



Politecnico
di Bari

Università degli Studi di Roma Tre

Dipartimento di Architettura

Politecnico di Bari

Dipartimento di Scienze

dell'Ingegneria Civile e dell'Architettura

Dottorato di Ricerca in

Architettura: Innovazione e Patrimonio

XXIX Ciclo

Coordinatore: Chiar.ma Prof.ssa Elisabetta Pallottino

s.s.d. ICAR/08 "Scienza delle Costruzioni"

MECCANICA DEI SISTEMI TENSEGRITY:

FORMA E STRUTTURA

Relatori:

Chiar.mo Prof. Salvatore Marzano

Chiar.mo Prof. Mario Daniele Piccioni

Dottorando:

Gaetano Pavone

In ricordo del professor Salvatore Marzano

Gaetano Pavone

gaetano.pavone@poliba.it

gaetano.pavone@uniroma3.it

dottingpavonegaetano@gmail.com

Dipartimento di Scienze dell'Ingegneria Civile e dell'Architettura – DICAR

Politecnico di Bari

Via Edoardo Orabona, 4, 70125 Bari

Telefono: +39 080 5963525

www.poliba.it

Ringraziamenti

In questi tre anni la mia vita è radicalmente cambiata, la sfera personale e quella professionale hanno subito profonde mutazioni. È stato un percorso di crescita continuo e faticoso ma, grazie all'aiuto di chi mi è stato vicino, la strada intrapresa si è rivelata una splendida scoperta.

Il mio pensiero va al ricordo, ricco di immutata stima e tacito affetto, del professor Salvatore Marzano che con raffinato carisma e insaziabile amore per il proprio lavoro ha lasciato un segno indelebile nella mia memoria. Il ruolo di tutor è riduttivo in questo caso; mi ritengo estremamente fortunato ad aver incrociato, seppur per pochi anni, la mia vita di dottorando con una persona di siffatto spessore umano e scientifico. Purtroppo ho avuto troppo poco tempo per imparare...*Non recidere forbice, quel volto...*

Desidero ringraziare il professor Mario Daniele Piccioni, che nel ruolo di tutor mi ha condotto nel mio percorso universitario e dottorale. La sua guida paziente ha contribuito a far crescere e maturare la mia passione per la Scienza delle Costruzioni. Ha creduto in me sin dall'inizio e per questo gli sono profondamente grato.

Il lavoro in Dipartimento non sarebbe stato lo stesso senza il professor Aginaldo Fraddosio e l'ingegner Anna Castellano: la loro dedizione e il loro amore per la ricerca sono per me una continua fonte di ispirazione.

I miei colleghi dottorandi, vecchi e nuovi, rappresentano il cuore pulsante di questi anni: Vitantonio, Nicola, Gemma, Giusy a voi va un caloroso abbraccio e il mio migliore in bocca al lupo.

Al supporto e al calore della mia famiglia posso ricambiare con i miei sacrifici e col sudore di questi giorni, se sono arrivato a questo punto lo devo soprattutto a loro. I miei genitori, mio fratello e mia sorella, Nino e Giorgio sono le basi su cui costruire il mio futuro.

Alla famiglia Coviello desidero esprimere il mio più grande ringraziamento, il loro sostegno incondizionato ha per me un valore inestimabile.

E infine a Maria Elena: sei il dono più prezioso che abbia mai ricevuto.

Grazie,

Gaetano

A Maria Elena

INDICE

Premessa	IV
Lista dei simboli	VIII
Capitolo 1 Aspetti generali delle strutture tensegrity	1
1.1 Introduzione	1
1.2 Origini dei sistemi tensegrity	1
1.3 Definizioni e classificazioni	2
1.3.1 Definizioni	2
1.3.2 Classificazioni	4
1.4 Realizzazioni e aspetti tecnologici	5
1.5 Conclusioni	9
Bibliografia	10
Capitolo 2 Cinematica e Statica delle strutture tensegrity	12
2.1 Cinematica	12
2.1.1 Definizioni preliminari	14
2.1.2 Definizione della geometria	15
2.1.3 Matrice cinematica e sottospazi vettoriali corrispondenti	17
2.2 Statica	21
2.2.1 Metodi di ricerca della forma	21
2.2.2 Configurazione di equilibrio	23
2.2.3 Matrice di equilibrio e sottospazi vettoriali corrispondenti	27
2.2.4 Stato di auto-sollecitazione ammissibile	29
2.3 Conclusioni	34
Bibliografia	35
Capitolo 3 Stabilità dei sistemi tensegrity	37
3.1 La stabilità delle strutture: concetti fondamentali	37
3.2 Stabilità di una struttura tensegrity	39
3.2.1 Moti rigidi indipendenti	47
3.2.1.1 Traslazione	47
3.2.1.2 Rotazione	48
3.2.1.3 Trasformazioni affini non banali	48
3.3 Stabilità della configurazione pre-sollecitata	49
3.4 Super-stabilità	52

3.5	Conclusioni	54
	Bibliografia	56
Capitolo 4 Analisi del modulo elementare V-Expander		57
4.1	Premessa	57
4.2	Definizione del modello	63
4.3	Definizione della geometria	67
4.3.1	Variante I	69
4.3.2	Variante II	70
4.3.3	Variante III	71
4.3.4	Variante IV	72
4.3.5	Variante V	74
4.4	Analisi dello stato di pre-sollecitazione	75
4.4.1	Variante I	76
4.4.2	Variante II	79
4.4.3	Variante III	84
4.4.4	Variante IV	88
4.4.5	Variante V	92
4.5	Analisi dello sforzo normale negli elementi	96
4.5.1	Variante I	97
4.5.2	Variante II	99
4.5.3	Variante III	103
4.5.4	Variante IV	105
4.5.5	Variante V	105
4.6	Stabilità nella configurazione pre-sollecitata	111
4.6.1	Variante I	112
4.6.2	Variante II	114
4.7	Super-stabilità	115
4.7.1	Variante I	115
4.7.2	Variante II	116
4.7.3	Variante III e Variante IV	117
4.7.4	Variante V	118
4.8	Conclusioni	118
	Bibliografia	121
Capitolo 5 Caso applicativo: assemblaggi a torre		122
5.1	il Tensegrity mast	122
5.2	Definizione del modello	126
5.2.1	Torre I	126
5.2.2	Torre II	127

5.2.3	Torre III	127
5.2.4	Torre IV	128
5.3	Definizione della geometria	129
5.3.1	Torre I	134
5.3.2	Torre II	136
5.3.3	Torre III	139
5.3.4	Torre IV	142
5.4	Analisi dello stato di pre-sollecitazione	145
5.4.1	Torre I	145
5.4.2	Torre II	151
5.4.3	Torre III	159
5.4.4	Torre IV	165
5.5	Analisi dello sforzo normale negli elementi	170
5.5.1	Torre I	171
5.5.2	Torre II	175
5.5.3	Torre III	182
5.5.4	Torre IV	185
5.6	Stabilità nella configurazione pre-sollecitata	188
5.6.1	Torre I	189
5.6.2	Torre II	189
5.6.3	Torre III	190
5.6.4	Torre IV	191
5.7	Super-stabilità	192
5.7.1	Torre I	192
5.7.2	Torre II	192
5.7.3	Torre III	192
5.7.4	Torre IV	193
5.8	Conclusioni	194
	Bibliografia	200
	Conclusioni	201

PREMESSA

«Dare to be naive.

Please do not refrain from reading this book because you have become suspicious that a comprehensive inventory of discovery precludes further discovery».

Nell'introduzione del libro "Synergetics. Explorations in the Geometry of Thinking", Richard Buckminster Fuller esorta il lettore a porsi nei confronti di una scoperta con spirito di continua ricerca, di continua evoluzione; ciò non può che condurre ad ulteriori innovazioni nel tentativo di comprendere le leggi che regolano l'Universo e che determinano le relazioni tra le forze che lo governano.

Proseguendo nella lettura di tale testo ci si imbatte in un'affermazione che racchiude e cristallizza il pensiero di Fuller:

«It is one of our most exciting discoveries that local discovery leads to a complex of further discoveries. Corollary to this we find that we no sooner get a problem solved than we are overwhelmed with a multiplicity of additional problems in a most beautiful payoff of heretofore unknown, previously unrecognized, and as-yet unsolved problems».

Determinata la soluzione di un problema si viene travolti da una molteplicità di quesiti a cui fornire una risposta in un'indeterminata sequenza di nuovi problemi da risolvere.

Con questo spirito Fuller conduce gli studi sulla morfologia strutturale che hanno reso celebri le sue opere e che conservano una spettacolarità tale da affascinare e meravigliare chiunque le osservi per la prima volta. Tra queste, le strutture tensegrity rappresentano certamente un affascinoso esempio di come la concezione strutturale - intesa nell'accezione di Eduardo Torroja Miret quale logica ed intuito nell'ideazione della forma - può descrivere, in un "fluttuante" insieme di puntoni e cavi, l'interazione tra le forze di trazione e di compressione alla base di tutti i fenomeni naturali.

Le realizzazioni di Fuller, e le strutture tensegrity in particolare, rappresentano un delicato connubio tra l'architettura e l'ingegneria strutturale, tra l'arte e la scienza, tra l'aritmetica della Natura e la percezione della bellezza umana.

Chiunque si imbatte in tali strutture per la prima volta è quantomeno incuriosito dalla non usuale morfologia strutturale: gli elementi compressi che sembrano isole disperse in un oceano di trazione – citando la definizione data da Renè Motro – paiono respingersi tra loro in un gioco di attrazione e repulsione. Le forze, e il loro flusso, determinano la forma in una continua ricerca dell'equilibrio.

Nella meraviglia e nello stupore vi è il principio della conoscenza, e nella fascinazione che colpisce chi studia questo principio strutturale vi è la necessità di comprendere e discernere il comportamento meccanico delle strutture tensegrity.

Non è un caso che le radici storiche di tali strutture si spingono nel Costruttivismo, movimento d'avanguardia nato in Russia nel 1917, e che il primo esempio di scultura proto-tensegrity si ritrova nelle opere di Karl Ioganson, artista russo la cui concezione di arte si evince da quanto afferma:

«From painting to sculpture, from sculpture to construction, from construction to technology and invention - this is my chosen path, and will surely be the ultimate goal of every revolutionary artist...».

Tuttavia, nonostante le origini costruttiviste, le prime realizzazioni storicamente accertate si ritrovano nel campo dell'arte, e in particolare in quello della scultura.

Ad oggi, numerosi sono i settori disciplinari in cui tali sistemi sono stati studiati, dalla micro-scala, alla meso- e infine alla macro-scala: si pensi alla modellazione del comportamento delle cellule in risposta a sollecitazioni esterne effettuata mediante modelli tensegrity, alle applicazioni dell'ingegneria biomedica e, infine alla macro-scala, alle interazioni tra i pianeti.

Nell'ambito dell'ingegneria civile e dell'architettura tali strutture rappresentano una sfida ancora aperta, in bilico fra innovazione tecnologica e patrimonio architettonico, fra mero esercizio di calcolo e ricerca morfologica. Le realizzazioni tensegrity presenti nel panorama internazionale sono limitate, e alcune di queste non rispecchiano pienamente la definizione "pura" riconosciuta dal mondo accademico. Per tale motivo è importante proseguire nello studio di tali strutture, indagando il comportamento meccanico unitamente agli aspetti formali e compositivi che tali strutture presentano.

La ricerca, con queste premesse, può essere orientata nel primo caso, ad esempio, verso l'ideazione di nuovi e sempre più efficienti metodi di analisi statica e cinematica, o anche verso la definizione di nuovi algoritmi di ottimizzazione delle variabili che compaiono nella progettazione di tali sistemi; nel secondo caso, ad esempio, verso la realizzazione di prototipi tensegrity per l'architettura transitoria o per strutture dispiegabili di copertura o per le infrastrutture viarie, ecc.

In tale contesto si inserisce questo lavoro di ricerca, che nell'ambito della Scienza delle Costruzioni tenta di definire nuove morfologie tensegrity e di studiarne il relativo comportamento meccanico, in termini di stato di pre-sollecitazione ammissibile e valutazione delle condizioni di stabilità.

In particolare, l'attenzione è rivolta alle strutture tensegrity di Classe 2, ovvero quelle strutture in cui nei nodi convergono due elementi compressi. In questi sistemi il "componente" compresso, generato dalla giustapposizione di due (o più) elementi, è inserito nella maglia tesa continua.

Tali sistemi presentano gli stessi vantaggi delle strutture tensegrity di Classe 1: elevato valore del rapporto rigidità/massa, possibilità di costituire strutture dispiegabili e "attivabili" mediante attuatori, possibilità di "mutare" la forma agendo sulla pre-sollecitazione negli elementi. Inoltre, le proprietà di simmetria e la possibilità di realizzare assemblaggi complessi operando "iterativamente" una opportuna giustapposizione

di celle (o moduli) elementari, costituiscono inoltre due importanti vantaggi nella realizzazione delle strutture tensegrity di Classe 2.

Rispetto a quelle appartenenti alla Classe 1, le strutture tensegrity di Classe 2 hanno un più alto rapporto rigidità/massa, e, considerata la possibilità di realizzare il componente compresso in serie, una più efficace procedura di assemblaggio.

Tra le strutture tensegrity di Classe 2, risulta particolarmente promettente la cella proposta da Motro nel 1998 e denominata V-Expander; tale cella, definita da una geometria regolare e caratterizzata da una ridotta densità di elementi compressi per unità di superficie, è dotata di una peculiare caratteristica meccanica e morfologica: un cavo verticale, denominato Expander, funge da attuatore per la cella, ovvero, agendo sulla lunghezza dell'elemento è possibile modificare il livello di pre-sollecitazione negli elementi del modulo elementare e la geometria del sistema. Tale caratteristica rende la cella V-Expander adatta alla costruzione di strutture tensegrity dalla geometria più complessa mediante opportuni assemblaggi mono- e bi-direzionali, a semplice o a doppia curvatura.

Considerati tali presupposti, si ritiene opportuno investigare a fondo le proprietà morfologiche e meccaniche di tale cella, cercando di determinarne possibili nuove configurazioni topologiche e fornendo per tali varianti la soluzione analitica del problema statico e del problema cinematico; e, in aggiunta a ciò, di configurare possibili assemblaggi mono-dimensionali (torri tensegrity / *tensegrity mast*) di cui si valuta, come per la cella, la soluzione in termini di stato di pre-sollecitazione ammissibile e di sforzo normale negli elementi, nonché delle condizioni di stabilità della struttura.

Ciò detto, la tesi presenta un capitolo introduttivo in cui vengono richiamati brevemente gli aspetti legati alle definizioni e alle classificazioni delle strutture tensegrity, nonché quelli relativi alle origini di tali sistemi, fornendone, senza pretesa di esaustività, un breve excursus, e descrivendo sinteticamente le caratteristiche delle principali realizzazioni di tali strutture nell'ambito dell'ingegneria civile e dell'architettura.

Segue un capitolo dedicato alla presentazione del problema statico, e di quello duale cinematico, con particolare riferimento, tra i metodi risolutivi, al metodo della densità di forza (Force Density Method) e alla sua declinazione nel caso di strutture che presentano una molteplicità di stati di auto-sollecitazione equilibrati.

Nel capitolo 3 si richiamano i concetti fondamentali legati alla stabilità delle strutture e si analizzano le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità di una struttura tensegrity, evidenziando gli aspetti meccanici legati alla stabilità della configurazione pre-sollecitata e alla super-stabilità.

Nel capitolo 4 si riportano i risultati dell'analisi morfologica condotta sulla cella V-Expander, e si discutono le proprietà meccaniche delle cinque varianti proposte, la cui configurazione geometrica è descritta in via parametrica.

Nel quinto capitolo si studiano alcuni casi applicativi: in particolare si determinano le soluzioni del problema statico e cinematico per le torri tensegrity costruite assemblando opportunamente alcune delle

celle studiate nel capitolo precedente. Tale studio è preceduto dall'analisi del Tensegrity mast realizzato da Buckminster Fuller nel 1959 e di una sua versione modificata.

Le celle e le torri studiate in questo lavoro risultano di immediato interesse ingegneristico e architettonico, sia per la descrizione analitica dello stato di auto-sollecitazione ammissibile, espressa in forma parametrica, e sia per le possibilità formali e compositive che tali sistemi suggeriscono nella realizzazione di strutture leggere, dispiegabili e di forte impatto estetico.

LISTA DEI SIMBOLI

Capitolo 2

n	Numero dei nodi
\hat{e}	Versore
n_v	Numero complessivo dei vincoli semplici
G	Grafo
V	Insieme dei nodi
E	Insieme degli elementi
s	Numero dei puntoni
c	Numero dei cavi
\mathbf{n}_i	Vettore delle coordinate del nodo i -esimo
\mathbf{n}	Vettore delle coordinate nodali
\mathbf{m}	Vettore degli elementi
\mathbf{N}	Matrice delle coordinate nodali
\mathbf{M}	Matrice degli elementi
\mathbf{C}	Matrice di connessione
n_l	Nodi liberi
n_f	Nodi fissi
\mathbf{I}_n	Matrice identità di ordine n
$\mathbf{x}^l, \mathbf{y}^l, \mathbf{z}^l$	Vettore delle coordinate dei nodi liberi lungo la direzione x, y, z
$\mathbf{x}^f, \mathbf{y}^f, \mathbf{z}^f$	Vettore delle coordinate dei nodi fissi lungo la direzione x, y, z
$\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$	Vettore delle differenze delle coordinate nodali rispetto all'asse x, y, z
$\mathbf{U}, \mathbf{V}, \mathbf{W}$	Forma diagonale di $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$
l_k	Lunghezza dell'elemento k -esimo
\mathbf{l}	Vettore delle lunghezze degli elementi
\mathbf{L}	Forma diagonale di \mathbf{l}
\mathbf{d}	Vettore degli spostamenti nodali infinitesimi
\mathbf{e}	Vettore delle deformazioni longitudinali degli elementi
\mathbf{B}	Matrice di connessione
\mathbf{d}_m	Meccanismi infinitesimi
r_\bullet	Rango della matrice (\bullet)
$null(\bullet)$, oppure (n_\bullet)	Nullità della matrice (\bullet)
m_i	Numero dei meccanismi infinitesimi indipendenti
n^{DOF}	Numero totale dei gradi di libertà
n^{rb}	Numero degli spostamenti rigidi indipendenti nello spazio
$\mathbf{t}_{a,i}$	Trasformazione affine non banale
\mathbf{T}_a	Matrice delle trasformazioni affini
\mathbf{n}_a	Vettore delle coordinate nodali a seguito della trasformazione affine

α_i, β_i	Coefficienti delle combinazioni lineari
G	Matrice geometrica
N_{ij}	Sforzo normale nell'elemento che connette il nodo i -esimo al nodo j -esimo
\mathbf{P}_i	Vettore delle forze esterne agenti sul nodo i -esimo
q_k	Densità di forza dell'elemento k -esimo
$\bar{\mathbf{n}}$	Vettore degli sforzi normali negli elementi
\mathbf{q}	Vettore dei coefficienti di densità di forza
Q	Forma diagonale di \mathbf{q}
\mathbf{D}_s	Matrice di densità di forza
Ω	Sottoinsieme di E degli elementi incidenti rispetto all'elemento k -esimo
A	Matrice di equilibrio
s_A	Dimensione spazio nullo di A
\mathbf{s}_i	Stato di auto-sollecitazione indipendente
\mathbf{q}_0	Stato di auto-sollecitazione equilibrato
$\bar{\mathbf{e}}_i$	Vettore dei gruppi di simmetria
$\bar{\mathbf{G}}$	Matrice degli stati s_i auto-sollecitazione indipendenti e dei gruppi di simmetria
$\bar{\mathbf{a}}$	Vettore dei coefficienti dello stato di auto-sollecitazione equilibrato e delle densità di forza
$\bar{\mathbf{q}}_s$	Stato di auto-sollecitazione simmetrico
$\bar{\mathbf{q}}_a$	Stato di auto-sollecitazione ammissibile
q_s	Densità di forza dei puntoni
q_c	Densità di forza dei cavi

Capitolo 3

\mathbf{X}_0	Configurazione iniziale di riferimento
\mathbf{X}_1	Configurazione attuale
Π	Energia Potenziale Totale
Π_E	Energia di deformazione
Π_W	Lavoro compiuto dai carichi esterni nel cambiamento di configurazione
ε_k	Coefficiente di dilatazione lineare dell'elemento k -esimo
l_k^n	Lunghezza dell'elemento k nella configurazione naturale
E_k	Modulo di elasticità longitudinale dell'elemento k -esimo
A_k	Area della sezione trasversale dell'elemento k -esimo
σ_k	Tensione nell'elemento k -esimo
\mathbf{K}^T	Matrice di rigidezza tangente
F	Vettore dei carichi esterni compatibili con la deformazione della struttura
$\tilde{\mathbf{K}}$	Matrice diagonale di $E_k A_k$
\mathbf{L}_n	Matrice diagonale delle lunghezze naturali degli elementi
$\bar{\mathbf{K}}$	Matrice di rigidezza degli elementi
$\bar{\mathbf{A}}$	Matrice di equilibrio rapportata alle lunghezze degli elementi
\mathbf{K}_E	Matrice di rigidezza lineare

\mathbf{K}_G	Matrice di rigidezza geometrica
Q_T	Forma quadratica della matrice di rigidezza tangente
$\lambda_{\bullet,i}$	Autovalore i -esimo della matrice (\bullet)
$\varphi_{\bullet,i}$	Autovettore i -esimo della matrice (\bullet)
$\mathbf{d}_{x(y,z)}$	Traslazione rispetto all'asse x (y,z)
$\mathbf{1}$	Vettore unitario
\mathbf{R}	Matrice di rotazione
θ	Angolo di rotazione
\mathbf{d}_R	Spostamento della struttura a seguito della rotazione
Q_E	Forma quadratica della matrice di rigidezza lineare
Q_G	Forma quadratica della matrice di rigidezza geometrica
\mathbf{M}_i	Matrice dei meccanismi infinitesimi
Q_m	Forma quadratica della matrice di rigidezza geometrica rispetto ai meccanismi infinitesimi
ε, μ	Scalare positivo

Capitolo 4

\bar{v}_{\max}	Valenza massima
\bar{v}_{\min}	Valenza minima
r	Raggio della circonferenza nel piano xy
h	Altezza del triangolo V-Expander
d	Altezza cavo verticale

Capitolo 5

b	Sovrapposizione tra due celle adiacenti
-----	---

Capitolo 1

ASPETTI GENERALI DELLE STRUTTURE TENSEGRITY

1.1 INTRODUZIONE

La definizione del modello strutturale [1-2] (trave, lastra, piastra, guscio, ecc.) con cui si descrive meccanicamente un sistema riveste un ruolo fondamentale nello studio del relativo comportamento meccanico. Tale rappresentazione fisico-matematica consente di studiare anche opportuni assemblaggi di tali modelli. Nel caso di strutture tensegrity è possibile utilizzare il modello di travatura reticolare per ragioni che saranno spiegate in seguito.

L'interesse scientifico verso le strutture tensegrity si dipana in un variegato insieme di settori disciplinari. In particolare questa tesi rappresenta la sintesi di un lavoro di ricerca incentrato sugli aspetti meccanici e applicativi, nei campi dell'ingegneria civile e dell'architettura, di strutture tensegrity modulari.

In questo capitolo introduttivo si fa riferimento alle origini e agli sviluppi delle strutture tensegrity, richiamando le definizioni, le tipologie e le classificazioni proposte dai vari autori. Si illustrano brevemente, inoltre, le applicazioni e le principali realizzazioni di tali sistemi strutturali.

1.2 ORIGINI DEI SISTEMI TENSEGRITY

È opportuno dissertare sulle origini dei sistemi tensegrity, richiamando in sintesi quelli che sono stati i primi passi nell'invenzione/scoperta di tali strutture. Per una trattazione completa in tal senso si rimanda ai lavori di H. Lalvani [3] e V. Gómez-Jàuregui [4].

La prima traccia, storicamente accertata, di struttura tensegrity si ritrova nel quesito che R. Buckminster Fuller (allora docente presso il *Black Mountain College*, North Carolina, USA) propone agli studenti del suo corso di geometria, ossia cercare di realizzare un sistema in grado di descrivere pienamente le forze presenti in natura (trazione e compressione) mantenendo la sua *integrità* (stabilità) in un insieme diffuso di forze di trazione¹ [5]. Una brillante soluzione a tale quesito viene fornita dallo studente K. Snelson, allievo di Buckminster Fuller, il quale realizza nel 1948 la scultura denominata "Early X-Piece" (Figura 1a) concretizzando in una "scultura" le idee visionarie del suo maestro [6].

Sebbene alcuni importanti studiosi di queste strutture come R. Motro [5] e D. G. Emmerich [7] individuino nelle opere del *costruttivista* russo K. Ioganson un primo esempio di sistemi tensegrity (Figura 1b), la paternità dell'invenzione è oggi attribuita a tre autori: Buckminster Fuller, Snelson e Emmerich; quest'ultimo, probabilmente ispirato dalle opere di Ioganson, e in maniera del tutto indipendente dagli altri

¹ «Is it possible to build a structure to illustrate the structural principle of nature, which was observed to rely on that continuous tensions embraces isolated compression elements?», in <http://kennethnelson.net/>.

due, realizza negli stessi anni in Francia una serie di studi su strutture tese e auto-tendenti del tutto simili alle opere di Buckminster Fuller e di Snelson (Figura I c).

Diversi sono inoltre i termini utilizzati dai vari autori per definire queste strutture: “*floating compression*” suggerito da Snelson per enfatizzare la caratteristica dei puntoni di “fluttuare” nella maglia tesa, “*Gleichgewichtskonstruktion*” proposta da Ioganson che letteralmente traduce il concetto di struttura in equilibrio, “*reseaux autotendants*” utilizzato da Emmerich per indicare un sistema reticolare auto-tendente. Tuttavia oggi tali strutture vengono universalmente indicate col termine “*tensegrity*” coniato da Buckminster Fuller nel 1955 come contrazione dei due termini inglesi “*tensional*” e “*integrity*” [8].

La controversia sulla paternità dell’idea non ha ancora oggi trovato una soluzione definitiva, nonostante negli anni si siano registrate numerose occasioni di confronto fra i tre autori: si citano, ad esempio, le interviste di J. Coplans [9], e A. Schnaider [10] e il lavoro dello stesso Buckminster Fuller [11].

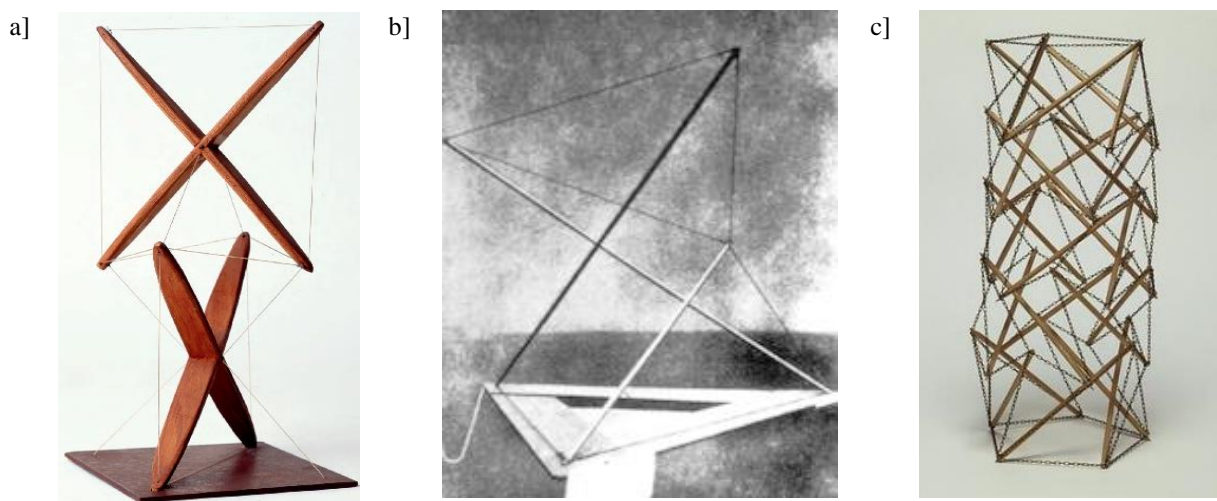


Figura I. a) K. Snelson, “Early X-Piece”, legno e nylon (29 cm x 4,5 cm x 4,5 cm), 1948.
b) K. Ioganson, “Gleichgewichtskonstruktion”, 1920. c) D. G. Emmerich “reseaux autotendants”, 1962.

