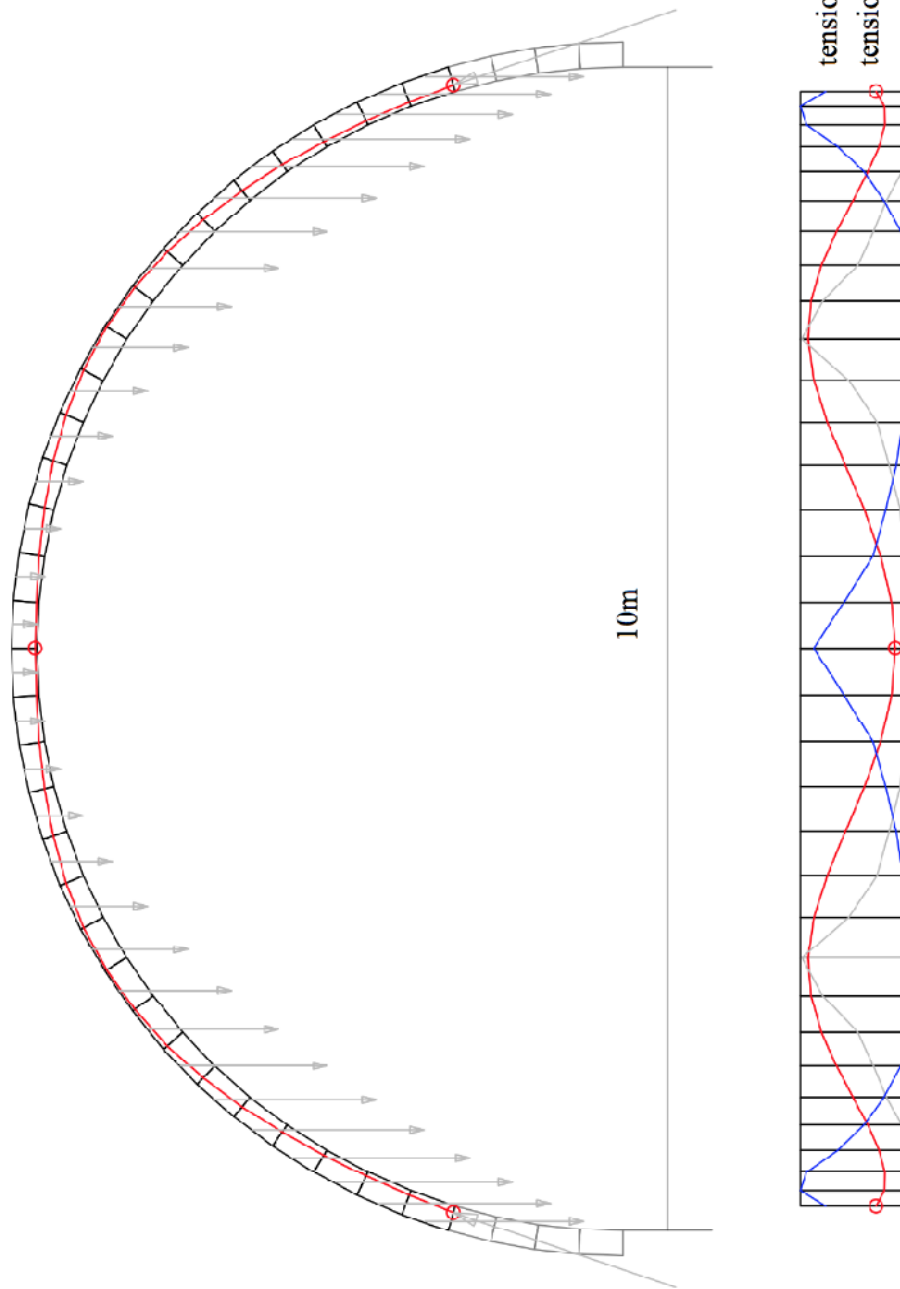
Concio-tipo	Numero di copie nella cupola
18	25
19	25
20	25
21	25
22	25
23	30
24	10
25	20
26	50
27	60
28	30
29	55
30	110
31	55
32	60
33	30
34	30

**Arch. Roberta Gadaleta**  
VOLUME II - Foto ed  
Elaborazioni grafiche originali

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.  
Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

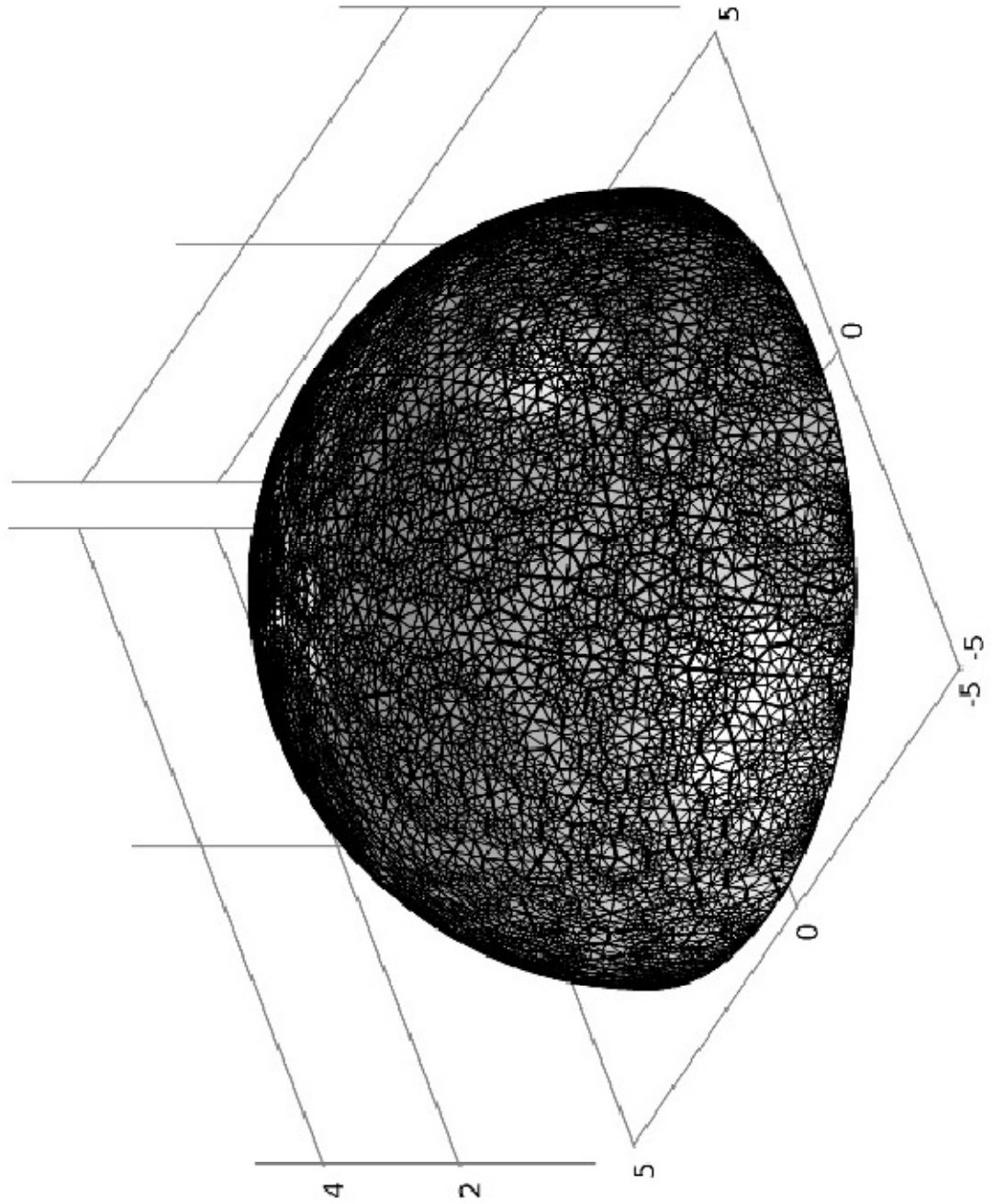
---

**FIG. 185.** Daniele Malomo, *Curva delle pressioni*, disegno infografico



**FIG. 186.** D. Malomo, *Mesch della cupola*, disegno infografico



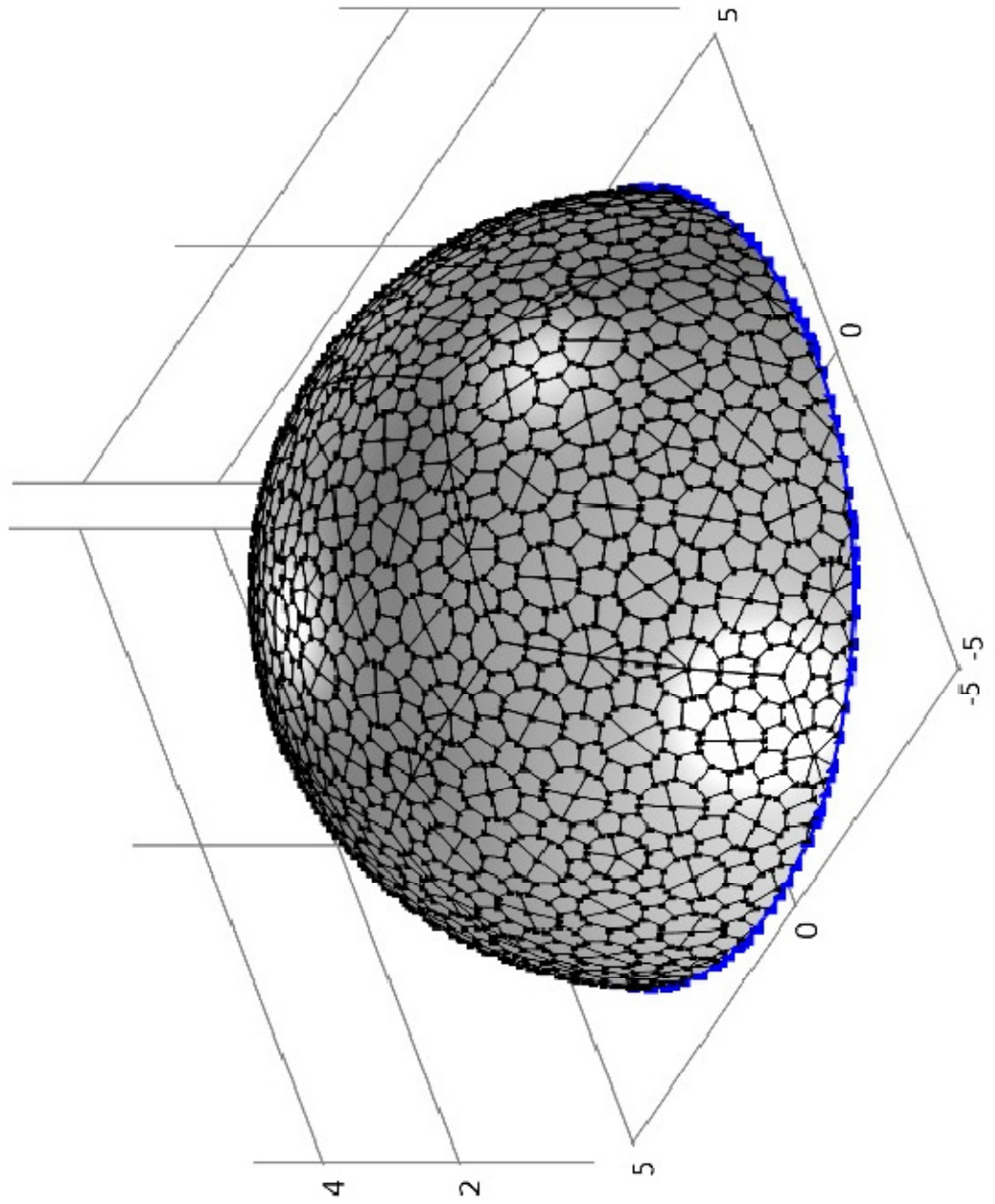


**Arch. Roberta Gadaleta**  
VOLUME II - Foto ed  
Elaborazioni grafiche originali

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.  
Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 187.** D. Malomo, *Condizioni al contorno*, disegno infografico



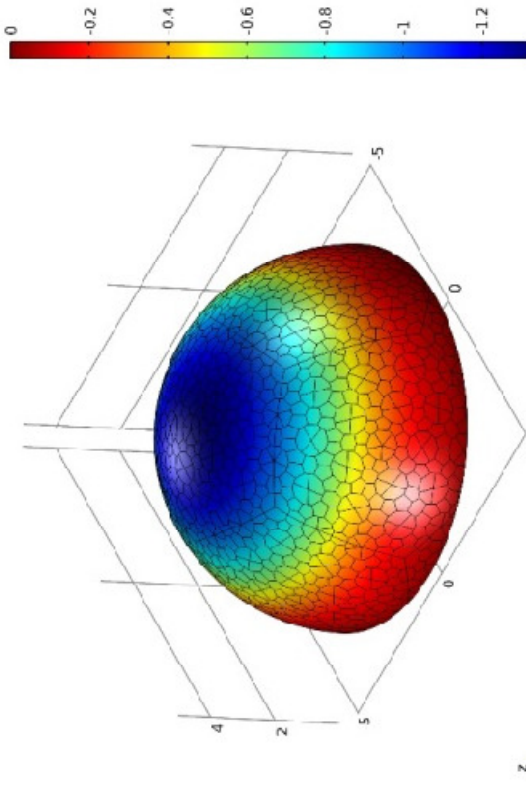
**Arch. Roberta Gadaleta**  
VOLUME II - Foto ed  
Elaborazioni grafiche originali

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.  
Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

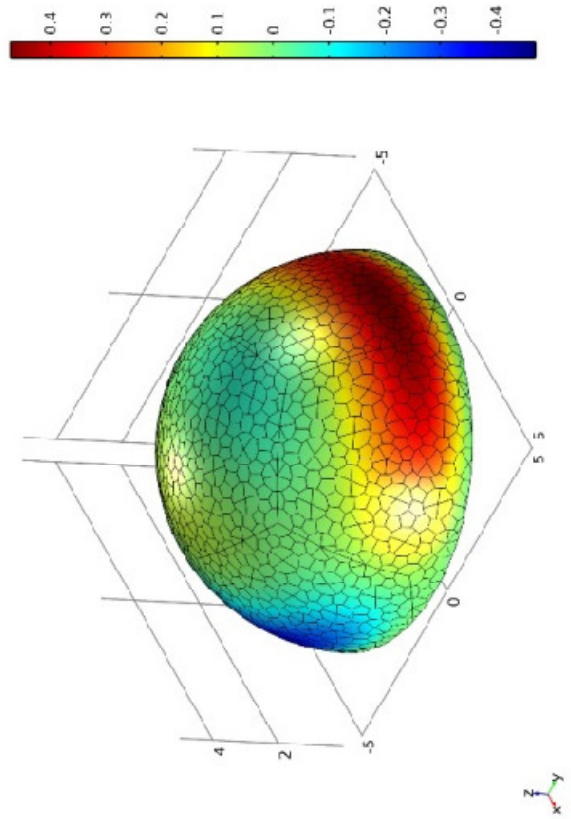
---

**FIG. 188.** D. Malomo, *Campo di spostamenti*, disegno infografico

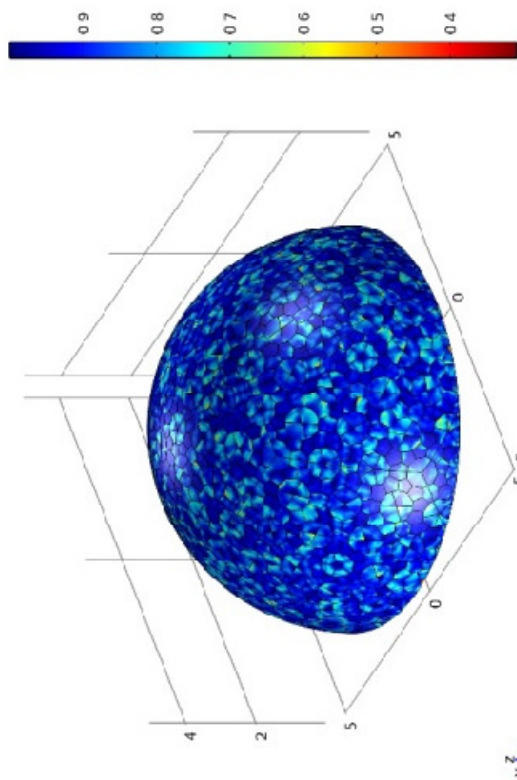
Superficie: Campo degli spostamenti, componente z (mm)



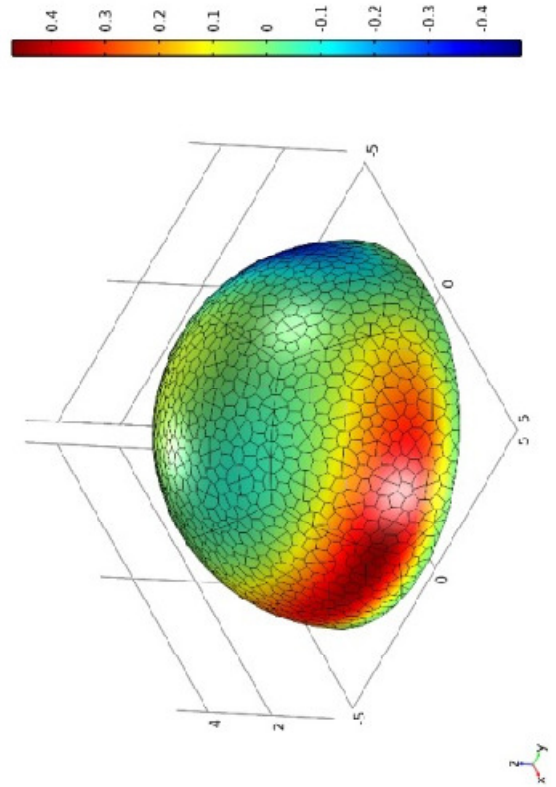
Superficie: Campo degli spostamenti, componente y (mm)



Superficie: Qualità elementi

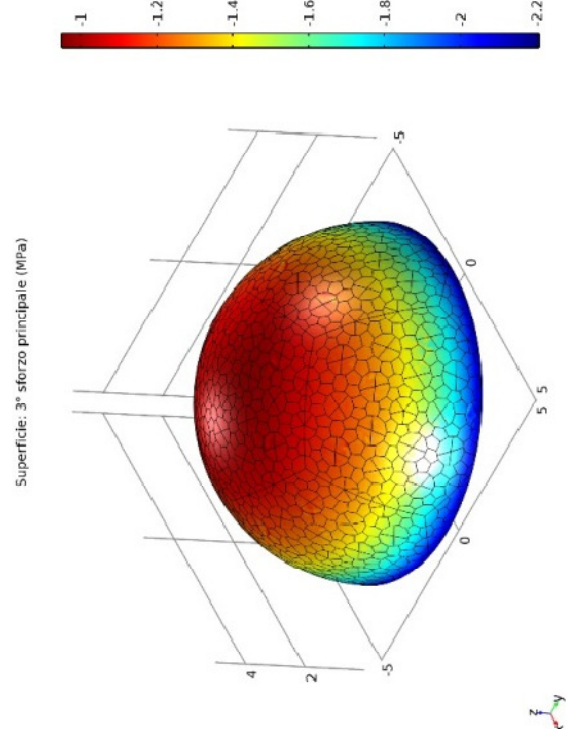
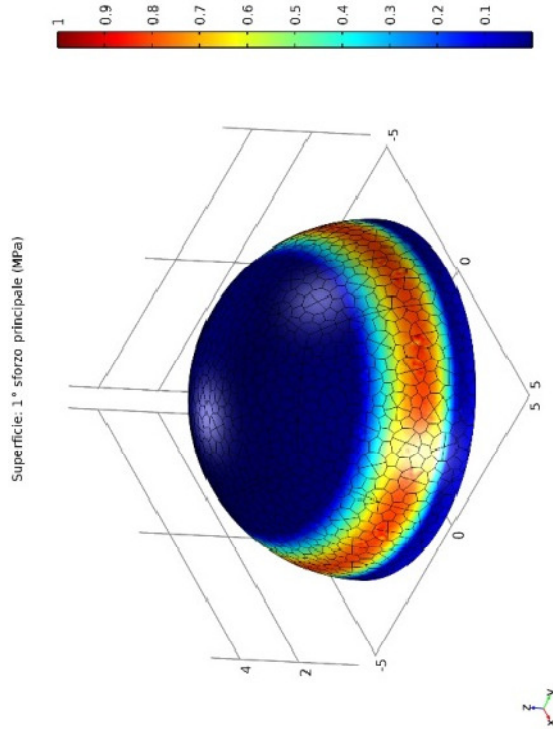
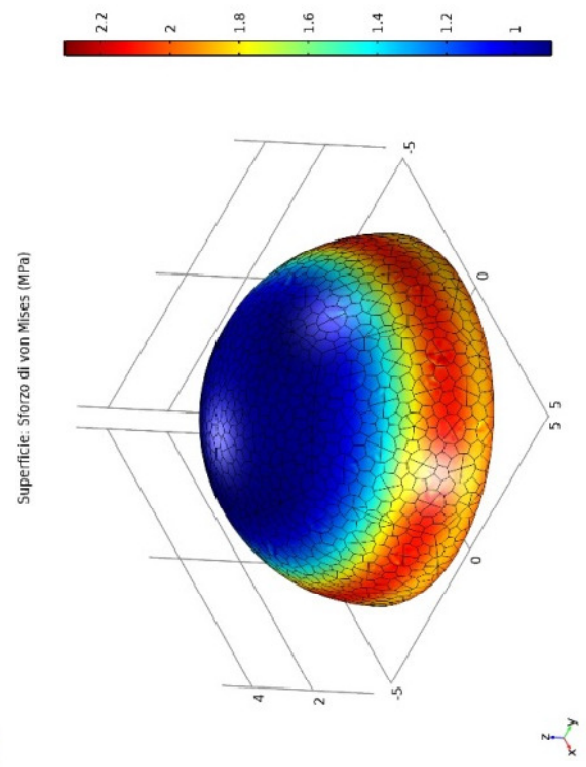
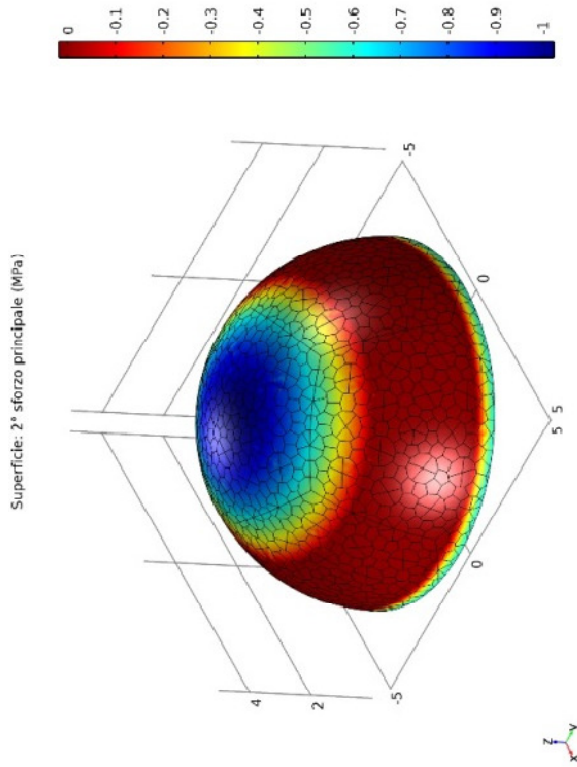


Superficie: Campo degli spostamenti, componente x (mm)



**FIG. 189.** D. Malomo, *1°*, *2°* e *3°* sforzo principale (prime tre figure da sinistra), tensioni di von Mises (ultima figura in basso a destra), disegno infografico

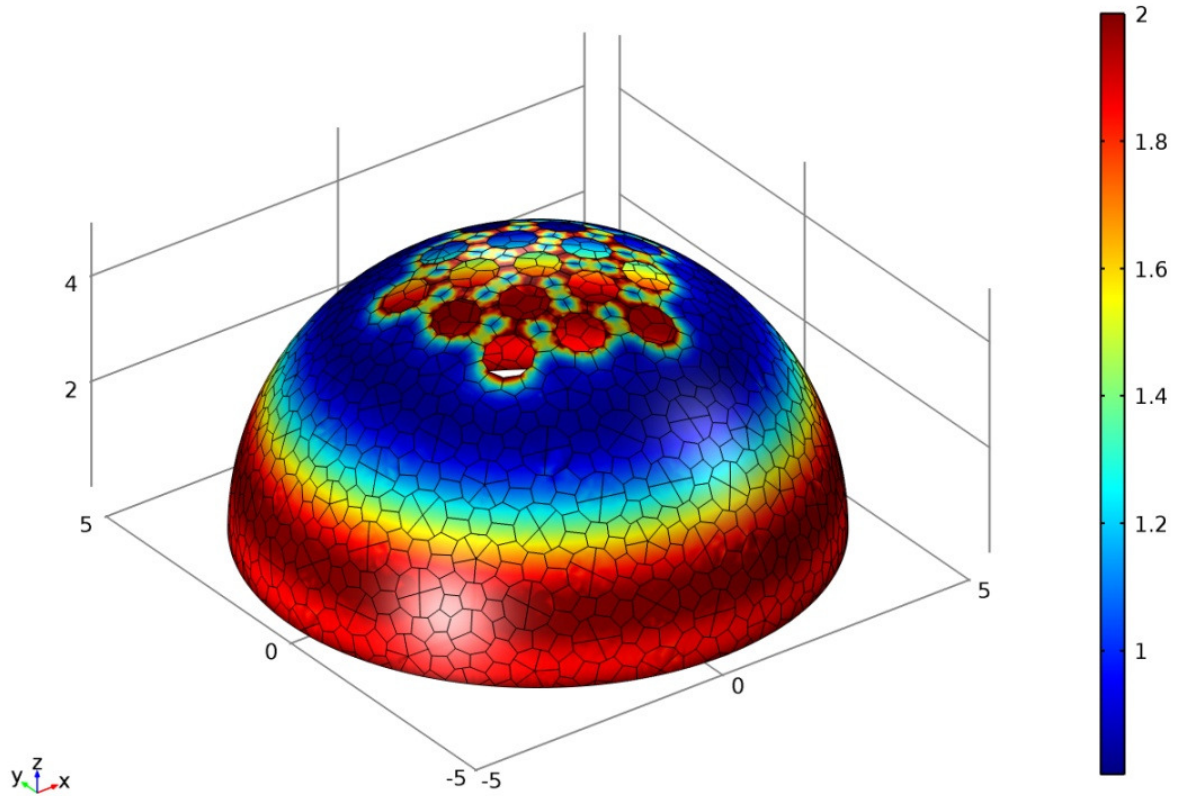




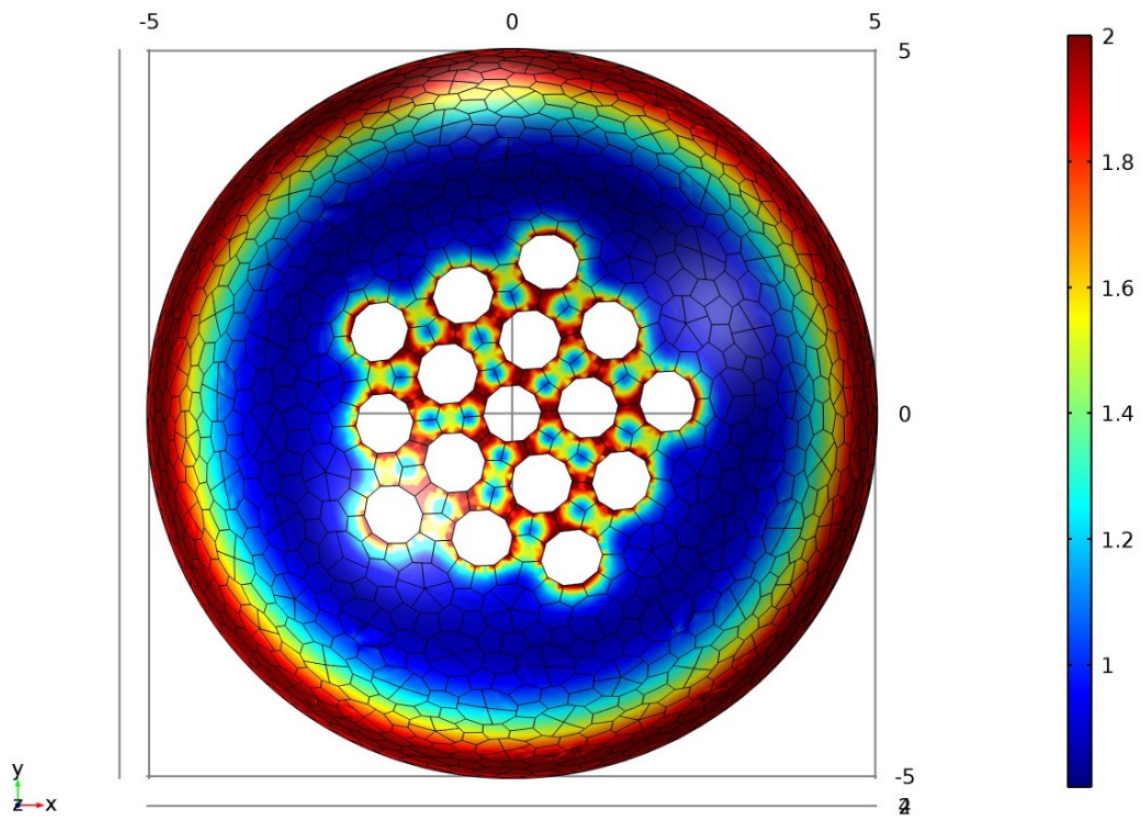


**FIG. 190.** D. Malomo, Caso B, analisi con il criterio di von Mises,  
disegno infografico

Superficie: Sforzo di von Mises (MPa)

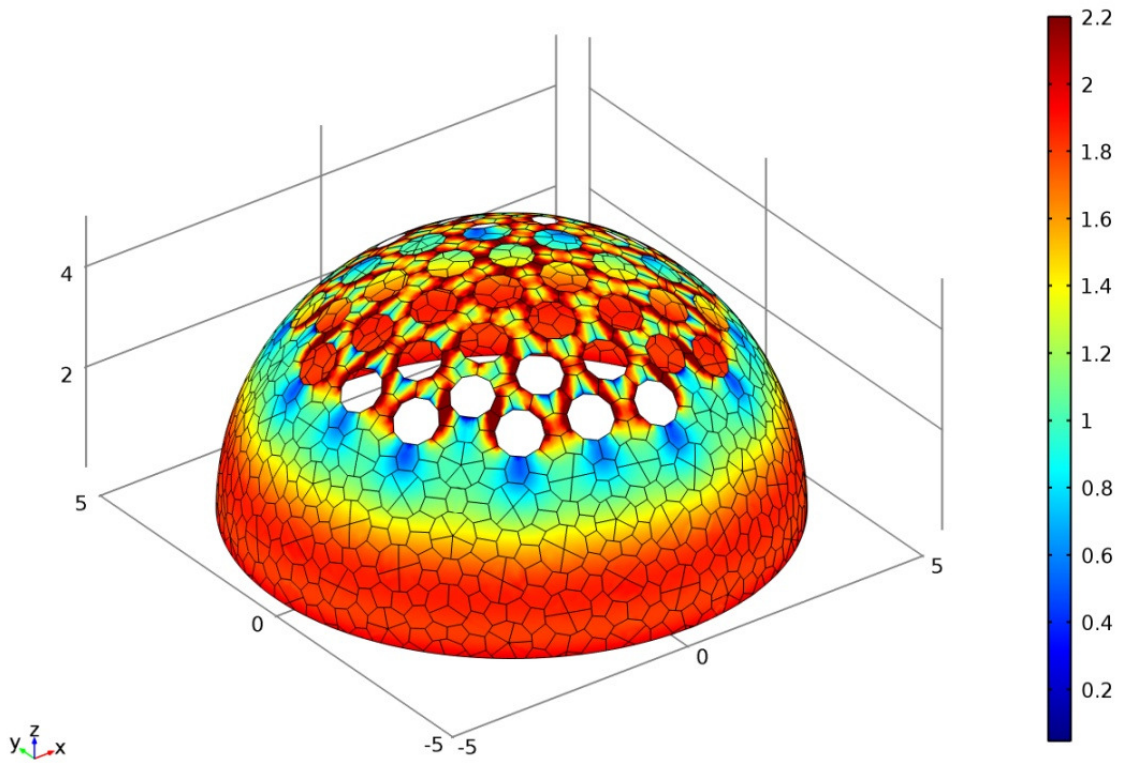


Superficie: Sforzo di von Mises (MPa)

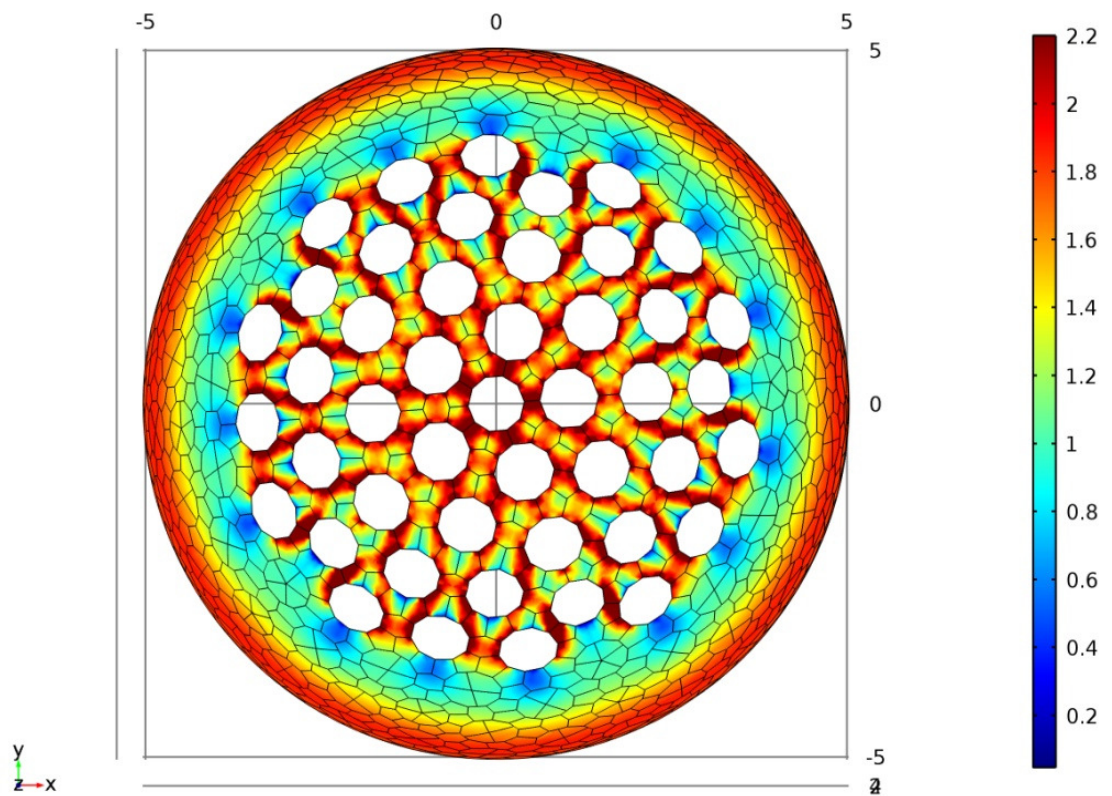


**FIG. 191.** D. Malomo, Caso C, analisi con il criterio di von Mises,  
disegno infografico

Superficie: Sforzo di von Mises (MPa)



Superficie: Sforzo di von Mises (MPa)



**FIG. 192.** Produzione e numerazione dei conci lapidei SNBR,  
Sainte-Savine, Francia, fotografia





**FIG. 193.** Produzione e numerazione dei conci lapidei SNBR,  
Sainte-Savine, Francia, fotografia





**FIG. 194.** Montaggio del prototipo, SNBR, Sainte-Savine, Francia,  
fotografia

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*



**FIG. 195.** Montaggio del prototipo, SNBR, Sainte-Savine, Francia,  
fotografia





**FIG. 196.** Prototipo ultimato, vista laterale, SNBR, Sainte-Savine,  
Francia, fotografia

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

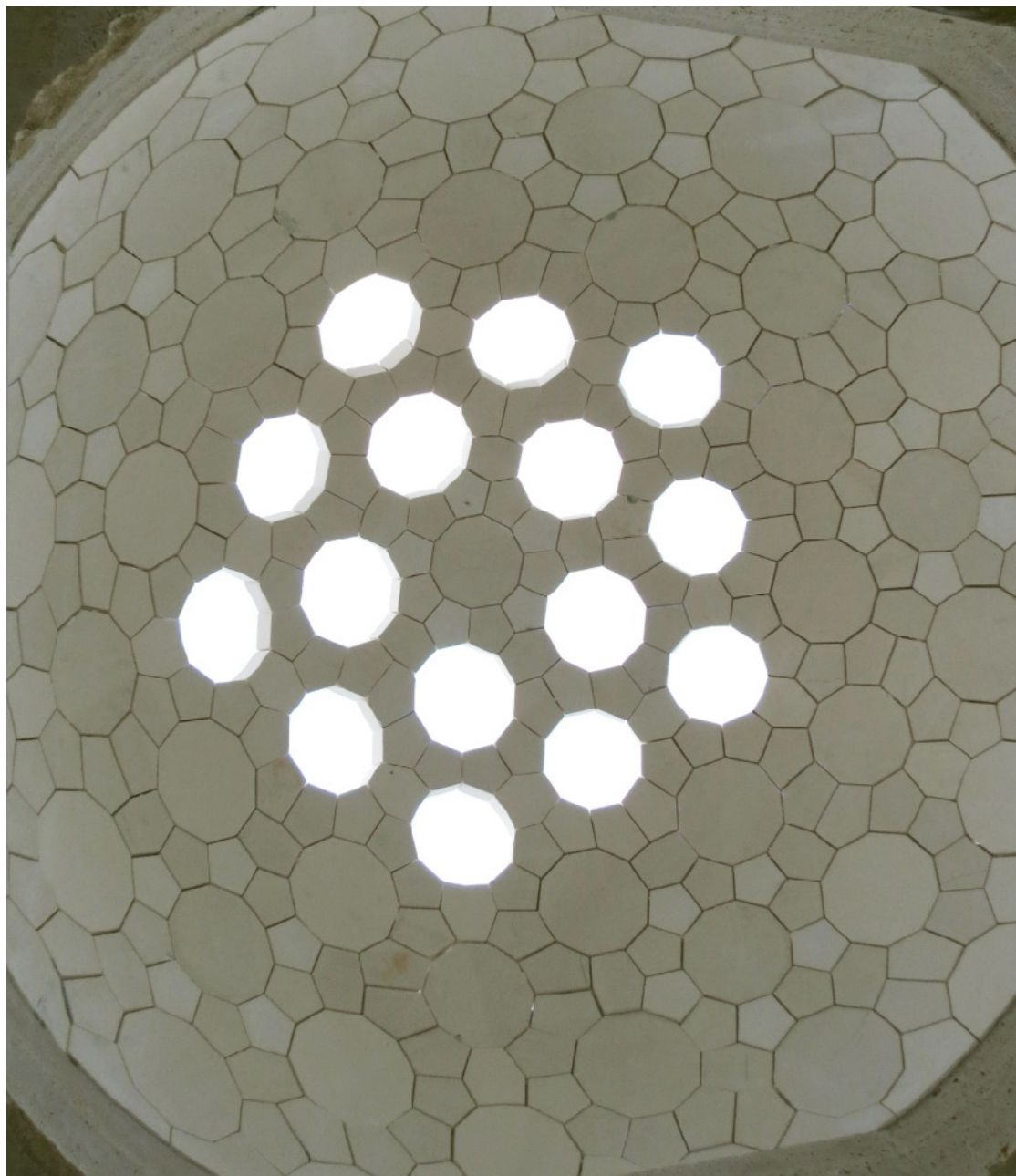
*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---





**FIG. 197.** Prototipo ultimato, vista dell'intradosso, SNBR,  
Sainte-Savine, Francia, fotografia







CONSORZIO ARGONAUTI (Politecnico di Bari / Università Roma Tre) - **DOTTORATO XXIX CICLO**  
**Architettura: Innovazione e Patrimonio**  
*gennaio 2014 - dicembre 2016*

Dottoranda: Arch. Roberta Gadaleta

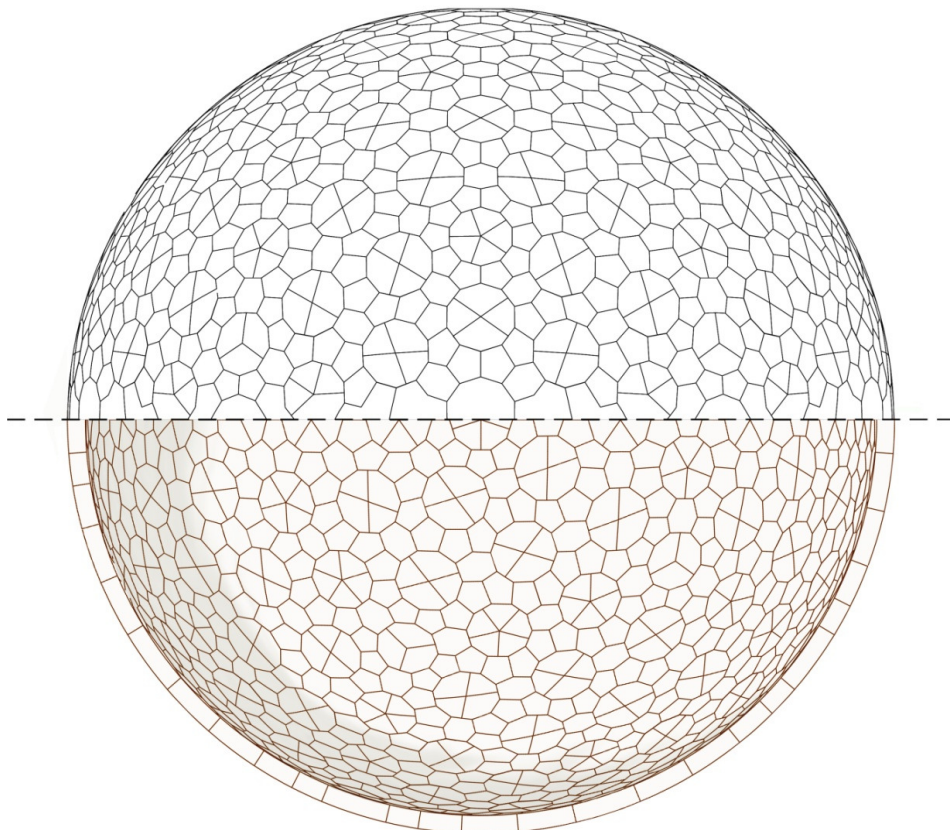
**STEREOTOMIA DELLA CUPOLA NELL'ARCHITETTURA DI PIETRA.**  
**STUDIO DELLA TRADIZIONE E RICERCA**  
**DI NUOVE MORFOLOGIE DI APPARECCHIATURA.**

*Stereotomy of dome in stone architecture.*  
*Study of tradition and research of new morphologies of bond.*

VOLUME III - DOCUMENTAZIONE ARCHIVISTICA, ICONOGRAFICA E FOTOGRAFICA

Tutor: Prof. Arch. Giuseppe Fallacara

Co-Tutor: Prof. Arch. Claudio D'Amato Guerrieri



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**INDICE VOLUME III – INDEX VOLUME III**

---

DOCUMENTAZIONE ARCHIVISTICA, ICONOGRAFICA E FOTOGRAFICA –  
*PICTURES AND ARCHIVISTIC MATERIAL*

**CAPITOLO I.**

**La cupola in pietra da taglio come compresenza di forma simbolica e forma costruita**

---

**FIG. 1.** Mosaici della cupola del Battistero di San Giovanni, ca.1270-1300, Firenze

**FIG. 2.** Affreschi della cupola della Cattedrale di Santa Maria del Fiore, iniziati nel 1572, Firenze

**FIG. 3.** Gustave Dorè, *Candida Rosa*, 1880

**FIG. 4.** Cupola del Mausoleo di Galla Placidia, prima metà del V sec. d.C., Ravenna

**FIG. 5.** Cupola della Chiesa di Santa Maria in Solario, metà XII sec., Brescia

**FIG. 6.** Cupola del Duomo di Siena (Cattedrale di Santa Maria Assunta), 1481-1494, Siena

**FIG. 7.** Apollodoro di Damasco, *Pantheon*, cupola, 118-128 d.C., Roma

**FIG. 8.** Étienne-Louis Boullée, Progetto per il *Cenotafio di Newton*, 1784

**FIG. 9.** Cupola sull'altare maggiore della Basilica di Sant'Antonio, 1232-1310, Padova

**FIG. 10.** Cosma Indicopleuste, Rappresentazione del cosmo, XI sec.

**FIG. 11.** Giotto, Affreschi sulla volta della Cappella degli Scrovegni, XIV sec., Padova

**FIG. 12.** Piermatteo d'Amelia, Progetto per l'affresco sulla volta della Cappella Sistina, XVI sec.

**FIG. 13.** Cappella Sistina, Stampa del XIX sec.

**FIG. 14.** Karl Friedrich Schinkel, Scenografia *Salone delle stelle nel palazzo della Regina della Notte*, 1815

**FIG. 15.** Alcune forme strutturali naturali sferiche: radiolare visto al microscopio elettronico; Taràssaco; bolla di sapone; corpi celesti (sistema Terra-Luna)

## CAPITOLO II.

### **Analisi del metodo architettonico storico di suddivisione della cupola lapidea in elementi strutturali**

---

**FIG. 17.** J. Chaix, Cupola emisferica, pianta ipografica e sezione, 1890

**FIG. 18.** Interno della Chiesa di Ognissanti, 1061-1078, Valenzano (Bari)

**FIG. 19.** Cupola della Chiesa di Ognissanti, 1061-1078, Valenzano (Bari)

**FIG. 20.** Interno del Duomo di San Corrado, seconda metà XII sec.- XIII sec., Molfetta (Bari)

**FIG. 22.** Philippe Potié, Studio della cupola della Cappella del Castello di Anet progettata da Philibert Delorme, 1996

**FIG. 23.** Rodolphe Pfnor, Cappella di Anet, 1867

**FIG. 24.** Alonso de Vandelvira, *Capilla redonda en buelta redonda*, 1575-1591

**FIG. 28.** Amédée François Frézier, Tracciati geometrici per la suddivisione sferica ed il taglio dei conci attraverso la proiezione conica, 1737-1739

**FIG. 29.** Amédée François Frézier, Tracciati geometrici per la suddivisione sferica ed il taglio dei conci attraverso la proiezione conica, 1737-1739

**FIG. 30.** Philibert Delorme, Cupola elicoidale, 1567

**FIG. 31.** Alonso de Vandelvira, *Capilla redonda en buelta Capazo*, 1575-1591

**FIG. 32.** Cupola all'interno della Cattedrale di Murcia, XVI sec., Spagna



**FIG. 33.** Rilievi della cupola all'interno della Cattedrale di Murcia, XVI sec., Spagna

### **CAPITOLO III.**

#### **Analisi del metodo architettonico di suddivisione della cupola in pietra da taglio in elementi strutturali, attraverso i poliedri sferici**

---

**FIG. 34.** Amédée François Frézier, *Geometria plura praesidia praestat Architecturae*, 1737-1739

**FIG. 35.** Abraham Bosse, *Po.r paracheuer de tracer le Treillis / perspectif sur une voute cilindriq(ue)*, 1653

**FIG. 36.** Piero della Francesca, Studio prospettico, XV sec.

**FIG. 37.** Jean-François Nicéron, Studio della prospettiva attraverso l'icosaedro, 1638

**FIG. 38.** Johannes von Kepler, Cinque solidi platonici e loro simbologia, 1619

**FIG. 39.** Cristalli di Pirite

**FIG. 40.** Granato Fosso d'Acri, Ex Collezione Dattola L.

**FIG. 41.** Clathrus ruber

**FIG. 42 (1).** Leonardo da Vinci, *Ycocedron Abscisus Solidus*, Icosaedro troncato, 1509

**FIG. 42 (2).** Leonardo da Vinci, *Ycocedron Abscisus Vacuus*, Icosaedro troncato, 1509

**FIG. 43.** Johannes von Kepler, Ipotesi sulla morfologia del cosmo, 1596

**FIG. 44.** Euclide, "Elementi", Proposizione XVII, IV-III sec. a. C.

**FIG. 45.** Leonardo da Vinci, *Septuaginta Duarum Basium Vacuum*, 1509

**FIG. 46.** Modello in terracotta di una antica palla di cuoio, 275-250 a.C., Samotracia

**FIG. 47.** Magnus Wenninger, Dal cubo al cubo sferico secondo proiezione radiale, 1999

**FIG. 49.** *Petrosfere*, 3.000 a.C., Oxford

**FIG. 50.** Triangoli caratteristici dei tre gruppi di simmetria: a. tetraedro; b. cubo/ottaedro; c. dodecaedro/icosaedro

**FIG. 52.** Jean Covens e Corneille Mortier, *Mappe-Monde Dresse sur les Observations de Mrs de l'Academie Royale des Sciences et quelques autres et sur les memoirs les plus recens Par M. De L'Isle \* \* \* Nouvellement corrigee apres les derniers Decouvertes faite par l'Academie de Petersbourg*, proiezioni cartografiche polari ed equatoriali, 1745, Amsterdam

**FIG. 53.** *Le Globe celeste en deux plans hemispheres*, 1748 ca., Cartografia celeste in proiezione polare, per gli atlanti di George Louis Le Rouge

**FIG. 54.** Giovanni Paolo Gallucci, *La Terra nella sfera celeste*, 1588

**FIG. 55.** Thomas Wright, *La Terra nelle sfere celesti*, 1750

**FIG. 56.** Giuliano D'Arrigo, detto Pesello, Affreschi della cupola nella scarsella della Cappella Pazzi di Filippo Brunelleschi, 1420-1428, Sacrestia Vecchia, Basilica di San Lorenzo, Firenze

**FIG. 57 (1).** Albrecht Dürer, *Divisione della sfera in meridiani e paralleli e suo sviluppo con proiezione cilindrica*, 1525

**FIG. 57 (2).** Albrecht Dürer, *Divisione della sfera in meridiani e paralleli e suo sviluppo con proiezione cilindrica*, 1525

**FIG. 58.** Martin Waldseemüller, *Planisfero con il nome "America"*, 1507

**FIG. 59.** Vitus Scheffer, *Cartografia celeste*, 1686

**FIG. 60.** Albrecht Dürer, *Divisione della sfera in meridiani e paralleli e suo sviluppo con proiezione cilindrica*, 1525

**FIG. 61.** Alonso de Vandelvira, *Capilla redonda por cruceros*, 1575-1591

**FIG. 62.** *Proiezione conica cartografica*

**FIG. 63.** Claudio Tolomeo, *Cartografia derivante da proiezione conica*, 1450-1475

**FIG. 64.** Leonardo da Vinci, *Proiezioni cilindriche e coniche e rapporti della sfera e del cilindro inscritti in un cubo*, 1492-1516

**FIG. 65.** Leonardo da Vinci, *De cubatura dello sperico*, studi sul metodo proiettivo di suddivisione della sfera, 1492-1516

**FIG. 66.** Leonardo da Vinci, Proiezione ottante, studi sul metodo proiettivo di suddivisione della sfera, 1478-1518

**FIG. 67.** Leonardo da Vinci, Studi sul triangolo sferico, 1492-1516

**FIG. 68.** Leonardo da Vinci, Studi sul triangolo sferico, 1478-1518

**FIG. 69 (1).** Leonardo da Vinci, Studi sul triangolo sferico, 1492-1516

**FIG. 69 (2).** Leonardo da Vinci, Studi sul triangolo sferico, 1492-1516

**FIG. 70.** Leonardo da Vinci, Proiezione cartografica ottante, 1508-1514, Royal Library, Castello di Windsor, RL 01393 (emisfero a nord dell'equatore), RL 01393 bis (emisfero a sud dell'equatore)

**FIG. 71.** Oronce Finè, Studi sul triangolo sferico in cartografia, 1549

**FIG. 72.** Daniel Angelocrator, Proiezione cartografica ottante, 1628

**FIG. 73.** Bernard Joseph Stanislaus Cahill, *Butterfly Map*, 1913

**FIG. 74.** Richard Buckminster Fuller, *Dymaxion Map*, 1954

**FIG. 76.** Johannes von Kepler, Simmetria quinary e triacontaedro, 1619

**FIG. 80.** Albrecht Dürer, Dodecaedro platonico e suo sviluppo planare, 1525

**FIG. 82.** Jean-Baptiste de La Rue, taglio dei conci con superfici curve, 1728

**FIG. 83.** Abraham Bosse, Taglio dei conci con superfici curve, 1643

**FIG. 85.** Biagio di Carlo, Proiezione della divisione planare sulla sfera, 2010

**FIG. 86.** Frequenza di suddivisione geodetica

**FIG. 87.** Leonardo da Vinci, *Del risolvere in piramide il corpo sperico*, divisione sferica secondo linee attualmente definite geodetiche, 1492-1516

**FIG. 88.** Richard Buckminster Fuller, *Geodesic structures*, divisione geodetica della sfera, 1954

**FIG. 89.** Richard Buckminster Fuller, Primo prototipo di cupola geodetica, 1954, X Esposizione Internazionale, Triennale di Milano

**FIG. 90.** Richard Buckminster Fuller, *Montréal Biosphère*, Cupola geodetica, 1967, Esposizione Universale e Internazionale, Montréal

**FIG. 92.** Radome, Cupola del Ballistic Missile Early Warning System, 1958-1964, RAF Fylingdales, North Yorkshire (UK)

**FIG. 93.** Peng Song, Chi-Wing Fu, Prashant Goswami, Jianmin Zheng, Niloy J. Mitra e Daniel Cohen-Or, Derivazione della geometria reciproca (maglia triangolare ed esagonale in figura) dalla divisione geodetica (triangolare in figura) e dalla sua duale (esagonale in figura), 2013

**FIG. 94 (1).** Leonardo da Vinci, Strutture reciproche lignee, 1478-1518

**FIG. 94 (2).** Leonardo da Vinci, Strutture reciproche lignee, 1478-1518, particolari

**FIG. 95.** Leonardo da Vinci, Ponte reciproco ligneo, 1478-1518

**FIG. 96.** Richard Buckminster Fuller, *Tensile-integrity structures*, 1962

**FIG. 97.** Rinus Roelofs, *Leonardo da Vinci's Bar Grid*, Sfera lineea reciproca, 2003

**FIG. 98.** Joseph Abeille, *Voute Plate*, 1699

**FIG. 99.** Claudio D'Amato Guerrieri, Giuseppe Fallacara, *Portale Abeille*, 2006, La Biennale di Venezia, X Mostra Internazionale di Architettura, Venezia

**FIG. 100.** Jean Truchet, *Voute Plate*, 1699

**FIG. 101.** Amédée François Frézier, Strutture reciproche lignee e lapidee, 1737-1739

**FIG. 102 (1).** Giuseppe Fallacara, *Bin Jassim Dome*, Realizzazione (vista dell'intradosso), 2012, Qatar

**FIG. 102 (2).** Giuseppe Fallacara, *Bin Jassim Dome*, Schema di montaggio (vista dell'estradosso): a conci-tipo uguali sono assegnati colori uguali, 2012, Qatar

**FIG. 103 (1).** Albrecht Dürer, Tassellazioni planari con pentagoni, 1525

**FIG. 103 (2).** Albrecht Dürer, Tassellazioni planari con pentagoni, 1525

**FIG. 104 (1).** Johannes von Kepler, Tassellazioni planari con pentagoni, 1619

**FIG. 104 (2).** Johannes von Kepler, Tassellazioni planari con pentagoni, 1619

**FIG. 111.** Mauro Fassino, Tassellazioni di Penrose P2 (in alto) e P3 (in basso). Nella tassellazione P3, è evidenziata la regola frattale di auto-similarità a diversa scala, 2012

**FIG. 112.** James P. Sethna, Aggregazione dei quasicristalli secondo regole di corrispondenza fra triacontaedro rombico ed esacontaedro rombico, 1991

**FIG. 114.** Diffrazione elettronica del quasicristallo; Conradin Beeli, Diffrazione elettronica del quasicristallo  $Al_{70}Co_{11}Ni_{19}$ , 2002

**FIG. 115.** Modello atomico del quasicristallo con immagine a microscopia elettronica.

**FIG. 116.** Disposizione atomica del quasicristallo sovrapponibile alla tassellazione Aa di von Kepler

**FIG. 117.** An Pang Tsai, Junqing Guo, Eiji Abe, Hiroyuki Takakura, Taku J. Sato, Disposizione atomica del quasicristallo, 2000

**FIG. 118.** Giuseppe Fallacara, *Decowall*, 2011

**FIG. 119.** Opus poligonalis romana

**FIG. 120 (1).** Le cinque tessere della tassellazione Girih (a sinistra) e sua applicazione nel portale del santuario di Darb-i Imam, Isfahan, Iran (a destra)

**FIG. 120 (2).** Lu Peter J., Paul Steinhardt, Relazione tra tassellazione quinaria Girih e tassellazione di Penrose, 2007

#### **CAPITOLO IV.**

#### **Forma strutturale stereotomica della cupola in pietra da taglio a simmetria quinaria**

---

**FIG. 129.** Dirk Frettlöh, *Icosahedral tilings in  $R^3$ : The ABCK tilings*, l'aggregazione di alcuni tetraedri e delle loro copie speculari genera poliedri a simmetria quinaria

**FIG. 130.** Roger White, Ann Preston, *Tetras*, Progetto per un impianto di energia solare, 2010, Abu Dhabi, 2010

**FIG. 131.** Ann Preston, *Aggregazione dei tetraedri di Danzer*, disegno, 2010

**FIG. 132.** Cecil Balmond, *Danzer*, 2010, Tokyo Opera City Art Gallery, 2010

**FIG. 133.** GXN team, *Danzer Light*, 2010, Danimarca, 2010

**FIG. 159.** François Derand, *Costruzione della maquette*, 1643

---

## **VI. APPENDICE**

---

### **VI.1. Scritto di L. Danzer sulla tassellazione da lui codificata**

DANZER LUDWIG, *Three-dimensional analogs of the planar Penrose tilings and quasicrystals*, in "Discrete Mathematics", n. 76, 1989, pp.1-7 (paper received on October 1988)

### **VI.2. Scritto su L. Danzer in occasione del suo 80° compleanno**

DOLBILIN NIKOLAI, SCHULTE EGON, *Special issue in honor of Ludwig Danzer's 80th birthday*, articolo pubblicato su ScienceDirect, European Journal of Combinatorics, 29, available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com), marzo 2008

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



## **CAPITOLO I.**

### **La cupola in pietra da taglio come compresenza di forma simbolica e forma costruita**

---

**FIG. 1.** Mosaici della cupola del Battistero di San Giovanni, ca.1270-1300, Firenze

Fonte: fotografia di Mattias Kabel, 02/09/2011, pubblicata su Wikipedia:

[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6a/Florence\\_baptistery\\_ceiling\\_mosaic\\_7247px.jpg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/6/6a/Florence_baptistery_ceiling_mosaic_7247px.jpg)

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**FIG. 2.** Affreschi della cupola della Cattedrale di Santa Maria del Fiore, iniziati nel 1572, Firenze

Fonte: Web Gallery of Art (WGA), fotografia pubblicata su  
Wikipedia:

[https://it.wikipedia.org/wiki/Cupola\\_del\\_Brunelleschi#/media/File:Giorgio\\_Vasari\\_-\\_The\\_Last\\_Judgment\\_-\\_WGA24313.jpg](https://it.wikipedia.org/wiki/Cupola_del_Brunelleschi#/media/File:Giorgio_Vasari_-_The_Last_Judgment_-_WGA24313.jpg)



**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

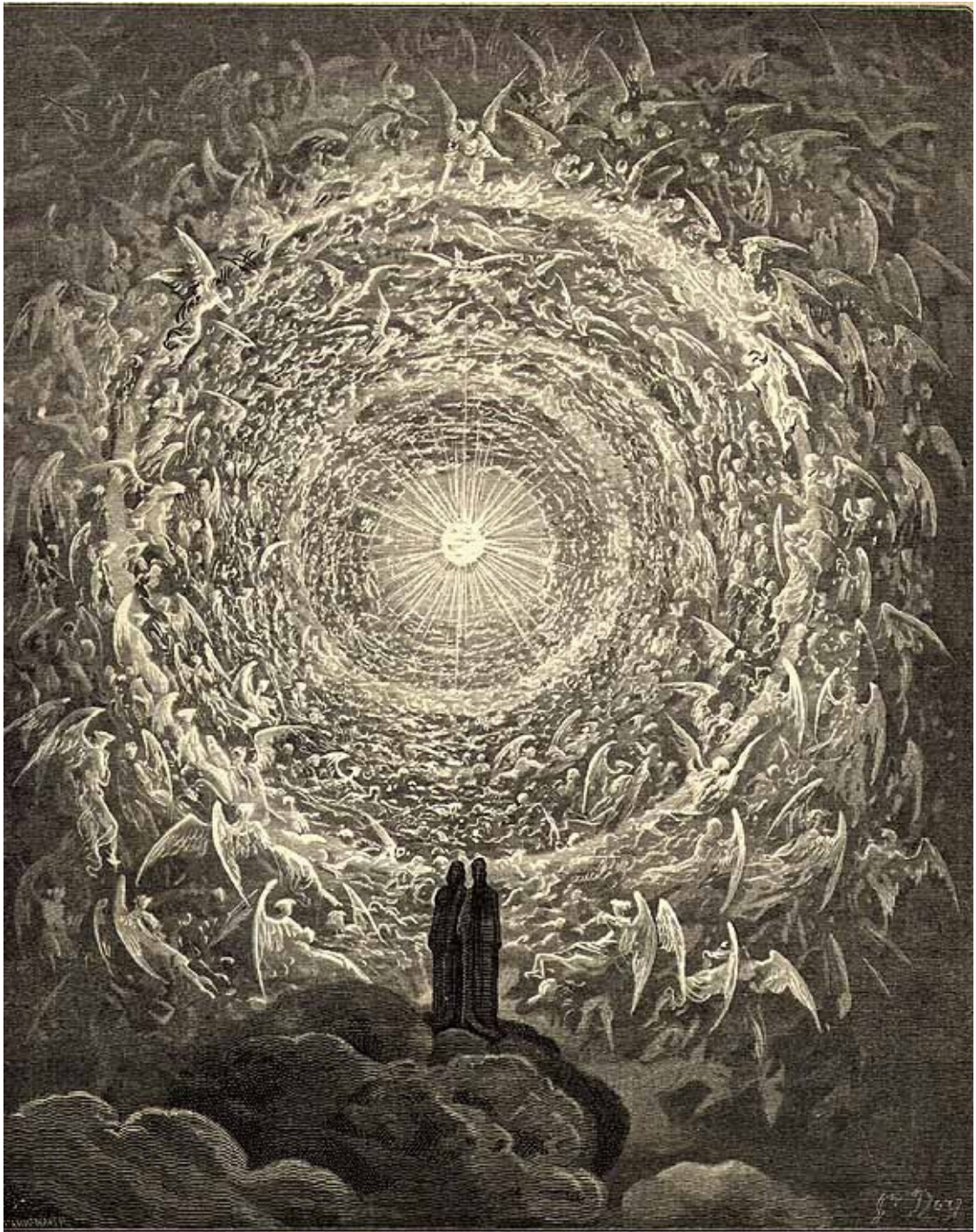
---



**FIG. 3.** Gustave Dorè, *Candida Rosa*, 1880

Fonte: Alighieri Dante, "La Divina Commedia" illustrata da Gustavo Dorè e dichiarata con note tratte dai migliori commenti per cura di Eugenio Camerini, Milano, Stabilimento dell'Editore Edoardo Sonzogno, 1880





IN FORMA DUNQUE DI CANDIDA ROSA  
MI SI MOSTRAVA LA MILIZIA SANTA,  
CHE NEL SUO SANGUE CRISTO FECE SPOSA.

PARADISO, c. XXXI, v. 1-2.

**FIG. 4.** Cupola del Mausoleo di Galla Placidia, prima metà del V sec.  
d.C., Ravenna

Fonte: fotografia di Franco Cosimo Panini Editore, pubblicata online  
su <http://www.foliamagazine.it/viaggio-in-italia-il-mausoleo-di-galla-placidia-a-ravenna/>





**FIG. 5.** Cupola della Chiesa di Santa Maria in Solario, metà XII sec.,  
Brescia

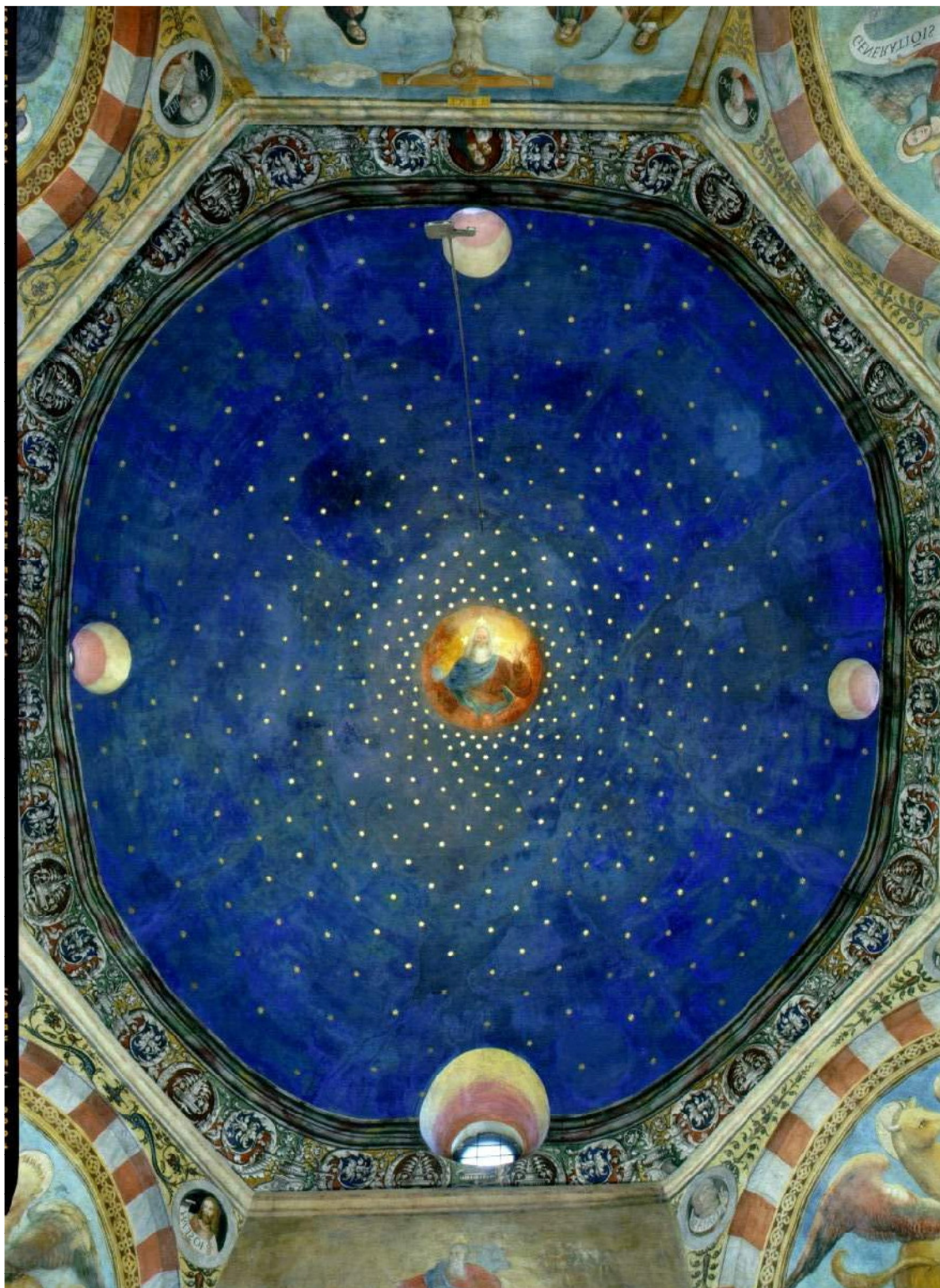
Fonte: fotografia di BresciaTourism, pubblicata online su  
[http://www.ilgiornale.ch/Joomla1/index.php?option=com\\_content&view=articl  
e&id=4206:brescia-tutta-da-scoprire&catid=28&Itemid=47](http://www.ilgiornale.ch/Joomla1/index.php?option=com_content&view=article&id=4206:brescia-tutta-da-scoprire&catid=28&Itemid=47)



**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 6.** Cupola del Duomo di Siena (Cattedrale di Santa Maria Assunta), 1481-1494, Siena

Fonte: fotografia di Wavelet Photography, pubblicata online su  
<http://www.wavelet.me/photography/>



**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**FIG. 7.** Apollodoro di Damasco, *Pantheon*, cupola, 118-128 d.C.,  
Roma

Fonte: fotografia pubblicata online su

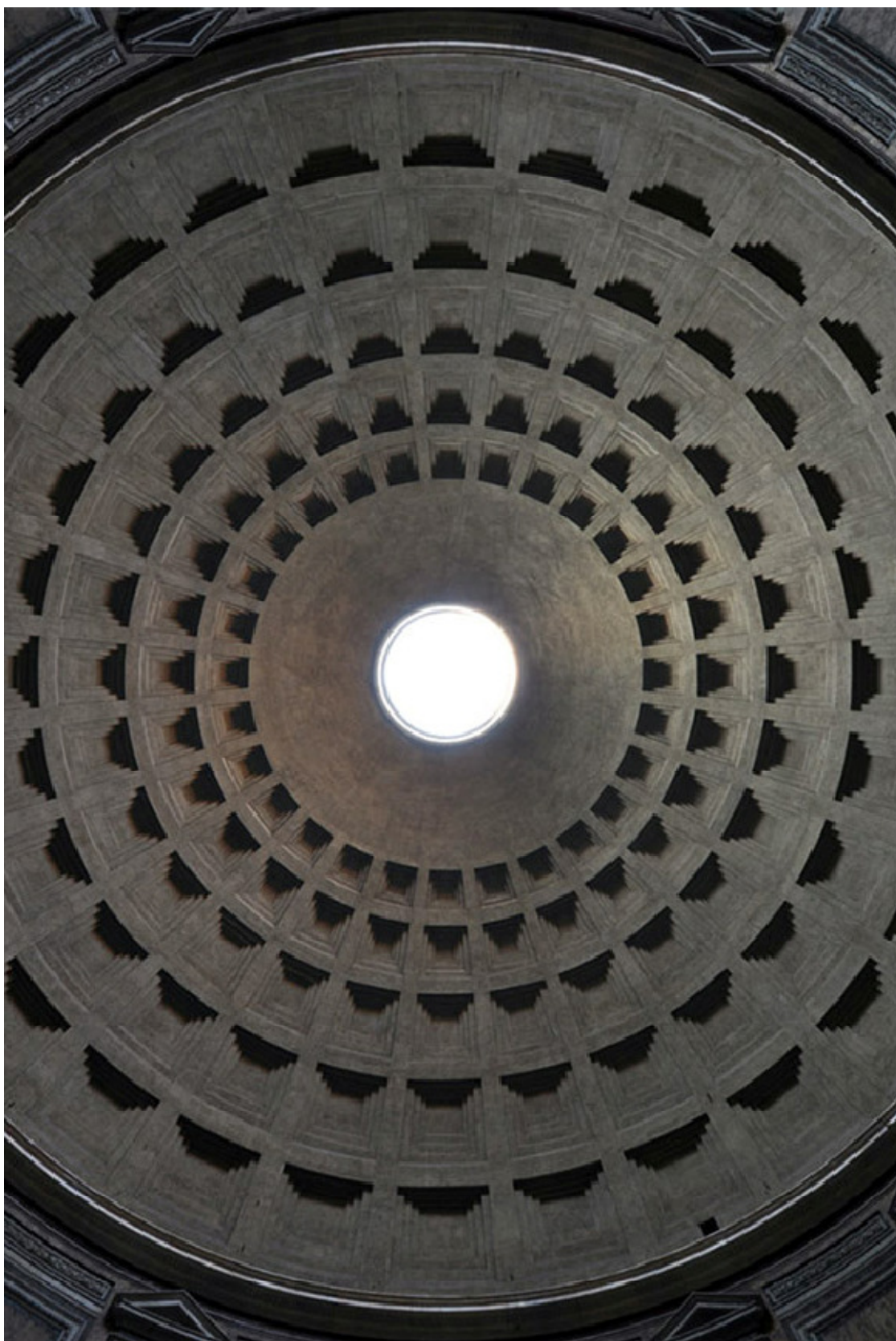
<http://www.didatticarte.it/public/pantheon-cupola.jpg>



**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

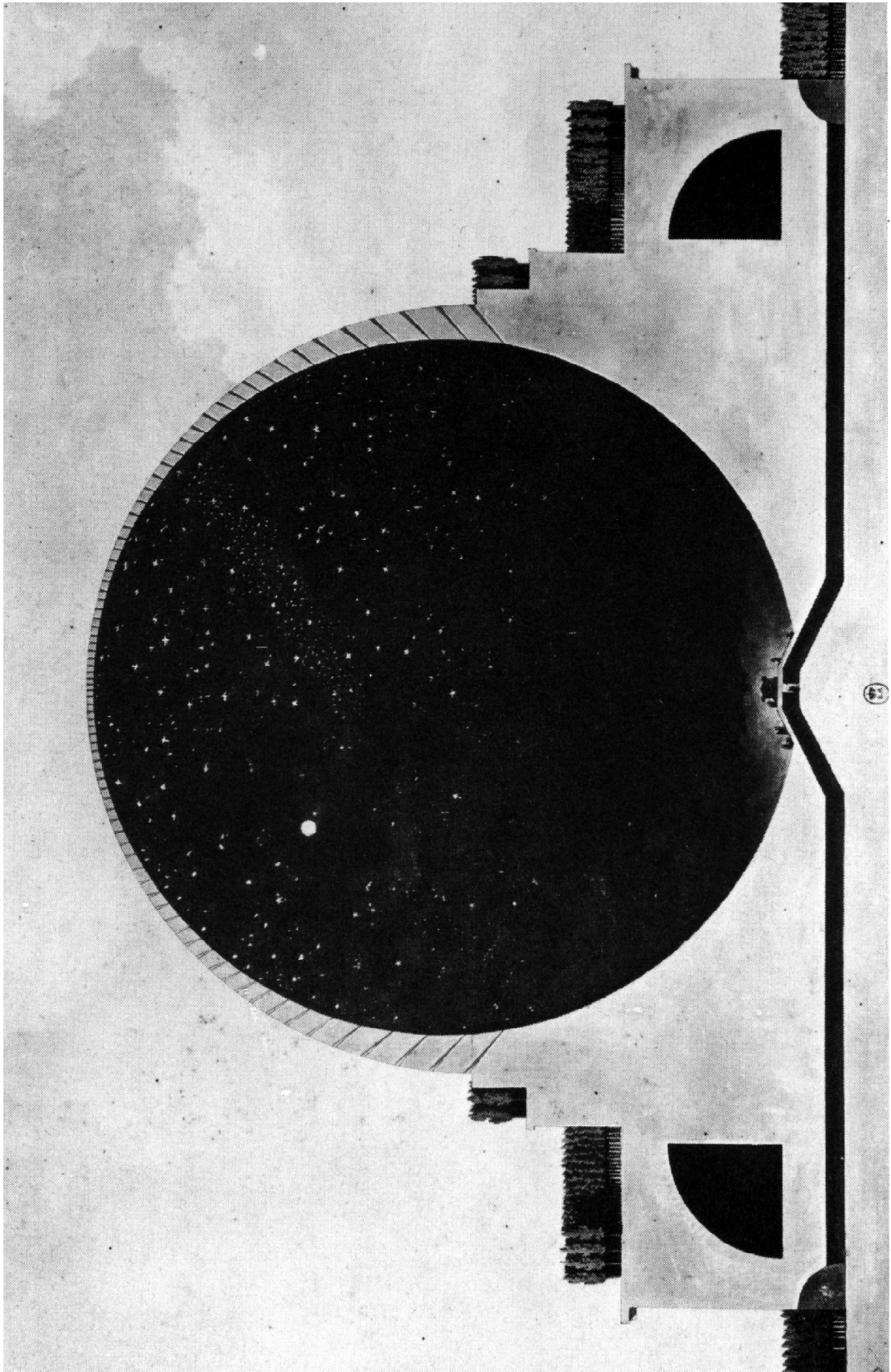
---





**FIG. 8.** Étienne-Louis Boullée, Progetto per il *Cenotafio di Newton*,  
1784

Fonte: Paris, BNF, Estampes, Ha 57 Rés. format 4, Planche 8



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

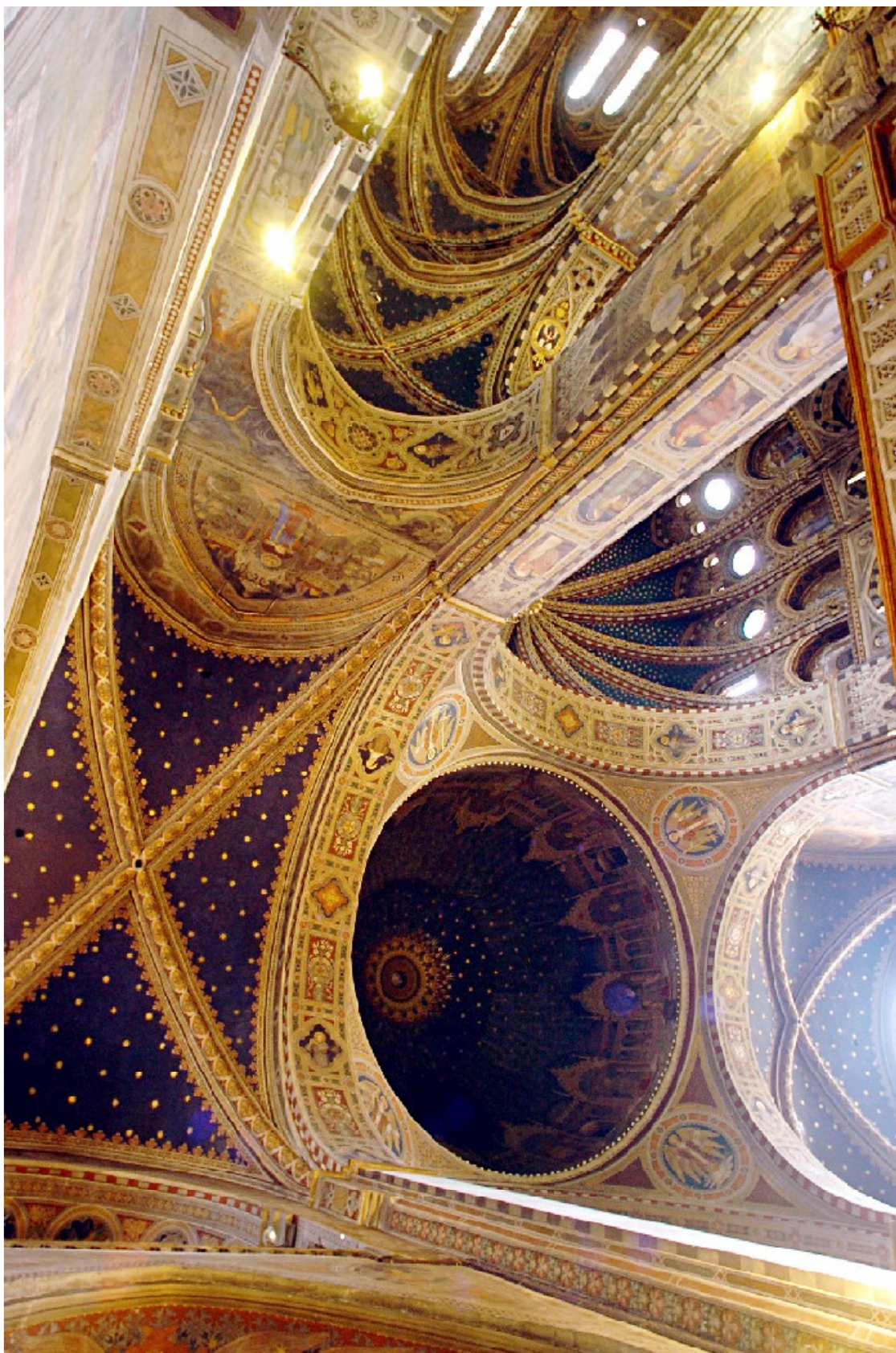
Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 9.** Cupola sull'altare maggiore della Basilica di Sant'Antonio,  
1232-1310, Padova

Fonte: fotografia pubblicata online su: [http://4.bp.blogspot.com/-7ZUKh-vCrxI/UcAI0giG4oI/AAAAAAAAAH2E/DF\\_LnlQoQdU/s1600/volte\\_basilica\\_sant'antonio%5B1%5D.jpg](http://4.bp.blogspot.com/-7ZUKh-vCrxI/UcAI0giG4oI/AAAAAAAAAH2E/DF_LnlQoQdU/s1600/volte_basilica_sant'antonio%5B1%5D.jpg)





**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 10.** Cosma Indicopleuste, Rappresentazione del cosmo

Fonte: Cosma Indicopleuste, "Topographia Christiana", XI sec.,  
Firenze, Biblioteca Medicea Laurenziana, Pl. 82.10, cc. 95v-96r



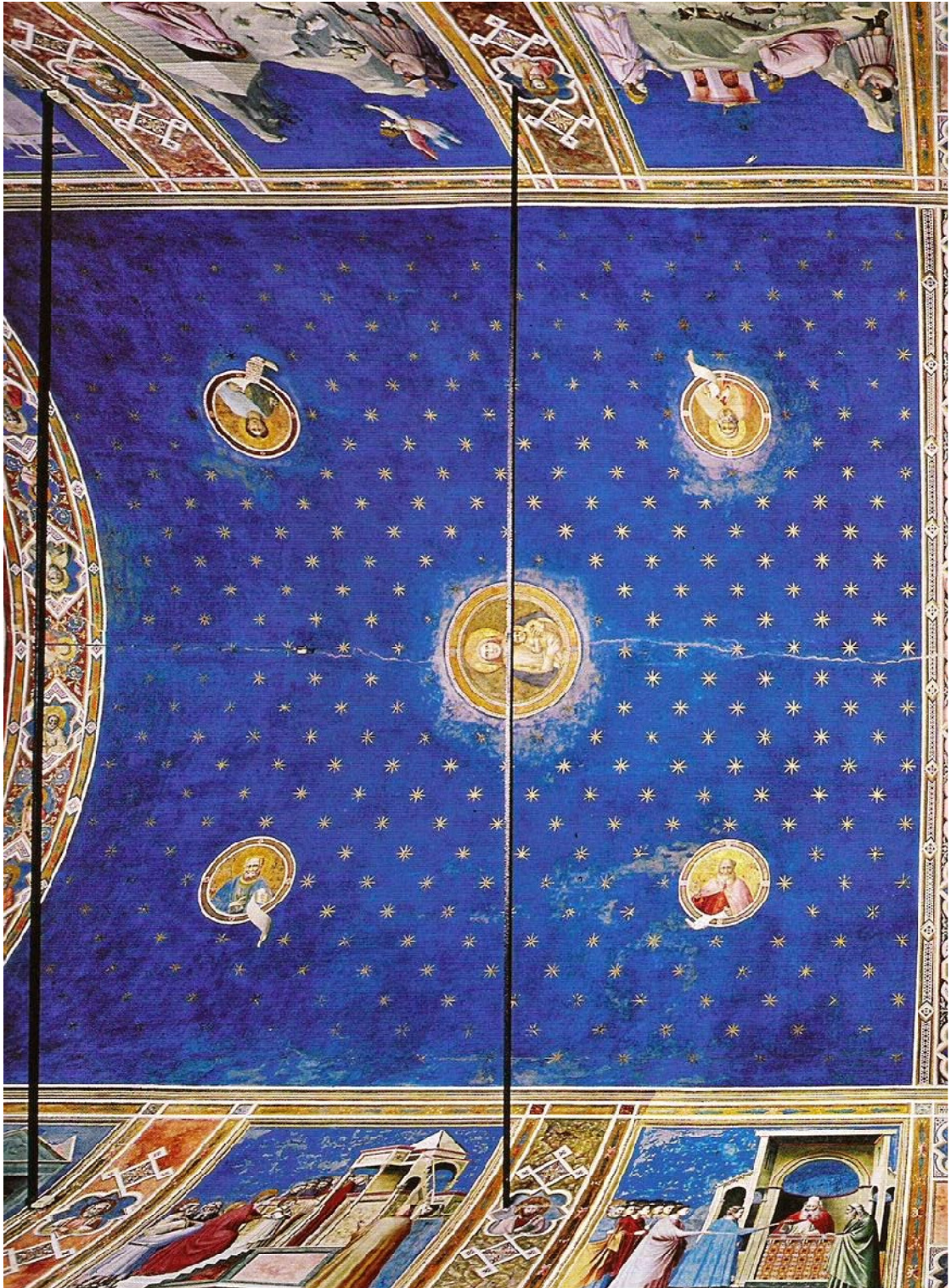


**FIG. 11.** Giotto, Affreschi sulla volta della Cappella degli Scrovegni,  
XIV sec., Padova

Fonte: fotografia pubblicata online su

<http://chiviaggiaimpara.blogspot.it/p/italia-veneto-la-cappella-degli.html>





**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

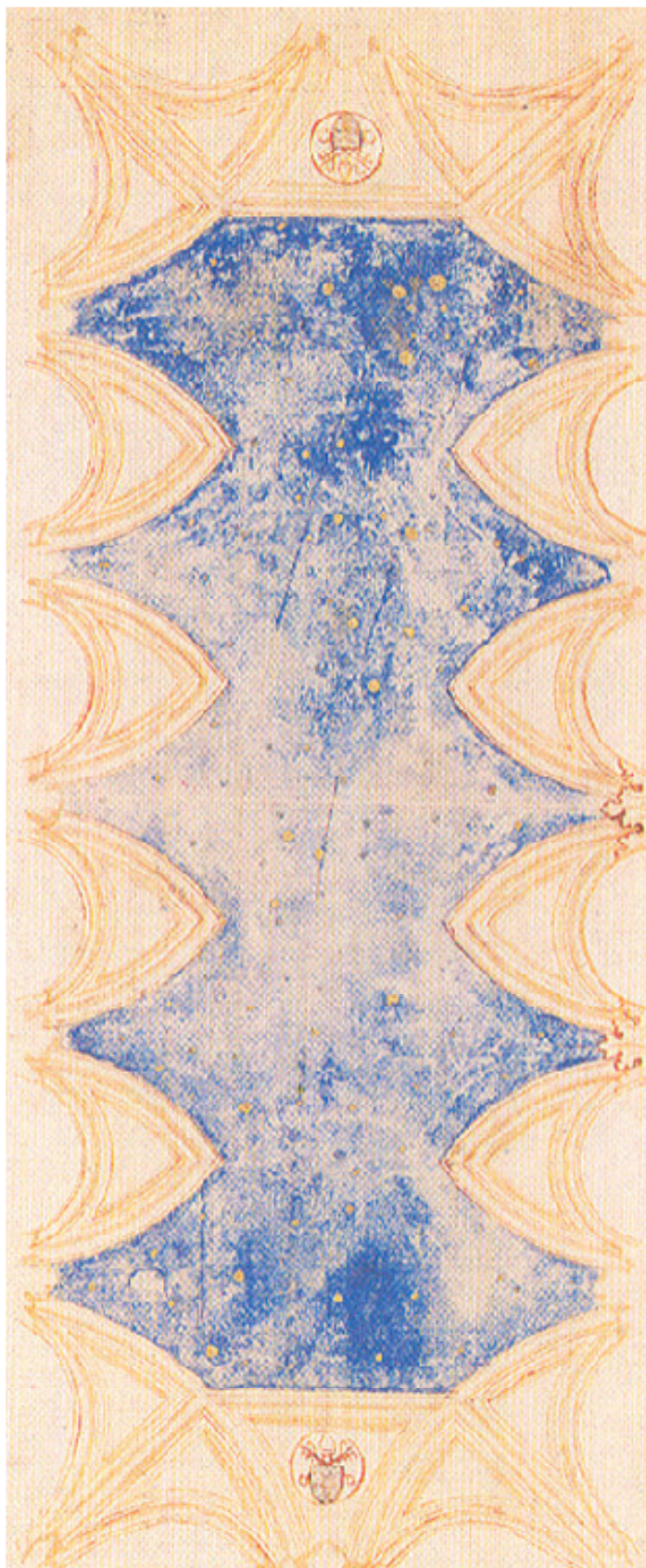
Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 12.** Piermatteo d'Amelia, Progetto per l'affresco sulla volta della Cappella Sistina, XVI sec.

Fonte: Gabinetto dei disegni e delle stampe degli Uffizi, Firenze

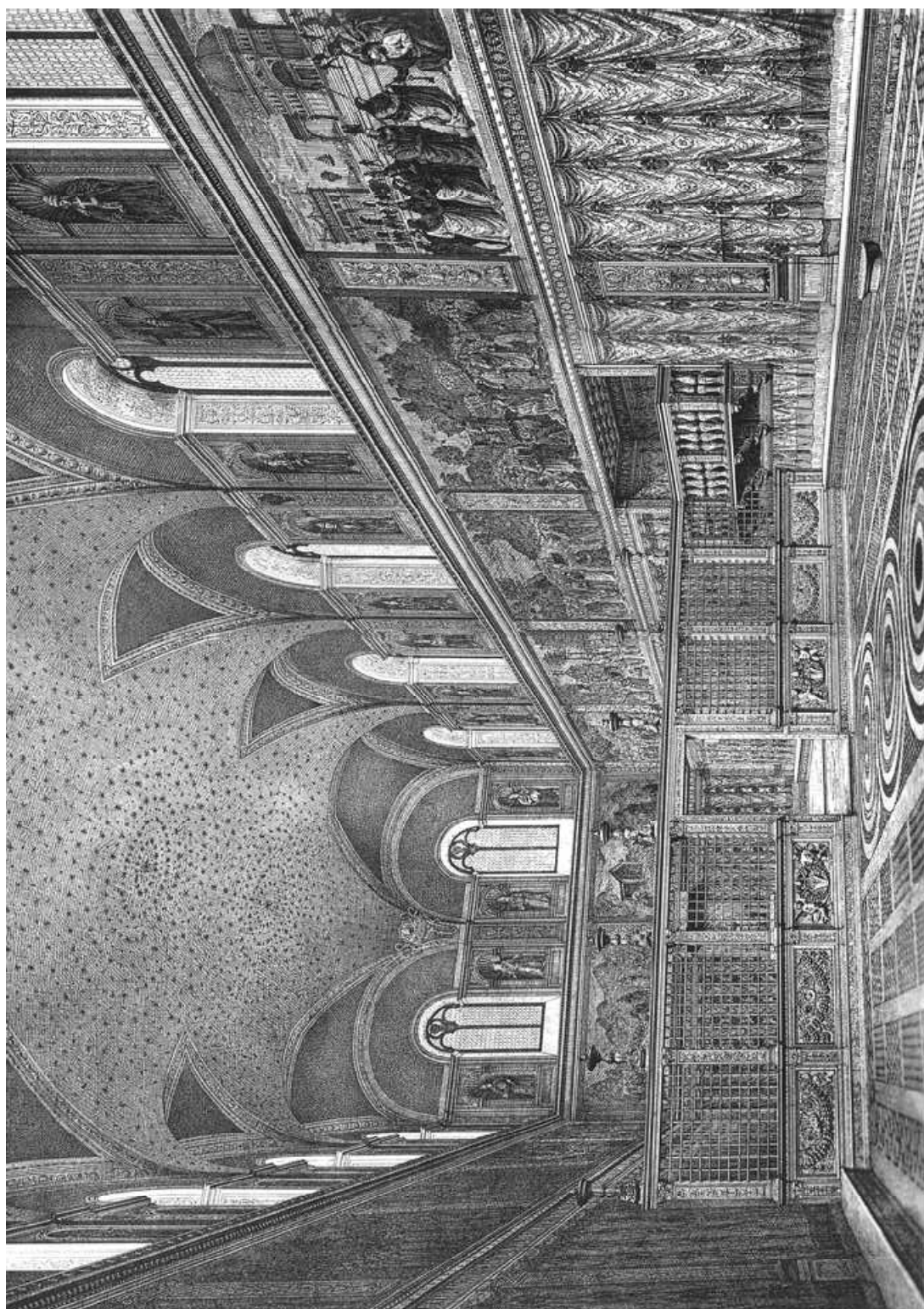




**FIG. 13.** Cappella Sistina, Stampa del XIX sec.

Fonte: illustrazione pubblicata online su

[https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cappella\\_sistina,\\_ricostruzione\\_dell  
%27interno\\_prima\\_degli\\_interventi\\_di\\_Michelangelo,\\_stampa\\_del\\_XIX\\_secol  
o.jpg](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cappella_sistina,_ricostruzione_dell%27interno_prima_degli_interventi_di_Michelangelo,_stampa_del_XIX_secolo.jpg)



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 14.** Karl Friedrich Schinkel, Scenografia *Salone delle stelle nel palazzo della Regina della Notte*, 1815

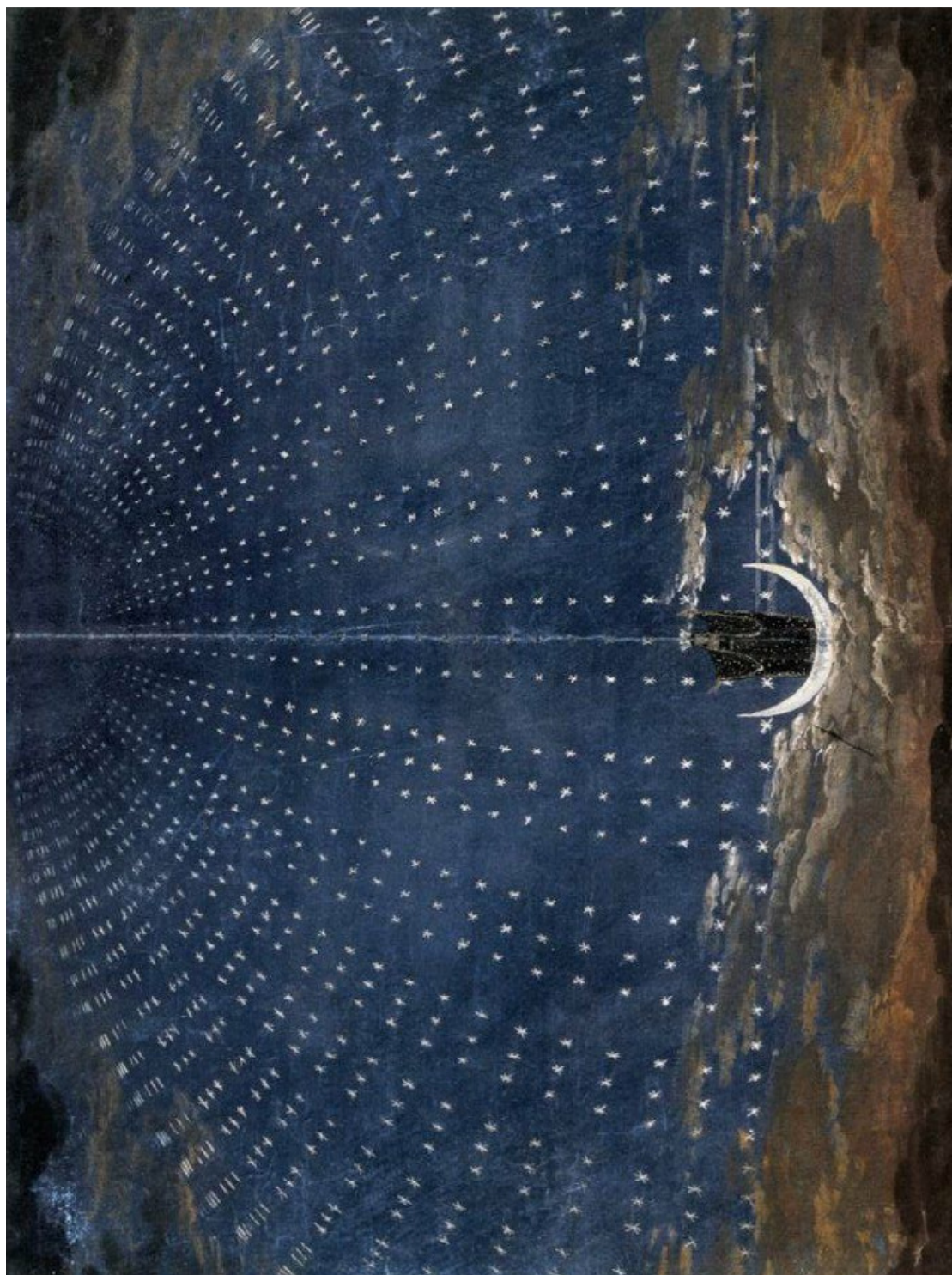
Fonte: Gemäldegalerie, Berlino



**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



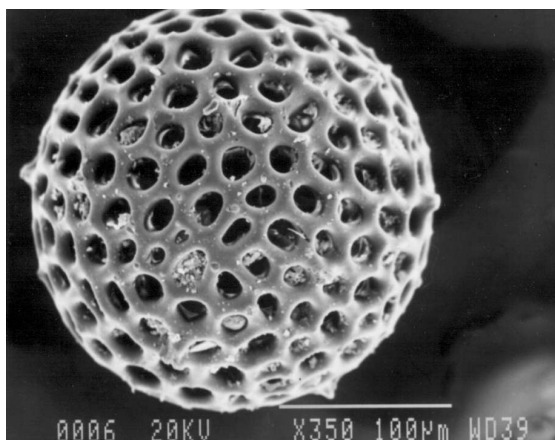


**FIG. 15.** Alcune forme strutturali naturali sferiche:

Radiolare visto al microscopio elettronico; Taràssaco; bolla di sapone;  
corpi celesti (sistema Terra-Luna)

Fonte: Radiolare - Laboratorio di Microscopia SEM,  
<http://web.tiscali.it/adrianafiori/sem.html>);

Taràssaco, bolla di sapone;, corpi celesti (sistema Terra-Luna) - Google  
Immagini



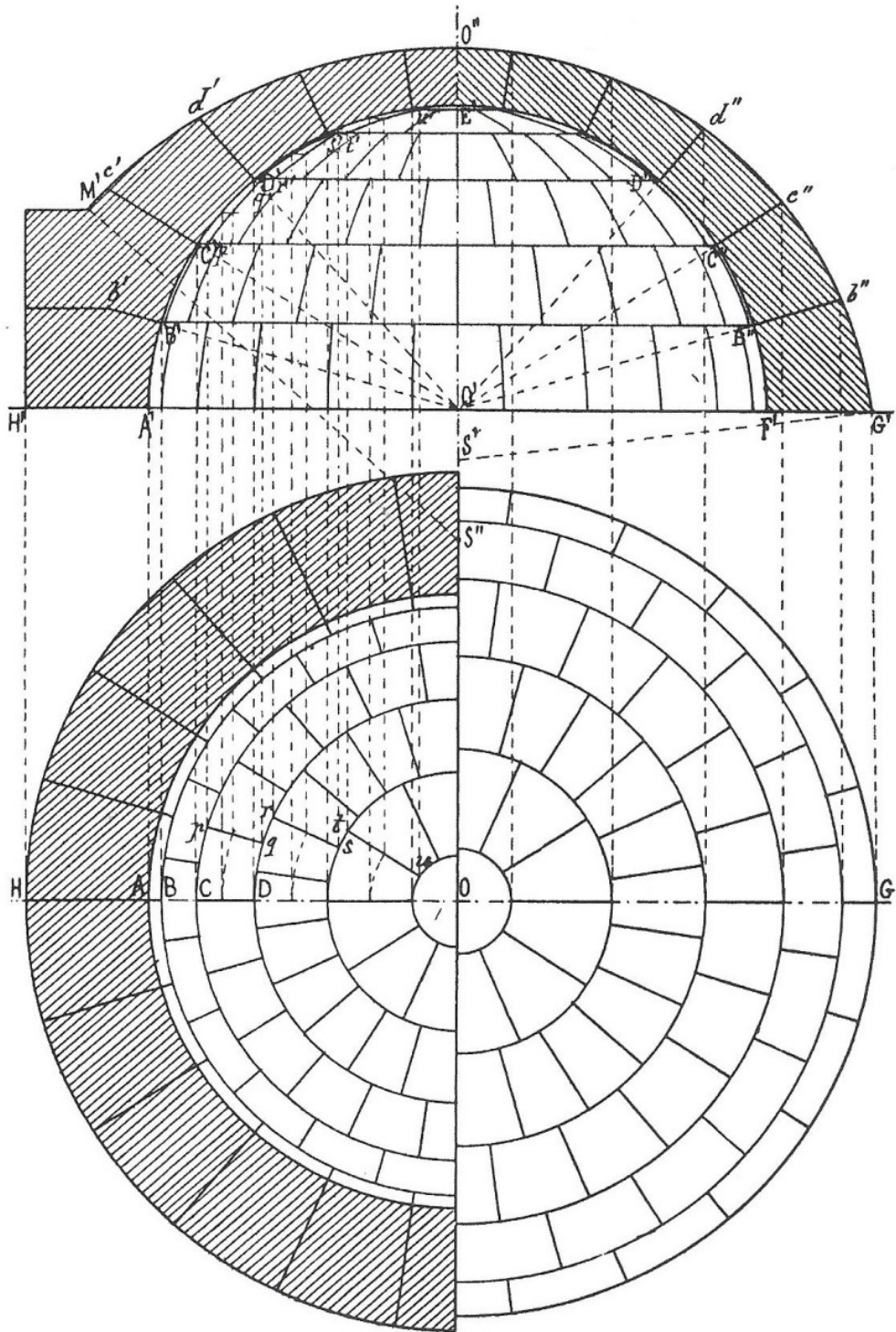
## **CAPITOLO II.**

### **Analisi del metodo architettonico storico di suddivisione della cupola lapidea in elementi strutturali**

---

**FIG. 17.** J. Chaix, Cupola emisferica, pianta ipografica e sezione,  
1890

Fonte: Chaix J., "Traité de coupe des pierres", Parigi, 1890, Biblioteca  
"Mimar Sinan", Dipartimento DICAR, Politecnico di Bari



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 18.** Interno della Chiesa di Ognissanti, 1061-1078, Valenzano  
(Bari)

Fonte: Fotografia di Silvia Chieco, pubblicata online su  
[http://www.arcarc.com/visualizza\\_scheda.php?id=129](http://www.arcarc.com/visualizza_scheda.php?id=129)



**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**FIG. 19.** Cupola della Chiesa di Ognissanti, 1061-1078, Valenzano (Bari)

Fonte: Leonardis Enrica, "Architettura romanica pugliese. Il progetto e la costruzione in pietra portante dell'edificio per il culto", 2015, pag.30



**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 20.** Interno del Duomo di San Corrado, seconda metà XII sec.-  
XIII sec., Molfetta (Bari)

Fonte: Google Immagini

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---

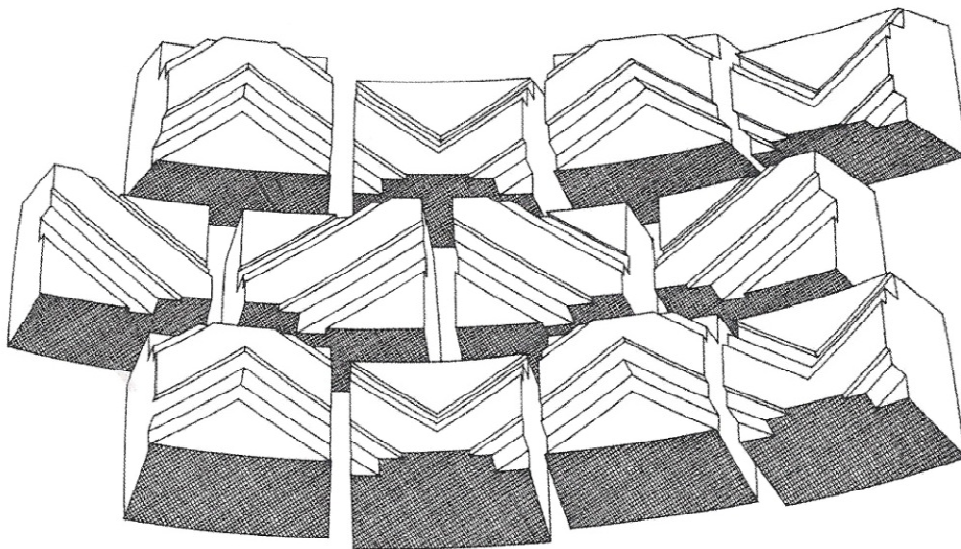
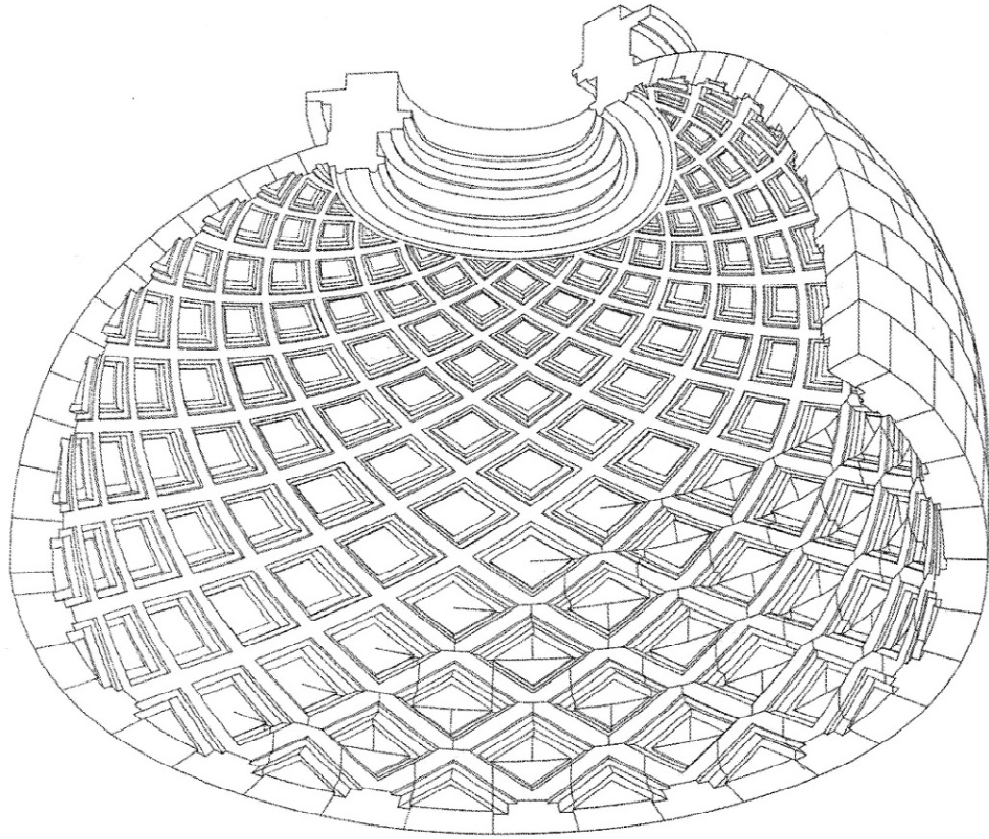