In definitiva, si può concludere che sebbene le origini siano controverse e non completamente chiare, la scoperta/invenzione delle strutture tensegrity si deve al genio visionario di una commistione, seppur temporalmente e spazialmente separata, di scienziati e artisti con interessi e scopi differenti.

1.3 DEFINIZIONI E CLASSIFICAZIONI

1.3.1 Definizioni

Per poter distinguere se una data struttura può essere o meno definita “tensegrity” è necessario formulare una definizione chiara e non ambigua. Nel lasso di tempo che intercorre tra la prima realizzazione ed oggi, diversi autori hanno provato a fornire una descrizione universalmente accettabile di struttura tensegrity. Il

primo tentativo si può riscontrare nel brevetto dello stesso Buckminster Fuller: «[...] *compression elements become small islands in a sea of tension.*» [12]².

La descrizione dello scienziato statunitense, sebbene intrisa di senso figurato, risulta essere ad oggi la più efficace per delineare, di primo acchito, la morfologia di una struttura tensegrity. Una descrizione più estesa Buckminster Fuller la fornisce in [8], ribadendo innanzitutto che il termine *tensegrity* è un'invenzione, e affermando che tale termine descrive un principio strutturale nel quale la configurazione geometrica viene definita da un insieme finito e continuo di elementi tesi, che racchiude gli elementi compressi discontinui (locali)³.

Non vi è in questa descrizione un riferimento ai principi che definiscono il comportamento meccanico di tali strutture, ma soltanto un'indicazione sugli aspetti morfologici che le contraddistinguono. La caratteristica fondamentale su cui Buckminster Fuller pone l'accento è la continuità spaziale degli elementi tesi che definiscono la forma della struttura inglobando, all'interno di tale insieme, gli elementi compressi. In Francia, nello stesso periodo Emmerich, nel proprio brevetto [13], riassume in ventinove punti le caratteristiche che le strutture "auto-tendenti" possono avere, prevedendo anche la possibilità di assemblare nello spazio più moduli elementari. L'architetto e ingegnere francese, fornisce inoltre anche alcune indicazioni sulle possibili applicazioni di tali strutture prefigurando anche la possibilità di una realizzazione in serie utilizzando un numero limitato di elementi per la fabbricazione di una notevole varietà di strutture⁴. Negli Stati Uniti, la descrizione che Snelson fornisce nel suo brevetto [14] richiama quella di Buckminster Fuller, Snelson sottolinea la separazione degli elementi compressi e l'interconnessione degli elementi tesi⁵. Lo scultore americano esalta inoltre la significativa leggerezza di tali strutture, dovuta alla presenza di un elevato numero di elementi tesi leggeri, rispetto ad analoghe strutture reticolari.

Nel 1976, A. Pugh della University of California fornisce per la prima volta una definizione tale da poter generalizzare il concetto di strutture tensegrity ad una più ampia casistica di studio [15]⁶:

“Un sistema tensegrity si realizza quando un insieme discontinuo di componenti compressi interagisce con un sistema continuo di componenti tesi definendo un volume stabile nello spazio”.

Nello stesso lavoro, Pugh enfatizza come, a differenza degli altri sistemi strutturali, in un sistema tensegrity la continuità strutturale in grado di trasferire le forze all'interno della struttura stessa sia garantita dall'insieme degli elementi tesi piuttosto che dagli elementi compressi. Si evidenzia inoltre, nella definizione di Pugh, l'uso del termine *sistema* invece del termine *struttura*, utilizzato in tutte le precedenti

² In [12], p. 1.

³ «...*Tensegrity describes a structural-relationship principle in which structural shape is guaranteed by the finitely closed, comprehensively continuous, tensional behaviors of the system and not by the discontinuous and exclusively local compressional member behaviors.*», in [8], 700.011.

⁴ «*La présente invention a pour objet un nouveau moyen de construction utilisable en particulier dans l'industrie du bâtiment, des travaux publics et des télécommunications, et qui se prête à une fabrication en grande série; il se réalise par la combinaison de deux ou d'un nombre très réduit de types d'éléments et qui permet de composer des réseaux de structures d'une variété pratiquement infinie.*», in [13], p. 1.

⁵ «*The present invention relates to structural framework and more particularly, to a novel and improved structure of elongate members which are separately placed either in tension or in compression to form a lattice, the compression members being separated from each other and the tension members being interconnected to form a continuous tension network.*», in [14], p. 1.

⁶ «*A tensegrity system is established when a set of discontinuous compressive components interacts with a set of continuous tensile components to define a stable volume in space.*», in [15], p. 3.

descrizioni; tale scelta viene motivata dall'autore ipotizzando che i sistemi tensegrity possano essere utilizzati in applicazioni diverse da quelle legate all'ingegneria e all'architettura.

Successivamente, dagli anni Novanta in poi, si possono ritrovare in letteratura ulteriori definizioni; tra queste si citano, senza pretesa di esaustività, quelle presenti nei lavori di A. Hanaor [16], di S. Pellegrino [17], B. B. Wang e Y. Y. Li [18], e di N. Kanchanasaratool e D. Williamson [19].

Ad oggi, la definizione universalmente riconosciuta di struttura tensegrity è quella fornita da Motro [20]⁷: tensegrity è un sistema⁸ in uno stato di auto-equilibrio⁹ stabile¹⁰ costituito da un insieme discontinuo di componenti¹¹ compressi all'interno¹² di un insieme continuo¹³ di componenti tesi.

1.3.2 Classificazioni

Le classificazioni delle strutture tensegrity proposte in letteratura fanno riferimento alle *cellule elementari* tensegrity, ossia a sistemi tensegrity che non sono ulteriormente divisibili in singole cellule stabili.

In [15] Pugh realizza per la prima volta un catalogo accurato delle celle tensegrity considerando in particolare la posizione reciproca degli elementi tesi e la complessità dei componenti compressi, ovvero il numero degli elementi che costituiscono tali componenti. Egli descrive inoltre tre diverse configurazioni che una tensegrity *sferica*¹⁴ può assumere¹⁵ in funzione della posizione reciproca assunta dai componenti compressi.

Tale classificazione viene poi ripresa da Motro [20], il quale suggerisce anche un possibile sistema di nomenclatura: numero dei nodi “n”, numero dei componenti compressi “S”, numero dei cavi “C”, sistemi regolari “R” e sistemi irregolari “I” (in riferimento alla lunghezza degli elementi), sistemi sferici “SS”.

È possibile inoltre citare, tra le altre, la nomenclatura proposta da D. Williamson e D. Whitehouse: una struttura tensegrity è composta da N componenti compressi (*i.e. struts*) e S componenti tesi (*i.e. cables*). La struttura si sviluppa in M livelli (*stage*) con P_M puntoni per livello [22].

⁷ «A tensegrity system is a system in a stable self-equilibrated state comprising discontinuous set of compressed components inside a continuum of tensioned components», in [20], p. 19.

⁸ L'uso del termine “sistema” fa riferimento alla *Teoria generale dei sistemi* [21] formulata da L. Von Bertalanffy nel 1968. In quest'ottica, condizione necessaria perché sia stabilito un sistema e sia mantenuto come tale (senza degenerare nell'insieme dei suoi componenti) è che i componenti che lo costituiscono interagiscano tra loro.

⁹ Lo stato di auto-equilibrio fa riferimento alla condizione meccanica della struttura nello stato iniziale, ossia prima che qualunque carico, anche gravitazionale, sia applicato al sistema. Tale condizione può essere espressa in maniera equivalente con l'assenza di meccanismi finiti.

¹⁰ In [20] il concetto di stabilità è riferito alla possibilità che i meccanismi infinitesimi possano essere stabilizzati dallo stato di pre-sollecitazione negli elementi.

¹¹ Motro utilizza il termine “componente” in sostituzione del termine “elemento”, ritenuto potenzialmente ambiguo. Viene specificato inoltre: «[...] The shape of the component is not prescribed to be a line, a surface or a volume. [...] It can be a combination of one or several elementary components that are assembled in a higher order component. The matter of component is not prescribed...», in [20], p. 20.

¹² Si fa riferimento in questo caso al fatto che un insieme di nodi ammette una frontiera che risulta essere generalmente una superficie convessa. Tale frontiera può contenere, tutt'al più, le estremità degli elementi compressi.

¹³ La continuità/discontinuità dei componenti riprende la descrizione di Buckminster Fuller in [12].

¹⁴ Una struttura tensegrity si definisce sferica quando l'insieme dei componenti tesi e quello dei componenti compressi rappresenta un omomorfismo rispetto ad una sfera, *i.e.*, gli elementi tesi possono essere disposti su una sfera senza generare intersezioni reciproche se non nei nodi e gli elementi compressi risultano posizionati all'interno di tale rete tesa.

¹⁵ «Diamond pattern, Circuit pattern and Zigzag pattern», in [15] p. 14.

La difficoltà nell'individuazione degli *stage* che compongono una struttura tensegrity, la necessità di definire il numero dei nodi e le proprietà di regolarità e/o sfericità della cella rendono la nomenclatura proposta da Motro più completa ed efficace.

In [23], infine, Skelton suggerisce di classificare le strutture tensegrity in base al numero degli elementi compressi che convergono in un nodo; tale classificazione consente di considerare tensegrity anche strutture per le quali il componente compresso risulta essere costituito da più elementi posti in continuità¹⁶, ovvero il numero k degli elementi che costituiscono il componente compresso definisce la struttura tensegrity come appartenente alla “classe k ”. In tal senso si definiscono di “classe 1” quelle strutture tensegrity in cui in ogni nodo converge un unico elemento compresso, di “classe 2” se in un nodo convergono due elementi compressi e così via.

1.4 REALIZZAZIONI E ASPETTI TECNOLOGICI

Le caratteristiche peculiari dei sistemi tensegrity hanno incoraggiato lo studio delle relative proprietà meccaniche in differenti ambiti di ricerca. Il valore estetico, l'elevato rapporto tra la rigidità e il peso della struttura, la possibilità di potersi dispiegare e di cambiare la geometria attraverso elementi “intelligenti”, rappresentano solo alcune di queste caratteristiche.

La possibilità inoltre di realizzare una configurazione strutturale stabile con un numero limitato di elementi rende tali sistemi interessanti dal punto di vista ingegneristico: l'introduzione della pre-sollecitazione negli elementi può significativamente aumentare la resistenza strutturale senza comportare un incremento delle sezioni trasversali degli elementi; si ha quindi una maggiore efficienza della struttura dovuta alla riduzione del materiale utilizzato per costruirle e cioè del carico dovuto al peso proprio della struttura.

Numerose sono le applicazioni di tali sistemi, fra queste si citano, senza pretesa di esaustività, le realizzazioni di strutture tensegrity nell'ambito dell'architettura e dell'ingegneria civile [24], le costruzioni “*smart*” e/o dispiegabili nell'ambito dell'ingegneria meccanica [25-26], i modelli per l'interpretazione del comportamento meccanico delle cellule e dei tessuti nell'ingegneria biomedica [27], la risoluzione di problemi di “*packing*” nella teoria dei sistemi [28].

Per quanto concerne le applicazioni nell'ambito dell'ingegneria civile e dell'architettura, di nostro maggiore interesse, si riportano di seguito brevi descrizioni delle principali realizzazioni: torri, padiglioni espositivi, coperture, ponti e archi.

La *Warnow Tower* di Rostock, ideata e progettata dallo studio *Schlaich Bergermann und Partner* per la *International Garden Exhibition* (IGA 2003) a Rostock (Germania), rappresenta la più alta torre tensegrity di classe 2 mai costruita (62,3 m). La struttura è realizzata mediante l'assemblaggio di sei celle elementari ad orientamento alternato (Figura IIa), ciascuna composta da tre puntoni e sei cavi in acciaio, e la

¹⁶ «A tensegrity configuration that has no contacts between its rigid bodies is a class 1 tensegrity system, and a tensegrity system with as many as k rigid bodies in contact is a class k tensegrity system. », in [24] p. 3.

giustapposizione in sommità di un ulteriore puntone collegato mediante cavi all'ultimo modulo elementare (Figura IIb). Ciascun collegamento è realizzato mediante piastre di attacco imbullonate (Figura IIc).

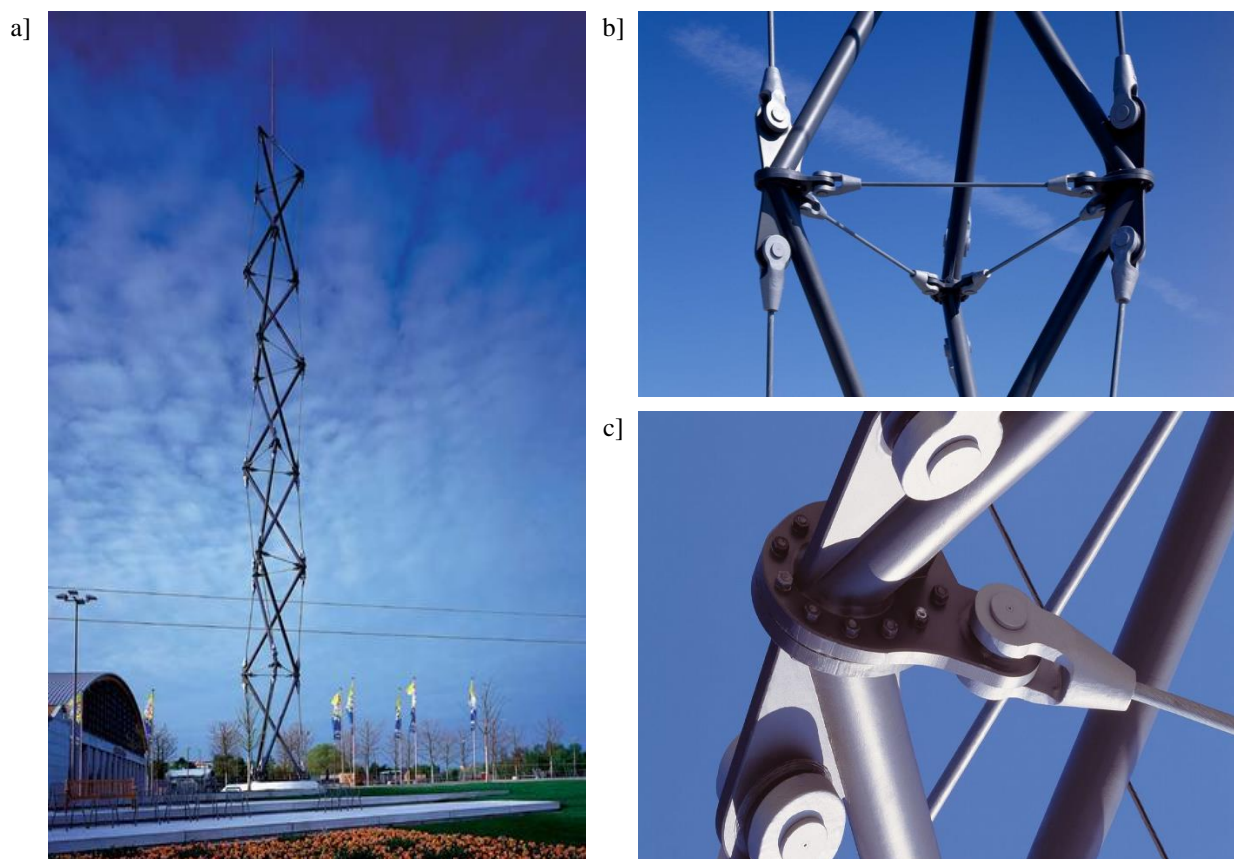


Figura II. a) Warnow Tower di Rostock, 2003. b) Dettaglio della cella elementare. c) Particolare del nodo di collegamento.

Il *Blur Building* è un padiglione espositivo realizzato per l'Expò del 2002 di Yverdon-les-Bains, in Svizzera (Figura IIIa). La struttura fonda su 4 pilastri che poggiano sul fondale del lago e utilizza un sistema di pseudo-ottaedri tensegrity per realizzare un impalcato a sbalzo di oltre 30 m (Figura IIIb). Ciascun ottaedro è costituito da un quadrato orizzontale realizzato mediante travi in acciaio; un puntone verticale passante per il baricentro di tale quadrato è connesso mediante dei cavi ai quattro vertici (Figura IIIc).

Sebbene tale sistema non rientri nella definizione di Motro, è importante richiamare e sottolineare come le tecnologie e le tecniche utilizzare per realizzare gli sbalzi siano compatibili con la realizzazione di analoghe strutture tensegrity. Nell'edificio in ispecie la soluzione pseudo-tensegrity proposta dagli ingegneri Passera e Pedretti è risultata essere la più efficiente tra quelle prospettate per il progetto.

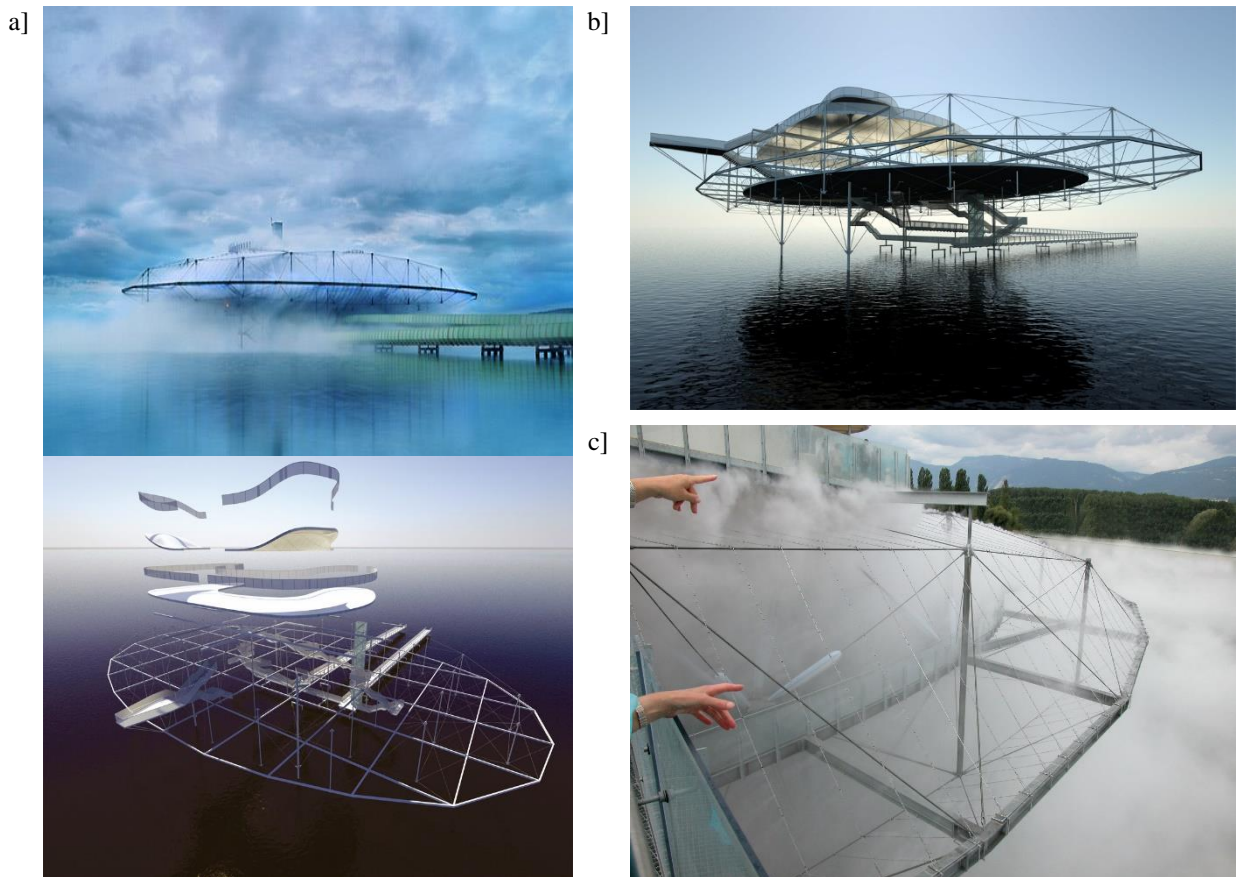


Figura III. a) Blur Building, 2002. b) Vista prospettica. c) Particolare del modulo pseudo-tensegrity.

Il *White Rhino Building* è un edificio realizzato nel 2001 a Chiba in Giappone (Figura IVa), nel centro di ricerca dell'Università di Tokyo e ospita alcuni laboratori dell'università.

La copertura a membrana poggia su due puntoni separati connessi, a loro volta, a due strutture tensegrity di differenti dimensioni (i due moduli sono alti rispettivamente 10 m e 7 m) mediante cavi in acciaio (Figura IVb).

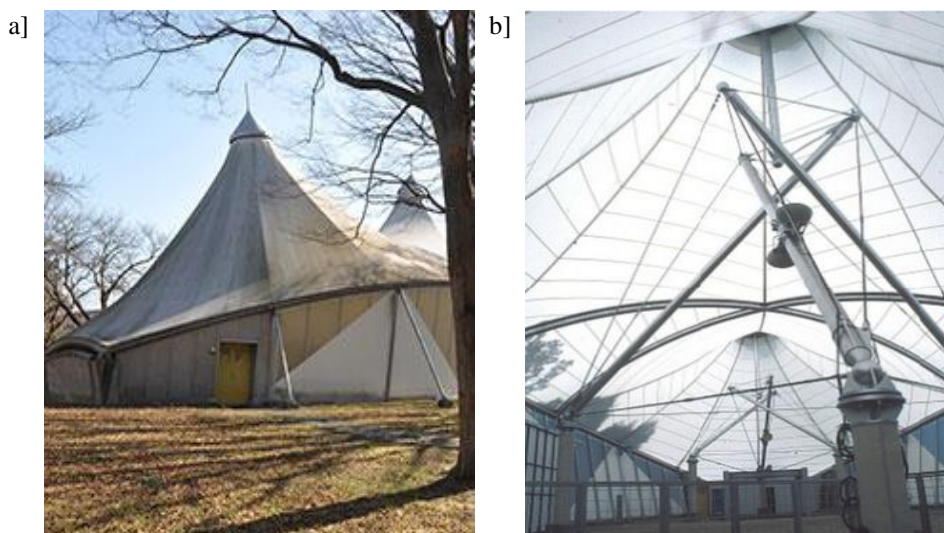


Figura IV. a) White Rhino Building, 2001. b) Particolare struttura tensegrity.

La copertura del *la Plata Stadium* (Figura Va) a Buenos Aires in Argentina [29], progettato da *Weidlinger Associates* in collaborazione con *Thornton Tomasetti* e *Roberto Ferreira* nel 2011, è realizzata attraverso la commistione di tre sub-strutture: un anello reticolare in acciaio a cui è collegato un sistema tensegrity che sostiene due pinnacoli reticolari di chiusura (Figura Vb). Una membrana in fibre di vetro ricopre l'intero sistema di copertura.

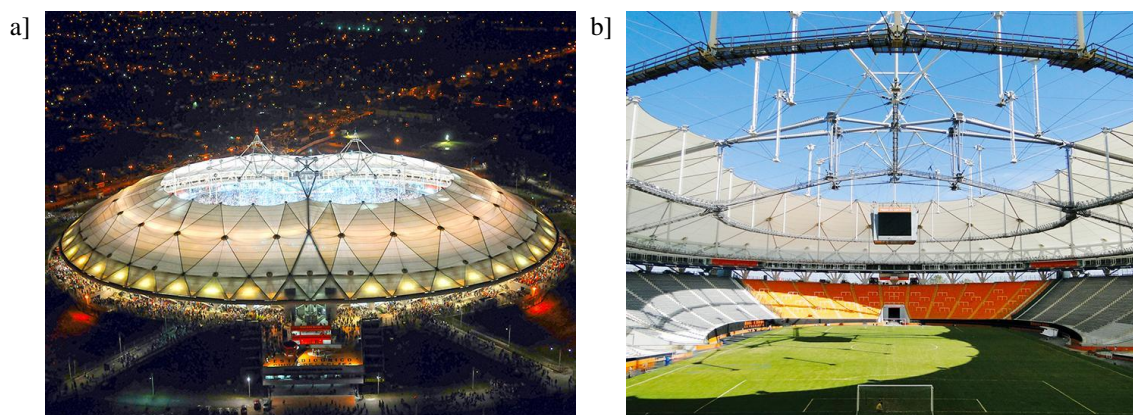


Figura V. a) La Plata Stadium, 2011. b) Particolare struttura tensegrity.

Si cita inoltre¹⁷ il progetto di ricerca *Tensarch* condotto da Motro [20] presso il *Laboratoire de Génie Civil* di Montpellier il cui obiettivo era di studiare le proprietà meccaniche di una griglia di copertura tensegrity. Il *Kurilpa Bridge* (Figura VIa) è il più grande ponte costruito utilizzando il principio costruttivo dei sistemi tensegrity. Il ponte, che collega due parti della città di Brisbane in Australia, e che è stato inaugurato nel

¹⁷ Una descrizione estesa del progetto è riportata nel capitolo 4.

2009, è composto da due sistemi interconnessi: un sistema reticolare in acciaio (Figura VIb) che sostiene la passerella di camminamento e un doppio sistema tensegrity che stabilizza l'intera struttura.

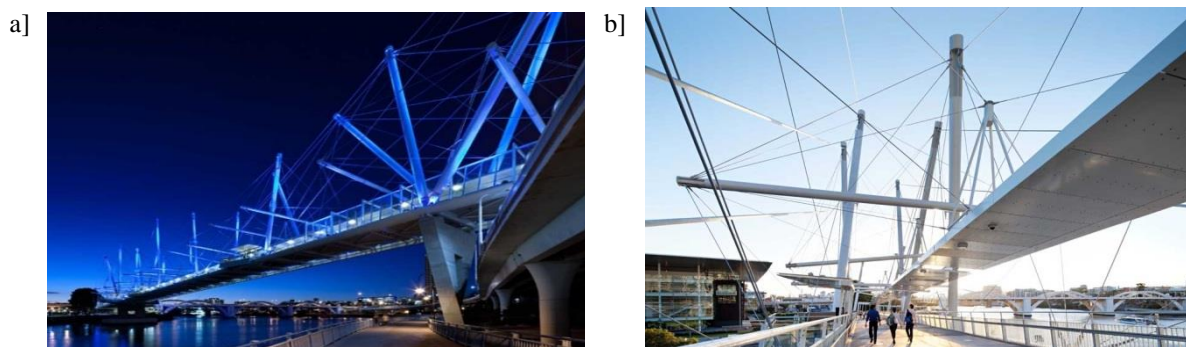


Figura VI. a) Kurilpa Bridge, 2009. b) Particolare struttura tensegrity.

Nell'ambito dell'ingegneria civile e dell'architettura non esistono ad oggi archi tensegrity propriamente detti, tuttavia, è possibile citare alcuni studi riguardanti gli aspetti legati al comportamento meccanico di un arco tensegrity soggetto all'azione del vento [30], e all'uso di archi come supporto di membrane di copertura [31].

L'esiguo numero di strutture tensegrity (o pseudo-tensegrity) esistenti nell'ambito dell'ingegneria civile e dell'architettura suggerisce di proseguire lo studio sulle possibili applicazioni di tali sistemi in questi ambiti considerando sia gli aspetti meccanici e tecnologici e sia gli aspetti formali e compositivi.

Nel capitolo seguente si pongono le basi teoriche legate alla risoluzione del problema cinematico e statico che definiscono il comportamento meccanico delle strutture tensegrity.

1.5 CONCLUSIONI

Le strutture tensegrity nascono nel campo dell'arte, ma trovano applicazione in numerosi altri campi: dalla matematica all'anatomia, dall'architettura all'ingegneria meccanica e all'ingegneria civile, dal design alla fisica. Le difficoltà maggiori nel progetto di tali strutture si riscontrano nella risoluzione di due fondamentali problemi: la ricerca della forma/forza e la stabilità.