**FIG. 22.** Philippe Potié, Studio della cupola della Cappella del Castello di Anet progettata da Philibert Delorme

Fonte: Potié Philippe, "Philibert de l'Orme. Figures de la pensée constructive", Marseille, Editions Parenthèses, 1996, pp.116,117,

Illustrazione presente in Defilippis Francesco, "Architettura e stereotomia. Caratteri dell'architettura in pietra da taglio in area mediterranea", Roma, Gangemi Editore, 2012, pag. 157





**FIG. 23.** Rodolphe Pfnor, Cappella di Anet, 1867

Fonte: Pfnor Rodolphe, "Monographie du Chateau d'Anet construit par Philibert Delorme en MDXLVIII, dessinée, gravée, et accompagnée d'un text historique & descriptif", 1867, Kyoto University Library, Planche IV





**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

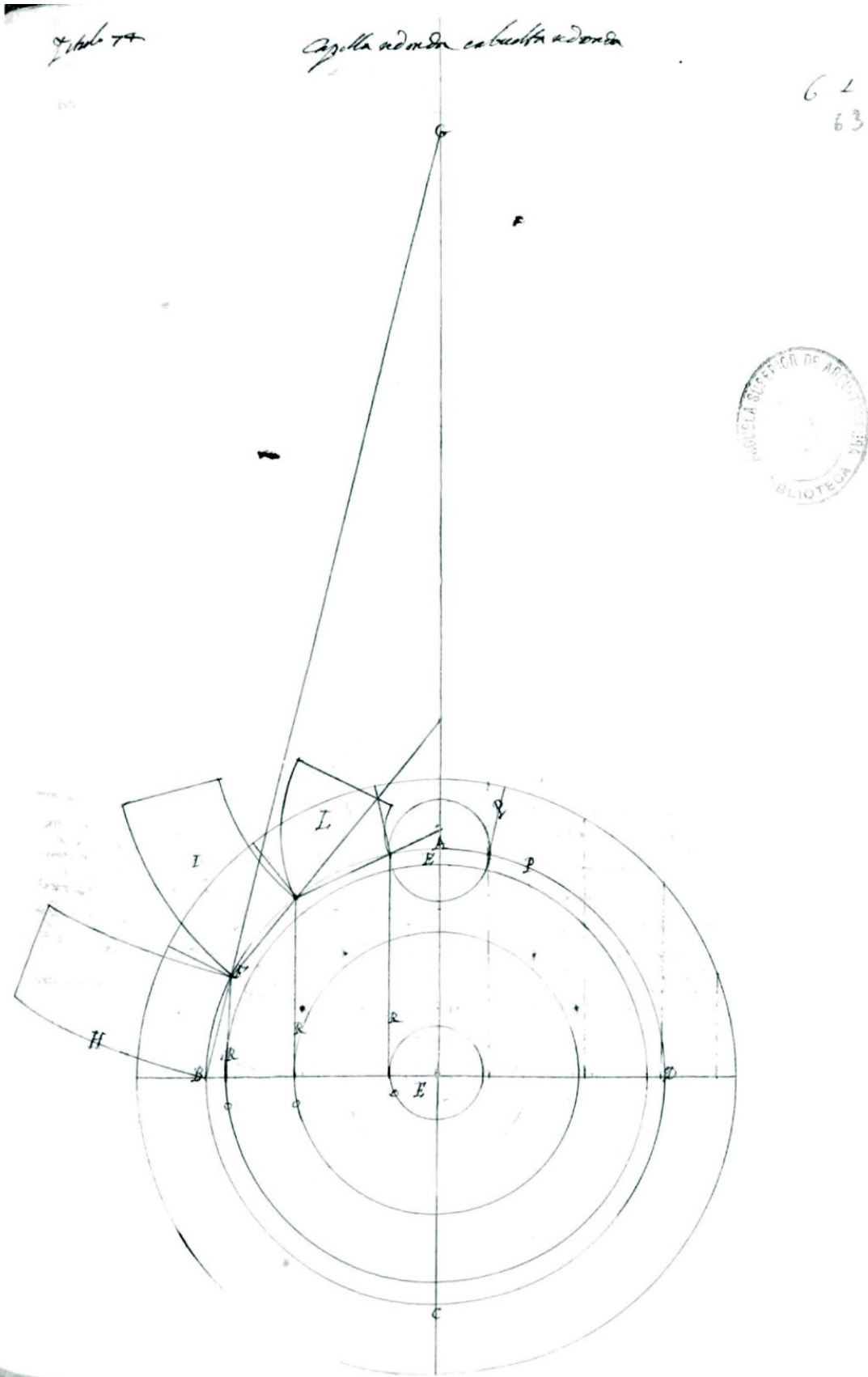
Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

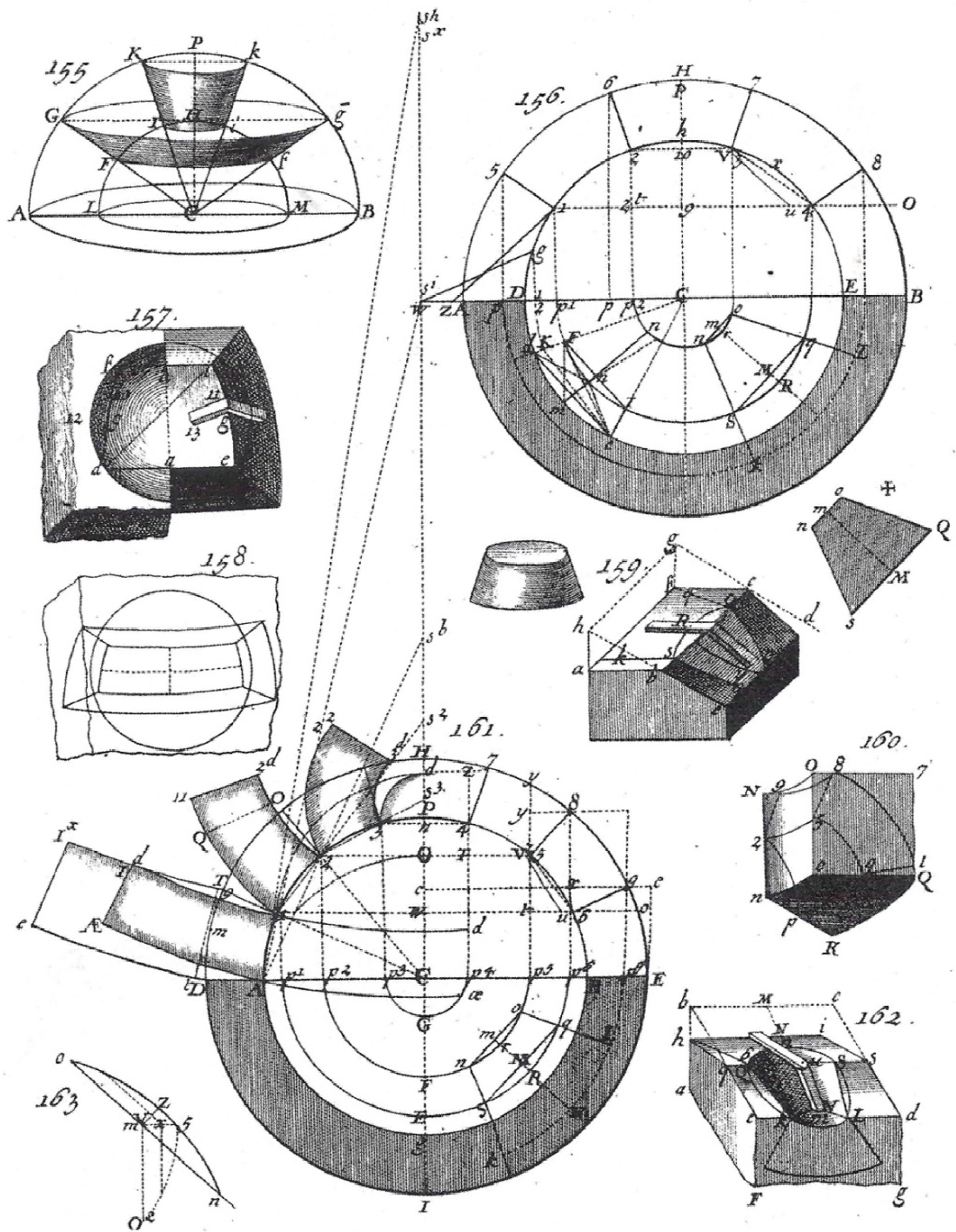
**FIG. 24.** Alonso de Vandelvira, *Capilla redonda en buelta redonda*

Fonte: de Vandelvira Alonso, "Libro de Traças de Cortes de Piedras",  
1575-1591, E.T.S. Universidad Politécnica de Madrid, Título 74



**FIG. 28.** Amédée François Frézier, Tracciati geometrici per la suddivisione sferica ed il taglio dei conci attraverso la proiezione conica

Fonte: Frézier Amédée François, “La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des bâtimens civils & militaires, ou Traité de stereotomie à l'usage de l'architecture”, 2 tomi, Strasburgo-Parigi, 1737-1739; ristampato da Jacques LAGET-L.A.M.E., Nogent-le-Roi, 1980, Tome second, Planche 53, pag. 339, Biblioteca “Mimar Sinan”, Dipartimento DICAR, Politecnico di Bari



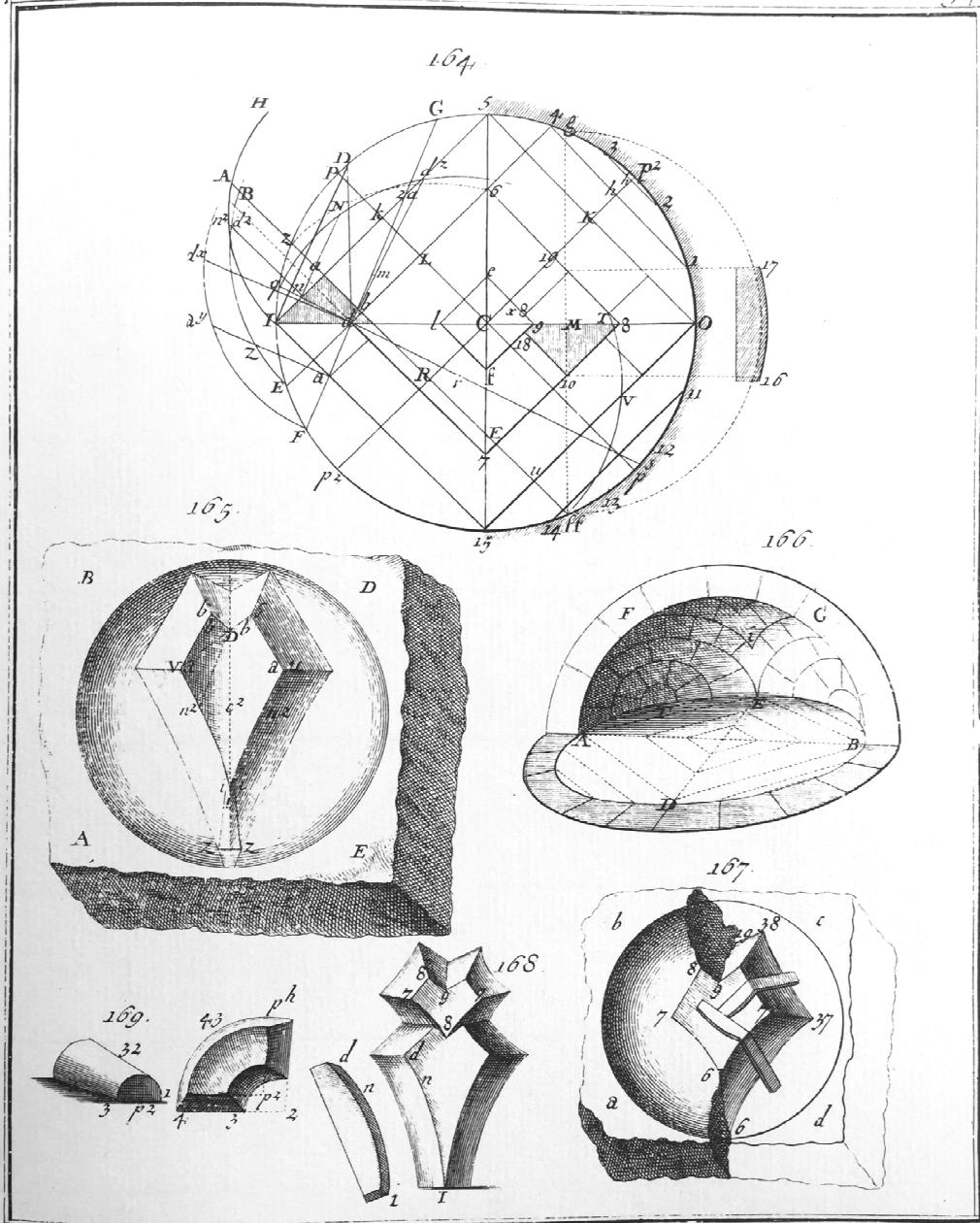
**FIG. 29.** Amédée François Frézier, Tracciati geometrici per la suddivisione sferica ed il taglio dei conci attraverso la proiezione conica

Fonte: Frézier Amédée François, “La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des bâtimens civils & militaires, ou Traité de stereotomie à l'usage de l'architecture”, 2 tomi, Strasburgo-Parigi, 1737-1739; ristampato da Jacques LAGET-L.A.M.E., Nogent-le-Roi, 1980, Tome second, Planche 54, pag. 339, fig. 166

Biblioteca “Mimar Sinan”, Dipartimento DICAR, Politecnico di Bari

page 339

Pl. 54

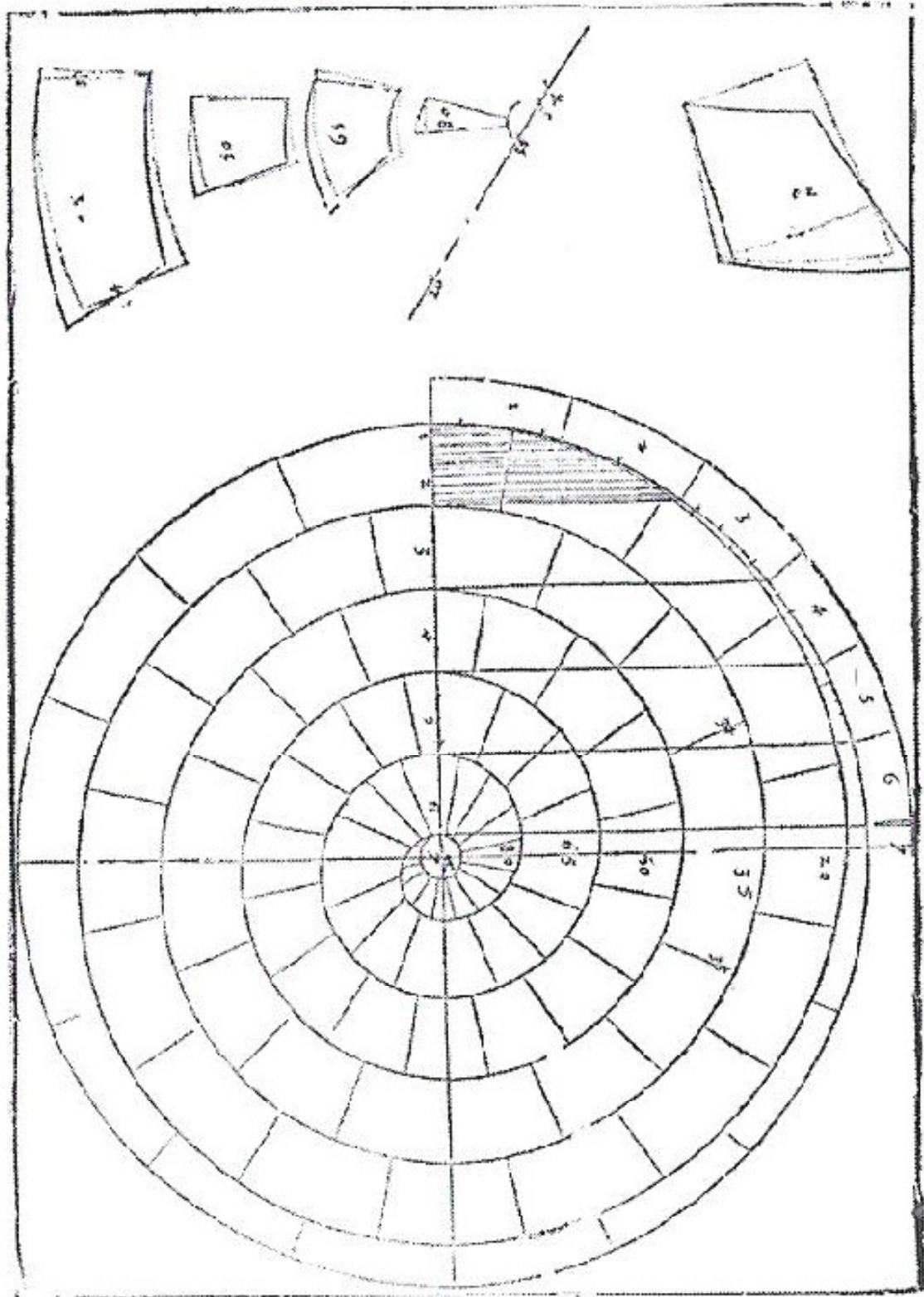


**FIG. 30.** Philibert Delorme, Cupola elicoidale, 1567, in “Premier Tome de l'Architecture”

Fonte: Rabasa Díaz Enrique, “Estereotomía: teoría y práctica, justificación y alarde”, in “Informes de la construcción” a cura di E. Díaz, A. López-Mozo, CSIC, Instituto de Ciencias de la Construcción Eduardo Torroja, Consejo Superior de investigaciones científicas, Volumen 65, N° EXTRA-2, Madrid, ottobre 2013, pag. 13

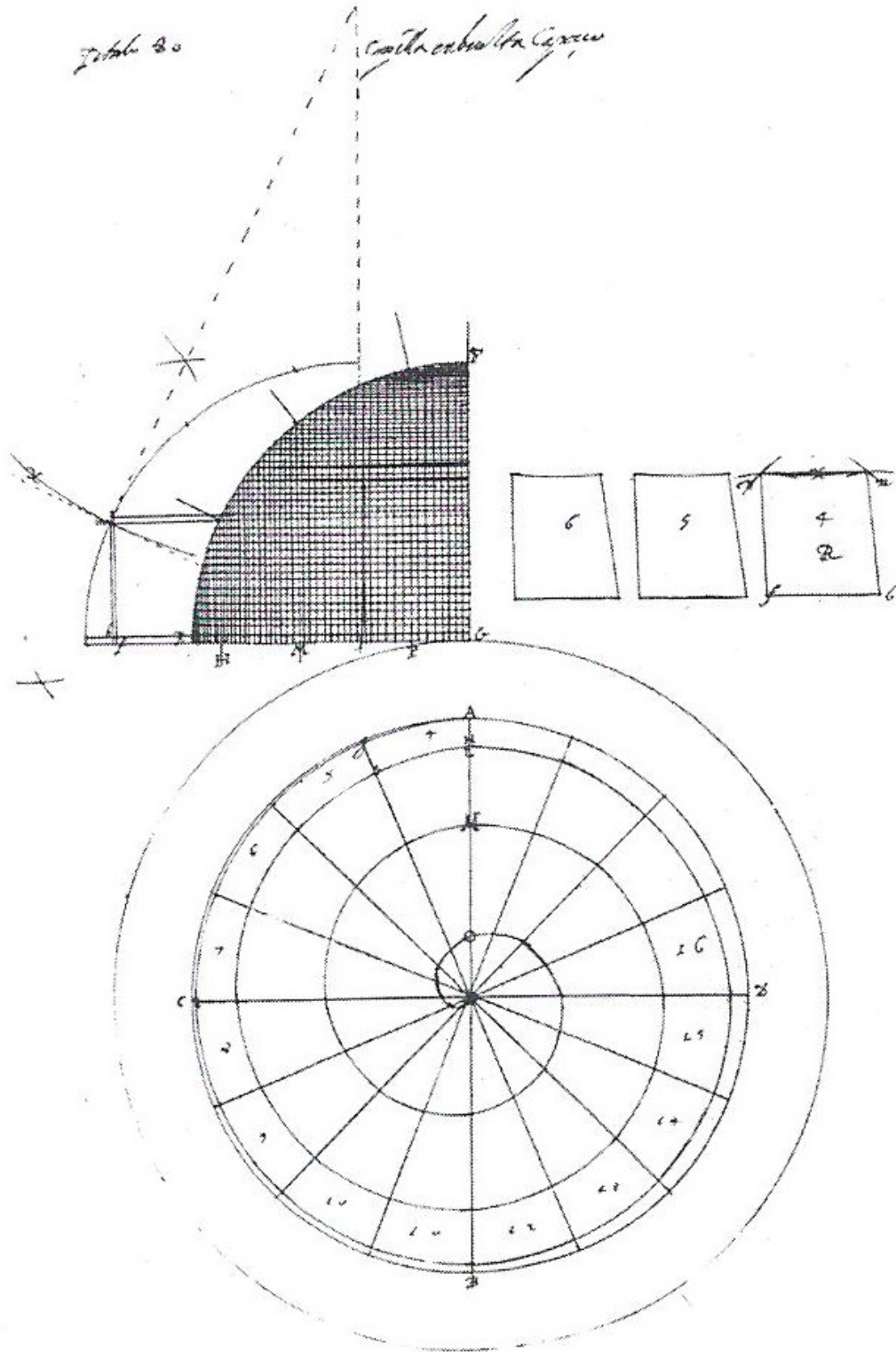


LIVRE IV. DE L'ARCHITECTURE



**FIG. 31.** Alonso de Vandelvira, *Capilla redonda en buelta Capazo*,  
Cupola elicoidale

Fonte: de Vandelvira Alonso, "Libro de Traças de Cortes de Piedras",  
1575-1591, E.T.S. Universidad Politécnica de Madrid, Título 80



**FIG. 32.** Cupola all'interno della Cattedrale di Murcia, XVI sec.

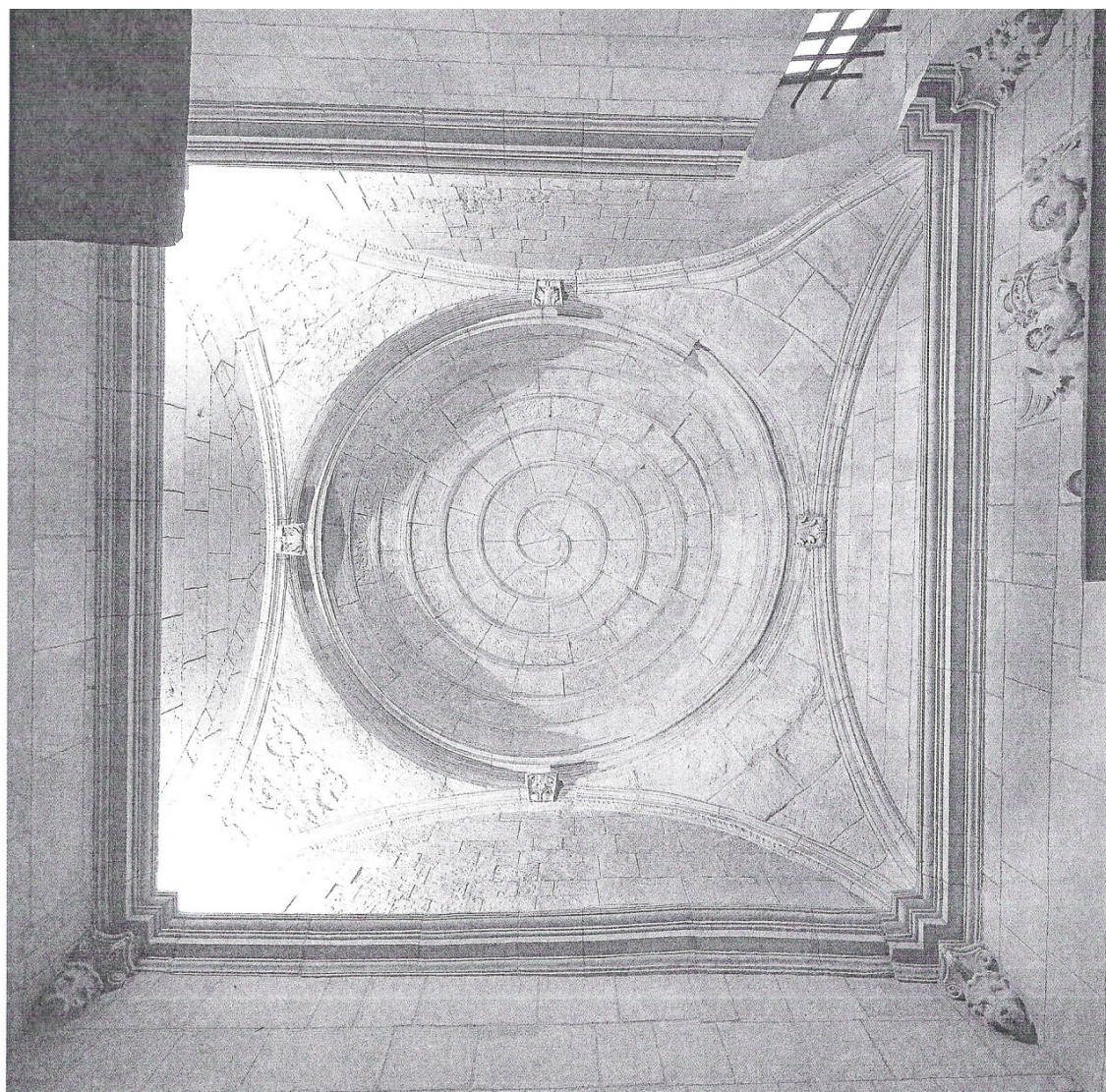
Fonte: Calvo López José, Alonso Rodríguez Miguel Ángel, Rabasa Díaz Enrique, López-Mozo Ana, "Cantería renacentista en la Catedral de Murcia", Murcia, Colegio Oficial de Arquitectos de Murcia, 2005, pp. 124



**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

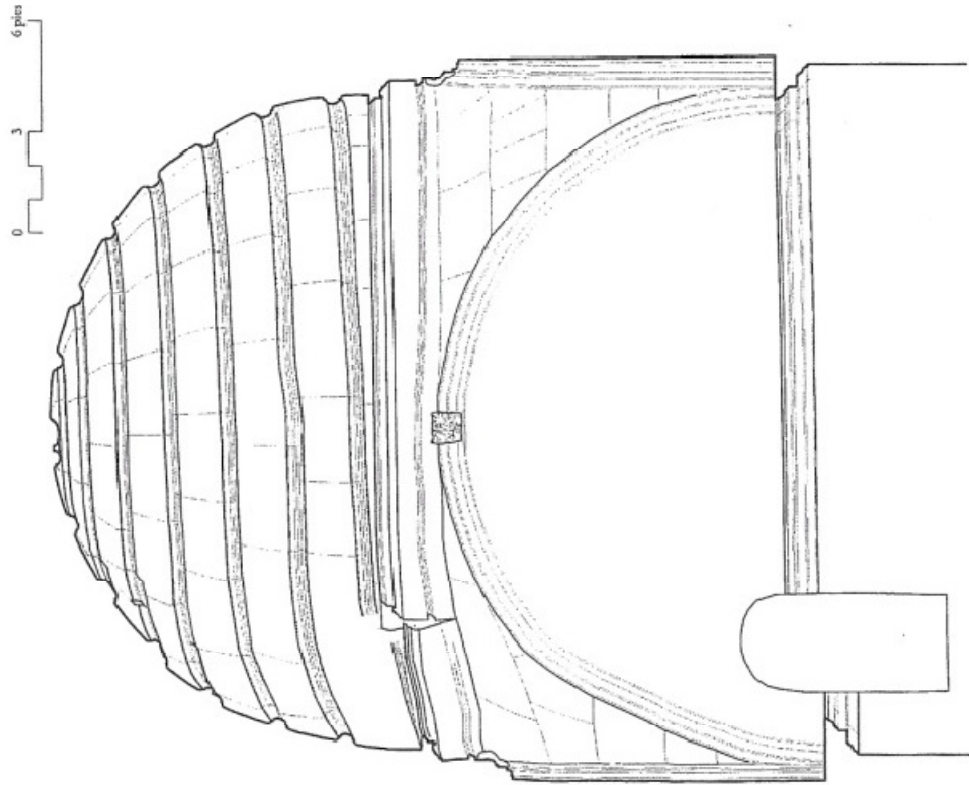
*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---

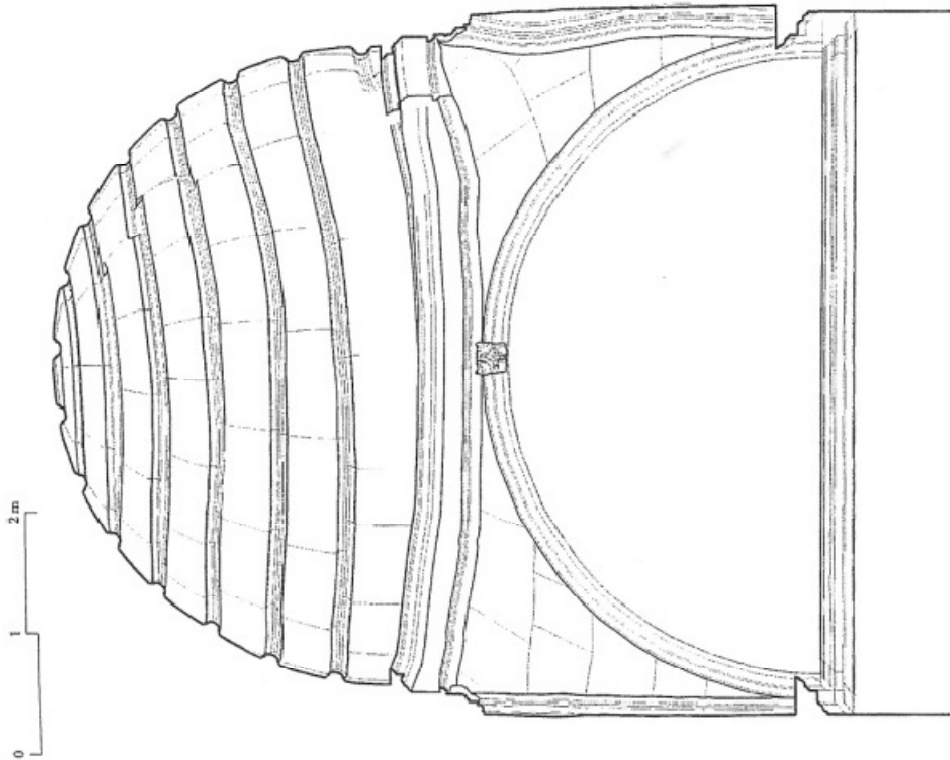


**FIG. 33.** Rilievi della cupola all'interno della Cattedrale di Murcia,  
XVI sec.

Fonte: Calvo López José, Alonso Rodríguez Miguel Ángel, Rabasa  
Díaz Enrique, López-Mozo Ana, "Cantería renacentista en la  
Catedral de Murcia", Murcia, Colegio Oficial de Arquitectos de  
Murcia, 2005, pp. 127



*Sección hacia el testero de levante.*



*Sección hacia el testero norte.*



### **CAPITOLO III.**

#### **Analisi del metodo architettonico di suddivisione della cupola in pietra da taglio in elementi strutturali, attraverso i poliedri sferici**

---

**FIG. 34.** Amédée François Frézier, *Geometria plura praesidia praestat  
Architecturae*, 1737-1739

Fonte: Frézier Amédée François, “La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des bâtimens civils & militaires, ou Traité de stereotomie à l'usage de l'architecture”, 2 tomi, Strasburgo-Parigi, 1737-1739; ristampato da Jacques LAGET-L.A.M.E., Nogent-le-Roi, 1980, Tome second, seconda pagina dopo il frontespizio

Biblioteca “Mimar Sinan”, Dipartimento DICAR, Politecnico di Bari



onnari inv. et del.

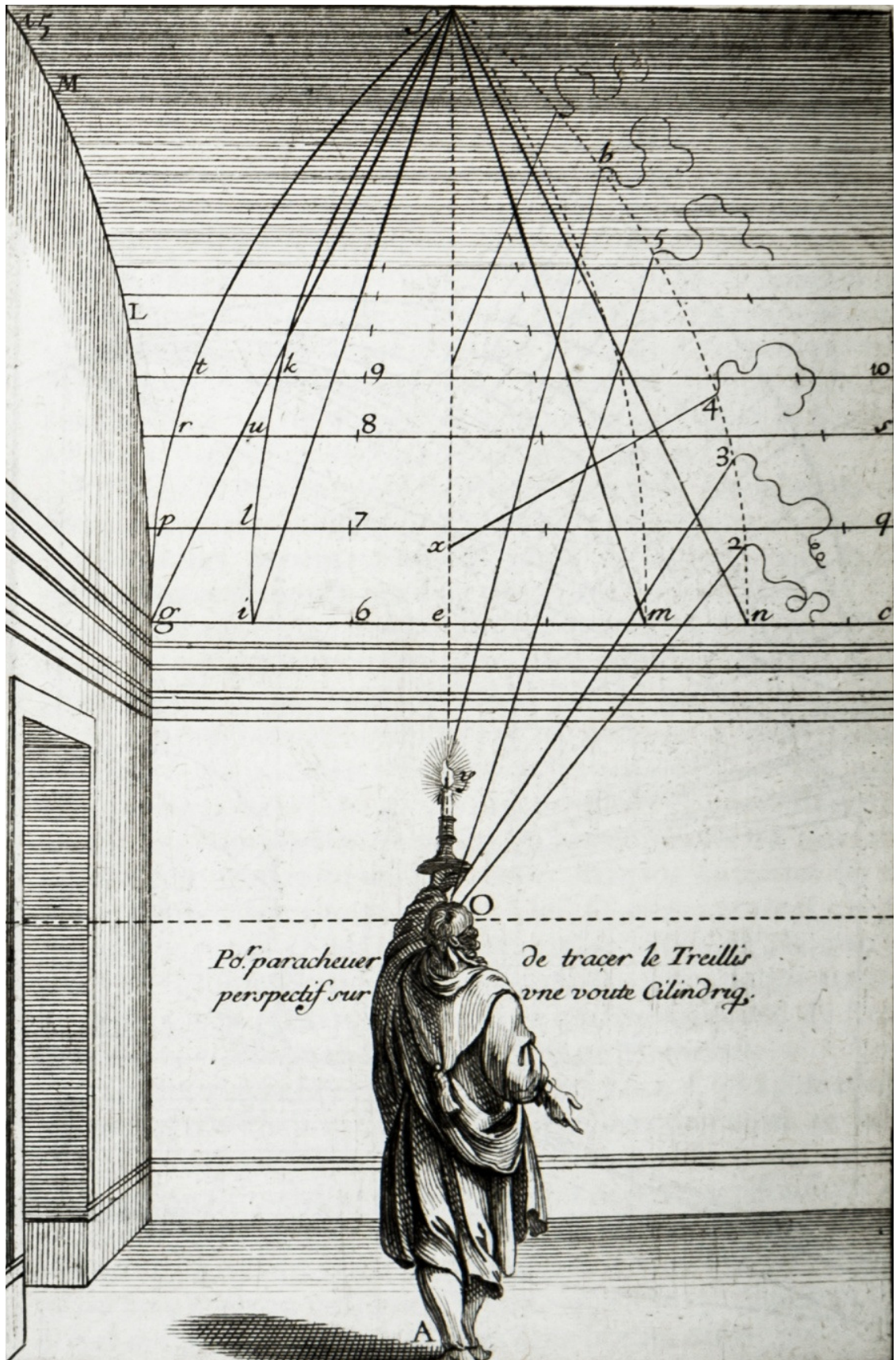
Heriset Sculp.

*Geometria plura prasidia praestat Architecturae. Vitruv. Lib. I.*

**FIG. 35.** Abraham Bosse, *Po.r parachuteur de tracer le Treillis / perspectif sur une voute cilindriq(ue)*, 1653

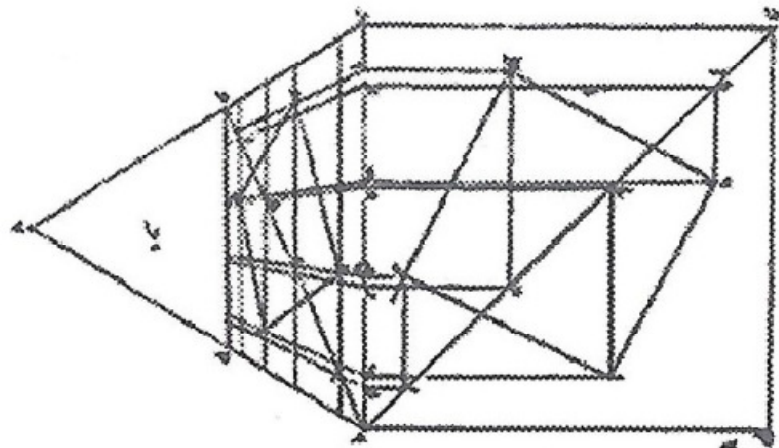
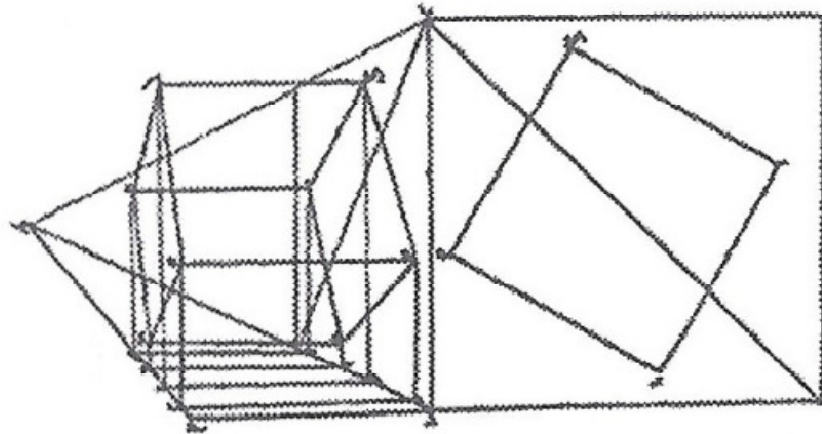
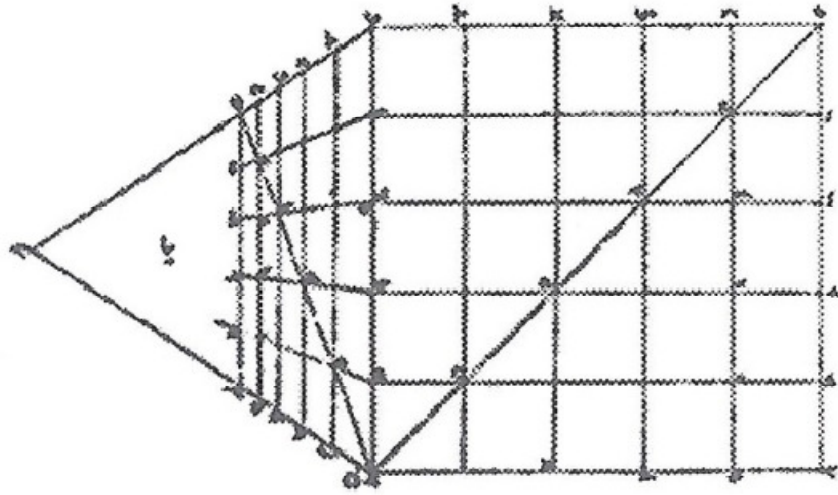
Fonte: Bosse Abraham, "Moyen Universel de pratiquer la Perspective sur les Tableaux, ou Surfaces Irregulieres. Ensemble Quelques particularitez concernant cet Art, e celuy de la Graeure en Taille-Douce", Parigi, 1653, Planche 15, Bibliothèque nationale de France (BnF Gallica)





**FIG. 36.** Piero della Francesca, Studio prospettico, XV sec.

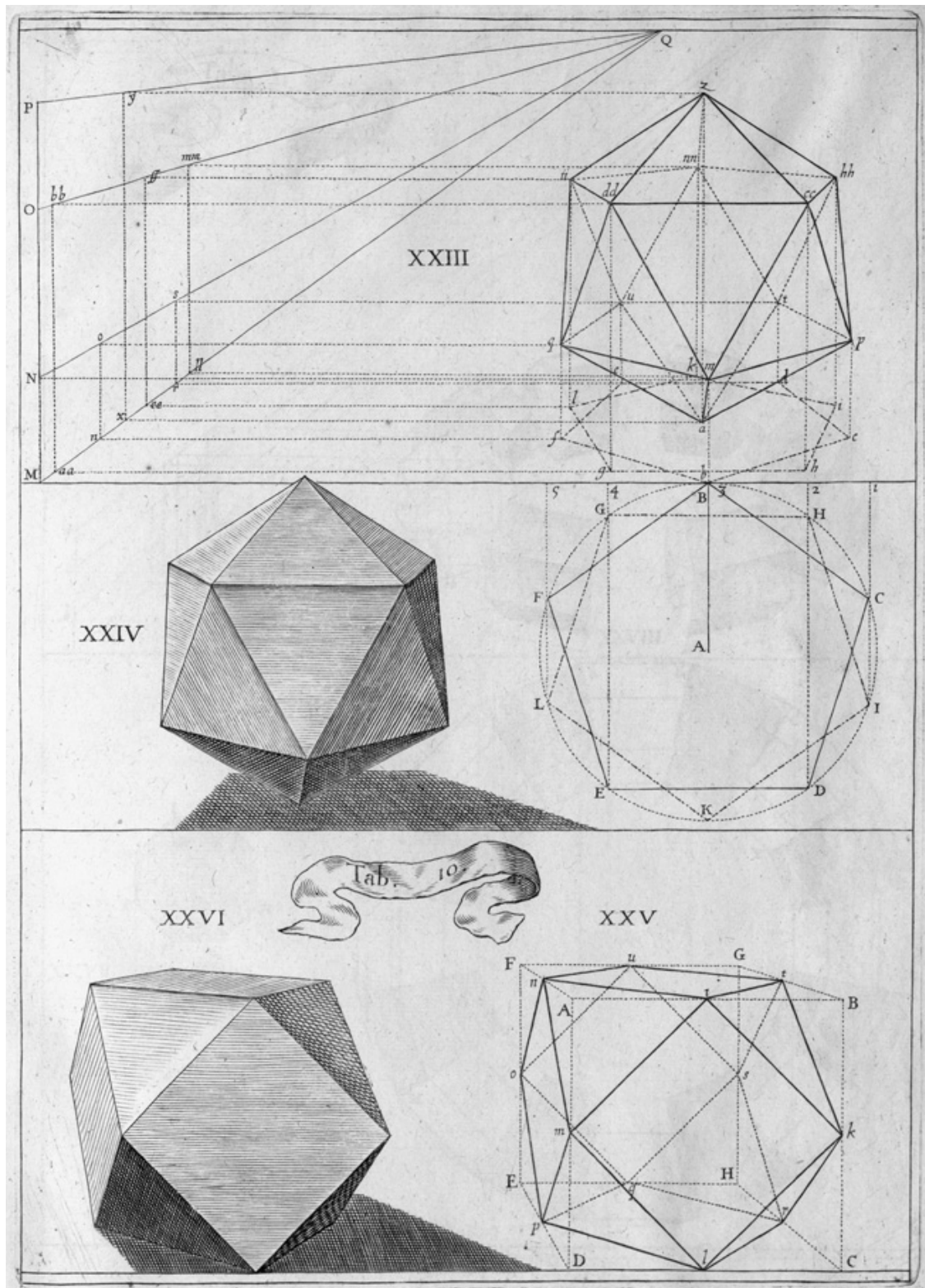
Fonte: della Francesca Piero, “*Libellus de quinque corporibus regularibus*”, Biblioteca Apostolica Vaticana, Città del Vaticano, Manoscritto Urb. Lat. 632, illustrazione presente in WADE DAVID, “*Geometria fantastica. I poliedri e l’immaginario artistico nel Rinascimento*”, Milano 2015, pag. 15



**FIG. 37.** Jean-François Nicéron , Studio della prospettiva attraverso l'icosaedro, 1638

Fonte: Nicéron Jean-François, “La perspective curieuse ou Magie artificielle des effets merveilleux”, ETH-Bibliothek Zürich, Rar 1296



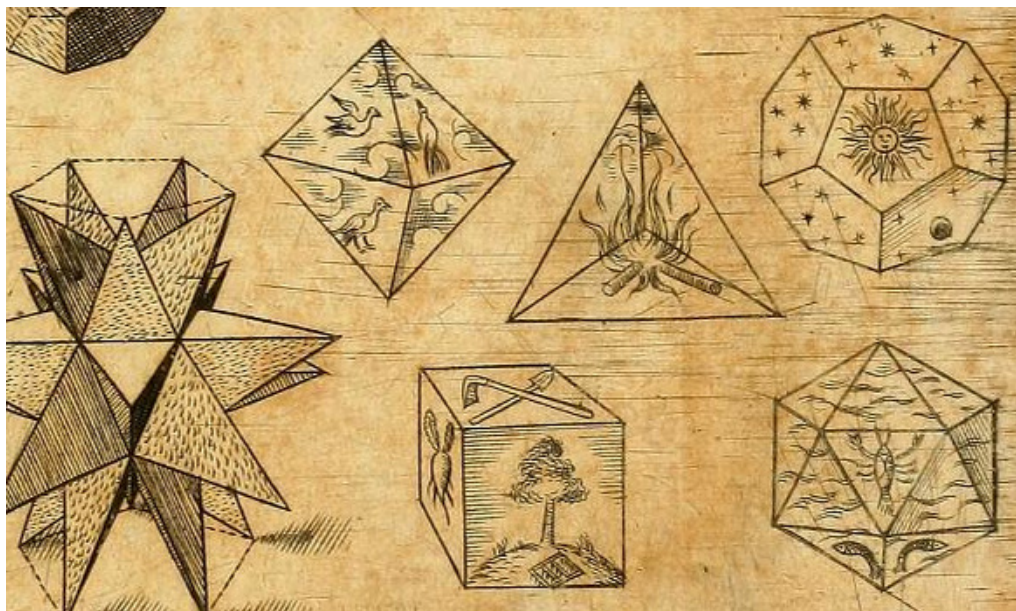
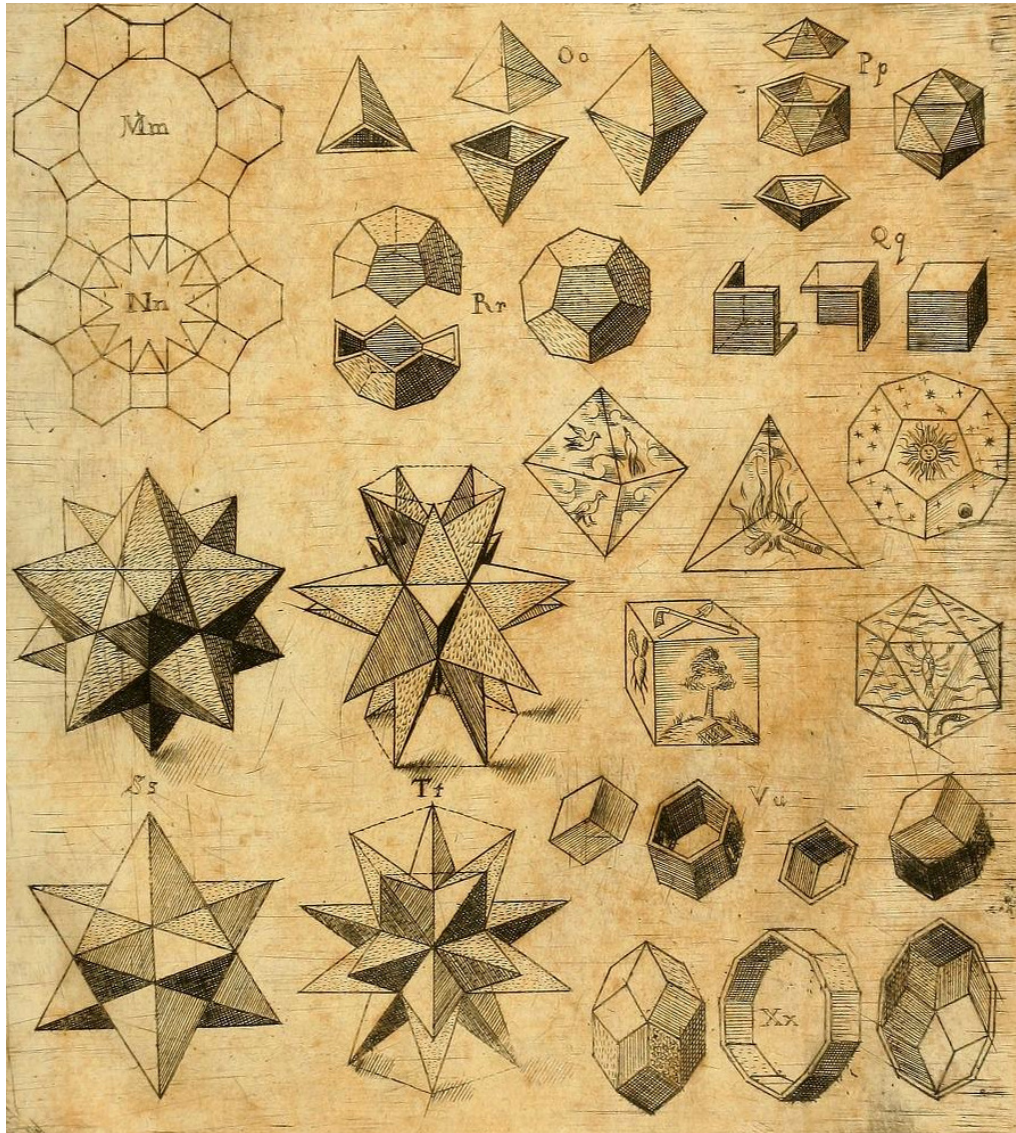


**FIG. 38.** Johannes von Kepler, Cinque solidi platonici e loro simbologia, 1619

Fonte: von Kepler Johannes, "Harmonices Mundi", Francoforte, Liber II, foglio posto tra pag. 58 e pag. 59, Smithsonian Institution Libraries, Washington, D.C., Stati Uniti

<http://library.si.edu/digital-library/book/ioanniskepplerih00kepl>





**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 39.** Cristalli di Pirite

Fonte:

[http://manuelacasoli.altervista.org/pagine/matematica/poliedri\\_platplato.html](http://manuelacasoli.altervista.org/pagine/matematica/poliedri_platplato.html)

; <http://www.didatticarte.it/Blog/?p=4404>



**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 40.** Granato Fosso d'Acri, Ex Collezione Dattola L.

Fonte: <http://www.lazolfara.it/museo.asp?lingua=it&categoria=italiani>

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---





**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 41.** Clathrus ruber

Fonte: <http://www.tamitou.com/5-funghi-capolavori-della-natura/>

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



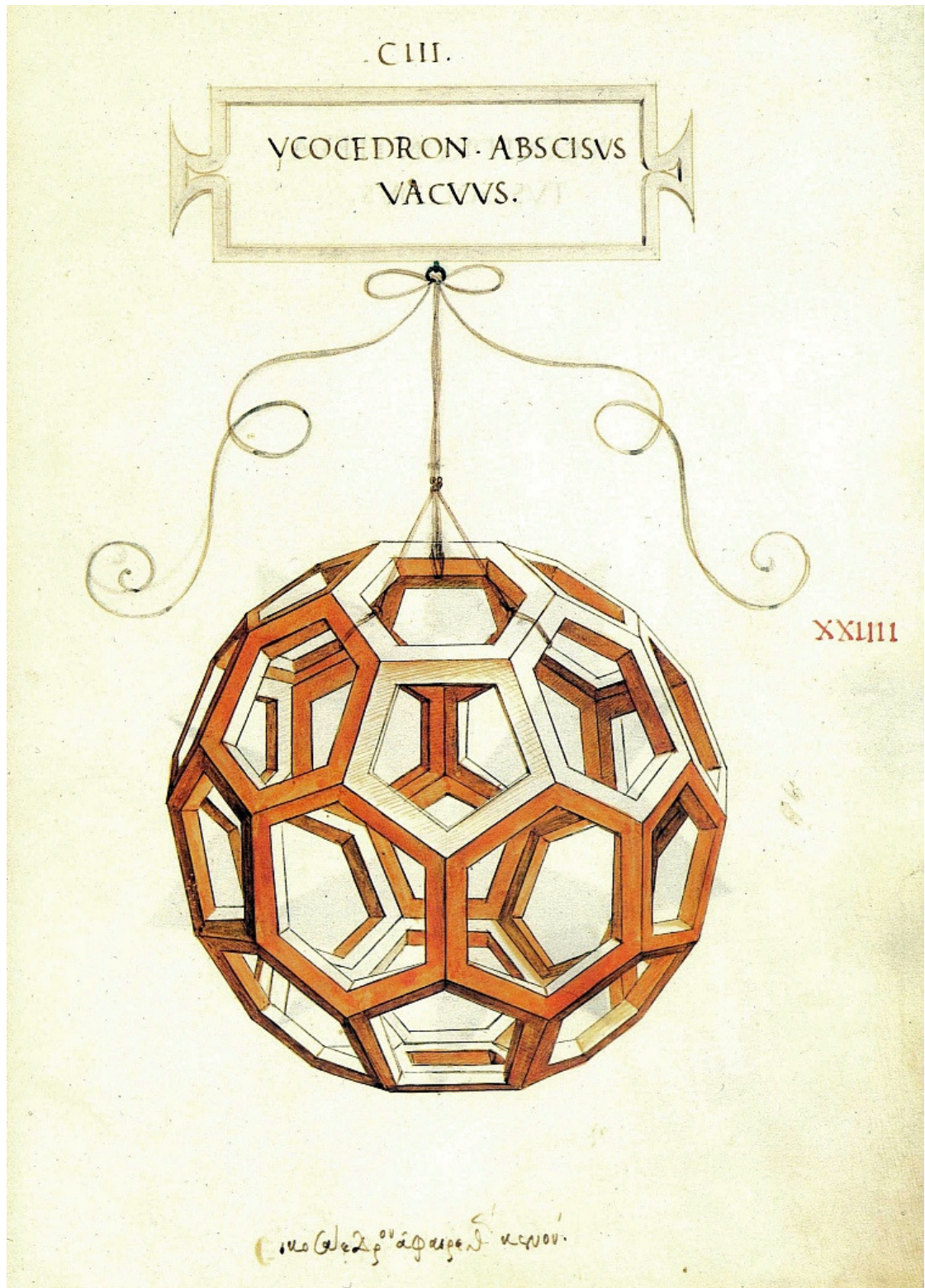
**FIG. 42 (1).** Leonardo da Vinci, *Ycocedron Abscisus Solidus*, Icosaedro troncato, 1509

Fonte: Pacioli Luca, "Divina Proportione" , 1509, Venezia, Plate XXIII, Plate XXIII



**FIG. 42 (2).** Leonardo da Vinci, *Ycocedron Abscisus Vacuus*, Icosaedro troncato, 1509

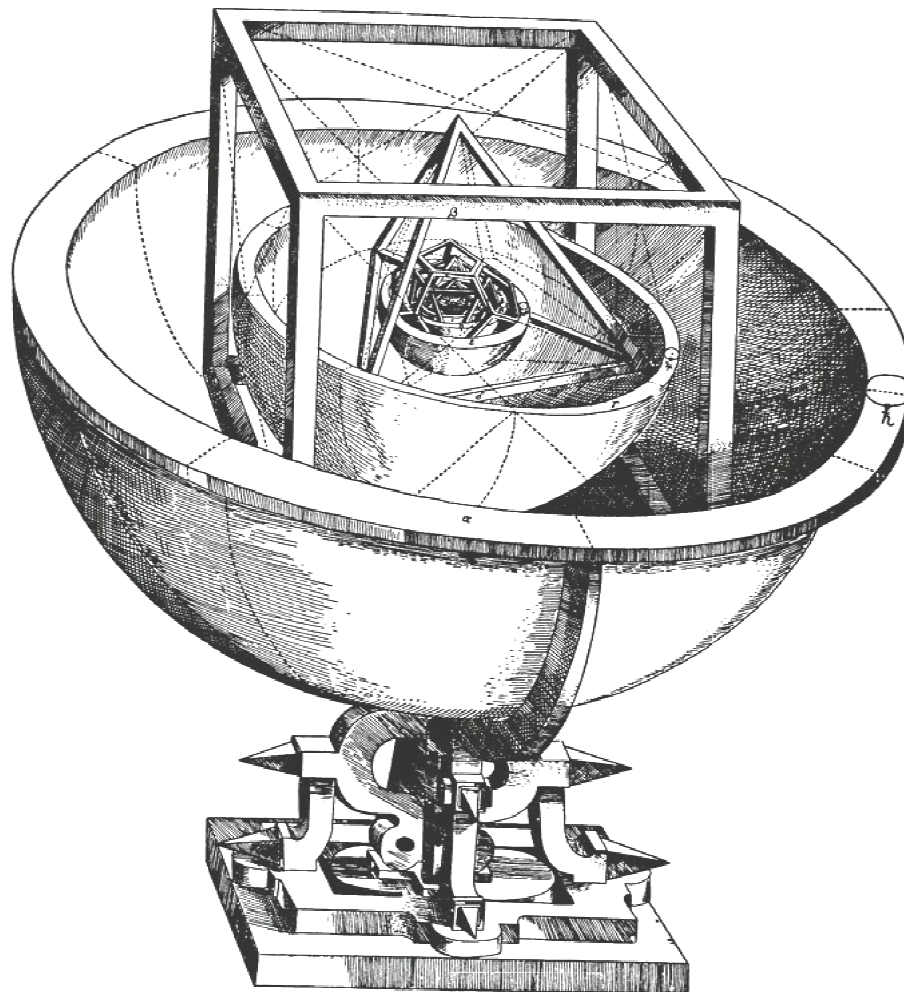
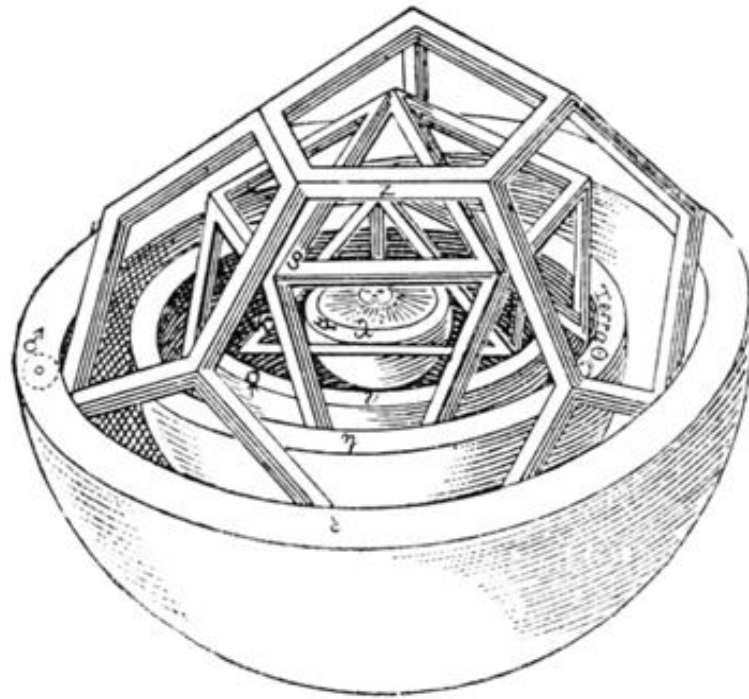
Fonte: Pacioli Luca, "Divina Proportione" , 1509, Venezia, Plate XXIII, Plate XXIII



**FIG. 43.** Johannes von Kepler, Ipotesi sulla morfologia del cosmo,  
1596

Fonte: von Kepler Johannes, "Mysterium Cosmographicum", 1596,  
Tubinga



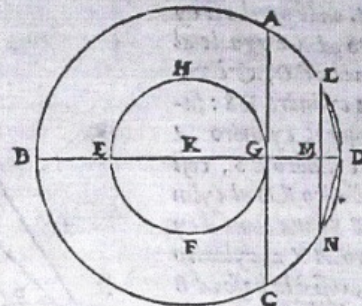


**FIG. 44.** Euclide, “Elementi”, Proposizione XVII, IV-III sec. a. C.

Fonte: Commandino Federico, “De gli Elementi d’Euclide, libri quindici, con gli scholii antichi. Tradotti prima in lingua latina da M. Federico Commandino da Urbino e con Commentarij illustrati trasportati nella nostra vulgare e da lui riveduti. Con privilegio”, in Urbino, Appresso Domenico Frisolino, 1575, libro XII, pag. 244

DE GLI ELEM. DI EVCLID.

\* & giunganſi LD DN LN. adunque la LD è vguale alla DN. & perche la LN è parallela alla AC, & la AC tocca il cerchio EFGH, la LN non toccherà il cerchio EFGH. & molto meno le LD DN toccheranno il cerchio EFGH. & ſe nel cerchio ABCD adatteremo linee rette vguali alla LD, deſcriueranſi in eſſo il polygono de lati vguali & pari di numero, che non tocca il minor cerchio EFGH. il che biſogna fare.

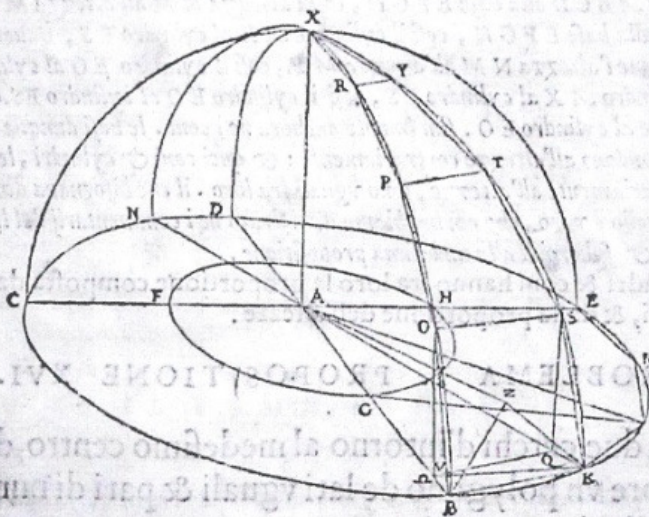


IL COMMANDINO.

3. del terzo \* Adunque la LD è vguale alla DN, per-  
4. del primo cioche la linea retta BD, che paſſa per lo centro ſega perpendicularmente la retta LN non tirata per lo centro. onde la ſegherà per mezzo: & la LM ſarà vguale alla MN. perche dunque le due LM MD ſono vguali alle due NM MD, & contengono gli vguali angoli, cioè retti, ſarà la baſe LD vguale alla baſe LN.

PROBLEMA II. PROPOSITIONE XVII.

Effendo due ſphere d'intorno al medefimo centro, deſcriuere nella maggiore vn ſolido polyedro, cioè di molti lati, che non tocchi la ſuperficie della minor ſphera.



A Intendanſi due ſphere d'intorno al medefimo centro A. biſogna nella maggiore ſphera deſcriuere vn ſolido di molti lati, che non tocchi la ſuperficie della minor ſphera. ſeghinſi le ſphere da qualche piano, tirato per lo centro. i ſegmenti faranno cerchi, percioche ſtando fermo il diametro del cerchio, & girato il mezo cerchio d'intorno ſi è fatta la ſphera. adunque intendendo il mezo cerchio in qual ſi voglia poſitione il piano, che paſſa per eſſo farà vn cerchio



nella



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 45.** Leonardo da Vinci, *Septuaginta Duarum Basium Vacuum*,  
1509

Fonte: Pacioli Luca, "Divina Proportione", 1509, Venezia, Plate XL

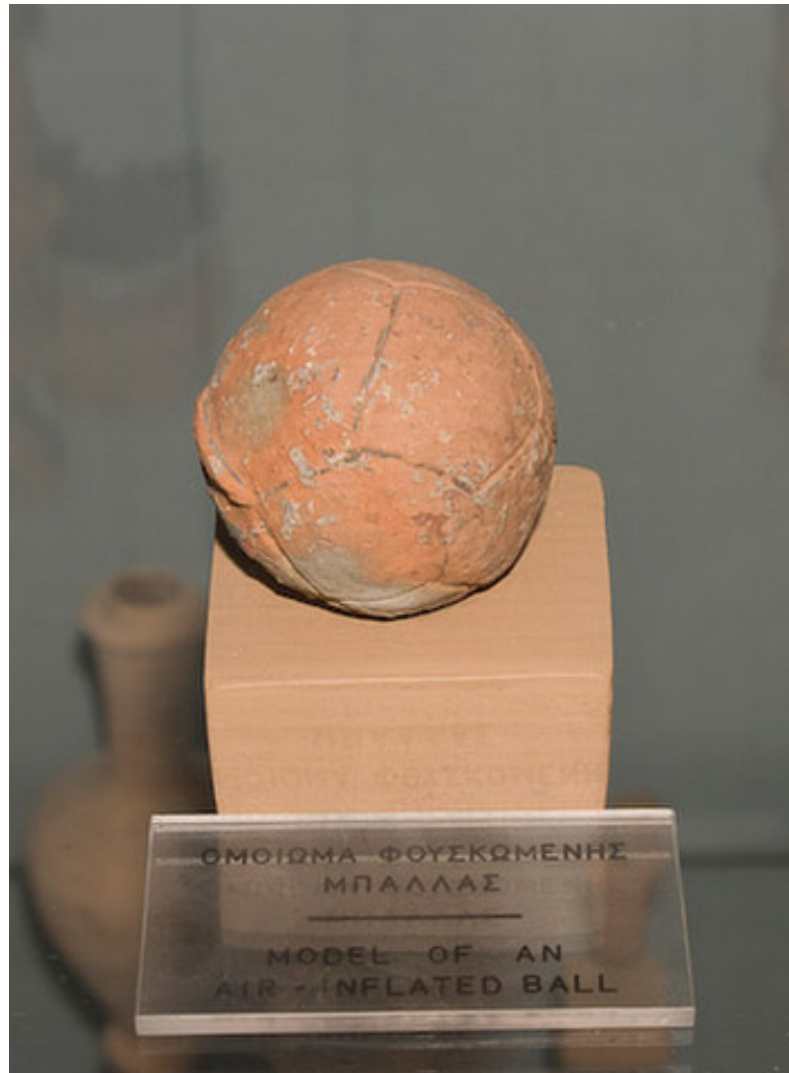


**FIG. 46.** Modello in terracotta di una antica palla di cuoio, 275-250 a.C., Samotracia, Museo Archeologico

Fonte:

<http://alfeiospotamos.gr/?p=10621>;

<http://www.ellinikoarxeio.com/2012/08/episkyros-ancient-hellenic-football.html>;





**FIG. 47.** Magnus Wenninger, Dal cubo al cubo sferico secondo proiezione radiale, 1999

Fonte: Wenninger Magnus Joseph, "Spherical Models", Mineola, New York, Dover Publications, Inc., 1999, pag. 4, (I Ed. Cambridge University Press, 1979)

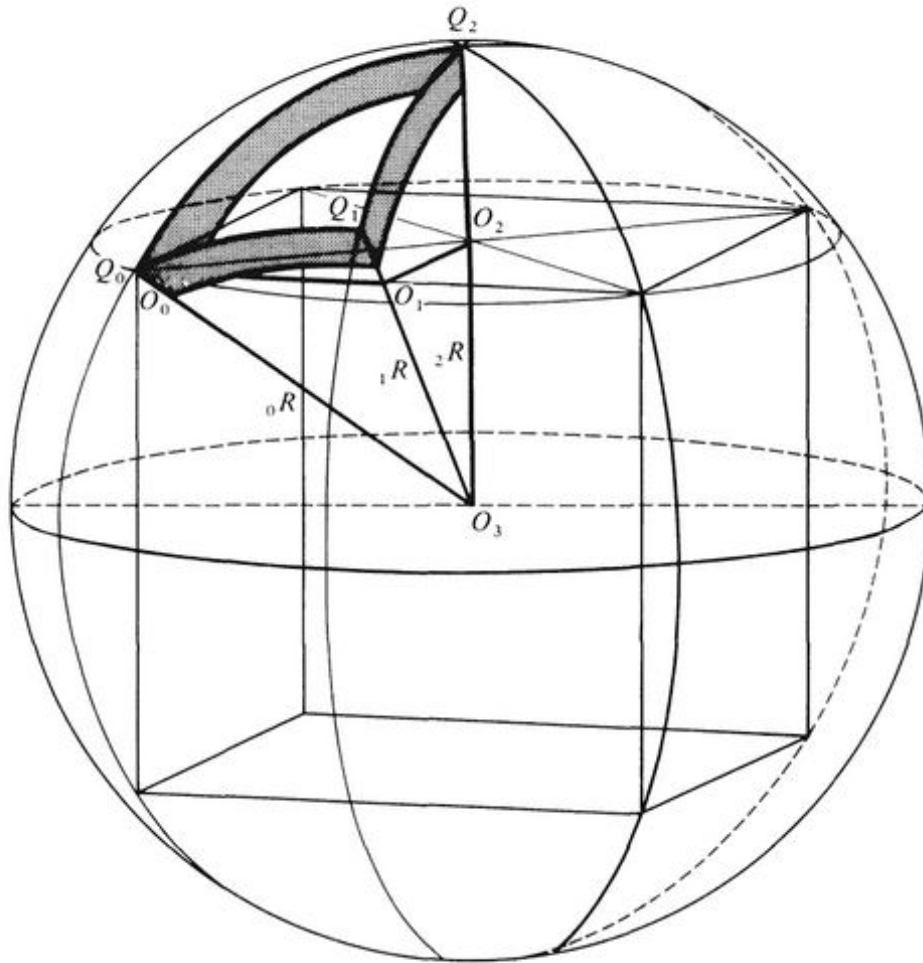


Fig. 1. Cube with circumscribing sphere.

**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

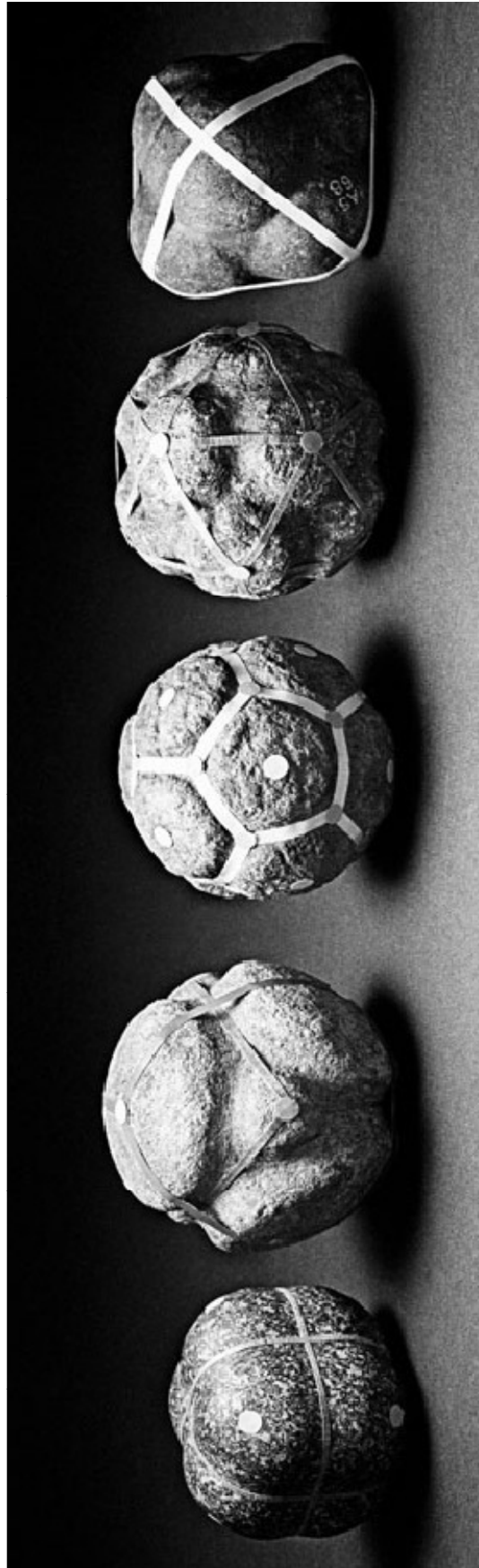
Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 49.** *Petrosfere*, 3.000 a.C., Ashmolean Museum, Oxford

Fonte:

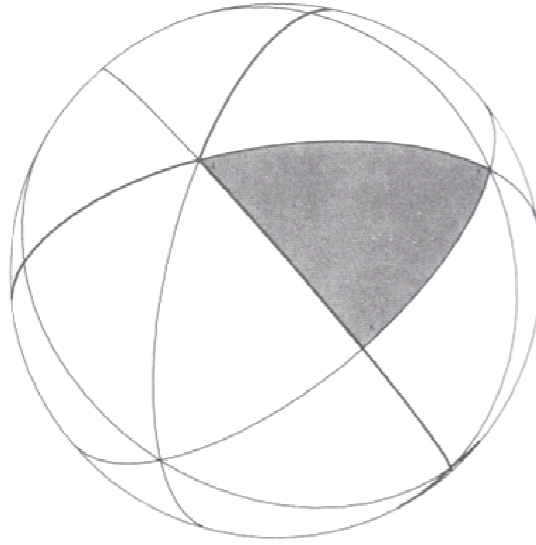
[http://www.crm.umontreal.ca/~physmath/LabPhysMathEn/gallery/scottish\\_sto\\_sto.html](http://www.crm.umontreal.ca/~physmath/LabPhysMathEn/gallery/scottish_sto_sto.html)



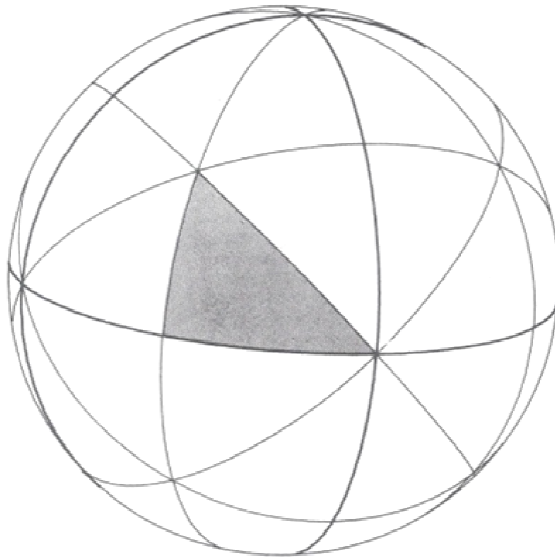
**FIG. 50.** Triangoli caratteristici dei tre gruppi di simmetria:

a. tetraedro; b. cubo/ottaedro; c. dodecaedro/icosaedro

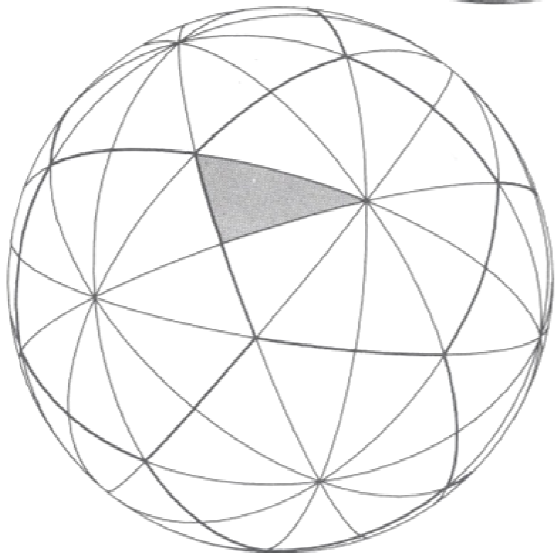
Fonte: Wenninger Magnus Joseph, "Spherical Models", Mineola,  
New York, Dover Publications, Inc., 1999, pp. 10, 11, 15 (I Ed.  
Cambridge University Press, 1979)



a.



b.



c.

**FIG. 52.** Jean Covens e Corneille Mortier, *Mappe-Monde Dresse sur les Observations de Mrs de l'Academie Royale des Sciences et quelques autres et sur les memoirs les plus recens Par M. De L'Isle \* \* \* Nouvellement corrigeé apres les derniers Decouvertes faite par l'Academie de Petersbourgh*, proiezioni cartografiche polari ed equatoriali, 1745, Amsterdam

Fonte:

[http://www.raremaps.com/gallery/detail/27050/MappeMonde\\_Dresse\\_sur\\_les\\_Observations\\_de\\_Mrs\\_de\\_lAcademie\\_Royale\\_des/Covens-Mortier.html](http://www.raremaps.com/gallery/detail/27050/MappeMonde_Dresse_sur_les_Observations_de_Mrs_de_lAcademie_Royale_des/Covens-Mortier.html)



Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)

DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)



**FIG. 53.** *Le Globe celeste en deux plans hemispheres*, 1748 ca.,  
Cartografia celeste in proiezione polare, per gli atlanti di George Louis  
Le Rouge

Fonte: Le Rouge G. L. "Atlas nouveau portatif à l'usage des militaires  
et du voyageur" 1748, Bibliothèque nationale de France (BnF) e  
"Harlan J. Berk, LTD, Chicago's Premier dealer in Antique Maps"  
(<https://www.hjbmaps.com/products/1748-le-globe-celeste-en-deux-plans-hemispheres>)

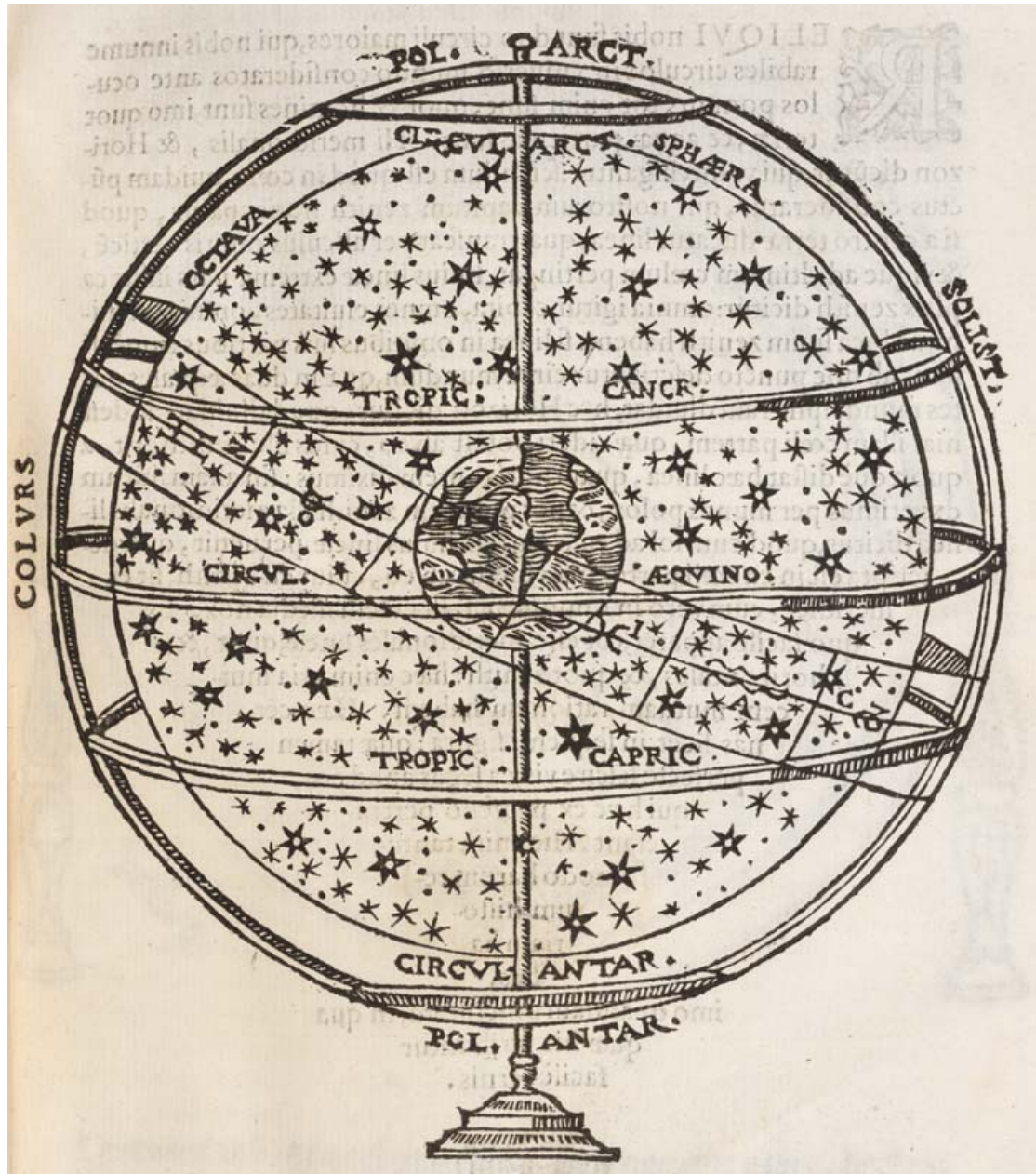




**FIG. 54.** Giovanni Paolo Gallucci, *La Terra nella sfera celeste*, 1588

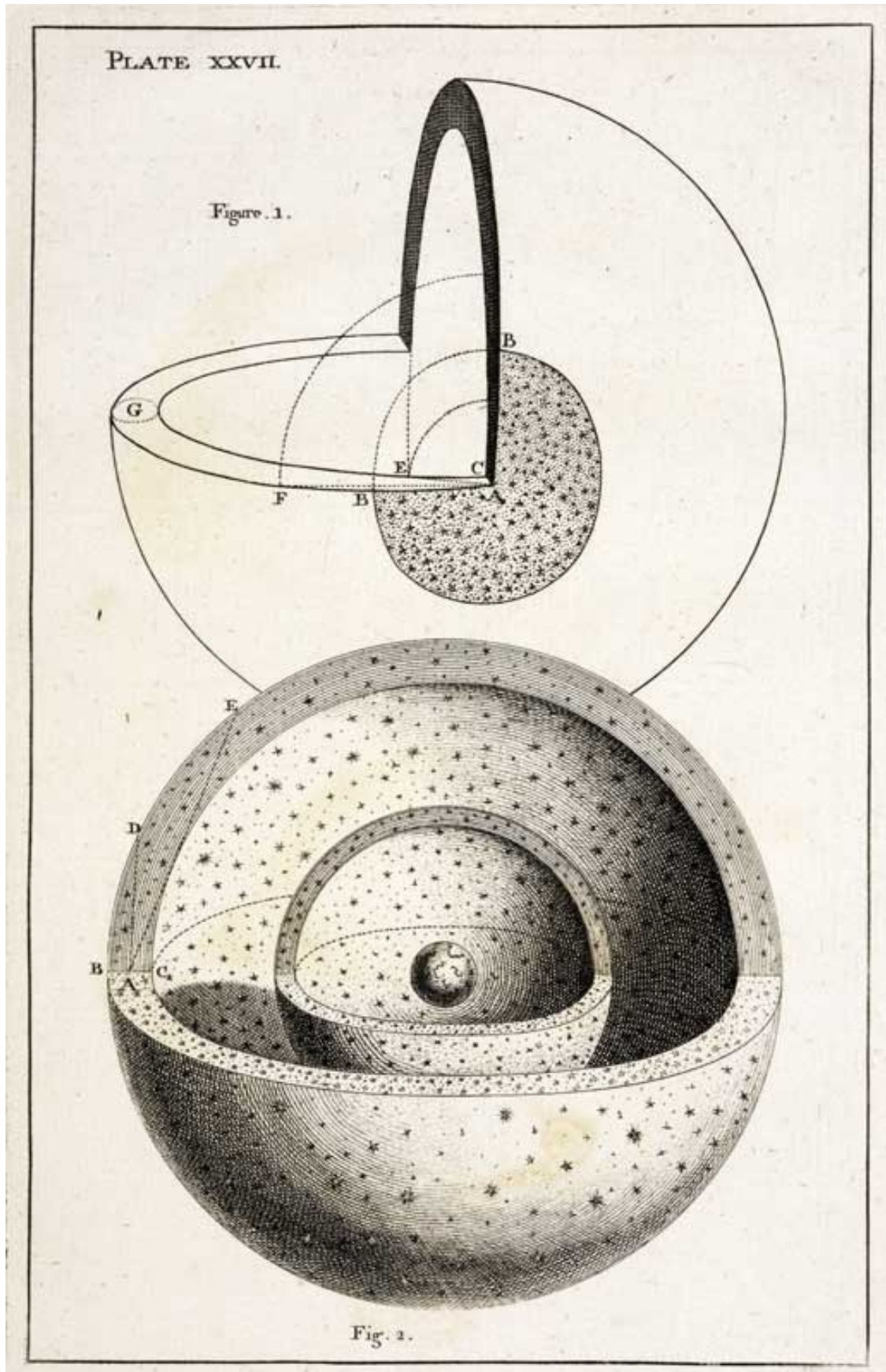
Fonte: Galucci Giovanni Paolo, *Theatrum Mundi et Temporis*, Venezia, Ioannem Baptistam Somascum, 1588, Biblioteca Nazionale Braidense di Milano e Linda Hall Library, LHL Digital Collections (<http://lhldigital.lindahall.org/cdm/ref/collection/cosmology/id/188>)





**FIG. 55.** Thomas Wright, La Terra nelle sfere celesti, 1750

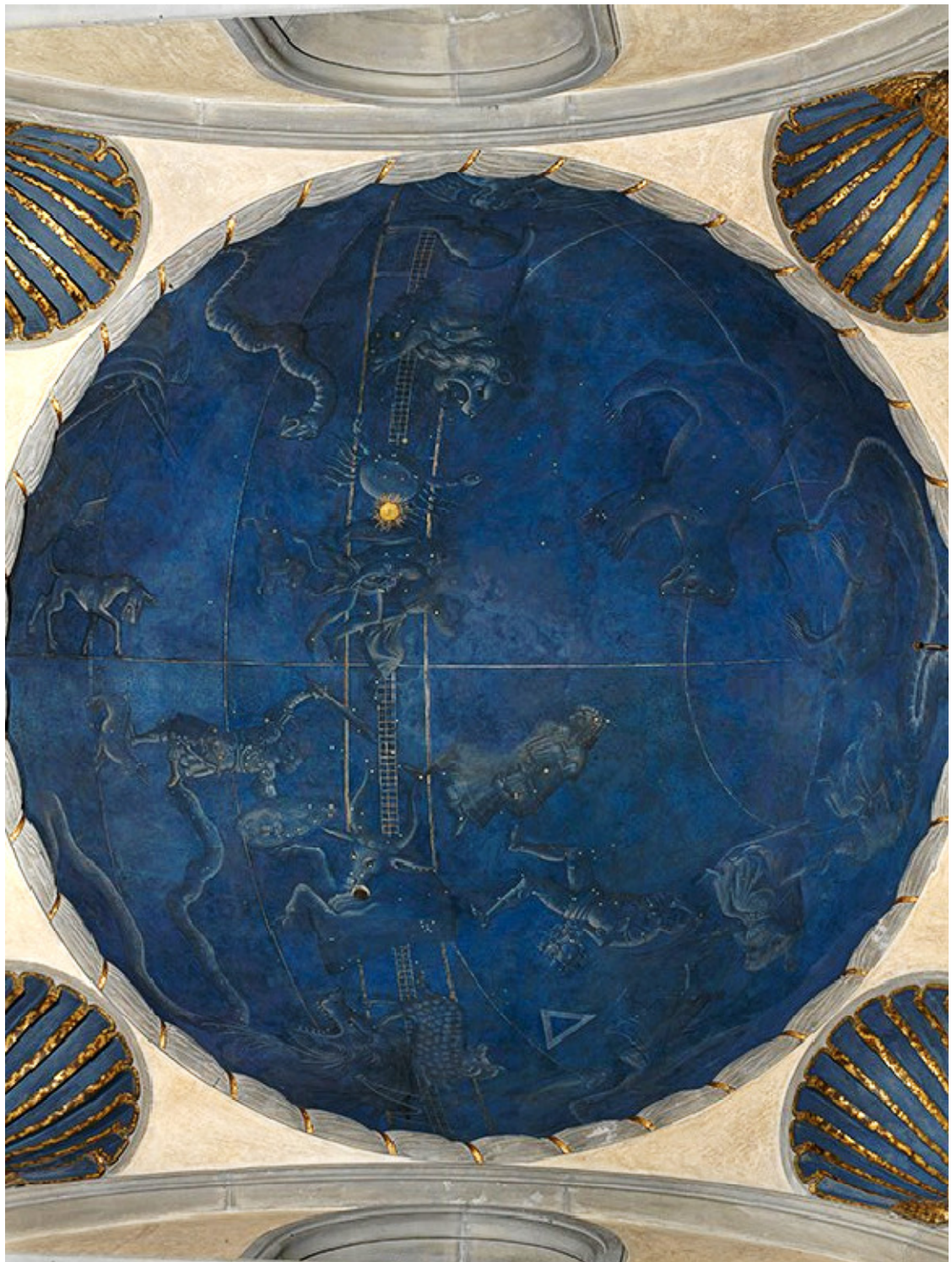
Fonte: Wright Thomas, "An Original Theory or New Hypothesis of the Universe", Londra, 1750, British Library, (49 E 15), Plate XXVII  
e <http://www.tate.org.uk/research/publications/tate-papers/13/the-sublime-plurality-of-worlds-lucretius-in-the-eighteenth-century>





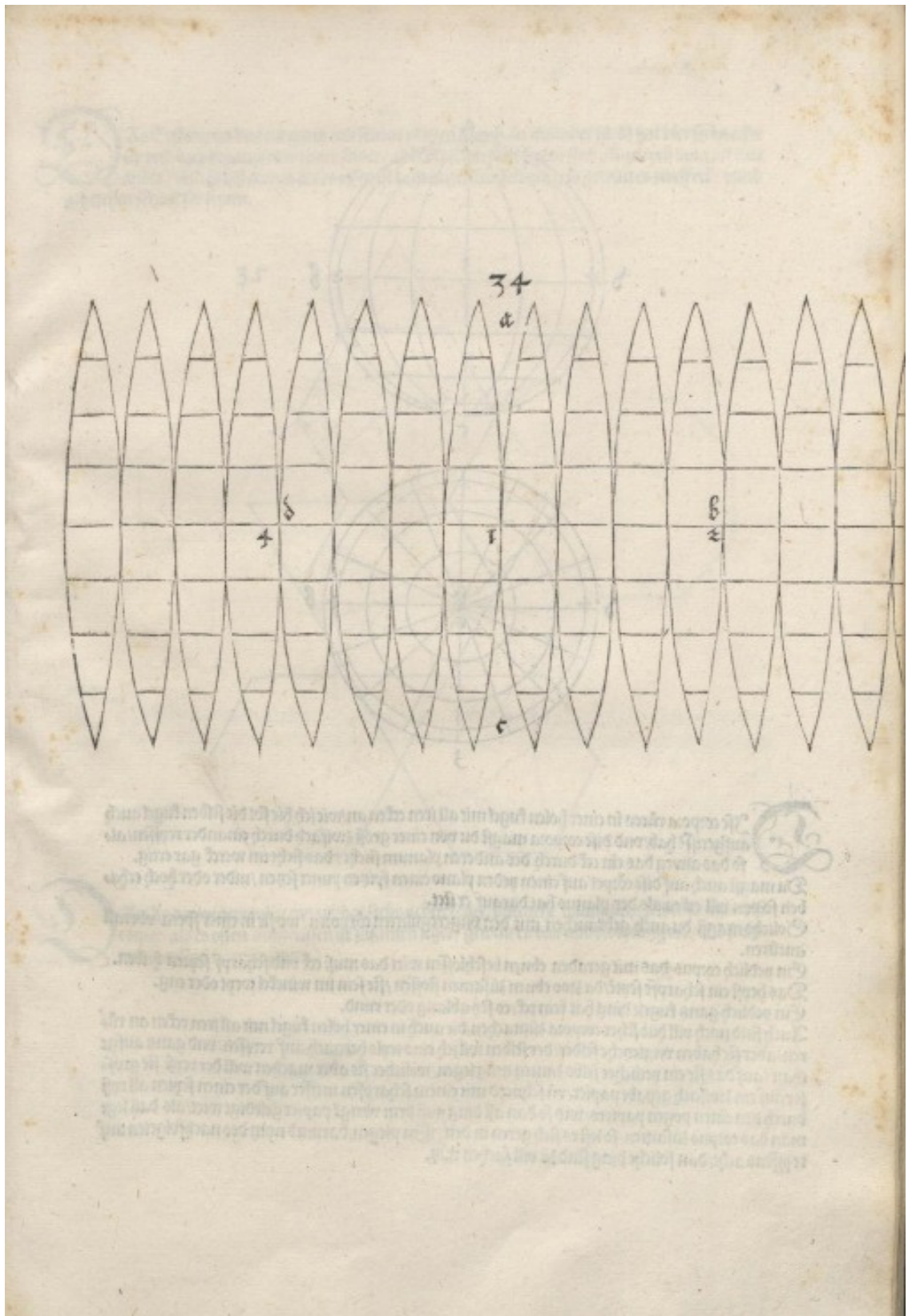
**FIG. 56.** Giuliano D'Arrigo, detto Pesello, Affreschi della cupola nella scarsella della Cappella Pazzi di Filippo Brunelleschi, 1420-1428, Sacrestia Vecchia, Basilica di San Lorenzo, Firenze

Fonte: <https://curiositasufirenze.wordpress.com/tag/emisfero-celeste-sagrestia-vecchia-san-lorenzo/>



**FIG. 57 (1).** Albrecht Dürer, Divisione della sfera in meridiani e paralleli e suo sviluppo con proiezione cilindrica, 1525

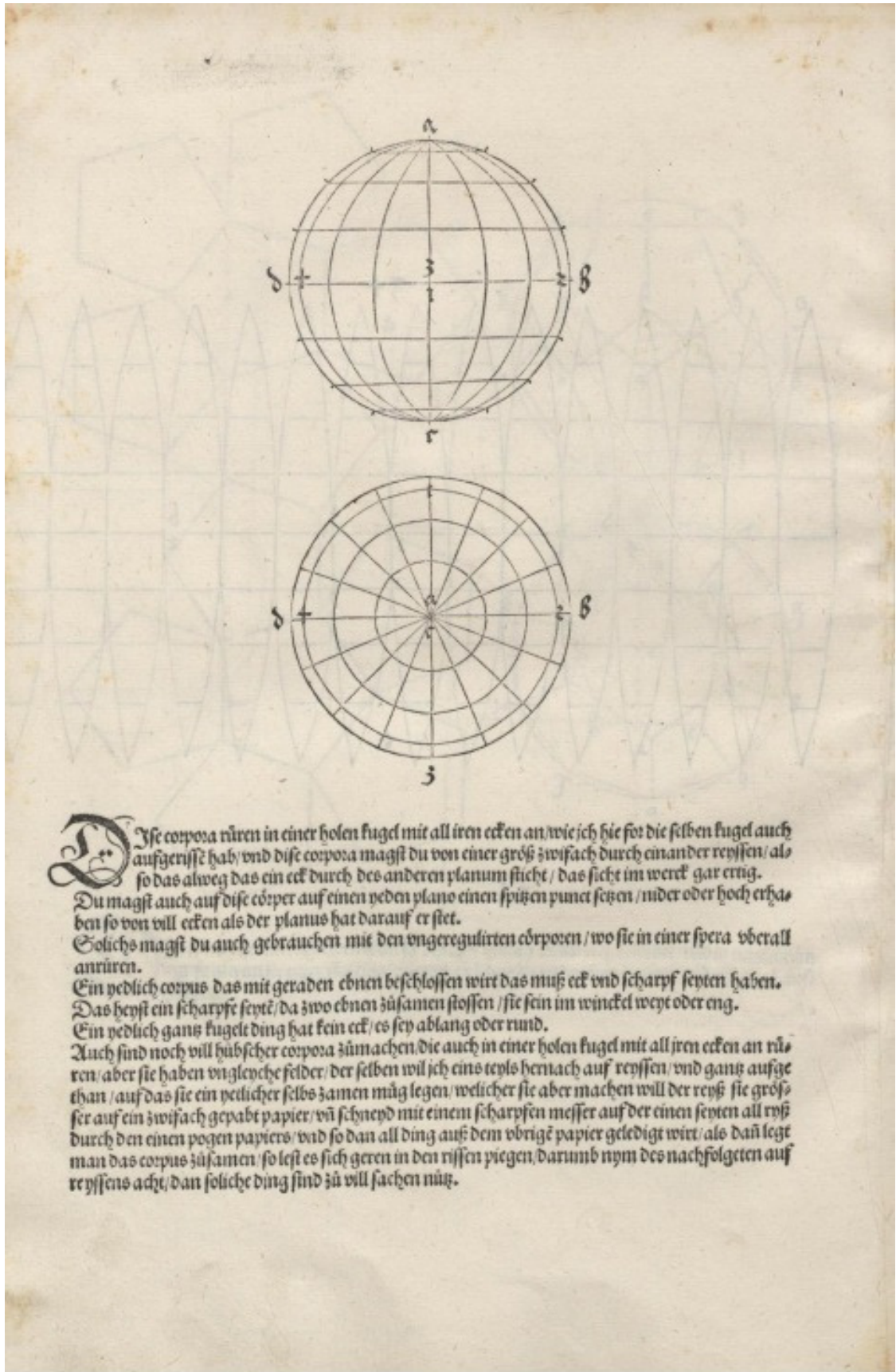
Fonte: Dürer Albrecht, "Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebenen unnd gantzen corporen (Istruzioni per la misurazione con riga e compasso di figure nel piano e nello spazio)", Nuremberg, Hieronymus Andreas Formschneider, 1525, Das Viert Büchlein (IV Libretto), illustrazione 34, conservato presso SLUB Dresden, segnatura: S.B.616



**FIG. 57 (2).** Albrecht Dürer, Divisione della sfera in meridiani e paralleli e suo sviluppo con proiezione cilindrica, 1525

Fonte: Dürer Albrecht, "Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebenen unnd gantzen corporen (Istruzioni per la misurazione con riga e compasso di figure nel piano e nello spazio)", Nuremberg, Hieronymus Andreas Formschneider, 1525, Das Viert Büchlein (IV Libretto), illustrazione 34, conservato presso SLUB Dresden, segnatura: S.B.616





**FIG. 58.** Martin Waldseemüller, Planisfero con il nome “America”,  
1507, Badische Landes Bibliothek (BLB)

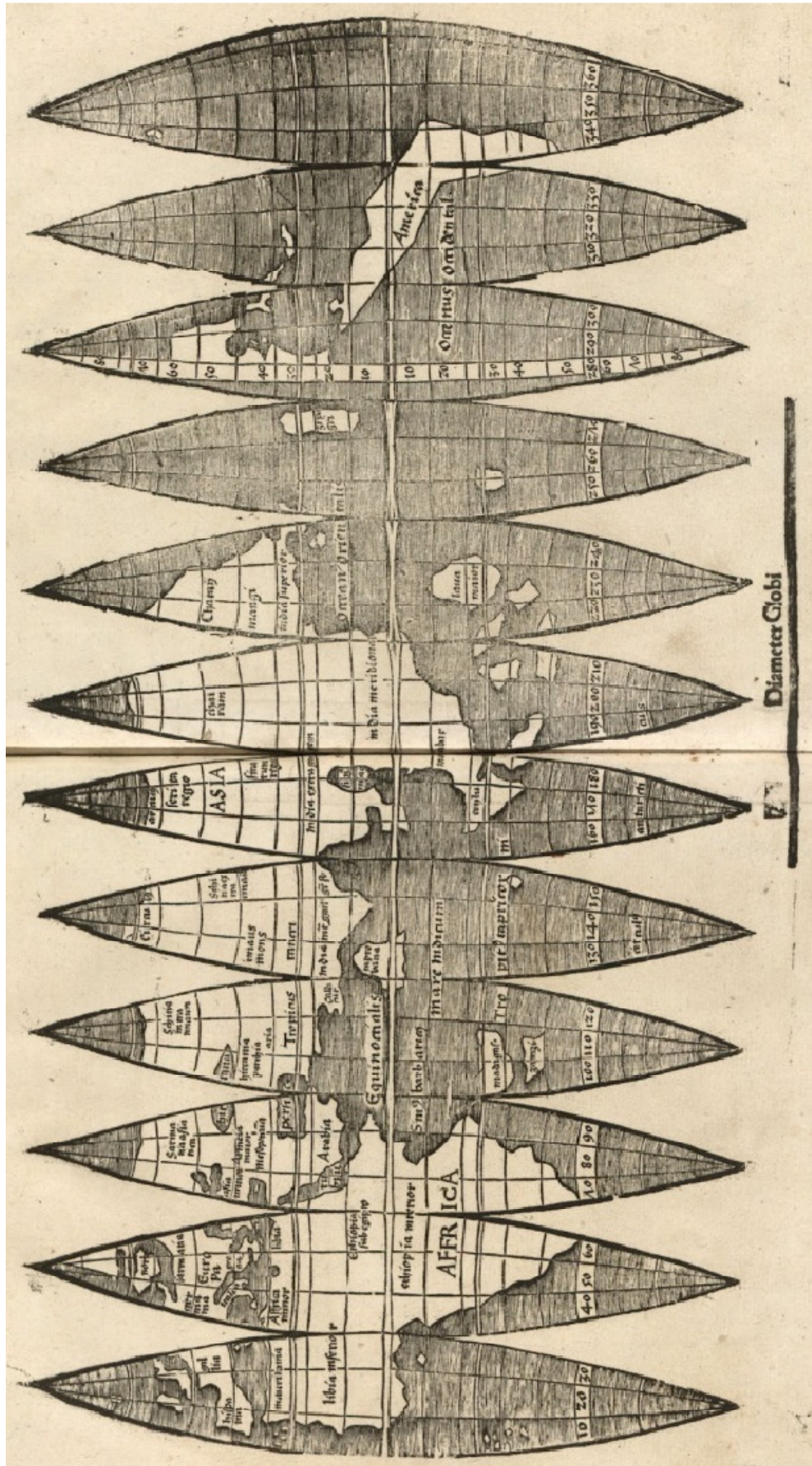
Fonte:

<https://www.blb-karlsruhe.de/blb/blbhtml/2006/waldseemueller.php>;

<http://3.bp.blogspot.com/->

[CoA44vXzkBc/UAXkAfAge7I/AAAAAAAAH5k/vomCnLNqmHg/s1160/waldseemuller+gore.jpg](http://3.bp.blogspot.com/-CoA44vXzkBc/UAXkAfAge7I/AAAAAAAAH5k/vomCnLNqmHg/s1160/waldseemuller+gore.jpg)





**FIG. 59.** Vitus Scheffer, Cartografia celeste, 1686

Fonte: Scheffer Vitus, "Coelum poeticum seu sphaera astronomica", Praga, Typis Catharinae Czernochianae Viduae, 1686, Bayerische Staatsbibliothek (Biblioteca Nazionale Bavarese, consultabile online su [https://books.google.it/books?id=8IISAAAacAAJ&printsec=frontcover&hl=it&source=gbs\\_ge\\_summary\\_r&cad=0#v=onepage&q&f=false](https://books.google.it/books?id=8IISAAAacAAJ&printsec=frontcover&hl=it&source=gbs_ge_summary_r&cad=0#v=onepage&q&f=false)

e su

[http://reader.digitale-sammlungen.de/en/fs1/object/display/bsb10887635\\_00001.html](http://reader.digitale-sammlungen.de/en/fs1/object/display/bsb10887635_00001.html)

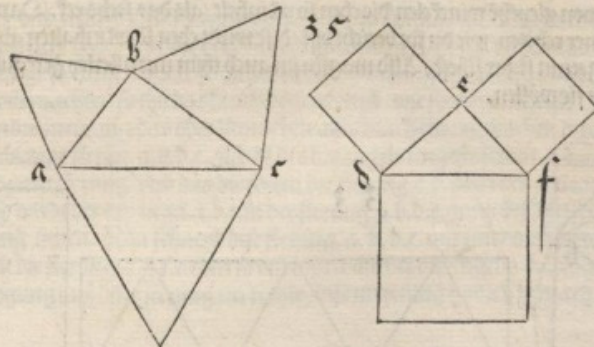




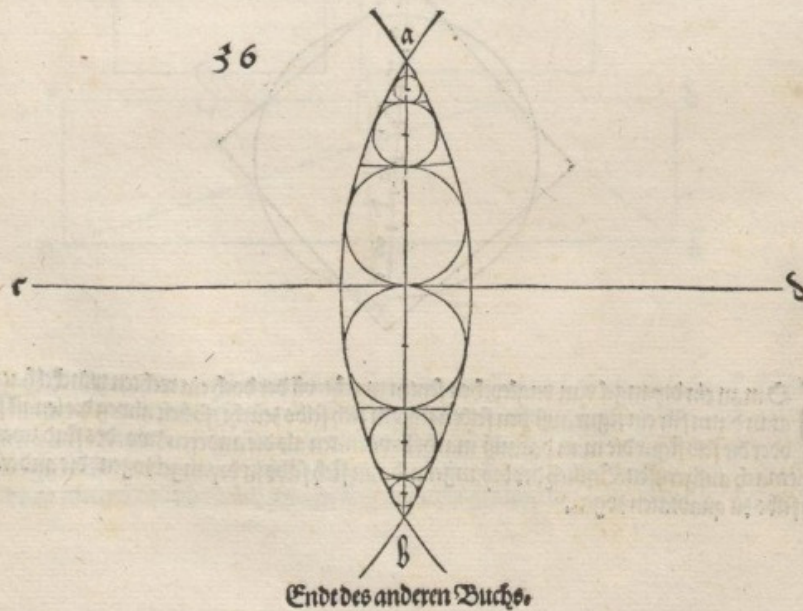
**FIG. 60.** Albrecht Dürer, Divisione della sfera in meridiani e paralleli e suo sviluppo con proiezione cilindrica, 1525

Fonte: Dürer Albrecht, "Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebenen unnd gantzen corporen (Istruzioni per la misurazione con riga e compasso di figure nel piano e nello spazio)", Nuremberg, Hieronymus Andreas Formschneider, 1525, Das Zweites Büchlein (II Libretto), illustrazione 36, conservato presso SLUB Dresden, segnatura: S.B.616





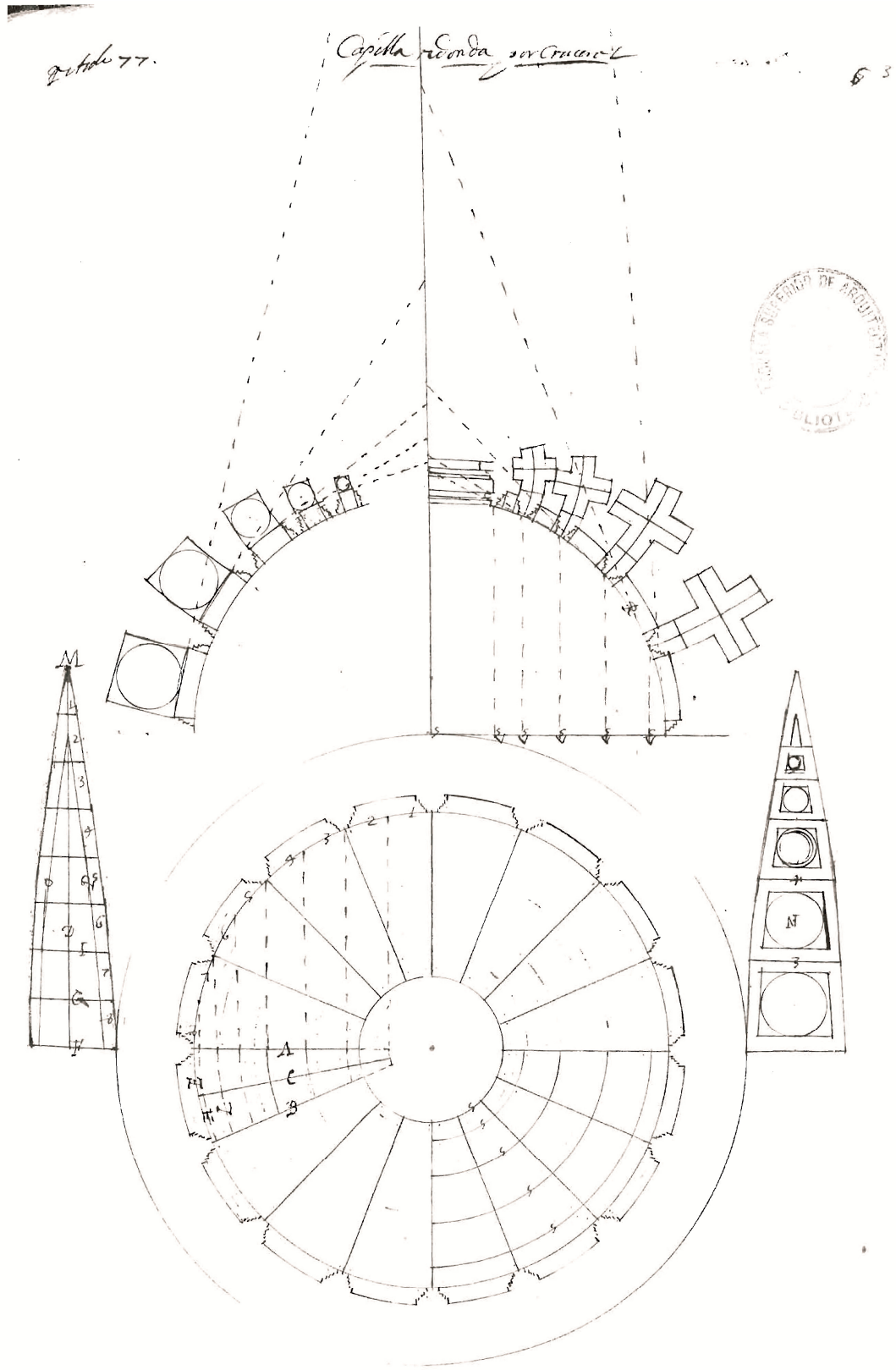
**W** Eñ man zwo hole circellini gegen einander schleußt / also das d<sup>3</sup> felde schmal vñ lang werde vñ so man das mit zwerch linien ordenlich theilen vñnd abschneyden will / dem muß man also thün. Reiß ein aufrechte gerade lini obē. a. vñdē. b. Darnach reiß ein zwerch lini zñ gleyche winckel mittē dardurch vñ setz in der zwerch lini auf d<sup>3</sup> rechten seite / so weit hindan als du wilt ein puncten. c. des gleychen setz auf die linck seytē in gleycher weytē ein puncten. d. vñd setz ein circel mit dem ein fuß in den puncten. c. vñnd den andern in den puncten. a. von dann reiß herab bis in den puncten. b. Also thū im auch van der anderen seytē auß dem puncten. d. so das gethan ist / als dan reiß mit einem circel zwo circellini / die erst ob der zwerch lini / die ander darunder / also das sie bede yetliche an einem teyl die zwerch lini / auch yetliche auf beden seytē die zwo holen linien an rñren / Dar nach zeuch zwo zwerch lini ob vñnd vnder den zweyen circellinien. Darnach reiß aber zwo ander kleiner circellini / die bede mit irem teyl die zwo gezogenen circellini / die ober vñ vnder an rñren / des gleyche yetliche auf beden seytē die zwo holen linien / vñnd reiß aber zwo zwerch linien darob vñnd darunder. Darnach far also fort hinauf so weyt du magst / diß wirdt ordenlich ab geteylt / wie ich d<sup>3</sup> hernach hab aufgerissen / auß disem wirdt vil dings gemacht.