Le esigenze e le richieste, geometriche e meccaniche, dei progettisti devono essere evidentemente compatibili con la determinazione della possibile configurazione di auto-equilibrio (super-)stabile della struttura tensegrity, nonché con l'attesa risposta meccanica ai carichi esterni.

Nel prossimo capitolo si introducono pertanto, gli aspetti preliminari legati all'analisi cinematica e statica delle strutture tensegrity, fondamentali per la determinazione della possibile configurazione di auto-equilibrio.

Bibliografia

- [1] S. P. TIMOSHENKO, J. M. GERE, *Theory of Elastic Stability*, New York, McGraw-Hill, 1961.
- [2] L. M. CORRADI DELL'ACQUA, *Meccanica delle strutture: Il comportamento dei mezzi continui*, 3 voll., New York, McGraw-Hill, 2003, vol. 1.
- [3] H. LALVANI, *Origins Of Tensegrity: Views Of Emmerich, Fuller And Snelson*, in "Journal of Space Structures", 1996, 11(1-2), pp. 27-55.
- [4] V. GÓMEZ-JÀUREGUI, *Controversial Origins of Tensegrity*, in "Proceedings of the International Association for Shell and Spatial Structures" (IASS), 2009, pp. 1642-1652.
- [5] R. MOTRO, Tensegrity: from Art to Structural Engineering, in "IASS-APCS Symposium", 2012, pp. 1-14.
- [6] K. SNELSON, *The Art of Tensegrity*, in "International Journal of Space Structures", 2012, 27(2-3), pp. 71-80.
- [7] D. G. EMMERICH, *Emmerich on self-tensioning structures*, in "International Journal of Space Structures", 1996, 11(1-2), pp. 29-36.
- [8] R. BUCKMINSTER FULLER, E. J. APPLEWHITE, A. L. LOEB, *Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking*, Sebastopol (CA), Macmillan Publishing Co. Inc., 1975.
- [9] J. COPLANS, *An interview with Kenneth Snelson*, in "Artforum", 1967, pp.46-49.
- [10] A. SCHNEIDER, *Interview with Kenneth Snelson*, in "Nationalgalerie Berlin Exhibition Catalog", 1977.
- [11] R. BUCKMINSTER FULLER, *Tensegrity*, in "Portfolio and Art News Annual", 1961, 4, pp.112-127.
- [12] R. BUCKMINSTER FULLER, *Tensile-Integrity Structures*, U.S. Patent n. 3,063,521, 13 Novembre 1962.
- [13] D. G. EMMERICH, *Construction de réseaux autotendants*, French Patent n. 1,377,290, 28 Settembre 1964.
- [14] K. SNELSON, *Continuous tension, discontinuous compression structures*, U.S. Patent n. 3,169,611, 16 Febbraio 1965.
- [15] A. PUGH, *An Introduction to Tensegrity*, Berkeley, California, University of California Press, 1976.
- [16] A. HANAOR, *Preliminary Investigation of Double-Layer Tensegrities*, in "Proceedings of International Conference on the Design and Construction of Non-conventional Structures", 1987, 2.
- [17] S. PELLEGRINO, *A Class of Tensegrity Domes*, in "International Journal of Space Structures", 1992, 7(2), pp. 127-142.
- [18] B. B. WANG, Y. Y. LI, *Definition of tensegrity systems. Can dispute be settled?*, in "Proceedings of Lightweight structures in architectural engineering and construction" (LSA), 1998, pp.713-719.
- [19] N. KANCHANASARATool, D. WILLIAMSON, *Modelling and control of class NSP tensegrity structures*, in "International Journal of Control", 2002, 75(2), pp.123-139.
- [20] R. MOTRO, *Tensegrity: Structural Systems for the Future*, London, Kogan Page Science, 2003.
- [21] L. VON BERTALANFFY, *Teoria generale dei sistemi. Fondamenti, sviluppo, applicazioni*. Milano, I. L. I., 1968.
- [22] D. WILLIAMSON, D. WHITEHOUSE, *Visualization of Tensegrity Structures*. Australian National University, 2000. (http://anusf.anu.edu.au/anusf_visualization/viz_showcase/williamson_darrell/)

- [23] R. E. SKELTON, M. DE OLIVEIRA, *Tensegrity Systems*, Springer, 2009.
- [24] W. GILEWSKY, J. KLOSOWSKA, P. OBARA, *Applications of tensegrity structures in civil engineering*, in “Procedia Engineering” 2015, 111, pp. 242-248.
- [25] S. HIRAI, *et al.*, *Active shaping of a tensegrity robot via pre-pressure*, in “IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics” (AIM), 2003, pp. 19-25.
- [26] K. SHEA, E. FEST, I. F. C. SMITH, *Developing intelligent tensegrity structures with stochastic search*, in “Advanced Engineering Informatics”, 2002, 16(1), pp.21-40.
- [27] G. SCARR, *A consideration of the elbow as a tensegrity structure*, in “International Journal of Osteopathic Medicine”, 2012, 5(2), pp.53-65.
- [28] A. DONEV, *et al.*, *A linear programming algorithm to test for jamming in hard-sphere packings*, in “Journal of Computational Physics”, 2004, 197(1), pp.139-166.
- [29] M. LAZZARI, *et al.*, *Dynamic behavior of a tensegrity system subjected to follower wind loading*, in “Computers and Structures”, 2003, 81, pp. 2199-2217.
- [30] P. PODIO-GUIDUGLI, *The Tensegrity Arch at TorVergata*, in “Revue Francaise de Genie Civil”, 2003, 7, pp. 267-273.
- [31] S.M.L. ADRIAENSSENS, M.R. BARNES, *Tensegrity spline beam and grid shell structures*, in “Engineering Structures”, 2001, 23, pp. 29-36.

Capitolo 2

CINEMATICA E STATICA DELLE STRUTTURE TENSEGRITY

In questo capitolo si introducono gli aspetti legati all'analisi cinematica e statica delle strutture tensegrity. In particolare, nel paragrafo 2.1 si discute sulla definizione del modello e della configurazione geometrica della struttura; si definisce inoltre la matrice cinematica e si richiamano le proprietà dei relativi sottospazi vettoriali. Nel paragrafo 2.2 si ricordano le equazioni di equilibrio, si richiama la definizione della matrice di equilibrio e si illustrano le proprietà dei quattro sottospazi fondamentali associati a tale matrice.

2.1 CINEMATICA

In [1] J. Clerk Maxwell studia il comportamento meccanico di strutture composte da travi rettilinee connesse alle loro estremità da nodi privi di attrito e soggette ad un sistema di forze esterne agenti sui nodi. In particolare, Maxwell indica col termine *struttura*, nello spazio euclideo tridimensionale, un sistema di travi connesse ad un insieme di nodi; definisce inoltre una struttura *rigida*, una struttura nella quale la distanza tra due punti non può essere variata senza alterare la lunghezza di una o più travi del sistema stesso. Egli dimostra che, nello spazio euclideo tridimensionale, sono necessarie $(3n - 6)$ travi per rendere una struttura rigida secondo la definizione richiamata in precedenza, avendo indicato con n il numero dei nodi. Nella Meccanica delle Strutture tale risultato prende il nome di *Regola di Maxwell*.

Esistono tuttavia strutture che costituiscono un'eccezione a tale regola e le strutture tensegrity, per l'appunto, ne rappresentano un esempio paradigmatico.

Si fa notare come lo stesso Maxwell anticipa in qualche modo tali eccezioni alla sua regola, fornendo tuttavia una motivazione poco chiara; si rimanda al lavoro di C. R. Calladine in [2] per ulteriori approfondimenti di tale questione.

Si prenda in esame la più semplice struttura tensegrity: il cosiddetto “*simplex*” o “*tensegrity prism*” o “*T3*”, riportato in Figura 1¹⁸.

Si può fare riferimento al lavoro di I. J. Oppenheim e W.O. Williams in [3] che rappresenta una pietra miliare degli studi sul comportamento meccanico del simplex.

¹⁸ Fig. 1a <http://www.tensegriteit.nl/e-simple.html> - Fig. 1b <https://en.wikipedia.org/wiki/Tensegrity>

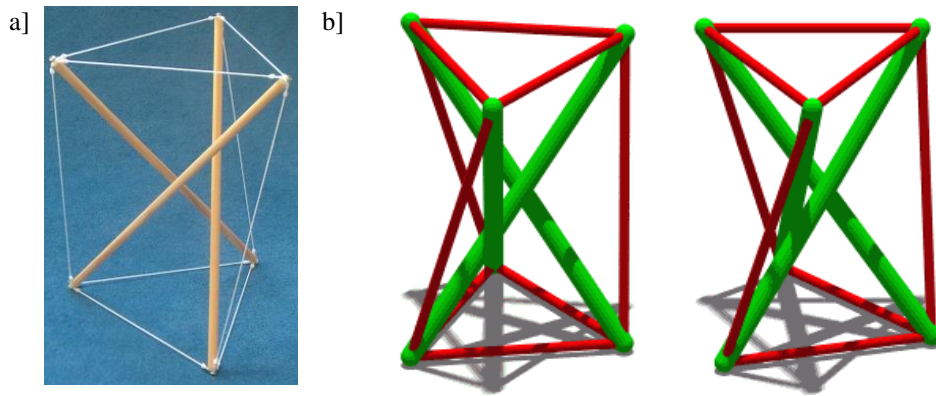


Figura 1. a) Modello in legno e cavi del simplex free-standing. b) Modello del simplex.

In generale, come si può notare nella Fig. 1a, le strutture tensegrity vengono studiate come corpi rigidi liberi nello spazio, ossia come strutture *free-standing*. La presenza di eventuali vincoli dei nodi della struttura richiede una breve trattazione aggiuntiva: si consideri il generico punto Q di una struttura, composta da n nodi, a cui è applicato un *vincolo semplice* perfetto che impone che il vettore dello spostamento infinitesimo¹⁹ del punto Q , $\mathbf{u}_Q \in \mathbb{R}^3$, abbia componente nulla nella direzione definita dal versore $\hat{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^3$, ossia è possibile scrivere:

$$\mathbf{u}_Q \cdot \hat{\mathbf{e}} = 0.$$

Si può pertanto indicare con n_v il numero complessivo dei vincoli semplici applicati ai nodi della struttura, che ne riducono il numero dei gradi di libertà nello spazio euclideo tridimensionale.

La capacità di una struttura tensegrity free-standing di essere in equilibrio, in assenza di carichi esterni e di vincoli esterni, è legata alla presenza di uno stato di *pre-sollecitazione* negli elementi in grado di stabilizzare i *meccanismi infinitesimi* che la struttura possiede. Tale condizione è definita come stato di *auto-equilibrio*. La determinazione dello spazio vettoriale generato dai meccanismi infinitesimi della struttura e il calcolo della relativa dimensione rappresentano un passaggio cruciale nell'analisi cinematica di tali strutture.

La Figura 2 mostra l'esempio classico di arco a tre cerniere che illustra la differenza tra meccanismi infinitesimi (che verranno definiti nel paragrafo 2.1.3) e meccanismi finiti.

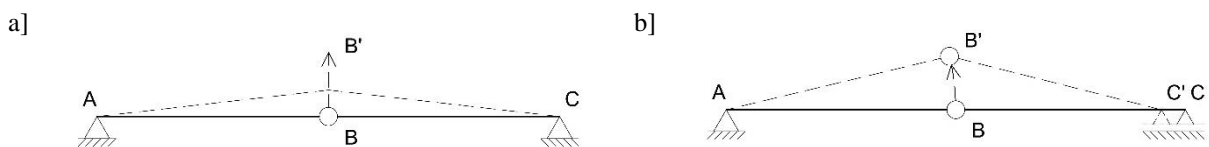


Figura 2. a) Meccanismo infinitesimo. b) Meccanismo finito.

(le linee tratteggiate rappresentano la possibile configurazione delle strutture a seguito del meccanismo)

¹⁹ Nella trattazione si considerano esclusivamente spostamenti *infinitesimi* dei nodi della struttura.

L'esempio sopra riportato, ampiamente discusso in letteratura, evidenzia che nel caso del meccanismo infinitesimo non si ha nessuna variazione di lunghezza delle aste a seguito dello spostamento dei nodi, contrariamente al caso del meccanismo finito.

2.1.1 Definizioni preliminari

Lo studio del comportamento meccanico di una struttura tensegrity richiede l'introduzione di una serie di notazioni preliminari per definire compiutamente l'oggetto di studio e le relative proprietà. In letteratura si possono ritrovare differenti notazioni e diverse terminologie; questa diversità trova la sua giustificazione nella variegata estrazione culturale degli studiosi e ricercatori che, negli anni, si sono interessati all'argomento.

Innanzitutto è necessario definire il modello della struttura e descriverne la configurazione geometrica nello spazio tridimensionale; tale descrizione, vista la complessità del sistema, può richiedere l'utilizzo di tecniche in grado di ridurre l'onere computazionale dello studio tenendo in conto, ad esempio, di eventuali proprietà di simmetria della struttura.

Per descrivere la geometria di una struttura tensegrity è possibile, ad esempio, fare riferimento alla *Teoria dei Grafi*. Tale approccio fu proposto per la prima volta da B. Roth e W. Whiteley [4].

Numerosi fenomeni fisici possono essere modellati attraverso tale teoria; in tali fenomeni la reciproca relazione tra gli "elementi" dell'insieme riveste la medesima importanza delle proprietà fisiche e/o chimiche degli elementi stessi [5].

Si ricorda che un grafo è un insieme non vuoto $G = (V, E)$ in cui si definisce l'insieme finito V composto dai *vertici* o *nodi* della struttura, e l'insieme E che contiene gli elementi che si relazionano ai nodi di V detti *archi*, *spigoli* o *lati* o più semplicemente *elementi*. Se due o più elementi si connettono alla stessa coppia di nodi essi vengono definiti *elementi multipli*; se le estremità di un elemento coincidono con un singolo nodo tale elemento si definisce *anello*.

Un grafo in cui non sono presenti elementi multipli o anelli viene definito *grafo semplice*; se il grafo è costituito da insiemi (nodi e elementi) finiti esso si definisce *finito*; se due nodi distinti rappresentano le estremità di un elemento di E tali nodi si definiscono *adiacenti*.

Due elementi si dicono *incidenti* se hanno in comune un nodo di estremità. Si definisce, infine, *valenza* di un nodo il numero degli elementi che risultano incidenti nel nodo stesso.

In tal modo, una struttura tensegrity può essere definita come un grafo $G = (V, E)$ nel quale si determinano l'insieme V dei nodi della struttura e l'insieme E degli elementi che connettono i nodi. In particolare, si definiscono i seguenti parametri di descrizione del grafo di una struttura tensegrity:

- n denota il numero dei nodi della struttura,
- s denota il numero dei puntoni,
- c indica il numero dei cavi.

Indicando con S e C , rispettivamente, l'insieme dei puntoni della struttura e l'insieme dei cavi, il grafo risulta definito come:

$$G := (V, E),$$

per quanto detto si è posto rispettivamente:

$$V = \{n_1, n_2, \dots, n_n\},$$

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_s\},$$

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_c\},$$

$$E = S \cup C.$$

La connessione tra gli elementi di una struttura tensegrity influenza la prestazione globale del sistema; il complesso di tali relazioni di connessione viene definito *topologia*.

2.1.2 Definizione della geometria

Adottando la notazione e la terminologia utilizzata da R. E. Skelton e M. C. de Oliveira [6], la configurazione geometrica di una struttura tensegrity può essere così descritta.

Si consideri nello spazio euclideo tridimensionale un sistema di riferimento ortonormale $Oxyz$; assegnato il numero dei nodi n della struttura, si indichi con $\mathbf{n}_i \in \mathbb{R}^3$ ($i = 1, 2, \dots, n$), il vettore che contiene le coordinate del nodo i -esimo nel suddetto sistema di riferimento, ovvero:

$$\mathbf{n}_i := (x_i, y_i, z_i). \quad (1)$$

La configurazione geometrica dell'intera struttura è pertanto definita da un vettore $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^{3n}$, che raggruppa i vettori delle coordinate dei nodi, ossia:

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{n}_n \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Sia m il numero totale degli elementi della struttura, con $m = s + c$, e sia $\mathbf{m}_k \in \mathbb{R}^3$ ($k = 1, 2, \dots, m$), il vettore definito dalla seguente relazione:

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{n}_{i_k} - \mathbf{n}_{j_k}, \quad (3)$$

allora l'insieme E degli elementi della struttura può essere descritto dal vettore $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^{3m}$:

$$\mathbf{m} = \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{m}_m \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Sia inoltre $\mathbf{d}_k \in \mathbb{R}^n$ il vettore così definito:

$$\mathbf{d}_k = \mathbf{e}_{i_k} - \mathbf{e}_{j_k}, \quad (5)$$

dove $\mathbf{e}_{i_i} \in \mathbb{R}^n$, è il vettore tale che:

$$\mathbf{e}_{p,i} = \begin{cases} 1 & p = i \\ 0 & p \neq i \end{cases}. \quad (6)$$

Si definisca la matrice $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{3 \times n}$, la cui i -esima colonna è costituita dalle componenti del vettore \mathbf{n}_i (1).

Risulta quindi che il vettore \mathbf{m}_k può essere scritto nella forma:

$$\mathbf{m}_k = \mathbf{N}(\mathbf{e}_{i_k} - \mathbf{e}_{j_k}) = \mathbf{N}\mathbf{d}_k. \quad (7)$$

Si definisca infine la matrice $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, la cui i -esima colonna è composta dalle componenti del vettore \mathbf{d}_k .

La trasposta \mathbf{C} di tale matrice, ossia:

$$\mathbf{C} = \mathbf{D}^T \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad (8)$$

è denominata *matrice di connessione*, e descrive in che modo gli elementi della struttura sono connessi reciprocamente. La matrice di connessione, nella teoria dei grafi, è indicata anche come *matrice di incidenza*. Infatti, supponendo che l'elemento k connetta i nodi i e j , con $i < j$, allora l' i -esimo e il j -esimo elemento della k -esima riga di \mathbf{C} risultano pari rispettivamente a 1 e -1, ovvero:²⁰

$$C_{k,p} = \begin{cases} 1 & p = i \\ -1 & p = j \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}. \quad (9)$$

Si definisca inoltre la matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times m}$, la cui i -esima colonna è costituita dalle componenti del vettore \mathbf{m}_i , allora si può scrivere:

$$\mathbf{M} = \mathbf{N}\mathbf{C}^T. \quad (10)$$

La (10) descrive le relazioni di connessione tra gli elementi della struttura e come questi si dispongono nello spazio. Si fa notare che per come sono state definite le matrici \mathbf{N} ed \mathbf{M} vengono vettorializzate nei vettori \mathbf{n} ed \mathbf{m} .²¹

Dalla (10) segue che:

$$\mathbf{m} = \text{vec}(\mathbf{M}) = (\mathbf{C} \otimes \mathbf{I}_3) \text{vec}(\mathbf{N}), \quad (11)$$

avendo indicato col simbolo \otimes il prodotto di Kronecker²² tra matrici.

Si definisce inoltre una partizione dell'insieme dei nodi V per distinguere i nodi liberi dai nodi nei quali è applicato un vincolo esterno: in particolare si indicano con n_l e n_f , rispettivamente, i nodi liberi e i nodi fissi della struttura. In tal modo, la matrice di connessione può essere partizionata tenendo conto di questa suddivisione:

$$\mathbf{C} = [\mathbf{C}^l | \mathbf{C}^f], \quad (12)$$

²⁰ Si noti che la somma degli elementi di ogni riga della matrice \mathbf{C} è pari a 0 e pertanto risulta sempre: $\mathbf{C}\mathbf{1}_n = \mathbf{0}$, avendo indicato con $\mathbf{1}_n$ la matrice identità di ordine n .

²¹ Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la vettorializzazione di tale matrice restituisce un vettore $\mathbf{a} = \text{vec}(\mathbf{A}) \in \mathbb{R}^m$, in cui sono confluite tutte le colonne della matrice di partenza.

²² Sia $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e sia $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, si definisce prodotto di Kronecker e si indica con la notazione $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ l'operazione, sempre eseguibile, tra le due matrici che restituisce una matrice $(mp \times nq)$ definita a blocchi nel modo seguente:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \cdots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \cdots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}.$$

avendo indicato con $\mathbf{C}^l \in \mathbb{R}^{m \times n_l}$, e $\mathbf{C}^f \in \mathbb{R}^{m \times n_f}$, rispettivamente, la matrice di connessione relativa ai nodi liberi e la matrice di connessione relativa ai nodi vincolati della struttura. Se tutti i nodi della struttura risultano essere liberi il sistema si definisce *free-standing*; in questa condizione la matrice \mathbf{C}^l coincide con la matrice \mathbf{C} del sistema.

Si noti che le righe della matrice \mathbf{N} rappresentano i vettori delle coordinate nodali della struttura nel sistema di riferimento $Oxyz$: ovvero si definiscono $\mathbf{x}^l, \mathbf{y}^l, \mathbf{z}^l \in \mathbb{R}^{n_l}$, e $\mathbf{x}^f, \mathbf{y}^f, \mathbf{z}^f \in \mathbb{R}^{n_f}$, rispettivamente, i vettori delle coordinate dei nodi liberi e dei nodi vincolati nelle direzioni x, y e z .

Ancora, è possibile definire il vettore $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ delle differenze di coordinate dei nodi, rispetto alla direzione x ; per la definizione della matrice di connessione, si ha:

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}^l \mathbf{x}^l + \mathbf{C}^f \mathbf{x}^f. \quad (13a)$$

Analogamente, nella direzione y e z , si possono definire i vettori $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$, e $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^m$ delle differenze di coordinate dei nodi:

$$\mathbf{v} = \mathbf{C}^l \mathbf{y}^l + \mathbf{C}^f \mathbf{y}^f, \quad (13b)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}^l \mathbf{z}^l + \mathbf{C}^f \mathbf{z}^f. \quad (13c)$$

Si noti che tali vettori costituiscono le righe della matrice \mathbf{M} (10).

Nel caso di tensegrity free-standing, il termine relativo ai nodi vincolati nelle (13) non è presente. Tenendo conto delle (13), si può determinare la lunghezza²³ l_k dell'elemento k -esimo, attraverso la seguente relazione:

$$l_k^2 = u_k^2 + v_k^2 + w_k^2, \quad (14)$$

Sia $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^m$, il vettore che contiene le lunghezze degli m elementi della struttura, e siano inoltre rispettivamente, $\mathbf{U} = \text{diag}(\mathbf{u})$, $\mathbf{V} = \text{diag}(\mathbf{v})$, $\mathbf{W} = \text{diag}(\mathbf{w})$ e $\mathbf{L} = \text{diag}(\mathbf{I})$, le matrici diagonali²⁴ costruite sui vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{w} e \mathbf{I} ; allora per la (14) è possibile scrivere la seguente relazione:

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{U}^2 + \mathbf{V}^2 + \mathbf{W}^2, \quad (15)$$

in cui gli elementi della diagonale della matrice \mathbf{L}^2 risultano essere pari al quadrato della lunghezza dell'elemento k -esimo della struttura.

La configurazione geometrica della struttura viene dunque definita attraverso la scrittura della matrice \mathbf{N} e della matrice \mathbf{M} , la determinazione della matrice di connessione \mathbf{C} e delle matrici diagonali delle differenze delle coordinate nodali \mathbf{U} , \mathbf{V} , \mathbf{W} , nonché della matrice \mathbf{L} .

2.1.3 Matrice cinematica e sottospazi vettoriali corrispondenti

L'analisi cinematica di una struttura tensegrity può essere condotta a partire dalla definizione dei vettori degli spostamenti infinitesimi degli n nodi: sia $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^{3n}$, il vettore degli spostamenti nodali infinitesimi

²³ Nei paragrafi successivi si utilizzerà anche la notazione $l_{k,l}$, per indicare la lunghezza dell'elemento k -esimo che connette il nodo i -esimo al nodo l -esimo.

²⁴ Sia \mathbf{a} un vettore in \mathbb{R}^n , si indica con $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, la sua forma diagonale, ovvero: $\mathbf{A} = \text{diag}(\mathbf{a})$.

compatibili con i vincoli esterni agenti sulla struttura e sia inoltre $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$, il vettore delle deformazioni longitudinali degli m elementi. È possibile definire una relazione di congruenza tra lo spostamento dei nodi della struttura e le relative deformazioni longitudinali degli elementi mediante la seguente espressione [7]:

$$\mathbf{B}\mathbf{d} = \mathbf{e}, \quad (16)$$

avendo definito con $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times 3n}$, la *matrice cinematica* o *matrice di congruenza*, o anche, *matrice di compatibilità*.

I sottospazi vettoriali associati a tale matrice permettono la caratterizzazione cinematica della struttura [7]. Si noti che, calcolato il rango della matrice cinematica, le dimensioni dei quattro sottospazi fondamentali possono essere facilmente determinate. I quattro sottospazi fondamentali associati alla matrice di congruenza \mathbf{B} hanno una ben definita interpretazione cinematica:

- il sottospazio generato dalle righe di \mathbf{B} (immagine della matrice trasposta di \mathbf{B} , $C(\mathbf{B}^T)$ ²⁵) rappresenta il campo degli spostamenti nodali a cui è associata una deformazione estensionale congruente degli elementi; tali spostamenti si definiscono *spostamenti nodali*.
- il sottospazio nullo a sinistra di \mathbf{B} (nucleo della matrice trasposta di \mathbf{B} , $N(\mathbf{B}^T)$) definisce le cosiddette *deformazioni incompatibili*, ossia le deformazioni degli elementi che risultano incompatibili con la connettività della struttura.
- il sottospazio generato dalle colonne di \mathbf{B} (immagine di \mathbf{B} , $C(\mathbf{B})$) contiene le cosiddette *deformazioni congruenti* degli elementi, ovvero le deformazioni degli elementi che preservano la connettività della struttura.
- il sottospazio nullo di \mathbf{B} (nucleo di \mathbf{B} , $ker(\mathbf{B})$ o $N(\mathbf{B})$) rappresenta lo spazio degli *spostamenti inestensionali*, ossia contiene gli spostamenti dei nodi della struttura che non generano deformazioni estensionali degli elementi.

Di notevole rilievo per l'analisi cinematica delle strutture tensegrity risulta essere il sottospazio nullo $ker(\mathbf{B})$ della matrice cinematica \mathbf{B} . Poiché tale sottospazio è generato dai vettori degli spostamenti nodali a cui è associata una deformazione estensionale nulla degli elementi, tali spostamenti nodali $\mathbf{d}_m \in \mathbb{R}^{3n}$ si definiscono *meccanismi infinitesimi* e verificano la seguente relazione:

$$\mathbf{B}\mathbf{d}_m = \mathbf{0}. \quad (17)$$

La dimensione m_i del nucleo di \mathbf{B} ($Ker(\mathbf{B})$) è pari al numero di vettori linearmente indipendenti che generano tale sottospazio vettoriale.

La dimensione dello spazio generato dalle colonne e la dimensione dello spazio generato dalle righe della matrice \mathbf{B} risultano essere pari al rango r_B della matrice di congruenza. Si ricorda che, per il teorema del rango, la somma del rango e della *nullità* (dimensione del nucleo) di \mathbf{B} , $null(\mathbf{B})$ (o anche n_B) risulta essere pari al numero di colonne; risulta pertanto:

$$r_B + null(\mathbf{B}) = r_B + m_i = 3n. \quad (18)$$

²⁵ La notazione $C(\bullet)$ e $N(\bullet)$ per descrivere i sottospazi fondamentali di una generica matrice (\bullet) è tratta da [8].

Nello spazio euclideo una struttura free-standing possiede un numero totale di gradi di libertà, n^{DOF} , pari a:

$$n^{DOF} = 3n - n^{rb}, \quad (19)$$

avendo indicato con n^{rb} il numero degli spostamenti rigidi indipendenti nello spazio.

In definitiva, il numero dei meccanismi infinitesimi indipendenti di una struttura free-standing, escludendo i sei spostamenti rigidi indipendenti nello spazio, risulta essere pari a:

$$m_i = 3n - n^{rb} - r_B. \quad (20)$$

Si ricorda che una struttura risulta essere cinematicamente indeterminata se esistono m_i meccanismi infinitesimi indipendenti; questi ultimi non sono spostamenti rigidi indipendenti, i quali preservano la lunghezza degli elementi, ossi per i quali è valida la (17).