**FIG. 61.** Alonso de Vandelvira, *Capilla redonda por cruceros*, 1575-1591

Fonte: de Vandelvira Alonso, “Libro de Traças de Cortes de Piedra” (1575-1591), manoscritto “Exposición y declaración sobre el tratado de Cortes de Fábricas que escribió Alonso de Valdevira por el excelente e insigne architecto, maestro mayor de obras de la Santa Iglesia de Toledo”, Título 77, foglio 63 recto, conservato presso la Biblioteca Universitaria della Escuela Técnica Superior de Arquitectura (E.T.S.), Universidad Politécnica de Madrid





**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

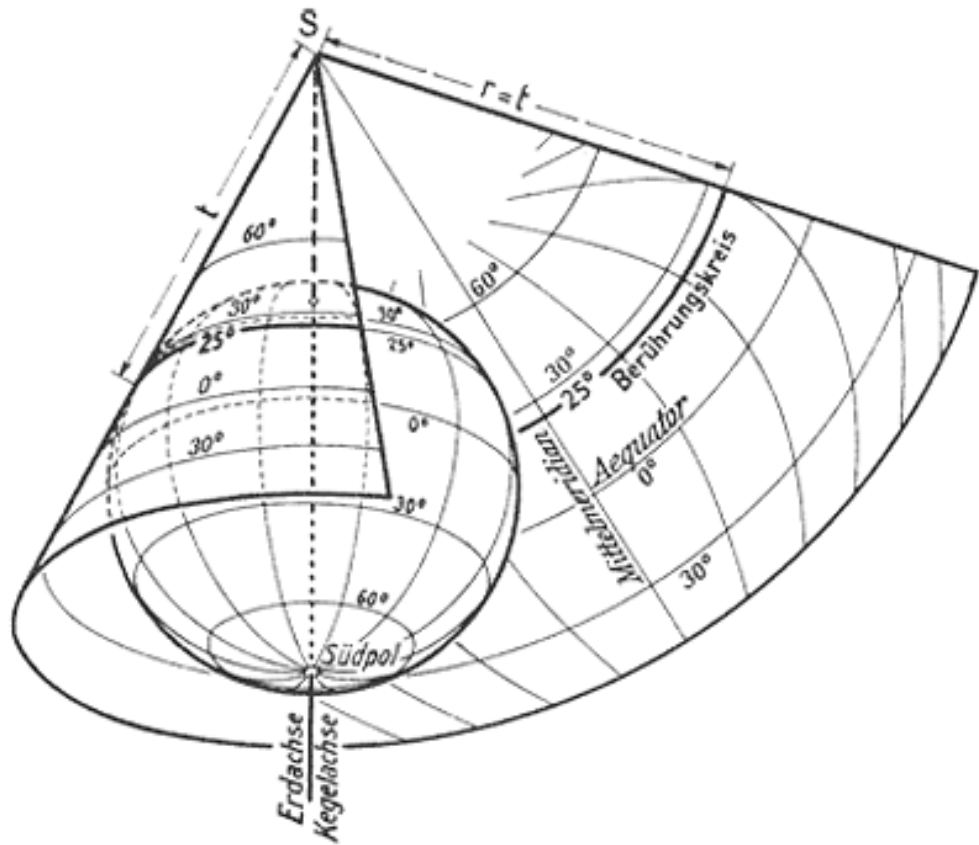
Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 62.** Proiezione conica cartografica

Fonte: [http://learn.alcacoop.it/2010/corso\\_gis/01\\_concetti\\_generali/#0de](http://learn.alcacoop.it/2010/corso_gis/01_concetti_generali/#0de)



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 63.** Claudio Tolomeo, Cartografia derivante da proiezione conica, 1450-1475, British Library, Harley 7182, ff. 58v-59

Fonte:

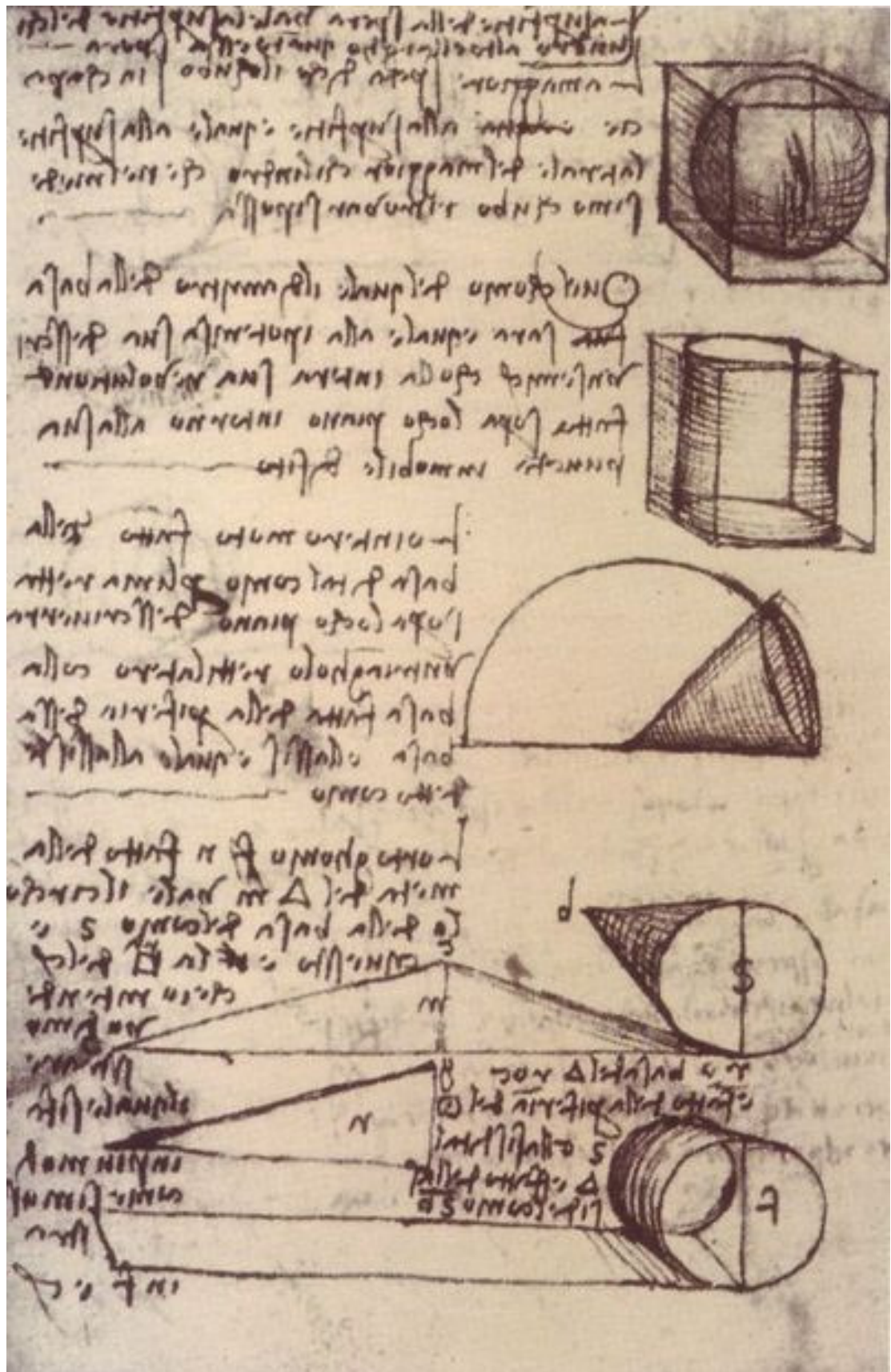
[http://www.bl.uk/catalogues/illuminatedmanuscripts/ILLUMIN.ASP?Size=mid  
&IllID=28894](http://www.bl.uk/catalogues/illuminatedmanuscripts/ILLUMIN.ASP?Size=mid&IllID=28894)



**FIG. 64.** Leonardo da Vinci, Proiezioni cilindriche e coniche e rapporti della sfera e del cilindro inscritti in un cubo, 1492-1516

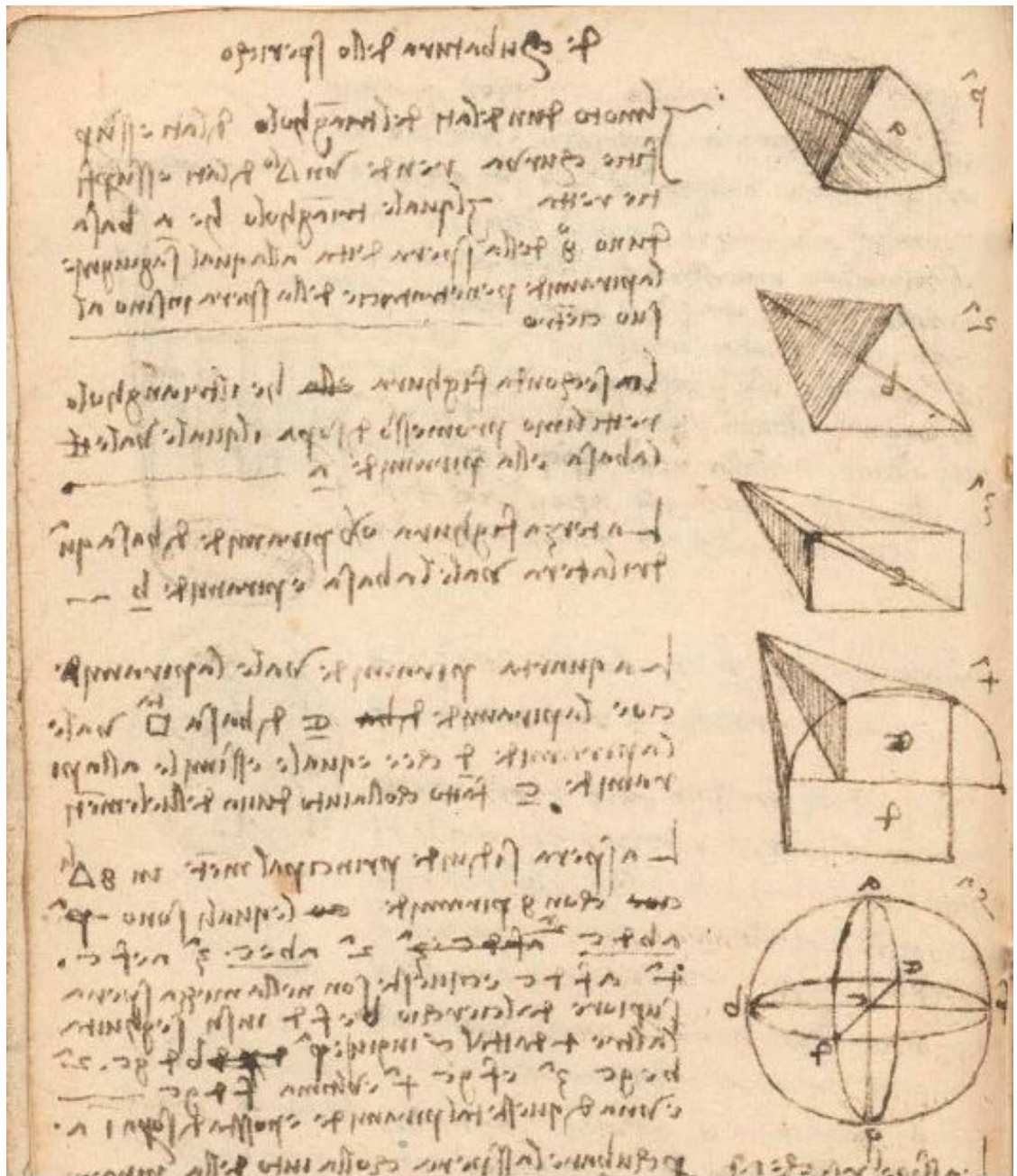
Fonte: Leonardo da Vinci, "Paris Manuscript (Manoscritto di Francia) G", 1492-1516, foglio 61 verso, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Firenze, Giunti Barbèra, 1990, proprietà degli originali: Institut de France, Parigi;  
<http://www.bibliotecaleonardiana.it/bbl/eventi/ev-05-120507.shtml>;  
<http://www.progetti.iisleviponti.it/Leonardo/html/architettura.html>





**FIG. 65.** Leonardo da Vinci, *De cubatura dello sperico*, studi sul metodo proiettivo di suddivisione della sfera, 1492-1516

Fonte: Leonardo da Vinci, "Paris Manuscript (Manoscritto di Francia) G", 1492-1516, foglio 66 verso, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Firenze, Giunti Barbèra, 1990, proprietà degli originali: Institut de France, Parigi;  
<http://www.bibliotecaleonardiana.it/bbl/eventi/ev-05-120507.shtml>;  
<http://www.progetti.iisleviponti.it/Leonardo/html/architettura.html>

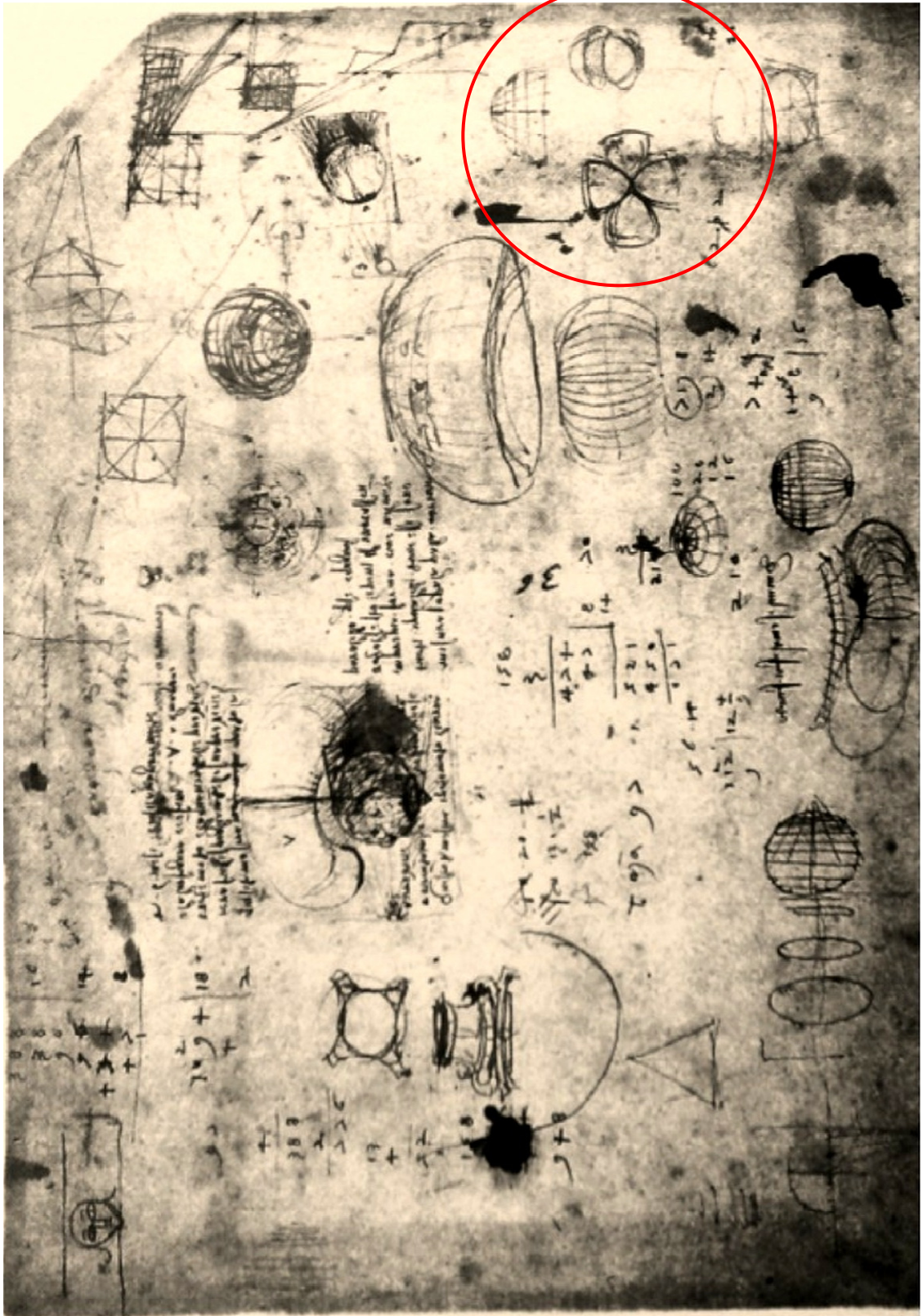


**FIG. 66.** Leonardo da Vinci, Proiezione ottante, studi sul metodo proiettivo di suddivisione della sfera, 1478-1518

Fonte: Leonardo da Vinci, "Codex Atlanticus (Codice Atlantico)", 1478-1518, foglio 521 recto, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano. La paternità di Leonardo da Vinci della proiezione ottante è dimostrata in "Leonardo da Vinci's World Map" di Tyler W. Christofer, City University, London, 2014

<http://www.bibliotecaleonardiana.it/bbl/eventi/ev-05-120507.shtml>



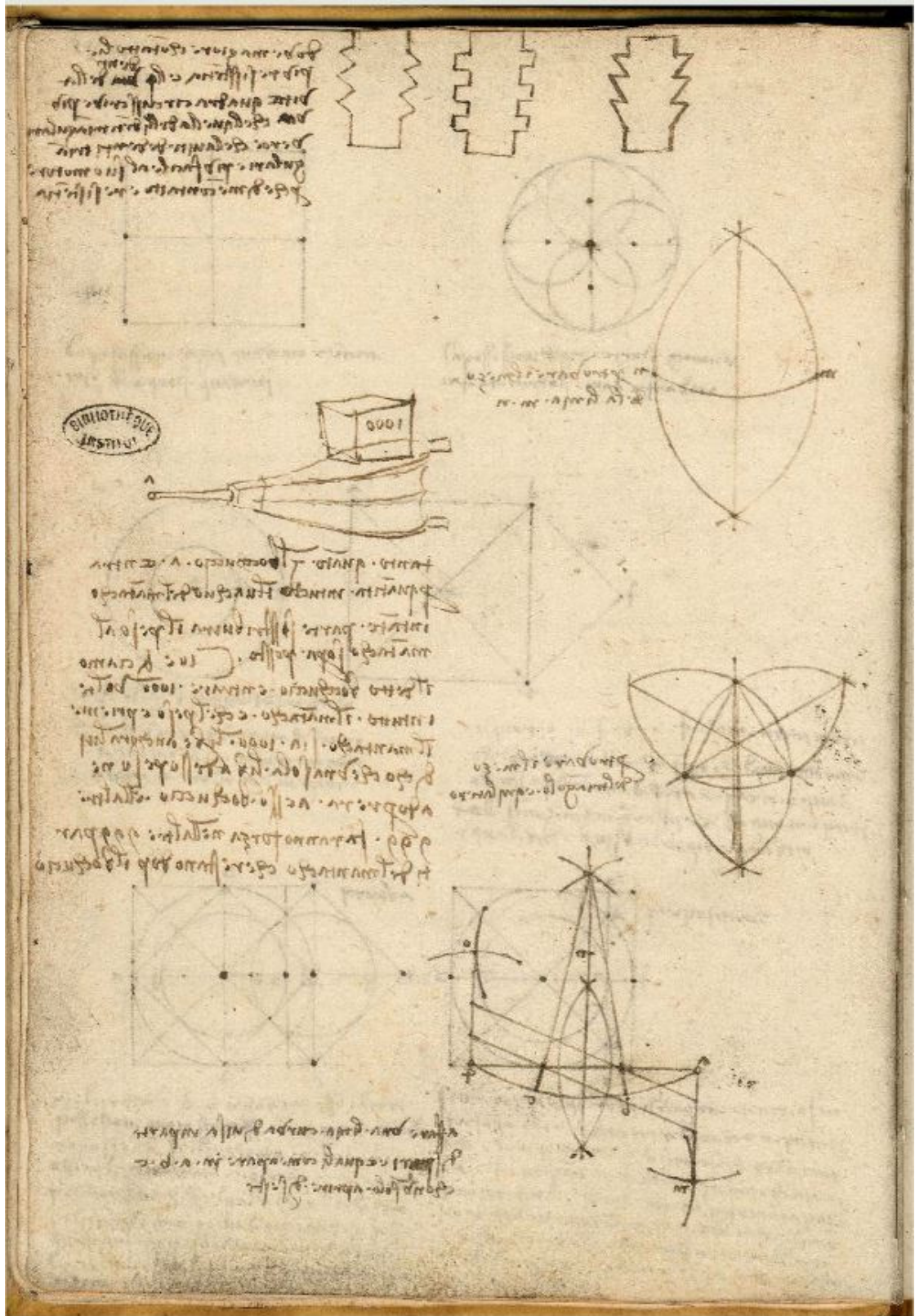


**FIG. 67.** Leonardo da Vinci, Studi sul triangolo sferico, 1492-1516

Fonte: Leonardo da Vinci, "Paris Manuscript (Manoscritto di Francia) A", 1492-1516, foglio 15 verso, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Firenze, Giunti Barbèra, 1990, proprietà degli originali: Institut de France, Parigi; in "Leonardo da Vinci's World Map" di Tyler W. Christofer, City University, London, 2014, pag. 10

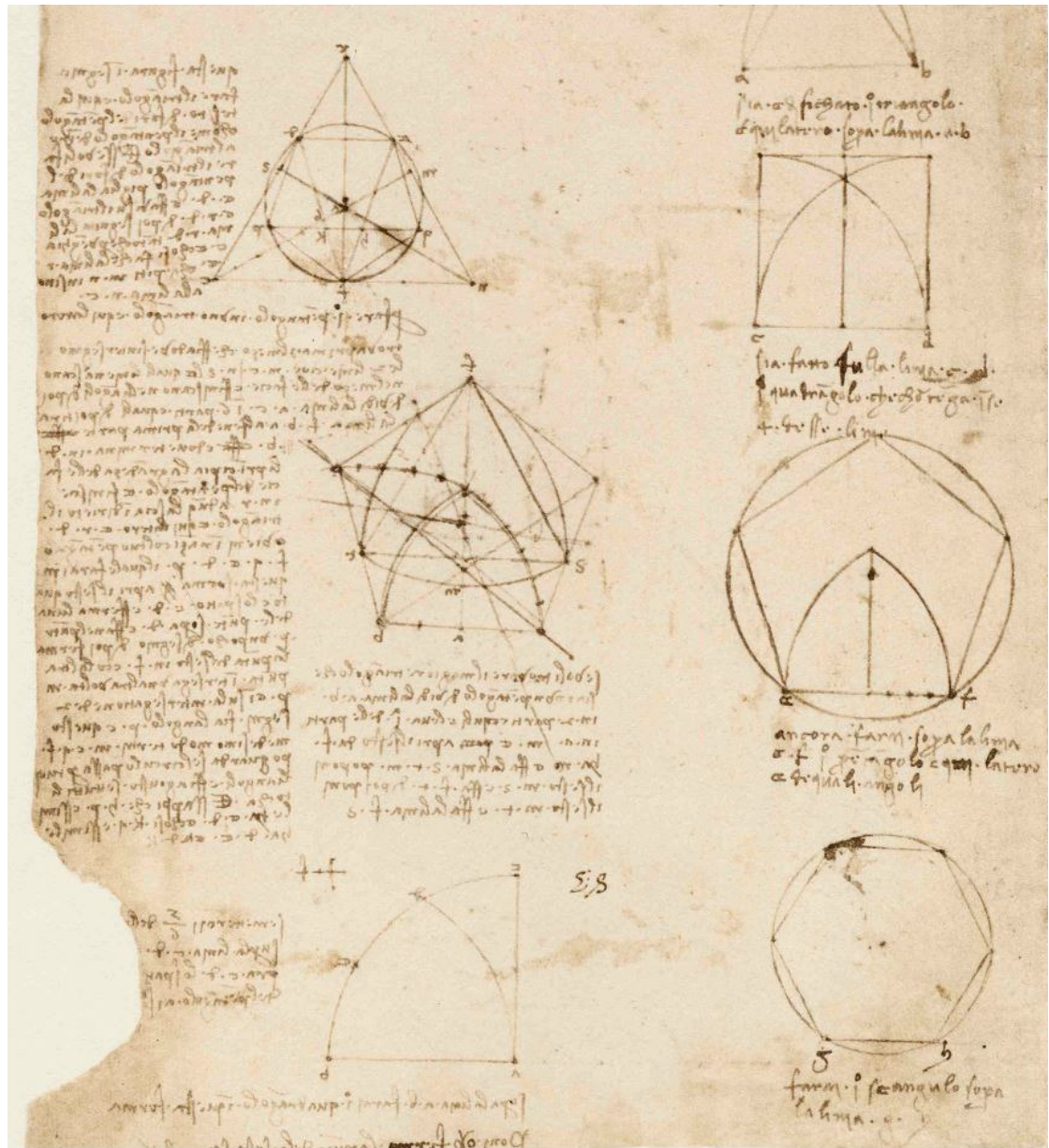
<http://www.bibliotecaleonardiana.it/bbl/eventi/ev-05-120507.shtml>





**FIG. 68.** Leonardo da Vinci, Studi sul triangolo sferico, 1478-1518

Fonte: Leonardo da Vinci, "Codex Atlanticus (Codice Atlantico)", 1478-1518, foglio 923 recto, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano  
<http://www.bibliotecaleonardiana.it/bbl/eventi/ev-05-120507.shtml>

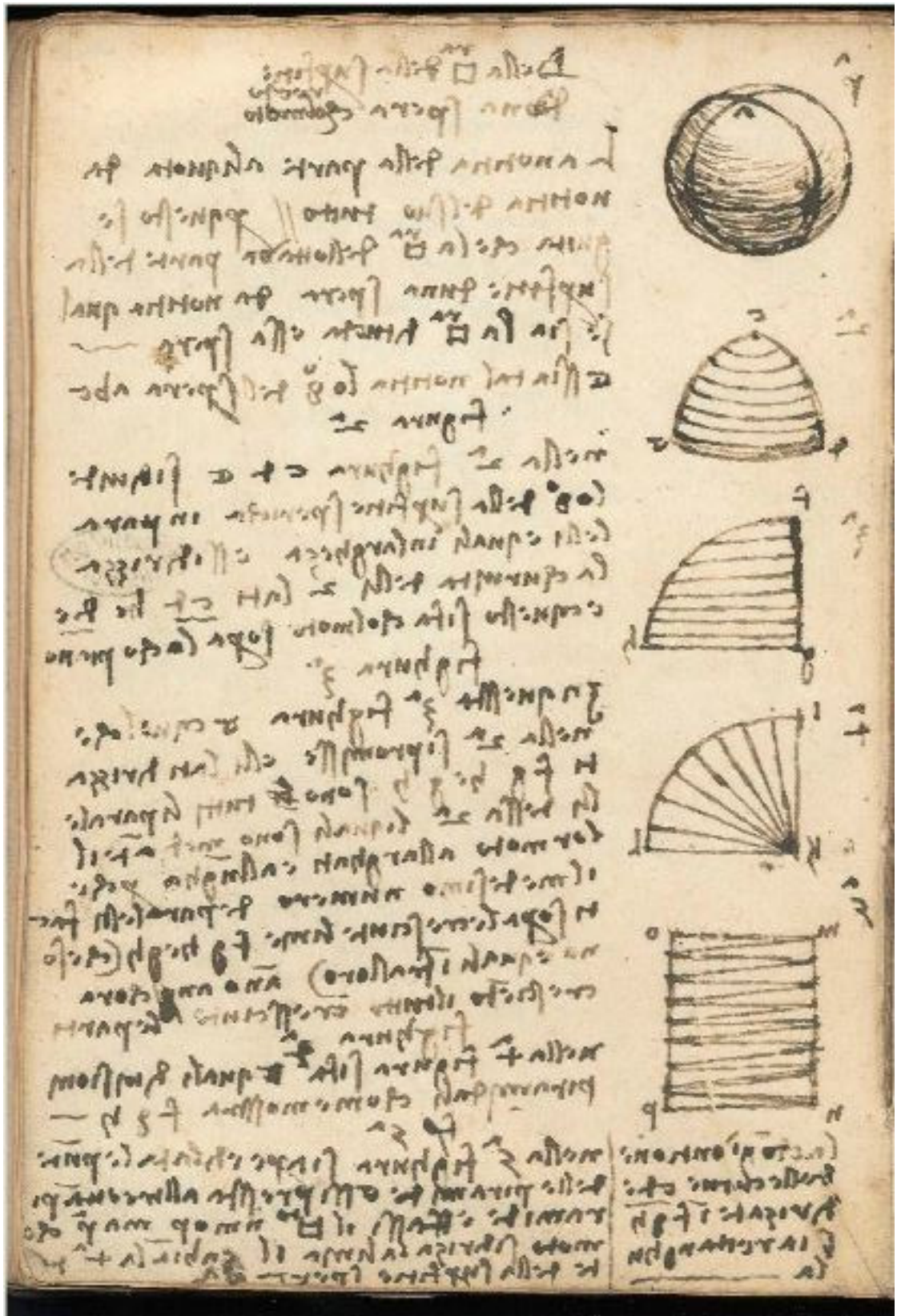


**FIG. 69 (1).** Leonardo da Vinci, Studi sul triangolo sferico, 1492-1516

Fonte: Leonardo da Vinci, "Paris Manuscript (Manoscritto di Francia) E", 1492-1516, foglio 24 verso, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Firenze, Giunti Barbèra, 1990, proprietà degli originali: Institut de France, Parigi; in "Leonardo da Vinci's World Map" di Tyler W. Christofer, City University, London, 2014, pag. 10

<http://www.bibliotecaleonardiana.it/bbl/eventi/ev-05-120507.shtml>





**FIG. 69 (2).** Leonardo da Vinci, Studi sul triangolo sferico, 1492-1516

Fonte: Leonardo da Vinci, "Paris Manuscript (Manoscritto di Francia) E", 1492-1516, foglio 25 recto, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Firenze, Giunti Barbèra, 1990, proprietà degli originali: Institut de France, Parigi; in "Leonardo da Vinci's World Map" di Tyler W. Christofer, City University, London, 2014, pag. 10

<http://www.bibliotecaleonardiana.it/bbl/eventi/ev-05-120507.shtml>

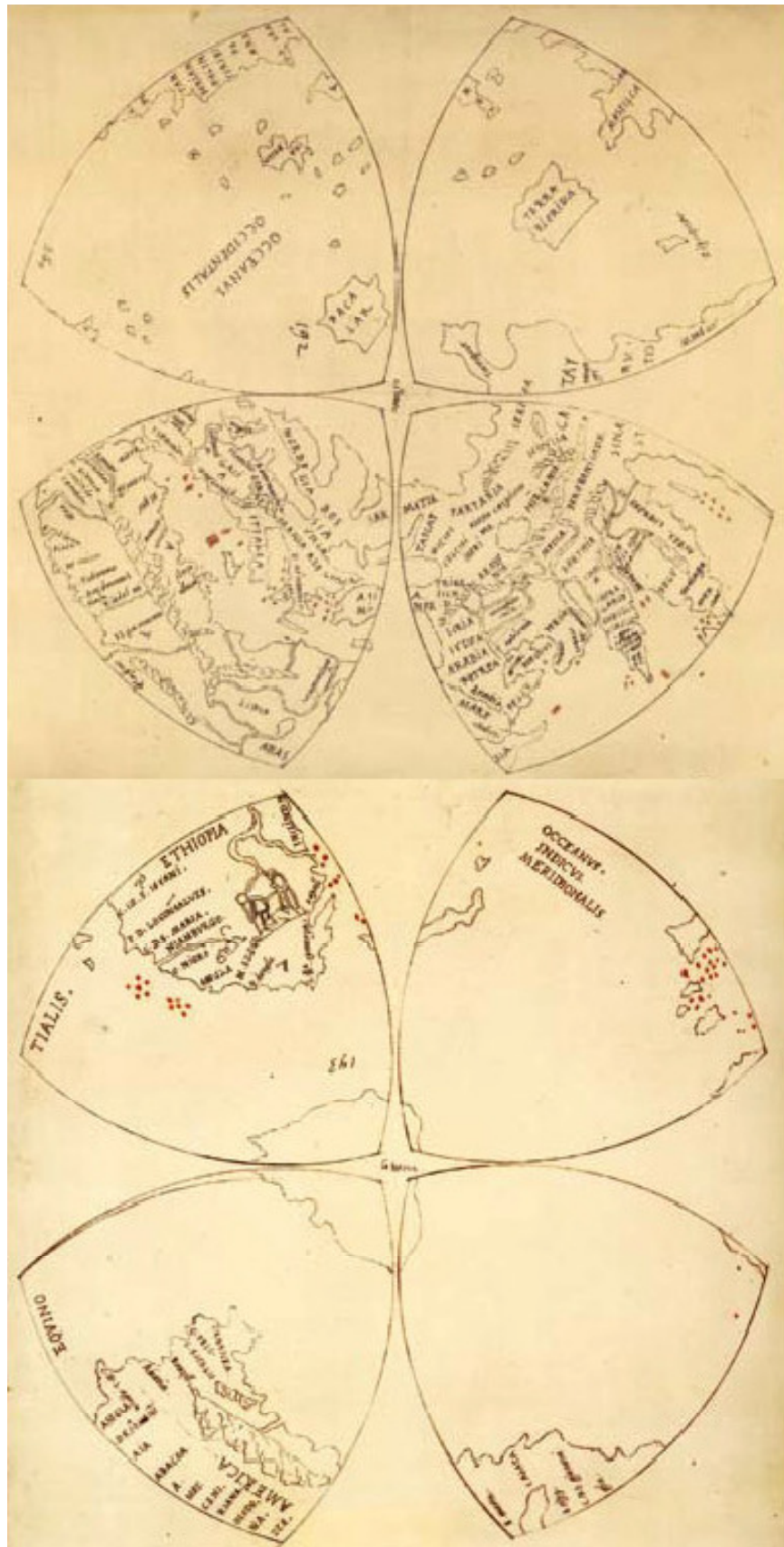




**FIG. 70.** Leonardo da Vinci, Proiezione cartografica ottante, 1508-1514, Royal Library, Castello di Windsor, RL 01393 (emisfero a nord dell'equatore), RL 01393 bis (emisfero a sud dell'equatore)

Fonte: "Leonardo da Vinci's World Map" di Tyler W. Christofer, City University, London, 2014, pag. 10;

<http://www.diegocuoghi.com/palazzobestaleonardo/>



**FIG. 71.** Oronce Finè, Studi sul triangolo sferico in cartografia, 1549

Fonte: Finè Oronce, "Le Sphere du Monde, proprement dicte Cosmographie", Paris, 1549, manoscritto MS Typ 57, foglio 66, seq.141, conservato presso Harvard University - Houghton Library, Cambridge, Mass

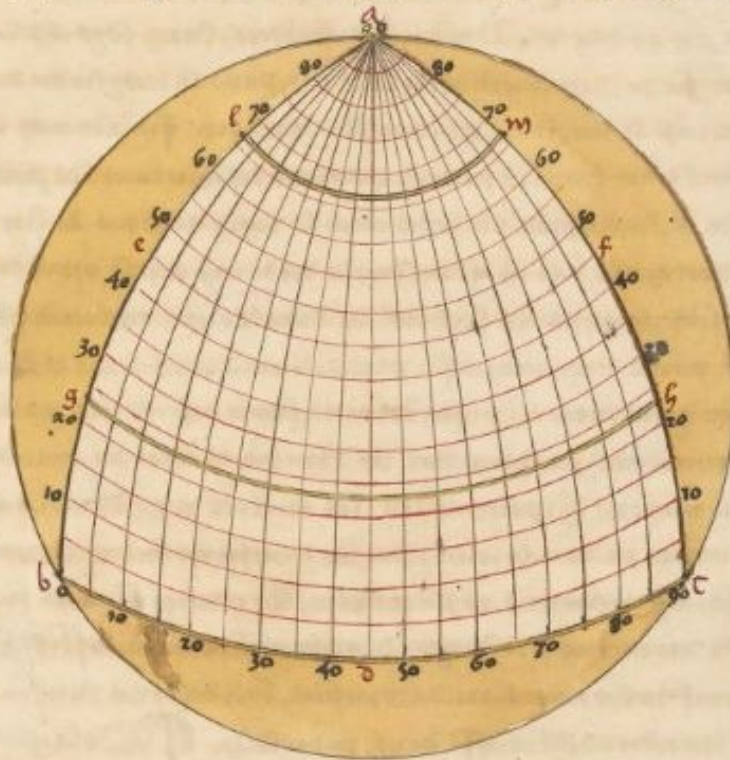
[https://iif.lib.harvard.edu/manifests/view/drs:18260773\\$141i](https://iif.lib.harvard.edu/manifests/view/drs:18260773$141i)



# De L'esphere.

¶ 66.

a d. Lequartier de Lequinocetial, b d c : du moyeu parallèle, ef:  
du tropique/gh, et du cercle polaire/klm. Outre ce, y a esté  
des/meridiens et paralleles, est d'inst (p forme de xemple)  
en 18 parties égales : dont chascune représente 5/degres.



¶ Et est facile cōformer ladicte figure, jusques ala quarte  
partie de tout le globe : en produysant l'arc de Lequinocetial  
bc/et de ses paralleles d'unq coste et d'autre, et assigner l'ar  
le nombre des meridiens precedans du point a/ainsi qu'il est  
requis, et come bon peust compndre par les choses dessus  
¶ Mais pour destruire toute la moytie dudit globe entiere  
ment, s'oprenant l'unq et l'autre pole: il faut le faire come se suit.

**FIG. 72.** Daniel Angelocrator, Proiezione cartografica ottante, 1628

Fonte: Angelocrator Daniel, "Doctrina de ponderibus, monetis et mensuris per totum terrarum orbem usitatis", Frankfurt, Johann Nicolaus Stoltzenberger, 1628;

<https://www.vintage-maps.com/en/antique-maps/world-maps/angelocrator-world-maps-1628::1193>





**FIG. 73.** Bernard Joseph Stanislaus Cahill Cahill, *Butterfly Map*, 1913, tavola di brevetto

Fonte: Cahill Bernard Joseph Stanislaus (Assegnatario), Patent US 1081207 A, "Geographical globe", data di pubblicazione: 09/12/1913, data di registrazione: 11/02/1913, Serial No. 747,717, United States Patent Office, visualizzabile su <https://www.google.si/patents/US1081207>

B. J. S. CAHILL.  
GEOGRAPHICAL GLOBE.  
APPLICATION FILED FEB. 11, 1913.

1,081,207.

Patented Dec. 9, 1913.

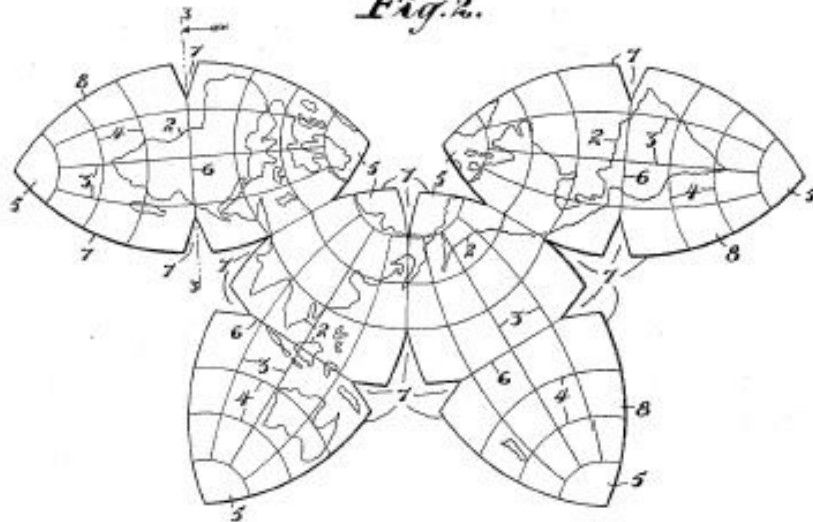
*Fig. 1.*



*Fig. 3.*



*Fig. 2.*



WITNESSES

*H. C. Sheddner*  
*H. B. Keating*

INVENTOR

*B. J. S. Cahill*  
BY *Francis M. Wright,*  
ATTORNEY

**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 74.** Richard Buckminster Fuller, *Dymaxion Map*, 1954

Fonte: <http://www.geni.org/globalenergy/shop/additional/raleighprojection-addtln.shtml>

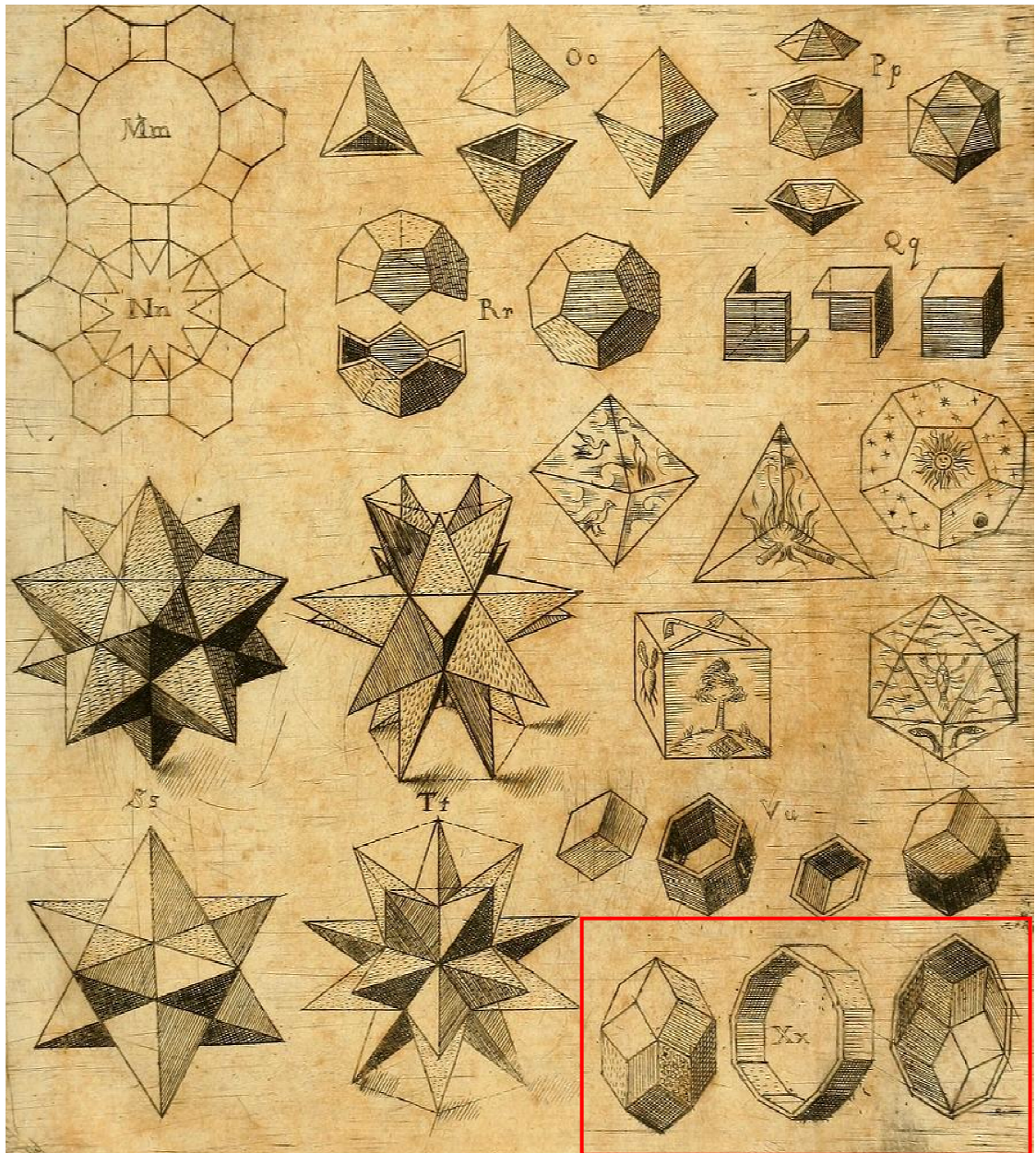


**FIG. 76.** Johannes von Kepler, *Simmetria quinary e triacontaedro*,  
1619

Fonte: von Kepler Johannes, "Harmonices Mundi", Francoforte,  
Lincii Austriae, Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof.  
Excudebat Ioannes Plancus, 1619, Liber II, De Congruentia  
Figurarum Harmonicarum, illustrazione Xx nel foglio posto tra pag.  
58 e pag. 59 e XXVII Propositio, pag. 61, conservato presso  
Smithsonian Libraries, Washington, D.C.