Se non esistono meccanismi infinitesimi, che non siano spostamenti rigidi, la struttura risulta essere cinematicamente determinata, ossia è nulla la dimensione m_i del nucleo di \mathbf{B} .

Nella meccanica delle strutture tensegrity, e in generale nella meccanica delle strutture, nel caso in cui la struttura risulti cinematicamente indeterminata, occorre identificare i possibili meccanismi.

Inoltre, è importante comprendere se esiste uno “stato di pre-sollecitazione” in grado di “irrigidire” la struttura anche in presenza di tali meccanismi.

Per completare la trattazione riguardante l’analisi cinematica di una struttura tensegrity occorre richiamare il concetto di *trasformazione affine*; tale concetto verrà ripreso nel capitolo successivo per lo studio delle condizioni necessarie e sufficienti alla stabilità della struttura.

Si definisce trasformazione affine nello spazio euclideo uno spostamento dei nodi tale per cui si preservano le relazioni di collinearità fra gli elementi e i rapporti tra le distanze; una trasformazione affine non è necessariamente un’isometria: non sempre cioè si conservano angoli e lunghezze, ma restano invariate le relazioni di parallelismo tra rette.

Ad esempio, se tre punti giacciono inizialmente su una retta, dopo la trasformazione, essi continuano a giacere su una retta; inoltre, il punto medio di un segmento conserva tale proprietà anche a trasformazione affine avvenuta. Nello spazio tridimensionale esistono 12 trasformazioni affini indipendenti e, in generale, una trasformazione affine può essere espressa attraverso una combinazione lineare di una *traslazione*, di una *rotazione*, di una *dilatazione* e di un *taglio*. Le prime due trasformazioni, traslazione (Figura 3) e rotazione (Figura 4), consentono di preservare le distanze tra i punti e gli angoli tra gli elementi e pertanto rappresentano i sei spostamenti rigidi della struttura nello spazio euclideo. In letteratura, la dilatazione (Figura 5) e il taglio (Figura 6) vengono definite *trasformazioni affini non-banali* (nelle figure le linee tratteggiate rappresentano la configurazione della struttura tensegrity a seguito della trasformazione affine).

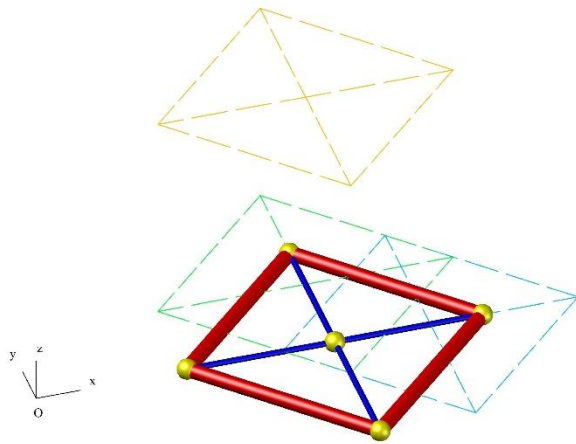


Figura 3. Moti rigidi di una struttura tensegrity: traslazione lungo l'asse x (ciano), traslazione lungo l'asse y (verde) e traslazione lungo l'asse z (arancio).

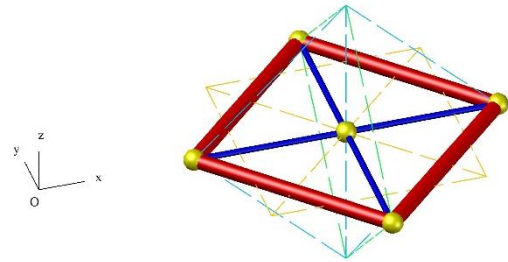


Figura 4. Moti rigidi di una struttura tensegrity: rotazione intorno all'asse x (ciano), rotazione intorno all'asse y (verde) e rotazione intorno all'asse z (arancio). (il centro di rotazione è stato inserito nel nodo centrale)

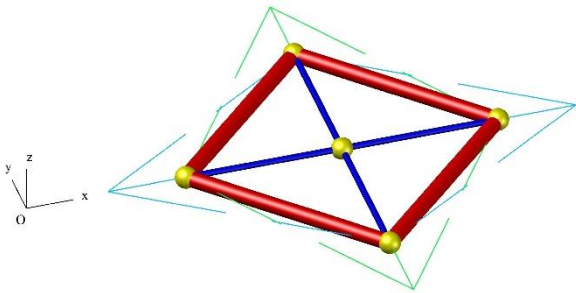


Figura 5. Trasformazioni affini non-banali di una struttura tensegrity: dilatazione lungo l'asse x (ciano) e dilatazione lungo l'asse y (verde).

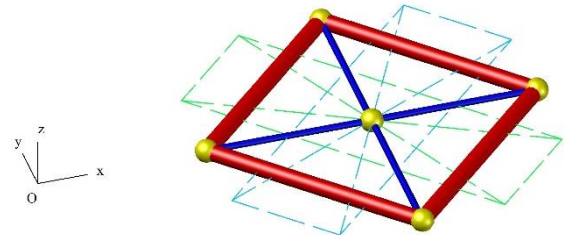


Figura 6. Trasformazioni affini non-banali di una struttura tensegrity: taglio nel piano xy (ciano) e taglio nel piano yz (verde).

Le trasformazioni affini non banali sono tra loro linearmente indipendenti; pertanto una generica trasformazione affine non banale $\mathbf{t}_{a,i} \in \mathbb{R}^{3n}$ ($i = dx, dy, dz, xy, xz, yz$), risulta come combinazione lineare delle sei trasformazioni affini non banali indipendenti, ossia:

$$\mathbf{t}_{a,i} = \beta_1 \mathbf{t}_{adx} + \beta_2 \mathbf{t}_{ady} + \beta_3 \mathbf{t}_{adz} + \beta_4 \mathbf{t}_{axy} + \beta_5 \mathbf{t}_{axz} + \beta_6 \mathbf{t}_{ayz}, \quad (21)$$

avendo indicato con $\beta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, 6$, l' i -esimo coefficiente della combinazione.²⁶

²⁶ In (21) i pedici dei vettori degli spostamenti nodali che definiscono le trasformazioni affini non banali indicano rispettivamente: dx , dilatazione lungo l'asse x ; dy , la dilatazione lungo l'asse y ; dz , la dilatazione lungo l'asse z ; xy , il taglio in xy ; xz , il taglio in xz e con yz , il taglio in yz .

Pertanto, assegnata la geometria della struttura tensegrity attraverso il vettore \mathbf{n} , e definito $\mathbf{t}_{a,i}$, il vettore che descrive la trasformazione affine del nodo i -esimo della struttura, risulta possibile determinare la nuova configurazione ottenuta a seguito della trasformazione mediante la relazione:

$$\mathbf{n}\mathbf{T}_a = \mathbf{n}_a, \quad (22)$$

avendo definito con $\mathbf{T}_a \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, la matrice diagonale che contiene tutti i vettori $\mathbf{t}_{a,i}$ che definiscono la trasformazione affine dei nodi, e con $\mathbf{n}_a \in \mathbb{R}^{3n}$ il vettore delle coordinate nodali che definisce la configurazione geometrica della struttura a trasformazione avvenuta.

Infine, per definire una struttura tensegrity non *degenere*²⁷ nello spazio euclideo tridimensionale è necessario che sia soddisfatta la seguente relazione:

$$\alpha_1 \mathbf{x} + \alpha_2 \mathbf{y} + \alpha_3 \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad (23)$$

esclusivamente per il vettore $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$, pari al vettore nullo, con $\alpha_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2, 3$). Si fa notare che una struttura tensegrity bidimensionale è certamente degenere nello spazio euclideo \mathbb{R}^3 , ma può non esserlo in \mathbb{R}^2 .

Si può infine definire la cosiddetta *matrice geometrica* $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{m \times 6}$, costruita a partire dai vettori delle differenze di coordinate e dalle relative forme diagonali, ossia:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{U}\mathbf{u}, \mathbf{V}\mathbf{v}, \mathbf{W}\mathbf{w}, \mathbf{U}\mathbf{v}, \mathbf{U}\mathbf{w}, \mathbf{V}\mathbf{w}]. \quad (24)$$

Tale matrice è evidentemente legata alla configurazione geometrica della struttura tensegrity e descrive la lineare dipendenza/indipendenza tra i vettori \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} ; in particolare e il rango della matrice geometrica è massimo, ossia $r_G = 6$, allora i vettori delle differenze delle coordinate sono linearmente indipendenti e, allo stesso tempo, sono linearmente indipendenti i vettori delle coordinate nodali; in tale condizione la struttura tensegrity risulta essere non degenere nello spazio euclideo tridimensionale.

Il rango di tale matrice riveste un ruolo fondamentale nello studio della stabilità di una struttura tensegrity, ed in particolare nell'analisi delle condizioni di super-stabilità.

2.2 STATICA

2.2.1 Metodi di ricerca della forma

Uno dei problemi cruciali nello studio delle strutture tensegrity è rappresentato dalla determinazione della *configurazione geometrica iniziale*. In letteratura tale problema è denominato *form-finding*.

La configurazione geometrica iniziale risulta univocamente definita allorquando si determinano le coordinate dei nodi e le auto-sollecitazioni negli elementi. Tali incognite del problema sono strettamente interdipendenti e la variazione, seppur minima di una delle due, può determinare un significativo cambiamento dell'altra. Tuttavia, fissando a priori la geometria della struttura, o in alternativa lo stato di

²⁷ Una struttura si definisce degenere nello spazio euclideo di dimensione d se giace in uno spazio con dimensione minore di d .

auto-sollecitazione negli elementi, è possibile risolvere il problema determinando univocamente la configurazione iniziale.

In accordo con la natura delle variabili, il problema di form-finding si può quindi declinare in due classi, duali tra loro:

- la *ricerca della forma*, nella quale si impone lo stato di auto-sollecitazione negli elementi e si determina la configurazione geometrica della struttura,
- la *ricerca della forza*, nella quale è nota la geometria della struttura ed è incognito lo stato di auto-sollecitazione.

Si osserva che nel primo caso la geometria che si ottiene dalla risoluzione del problema di form-finding può non essere compatibile con le esigenze architettoniche del progettista; nel secondo caso invece non si ha alcun controllo a priori sulla sollecitazione negli elementi della struttura.

Dal punto di vista architettonico e ingegneristico, risulta evidentemente più efficace l'ultimo approccio, con la necessità tuttavia di verificare a posteriori l'*ammissibilità*²⁸ della soluzione determinata. Ad ogni modo, in letteratura entrambi gli approcci vengono definiti "*form-finding problems*", riferendosi in tal senso alla ricerca della configurazione pre-sollecitata nella condizione di equilibrio.

I metodi che consentono di trovare una soluzione al problema della *ricerca della forma* sono molteplici e alcuni lavori offrono una rassegna critica di tali tecniche, si veda [9-11]. Sebbene i primi esempi di sistemi tensegrity siano stati realizzati attraverso soluzioni empiriche e intuitive perlopiù utilizzate da artisti e scultori [12], è necessario considerare metodi di ricerca della forma che siano efficaci dal punto di vista ingegneristico, in grado cioè di fornire una risoluzione analitica o numerica al problema.

È possibile pertanto classificare tali metodi in due categorie: metodi analitici e metodi numerici. La soluzione analitica può essere determinata solo per strutture tensegrity elementari o dotate di simmetria; per queste ultime l'analisi dell'intera struttura può essere semplificata considerando un numero limitato di nodi. I metodi numerici risultano particolarmente efficaci per lo studio di strutture tensegrity cosiddette *free-form*²⁹ e possono essere ulteriormente suddivisi in metodi geometrici, statici ed energetici.

I metodi geometrici fanno riferimento essenzialmente al Metodo della Densità di Forza (*Force Density Method* – FDM), proposto da H. J. Schek [13] nel 1974 e ripreso da K. Linkwitz [14] nel 1999, che trasforma il sistema di equazioni non lineari di equilibrio della struttura in un sistema di equazioni lineari introducendo il concetto di densità di forza degli elementi della struttura tensegrity.

In letteratura esistono numerosi contributi che hanno come oggetto lo sviluppo di metodologie efficaci per la risoluzione del problema di ricerca della forma attraverso l'applicazione del FDM, tra questi si possono citare: il lavoro di R. Connelly e M. Terrell [15], di J. Y. Zhang et al. [16-19] e quelli di H. Murakami e Y. Nishimura [20], di N. Vassart e R. Motro [21] e di S. Pellegrino e C. R. Calladine [22].

I metodi statici risolvono il problema della ricerca della forma analizzando l'equilibrio dei nodi o degli elementi. Tra questi si ricordano: il metodo del *rilassamento dinamico* (*dynamic relaxation method*)

²⁸ Il termine fa riferimento allo stato di auto-sollecitazione ammissibile che sarà definito in §2.2.4.

²⁹ Una struttura tensegrity si definisce *free-form* quando è generata da una connessione casuale di elementi.

sviluppato inizialmente per le strutture funicolari [23] e successivamente adattato per le strutture tensegrity [24,25], l'*approccio statico non lineare (nonlinear programming approach)* proposto da Pellegrino [26], il metodo delle *coordinate ridotte (reduced coordinate method)* introdotto da C. Sultan et al. [27]. Per un elenco più vasto e dettagliato si veda ad esempio [28].

I metodi energetici, infine, ricercano la configurazione geometrica stabile di una struttura tensegrity che presenta nella condizione di equilibrio un minimo locale dell'energia potenziale totale (attraverso, ad esempio, tecniche di ottimizzazione) [29].

In questo lavoro, si farà riferimento al metodo delle densità di forza per risolvere il problema della ricerca della forma; in particolare, assegnando la topologia e la configurazione geometrica della struttura si determineranno le densità di forza negli elementi nella condizione di auto-equilibrio iniziale.

2.2.2 Configurazione di equilibrio

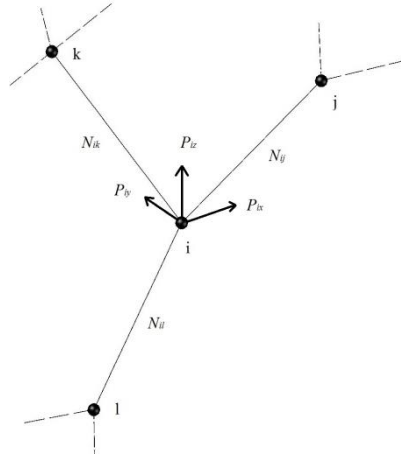
L'analisi statica è condotta considerando le seguenti ipotesi:

- Gli elementi sono rettilinei e con sezione trasversale costante, e sono connessi mediante cerniere,
- La connessione tra gli elementi è possibile solo alle loro estremità,
- La topologia e la configurazione geometrica sono note a priori,
- Il peso proprio degli elementi non è considerato,
- I fenomeni di instabilità globale e locale non sono considerati.

Una struttura tensegrity pertanto può essere considerata una struttura reticolare composta da puntoni in compressione e cavi (compatibilmente con il comportamento unilatero dell'elemento) necessariamente in trazione.

L'analisi della configurazione di equilibrio di una struttura tensegrity può essere condotta studiando l'equilibrio del generico nodo i -esimo non vincolato della struttura.

Si consideri il nodo i , appartenente all'insieme V , connesso ai nodi j , k e l mediante elementi non multipli. Si indichino con N_{ij} , N_{ik} e N_{il} gli sforzi normali negli elementi che connettono il nodo i , rispettivamente, al nodo j , k ed l ; positivi se di trazione. Siano inoltre $l_{k,j}$, $l_{k,k}$ e $l_{k,l}$ le rispettive lunghezze di tali elementi. In Figura 7 è riportato lo schema statico relativo a tale nodo.


 Figura 7. Schema statico relativo al nodo i -esimo.

Siano P_{ix} , P_{iy} e P_{iz} , rispettivamente, le componenti lungo le direzioni x , y e z della forza esterna $\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^3$ agente sul nodo i -esimo. Ciò detto, l'equilibrio del nodo può essere scritto come segue³⁰:

$$\begin{cases} \frac{N_{ij}(x_i - x_j)}{l_{k,j}} + \frac{N_{ik}(x_i - x_k)}{l_{k,k}} + \frac{N_{il}(x_i - x_l)}{l_{k,l}} = P_{ix} \\ \frac{N_{ij}(y_i - y_j)}{l_{k,j}} + \frac{N_{ik}(y_i - y_k)}{l_{k,k}} + \frac{N_{il}(y_i - y_l)}{l_{k,l}} = P_{iy} \\ \frac{N_{ij}(z_i - z_j)}{l_{k,j}} + \frac{N_{ik}(z_i - z_k)}{l_{k,k}} + \frac{N_{il}(z_i - z_l)}{l_{k,l}} = P_{iz} \end{cases} \quad (25)$$

Si indichi con q_k il rapporto tra lo sforzo normale nell'elemento k e la sua lunghezza, ossia:

$$q_k = \frac{N_k}{l_k}. \quad (26)$$

Il coefficiente (26) prende il nome di *coefficiente di densità di forza* ed è stato definito da Schek in [13]. Si indichi, ancora, con $\bar{\mathbf{n}} \in \mathbb{R}^m$, il vettore che raggruppa tutti gli sforzi normali negli elementi. Facendo uso della notazione matriciale, le (25) possono essere riscritte nella forma:

$$\begin{cases} (\mathbf{C}^T)_i \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{n}} = P_{ix} \\ (\mathbf{C}^T)_i \mathbf{V} \mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{n}} = P_{iy} \\ (\mathbf{C}^T)_i \mathbf{W} \mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{n}} = P_{iz} \end{cases} \quad (27)$$

Nelle (27) è stata indicata con $(\mathbf{C}^T)_i$ l' i -esima riga della trasposta della matrice di connessione, e con \mathbf{L}^{-1} la matrice diagonale il cui k -esimo elemento è pari a $1/l_k$.

L'equilibrio dell'intera struttura può essere quindi scritto in forma matriciale nel modo seguente:

³⁰ Le equazioni in (25) rappresentano l'equilibrio alla traslazione del nodo i -esimo, rispettivamente, lungo la direzione x , y e z .

$$\begin{cases} \mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{P}_x \\ \mathbf{C}^T \mathbf{V} \mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{P}_y, \\ \mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{L}^{-1} \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{P}_z \end{cases} \quad (28)$$

avendo indicato con \mathbf{P}_x , \mathbf{P}_y e \mathbf{P}_z , $\in \mathbb{R}^m$, rispettivamente i vettori delle componenti delle forze esterne agenti sui nodi nelle direzioni x , y e z .

In alternativa, ricordando la definizione di coefficiente di densità di forza, e indicando con $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^m$ il vettore che contiene l'insieme di tali coefficienti per tutti gli elementi della struttura, la (28) si può scrivere:

$$\begin{cases} \mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{q} = \mathbf{P}_x \\ \mathbf{C}^T \mathbf{V} \mathbf{q} = \mathbf{P}_y. \\ \mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{q} = \mathbf{P}_z \end{cases} \quad (29)$$

Richiamando una ben nota proprietà dell'algebra delle matrici³¹ e indicando con $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, la forma diagonale del vettore dei coefficienti della densità di forza, la (29) può essere riscritta come segue:

$$\begin{cases} \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{u} = \mathbf{P}_x \\ \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{v} = \mathbf{P}_y. \\ \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{w} = \mathbf{P}_z \end{cases} \quad (30)$$

Ricordando la (12) e la (13), è possibile scrivere la (30) tenendo conto della partizione della matrice di connessione in presenza di nodi liberi e di nodi vincolati.

$$\begin{cases} \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}^l \mathbf{x}^l + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}^f \mathbf{x}^f = \mathbf{P}_x \\ \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}^l \mathbf{y}^l + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}^f \mathbf{y}^f = \mathbf{P}_y. \\ \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}^l \mathbf{z}^l + \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}^f \mathbf{z}^f = \mathbf{P}_z \end{cases} \quad (31)$$

Si può definire la cosiddetta *matrice di densità di forza* $\mathbf{D}_s (= \mathbf{D}_s^l + \mathbf{D}_s^f) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, che può essere partizionata a sua volta in virtù della presenza dei nodi liberi e dei nodi vincolati.

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_s^l &= \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}^l \\ \mathbf{D}_s^f &= \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C}^f \end{aligned} \quad (32)$$

dove $\mathbf{D}_s^l \in \mathbb{R}^{n \times n_l}$, relativa ai nodi liberi, e $\mathbf{D}_s^f \in \mathbb{R}^{n \times n_f}$ è relativa ai nodi vincolati. Le (31) possono essere pertanto scritte anche facendo uso della matrice di densità di forza:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_s^l \mathbf{x}^l + \mathbf{D}_s^f \mathbf{x}^f = \mathbf{P}_x \\ \mathbf{D}_s^l \mathbf{y}^l + \mathbf{D}_s^f \mathbf{y}^f = \mathbf{P}_y. \\ \mathbf{D}_s^l \mathbf{z}^l + \mathbf{D}_s^f \mathbf{z}^f = \mathbf{P}_z \end{cases} \quad (33)$$

L'impiego della matrice di densità di forza trasforma le equazioni di equilibrio in una forma più efficace, in quanto è possibile la scrittura diretta degli elementi della matrice di densità di forza nota la topologia della struttura. Infatti l'elemento $D_{i,j}$ della matrice \mathbf{D}_s può essere determinato nel modo seguente:

³¹ Siano \mathbf{a} e \mathbf{b} due vettori in \mathbb{R}^n , e siano $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, e $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, le rispettive forme diagonali, è possibile verificare che sussiste la seguente relazione: $\mathbf{A}\mathbf{b}=\mathbf{B}\mathbf{a}$.

$$D_{i,j} = \begin{cases} \sum_{\Omega} q_k & \text{se } i = j \\ -q_k & \text{se } i \text{ è adiacente a } j \text{ rispetto all'elemento } k, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (34)$$

avendo indicato con Ω il sottoinsieme di E composto dagli elementi che risultano incidenti rispetto all'elemento k . Si noti che, per come è definita, la matrice \mathbf{D}_s risulta essere sempre quadrata e simmetrica. In assenza di carichi e nell'ipotesi di poter trascurare il peso proprio degli elementi, la struttura tensegrity risulta essere free-standing e pertanto non è necessario effettuare alcuna partizione delle matrici coinvolte nell'analisi poiché è nulla la matrice di densità di forza relativa ai nodi vincolati e la matrice \mathbf{D}_s coincide con quella relativa ai nodi liberi \mathbf{D}_s^l .

Ciò detto, la (33) diventa:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_s \mathbf{x} = \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_s \mathbf{y} = \mathbf{0} \\ \mathbf{D}_s \mathbf{z} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (35)$$

Se le densità di forza degli elementi sono assegnate o assunte *a priori*, le (35) rappresentano delle equazioni lineari omogenee nelle incognite \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} .

Determinato il rango della matrice di densità di forza r_{D_s} , è possibile determinare la dimensione n_{D_s} del corrispondente spazio nullo applicando il teorema del rango: $n_{D_s} = n - r_{D_s}$.

Si possono verificare i seguenti casi:

- $n_{D_s} = 0$, la (35) ammette solo la soluzione banale,
- $n_{D_s} = 1$, la (35) ammette come soluzione un generico punto dello spazio $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$,
- $n_{D_s} = 2$, la soluzione della (35) descrive una retta nello spazio passante per il punto $\bar{\mathbf{X}}$,
- $n_{D_s} = 3$, in tal caso la soluzione della (35) definisce un piano nello spazio che contiene il punto $\bar{\mathbf{X}}$.

Pertanto per $n_{D_s} \geq 4$ si ottiene una soluzione della (35) che descrive una struttura tensegrity non degenera nello spazio euclideo tridimensionale.

Richiamando inoltre la definizione di struttura non degenera nello spazio euclideo tridimensionale e la (23), si può fornire una definizione equivalente considerando, in alternativa, la nullità della matrice \mathbf{D}_s : una struttura tensegrity si dice non degenera nello spazio euclideo tridimensionale se la dimensione dello spazio nullo della matrice di densità di forza è maggiore o tutt'al più uguale a 4.

Si osservi, che tale condizione risulta essere condizione necessaria ma non sufficiente alla definizione di una struttura tensegrity non degenera nello spazio euclideo tridimensionale; la condizione di lineare indipendenza dei vettori delle coordinate nodali deve essere comunque rispettata.

2.2.3 Matrice di equilibrio e sottospazi vettoriali corrispondenti

In alternativa, sempre ricordando la (12) e la (13), le equazioni di equilibrio per la struttura free-standing possono essere riorganizzate come segue:

$$\begin{cases} \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{x} = \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{C} \mathbf{x}) \mathbf{q} = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{y} = \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{C} \mathbf{y}) \mathbf{q} = \mathbf{0} \\ \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{z} = \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{C} \mathbf{z}) \mathbf{q} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (36)$$

Si può definire la cosiddetta *matrice di equilibrio* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{3n \times m}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{C} \mathbf{x}) \\ \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{C} \mathbf{y}) \\ \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{C} \mathbf{z}) \end{bmatrix}. \quad (37)$$

In forma compatta, considerando la matrice di equilibrio \mathbf{A} , la (36) si scrive:

$$\mathbf{A} \mathbf{q} = \mathbf{0}. \quad (38)$$

Assegnata pertanto la configurazione geometrica della struttura in termini di coordinate nodali e di connettività degli elementi, attraverso la (38) è possibile, compatibilmente con il rango della matrice di equilibrio, determinare il vettore dei coefficienti di densità di forza nella condizione di auto-equilibrio della struttura.

Analogamente a quanto detto per la matrice di congruenza \mathbf{B} , è possibile fornire la seguente interpretazione meccanica dei quattro sottospazi fondamentali associati alla matrice di equilibrio \mathbf{A} :

- il sottospazio generato dalle colonne di \mathbf{A} (immagine di \mathbf{A} , $C(\mathbf{A})$), rappresenta lo spazio dei carichi esterni che possono essere equilibrati dalla struttura; tali carichi si definiscono *carichi compatibili*.
- il sottospazio nullo di \mathbf{A} (nucleo della matrice \mathbf{A} , $N(\mathbf{A})$), definisce le cosiddette *pre-sollecitazioni* o *auto-sollecitazioni*, ossia quelle sollecitazioni negli elementi in assenza di carichi esterni agenti sulla struttura.
- il sottospazio generato dalle righe di \mathbf{A} (immagine della trasposta di \mathbf{A} , $C(\mathbf{A}^T)$) spazio contiene le sollecitazioni negli elementi che risultano essere in equilibrio con i carichi compatibili definiti nell'immagine della matrice di equilibrio.
- il sottospazio nullo a sinistra di \mathbf{A} (nucleo della trasposta di \mathbf{A} , $\ker(\mathbf{A}^T)$ o $N(\mathbf{A}^T)$) rappresenta lo spazio dei carichi che non possono essere equilibrati dalla struttura, i cosiddetti *carichi incompatibili*.

Così come per la matrice di congruenza risulta importante determinare il nucleo, allo stesso modo è fondamentale per la matrice di equilibrio \mathbf{A} identificare lo spazio nullo, individuando così le pre-sollecitazioni negli elementi della struttura in equilibrio in assenza di carichi esterni.

Siano s_A e r_A , rispettivamente, la dimensione dello spazio nullo e il rango di \mathbf{A} , allora è possibile determinare la nullità della matrice di equilibrio attraverso il teorema del rango, ossia:

$$s_A = m - r_A. \quad (39)$$

Si ricorda che una struttura risulta essere staticamente indeterminata se s risulta essere diverso da zero. Applicando il Principio dei Lavori Virtuali, come è noto, è possibile dimostrare che esiste una relazione fra la matrice di congruenza e la matrice di equilibrio, ovvero:

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}^T. \quad (40)$$

Tale dualità consente di studiare i sottospazi fondamentali della matrice di equilibrio \mathbf{A} a partire da quelli della matrice di congruenza \mathbf{B} , ricordando che tali sottospazi sono complementi ortogonali nello spazio vettoriale degli elementi. Nella Tabella 1 si riporta una sintesi delle relazioni che intercorrono tra questi sottospazi.

	Dimensione	\mathbf{A}		\mathbf{B}
Spazio degli elementi \mathbb{R}^m	r_A	Spazio delle righe	=	Spazio delle colonne
		\perp		\perp
	s_A	Spazio nullo	=	Spazio nullo a sinistra
Spazio dei nodi \mathbb{R}^n	r_A	Spazio delle colonne	=	Spazio delle righe
		\perp		\perp
	m_i	Spazio nullo a sinistra	=	Spazio nullo

Tabella 1. I quattro sottospazi fondamentali associati alla matrice di equilibrio \mathbf{A} e alla matrice di congruenza \mathbf{B} . In questo schema il simbolo = indica che i due sottospazi coincidono, il simbolo \perp denota che i due sottospazi sono tra loro complementi ortogonali nei rispettivi spazi di definizione.

Lo studio del rango della matrice di equilibrio in relazione all'esistenza e all'unicità delle soluzioni dei sistemi delle equazioni di equilibrio (38) e di congruenza (17) permette di classificare una generica struttura in funzione della dimensione del nucleo di \mathbf{A} e della dimensione del nucleo di \mathbf{B} come riportato nella Tabella 2 [25].

Tipologia	s_A	m_i
Staticamente e cinematicamente determinata	0	0
Staticamente indeterminata e cinematicamente determinata	> 0	0
Staticamente determinata e cinematicamente indeterminata	0	> 0
Staticamente e cinematicamente indeterminata	> 0	> 0

Tabella 2. Classificazione delle strutture.

Le strutture tensegrity si collocano generalmente nell'ultima categoria, ovvero sono strutture staticamente e cinematicamente indeterminate in quanto posseggono s_A stati di auto-sollecitazione indipendenti e m_i meccanismi infinitesimi. Per tali meccanismi è tuttavia necessario determinarne l'ordine in ragione di una diversa risposta strutturale della struttura in termini di rigidità; un metodo matriciale efficace si può ritrovare in [30].

2.2.4 Stato di auto-sollecitazione ammissibile

Le equazioni (38) e (17) rappresentano dualmente il problema della ricerca della forma nella condizione iniziale, ovvero lo stato di auto-equilibrio in assenza di carichi esterni, ivi compresi quelli gravitazionali. Il problema statico, ossia la determinazione dello stato di pre-sollecitazione negli elementi, come già accennato può essere risolto studiando le proprietà dello spazio nullo della matrice di equilibrio \mathbf{A} .

La (38) ammette sempre almeno una soluzione (soluzione banale), pertanto il sottospazio vettoriale generato ha dimensione pari a s_A . In una struttura tensegrity tuttavia tale dimensione deve essere sempre maggiore di 1 affinché sia garantita l'esistenza di almeno uno stato di auto-sollecitazione indipendente $\mathbf{s}_i \in \mathbb{R}^m$, ($i = 1, 2, \dots, s_A$) nella condizione di equilibrio iniziale. Ciò equivale ad imporre:

$$s_A \geq 1. \quad (41)$$

Per studiare le proprietà della matrice di equilibrio del sistema è possibile introdurre la fattorizzazione in valori singolari di \mathbf{A} (*Singular Value Decomposition - SVD*), che sono le radici quadrate degli autovalori di $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, o equivalentemente di $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$, proposta in [26].

Tale decomposizione consente di fattorizzare \mathbf{A} come segue:

$$\mathbf{A} = \mathbf{\Gamma}\mathbf{\Sigma}\mathbf{\Psi}^T. \quad (42)$$

Ossia, è possibile determinare tre particolari matrici costruite nel modo seguente:

- $\mathbf{\Gamma} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, è la matrice ortogonale³² definita dai vettori colonna $\mathbf{\Gamma} = [\boldsymbol{\gamma}_1, \boldsymbol{\gamma}_2, \dots, \boldsymbol{\gamma}_{3n}]$,
- $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{3n \times m}$, è la matrice diagonale rettangolare i cui elementi non nulli sulla diagonale principale equivalgono ai valori singolari non nulli di \mathbf{A} .
- $\mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}^{m \times m}$, è la matrice ortogonale definita dai vettori colonna $\mathbf{\Psi} = [\boldsymbol{\psi}_1, \boldsymbol{\psi}_2, \dots, \boldsymbol{\psi}_m]$.

La decomposizione SVD può essere schematizzata pertanto:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Gamma}_{3n \times r_A} & \mathbf{\Gamma}_{3n \times m_i} \end{bmatrix}}_{3n \times 3n} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{r_A \times r_A} & \mathbf{0}_{r_A \times (m-r_A)} \\ \mathbf{0}_{(3n-r_A) \times r_A} & \mathbf{0}_{(3n-r_A) \times (m-r_A)} \end{bmatrix}}_{3n \times m} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Psi}_{r_A \times m} \\ \mathbf{\Psi}_{(m-s_A) \times m} \end{bmatrix}}_{m \times m}$$

³² Una matrice $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ si definisce ortogonale se vale la relazione $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{I}$

I vettori γ_i , ($i = 1, \dots, 3n$), si denominano vettori singolari di sinistra, mentre i vettori ψ_i , ($i = 1, \dots, m$), prendono il nome di vettori singolari di destra. Si può dimostrare che i vettori singolari di sinistra sono gli autovettori di $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$, mentre i vettori ψ_i rappresentano gli autovettori di $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$.

Noto il rango r_A della matrice di equilibrio, si ha che i valori singolari σ_i ($i = 1, \dots, m$) di \mathbf{A} sono tali per cui risulta verificato il seguente ordinamento:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_{r_A} > \sigma_{r_A+1} = \dots = \sigma_m = 0, \quad (43)$$

pertanto la (42) si può esplicitare nelle componenti delle matrici ridotte³³ della decomposizione in valori:

$$\mathbf{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1,r_A} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2,r_A} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \gamma_{3n,1} & \gamma_{3n,2} & \dots & \gamma_{3n,r_A} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Gamma}^r} \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_{r_A} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Sigma}^r} \underbrace{\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \dots & \psi_{1m} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \dots & \psi_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{r_A,1} & \psi_{r_A,2} & \dots & \psi_{r_A,m} \end{bmatrix}}_{\mathbf{\Psi}^{rT}}. \quad (44)$$

Dalla (42) segue che:

$$\mathbf{A}\mathbf{\Psi}_i = \begin{cases} \sigma_i \gamma_i & i = 1, \dots, r_A \\ \mathbf{0} & i = r_A + 1, \dots, m \end{cases}, \quad (45)$$

e anche:

$$\mathbf{A}^T \gamma_i = \begin{cases} \sigma_i \psi_i & i = 1, \dots, r_A \\ \mathbf{0} & i = r_A + 1, \dots, 3n \end{cases}, \quad (46)$$

Da (45) e (46) risulta che è possibile partizionare le matrici $\mathbf{\Gamma}$ e $\mathbf{\Psi}$ nel modo seguente:

$$\mathbf{\Gamma} = \left[\gamma_1, \dots, \gamma_{r_A} \mid \mathbf{d}_{m_1}, \dots, \mathbf{d}_{m_{m_i}} \right], \quad (47)$$

$$\mathbf{\Psi} = \left[\psi_1, \dots, \psi_{r_A} \mid \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_{s_A} \right], \quad (48)$$

dove \mathbf{d}_{m_j} ($j = 1, \dots, m_i$) e \mathbf{s}_i ($i = 1, \dots, s_A$) rappresentano, rispettivamente, i meccanismi infinitesimi che generano il nucleo di \mathbf{B} e gli stati di auto-sollecitazione indipendenti che generano lo spazio nullo di \mathbf{A} .

Sebbene tale decomposizione della matrice di equilibrio risulta essere onerosa in termini computazionali rispetto ad altre possibili decomposizioni, essa rappresenta un metodo efficace per determinare il nucleo di \mathbf{A} .

In generale, infatti, per una struttura tensegrity, staticamente indeterminata, esistono s_A stati di auto-sollecitazione indipendenti, pertanto un generico stato di auto-sollecitazione equilibrato $\mathbf{q}_0 \in \mathbb{R}^m$ può essere espresso come combinazione lineare di tali vettori indipendenti, ovvero:

$$\mathbf{q}_0 = \alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 + \dots + \alpha_{s_A} \mathbf{s}_{s_A}, \quad (49)$$

³³ Le matrici ridotte della decomposizione in valori singolari sono: $\mathbf{\Gamma}^r \in \mathbb{R}^{3n \times r_A}$, $\mathbf{\Sigma}^r \in \mathbb{R}^{r_A \times r_A}$, $\mathbf{\Psi}^r \in \mathbb{R}^{m \times r_A}$.

avendo indicato con α_i ($i = 1, \dots, s_A$) il generico coefficiente della combinazione. Si fa presente tuttavia che tale vettore potrebbe non essere compatibile con il comportamento unilatero degli elementi: puntoni in compressione e cavi necessariamente in trazione.

Le strutture staticamente indeterminate, ivi comprese le strutture tensegrity, che presentano proprietà di simmetria possono essere analizzate considerando una partizione dell'insieme E della struttura. In particolare, elementi in posizione simile possono essere considerati appartenenti allo stesso gruppo e aventi la stessa densità di forza.

La più semplice partizione di una struttura tensegrity è rappresentata dagli insiemi S e C precedentemente citati. Il numero dei gruppi cresce con la complessità della struttura.

Per determinare lo stato di auto-sollecitazione equilibrato compatibile con le proprietà di simmetria della struttura è possibile fare riferimento al lavoro di H. C. Tran e J. Lee [31]

Sia h il numero dei gruppi compatibili con le proprietà di simmetria della struttura, il generico stato di auto-sollecitazione equilibrato può essere alternativamente scritto:

$$\mathbf{q}_0 = \{q_1, \dots, q_2, \dots, q_h\}^T, \quad (50)$$

avendo indicato con q_i ($i = 1, \dots, h$) la densità di forza dell'elemento appartenente al gruppo i -esimo. L'equazione (50) può essere riscritta in forma matriciale:

$$\mathbf{q}_0 = [\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_h] \{q_1, q_2, \dots, q_h\}^T, \quad (51)$$

dove le componenti del vettore $\bar{\mathbf{e}}_i \in \mathbb{R}^m$ sono poste rispettivamente pari a 1 in corrispondenza dell'elemento appartenente al gruppo i -esimo e 0 in ogni altra posizione.

Da ciò segue:

$$\mathbf{q}_0 = \alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 + \dots + \alpha_{s_A} \mathbf{s}_{s_A} = [\bar{\mathbf{e}}_1, \bar{\mathbf{e}}_2, \dots, \bar{\mathbf{e}}_h] \{q_1, q_2, \dots, q_h\}^T. \quad (52)$$

L'equazione (52) conduce a:

$$\alpha_1 \mathbf{s}_1 + \alpha_2 \mathbf{s}_2 + \dots + \alpha_{s_A} \mathbf{s}_{s_A} + (-q_1 \bar{\mathbf{e}}_1) + (-q_2 \bar{\mathbf{e}}_2) + \dots + (-q_h \bar{\mathbf{e}}_h) = \mathbf{0}, \quad (53)$$

che può essere riscritta in forma compatta:

$$\bar{\mathbf{G}} \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0}. \quad (54)$$

Nell'equazione (54) la matrice $\bar{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{m \times (s_A + h)}$ e il vettore $\bar{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{s_A + h}$ sono costruiti come segue:

$$\bar{\mathbf{G}} = [\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \dots, \mathbf{s}_{s_A}, -\bar{\mathbf{e}}_1, -\bar{\mathbf{e}}_2, \dots, -\bar{\mathbf{e}}_h], \quad (55)$$

$$\bar{\mathbf{a}} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s_A}, q_1, q_2, \dots, q_h\}. \quad (56)$$

Le colonne della matrice $\bar{\mathbf{G}}$ rappresentano pertanto gli s_A stati di auto-sollecitazione indipendenti e gli h vettori $\bar{\mathbf{e}}_i$, mentre il vettore $\bar{\mathbf{a}}$ raggruppa i coefficienti della combinazione lineare (49) e le densità di forza degli elementi degli h gruppi. Lo studio del rango di tale matrice consente di determinare lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione (54); in particolare definito $r_{\bar{\mathbf{G}}}$ il rango di $\bar{\mathbf{G}}$ se ne può computare la dimensione del nucleo utilizzando la seguente espressione.

$$\text{null}_{\bar{G}} = (s_A + h) - r_{\bar{G}}. \quad (57)$$

Per quanto detto in precedenza, il termine $(s_A + h)$ risulta essere strettamente maggiore di 3. Il valore $\text{null}_{\bar{G}}$ restituisce pertanto il numero dei vettori linearmente indipendenti che generano lo spazio nullo della matrice \bar{G} ; in funzione di tale valore si possono presentare tre differenti casi:

- a). $\text{null}_{\bar{G}} = 1$,
- b). $\text{null}_{\bar{G}} = 0$,
- c). $\text{null}_{\bar{G}} > 1$.

Nel caso a) la struttura tensegrity ha un solo stato di auto-sollecitazione che è compatibile con le condizioni di equilibrio e con le proprietà di simmetria del sistema; tale *stato di auto-sollecitazione simmetrico* $\bar{\mathbf{q}}_s \in \mathbb{R}^m$ viene definito in letteratura *integral self-stress mode* [32].

Se si verifica il caso b) la (54) ammette solo la soluzione banale, pertanto la struttura tensegrity non è in equilibrio con tali condizioni di simmetria; affinché la dimensione dello spazio nullo di \bar{G} risulti pari ad 1 è necessario aumentare il numero dei gruppi e quindi partizionare ulteriormente l'insieme E degli elementi del sistema.

L'ultimo caso c) si verifica quando esiste più di uno stato di auto-sollecitazione simmetrico compatibile con le equazioni di equilibrio del sistema; in tal caso per rientrare nel caso a) è necessario diminuire il numero dei gruppi di simmetria.

Per risolvere la (54) è possibile decomporre in valori singolari la matrice \bar{G} ottenendo in tal modo le soluzioni in termini di $\bar{\mathbf{a}}$, ossia ricavando i coefficienti della combinazione lineare (49) e le densità di forza negli elementi dei gruppi di simmetria definiti in (50).

Tuttavia, la soluzione determinata potrebbe risultare non accettabile perché non compatibile con il comportamento unilatero degli elementi, ovvero potrebbero risultare alcuni cavi compressi e taluni puntoni tesi.

Sebbene uno sforzo di trazione nei puntoni può essere compatibile con la rigidità dell'elemento ma non con la tipologia dello stesso, uno sforzo di compressione nei cavi, al contrario, è evidentemente incompatibile con la natura dell'elemento. Se lo stato di auto-sollecitazione simmetrico risulta compatibile con il comportamento meccanico degli elementi esso viene definito *stato di auto-sollecitazione ammissibile* $\bar{\mathbf{q}}_a \in \mathbb{R}^m$ (*feasible self-stress mode*). Uno stato di auto-sollecitazione ammissibile rispetta contemporaneamente le condizioni di equilibrio della struttura, le proprietà di simmetria del sistema ed è in accordo con la natura degli elementi, ovvero puntoni in compressione e cavi necessariamente in trazione. Nella Tabella 3 si riporta una sintesi di quanto appena esposto.

Condizione	Equazione	Stato di auto-sollecitazione
Equilibrio	$\mathbf{A}\mathbf{q} = \mathbf{0}$	\mathbf{s}_i indipendente
	+	
Simmetria	$\{q_1, \dots, q_2, \dots, q_h\}^T$	$\bar{\mathbf{q}}_s$ simmetrico
	+	
Comportamento unilatero degli elementi	$q_s < 0, q_c > 0$	$\bar{\mathbf{q}}_a$ ammissibile

Tabella 3. Classificazione degli stati di auto-sollecitazione.

Si fa notare inoltre che nel caso si verifichi la condizione c), ovvero esiste più di uno stato di auto-sollecitazione simmetrico per la struttura nella condizione di equilibrio, è possibile costruire una combinazione lineare di tale pluralità di vettori:

$$\bar{\mathbf{q}}_s = \alpha_1 \bar{\mathbf{q}}_{s_1} + \alpha_2 \bar{\mathbf{q}}_{s_2} + \dots + \alpha_{null_G} \bar{\mathbf{q}}_{s_{null_G}}, \quad (58)$$

mediante i coefficienti α_i ($i = 1, \dots, null_G$), non tutti nulli. Affinché tale combinazione lineare restituisca come risultato uno stato di auto-sollecitazione ammissibile si può impostare un problema di ottimizzazione le cui variabili sono rappresentate dagli α_i coefficienti reali della combinazione (58). A tal proposito si possono citare, tra gli altri, i lavori di K. Koohestani [33] e di X. Xu e Y. Z. Luo [34].

In definitiva, noto lo stato di auto-sollecitazione ammissibile per la struttura tensegrity in esame, dalla (26) è possibile ottenere il vettore degli sforzi normali negli elementi $\bar{\mathbf{n}}$:

$$\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{q}}_a. \quad (59)$$

È possibile pertanto definire un algoritmo di analisi dello stato di auto-sollecitazione ammissibile per una struttura tensegrity:

1. Si definisce la matrice di connessione \mathbf{C} mediante la (9),
2. Si descrive la geometria della struttura mediante i vettori delle coordinate nodali e delle lunghezze degli elementi, \mathbf{x} , \mathbf{y} , \mathbf{z} e \mathbf{l} ,
3. Si calcola la matrice di equilibrio \mathbf{A} con la (37) e si studia la condizione di auto-equilibrio mediante la (38),
4. Attraverso la (20) e la (39) si calcolano gli m_i meccanismi infinitesimi che generano il nucleo di \mathbf{B} e gli s_A stati di auto-sollecitazione indipendenti che giacciono nello spazio nullo di \mathbf{A} ,
 - 4.1. $s_A = 1$, esiste un solo stato di auto-sollecitazione indipendente \mathbf{s}_1 e tale stato è anche compatibile col comportamento unilatero degli elementi, ossia rappresenta lo stato di auto-sollecitazione ammissibile $\mathbf{s}_1 \equiv \bar{\mathbf{q}}_a$,
 - 4.2. $s_A > 1$, esistono s_A stati di auto-sollecitazione indipendenti e in generale nessuno di questi risulta compatibile con la rigidità unilatera degli elementi

4.2.1. Considerando le proprietà di simmetria della struttura si determina la matrice $\bar{\mathbf{G}}$ e si risolve (54),

4.2.2. Si determina la dimensione $null_{\bar{\mathbf{G}}}$ del nucleo di $\bar{\mathbf{G}}$,

4.2.2.1. Se $null_{\bar{\mathbf{G}}} = 1$, la struttura ammette un solo stato di auto-sollecitazione simmetrico $\bar{\mathbf{q}}_s$, se tale stato inoltre soddisfa la condizione unilaterale del comportamento meccanico degli elementi allora risulta che $\bar{\mathbf{q}}_s \equiv \bar{\mathbf{q}}_a$,

4.2.2.2. Se $null_{\bar{\mathbf{G}}} = 0$, è necessario aumentare il numero dei gruppi che descrivono la simmetria della struttura ritornando al 4.2.1,

4.2.2.3. Se $null_{\bar{\mathbf{G}}} > 1$, in tal caso bisogna ridurre il numero h dei gruppi e ritornare al 4.2.1, o in alternativa è possibile impostare un problema di ottimizzazione a variabili multiple considerando la (58),

5. Attraverso la (59) si determinano gli sforzi normali negli elementi nello stato di auto-sollecitazione ammissibile.

Nell'algoritmo appena descritto si considera fissata la configurazione geometrica della struttura tensegrity, seppur parametricamente, in termini di coordinate nodali e di topologia del sistema, e si risolve il problema di ricerca della forma determinando le densità di forza degli elementi nello stato di auto-sollecitazione ammissibile. Nel caso di strutture tensegrity che non presentano proprietà di simmetria, definite tensegrity *free-form*, tale algoritmo non è evidentemente utilizzabile, tuttavia esistono metodi numerici che consentono di determinare lo stato di auto-sollecitazione ammissibile per tali strutture tensegrity [35].

2.3 CONCLUSIONI

Una struttura tensegrity è composta da puntoni compressi e cavi necessariamente tesi anche in assenza di carichi esterni, seppur gravitazionali. In questa condizione, tali sollecitazioni vengono definite auto-sollecitazioni o pre-sollecitazioni. L'interazione tra le forze di compressione e quelle di trazione determina la configurazione di auto-equilibrio per la struttura.

Tuttavia tale configurazione non può essere assegnata liberamente poiché la pre-sollecitazione negli elementi e la geometria della struttura sono strettamente correlate tra loro. Ciò non avviene, ad esempio, nelle usuali travature reticolari, di cui le strutture tensegrity costituiscono una particolare classe, in cui gli elementi non risultano pre-sollecitati nella configurazione iniziale.

Si deve considerare inoltre che le strutture tensegrity sono generalmente cinematicamente indeterminate e pertanto in assenza di pre-sollecitazione negli elementi la struttura non può raggiungere la configurazione di auto-equilibrio, che tra le possibili configurazioni deve risultare stabile.

Nel capitolo seguente si introdurranno i concetti relativi alla stabilità delle strutture tensegrity con particolare riferimento alle condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità della configurazione pre-sollecitata e per la super-stabilità di una struttura tensegrity.

Bibliografia

- [1] J. CLERK MAXWELL, *On the Calculation of the Equilibrium and Stiffness of Frames*, “Philosophical Magazine”, 1864, 27(182), pp. 294-299.
- [2] C. R. CALLADINE, *Buckminster Fuller's “Tensegrity” structures and Clerk Maxwell's rules for the construction of stiff frames*, in “International Journal of Solids and Structures”, 1978, 14, pp. 161-172.
- [3] I. J. OPPENHEIM, W.O. WILLIAMS, *Geometric Effects in an Elastic Tensegrity Structure*, in “Journal of elasticity and the physical science of solids”, 2000, 59, pp 51-65.
- [4] B. ROTH, W. WHITELEY, *Tensegrity Frameworks*, “Transactions Of The American Mathematical Society”, 1981, 265(2), pp. 419-446.
- [5] A. KAVEH, *Structural Mechanics: Graph and Matrix Methods* 3rd ed., Research Studies Press, 2004.
- [6] R. E. SKELTON, M. DE OLIVEIRA, *Tensegrity Systems*, Springer, 2009.
- [7] S. PELLEGRINO, *Analyses of prestressed mechanisms*, in “International Journal of Solids and Structures”, 1990, 26, pp. 1329-1350.
- [8] G. STRANG, *Linear Algebra and Its Applications* 4th Edition, Brooks Cole India, 2005.
- [9] S. H. JUAN, J. M. MIRATS TUR, *Tensegrity frameworks: static analysis review*, in “Mechanism and Machine Theory”, 2008, 43(7), pp. 859-881.
- [10] A.G. TIBERT, S. PELLEGRINO, *Review of form-finding methods for tensegrity structures*, in “International Journal of Space Structures”, 2003, 18(4), pp. 209-223.
- [11] A. HARICHANDRAN, I. Y. SREEVALLI, *Form-Finding of Tensegrity Structures based on Force Density Method*, in “Indian Journal of Science and Technology”, 2016, 9(24), pp. 1-6.
- [12] K. SNELSON, Kenneth Snelson: Art and Ideas, 2013, online <http://kennethsnelson.net/>.
- [13] H. J. SCHEK, *The force density method for form finding and computation of general networks*, in “Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering”, 1974, 3, pp. 115-134.
- [14] K. LINKWITZ, *Formfinding by the “direct approach” and pertinent strategies for the conceptual design of prestressed and hanging structures*, in “International Journal of Space Structures”, 1999, 14 (2), pp. 73-87.
- [15] R. CONNELLY, M. TERRELL, *Globally rigid symmetric tensegrities*, in “Structural Topology”, 1995, 21, pp. 59-78.
- [16] J. Y. ZHANG, S. D. GUEST, M. OHSAKI., *Symmetric prismatic tensegrity structures: Part I. Configuration and stability*, in “International Journal of Solids and Structures”, 2009, 46, pp. 1-14.
- [17] J. Y. ZHANG, S. D. GUEST, M. OHSAKI, *Symmetric prismatic tensegrity structures: Part II. Symmetry-adapted formulations*, in “International Journal of Solids and Structures”, 2009, 6, pp. 15-30.
- [18] J. Y. ZHANG, M. OHSAKI, *Self-equilibrium and stability of regular truncated tetrahedral tensegrity structures*, in “J. Mech. Phys. Solids”, 2012, 60, pp. 1757-1770.
- [19] J. Y. ZHANG, M. OHSAKI, Y. KANNO, *A direct approach to design of geometry and forces of tensegrity systems*, in “International Journal of Solids and Structures”, 2006, 43, pp. 2260-2278.
- [20] H. MURAKAMI, Y. NISHIMURA, *Static and dynamic characterization of regular truncated icosahedral and dodecahedral tensegrity modules*, in “International Journal of Solids and Structures”, 2001, 38, pp. 9359-9381.

- [21] N. VASSART, R. MOTRO, *Multiparametered formfinding method: application to tensegrity systems*, in “International Journal of Space Structures”, 1999, 14(2), pp. 147-154.
- [22] S. PELLEGRINO, C. R. CALLADINE, *Matrix analysis of statically and kinematically indeterminate frameworks*, in “International Journal of Solids and Structures”, 1986, 22(4), pp. 409-428.
- [23] M. R. BARNES, *Form finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation*, in “International Journal of Space Structures”, 1999, 14(2), pp. 89-104.
- [24] L. ZHANG, B. MAURIN, R. MOTRO, *Form-finding of nonregular tensegrity systems*, in “Journal of Structural Engineering”, 2006, 132(9), pp. 1435-1440.
- [25] R. MOTRO, *Forms and forces in tensegrity systems*, in “Proceedings of Third International Conference on Space Structures”, 1984, pp. 180-185.
- [26] S. PELLEGRINO, *Structural computations with the singular value decomposition of the equilibrium matrix*, in “International Journal of Solids and Structures”, 1993, 30(21), pp. 3025-3035.
- [27] C. SULTAN, M. CORLESS, R. E. SKELTON, *The prestressability problem of tensegrity structures: some analytical solutions*, in “International Journal of Solids and Structures”, 2001, 38(30-31), pp. 5223-5252.
- [28] K. KOOHESTANI, S. D. GUEST, *A new approach to the analytical and numerical form-finding of tensegrity structures*, in “International Journal of Solids and Structures”, 2013, 50, pp. 2995-3007.
- [29] M. OHSAKI, J. Y. ZHANG, T. TAGUCHI, *Form-finding and stability analysis of tensegrity structures using nonlinear programming and fictitious material properties*, in “Proceedings of the International Conference on Computational Methods”, 2014.
- [30] G. SALERNO, *How to recognize the order of infinitesimal mechanisms: A numerical approach*, in “International Journal for Numerical Methods in Engineering”, 1992, 35(7), pp. 1351-1395.
- [31] H. C. TRAN, J. LEE, *Form-finding of tensegrity structures with multiple states of self-stress*, in “Acta Mechanica”, 2011, 222, pp. 131-147.
- [32] Y. CHEN, J. FENG, R. MA, Y. ZHANG, *Efficient Symmetry Method for Calculating Integral Prestress Modes of Statically Indeterminate Cable-Strut Structures*, in “Journal of Structural Engineering”, 2015, 141(10), pp. 04014240-1 - 04014240-11.
- [33] K. KOOHESTANI, *Form-finding of tensegrity structures via genetic algorithm*, in “International Journal of Solids and Structures”, 2012, 49(5), pp. 739-747.
- [34] X. XU, Y. Z. LUO, *Force finding of tensegrity systems using simulated annealing algorithm*, in “J. Struct. Eng.”, 2010, 136, pp. 1027-1031.
- [35] H. C. Tran, J. Lee, *Determination of a unique configuration of free-form tensegrity structures*, in “Acta Mechanica”, 2011, 220, pp. 331-348.

Capitolo 3

STABILITÀ DEI SISTEMI TENSEGRITY

In questo capitolo si specializzano i concetti fondamentali della stabilità delle strutture al caso delle strutture tensegrity e si analizzano le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità di una struttura tensegrity. Si richiamano inoltre le definizioni di stabilità della configurazione pre-sollecitata, di super-stabilità e di multi-stabilità di una struttura tensegrity evidenziando gli aspetti meccanici legati a tali questioni. Tale disamina è riferita, in particolar modo, alla matrice di rigidezza della struttura, che viene dedotta in termini di matrice di equilibrio e di matrice di densità di forza.