<http://library.si.edu/digital-library/book/ioanniskepplerih00kepl>

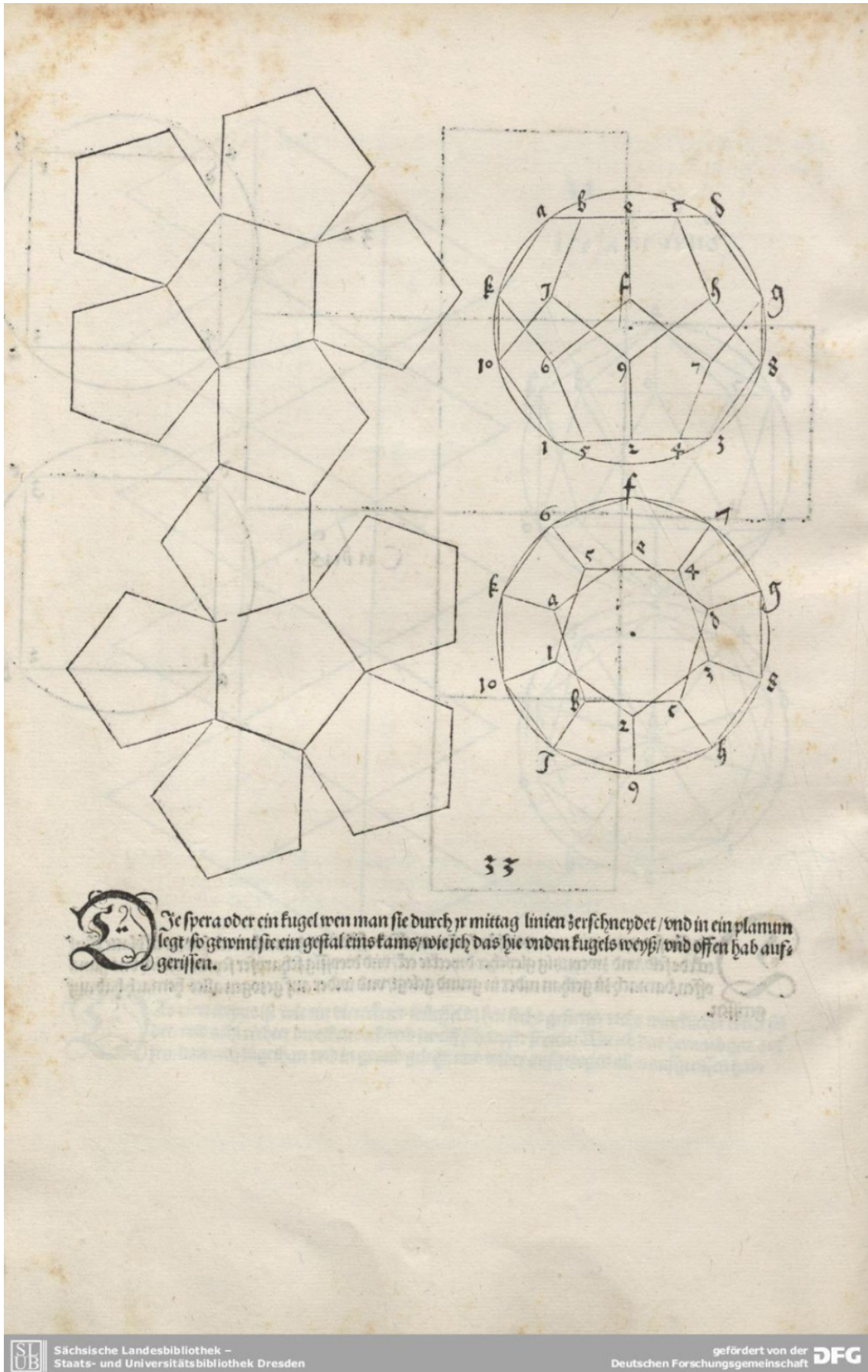




**FIG. 80.** Albrecht Dürer, Dodecaedro platonico e suo sviluppo planare, 1525

Fonte: Dürer Albrecht, "Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebenen unnd gantzen corporen (Istruzioni per la misurazione con riga e compasso di figure nel piano e nello spazio)", Nuremberg, Hieronymus Andreas Formschneider, 1525, Das Viert Büchlein (IV Libretto), illustrazione 33, conservato presso SLUB Dresden, segnatura: S.B.616





**FIG. 82.** Jean-Baptiste de La Rue, Taglio dei conci con superfici curve, 1728

Fonte: de La Rue Jean-Babtiste, "Traité de la coupe des pierres", Parigi, Imprimerie Royale, 1728, tavola IV

PLANCHE II

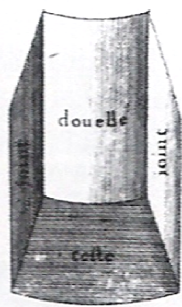
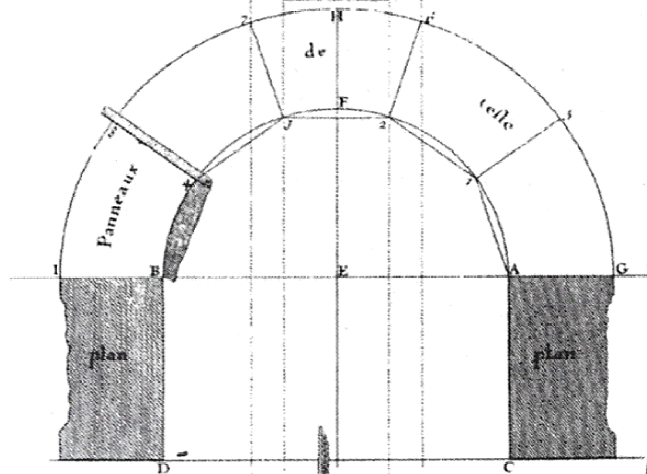
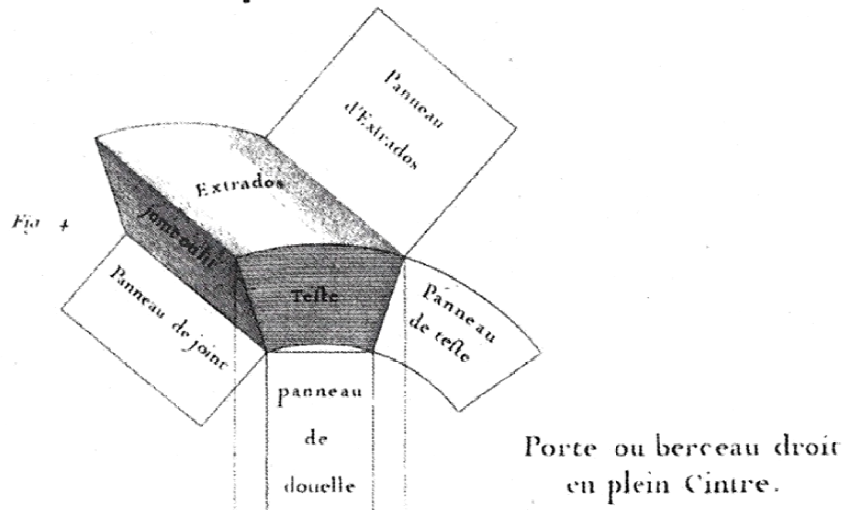


Fig. 3

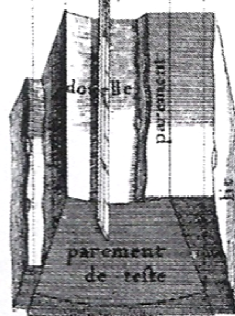


Fig. 2

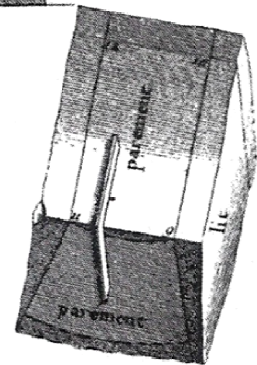


Figure 1

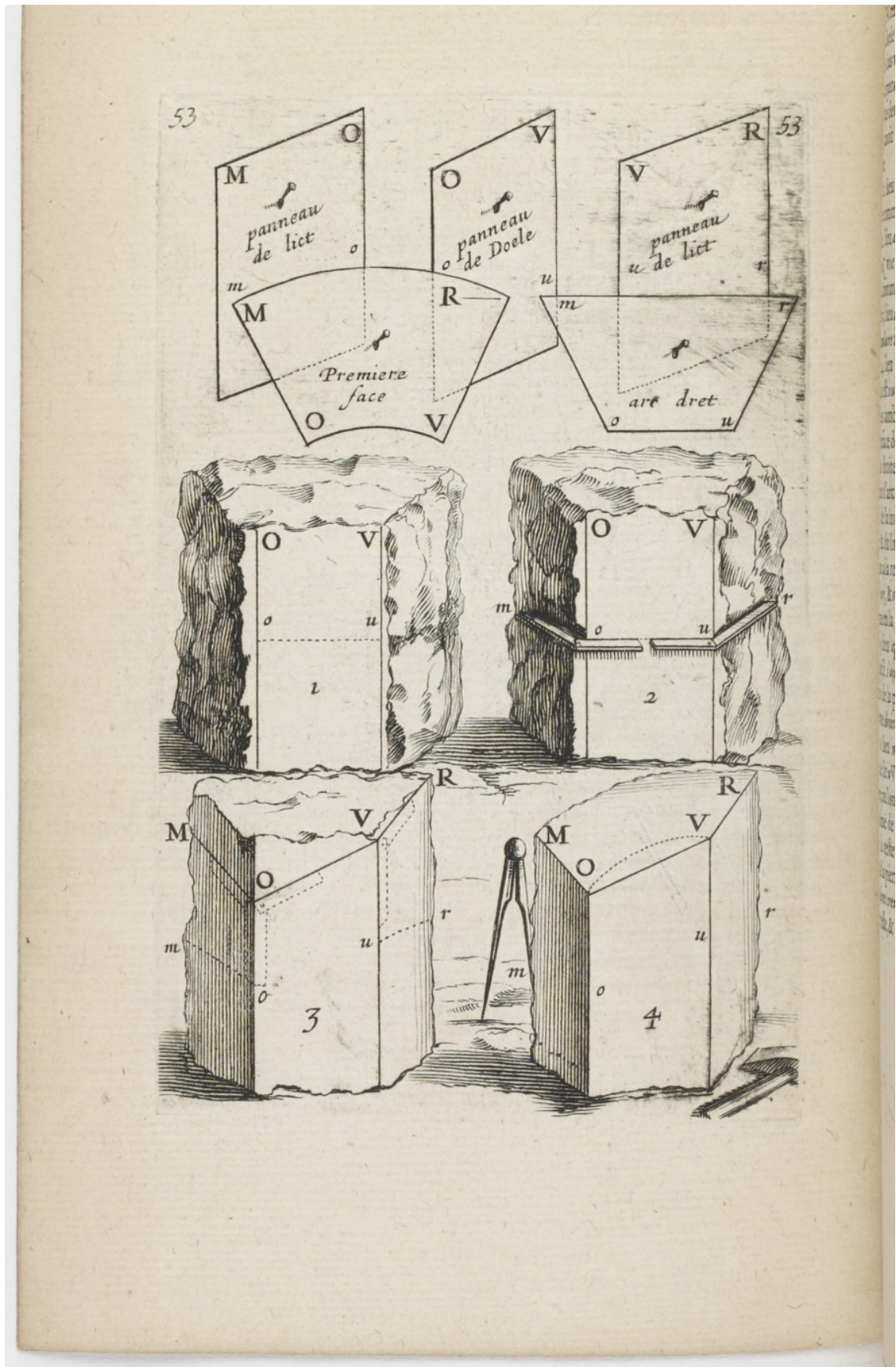
**FIG. 83.** Abraham Bosse, Taglio dei conci con superfici curve, 1643

Fonte: Bosse Abraham, "La pratique du trait à preuves, de Mr Desargues Lyonnais, pour la coupe des pierres en l'architecture", Paris, De l'Imprimerie de Pierre Des-Hayes Rue de la Harpe à la Roze Rouge, 1643, tavola 6, tavola 53

Bibliothèque nationale de France (BnF)

<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/btv1b86120399/f178.item>





**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

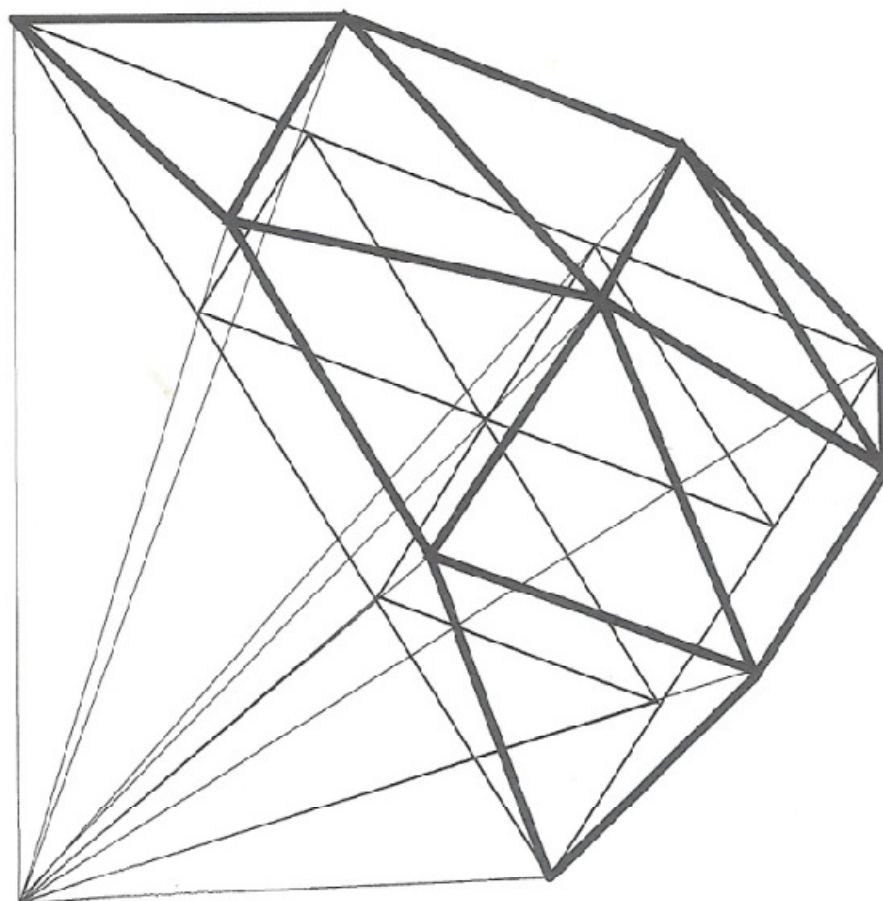
Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 85.** Biagio di Carlo, Proiezione della divisione planare sulla sfera, 2010

Fonte: di Carlo Biagio, "Strutture geodetiche", Pescara, DC Books, lulu.com editions, 2010, copertina e frontespizio interno



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

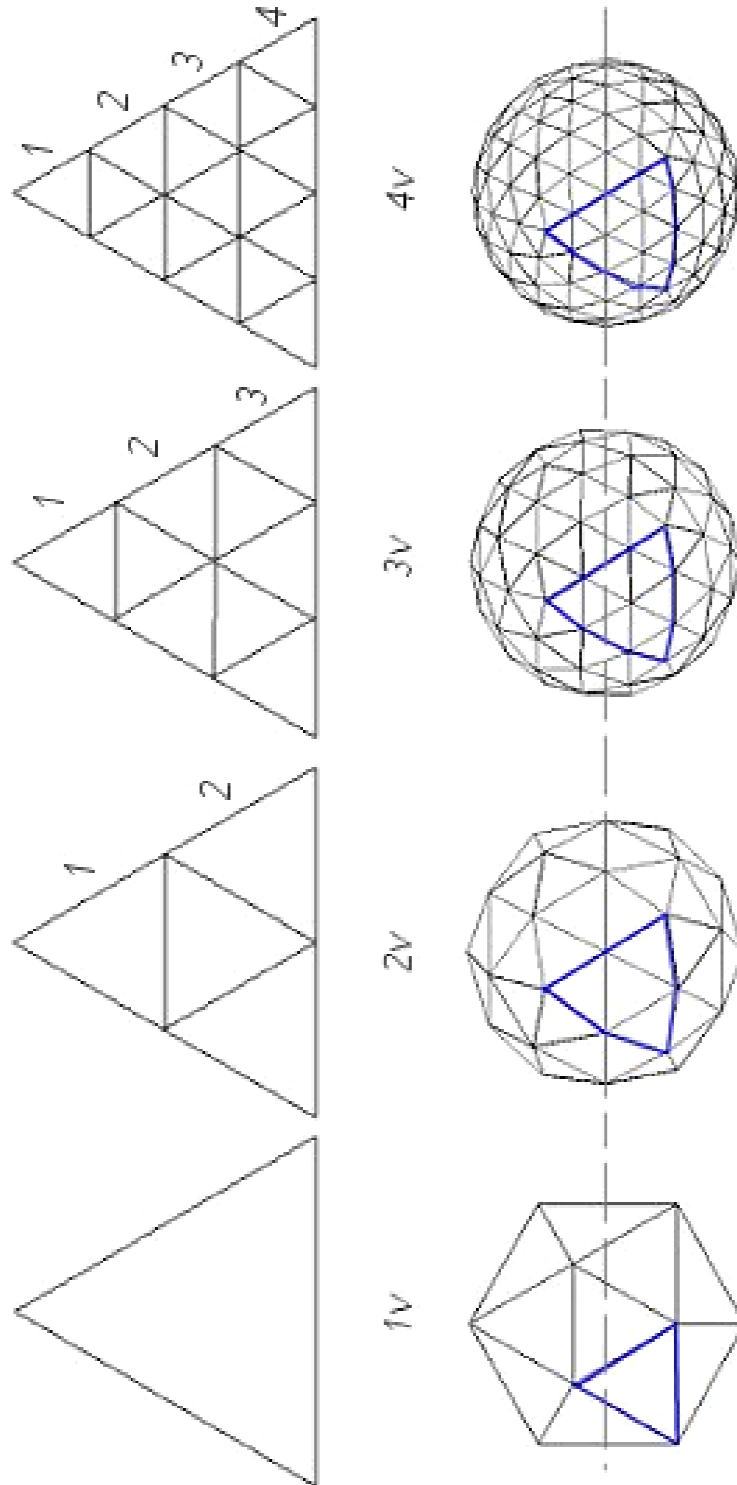
Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 86.** Frequenza di suddivisione geodetica

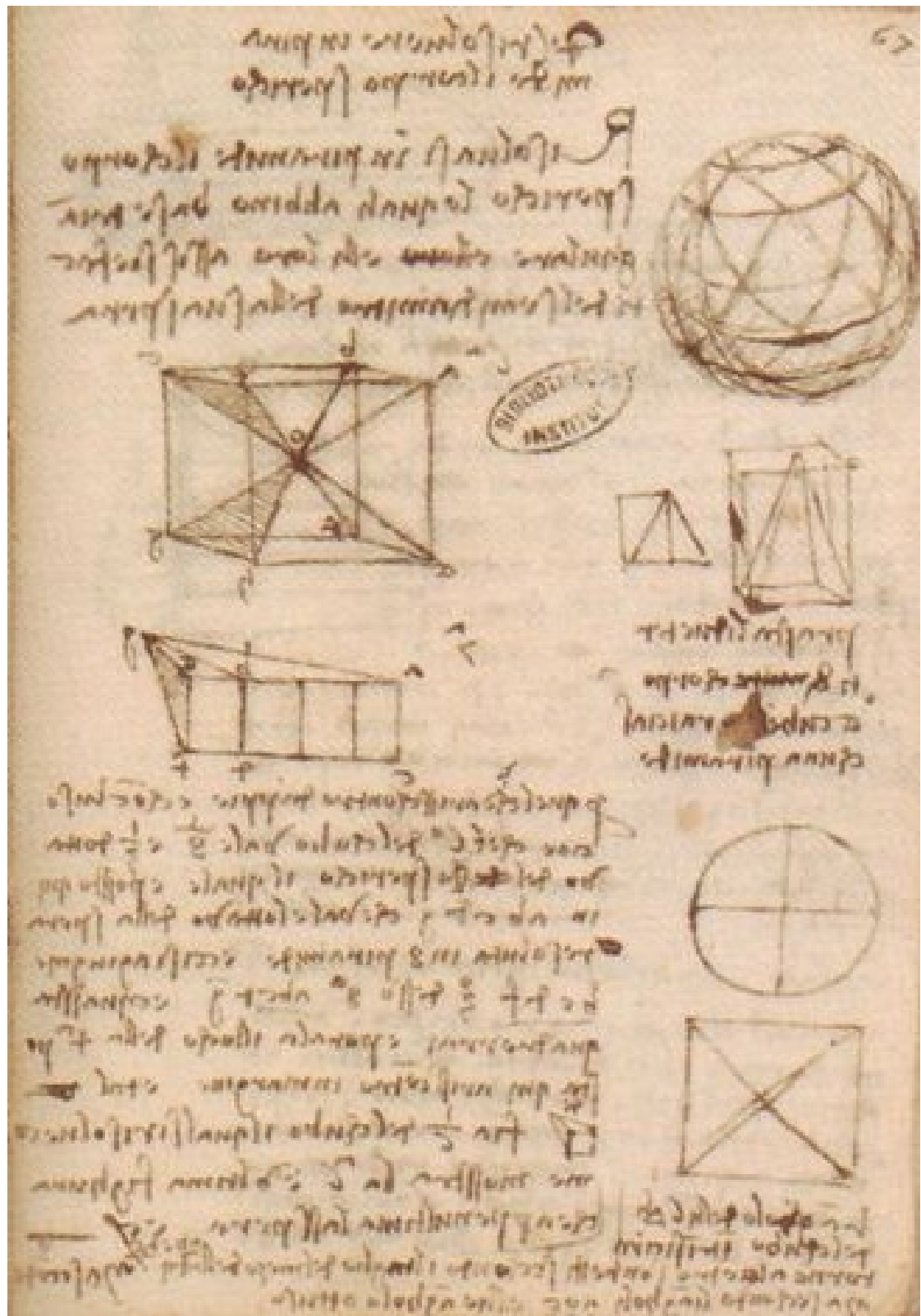
Fonte: Geodesic dome frequency explained, Copyright © 2007- 2014  
geo-dome.co.uk (<http://geo-dome.co.uk/article.asp?uname=domefreq>)



**FIG. 87.** Leonardo da Vinci, *Del risolvere in piramide il corpo sferico*, divisione sferica secondo linee attualmente definite geodetiche, 1492-1516

Fonte: Leonardo da Vinci, "Paris Manuscript (Manoscritto di Francia) G", 1492-1516, foglio 67 recto, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Firenze, Giunti Barbèra, 1990, proprietà degli originali: Institut de France, Parigi;  
<http://www.bibliotecaleonardiana.it/bbl/eventi/ev-05-120507.shtml>;  
<http://www.progetti.iisleviponti.it/Leonardo/html/architettura.html>





**FIG. 88.** Richard Buckminster Fuller, *Geodesic structures*, divisione geodetica della sfera, 1954, tavola di brevetto

Fonte: Fuller Richard Buckminster (Assegnatario), Patent US2682235 A, "Building construction", data di pubblicazione: 29/06/1954, data di registrazione: 12/12/1951, United States Patent Office, <https://www.google.com/patents/US2682235>

Aug. 3, 1965

R. B. FULLER

3,197,927

GEODESIC STRUCTURES

Filed Dec. 19, 1961

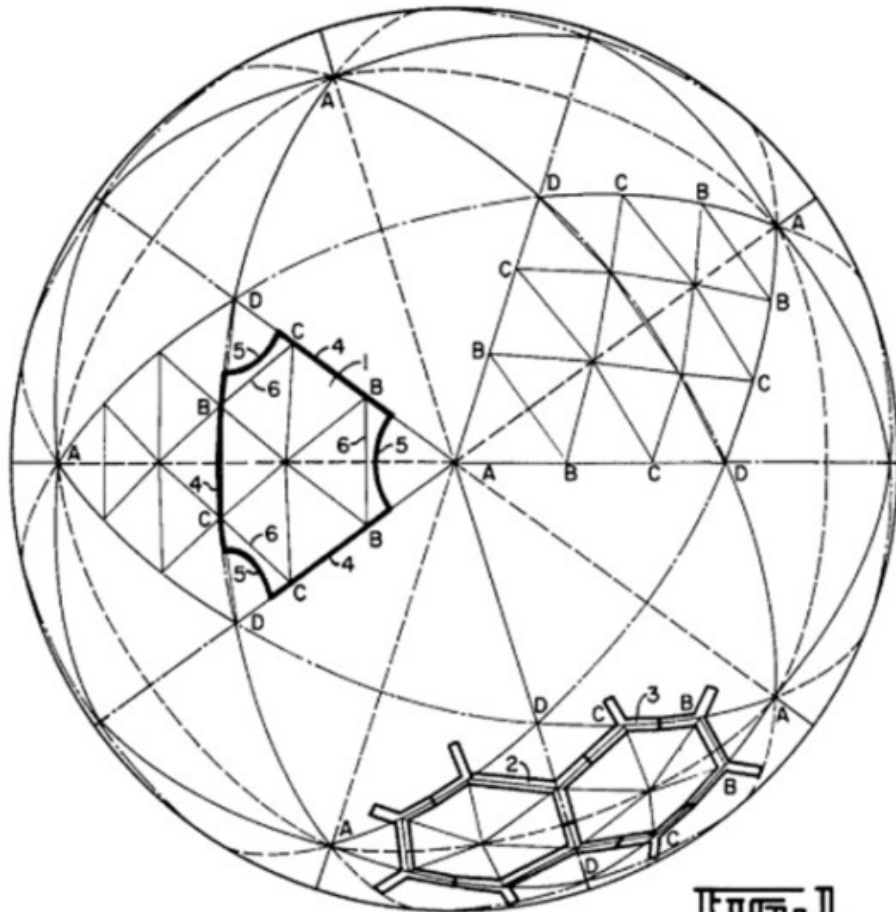


FIG. 1

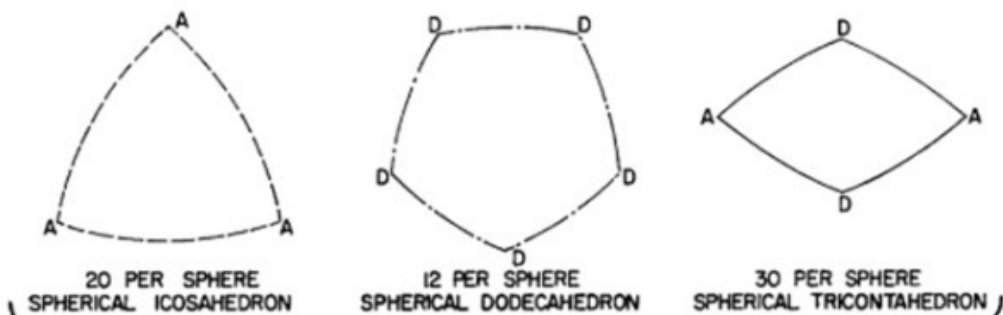


FIG. 2

INVENTOR.  
RICHARD BUCKMINSTER FULLER

**FIG. 89.** Richard Buckminster Fuller, Primo prototipo di cupola geodetica, 1954, X Esposizione Internazionale, Triennale di Milano

Fonte: "X Triennale - Parco Sempione - Partecipazione statunitense - Abitazione a cupola geodetica Fuller, Farabola", da LombardiaBeniCulturali

(<http://www.lombardiabenculturali.it/fotografie/schede/IMM-3u030-0006580/>)

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 90.** Richard Buckminster Fuller, *Montréal Biosphère*, Cupola geodetica, 1967, Esposizione Universale e Internazionale, Montréal

Fonte: Inhabitat (<http://inhabitat.com/photos-biosphere-environmental-museum-resides-inside-a-buckminster-fuller-masterpiece/>)



**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

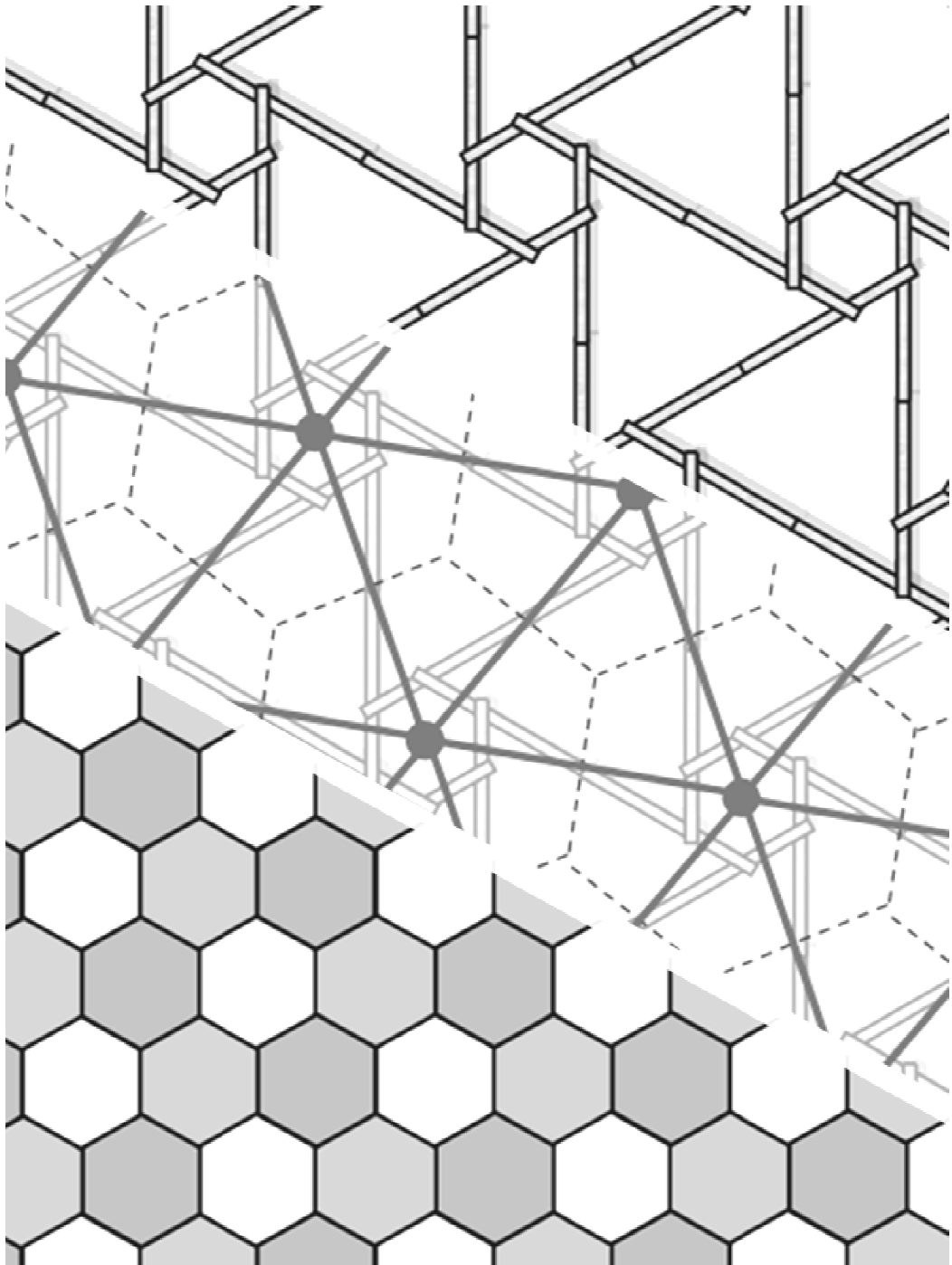
**FIG. 92.** Radome, cupola del Ballistic Missile Early Warning System,  
1958-1964, RAF Fylingdales, North Yorkshire (UK)

Fonte: Jonathan Glancey, "Lost Buildings: Demolished, Destroyed,  
Imagined, Reborn", London, Goodman Books, 2008



**FIG. 93.** Derivazione della geometria reciproca (maglia triangolare ed esagonale in figura) dalla divisione geodetica (triangolare in figura) e dalla sua duale (esagonale in figura), 2013

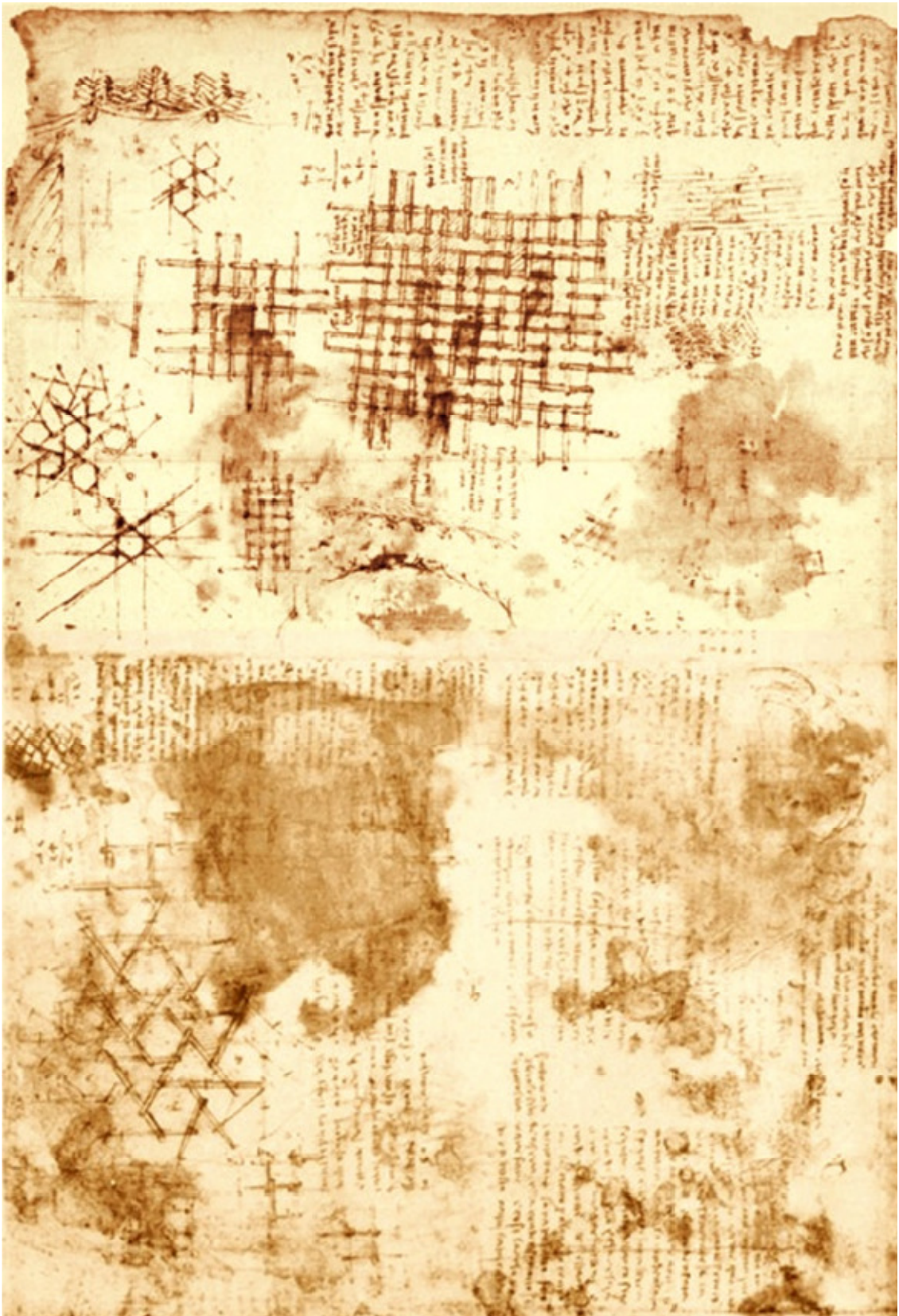
Fonte: Song Peng, Fu Chi-Wing, Goswami Prashant, Zheng Jianmin, Mitra Niloy J. e Cohen-Or Daniel, "Reciprocal Frame Structures Made Easy", articolo presentato in occasione di "SIGGRAPH, 40th International Conference and Exhibition on Computer Graphics and Interactive Techniques", Anaheim (USA), luglio 2013



**FIG. 94 (1).** Leonardo da Vinci, Strutture reciproche lignee, 1478-1518

Fonte: Leonardo da Vinci, "Codex Atlanticus (Codice Atlantico)", 1478-1518, foglio 899 verso, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano.  
<http://www.bibliotecaleonardiana.it/bbl/eventi/ev-05-120507.shtml>

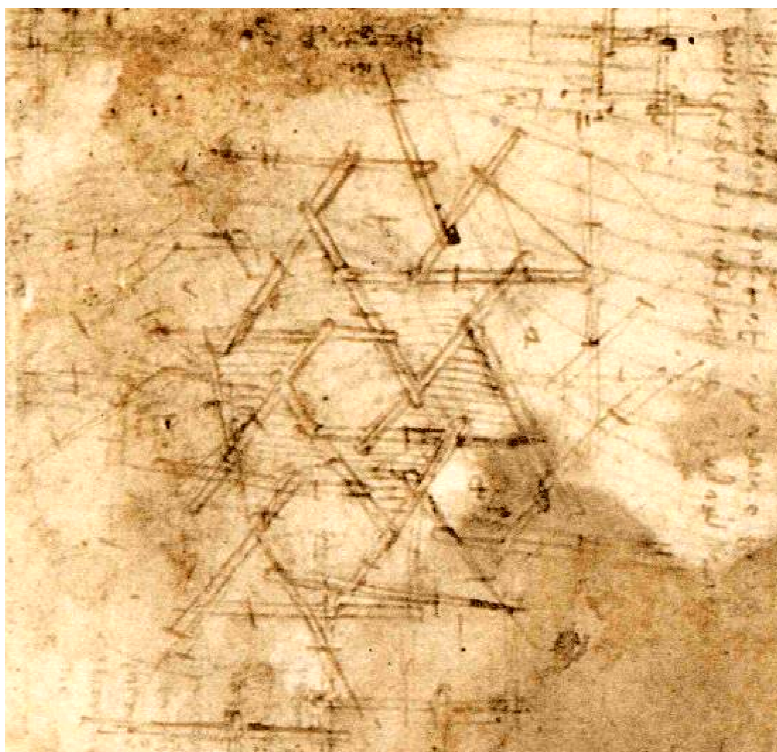
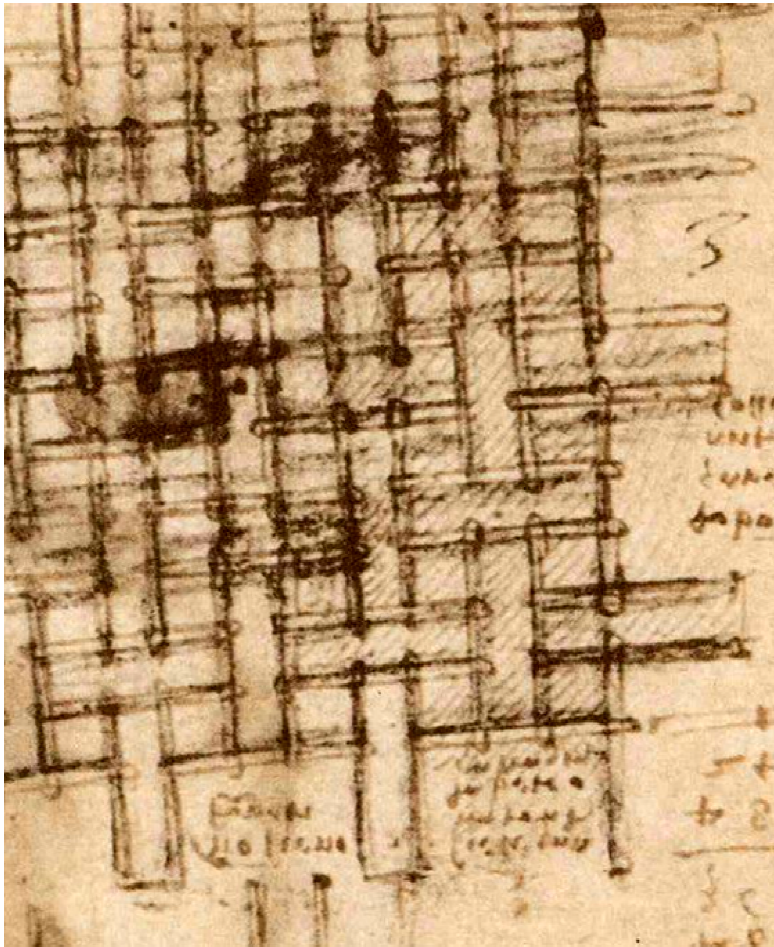




**FIG. 94 (2).** Leonardo da Vinci, Strutture reciproche lignee, 1478-1518, particolari

Fonte: Leonardo da Vinci, "Codex Atlanticus (Codice Atlantico)", 1478-1518, foglio 899 verso, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano.  
<http://www.bibliotecaleonardiana.it/bbl/eventi/ev-05-120507.shtml>





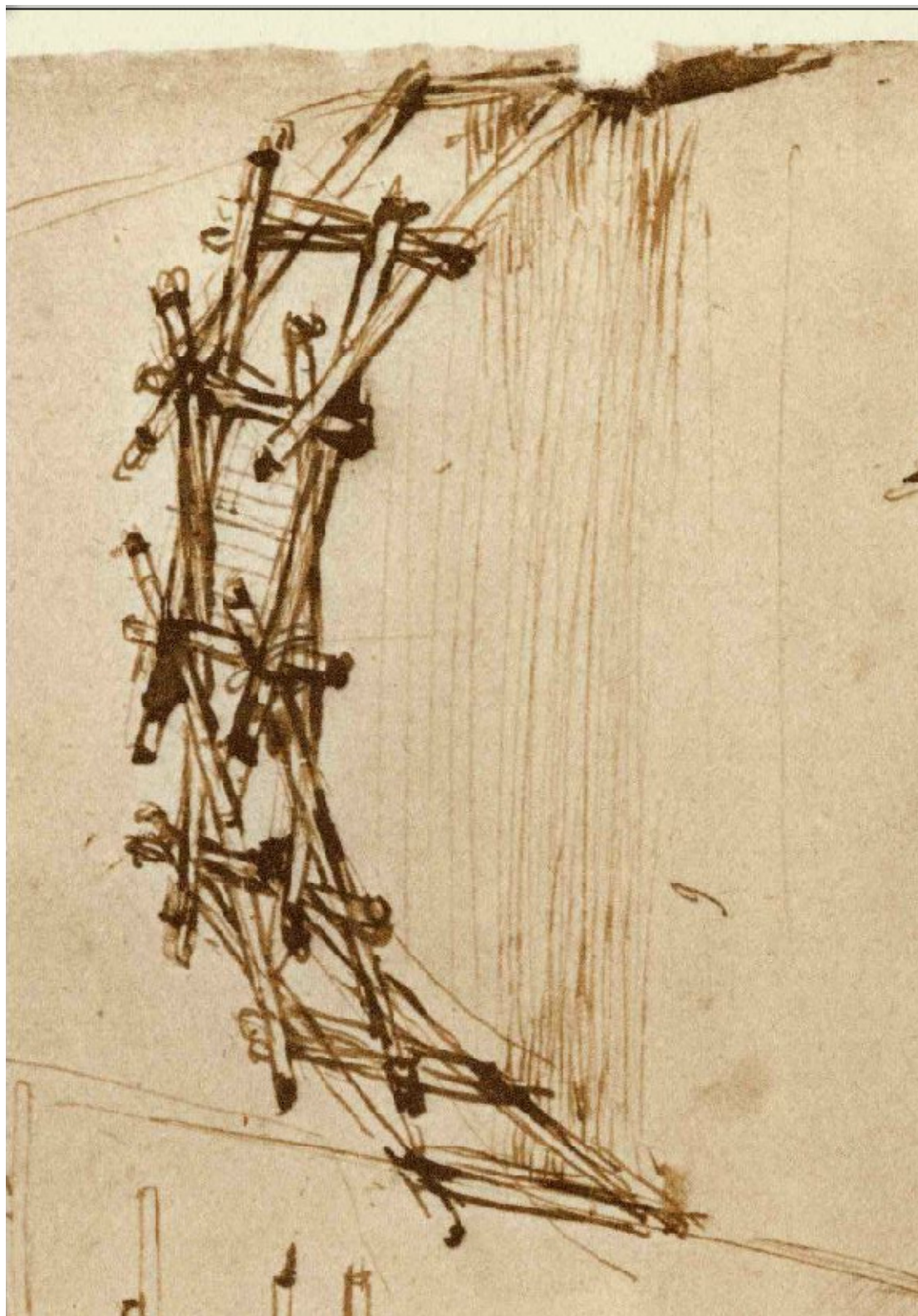
**FIG. 95.** Leonardo da Vinci, Ponte reciproco ligneo, 1478-1518

Fonte: Leonardo da Vinci, "Codex Atlanticus (Codice Atlantico)", 1478-1518, foglio 69 recto, Biblioteca Leonardiana, Vinci, consultabile su "e-Leo Archivio digitale di storia della tecnica e della scienza", Edizione facsimilare utilizzata per le scansioni (proprietà della Biblioteca Leonardiana): Giunti Editore 1973-1975, proprietà degli originali: Biblioteca Ambrosiana di Milano.  
<http://www.bibliotecaleonardiana.it/bbl/eventi/ev-05-120507.shtml>

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**FIG. 96.** Richard Buckminster Fuller, *Tensile-integrity structures*,  
1962, tavola di brevetto

Fonte: Fuller Richard Buckminster (Assegnatario), Patent  
US3063521 A, "Tensile-integrity structures", data di pubblicazione:  
13/11/1962, data di registrazione: 31/08/1959, United States Patent  
Office, <https://www.google.com/patents/US3063521>



Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)

DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)

Nov. 13, 1962

R. B. FULLER

3,063,521

TENSILE-INTEGRITY STRUCTURES

Filed Aug. 31, 1959

13 Sheets-Sheet 6

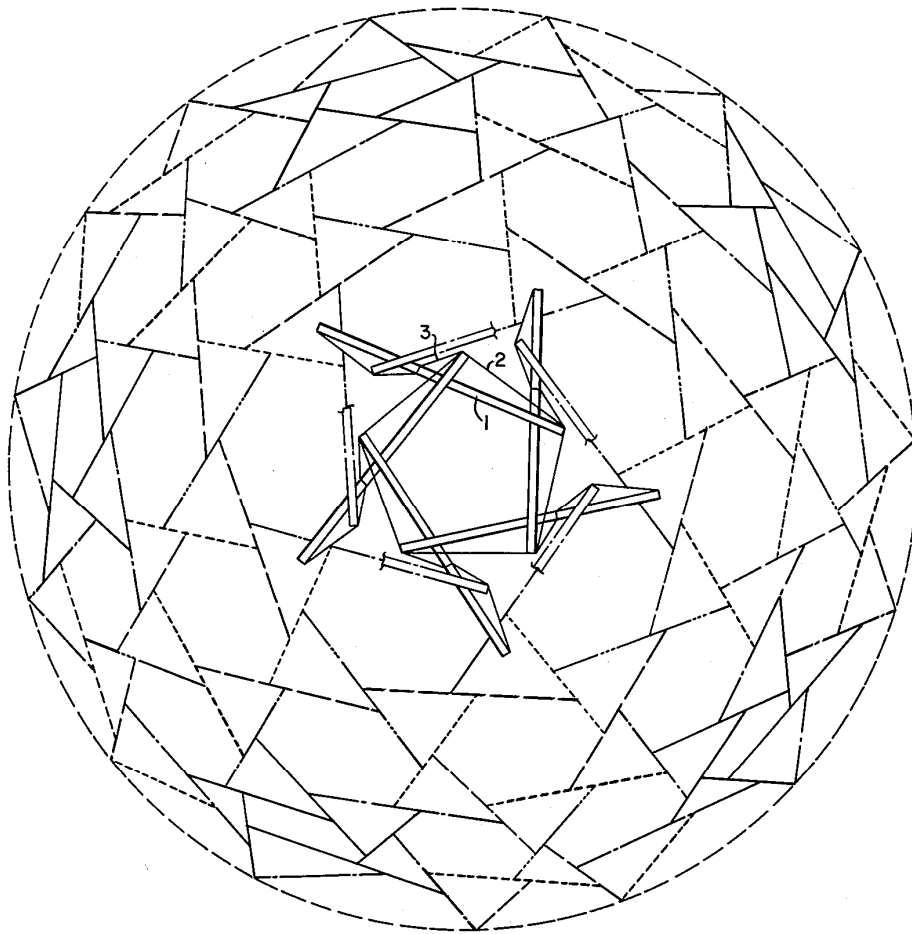


FIG. 100

INVENTOR.

R. BUCKMINSTER FULLER

BY

*Pollard, Johnston, Smythe & Robertson*  
ATTORNEYS.