3.1 LA STABILITÀ DELLE STRUTTURE: CONCETTI FONDAMENTALI

In termini intuitivi la stabilità di una struttura è intesa come la capacità del sistema, soggetto a piccole perturbazioni, di ritornare nella configurazione originale una volta che queste hanno cessato la loro azione [1]. Tale concetto viene spesso spiegato con riferimento all'analisi della qualità dell'equilibrio di un sistema meccanico costituito da una sfera soggetta alla sola forza di gravità e poggiante su una superficie curva, come mostrato in Figura 8.

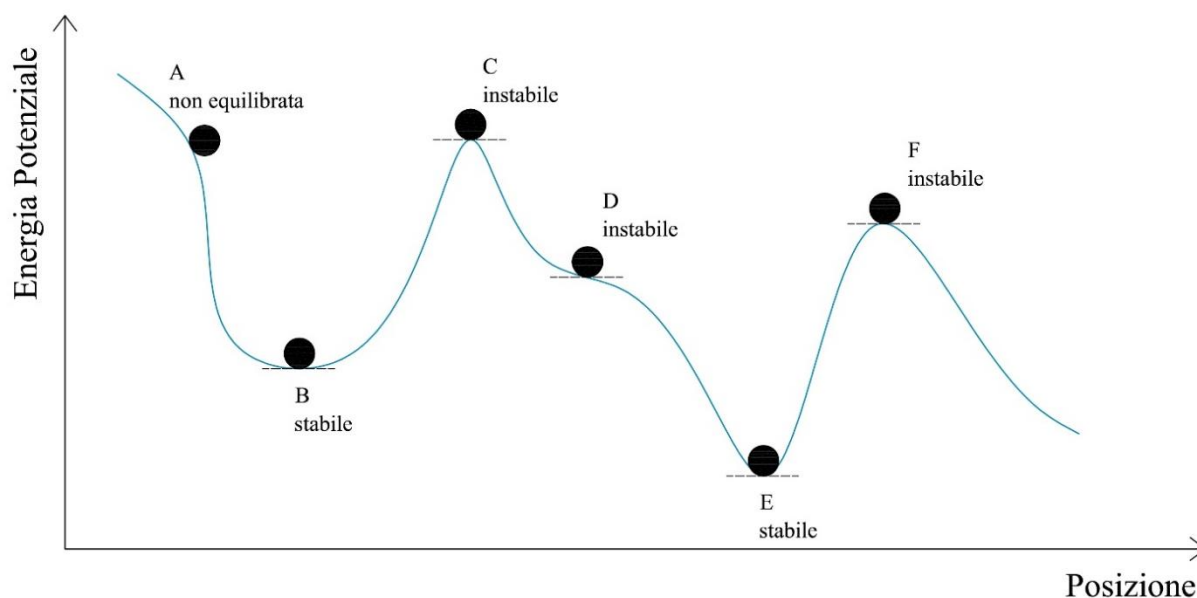


Fig. 8. Stabilità di una sfera soggetta alla sola forza di gravità.

La sfera, soggetta alla condizione di carico gravitazionale tende a muoversi verso il basso, minimizzando l'energia potenziale che dipende linearmente dalla variazione di quota della stessa. Si assume quindi che la

curva in figura descrive anche l'andamento dell'energia potenziale della sfera soggetta alla sola forza di gravità.

Nei tratti in cui la curva presenta tangente orizzontale, la sfera resta in quiete se non interviene nessuna causa esterna (piccole perturbazioni) a modificarne lo stato, ossia la sfera si trova in una posizione di equilibrio.

Tuttavia è necessario studiare la qualità dell'equilibrio in una determinata configurazione, verificando il comportamento del sistema a piccole perturbazioni della configurazione equilibrata.

Dal punto di vista matematico, la condizione di equilibrio si ottiene nella condizione di gradiente nullo dell'energia potenziale, mentre la condizione di stabilità implica che l'energia potenziale presenti un minimo locale nella configurazione.

Evidentemente la stabilità è una condizione più restrittiva rispetto alla condizione di equilibrio, ovvero si può affermare che la stabilità implica l'equilibrio, ma l'equilibrio non implica necessariamente la stabilità. Ciò detto, rispetto alla Fig. 8, è possibile valutare le condizioni di stabilità e di equilibrio della:

- A. La sfera tende a muoversi verso una condizione di minima energia potenziale anche senza l'azione di una forza esterna. Ne consegue che tale posizione non risulta essere di equilibrio, e pertanto non è valutabile l'aspetto della stabilità del sistema.
- B. La sfera si trova in una parte della curva caratterizzata da gradiente nullo, ciò identifica tale posizione come condizione di equilibrio. Piccole perturbazioni alterano la posizione della sfera che tuttavia tende a ritornare nella condizione originale che è un minimo locale dell'energia potenziale, pertanto l'equilibrio in tale condizione risulta essere stabile. Le stesse considerazioni possono essere fatte per la configurazione E.
- C. Il sistema se non disturbato è in equilibrio (gradiente nullo dell'energia potenziale); tuttavia piccole perturbazioni inducono un cambiamento di configurazione: la sfera, inizialmente in un punto di massimo, tende quindi a ricercare la condizione di minimo dell'energia potenziale. L'equilibrio in esame pertanto risulta instabile, così come accade nella posizione F.
- D. In questa posizione la sfera è in equilibrio, tuttavia per perturbazioni in particolari direzioni, il sistema tende a muoversi verso il basso alla ricerca di una condizione di minimo dell'energia potenziale, quindi l'equilibrio risulta instabile.

Se le perturbazioni sono sufficientemente grandi, la sfera può passare da una configurazione stabile ad un'altra ancora stabile e viceversa. La presenza di molteplici minimi dell'energia potenziale caratterizza i sistemi cosiddetti *multi-stabili* [2-4]].

Trasponendo l'analisi ai sistemi elastici, ai fini di valutare la stabilità dell'equilibrio, è possibile considerare l'energia potenziale totale della struttura, o, in assenza di carichi esterni, l'energia di deformazione del sistema; in entrambi i casi si studiano le condizioni di minimo di tali funzioni.

3.2 STABILITÀ DI UNA STRUTTURA TENSEGRITY

Gli n nodi di una struttura tensegrity solitamente sono suscettibili di grandi spostamenti, in particolar modo, nelle direzioni dei meccanismi del sistema. Tuttavia, le deformazioni degli elementi associate a tali spostamenti sono piccole, ciò consente di studiare usualmente una struttura tensegrity considerando grandi spostamenti nodali con piccole deformazioni degli elementi.

Gli spostamenti nodali inducono nella struttura un cambiamento della configurazione geometrica; in particolare, si passa da una configurazione iniziale di riferimento $\mathbf{X}_0 \in \mathbb{R}^{3n}$ ad una configurazione attuale $\mathbf{X}_1 \in \mathbb{R}^{3n}$ seguendo un particolare percorso nello spazio delle configurazioni definito dal vettore $\Delta\mathbf{X}$, tale che:

$$\mathbf{X}_1 = \mathbf{X}_0 + \Delta\mathbf{X}, \quad (60)$$

avendo definito con \mathbf{X}_i :

$$\mathbf{X}_i = (x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n, z_1, z_2, \dots, z_n)^T, \quad (61)$$

la generica configurazione congruente che la struttura può assumere nello spazio euclideo tridimensionale. Per quanto detto nel capitolo precedente, il vettore \mathbf{X}_i deriva dalla vettorializzazione della trasposta della matrice \mathbf{N} nella configurazione i -esima, ovvero:

$$\mathbf{X}_i = \text{vec}(\mathbf{N}^T) = (\mathbf{x}^T, \mathbf{y}^T, \mathbf{z}^T)^T. \quad (62)$$

Il cambiamento di configurazione è legato sia al sistema di forze esterne agenti sui nodi, sia alle forze interne negli elementi. In un sistema conservativo il lavoro compiuto dalle forze, sia esterne che interne, per un qualunque cambiamento di configurazione dipende esclusivamente dalla configurazione di partenza o iniziale, e dalla configurazione di arrivo o finale. In tale contesto è possibile definire la funzione *Energia Potenziale Totale* Π del sistema:

$$\Pi = \Pi_E - \Pi_w, \quad (63)$$

avendo indicato con Π_E l'*Energia di deformazione* immagazzinata dal sistema, e con Π_w il lavoro compiuto dai carichi esterni nel cambiamento di configurazione. La (63) è definita in generale per *transizioni tra due qualsiasi configurazioni congruenti* [1].

L'energia potenziale totale è definita come variazione nel passaggio fra deformazioni congruenti, ovvero è definita a meno di una costante che ne rappresenta arbitrariamente in una configurazione *particolare*. Si può considerare in genere tale particolare configurazione di *referimento* coincidente con l'origine dello spazio delle configurazioni e in tale configurazione imporre $\Pi_0 = 0$; ciò detto, si ha $\Pi = \Delta\Pi$.

In genere, l'energia potenziale totale è una funzione sufficientemente regolare da poter ammettere uno sviluppo in serie di Taylor nell'intorno della configurazione di riferimento. Si può allora scrivere, trascurando i termini di ordine superiore al secondo³⁴:

³⁴ I termini di ordine superiore al secondo non vengono considerati in questo lavoro. Alcune strutture tuttavia potrebbero risultare instabili al secondo ordine, ma stabili se si considerano i termini di ordine superiore.

$$\Delta\Pi = \delta\Pi + \frac{1}{2}\delta^2\Pi, \quad (64)$$

dove i termini dello sviluppo in serie vengono definiti *variazione prima e seconda* dell'energia potenziale totale.

La condizione di stazionarietà di Π , ossia che la variazione prima sia nulla ($\delta\Pi = 0$) consente di determinare le possibili configurazioni di equilibrio della struttura.

La condizione sul segno della variazione seconda invece, consente di definire se tale soluzione equilibrata risulta stabile ($\delta^2\Pi > 0$) o meno (viceversa). Tale fondamentale risultato prende il nome di principio di *Minimo dell'Energia Potenziale Totale* [2] Il funzionale dell'energia potenziale totale raggiunge un punto di stazionarietà in corrispondenza della soluzione del problema elastico.

L'energia di deformazione della struttura (composta da m elementi) è definita come segue:

$$\begin{aligned} \Pi_E &= \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} \int_0^{l_k^n} E_k A_k \varepsilon_k^2 ds = \sum_{k=1}^m \frac{1}{2} s_k \varepsilon_k l_k^n = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m E_k A_k \varepsilon_k^2 l_k^n = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m E_k A_k \frac{(l_k - l_k^n)^2}{l_k^n}, \end{aligned} \quad (65)$$

avendo indicato con ε_k il coefficiente di dilatazione lineare dell'elemento k -esimo:

$$\varepsilon_k = \frac{l_k - l_k^n}{l_k^n} = \frac{l_k}{l_k^n} - 1, \quad (66)$$

espresso in funzione della lunghezza l_k^n dell'elemento nella configurazione non sollecitata (naturale) e della lunghezza l_k dell'elemento nello stato pre-sollecitato; con E_k e A_k , rispettivamente, il modulo di elasticità longitudinale e l'area della sezione trasversale dell'elemento k -esimo; e avendo assunto una relazione elastica lineare tra tensione σ_k e deformazione, ovvero:

$$\sigma_k = E_k \varepsilon_k. \quad (67)$$

Anche per la funzione Π_E è possibile ammettere uno sviluppo in serie di Taylor nell'intorno della configurazione di riferimento per il calcolo dell'incremento $\Delta\Pi_E$ dovuto a $\Delta\mathbf{X}$. Trascurando i termini di ordine superiore al secondo, risulta:

$$\Delta\Pi_E = \delta\Pi_E + \frac{1}{2}\delta^2\Pi_E. \quad (68)$$

Per ottenere una condizione di minimo locale dell'energia potenziale totale risulta necessario studiare la variazione seconda di tale funzione, che può essere espressa [1]:

$$\delta^2\Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} \sum_{j=1}^{3n} \frac{\partial^2\Pi}{\partial X_i \partial X_j} \Delta X_i \Delta X_j. \quad (69)$$

Risulta più efficace esprimere tale variazione in forma matriciale mediante la seguente:

$$\delta^2\Pi = \frac{1}{2} \Delta\mathbf{X}^T \mathbf{K}^T \Delta\mathbf{X}, \quad (70)$$

in cui si introduce la matrice $\mathbf{K}^T \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, Hessiano dell'energia potenziale totale, definita *matrice di rigidità tangente*. Gli elementi di tale matrice si definiscono pertanto:

$$K_{i,j}^T = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial X_i \partial X_j}. \quad (71)$$

Tale matrice risulta essere simmetrica ed è determinata a partire dalla configurazione di equilibrio:

$$\mathbf{K}^T = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} \right)^T. \quad (72)$$

In [3] si mostra che tale matrice di rigidità può essere calcolata mediante:

$$\mathbf{K}^T = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}}, \quad (73)$$

avendo indicato $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{3n}$ il vettore dei carichi esterni compatibili con la deformazione della struttura:

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{F}_x^T, \mathbf{F}_y^T, \mathbf{F}_z^T \right)^T. \quad (74)$$

Esplicitando la (73) si ottiene:

$$\mathbf{K}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial \mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad (75)$$

che esprime le componenti della matrice \mathbf{K}^T

Ricordando le condizioni di equilibrio espresse dalla (33) in riferimento alla matrice di densità di forza \mathbf{D}_s della struttura tensegrity e la proprietà di simmetria di tale matrice, la (75) può essere scritta nella forma seguente:

$$\mathbf{K}^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial(\mathbf{y}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial(\mathbf{y}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial(\mathbf{y}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{z}} \\ \frac{\partial(\mathbf{z}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial(\mathbf{z}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{y}} & \frac{\partial(\mathbf{z}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{z}} \end{bmatrix}, \quad (76)$$

in cui è nullo il contributo della partizione di \mathbf{D}_s relativa ai nodi vincolati.

Come mostrato in [4], è possibile determinare gli elementi della matrice di rigidità tangente nel modo

seguente. Si consideri il termine $\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{x}}$ quale esempio rappresentativo; le considerazioni svolte possono

poi essere estese a tutti gli altri termini della (76):

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{x}} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{D}_s}{\partial x_i} x_i + \frac{\partial \mathbf{x}^T}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{D}_s = \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{D}_s}{\partial x_i} x_i + \mathbf{D}_s.\end{aligned}\quad (77)$$

Ricordando la (32) si può porre:

$$\frac{\partial \mathbf{D}_s}{\partial x_i} = \mathbf{C}^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} \mathbf{C}.\quad (78)$$

Dalla (26) inoltre, per la (66) è possibile esprimere la densità di forza dell'elemento k -esimo in funzione delle lunghezze l_k^n e l_k :

$$q_k = E_k A_k \left(\frac{1}{l_k^n} - \frac{1}{l_k} \right).\quad (79)$$

Si indichino con $\tilde{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ e $\mathbf{L}_n \in \mathbb{R}^{m \times m}$, rispettivamente, le matrici diagonali il cui i -esimo elemento ($i=1,2,\dots,m$) della diagonale sia:

$$\tilde{K}_{i,i} = E_k A_k,\quad (80)$$

$$L_{n,i,i} = l_k^n.\quad (81)$$

Dalle (80) e (81), e ricordando la (79) si può determinare \mathbf{Q} in funzione delle matrici diagonali succitate:

$$\mathbf{Q} = \tilde{\mathbf{K}} (\mathbf{L}_n^{-1} - \mathbf{L}^{-1}).\quad (82)$$

Ciò detto è possibile scrivere:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} = \tilde{\mathbf{K}} (\mathbf{L}^{-1})^2 \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i},\quad (83)$$

poiché risultano costanti la lunghezza l_k , il modulo di elasticità longitudinale E_k (elasticità lineare) e la sezione trasversale A_k (piccole deformazioni) dell'elemento k -esimo.

Dalla (15), in vista della (83) si ricava:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} &= \mathbf{L}^{-1} \left(\mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} + \mathbf{V} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial x_i} + \mathbf{W} \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_i} \right) = \\ &= \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i},\end{aligned}\quad (84)$$

ricordando che le matrici \mathbf{V} e \mathbf{W} non dipendono dalle coordinate dei nodi della struttura nella direzione x .

Con riferimento alla (84) e tenendo in conto la (13a) si può scrivere:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \text{diag} \left(\frac{\partial(\mathbf{C}\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) = \text{diag} \left(\mathbf{C} \frac{\partial(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right) = \text{diag} \left((\mathbf{C}^T)_i \right),\quad (85)$$

avendo indicato con $(\mathbf{C}^T)_i$ l' i -esima riga della trasposta della matrice di connessione.

In definitiva, da quanto sopra esposto, si può riscrivere la (78) come segue:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{D}_s}{\partial x_i} &= \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{K}} (\mathbf{L}^{-1})^2 \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial x_i} \mathbf{C} = \\ &= \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{K}} (\mathbf{L}^{-1})^3 \mathbf{U} \text{diag}((\mathbf{C}^T)_i) \mathbf{C}.\end{aligned}\quad (86)$$

Da tale espressione è possibile ottenere:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{D}_s}{\partial x_i} x_i = \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{K}} (\mathbf{L}^{-1})^3 \mathbf{U} \left[\sum_{i=1}^n \text{diag}(x_i (\mathbf{C}^T)_i) \right] \mathbf{C}, \quad (87)$$

o in alternativa:

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \mathbf{D}_s}{\partial x_i} x_i = \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{K}} (\mathbf{L}^{-1})^3 \mathbf{U}^2 \mathbf{C}. \quad (88)$$

Si osserva che per ottenere la (88) bisogna considerare che:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \text{diag}(x_i (\mathbf{C}^T)_i) &= \text{diag} \left(\sum_{i=1}^n (x_i (\mathbf{C}^T)_i) \right) \\ &= \text{diag}(\mathbf{u}^T) = \mathbf{U}.\end{aligned}\quad (89)$$

In definitiva la componente della (76) espressa dalla (77) può scriversi:

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\mathbf{x}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{C}^T \tilde{\mathbf{K}} (\mathbf{L}^{-1})^3 \mathbf{U}^2 \mathbf{C} + \mathbf{D}_s = \\ &= \bar{\mathbf{A}}_x \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_x^T + \mathbf{D}_s,\end{aligned}\quad (90)$$

avendo indicato con $\bar{\mathbf{A}}_x \in \mathbb{R}^{n \times m}$:

$$\bar{\mathbf{A}}_x = \mathbf{A}_x \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1}, \quad (91)$$

e con $\bar{\mathbf{K}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ la matrice diagonale denominata *matrice di rigidità degli elementi*:

$$\bar{\mathbf{K}} = \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{L}^{-1}, \quad (92)$$

il cui i -esimo elemento della diagonale è pari a:

$$\bar{K}_{i,i} = \frac{E_k A_k}{l_k}. \quad (93)$$

Con un procedimento analogo a quello illustrato con riferimento alla componente (77) è possibile determinare le altre componenti della (76), e in particolare si ha:

$$\frac{\partial (\mathbf{y}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}_y \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_x^T, \quad (94)$$

e

$$\frac{\partial (\mathbf{z}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{x}} = \bar{\mathbf{A}}_z \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_x^T, \quad (95)$$

avendo indicato con $\bar{\mathbf{A}}_y \in \mathbb{R}^{n \times m}$ e con $\bar{\mathbf{A}}_z \in \mathbb{R}^{n \times m}$:

$$\bar{\mathbf{A}}_y = \mathbf{A}_y \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{C}^T \mathbf{V} \mathbf{L}^{-1}, \quad (96)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_z = \mathbf{A}_z \mathbf{L}^{-1} = \mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{L}^{-1}. \quad (97)$$

Inoltre:

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{y}} = \bar{\mathbf{A}}_x \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_y^T, \quad (98)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{y}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{y}} = \bar{\mathbf{A}}_y \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_y^T + \mathbf{D}_s, \quad (99)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{z}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{y}} = \bar{\mathbf{A}}_z \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_y^T, \quad (100)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{x}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{z}} = \bar{\mathbf{A}}_x \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_z^T, \quad (101)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{y}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{z}} = \bar{\mathbf{A}}_y \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_z^T, \quad (102)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{z}^T \mathbf{D}_s)}{\partial \mathbf{z}} = \bar{\mathbf{A}}_z \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_z^T + \mathbf{D}_s. \quad (103)$$

Si ottiene, in definitiva, la seguente espressione della matrice di rigidezza tangente (76):

$$\mathbf{K}^T = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_x \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_x^T + \mathbf{D}_s & \bar{\mathbf{A}}_y \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_x^T & \bar{\mathbf{A}}_z \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_x^T \\ \bar{\mathbf{A}}_x \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_y^T & \bar{\mathbf{A}}_y \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_y^T + \mathbf{D}_s & \bar{\mathbf{A}}_z \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_y^T \\ \bar{\mathbf{A}}_x \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_z^T & \bar{\mathbf{A}}_y \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_z^T & \bar{\mathbf{A}}_z \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_z^T + \mathbf{D}_s \end{bmatrix}, \quad (104)$$

che può essere scritta in alternativa.

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^T &= \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_x \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_x^T & \bar{\mathbf{A}}_y \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_x^T & \bar{\mathbf{A}}_z \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_x^T \\ \bar{\mathbf{A}}_x \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_y^T & \bar{\mathbf{A}}_y \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_y^T & \bar{\mathbf{A}}_z \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_y^T \\ \bar{\mathbf{A}}_x \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_z^T & \bar{\mathbf{A}}_y \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_z^T & \bar{\mathbf{A}}_z \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}_z^T \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s & \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{D}_s & \mathbf{0}_n \\ \mathbf{0}_n & \mathbf{0}_n & \mathbf{D}_s \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_x \\ \bar{\mathbf{A}}_y \\ \bar{\mathbf{A}}_z \end{pmatrix} \bar{\mathbf{K}} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{A}}_x & \bar{\mathbf{A}}_y & \bar{\mathbf{A}}_z \end{pmatrix}^T = \\ &= \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}^T + \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{D}_s, \end{aligned} \quad (105)$$

dove \mathbf{I}_3 è la matrice identità di ordine 3, mentre la matrice $\bar{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{3 \times m}$ è tale che:

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A} \mathbf{L}^{-1}. \quad (106)$$

L'espressione (105) offre la possibilità di determinare la matrice di rigidezza tangente \mathbf{K}^T della struttura come somma di due contributi: il primo dipende dalla geometria del sistema e dalla rigidezza degli elementi, il secondo è legato alla densità di forza degli elementi nello stato di auto-equilibrio.

In letteratura tali contributi vengono definiti rispettivamente *matrice di rigidezza lineare* $\mathbf{K}_E \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ e *matrice di rigidezza geometrica* $\mathbf{K}_G \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$, ossia:

$$\mathbf{K}_E = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{A}}^T, \quad (107)$$

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{D}_s, \quad (108)$$

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G. \quad (109)$$

La relazione (109) che considera la matrice di rigidezza tangente come somma della matrice di rigidezza lineare, espressa in funzione della matrice di equilibrio, e della matrice di rigidezza geometrica, funzione della matrice di densità di forza, può essere ritrovata nei lavori di Murakami [5] e di S. D. Guest [6].

Dalla (108) risulta evidente che la matrice di rigidezza geometrica è simmetrica poiché è simmetrica la matrice di densità di forza \mathbf{D}_s per quanto deriva dalla (34).

Dalla (92) deriva inoltre che la matrice $\bar{\mathbf{K}}$ è simmetrica e pertanto anche la matrice di rigidezza lineare risulta essere simmetrica. In definitiva la matrice di rigidezza tangente \mathbf{K}^T , somma di due matrici simmetriche, è ancora una matrice simmetrica.

Si noti che la (109) descrive anche il caso in cui gli elementi della struttura non risultano essere pre-sollecitati; in tal caso, il contributo della matrice di rigidezza geometrica è nullo, ossia: $\mathbf{K}_G \equiv \mathbf{0}$.

Le proprietà algebriche delle tre matrici di rigidezza succitate rivestono un ruolo fondamentale nello studio della stabilità di una struttura tensegrity; in particolare il problema si può correlare al calcolo degli autovalori e dei relativi autovettori di tali matrici.

La trattazione discussa finora consente di formulare la seguente proposizione [3-8]:

Una struttura risulta stabile, escludendo i moti rigidi, se è verificata una delle seguenti condizioni tra loro equivalenti:

1. La forma quadratica Q_T della matrice di rigidezza tangente \mathbf{K}^T , calcolata rispetto ad un qualsiasi spostamento infinitesimo \mathbf{d} non nullo, è positiva:

$$Q_T = \mathbf{d}^T \mathbf{K}^T \mathbf{d} > 0, \quad (110)$$

2. La matrice di rigidezza tangente \mathbf{K}^T è definita positiva,
3. Tutti gli autovalori della matrice di rigidezza tangente \mathbf{K}^T sono positivi.

La condizione espressa dalla (110) traduce la condizione di positività della variazione seconda dell'energia potenziale totale calcolata nella (70). Si ricorda che nella condizione di equilibrio la variazione prima $\delta\Pi$ dell'energia potenziale totale è nulla.

La condizione espressa in funzione della forma quadratica della matrice di rigidezza tangente, è in accordo con la definizione di definitezza positiva di tale matrice [5] e pertanto risulta verificata la condizione al punto 2.

Per quanto concerne la terza condizione, siano $\lambda_{K,i}$ e $\boldsymbol{\varphi}_{K,i} \in \mathbb{R}^{3n}$ rispettivamente l' i -esimo autovalore e autovettore della matrice di rigidezza tangente della struttura, ovvero:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}^T \boldsymbol{\varphi}_{K,i} &= \lambda_{K,i} \boldsymbol{\varphi}_{K,i}, \\ \boldsymbol{\varphi}_{K,i}^T \cdot \boldsymbol{\varphi}_{K,j} &= \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (111)$$

Poiché $\boldsymbol{\varphi}_{K,i}$ descrive lo spazio degli spostamenti infinitesimi non nulli della struttura, il generico spostamento infinitesimo \mathbf{d} può essere calcolato come combinazione lineare degli autovettori di \mathbf{K}^T :

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \alpha_1 \boldsymbol{\varphi}_{K,1} + \alpha_2 \boldsymbol{\varphi}_{K,2} + \dots + \alpha_{n^{DOF}} \boldsymbol{\varphi}_{K,n^{DOF}} \\ &= \sum_{i=1}^{n^{DOF}} \alpha_i \boldsymbol{\varphi}_{K,i}, \end{aligned} \quad (112)$$

ricordando dalla (19) che una struttura free-standing possiede nello spazio euclideo tridimensionale un numero totale di gradi di libertà, n^{DOF} , pari a:

$$\begin{aligned} n^{DOF} &= 3n - n^{rb} = \\ &= 3n - 6. \end{aligned} \quad (113)$$

Ciò detto, è possibile riscrivere la (110) come segue:

$$\begin{aligned} Q_T &= \mathbf{d}^T \mathbf{K}^T \mathbf{d} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n^{DOF}} \alpha_i \boldsymbol{\varphi}_{K,i}^T \right) \mathbf{K}^T \left(\sum_{i=1}^{n^{DOF}} \alpha_i \boldsymbol{\varphi}_{K,i} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n^{DOF}} \sum_{i=1}^{n^{DOF}} \alpha_i \alpha_i \boldsymbol{\varphi}_{K,i}^T \mathbf{K}^T \boldsymbol{\varphi}_{K,i} = \\ &= \sum_{i=1}^{n^{DOF}} \sum_{i=1}^{n^{DOF}} \alpha_i \alpha_i \lambda_{K,i} \boldsymbol{\varphi}_{K,i}^T \boldsymbol{\varphi}_{K,i} = \\ &= \sum_{i=1}^{n^{DOF}} \alpha_i^2 \lambda_{K,i} > 0. \end{aligned} \quad (114)$$

Avendo assunto il generico spostamento infinitesimo \mathbf{d} non nullo, i coefficienti della combinazione lineare nella (112) non sono tutti nulli. La (114) risulta pertanto soddisfatta se e solo se gli autovalori della matrice di rigidezza tangente sono positivi.

Si osserva che una struttura cinematicamente indeterminata è instabile se gli elementi non sono in uno stato di pre-sollecitazione, ciò accade perché il contributo della matrice di rigidezza geometrica è nullo e pertanto la matrice di rigidezza tangente coincide con la matrice di rigidezza lineare, e in aggiunta, \mathbf{K}^T è semidefinita positiva³⁵.

La definitezza positiva della matrice di rigidezza tangente richiamata nel secondo punto, o equivalentemente la positività degli autovalori non nulli, si traduce in una condizione meccanica legata agli autovalori nulli e alla loro interpretazione fisica.

³⁵ Per una trattazione completa trattazione delle proprietà delle matrici semidefinite positive (negative) si veda [5].

3.2.1 Moti rigidi indipendenti

Come richiamato in §2.1.3, una struttura free-standing nello spazio euclideo tridimensionale ammette sei moti rigidi indipendenti: nel sistema di riferimento ortonormale $Oxyz$, tali moti rigidi sono rappresentati dalle tre traslazioni lungo i tre assi di riferimento e dalle rotazioni intorno a ciascuno dei suddetti assi.

Si osserva che la forma quadratica Q_T della matrice di rigidezza tangente calcolata rispetto ai moti rigidi del sistema è sempre nulla, in quanto non vi è alcuna variazione di lunghezza degli elementi.

3.2.1.1 Traslazione

Si indichino con \mathbf{d}_x , \mathbf{d}_y e \mathbf{d}_z rispettivamente i vettori degli spostamenti nodali della struttura relativi alle traslazioni rispetto agli assi x , y e z . Tali vettori risultano evidentemente indipendenti tra loro.

Dalla definizione di matrice di connessione nella (9) risulta che:

$$\mathbf{C}\mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad (115)$$

avendo indicato con $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^n$ il vettore contenente 1 in ogni posizione.

Dunque, dalla definizione di $\bar{\mathbf{A}}_x$, $\bar{\mathbf{A}}_y$, e $\bar{\mathbf{A}}_z$ nelle (91), (96) e (97), e considerando la (115) si può scrivere:

$$\bar{\mathbf{A}}_x^T \mathbf{1} = (\mathbf{C}^T \mathbf{U} \mathbf{L}^{-1})^T \mathbf{1} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{U} \mathbf{C} \mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad (116)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_y^T \mathbf{1} = (\mathbf{C}^T \mathbf{V} \mathbf{L}^{-1})^T \mathbf{1} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{C} \mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad (117)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_z^T \mathbf{1} = (\mathbf{C}^T \mathbf{W} \mathbf{L}^{-1})^T \mathbf{1} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{C} \mathbf{1} = \mathbf{0}. \quad (118)$$

Da cui:

$$\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{d}_T = \mathbf{0}. \quad (119)$$

avendo indicato con \mathbf{d}_T il generico vettore rappresentativo di una traslazione. Ricordando la (107) si può scrivere pertanto:

$$\mathbf{K}_E \mathbf{d}_T = \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{d}_T = \mathbf{0}. \quad (120)$$

Analogamente, ricordando la definizione di matrice di densità di forza \mathbf{D}_s nella (32), si può scrivere:

$$\mathbf{D}_s \mathbf{1} = \mathbf{C}^T \mathbf{Q} \mathbf{C} \mathbf{1} = \mathbf{0}, \quad (121)$$

da cui risulta che:

$$\mathbf{K}_G \mathbf{d}_T = \mathbf{0}. \quad (122)$$

Dalla (110), considerando la (109), si può scrivere in definitiva che:

$$\begin{aligned} Q_T &= \mathbf{d}_T^T \mathbf{K}^T \mathbf{d}_T = \\ &= \mathbf{d}_T^T (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \mathbf{d}_T = \\ &= \mathbf{d}_T^T \mathbf{K}_E \mathbf{d}_T + \mathbf{d}_T^T \mathbf{K}_G \mathbf{d}_T = 0 \end{aligned} \quad (123)$$

La (120), la (122) e la (123) stabiliscono che le traslazioni rigide giacciono nello spazio nullo delle matrici di rigidezza lineare, geometrica e tangente.

3.2.1.2 Rotazione

Discorso analogo alle traslazioni può esse condotto per le rotazioni; in particolare considerato il vettore \mathbf{X} delle coordinate nodali espresso dalla (62) e considerata una rotazione θ della struttura intorno all'asse z^{36} , si può esprimere la nuova configurazione geometrica assunta dalla struttura a seguito di tale rotazione mediante la seguente espressione:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{R}\mathbf{X}, \quad (124)$$

in cui si è introdotta la matrice di rotazione $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{3n \times 3n}$ espressa mediante:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \cos\theta\mathbf{I} & -\sin\theta\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \sin\theta\mathbf{I} & \cos\theta\mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix}. \quad (125)$$

Dalla condizione di equilibrio espressa dalla (35) e dalla definizione della matrice di rigidezza geometrica data dalla (108) risulta che:

$$\mathbf{K}_G\mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (126)$$

Inoltre, tenendo in conto la (125), risulta vera la seguente commutazione:

$$\mathbf{R}\mathbf{K}_G = \mathbf{K}_G\mathbf{R}. \quad (127)$$

Pertanto è possibile verificare che:

$$\mathbf{K}_G\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{K}_G\mathbf{R}\mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{K}_G\mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (128)$$

Indicando con \mathbf{d}_R lo spostamento della struttura a seguito della rotazione θ , espresso mediante:

$$\mathbf{d}_R = \tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}, \quad (129)$$

e considerando la (126) è possibile scrivere:

$$\mathbf{K}_G\mathbf{d}_R = \mathbf{K}_G(\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{X}) = \mathbf{K}_G\tilde{\mathbf{X}} - \mathbf{K}_G\mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (130)$$

Considerando la matrice di rigidezza lineare è possibile scrivere:

$$\mathbf{K}_E\mathbf{d}_R = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{A}}^T\mathbf{d}_R = \bar{\mathbf{A}}\bar{\mathbf{K}}\mathbf{0} = \mathbf{0}. \quad (131)$$

Dalla (110), considerando la (109), si può scrivere anche per le rotazioni che:

$$\begin{aligned} Q_T &= \mathbf{d}_R^T \mathbf{K}^T \mathbf{d}_R = \\ &= \mathbf{d}_R^T (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \mathbf{d}_R = \\ &= \mathbf{d}_R^T \mathbf{K}_E \mathbf{d}_R + \mathbf{d}_R^T \mathbf{K}_G \mathbf{d}_R = 0 \end{aligned} \quad (132)$$

ovvero anche le rotazioni rigide giacciono nello spazio nullo delle matrici di rigidezza lineare, geometrica e tangente.

3.2.1.3 Trasformazioni affini non banali

Per quanto concerne le trasformazioni affini non banali, si rimanda al lavoro in [3] per una trattazione dettagliata.

³⁶ La stessa trattazione può essere condotta per la rotazione intorno all'asse x e all'asse y .

In questo contesto si richiamano i risultati fondamentali ai fini dello studio della stabilità delle strutture tensegrity.

Una generica trasformazione affine non banale $\mathbf{t}_{a,i}$ (dilatazione e taglio) giace nello spazio nullo della matrice di rigidezza geometrica \mathbf{K}_G .

In particolare le trasformazioni affini non banali rappresentano gli autovettori relativi agli autovalori nulli di \mathbf{K}_G .

Le trasformazioni affini, compresi i moti rigidi, generano l'intero spazio nullo della matrice di rigidezza geometrica quando la dimensione di tale spazio vettoriale è pari a 12.

Nella Tabella 4 si riporta una sintesi di quanto esposto.

	Nucleo di \mathbf{K}^T	Nucleo di \mathbf{K}_G	Nucleo di \mathbf{K}_E
Autovalori nulli	6	12	6
Moti rigidi indipendenti	■	■	■
Trasformazioni affini non banali	×	■	×

Tabella 4. Descrizione degli spazi nulli delle matrici di rigidezza. Il simbolo “■” denota l'appartenenza dei vettori al sottospazio considerato, viceversa, il simbolo “×” implica la non appartenenza.

3.3 STABILITÀ DELLA CONFIGURAZIONE PRE-SOLLECITATA

La stabilità di una struttura tensegrity, così come è definita nella (110), o equivalentemente attraverso lo studio degli autovalori della matrice di rigidezza tangente, richiede un onere computazionale elevato soprattutto per strutture aventi un numero elevato di elementi e di nodi.

Tuttavia, spesso è sufficiente considerare la stabilità solo per *particolari* perturbazioni; ciò evidentemente semplifica l'analisi e consente di determinare una particolare condizione di stabilità.

In particolare, nell'ipotesi che la rigidezza degli elementi risulti sufficientemente elevata, lo studio della stabilità può essere condotto in relazione esclusivamente ai meccanismi infinitesimi del sistema.

Una struttura tensegrity si definisce *stabile nella configurazione pre-sollecitata* se la configurazione di auto-equilibrio è stabile nelle direzioni dei meccanismi infinitesimi.

Dalla definizione della matrice di rigidezza tangente \mathbf{K}^T nella (109) e dalla (110) è possibile esprimere la forma quadratica Q_T rispetto ad un generico spostamento infinitesimo come segue:

$$\begin{aligned}
 Q_T &= \mathbf{d}^T \mathbf{K}^T \mathbf{d} = \mathbf{d}^T (\mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G) \mathbf{d} = \\
 &= \mathbf{d}^T \mathbf{K}_E \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{K}_G \mathbf{d} = \\
 &= Q_E + Q_G.
 \end{aligned} \tag{133}$$

Se la struttura è cinematicamente indeterminata allora esiste almeno un meccanismo infinitesimo \mathbf{d}_m che soddisfa la (17) per il quale risulta evidentemente:

$$\mathbf{K}_E \mathbf{d}_m = \mathbf{0} \Rightarrow Q_E = 0, \quad (134)$$

in tal caso la forma quadratica della matrice di rigidezza tangente calcolata rispetto al generico meccanismo infinitesimo può essere scritta:

$$Q_T = Q_E + Q_G = 0 + Q_G = Q_m, \quad (135)$$

ovvero:

$$Q_m = \mathbf{d}_m^T \mathbf{K}_G \mathbf{d}_m. \quad (136)$$

La stabilità della struttura, ricercata mediante la (110), in tal caso impone che:

$$Q_m > 0. \quad (137)$$

La condizione espressa nella (137) risulta tuttavia solo necessaria ma non sufficiente per la stabilità del sistema. La stabilità delle strutture cinematicamente indeterminate, la cui forma quadratica della matrice di rigidezza lineare è nulla in direzione dei meccanismi, dipende dal segno della forma quadratica Q_m . In particolare, se risulta verificata la (137) la struttura risulta stabile nella pre-sollecitazione; se anche la forma quadratica Q_m risulta nulla, a meno di analisi ad ordini superiori al secondo delle variazioni dell'energia potenziale totale, la struttura è instabile poiché è nulla Q_T ; se infine Q_m è negativa la struttura è instabile poiché la forma quadratica della matrice di rigidezza tangente risulta negativa.

Dalla (107) e dalla (134) scaturisce che gli m_i meccanismi infinitesimi della struttura giacciono nello spazio nullo della matrice di rigidezza lineare \mathbf{K}_E e anche nel nucleo della matrice cinematica \mathbf{B} .

Ciò consente di introdurre la matrice dei meccanismi infinitesimi $\mathbf{M}_i \in \mathbb{R}^{3n \times m_i}$ la cui i -esima colonna riporta l' i -esimo meccanismo infinitesimo ($i = 1, 2, \dots, m_i$), ovvero:

$$\mathbf{M}_i = [\mathbf{d}_1 \quad \mathbf{d}_2 \quad \dots \quad \mathbf{d}_{m_i}]. \quad (138)$$

Rispetto a tale matrice espressa nella (138) è possibile determinare la forma quadratica $\mathbf{Q}_T \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ mediante la seguente relazione:

$$\mathbf{Q}_T = \mathbf{M}_i^T \mathbf{K}_T \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_i^T \mathbf{K}_G \mathbf{M}_i = \mathbf{Q}_m, \quad (139)$$

avendo indicato con $\mathbf{Q}_m \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ la forma quadratica della matrice di rigidezza geometrica calcolata rispetto alla matrice dei meccanismi infinitesimi.

Ne consegue che una struttura tensegrity è stabile nella configurazione pre-sollecitata se la forma quadratica \mathbf{Q}_m è definita positiva.

Tale condizione di definitezza positiva è solo necessaria ma non sufficiente per la stabilità del sistema. Tuttavia la struttura risulta stabile se la rigidezza assiale degli elementi è sufficientemente grande rispetto alla rigidezza geometrica dovuta alla pre-sollecitazione.

È possibile provare quanto appena esposto indicando con $\lambda_{K_e,i}$ e $\boldsymbol{\phi}_{K_e,i} \in \mathbb{R}^{3n}$ rispettivamente l' i -esimo autovalore e autovettore della matrice di rigidezza lineare \mathbf{K}_E della struttura, ovvero:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_E \boldsymbol{\varphi}_{Ke,i} &= \lambda_{Ke,i} \boldsymbol{\varphi}_{Ke,i}, \\ \boldsymbol{\varphi}_{Ke,i}^T \cdot \boldsymbol{\varphi}_{Ke,j} &= \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \end{aligned} \quad (140)$$

e considerando ε un generico scalare positivo rappresentativo della rigidità assiale degli elementi, ovvero per la (107):

$$\varepsilon \mathbf{K}_E = \bar{\mathbf{A}} (\varepsilon \bar{\mathbf{K}}) \bar{\mathbf{A}}^T. \quad (141)$$

Risulta possibile quindi riscrivere la (109) nella forma:

$$\mathbf{K}^T = \varepsilon \mathbf{K}_E + \mathbf{K}_G. \quad (142)$$

Si osserva che gli autovalori di $\varepsilon \mathbf{K}_E$ sono pari a $\varepsilon \lambda_{Ke,i}$ mentre i relativi autovettori non variano rispetto a quelli determinati per la matrice \mathbf{K}_E .

Il generico spostamento infinitesimo \mathbf{d} può essere calcolato come combinazione lineare degli autovettori di \mathbf{K}_E :

$$\mathbf{d} = \sum_i \alpha_i \boldsymbol{\varphi}_{Ke,i}, \quad (143)$$

Pertanto la forma quadratica Q_T , introdotto il parametro ε e per la (142), può essere espressa come segue:

$$\begin{aligned} Q_T &= Q_E + Q_G = \mathbf{d}^T \mathbf{K}^T \mathbf{d} = \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{K}_E \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{K}_G \mathbf{d} = \\ &= \varepsilon \sum_i \alpha_i^2 \lambda_{Ke,i} + \mathbf{d}^T \mathbf{K}_G \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (144)$$

Assumendo un valore di ε sufficientemente grande tale da far tendere ad infinito la rigidità assiale degli elementi, mentre gli sforzi di pre-sollecitazione assumono comunque valori contenuti, è possibile studiare la stabilità della configurazione pre-sollecitata in funzione delle componenti del generico spostamento infinitesimo:

1. Se \mathbf{d} è combinazione lineare degli autovettori corrispondenti agli autovalori non nulli allora risulta che:

$$Q_T \approx Q_E = \varepsilon \sum_i \alpha_i^2 \lambda_{Ke,i} \rightarrow \infty, \quad (145)$$

poiché la forma quadratica della matrice di rigidità geometrica è molto più piccola rispetto alla Q_E .

2. Se \mathbf{d} è combinazione lineare degli autovettori corrispondenti agli autovalori nulli, ossia è combinazione dei meccanismi infinitesimi del sistema mediante il vettore $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{m_i}$, allora risulta che:

$$\begin{aligned} Q_T &= Q_m = Q_G = \mathbf{d}_m^T \mathbf{K}_G \mathbf{d}_m = \\ &= \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{M}_i^T \mathbf{K}_G \mathbf{M}_i \boldsymbol{\alpha} = \\ &= \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{Q}_m \boldsymbol{\alpha}, \end{aligned} \quad (146)$$

in cui si ritrova la forma quadratica Q_m . Se tale forma quadratica risulta definita positiva la struttura è stabile nella configurazione pre-sollecitata, pertanto la stabilità dipende dalle caratteristiche di Q_m .

Si conclude quanto precedentemente affermato circa la condizione di definitezza positiva della forma quadratica Q_m in relazione alla condizione di stabilità della configurazione pre-sollecitata.

Il requisito di minimo dell'energia potenziale totale è, ad ogni modo, molto più forte della condizione di stabilità della pre-sollecitazione, in particolar modo quando la matrice di rigidezza geometrica, o equivalentemente la matrice di densità di forza, è indefinita, ossia possiede alcuni autovalori negativi. In tal caso la stabilità della struttura è assicurata se il livello della pre-sollecitazione è relativamente basso rispetto alla rigidezza assiale degli elementi.

Nel caso di strutture cinematicamente determinate, ossia tali che $m_i = 0$, la forma quadratica della matrice di rigidezza geometrica è nulla, tuttavia anche tali strutture sono definite stabili nella pre-sollecitazione.

Da quanto esposto si può dedurre che la stabilità di una struttura implica la stabilità nella configurazione pre-sollecitata, ma non è vero il contrario. Ciò nonostante, l'analisi della stabilità della pre-sollecitazione risulta sufficiente in molti casi poiché il livello della pre-sollecitazione negli elementi è generalmente sufficientemente basso, al fine di evitare la crisi del materiale e/o fenomeni di instabilità locali. Si osserva inoltre che tale analisi non coinvolge le proprietà meccaniche dei materiali.

3.4 SUPER-STABILITÀ

Nell'analisi del comportamento meccanico di una struttura tensegrity, e in particolare nella valutazione della stabilità della configurazione equilibrata è, come si è già detto, necessario considerare il contributo della rigidezza assiale degli elementi, espresso dalla matrice di rigidezza lineare, e quello fornito dalla pre-sollecitazione, correlato alla matrice di rigidezza geometrica. È possibile tuttavia introdurre una condizione ancora più restrittiva della stabilità, la super-stabilità, come definita in [3] e [9].

Una struttura tensegrity si definisce *super-stabile* se risulta essere stabile nello stato di auto-equilibrio (minimo locale dell'energia potenziale totale) indipendentemente dalle proprietà meccaniche del materiale e dal livello della pre-sollecitazione.

Dal punto di vista matematico, è possibile definire le seguenti due condizioni necessarie alla super-stabilità:

1. La forma quadratica \mathbf{Q}_m della matrice di rigidezza geometrica calcolata rispetto ai meccanismi infinitesimi è definita positiva,
2. La matrice di rigidezza geometrica \mathbf{K}_G è semi-definita positiva.

La prima condizione risulta sempre verificata per una struttura stabile, in quanto si riferisce alla condizione di stabilità della pre-sollecitazione.

Per quanto concerne la seconda condizione, indicando con $\lambda_{\mathbf{K}_G,i}$ e $\boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{K}_G,i} \in \mathbb{R}^{3n}$ rispettivamente l' i -esimo autovalore e autovettore della matrice di rigidezza geometrica \mathbf{K}_G della struttura, ovvero:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_G \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{K}_G,i} &= \lambda_{\mathbf{K}_G,i} \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{K}_G,i}, \\ \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{K}_G,i}^T \cdot \boldsymbol{\varphi}_{\mathbf{K}_G,j} &= \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}, \end{aligned} \quad (147)$$

e considerando μ un generico scalare positivo rappresentativo del livello di pre-sollecitazione negli elementi, è possibile riscrivere la (109) come segue:

$$\mathbf{K}^T = \mathbf{K}_E + \mu \mathbf{K}_G. \quad (148)$$

La forma quadratica Q_T della matrice di rigidezza tangente, considerando il parametro μ e la (148), può essere espressa come segue:

$$\begin{aligned} Q_T &= Q_E + Q_G = \\ &= \mathbf{d}^T \mathbf{K}_E \mathbf{d} + \mu \sum_i \alpha_i^2 \lambda_{K_{G,i}}. \end{aligned} \quad (149)$$

L'esistenza di eventuali autovalori $\lambda_{K_{G,i}}$ negativi, in concomitanza con valori elevati di μ , può condurre a valori negativi della forma quadratica della matrice di rigidezza tangente, il che è in contrasto con la condizione di stabilità definita dalla (110). Per questo motivo, la matrice di rigidezza geometrica, o equivalentemente la matrice di densità di forza \mathbf{D}_s , deve essere semi-definita positiva affinché la (149) conduca ad una forma quadratica positiva della matrice di rigidezza tangente.

A queste condizioni necessarie deve essere aggiunta una condizione sufficiente affinché si possa considerare una struttura tensegrity super-stabile.

Rimandando alla trattazione in [10] per la dimostrazione completa, si può affermare che condizione sufficiente affinché una struttura tensegrity risulti super-stabile è che il rango della matrice geometrica \mathbf{G} definita nella (24) sia massimo, ovvero pari a 6 (nello spazio euclideo tridimensionale).

Se il rango della matrice geometrica risulta essere minore di 6, allora esistono spostamenti non nulli che rendono la forma quadratica della matrice di rigidezza tangente nulla.

Come richiamato in §3.2.1.3, infatti, la generica trasformazione affine non banale $\mathbf{t}_{a,i}$ giace nello spazio nullo della matrice di rigidezza geometrica \mathbf{K}_G :

$$\mathbf{K}_G \mathbf{t}_{a,i} = \mathbf{0}, \quad (150)$$

e pertanto la forma quadratica Q_T si può esprimere ricordando la (107):

$$\begin{aligned} Q_T &= \mathbf{t}_{a,i}^T \mathbf{K}^T \mathbf{t}_{a,i} = \\ &= \mathbf{t}_{a,i}^T \mathbf{K}_E \mathbf{t}_{a,i} = \\ &= \mathbf{t}_{a,i}^T \bar{\mathbf{A}} \bar{\mathbf{K}} \bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{t}_{a,i} = \\ &= (\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{t}_{a,i})^T \bar{\mathbf{K}} (\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{t}_{a,i}). \end{aligned} \quad (151)$$

Poiché la matrice di rigidezza lineare è semi-definita positiva [11], la (151) non può condurre a valori di Q_T negativi. Tuttavia la struttura può risultare instabile se tale forma quadratica si annulla, ciò accade se e solo se:

$$\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{t}_{a,i} = \mathbf{0}, \quad (152)$$

poiché la matrice diagonale di rigidezza degli elementi $\bar{\mathbf{K}}$, determinata mediante la (92), risulta sempre definita positiva.

Considerando ciascuna delle sei trasformazioni affini non banali, e dopo opportune sostituzioni, la (152) può essere posta, con riferimento alla matrice geometrica del sistema, nel modo seguente:

$$\bar{\mathbf{A}}^T \mathbf{t}_{a,i} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{G} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}, \quad (153)$$

avendo indicato con $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^6$ il vettore dei coefficienti della sostituzione³⁷. Poiché la matrice diagonale \mathbf{L}^{-1} è definita positiva, la (153) ha soluzione non nulla, $\boldsymbol{\alpha} \neq \mathbf{0}$, se e solo se il rango della matrice geometrica è minore di 6. In caso contrario, ovvero nella condizione di rango massimo di \mathbf{G} , la (153) ammette esclusivamente la soluzione banale $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$.

In definitiva, una struttura tensegrity si definisce super-stabile se sono soddisfatte le seguenti condizioni³⁸:

1. Il rango della matrice geometrica r_G è pari a 6,
2. La nullità della matrice di densità di forza è pari a 4,
3. La matrice di densità di forza è semi-definita positiva.

Si ricorda che la condizione relativa al rango della matrice geometrica è condizione necessaria per la stabilità della struttura, mentre la semi-definitezza positiva della matrice di densità di forza rappresenta una condizione necessaria per la super-stabilità. Se le condizioni suddette non sono soddisfatte la struttura non risulta essere super-stabile.

3.5 CONCLUSIONI

In questo capitolo sono stati introdotti ed esplicitati i concetti relativi all'analisi della stabilità delle strutture tensegrity free-standing, e le condizioni necessarie e sufficienti per la stabilità della pre-sollecitazione e per la super-stabilità.

In sintesi:

- *stabilità*, ovvero minimo locale dell'energia potenziale totale, o dell'energia di deformazione nello stato di auto-equilibrio [12],
- *stabilità della pre-sollecitazione*, ossia stabilità nelle direzioni dei meccanismi infinitesimi,
- *super-stabilità*, ovvero la struttura è stabile indipendentemente dalle proprietà meccaniche del materiale e dal livello della pre-sollecitazione [13].

Si ricordano inoltre le condizioni analitiche relative a ciascuna delle tre condizioni [14,15]:

- la struttura risulta stabile se la forma quadratica Q_T della matrice di rigidezza tangente \mathbf{K}^T , calcolata rispetto ad un qualsiasi spostamento infinitesimo \mathbf{d} non nullo, risulta positiva, o equivalentemente, la matrice di rigidezza tangente è definita positiva, o anche, tutti gli autovalori di tale matrici sono positivi,
- la stabilità della pre-sollecitazione è verificata se la forma quadratica Q_m è definita positiva,
- la struttura è super-stabile se sono rispettate le seguenti condizioni: il rango della matrice geometrica r_G è pari a 6, la matrice di densità di forza è semi-definita positiva e la sua nullità è pari a 4.

Tra queste la super-stabilità rappresenta una condizione evidentemente più restrittiva: una struttura tensegrity super-stabile è sempre stabile, ovvero presenta un minimo locale dell'energia potenziale totale nella configurazione di equilibrio, indipendentemente dalle proprietà del materiale e dal livello della pre-sollecitazione negli elementi.

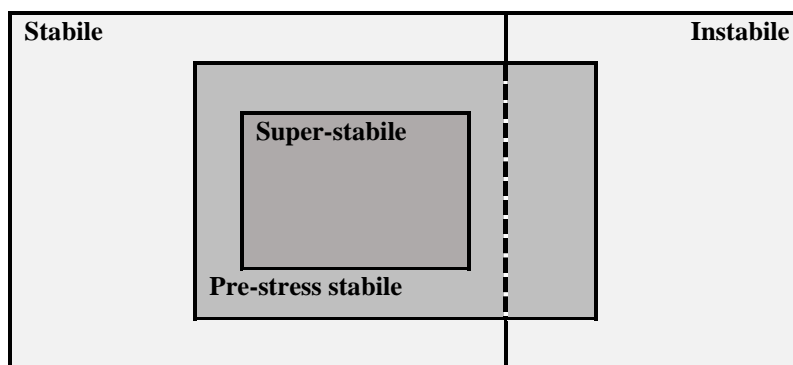
³⁷ In [10] p. 130.

³⁸ Per la dimostrazione di tale enunciato si rimanda al riferimento in [10], pp. 133-134.

Una struttura tensegrity stabile nella pre-sollecitazione può tuttavia non essere stabile nella configurazione di auto-equilibrio; se infatti la pre-sollecitazione negli elementi risulta essere considerevolmente elevata la struttura può risultare instabile.

Come mostrato in §3.3, per le strutture cinematicamente indeterminate [16-18], un'elevata rigidità assiale degli elementi rispetto alla rigidità geometrica dovuta alla pre-sollecitazione comporta la positività della forma quadratica della matrice di rigidità tangente e, quindi, la stabilità della configurazione di equilibrio; ciò porta ad affermare che una struttura tensegrity stabile nella pre-sollecitazione è anche stabile se la rigidità assiale degli elementi è sufficientemente elevata rispetto al livello della pre-sollecitazione.

Nello schema seguente si sintetizza quanto esposto (Schema 1).



Schema 1. Stabilità di una struttura tensegrity free-standing.

Si evidenzia inoltre un'importante peculiarità relativa alla super-stabilità: data una struttura tensegrity super-stabile, una trasformazione affine non banale della struttura non muta la sua condizione di super-stabilità. Ciò detto risulta vero perché in tale condizione le trasformazioni affini non banali generano l'intero spazio nullo della matrice di rigidità geometrica, e pertanto non esiste alcuno spostamento non nullo che rende nulla la forma quadratica della matrice di rigidità tangente.