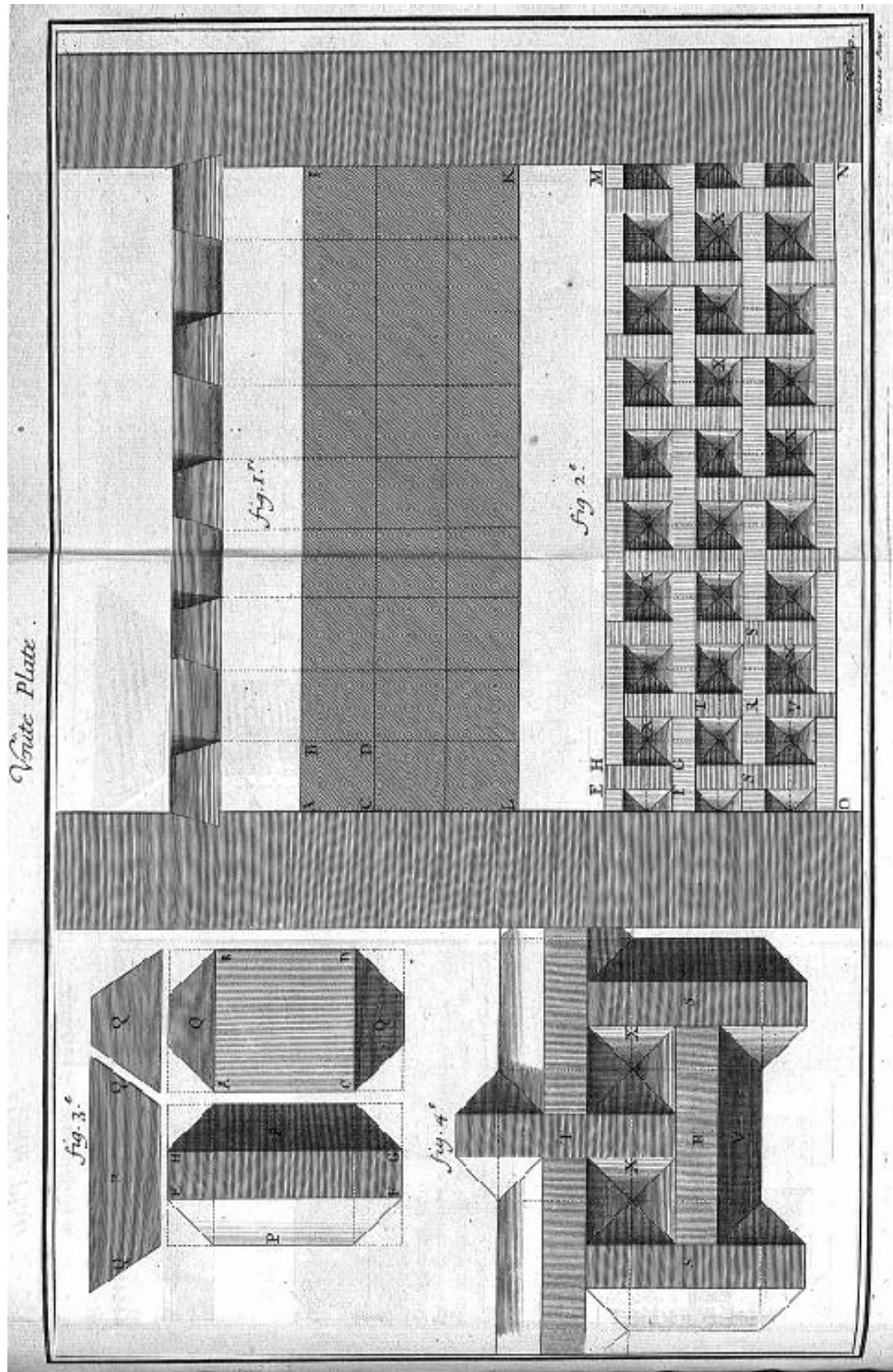
**FIG. 97.** Rinus Roelofs, *Leonardo da Vinci's Bar Grid*, Sfera lineare reciproca, 2003

Fonte: Convegno internazionale "Leonardo 2003: Architecture and Mathematics" organizzato dall'architetto Kim Williams fondatrice del Nexus Network Journal, e tenutosi nel 2003 presso la città di Vinci,  
<http://www.rinusroelofs.nl/structure/davinci-models/dm-distortion-31.html>



**FIG. 98.** Joseph Abeille, *Voute Plate*, 1699

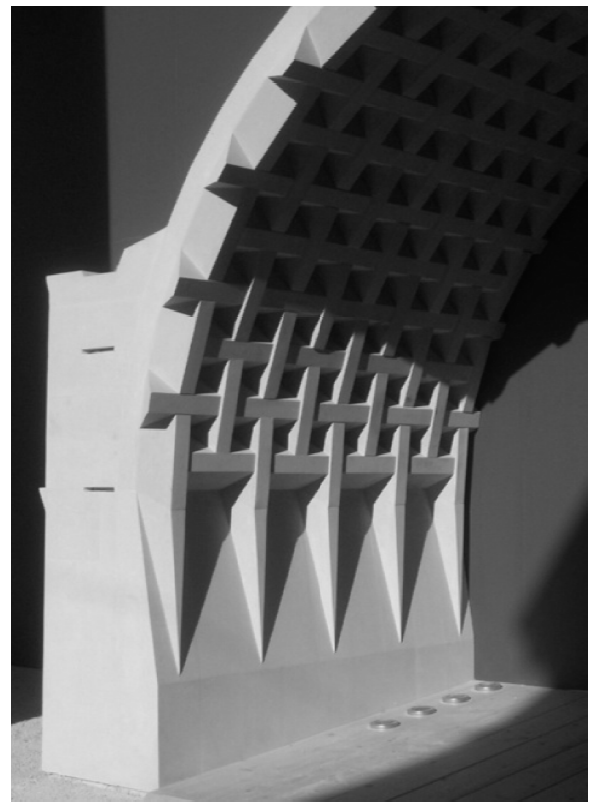
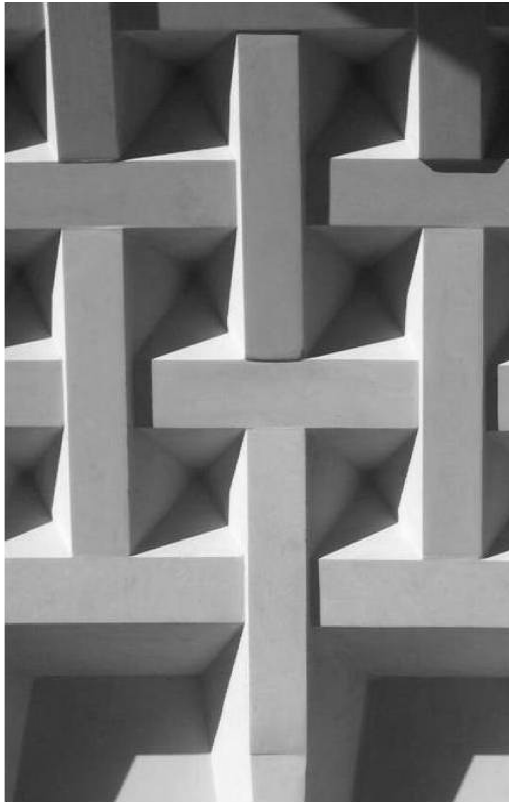
Fonte: "Machines et inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences", Tome Premier Deouis 1666 jusqu'en 1701, Paris, Chez Gabriel Martin, Jean-Baptiste Coignard, Fils, Hippolyte-Louis Guerin, Rue S. Jacques, 1735, Voute plate par M. Abeille, tavola 50 <http://digital.bibliothek.uni-halle.de/hd/periodical/pageview/1396065>



**FIG. 99.** Claudio D'Amato Guerrieri, Giuseppe Fallacara, *Portale Abeille*, 2006, La Biennale di Venezia, X Mostra Internazionale di Architettura, Venezia

Fonte: Fallacara Giuseppe, "Verso una progettazione stereotomica. Nozioni di stereotomia, stereotomia digitale e trasformazioni topologiche: ragionamenti intorno alla costruzione della forma", Roma, Aracne editrice, 2007, pp. 149,151



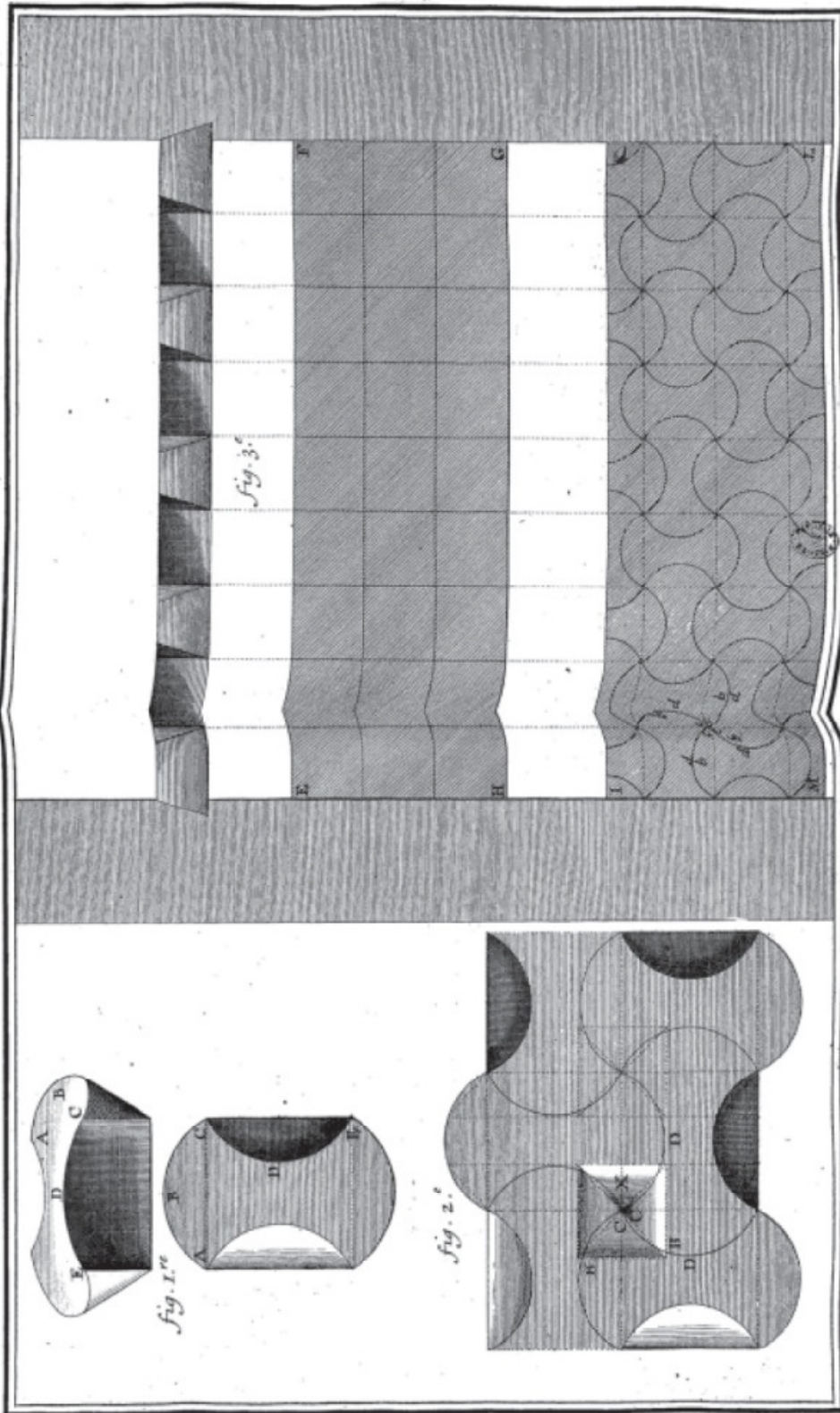


**FIG. 100.** Jean Truchet, *Voute Plate*, 1699

Fonte: “Machines et inventions approuvées par l'Académie Royale des Sciences”, Tome Premier Deouis 1666 jusqu'en 1701, Paris, Chez Gabriel Martin, Jean-Baptiste Coignard, Fils, Hippolyte-Louis Guerin, Rue S. Jacques, 1735, Voute plate par le Pere Sebastien, tavola 51

<http://digital.bibliothek.uni-halle.de/hd/periodical/pageview/1396065>

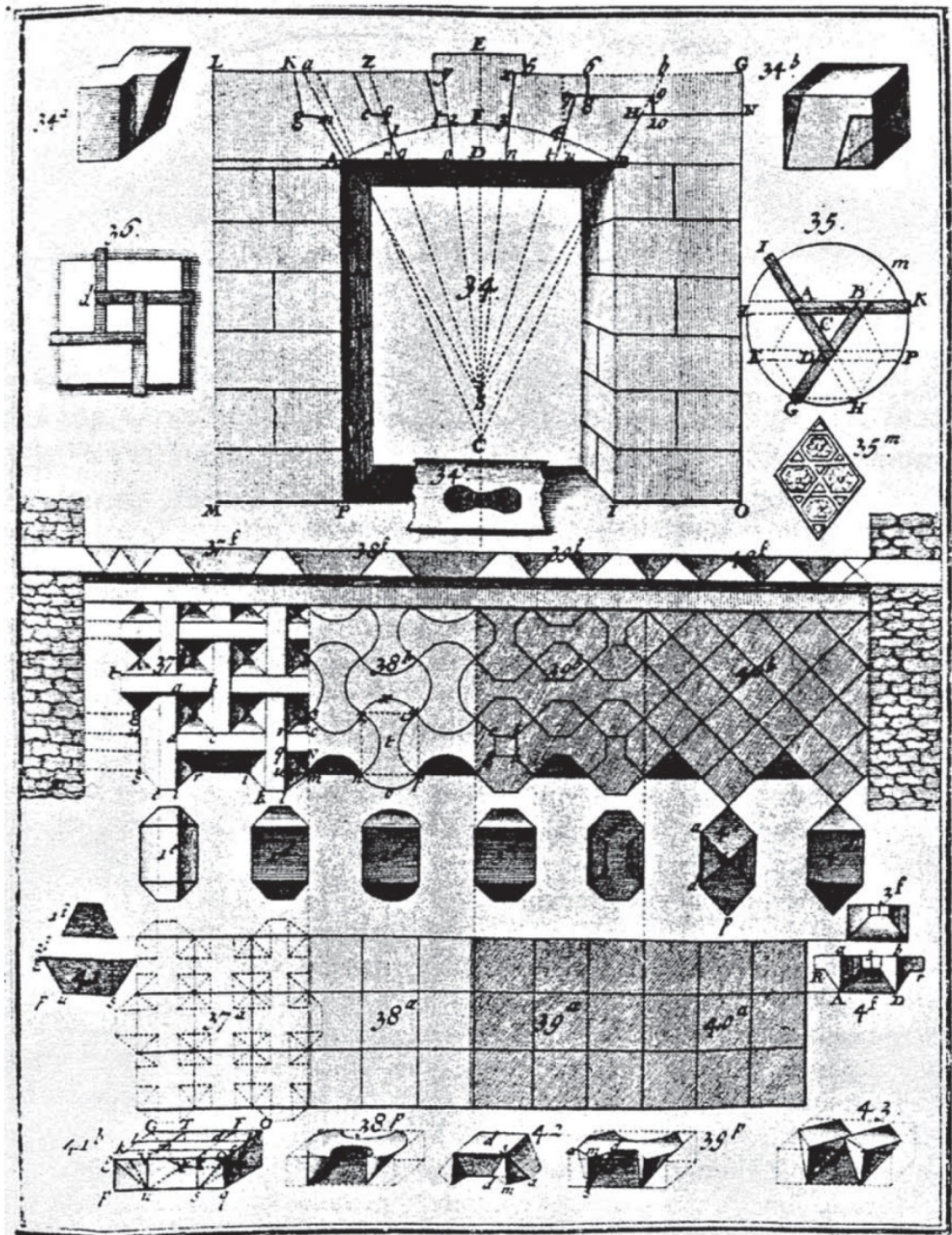
*Voute Plate.*



**FIG. 101.** Amédée François Frézier, *Strutture reciproche lignee e lapidee*, 1737-1739

Fonte: Frézier Amédée François, "La théorie et la pratique de la coupe des pierres et des bois, pour la construction des voutes et autres parties des bâtimens civils & militaires, ou *Traité de stereotomie à l'usage de l'architecture*", 2 tomi, Strasburgo-Parigi, 1737-1739; ristampato da Jacques LAGET-L.A.M.E., Nogent-le-Roi, 1980, Tome second, Planche 31, pag. 77





**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 102 (1).** Giuseppe Fallacara, *Bin Jassim Dome*, Realizzazione (vista dell'intradosso), 2012, Qatar

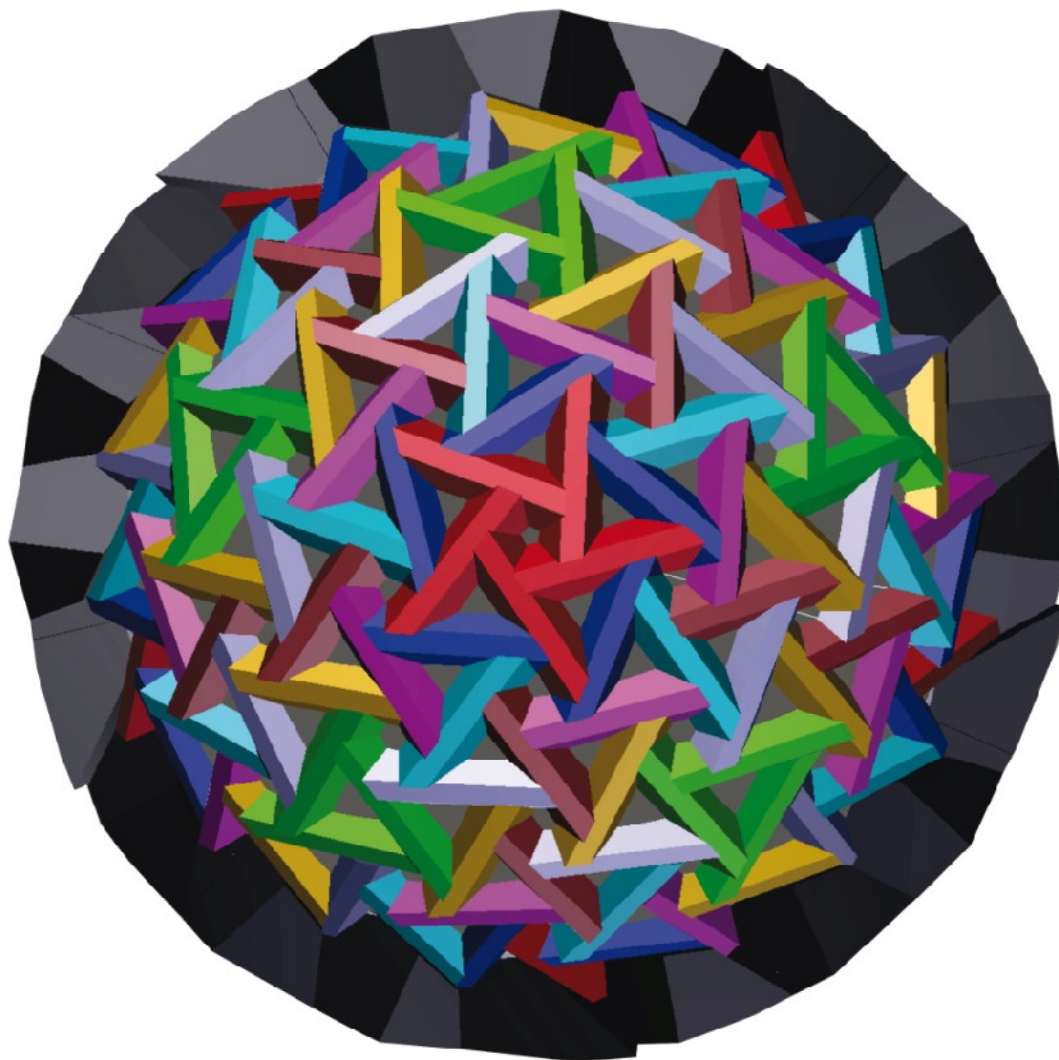
Fonte: Fallacara Giuseppe, "Vers une architecture en pierre", Parigi, École des Ponts ParisTech, Ponts Chaussees, 2016





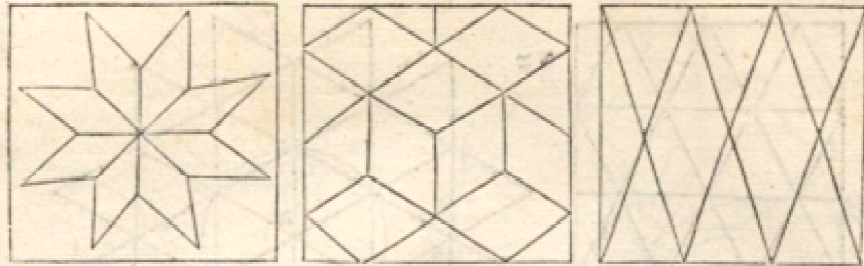
**FIG. 102 (2).** Giuseppe Fallacara, *Bin Jassim Dome*, Schema di montaggio (vista dell'estradosso): a conci-tipo uguali sono assegnati colori uguali, 2012, Qatar

Fonte: immagine tratta dal modello tridimensionale gentilmente fornitomi dal Prof. Giuseppe Fallacara

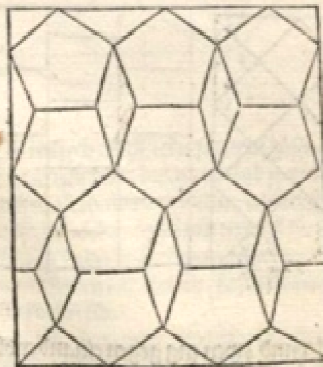


**FIG. 103 (1).** Albrecht Dürer, Tassellazioni planari con pentagoni,  
1525

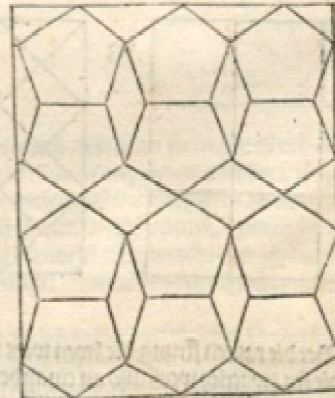
Fonte: Dürer Albrecht, "Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebenen unnd gantzen corporen (Istruzioni per la misurazione con riga e compasso di figure nel piano e nello spazio)", Nuremberg, Hieronymus Andreas Formschneider, 1525, Das Zweites Büchlein (II Libretto), illustrazione 24, conservato presso SLUB Dresden, segnatura: S.B.616



**S** Das wil ich ein fünfsechs/ sib en/ vnd ein acht eck / yliche sündertlich zú samen setzen/ doch  
eins anders dann das ander.  
Zú einem muster setz zú dem ersten drey fünf eck mit iren seytten / auf ein zwerch lini/ also das sie  
mit iren ecken an einander an rúren / Damach setz vñ den hergegen/ aber drey fünf eck mit iren seytten  
an die oberen/ die auch mit iren ecken an einander an rúren/ so werden zwische den fünf ecken/ ablang  
rauten siring/ also mach das noch einmal / vnd stoff alweg solicher zwen teyl/ den ein mit seinen ecken  
in des anderen winkel / das ist die erst meinung/ vnd die gñeuest zú samen setzung der fünf eck.  
Damach mach die zwen zú samen gesetzen teyl der fünf eck / wie for/ vnd setz sie damach mit iren eckē  
zú samen/ also das ein yliche fünf eck mit einer seiten vñ dreien ecken/ vier ander fünf eck an rúr/ so wer-  
den zwische den fünf ecken zwey teyl rauten siring / neben do die seytē an einander stossen enge/ vnd  
zwischen den ecken weytter/ das ist so weyt zú brauche als man will.  
Zú dem fünften setz die fünf eck also an einander. Erstlich mach ein fünf eck/ vñ setz ein gleich messig  
fünf eck an yliche seytten/ damach setz an die selbē fünf fünf eck/ an ein yliche sündertlich an ir zwo seyt-  
ten/ zwen andre fünf eck/ so werden zwische den fünf ecken fünf schmal rauten siring. Damach stoff  
fünf eck in die winkel zú rings herum/ die do worden sind / also das sie mit iren ecken die schmal rauten  
siringen an rúren/ also thú im für vñ für / so weyt du wild  
Du magst auch fünf rosen van den fünf ecken zú samen setzen / die all an einander an rúren/ vñ dar-  
nach vmb setz/ an einander hendten so est du wild/ vñ das sett darneben auf fúllen war mit du wild/  
solichs alles ist hernach außgerissen.



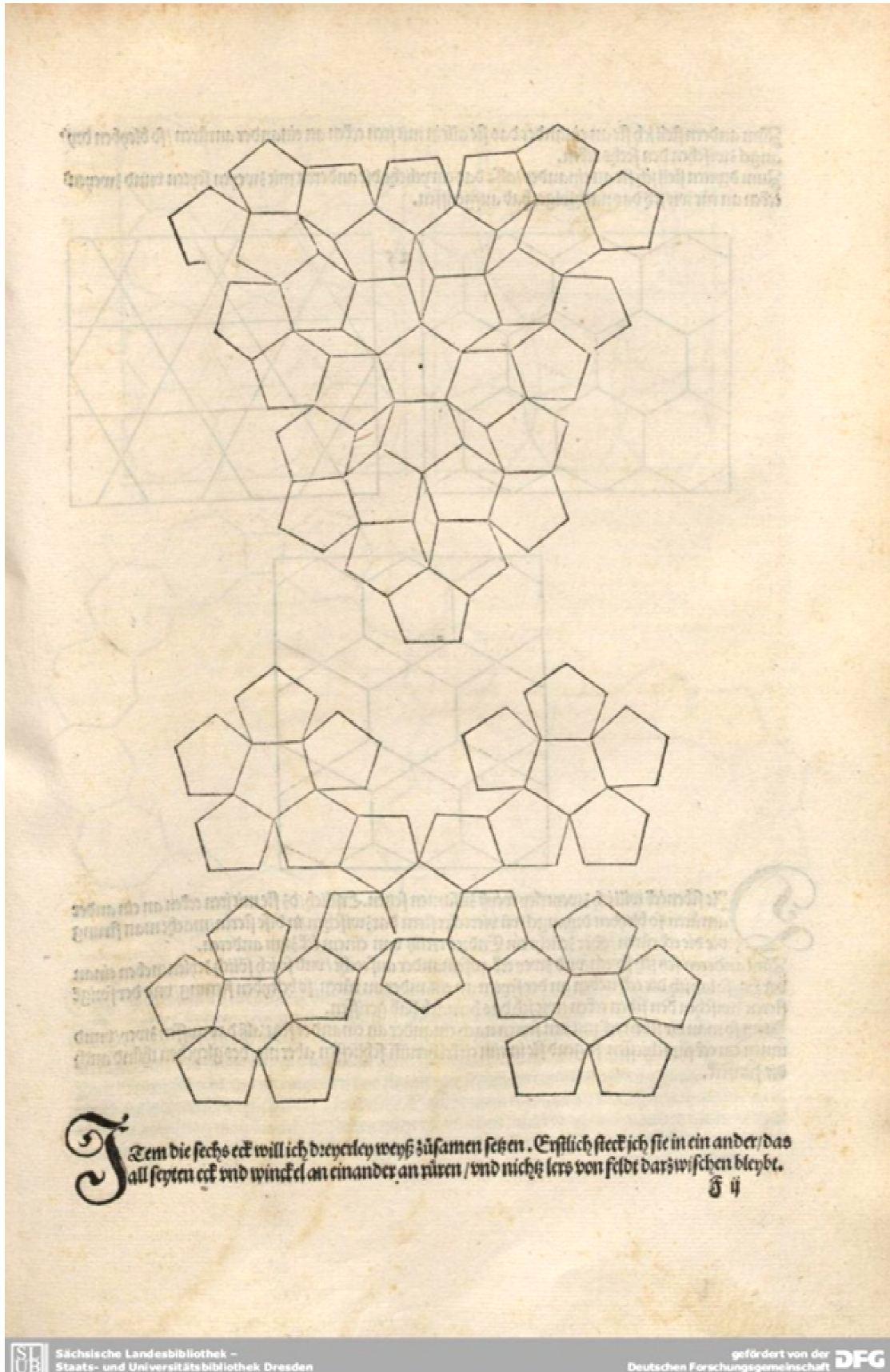
24



**FIG. 103 (2).** Albrecht Dürer, Tassellazioni planari con pentagoni,  
1525

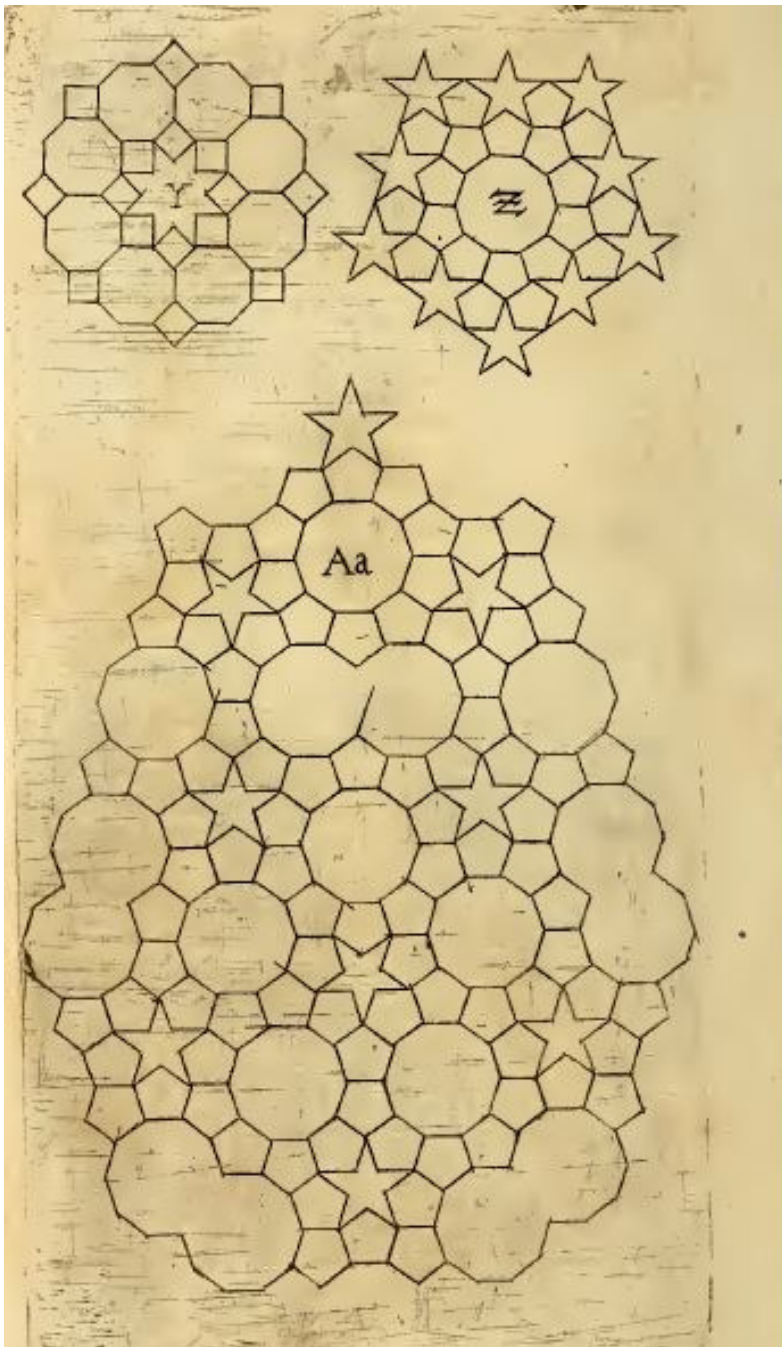
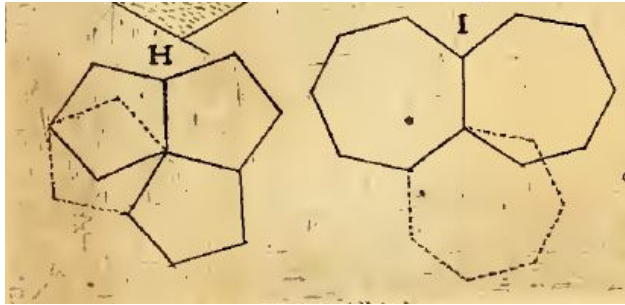
Fonte: Dürer Albrecht, "Underweysung der messung, mit dem zirckel und richtscheyt in Linien ebenen unnd gantzen corporen (Istruzioni per la misurazione con riga e compasso di figure nel piano e nello spazio)", Nuremberg, Hieronymus Andreas Formschneider, 1525, Das Zweites Büchlein (II Libretto), illustrazione 26, conservato presso SLUB Dresden, segnatura: S.B.616





**FIG. 104 (1).** Johannes von Kepler, Tassellazioni planari con pentagoni, 1619

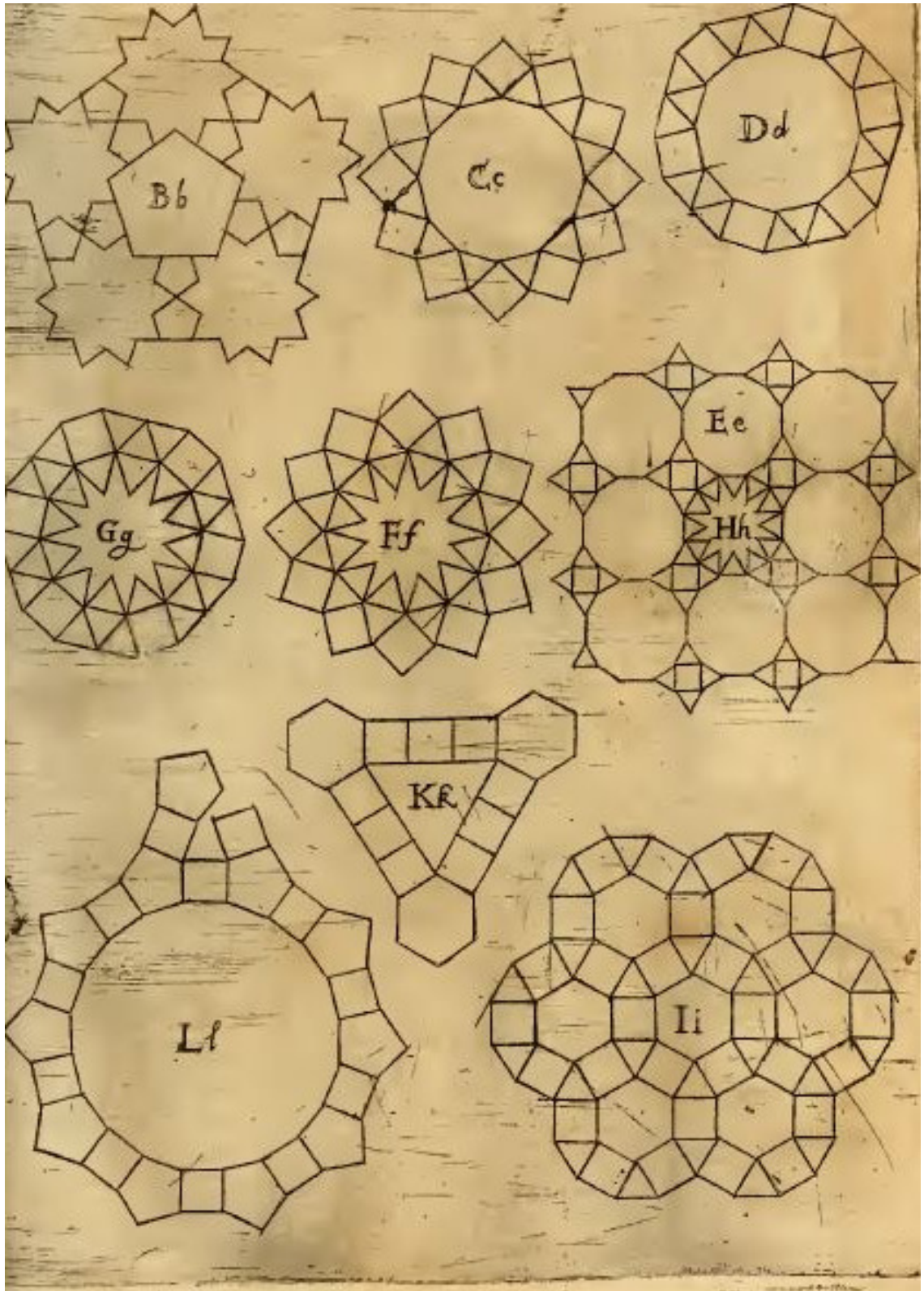
Fonte: VON KEPLER JOHANNES, *Harmonices Mundi*, Francoforte, Lincii Austriae, Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof. Excudebat Ioannes Plancus, 1619, Liber II, De Congruentia Figurarum Harmonicarum, conservato presso Smithsonian Libraries, Washington DC, tassellazioni quinarie aperiodiche principalmente espresse dalla figura H nel foglio posto tra pag. 58 e pag. 59 e figure Y, Z, Aa, tra pag. 58 e pag. 59



**FIG. 104 (2).** Johannes von Kepler, Tassellazioni planari con pentagoni, 1619

Fonte: VON KEPLER JOHANNES, *Harmonices Mundi*, Francoforte, Lincii Austriae, Sumptibus Godofredi Tampachii Bibl. Francof. Excudebat Ioannes Plancus, 1619, Liber II, De Congruentia Figurarum Harmonicarum, conservato presso Smithsonian Libraries, Washington DC, tassellazioni quinarie aperiodiche principalmente espresse dalla figura H nel foglio posto tra pag. 58 e pag. 59 e figure Bb, Ll, tra pag. 58 e pag. 59

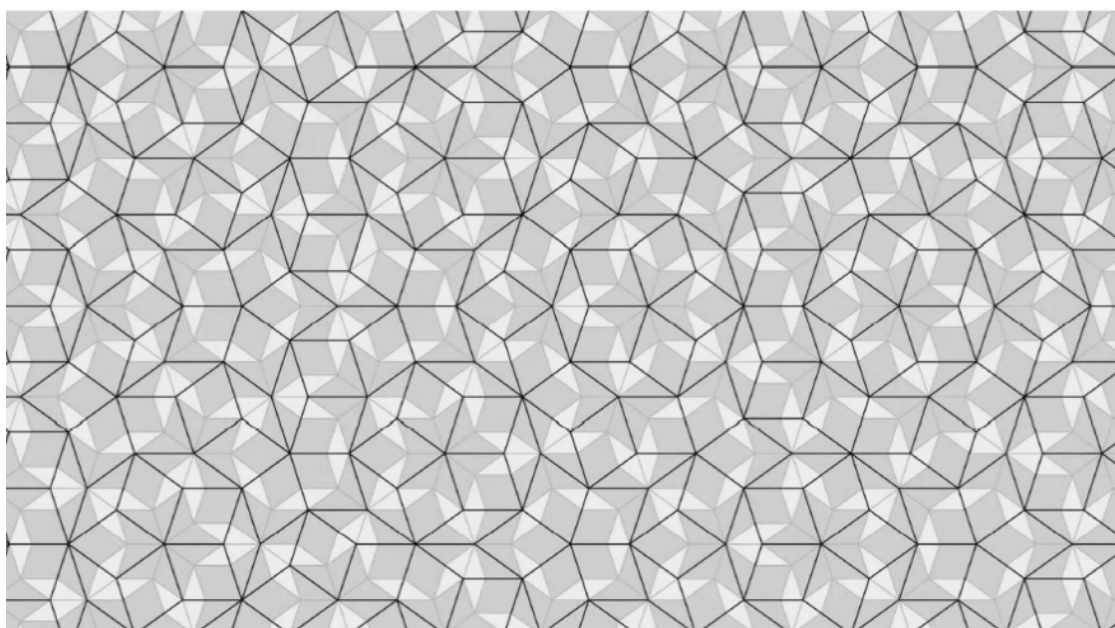
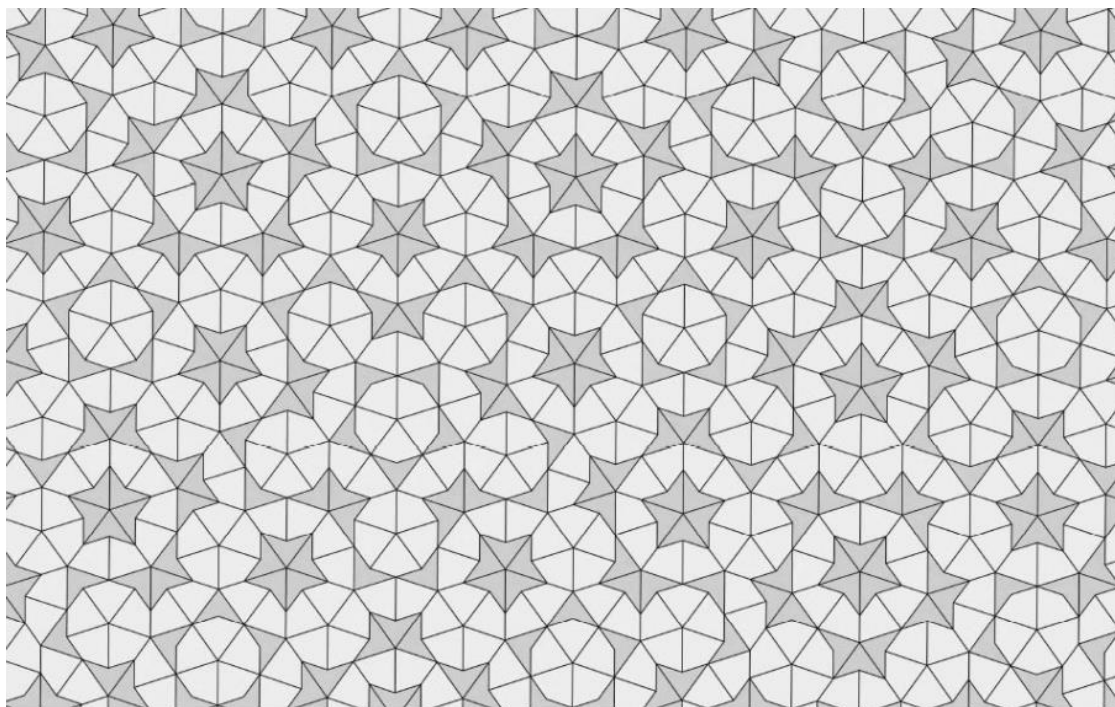




**FIG. 111.** Tassellazioni di Penrose P2 (in alto) e P3 (in basso). Nella tassellazione P3, è evidenziata la regola frattale di auto-similarità a diversa scala

Fonte: Fassino Mauro, “La progettazione parametrica come strumento di analisi: dai pattern algoritmici decorative ai pattern performanti. Esempi nei Beni Culturali”, Tesi di Dottorato di Ricerca in “Beni Culturali” (XXIV ciclo), Tutor: Prof. Anna Marotta, Dipartimento DICAS, Politecnico di Torino, giugno 2012

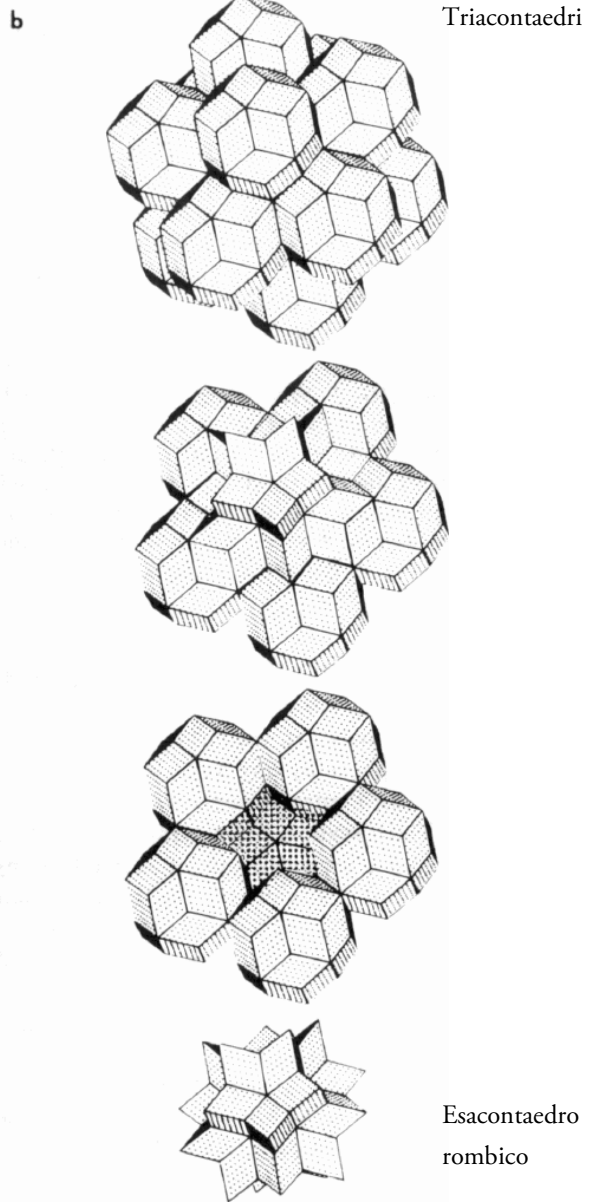
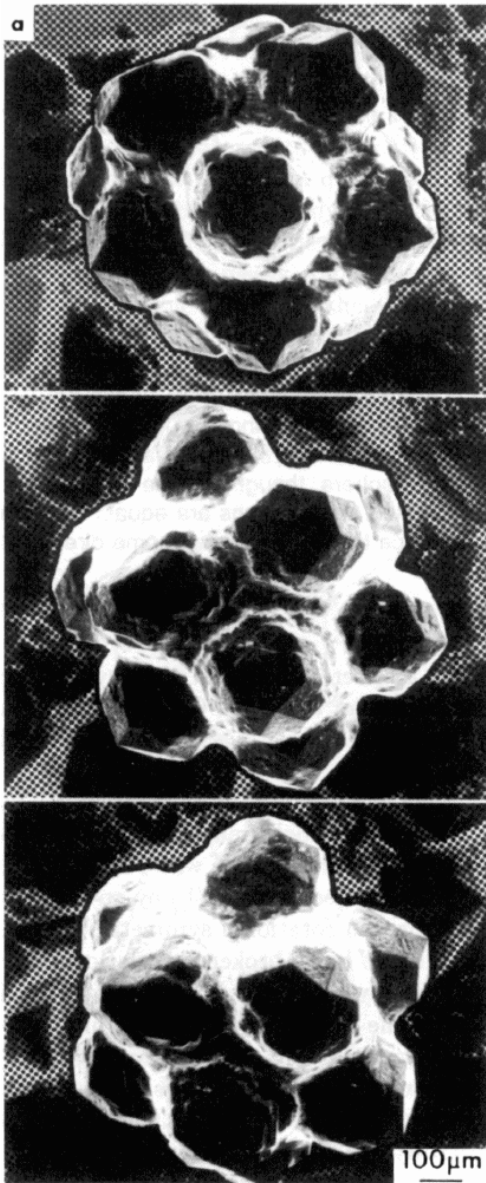




**FIG. 112.** Aggregazione dei quasicristalli secondo regole di corrispondenza fra triacontaedro rombico ed esacontaedro rombico

Fonte: Sethna James P., "Order Parameters, Broken Symmetry, and Topology", Laboratory of Atomic and Solid State Physics, Cornell University, Ithaca, NY, 14853-2501, published originally in 1991 Lectures in Complex Systems, Eds. L. Nagel and D. Stein, Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, Proc. Vol. XV, Addison-Wesley, 1992

(<http://www.lassp.cornell.edu/sethna/OrderParameters/Intro.html>)



**FIG. 114.** Diffrazione elettronica del quasicristallo;

Conradin Beeli, Diffrazione elettronica del quasicristallo  $\text{Al}_{70}\text{Co}_{11}\text{Ni}_{19}$

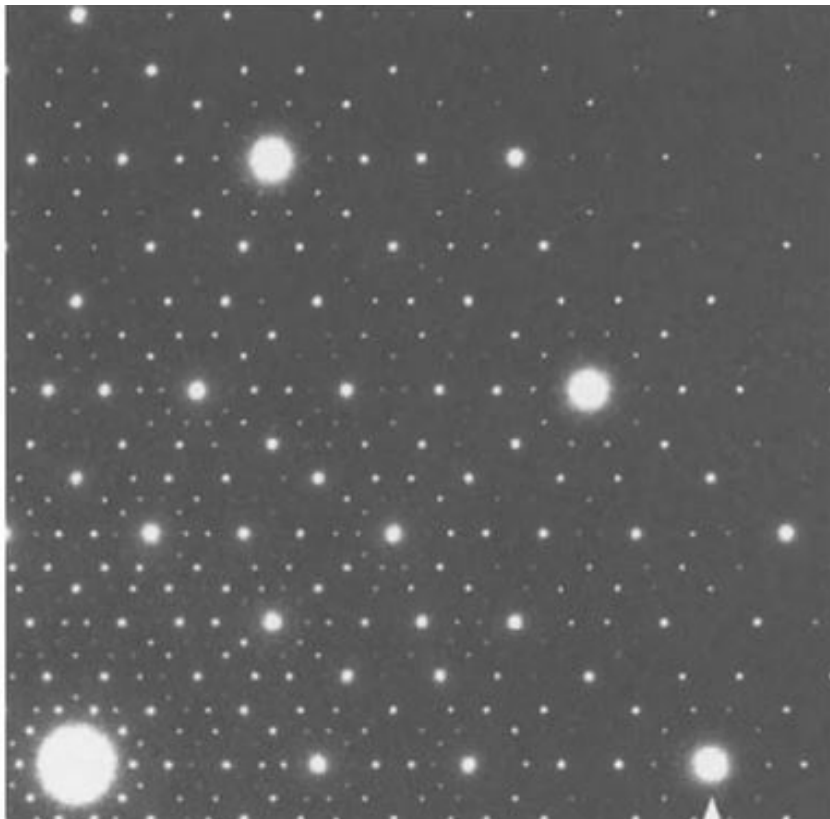
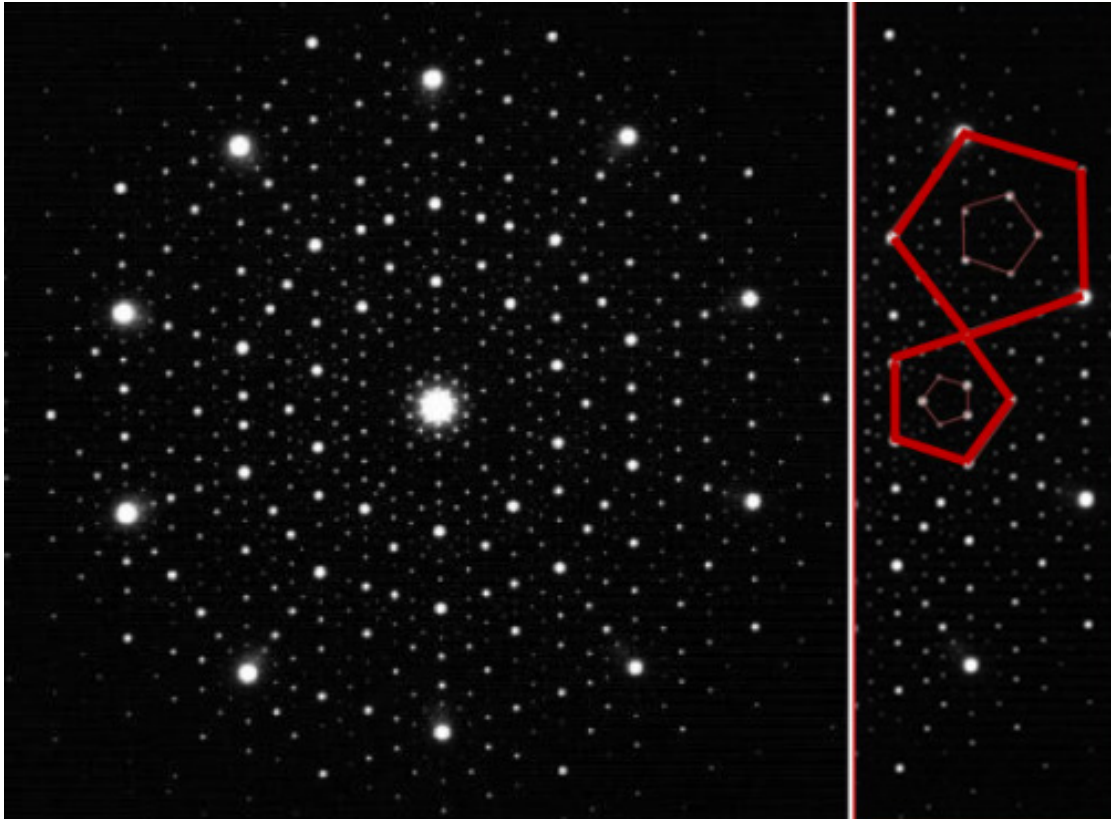
Fonte:

figura in alto - Daniel Shechtman, 1982,

<http://www.scienzainrete.it/documenti/immagini/primo-quasicristallo>

figura in basso -

Beeli Conradin, Nissen Hans-Ude, "Electron Microscopy and Surface Investigations of Quasicrystals", in "Quasicrystals: An Introduction to Structure, Physical Properties and Applications", di Jens-Boie Suck, Michael Schreiber, Peter Häussler, Berlin, Springer, 2002, pag. 136



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

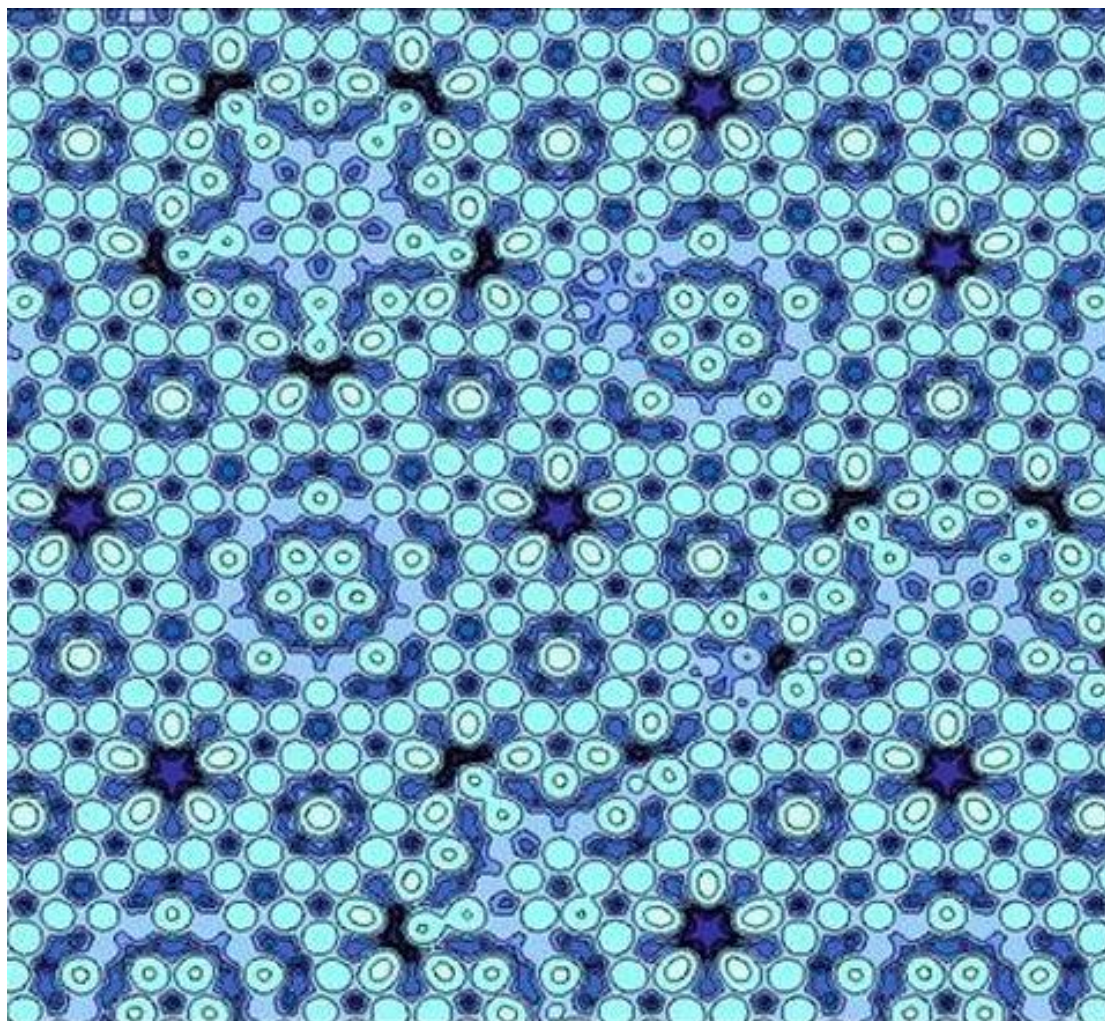
---

**FIG. 115.** Modello atomico del quasicristallo con immagine a  
microscopia elettronica

Fonte:

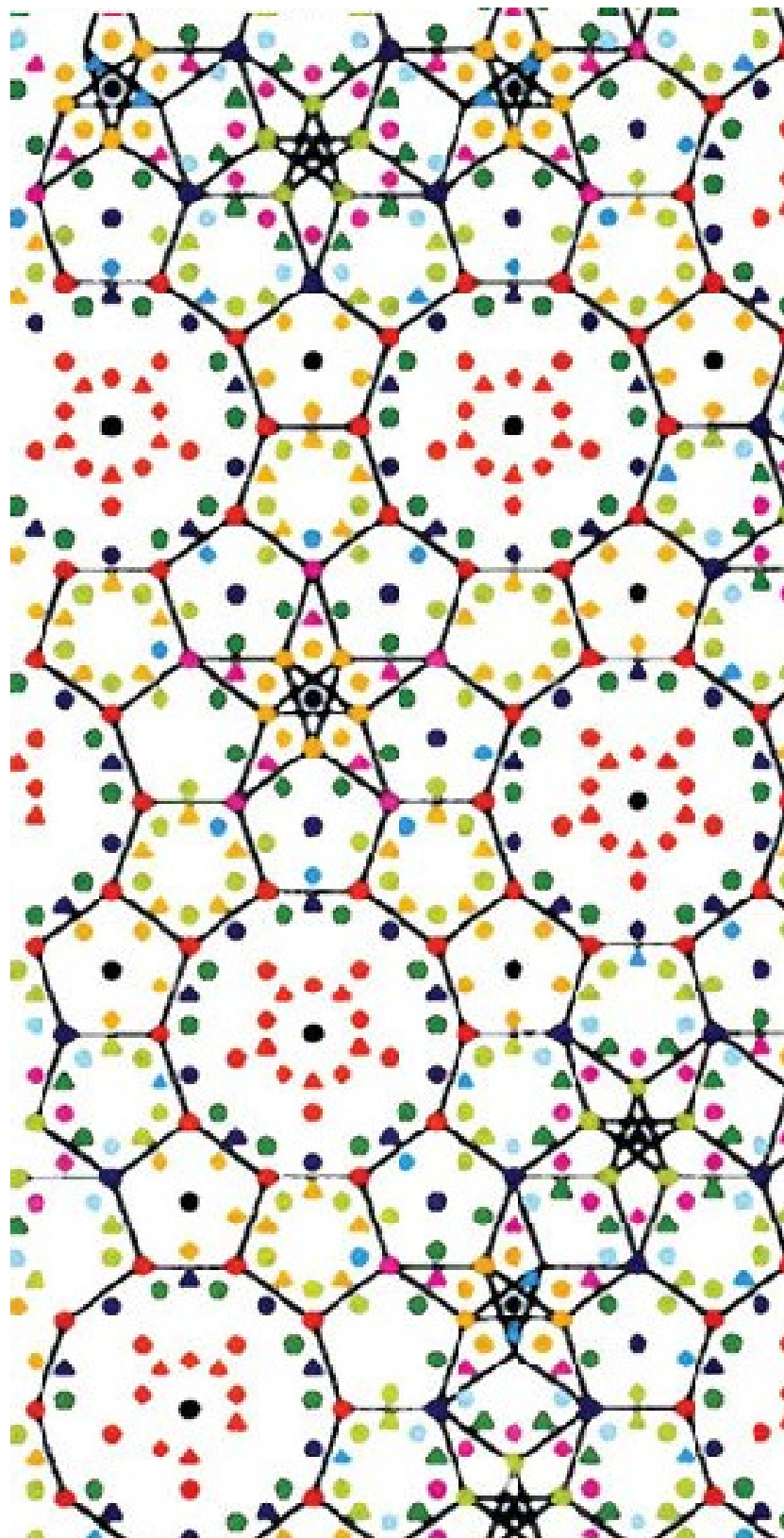
[http://www.ansa.it/web/notizie/specializzati/scienza/2011/10/05/visualizza\\_new.html\\_675337576.html](http://www.ansa.it/web/notizie/specializzati/scienza/2011/10/05/visualizza_new.html_675337576.html)





**FIG. 116.** Disposizione atomica del quasicristallo sovrapponibile alla tassellazione Aa di von Kepler

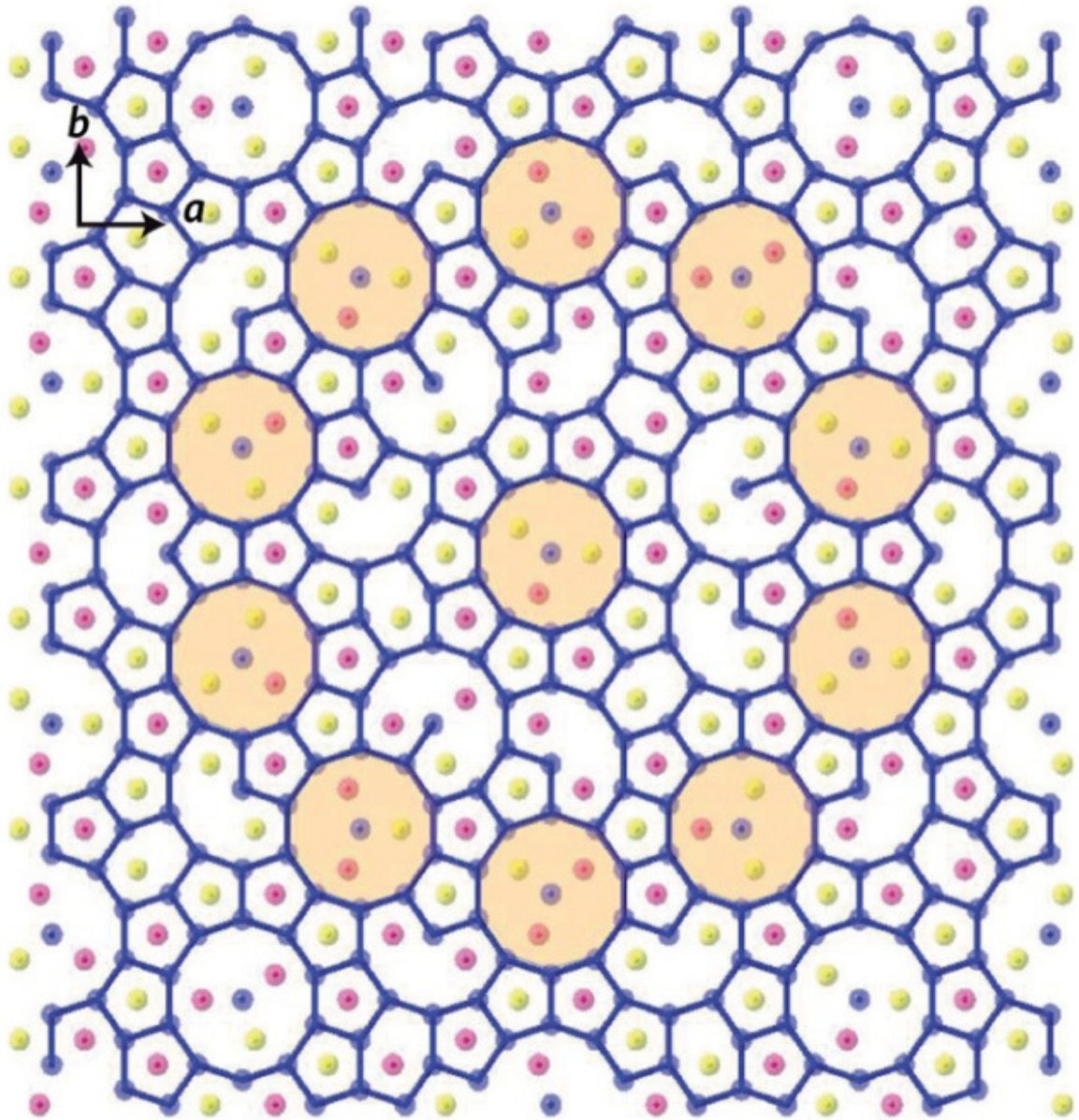
Fonte: locandina della conferenza *La révolution des quasicristaux*, tenuta da Dan Schechtman insignito del Premio Nobel per la Chimica, Grenoble, 17-22 ottobre 2012



**FIG. 117.** Disposizione atomica del quasicristallo

Fonte: Tsai An Pang, Guo Junqing , Abe Eiji, Takakura Hiroyuki,  
Sato Taku J., "Alloys: A stable binary quasicrystal", in "Nature", n.  
408, pp. 537,538, 30 novembre 2000

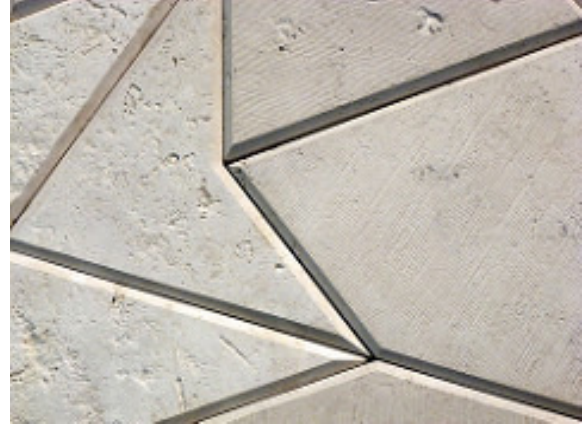
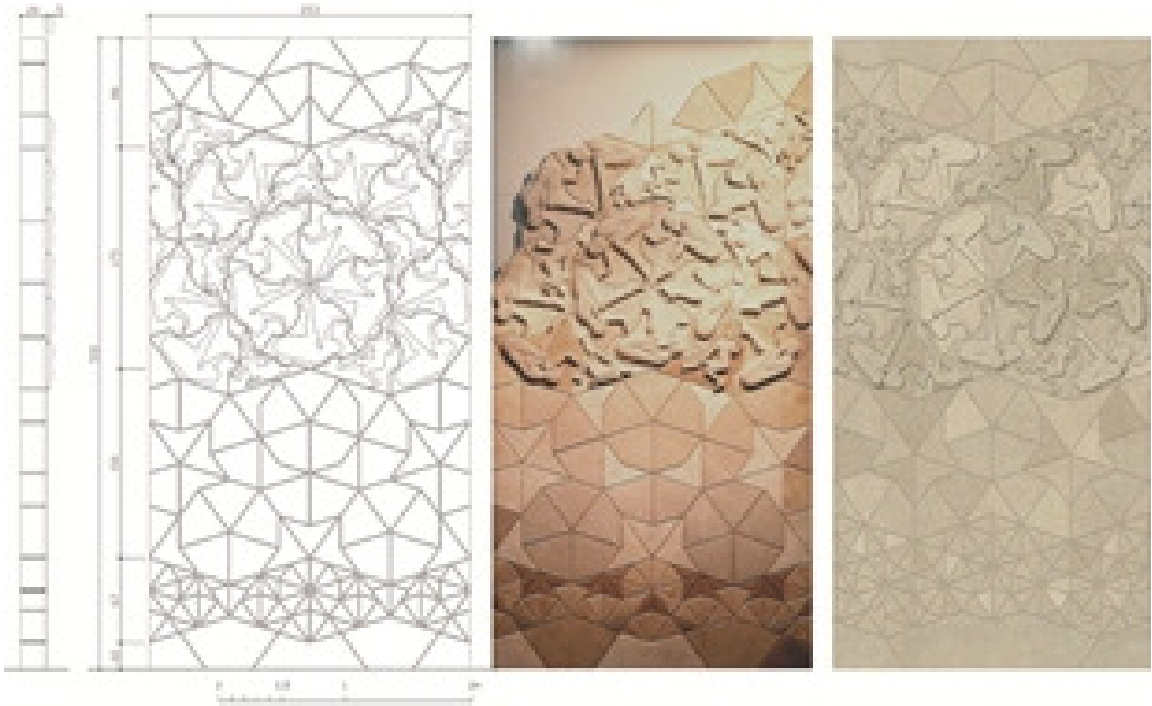




**FIG. 118.** Giuseppe Fallacara, *Decowall*, 2011

Fonte: Fallacara Giuseppe, “Decowall 2011, Stone-wall Decoration. Thermal Bath Project for the Blind in Városliget Park, Budapest”, Óbuda University e Bulletin, Vol. 3, No.1, 2012, pag. 127-133





**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 119.** Opus poligonalis romana

Fonte:

immagine in alto

<http://www.parcomuraverona.it/P3/MuroCarnot.html>

immagine in basso

[https://it.wikipedia.org/wiki/Opera\\_poligonale](https://it.wikipedia.org/wiki/Opera_poligonale)





**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

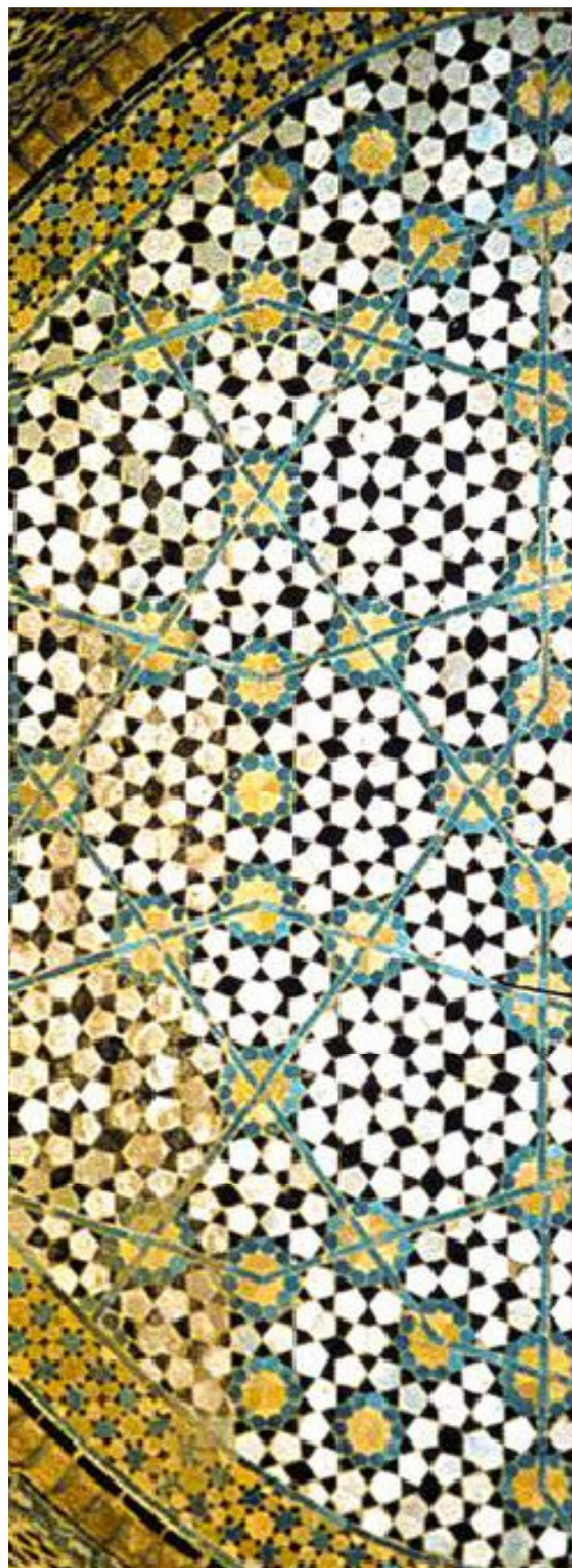
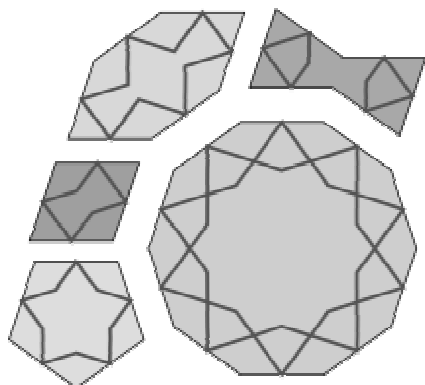
Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 120 (1).** Le cinque tessere della tassellazione Girih (a sinistra) e  
sua applicazione nel portale del santuario di Darb-i Imam, Isfahan,  
Iran (a destra)

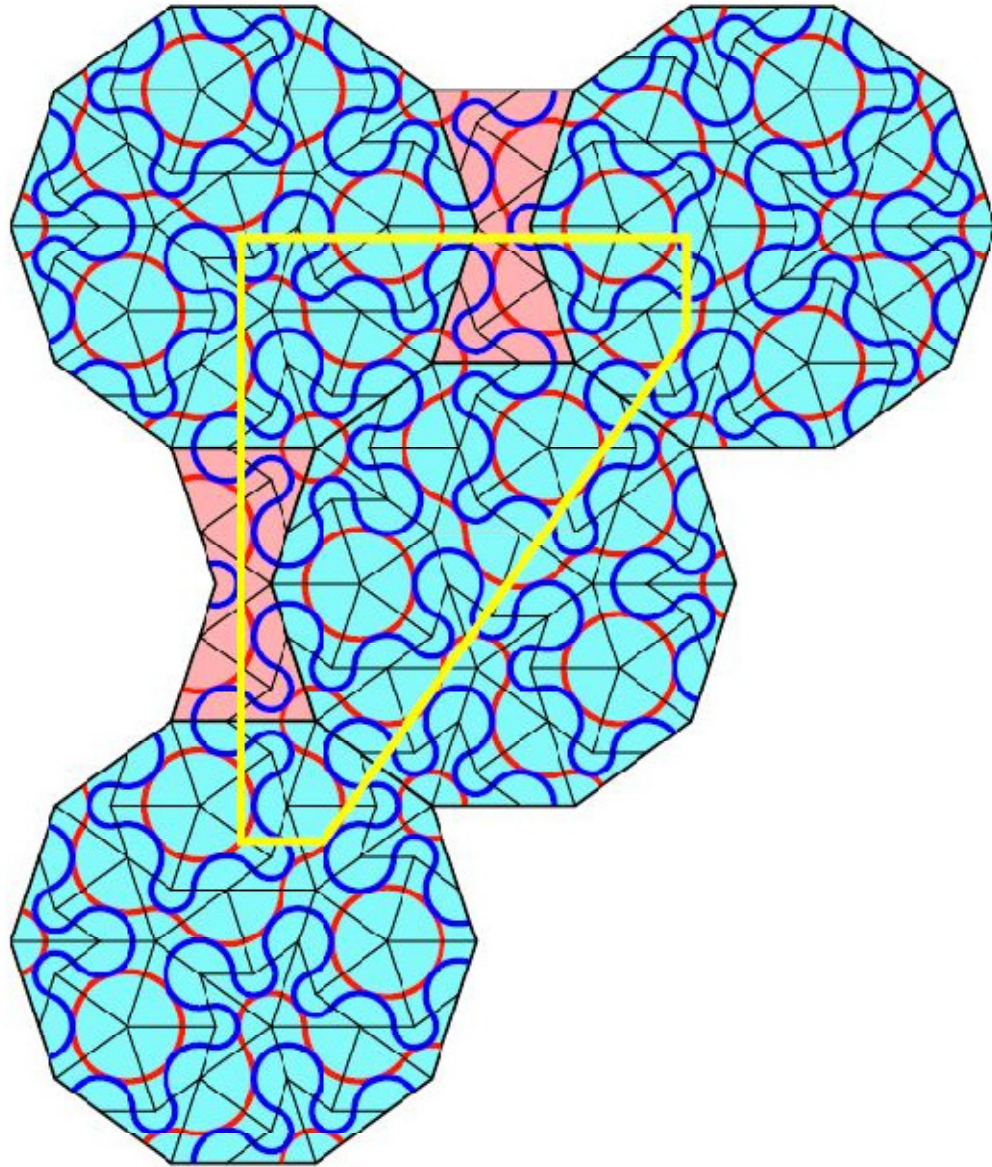




**FIG. 120 (2).** Relazione tra tassellazione quinaria Girih e tassellazione di Penrose

Fonte: J. Lu Peter, Steinhardt Paul, "Decagonal and Quasi-Crystalline Tilings in Medieval Islamic Architecture", in "Science", Vol. 315, Issue 5815, 23 febbraio 2007, pp. 1106 -1110





**Supplementary Figure S6A** Mapping of the large girth-tile pattern from the spandrel at the Darb-i Imam shrine (Fig. 4C) to a defect-free perfect Penrose tiling fragment, using the mapping given in Figs. 4C-4E.

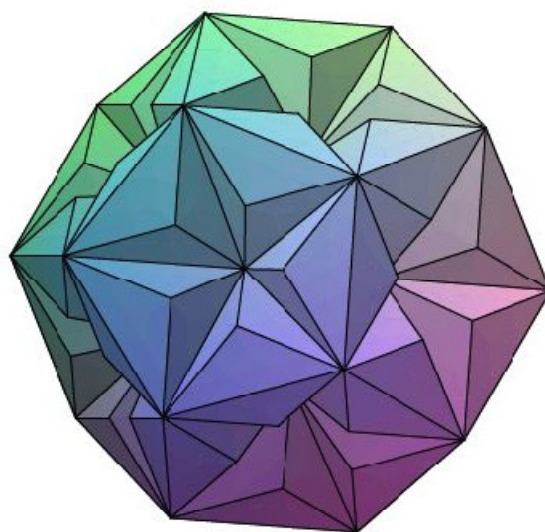
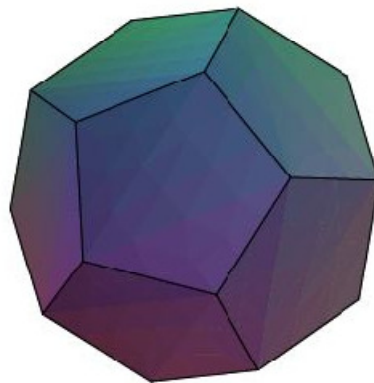
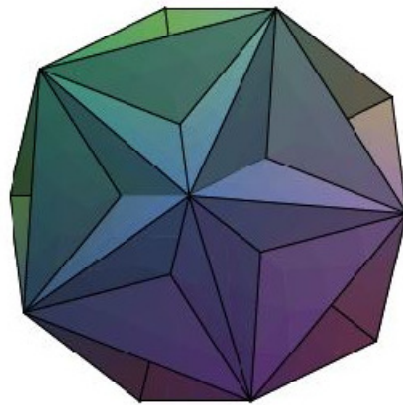
#### **CAPITOLO IV.**

### **Forma strutturale stereotomica della cupola in pietra da taglio a simmetria quinaria**

---

**FIG. 129.** Dirk Frettlöh, *Icosahedral tilings in  $R^3$ : The ABCK tilings*,  
l'aggregazione di alcuni tetraedri e delle loro copie speculari genera  
poliedri a simmetria quinaria

Fonte: Frettlöh Dirk, "Icosahedral tilings in  $R^3$ : the ABCK tilings",  
<http://www.math.uni-bielefeld.de/baake/frettlloe/papers/ikosa.pdf>



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

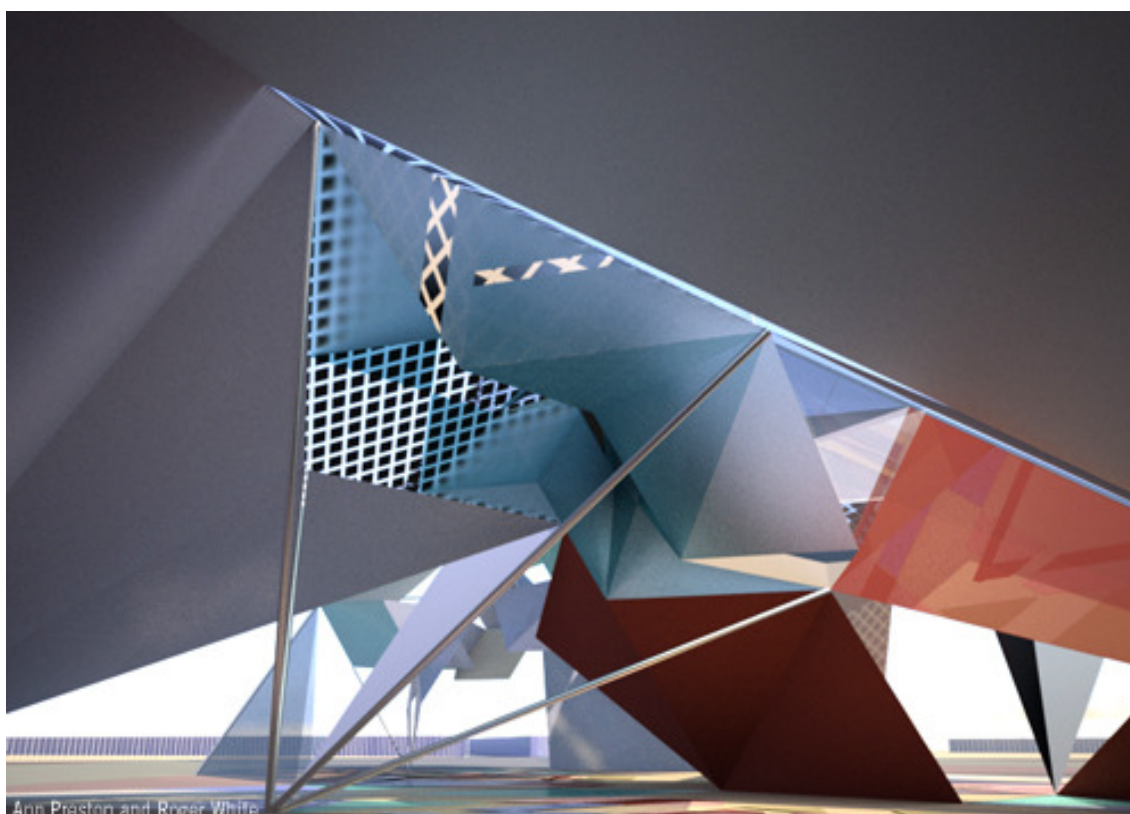
**FIG. 130.** Roger White, Ann Preston, *Tetras*, Progetto per un impianto di energia solare, 2010, Abu Dhabi

Fonte: <http://landartgenerator.org/blagi/archives/1043>

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 131.** Ann Preston, *Aggregazione dei tetraedri di Danzer*,  
disegno, 2010

Fonte: <http://landartgenerator.org/blagi/archives/1043>





**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 132.** Cecil Balmond, *Danzer*, 2010, Tokyo Opera City Art  
Gallery

Fonte:

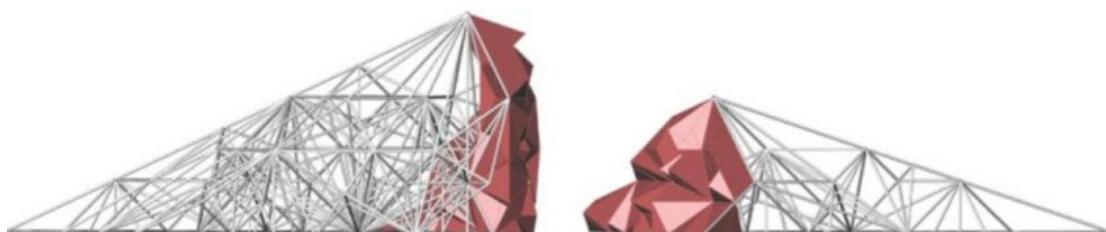
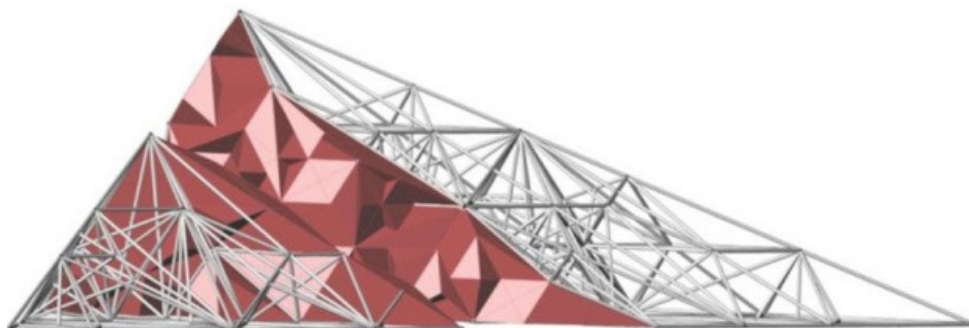
Balmond Studio -<http://balmondstudio.tumblr.com/post/102520734638>;

<http://www.wallpaper.com/architecture/element-by-cecil-balmond-tokyo>

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

**FIG. 133.** GXN team, *Danzer Light*, 2010, Danimarca

Fonte: GXN team -<http://gxn.3xn.com/#/projects/by-name/136-danzer-light>

**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---



**FIG. 159.** François Derand, Costruzione della maquette, 1643

Fonte: Derand François, "L'Architecture des voûtes", 1643;  
illustrazione pubblicata anche in "Forma y construcción en piedra. De  
la cantería medieval a la estereotomía del siglo XIX" di E. R. Díaz,  
Madrid, Ediciones Akal, 2000, pag. 336





**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

## **VI. APPENDICE**

---

### **VI.1. Scritto di L. Danzer sulla tassellazione da lui codificata**

DANZER LUDWIG, *Three-dimensional analogs of the planar Penrose tilings and quasicrystals*, in "Discrete Mathematics", n. 76, 1989, pp.1-7 (paper received on October 1988)

INVITED PAPER

**THREE-DIMENSIONAL ANALOGS OF THE PLANAR  
PENROSE TILINGS AND QUASICRYSTALS**

L. DANZER

*Mathematisches Institut der Universität, Postfach 50 05 00, D-46 Dortmund 50, F.R. Germany*

Communicated by B. Grünbaum  
Received 14 October 1988

**1. Introduction**

In 1984 Shechtman et al. [10] discovered alloys with a novel kind of structure, intermediate between crystalline and amorphous. These alloys, called *quasicrystals* [8], exhibit long-range orientational order but no translational symmetry. Since fivefold and even icosahedral symmetry is observed, several authors conjectured that the so-called “golden rhombohedra” yield a geometric explanation, in analogy to the “Penrose pieces” (see [3, 9]) in the plane. N.G. de Bruijn and others [1, 5, 6, 7, 11] developed the “projection method”, using cubic lattices in higher dimensions to obtain nonperiodic tilings with golden rhombohedra. Guided by the idea that the long-range order of the quasicrystals must stem from some *local* conditions, I have sought families of prototiles which become aperiodic when subject to appropriate *matching* conditions – as do the Penrose pieces. I restricted my search to subfamilies  $\mathcal{F}$  of a certain family  $\mathcal{P} := \{A, B, C, \dots, P\}$  of fifteen tetrahedra, which are derived from the Platonic icosahedron (see below), and succeeded in finding a four-member family  $\mathcal{F}_1$ . To my knowledge, the work of Katz [4] is the only attempt to give matching conditions for the golden rhombohedra which force aperiodicity. His proof is along completely different lines, using algebraic topology in place of inflation/deflation. In fact, his family consists of 22 prototiles (14 congruent to one and 8 to the other golden rhombohedron); they differ in their decorations (matching conditions).

In this note I first give a semi-axiomatic approach to the subject, and then describe a realization.

**2. Basic conditions for a family of prototiles**

Let  $\mathcal{F}$  be a *protoset*, i.e. a family of prototiles  $S_1, S_2, \dots, S_m$ , where each  $S_\mu$  is a polyhedron with facets  $S_\mu^1, \dots, S_\mu^r$ . On the set of all the facets let  $\sim$  be a given

equivalence relation which is at least as fine as the Euclidean congruence (see Section 5). An  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling is defined as a tiling  $\mathcal{P}$  (of the whole plane, or some part of it) by tiles each of which is congruent to some  $S_\mu$ , and satisfying the *matching conditions*:

- (A)  $\mathcal{P}$  is face-to-face; only equivalent faces may meet (see Sections 5 and 6(c)( $\alpha$ ) below).

In case  $\mathcal{P}$  is finite and the union  $U$  of its members is homeomorphic to a ball,  $\mathcal{P}$  is called a *patch*. If  $U$  is the whole space,  $\mathcal{P}$  is called a *global tiling*.

Two other basic conditions are (I) and (D):

- (I) There exists a constant  $\eta$ , with  $\eta > 1$ , and to every prototile  $S_\mu$  a fixed dissection of  $S_\mu$  which forms an  $(\eta^{-1}\mathcal{F}, \sim)$ -tiling. These tilings generate equivalent dissections in equivalent facets (see Section 5).

If we apply (I) to all the tiles of an  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling  $\mathcal{P}$  we obtain a  $(\eta^{-1}\mathcal{F}, \sim)$ -tiling  $\mathcal{Q}$  with  $U(\mathcal{Q}) = U(\mathcal{P})$ , called the *inflation* of  $\mathcal{P}$  and denoted by  $\text{infl}(\mathcal{P})$ . If  $\mathcal{P}$  is an  $(\mathcal{F}, \sim)$ -patch, so is  $\eta\mathcal{Q}$ ; we call  $\eta\mathcal{Q}$  an *expansion* of  $\mathcal{Q}$ .

- (D) To every *global*  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling  $\mathcal{P}$  there is *exactly one*  $(\eta\mathcal{F}, \sim)$ -tiling  $\mathcal{Q}$  such that  $\text{infl}(\mathcal{Q}) = \mathcal{P}$ .  
 $\mathcal{Q}$  is called the *deflation* of  $\mathcal{P}$  and denoted by  $\text{defl}(\mathcal{P})$ .

**Proposition 1.** (I) implies: The inflation can be iterated. Hence D. König's lemma guarantees the existence of global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tilings.

We shall write  $\text{infl}^k(\mathcal{P})$  for the  $k$ th iteration of the inflation operation.

**Proposition 2.** (I) and (D) imply: The deflation can be iterated. Hence the system  $(\mathcal{F}, \sim)$  is aperiodic, that is, there exist global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tilings, but all are nonperiodic.

### 3. Additional conditions

- (M)  $\mathcal{F}$  is *minimal*, that is, no proper subfamily  $\mathcal{F}'$  of  $\mathcal{F}$  satisfies (I), (D) with the same relation  $\sim$  and the same inflation or any power of it.

**Theorem 1.** (I), (D) and (M) imply: There is a natural number  $J$  such that for every  $j \geq J$ , every  $\mu$  and every  $\nu$ , the prototile  $S_\mu$  occurs in the patch  $\text{infl}^j(\eta^j S_\nu)$ . Moreover, for every  $\mu$  there is a  $\delta_\mu$ , with  $0 < \delta_\mu \leq 1$ , such that  $\delta_\mu$  is the density of the copies of  $S_\mu$  in every global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling.

Let  $e$  be an inner vertex of a tiling  $\mathcal{P}$ . Then  $\mathcal{P}$  generates a tiling of a neighborhood of  $e$  which may be projected onto the unit sphere centered at  $e$ .

The resulting spherical tiling  $\mathcal{S}$  is called the *vertex-figure* of  $\mathcal{P}$  at  $e$ . We may assign to each of its (spherical) tiles the label  $\mu$  of the corresponding tile  $S_\mu$  of  $\mathcal{P}$ , and in addition we may assign marks that show how  $S_\mu$  lies in the projection cone (see Section 5). In this way we obtain the *extended vertex-figure* (EVF) of  $\mathcal{P}$  at  $e$ . The last condition we need is:

- (E) Let  $E$  be an EVF which occurs in at least one global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling; then for some  $h$  and for some  $\mu$ ,  $E$  shall also occur in the interior of the patch  $\text{infl}^h(\eta^h S_\mu)$ . In the sequel  $H$  denotes the maximal  $h$  that is necessary for some  $E$ .

**Theorem 2.** (I), (D), (M) and (E) imply: *There exists a constant  $\gamma$  such that whenever  $\mathcal{A}$  is a patch in a global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling lying in a ball of radius  $\rho$ , then in every global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tiling every ball of radius  $\gamma\rho$  contains a patch congruent to  $\mathcal{A}$ .*

In this theorem  $\rho$  may be arbitrarily large, but  $\gamma$  does not depend on  $\rho$ .

**Corollary.** *There does not exist an algorithm for deciding in finitely many steps whether two  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tilings  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{Q}$  are congruent or not.*

More precisely, the non-existence concerns the case in which the tilings are “given” just as families of tiles; the situation is quite different in case  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{Q}$  are given, for instance, by generating rules.

#### 4. Realization

Let  $X$  be a fixed regular icosahedron in  $\mathbb{E}^3$ . We consider the family  $\hat{\mathcal{T}}$  of all tetrahedra  $T$  with the property that every plane containing a facet of  $T$  is parallel to one of the 15 plane mirrors of  $X$ . Hence every edge of such a  $T$  with a dihedral angle of  $90^\circ$  is parallel to one of the 15 axes of twofold rotations of  $X$  (*red edges*). Similarly, there are 10 directions for edges with dihedral angles of  $60^\circ$  or  $120^\circ$  (*green*), and 6 directions for the remaining (*white*) edges, at which the dihedral angle is a multiple of  $36^\circ$ . It turns out that there are exactly 15 similarity classes of such tetrahedra. Each of them possesses at least one edge with a non-primitive angle (angles of  $36^\circ$ ,  $60^\circ$  and  $90^\circ$  are *primitive*). If a non-primitive angle is, for example,  $120^\circ$ , one may cut the tetrahedron in two smaller ones, each with an angle of  $60^\circ$ . (In most cases the opposite edge and the volume are divided in the golden ratio; otherwise they are cut into halves.) It is not too surprising that the resulting tetrahedra again belong to  $\hat{\mathcal{T}}$ . Hence we may represent the 15 classes by a subfamily  $\mathcal{T} := \{A, B, C, \dots, P\}$  of  $\hat{\mathcal{T}}$  with the following property. Every white edge has a length of type  $a\tau^n$ , where  $\tau := (1 + \sqrt{5})/2 = 1.618034\dots$  and  $a := (\sqrt{(10 + 2\sqrt{5})})/4 = 0.951057\dots$ ; then every green edge has a length of type  $b\tau^n$ , with  $b := \sqrt{3}/2$  (here  $n \in \mathbb{Z}$ ). The red edges have lengths a power of  $\tau$ , with

one exception: there is one tetrahedron, which we call  $K$ , with three red edges, each half as long.

Next we consider the subfamily  $\mathcal{F}_1 := \{A, B, C, K\}$  of  $\mathcal{F}$  (or, more precisely, of an appropriate  $\mathcal{F}$ , since  $\mathcal{F}$  was not uniquely defined), given by the following table. For each pair of vertices we specify the dihedral angle and the length of the corresponding edge.

Tetra- hedron	Edge					
	1-2	2-3	3-1	2-4	1-4	3-4
$A$	$36^\circ, a$	$60^\circ, \tau b$	$72^\circ, \tau a$	$108^\circ, a$	$90^\circ, 1$	$60^\circ, b$
$B$	$26^\circ, a$	$36^\circ, \tau a$	$60^\circ, \tau b$	$120^\circ, b$	$108^\circ, \tau^{-1}a$	$90^\circ, 1$
$C$	$36^\circ, \tau^{-1}a$	$60^\circ, \tau b$	$90^\circ, \tau$	$120^\circ, b$	$72^\circ, a$	$36^\circ, a$
$K$	$36^\circ, a$	$60^\circ, b$	$72^\circ, \tau^{-1}a$	$90^\circ, \tau/2$	$90^\circ, 1/2$	$60^\circ, \tau^{-1/2}$

We also define  $\sim_1$  as follows: If  $\Delta$  and  $\Delta'$  are two congruent facets without any red edge, then  $\Delta' \sim_1 \Delta$  shall mean the same as  $\Delta' \cong \Delta$  (compare Section 5). Otherwise  $\sim_1$  stands for the identity. In other words, if  $\Delta$  is a facet of a tetrahedron  $T$  with at least one red edge, then on the other side of  $\Delta$  has to be the mirror image of  $T$ . There are nine such "red" triangles. The other seven facets fall into three classes under  $\sim_1$ , the second being similar to the first (with ratio  $\tau$ ). At such a facet two different tetrahedra may match.

**Main theorem.** (a) With  $\eta := \tau$  the system  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$  satisfies (I), (D), (M), (E). It has  $H = 6$ , and we may choose  $J = 3$  and  $\gamma = 40$ .

(b) Because of the red edges, every  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$ -tiling can be split into octahedra  $\langle A \rangle$ ,  $\langle B \rangle$ ,  $\langle C \rangle$ ,  $\langle K \rangle$ , where  $\langle K \rangle$  consists of eight copies of  $K$ , while the others consist of four congruent tetrahedra.

(c) The vertices of the prototiles fall into four classes such that at every vertex of an  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$ -tiling only vertices of the same class can meet (so they might represent atoms of four different elements).

(d) There are exactly three global  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$ -tilings with all (global) symmetries of the full icosahedral group. By inflation and subsequent expansion they are permuted cyclically. Besides these three there are many such tilings with fivefold and also many with threefold rotational (mostly even dihedral) symmetry.

(e) There are exactly 27 extended vertex-figures, which can occur in a  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$ -tiling; in global tilings there are only 22. Except for the one that belongs to the center of  $\langle K \rangle$ , every EVF after at most six inflations is turned into one of the three with full icosahedral group (see (d)).

The dissections that define the inflation of the system  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$  can all be described by repeated cuts of the type explained above (splitting a tetrahedron



into two). They give rise to the following *inflation-matrix*  $M$ :

$$\begin{array}{c} A \ B \ C \ D \\ \tau^{-1}A \ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 2 & 1 \end{bmatrix} \\ \tau^{-1}B \\ \tau^{-1}C \\ \tau^{-1}D \end{array}$$

the meaning is that  $\text{infl}(A)$  consists of 3 copies of  $\tau^{-1}B$ , 2 copies of  $\tau^{-1}C$ , and 6 copies of  $\tau^{-1}A$ , etc. Now (M) follows immediately from the fact that

$$M^3 = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 6 & 1 \\ 52 & 33 & 28 & 11 \\ 30 & 18 & 21 & 5 \\ 96 & 60 & 56 & 19 \end{bmatrix}$$

and hence there are no zero entries in any higher power of  $M$ .

### 5. Some additional remarks on the role of the equivalence relation $\sim$

If  $\Delta$  and  $\Delta'$  are two triangles, the statement  $\Delta \cong \Delta'$  is ambiguous, since it is not clear which vertex of  $\Delta'$  corresponds to which one of  $\Delta$ . Every triangle is trivially congruent to itself, but  $\Delta abc \cong \Delta bca$  must be interpreted as meaning that the triangle is equilateral. We have the same kind of difficulty with our  $\sim$ . Strictly speaking we have to deal with a certain set  $G$  of mappings  $\alpha$ , where every  $\alpha$  maps a certain facet of a certain prototile onto another one. So every member of  $G$  is the restriction of a Euclidean isometry to a certain facet. It defines a *unique* equivalence between two facets or a symmetry of one facet. Of course,  $G$  has to satisfy the analogs to the usual equivalence axioms, namely:

- (i) If  $F$  is a facet of a prototile then the identity on  $F$  belongs to  $G$ .
- (ii)  $\alpha \in G$  implies  $\alpha^{-1} \in G$ .
- (iii) If  $\alpha$  and  $\beta$  are in  $G$  and the image of  $\alpha$  equals the inverse image of  $\beta$ , then  $\beta \circ \alpha$  is in  $G$ .

### 6. Open problems

(a) Which other subfamilies  $\mathcal{F}$  of  $\mathcal{G} \times \tau^{\mathbb{Z}}$  can play a role similar to  $\mathcal{F}_1$ ? More precisely:

- For which  $\mathcal{F}$  are there global  $(\mathcal{F}, \cong)$ -tilings? For which are there global  $(\mathcal{F}, \sim)$ -tilings with some finer  $\sim$ ?
- Which systems  $(\mathcal{F}, \sim)$  are aperiodic?
- Which systems  $(\mathcal{F}, \sim)$  satisfy (I)? Which satisfy (I) and (D)? For example,

since  $\tau K = K \cup B$ , and in every global  $(\mathcal{F}_1, \sim)$ -tiling every copy of  $B$  is part of  $\tau K$  in this way, it follows that  $\mathcal{F}_2 := \{A, C, K, \tau K\}$  is essentially equivalent to  $\mathcal{F}_1$  and trivially satisfies (I), (D), (M), (E).

(b) Are the global tilings belonging to *different* aperiodic systems  $(\mathcal{F}, \sim)$  in some sense isomorphic? Or at least those satisfying (I), (D)?  $\mathcal{F}_1$  and  $\mathcal{F}_2$  may serve as a trivial example.

(c) Are there matching conditions different from (A), which could serve as well? For instance:

( $\alpha$ ) Let the facets be *oriented* and require different orientations for matching facets. (Suggested by R. Penrose, during a visit to Dortmund in May 1988.) This would rule out local reflections.

( $\beta$ ) Let besides  $\mathcal{F}$  be given a family  $\mathcal{E}$  of *proto-vertex-figures* (or *proto-EVF's*) and eliminate the role of  $\sim$ . Possibly it makes sense to require a priori that the vertices fall into finitely many classes, say  $V_1, \dots, V_p$ . Then  $\mathcal{E}$  could be replaced by  $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_p$ .

(d) ( $\alpha$ ) Can all the nonperiodic tilings which are defined by the projection method [3, 4, 6, 9] also be explained by appropriate matching conditions? Katz [4] shows this to be true in the case of the "Penrose tilings" of the golden (or Ammann-) rhombohedra.

( $\beta$ ) Are there tilings of this kind, to which *no* inflation applies? (Compare [11] for the plane case  $n=7$  instead of  $n=5$ .) Katz is explicitly silent on this question.

(e) Is there a system  $(\mathcal{F}, \sim)$  as in (a), or a system  $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$  as in (c)( $\beta$ ), which gives a geometric explanation of the *quasicrystals* found by physicists?

(i) Consider those vertices of a global  $(\mathcal{F}_1, \sim_1)$ -tiling which belong to the same class in the sense of part (c) of the Main Theorem. What pattern do they form? Are they the vertices of another quasiperiodic tiling?

(g) Are there 3-dimensional analogs to the Ammann bars of the plane Penrose tilings (compare [2], p. 547 ff.)?

(h) Is there to every aperiodic system  $(\mathcal{F}, \sim)$  a patch  $\mathcal{P}$  such that the union  $U$  of its tiles does permit a lattice tiling? (Suggested by G. Ewald in a discussion in April 1988.) The resulting  $\mathcal{F}$ -tiling is supposed to be face-to-face, but of course cannot satisfy (A).

## References

- [1] N.G. de Bruijn, Algebraic theory of Penrose's non-periodic tilings, Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 84 (1981) 39-66
- [2] B. Grünbaum and G.C. Shephard, Tilings and Patterns (Freeman, New York, 1987).
- [3] R.K. Cuy, The Penrose pictures, Bull. London Math. Soc. 8 (1976) 9-10.
- [4] A. Katz, Theory of matching rules for the 3-dimensional Penrose tilings, Commun. Math. Phys. 118 (1988) 263-288.

- [5] P. Kramer, Non-periodic central spacefilling with icosahedral symmetry using copies of seven elementary cells, *Acta Cryst. A* 38 (1982) 257–264.
- [6] P. Kramer, Space-group theory for a non-periodic icosahedral quasilattice, *J. Math. Phys.* (to appear).
- [7] P. Kramer and R. Neri, On periodic and non-periodic space fillings on  $\mathbb{E}^m$  obtained by projections, *Acta Cryst. A* 40 (1984) 580–587.
- [8] R.D. Nelson, Quasicrystals, *Scient. Amer.* 255 (1986) 32–41.
- [9] R. Penrose, Pentaplexity, *Eureka* 39 (1978) 16–22.
- [10] D. Shechtman, I. Bleck, D. Gratias and J.W. Cahn, Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry, *Phys. Rev. Letter* 53 (1984) 1951–1953.
- [11] E.J.W. Whittaker and R.M. Whittaker, Some generalized Penrose patterns from projections of  $n$ -dimensional lattices, *Acta Cryst. A* 44 (1988) 105–112.

**Note added in proof**

It seems preferable to replace (A) by the following condition:

(A\*)  $\mathcal{P}$  is face-to-face; in  $\mathcal{P}$  there occurs no EVF, that does not also occur in the interior of some patch of type  $\text{infr}^h(\eta^h S_\mu)$ .

(A\*) Implies (A) but not vice versa. Under (A\*) (E) becomes trivial.

**Arch. Roberta Gadaleta**

VOLUME III - Documentazione  
archivistica, iconografica e  
fotografica

Stereotomia della cupola nell'architettura di pietra.

Studio della tradizione e ricerca di nuove morfologie di apparecchiatura.

---

## **VI.2. Scritto su L. Danzer in occasione del suo 80° compleanno**

DOLBILIN NIKOLAI, SCHULTE EGON, *Special issue in honor of Ludwig Danzer's 80th birthday*, articolo pubblicato su ScienceDirect, European Journal of Combinatorics, 29, available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com), marzo 2008



ELSEVIER

Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)



European Journal of Combinatorics 29 (2008) 1801–1802

European Journal  
of Combinatorics

[www.elsevier.com/locate/ejc](http://www.elsevier.com/locate/ejc)

## Foreword

# Special issue in honor of Ludwig Danzer's 80th birthday

We are pleased to dedicate this *Special Issue of the European Journal of Combinatorics* to *Ludwig Danzer* on the occasion of his 80th birthday, celebrated on November 15, 2007. This collection features research articles by a selected group of authors — some of his students, colleagues, collaborators, and friends.

Ludwig Danzer attended the Technische Hochschule and the Ludwig-Maximilians-Universität in Munich, graduating with a Staatsexamen in 1951. After six years of high school teaching at a gymnasium, he took a position as Assistant at the Mathematical Research Institute in Oberwolfach and then in 1959 became Assistant to Martin Kneser in Munich. After receiving his Ph.D. from Kneser in 1960, he spent the academic year 1960/61 as an Assistant Professor at the University of Washington in Seattle. Then in 1963, Ludwig Danzer moved with Kneser to Göttingen, where he received his Habilitation under Kneser and served as Dozent at the Georg-August-Universität Göttingen. From 1969 until his retirement in 1992, Ludwig Danzer served as Professor of Mathematics at the Universität Dortmund. He was one of the three founding “fathers” of the Abteilung Mathematik at the newly founded University and was heavily involved in building and shaping the University in general. Since 1992, he has been Professor Emeritus at the Universität Dortmund. In recognition of his many contributions the University held a Festkolloquium in his honor on November 16, 2007.

Ludwig Danzer's most important research contributions are in discrete, combinatorial and convex geometry, but his mathematical interests are much broader and include areas where discrete geometry meets algebra, combinatorics, number theory, and crystallography. He is well known for his outstanding geometric intuition and problem solving skills. Ludwig Danzer's early research interests were strongly influenced by László Fejes Toth's discrete geometry school in Budapest, as evidenced by his Habilitation thesis on *Finite Point-sets on  $S^2$  with Minimum Distance as Large as Possible*, as well as his solution to the Gallai Problem. Reluctant to publish his research findings, Ludwig Danzer did not exactly follow the publish-or-perish motto of academia, and so it happened that his Habilitation thesis and his solution to the Gallai Problem would appear in journals only in 1986 (in *Discrete Mathematics*, 60 (1986), 3–66, and *Studia Sci. Math. Hungar.* 21 (1986), 111–134, respectively), in today's competitive world a nearly suicidal approach for almost everyone else. In the early 1960's, Ludwig Danzer co-authored the famous DGK paper with Branko Grünbaum and Victor Klee on combinatorial geometry, entitled *Helly's Theorem and its Relatives*, which had a strong impact on his further career. In the late 1970's, Ludwig Danzer and Branko Grünbaum initiated the modern abstract theory of regular polytopes and their groups, a new area of research inspired by Coxeter's classical work. One of us, E.S., was Assistant to Ludwig Danzer for many years and collaborated with him in this area.

Ludwig Danzer has a passion for tiling theory. He has collaborated with Branko Grünbaum and Geoffrey Shephard on tilings of the plane and higher-dimensional spaces, and in the past fifteen years has extensively worked on aperiodic tilings. Ludwig Danzer was one of the first mathematicians to seriously study challenging mathematical problems on aperiodicity in response to the 1984 discovery of quasicrystals, and has been at the forefront of this area for all those years.

Ludwig Danzer has had a strong impact on the development of discrete geometry for well over forty years. For many years he regularly organized the discrete geometry conferences at Oberwolfach, attracting the leading experts in the field. Many of us unable to attend a meeting in Oberwolfach will remember receiving a warm postcard from Ludwig Danzer signed by participants of the meeting. Unforgettable also are the evenings in his company at Oberwolfach and his selection of excellent Rhine wine, that gives away a very distinguished wine taste. In his passion for photography he achieved a professional level. Many of his friends have received his perfect pictures from places around the world, often accompanied by a nice postcard.

Finally, our thanks go out to all contributing authors and to all referees of the sixteen articles in this collection. We also greatly appreciated input we have received from Gerd Wegner in preparing this brief foreword. And above all, we would like to wish Ludwig Danzer all the best for many more years — excellent health and enjoyable mathematical productivity.

*Guest editors*

Nikolai Dolbilin

*Mathematical Steklov Institute,  
Moscow, Russian Federation*

Egon Schulte\*

*Northeastern University,  
Boston, United States*

*E-mail address: [schulte@neu.edu](mailto:schulte@neu.edu).*

Available online 20 March 2008

\* Corresponding editor.



**Consorzio Argonauti (Politecnico di Bari - Università Roma Tre)**

*DR in Architettura: Innovazione e Patrimonio, Curriculum Cultura della costruzione,  
XXIX ciclo (gennaio 2014 - dicembre 2016)*

---