Bibliografia

- [1] M. PIGNATARO, N. RIZZI, A. LUONGO, *Stability, Bifurcation and Postcritical Behaviour of Elastic Structures*, Elsevier Science, 1991.
- [2] A. E. H. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 2ND ed., Dover Publ., 1906.
- [3] J. Y. ZHANG, M. OHSAKI, *Adaptive force density method for form-finding problem of tensegrity structures*, in “International Journal of Solids and Structures”, 2006, 43, pp. 5658-5673.
- [4] J. Y. ZHANG, *et al.*, *Multi-stable Star-shaped Tensegrity Structures*, in “Proceedings of IABSE-IASS”, 2011.
- [5] H. MURAKAMI, *Static and dynamic analyses of tensegrity structures. Part II. Quasi-static analysis*, in “International Journal of Solids and Structures”, 2001, 38(20), pp. 3615-3629.
- [6] S. D. GUEST, *The stiffness of prestressed frameworks: a unifying approach*, in “International Journal of Solids and Structures”, 2006, 43, pp. 842-854.
- [7] M. DEFOSSEZ, *Shape memory effect in tensegrity structures*, in “Mechanics Research Communications”, 2003, 30, pp. 311-316.
- [8] K. WASHIZU, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, 2nd ed., New York, Pergamon Press, 1975.
- [9] S. D. GUEST, *The Stiffness of Tensegrity Structures*, in “International Journal of Solids and Structures”, 2006, 43(3-4), pp. 842-854.
- [10] J. Y. ZHANG, M. OHSAKI, *Tensegrity Structures. Form, Stability, and Symmetry*, New York, Springer, Mathematics for Industry 6, 2015.
- [11] G. H. GOLUB, C. F. VAN LOAN, *Matrix Computations*, 4th ed., the Johns Hopkins University Press, 2013.
- [12] R. CONNELLY, W. WHITELEY, *Second-order rigidity and prestress stability for tensegrity frameworks*, in “Journal on Discrete Mathematics”, 1996, 9(3), pp. 453-491.
- [13] A. MICHELETTI, *Bistable Regimes in an Elastic Tensegrity System*, in “Proceedings of the Royal Society A”, 2013, 469, n. 2154.
- [14] J. Y. Zhang, M. Ohsaki, *Stability conditions for tensegrity structures*, in “International Journal of Solids and Structures”, 2007, 44, pp. 3875-3886.
- [15] M. Ohsaki, J. Y. Zhang, *Stability conditions of prestressed pin-jointed structures*, in “International Journal of Non-Linear Mechanics”, 2006, 41, pp. 1109-1117.
- [16] W. T. Koiter, *On the stability of elastic equilibrium*, Cornell University, National Aeronautics and Space Administration, 1967.
- [17] Z. P. Bažant, L. Cedolin, *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*, Courier Corporation, 1991.
- [18] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., Cambridge University Press, 2013.

Capitolo 4

ANALISI DEL MODULO ELEMENTARE V-EXPANDER

A questo punto la ricerca segue una duplice traccia, guardando sia agli aspetti architettonici che a quelli strutturali dei sistemi tensegrity. Una prima direzione è quella di un'analisi morfologica volta a determinare nuove possibili configurazioni tensegrity. La seconda, partendo dallo studio del comportamento meccanico di una celebre struttura tensegrity, punta a determinare lo stato di auto-sollecitazione ammissibile per assemblaggi a torre delle nuove configurazioni definite tramite lo studio morfologico di cui sopra.

Questo capitolo è dedicato all'analisi morfologica che conduce a delineare il modello e la geometria di alcune celle innovative tensegrity. Viene analizzato lo stato di pre-sollecitazione, gli sforzi negli elementi e le condizioni di stabilità (stabilità della pre-sollecitazione e super-stabilità) di ciascuna delle nuove celle tensegrity proposte.

4.1 PREMESSA

Come accennato in §1.3.2, una struttura tensegrity può essere classificata in base al numero degli elementi compressi che convergono in un nodo; tale classificazione consente di considerare tensegrity anche strutture per le quali il componente compresso risulta essere costituito da più elementi posti in continuità. Una struttura pertanto si definisce di “classe k ” se il componente compresso è realizzato mediante la giustapposizione di k elementi compressi. Sebbene tale classificazione risulta essere in contrasto con la concezione originaria dei sistemi tensegrity, essa consente di studiare e ideare nuove celle elementari, in quanto non vi è limite, se non quello della fabbricabilità, al numero di puntoni che convergono in un nodo della cella.

In base a quanto sopra le strutture tensegrity di classe 2 sono caratterizzate dalla continuità di due puntoni nel generico nodo; ciò non inficia la possibilità di realizzare un insieme discontinuo di elementi compressi che “fluttuano” nella rete di trazione, poiché il componente compresso che si genera assume la forma di un elemento unico e isolato.

Si fa notare che lo stesso Buckminster Fuller, tra i suoi progetti, realizza numerose strutture tensegrity “non pure”, tra le quali si cita il “*Tensegrity Mast*” (Figura 9) realizzato nel 1950 e descritto nel dettaglio in [1]. Si sottolinea che il processo morfologico che genera la cella del Mast nasce dallo studio delle proprietà geometriche del cubo (solido platonico che massimizza il rapporto tra volume e superficie totale). Da tale

studio scaturisce la costruzione del tetraedro, contenuto nel volume del cubo, i cui spigoli identificano le direttrici degli elementi che realizzano la cella elementare³⁹.

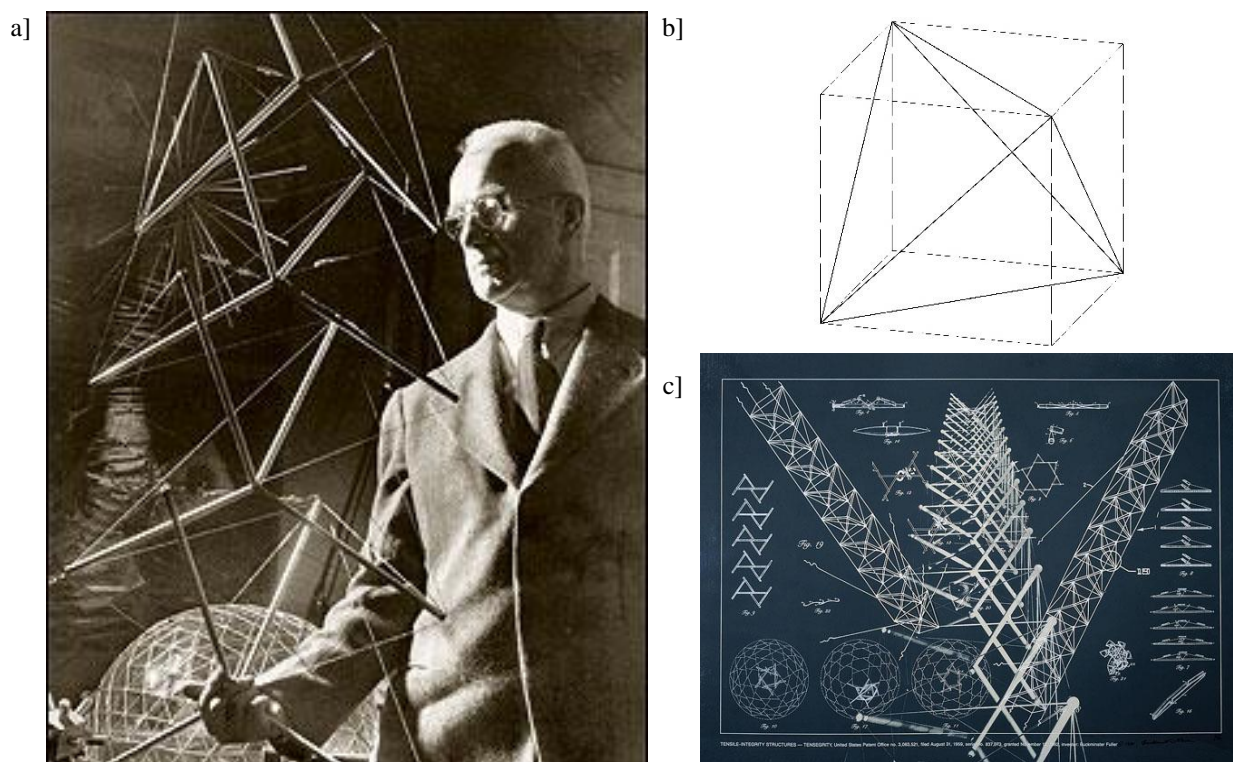


Figura 9. a) Buckminster Fuller, 1950. b) Ricostruzione dello studio morfologico. c) Particolare del progetto del mast.

Analogo studio morfologico viene condotto dal 1998 al 2000 dal gruppo di ricerca di Motro nell'ambito del progetto denominato *Tensarch* [2], presso l'Università di Montpellier II. La descrizione completa di tale lavoro si può trovare in [3]. Obiettivo principale del progetto è quello di creare una griglia tensegrity realizzata mediante l'assemblaggio di celle elementari in auto-equilibrio che costituisce il prototipo di copertura tensegrity. Il prototipo realizzato, inoltre, consente di ovviare ad una molteplicità di problematiche che le strutture tensegrity presentano nelle loro applicazioni in architettura, e in particolare lo studio si propone di realizzare:

- una struttura a geometria regolare,
- la minima densità dei puntoni per unità di superficie coperta,
- l'assenza di meccanismi (finiti o infinitesimi),
- una semplificazione della metodologia di pre-sollecitazione.

Per descrivere il prototipo Motro suggerisce di idealizzare il comportamento della griglia mediante l'analogia con un materasso di molle (*spring mattress*): il sistema è composto da una matrice regolare di spirali, alcune di queste "attivabili" (denominate *expander*), contenute all'interno di due superfici flessibili.

³⁹ "Every cube has six faces (A). Every tetrahedron has six edges (B). Every cube has eight corners and every tetrahedron has four corners. Every cube contains two tetrahedra (ABCD and WXYZ) because each of its six faces has two diagonals, the positive and negative set.", in [1], 730.11.

Il sistema descrive pertanto una struttura teoricamente *infinita*; se si limita la matrice ad un numero finito di elementi si pone il problema di individuare le opportune condizioni al contorno.

Il componente compresso risulta formato da una serie di puntoni che realizzano una geometria *ad onde*, coerentemente con la definizione di “isole di compressione” (Figura 10).

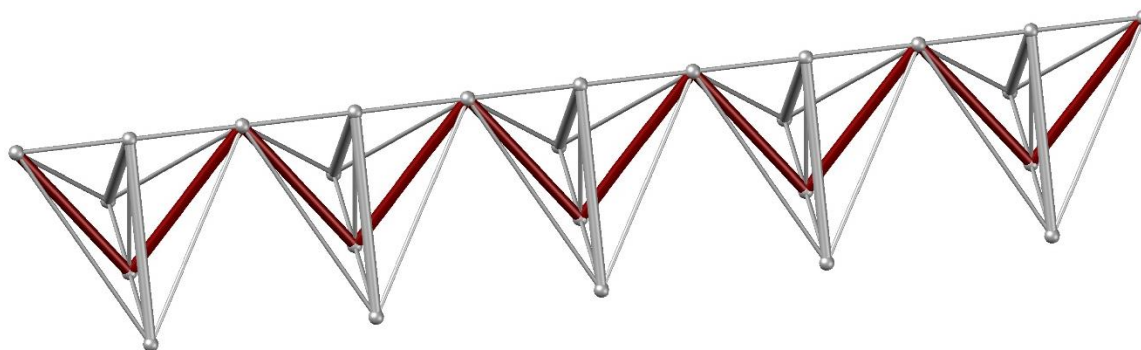


Figura 10. Componente compresso in un assemblaggio monodimensionale.

L’analisi dello stato di auto-equilibrio e dei meccanismi è condotta mediante l’utilizzo di un codice scritto *ad hoc* denominato “Tenségrité” [4]. Data la regolarità del sistema, il processo di prototipazione dapprima prevede lo studio della cella elementare in varie condizioni topologiche, e successivamente l’analisi topologica di una serie di griglie con differenti *pattern* di distribuzione degli elementi compressi.

Tra le celle elementari studiate, di particolare interesse risulta quella denominata “V-Expander” (Figura 11) che ha le seguenti caratteristiche:

- due puntoni connessi nel nodo di estremità di un cavo verticale (expander) formano un triangolo la cui altezza è determinata dal cavo stesso,
- riducendo l’altezza dell’expander si introduce negli elementi adiacenti uno stato di pre-sollecitazione,
- un sistema di cavi (diagonali e orizzontali) completano la morfologia della cella.

La regolarità geometrica e le proprietà di simmetria rendono tale sistema facilmente assemblabile con altre celle simili per la realizzazione di strutture tensegrity complesse (travi, torri, archi, grigli piane e/o curve).

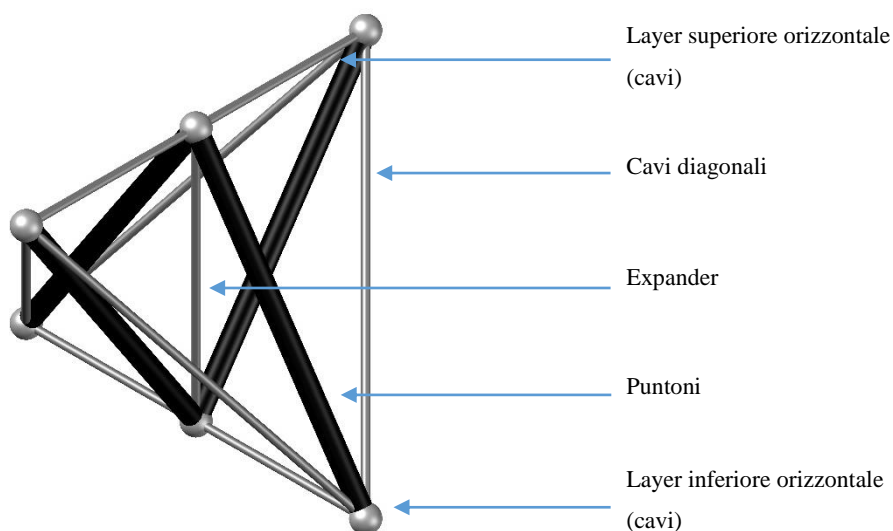
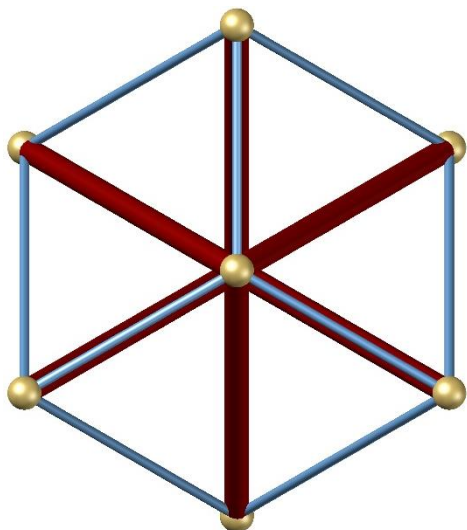


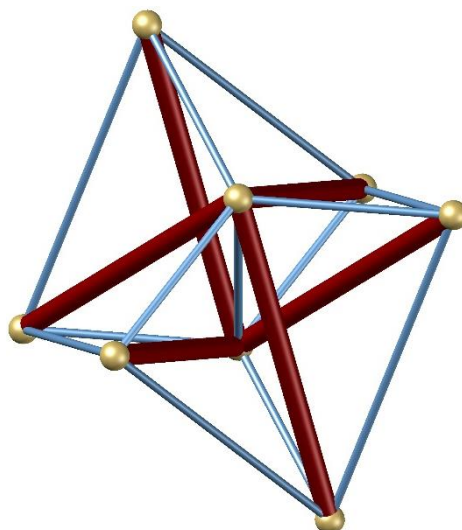
Figura 11. Modello della cella elementare.

Il numero dei puntoni che convergono nel nodo di estremità del cavo verticale caratterizza la topologia della cella che in generale viene definita $V_{m,n}$ -Expander: i pedici m e n indicano rispettivamente la molteplicità dei puntoni incidenti nell'estremità superiore e in quella inferiore del cavo verticale. Per ragioni di simmetria, è preferibile che risulti $m = n$. In Figura 12 si riportano alcuni esempi di celle elementari tensegrity V-Expander con vari indici di molteplicità dei puntoni.

a)



b)



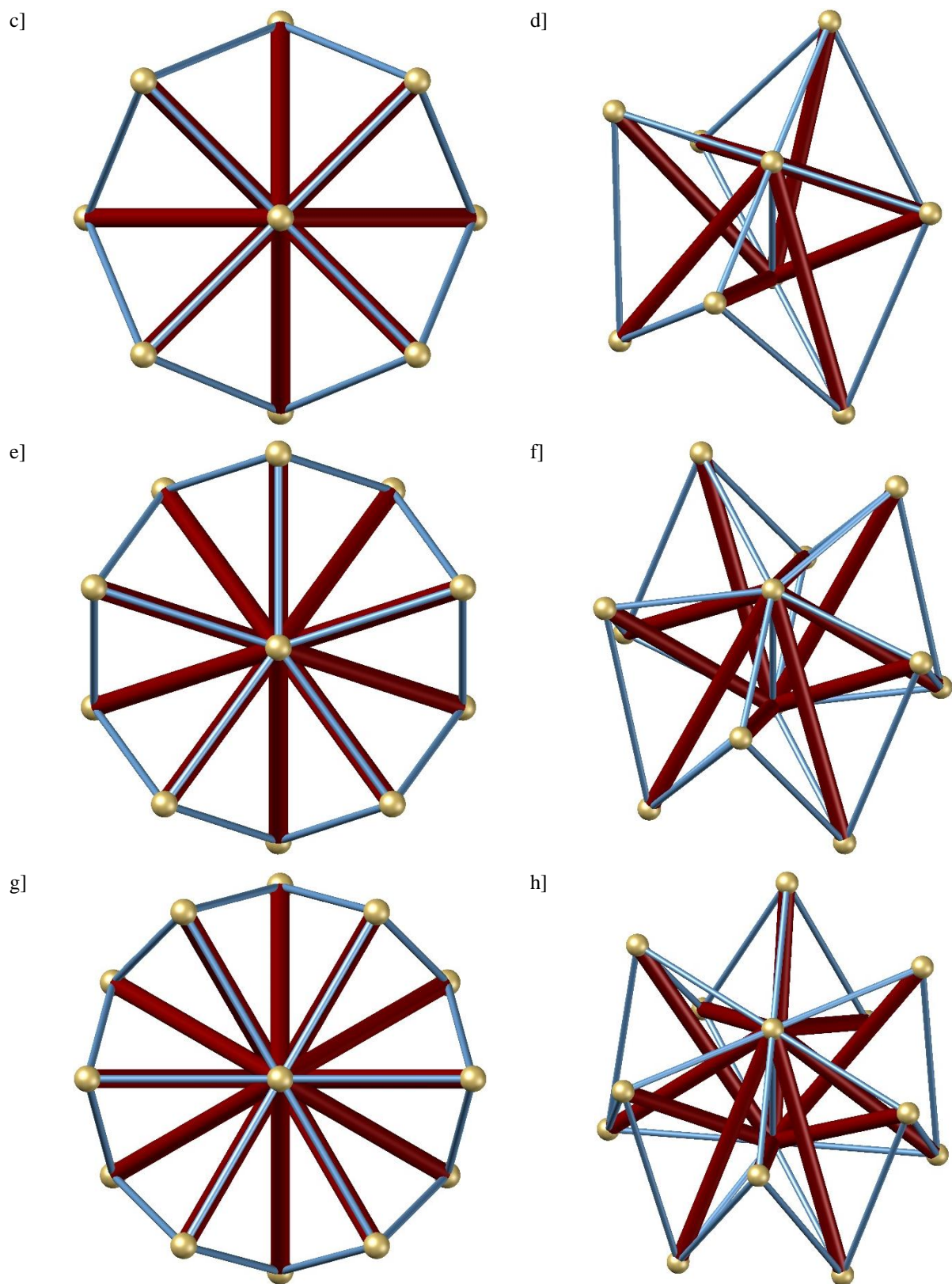


Figura 12. a) V₃-Expander vista dall'alto. b) V₃-Expander vista assonometrica. c) V₄-Expander vista dall'alto. d) V₄-Expander vista assonometrica. e) V₅-Expander vista dall'alto. f) V₅-Expander vista assonometrica. g) V₆-Expander vista dall'alto. h) V₆-Expander vista assonometrica.

Fra le matrici analizzate, il gruppo di ricerca di Motro ha selezionato la griglia bi-direzionale V₂-Expander; con tale cella è stata costruita in laboratorio una copertura piana di 82 m², dal peso di 900 kg, progettata secondo le indicazioni dell'Eurocodice 3. Di seguito si riportano alcune significative immagini della sperimentazione, condotta presso il Laboratorio di Meccanica e Ingegneria Civile dell'Università di Montpellier II, tratte da [3]. (Figura 13).

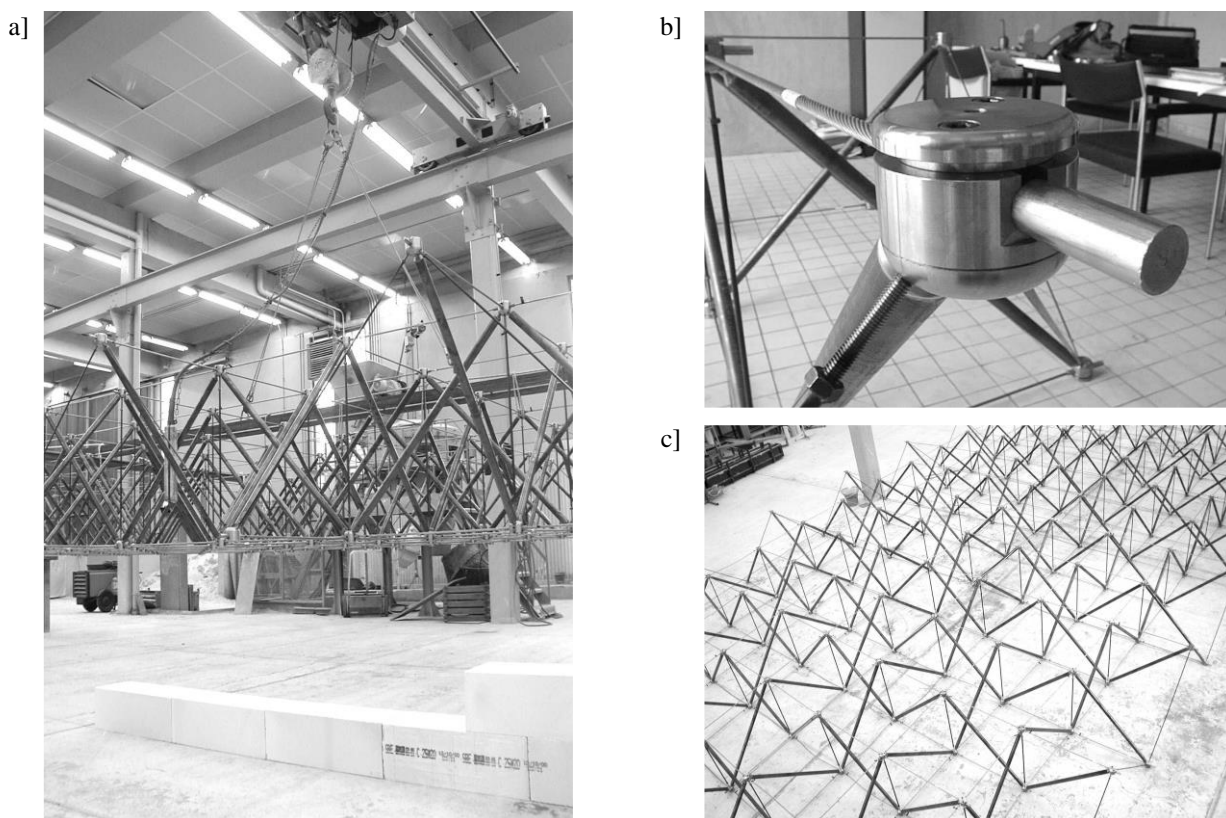


Figura 13. a) Sollevamento della griglia. b) Dettaglio del nodo di giunzione periferico. c) Prospettiva della griglia.

La cella tensegrity V-Expander, brevettata da Motro e V. Raducanu [5], assemblata nella conformazione a griglia, o secondo altre morfologie e topologie, lascia comunque spazio ad alcuni possibili sviluppi suggeriti dallo stesso Motro [2]:

- possibilità di introdurre delle aperture nella griglia,
- possibilità di generare superfici con semplice o doppia curvatura,
- possibilità di creare geometrie differenti variando la lunghezza degli elementi verticali (distanza tra i layer).

Quest'ultimo punto ha ispirato lo studio condotto in questo lavoro di tesi; in particolare si è cercato di rispondere alle seguenti domande:

- 1) È possibile creare una serie di varianti della cella elementare proposta da Motro modificando la topologia e il numero degli elementi?

- 2) È possibile determinare una soluzione in forma chiusa dello stato di auto-sollecitazione ammissibile e dei meccanismi infinitesimi di tali varianti?
- 3) È possibile determinare la soluzione in forma chiusa dello stato di auto-sollecitazione ammissibile e dei meccanismi infinitesimi di un opportuno assemblaggio (a torre) delle varianti proposte?

4.2 DEFINIZIONE DEL MODELLO

Per rispondere al primo dei tre quesiti posti al termine di §4.1, partendo dalla topologia della cella tensegrity ideata da Motro sono state costruite nuove celle tensegrity, dalla proprietà meccaniche interessanti.

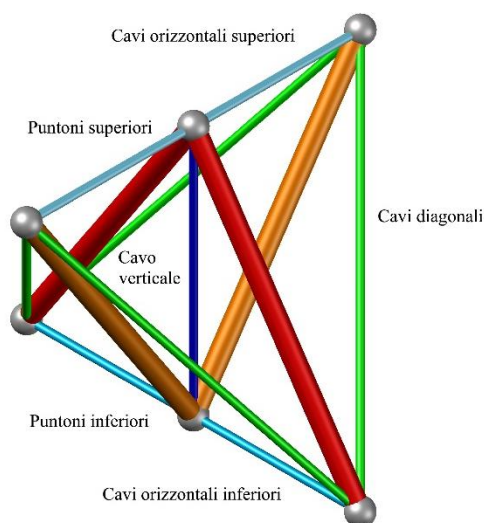


Figura 14. Schema della cella elementare.

Come suggerisce il modello in Fig. 14, è possibile distinguere nella cella alcuni elementi che godono delle stesse proprietà geometriche e, come si dimostra in seguito, meccaniche (densità di forza e sforzo normale):

- un cavo verticale (blu) che rappresenta l'asse expander della cella,
- i cavi orizzontali superiori e inferiori (ciano),
- due coppie di puntoni (inferiori (ocra), superiori (rosso)), ciascuna delle quali connessa ad un'estremità del cavo verticale,
- i cavi diagonali (verde) che delimitano la cella.

A partire da questo modello si propongono in particolare le seguenti 5 varianti della cella elementare tensegrity di Motro:

- Variante I, presenta la stessa topologia della cella tensegrity originale con la differenza che i nodi di estremità del cavo verticale non sono allineati con i cavi orizzontali e pertanto non giacciono sulle direttrici individuate da tali cavi. Tale geometria consente di considerare i layer orizzontali composti da un solo cavo (Figura 15);

- Variante II, differisce dalla Variante I per la sostituzione del cavo orizzontale inferiore (per la simmetria della struttura è indifferente la scelta del layer) con due cavi connessi entrambi al nodo di estremità inferiore dell'expander e ai nodi inferiori dei puntoni superiori (Figura 16);
- Variante III, in tale variante si realizza la stessa trasformazione topologica della Variante II ad entrambi i layer orizzontali e pertanto si introducono due coppie di cavi in sostituzione dei cavi orizzontali inferiore e superiore (Figura 17);
- Variante IV, si differenzia dalla variante III per il reinserimento del cavo orizzontale inferiore (anche in tal caso, in ragione della simmetria, la scelta del layer è indifferente) (Figura 18);
- Variante V, rispetto alla Variante IV si reinserisce il cavo orizzontale superiore. Inoltre, in virtù di un comportamento meccanico differente rispetto alle precedenti varianti, in quest'ultima cella risultano compressi gli elementi tesi inseriti nella Variante II e nella Variante III (Figura 19).

Si sottolinea che la Variante I costituisce una generalizzazione della cella brevettata da Motro, e presente negli studi di Buckminster Fuller.

Tale variante infatti coincide con la cella di Motro esclusivamente nel caso in cui l'altezza del cavo verticale è pari alla distanza tra i due layer orizzontali del sistema. Dalla Variante I si ottengono le restanti varianti per successive introduzioni e/o esclusioni di elementi, ciò consente di generare una "famiglia" di celle tensegrity elementari V-Expander, le cui proprietà geometriche e meccaniche verranno descritte nei paragrafi successivi.

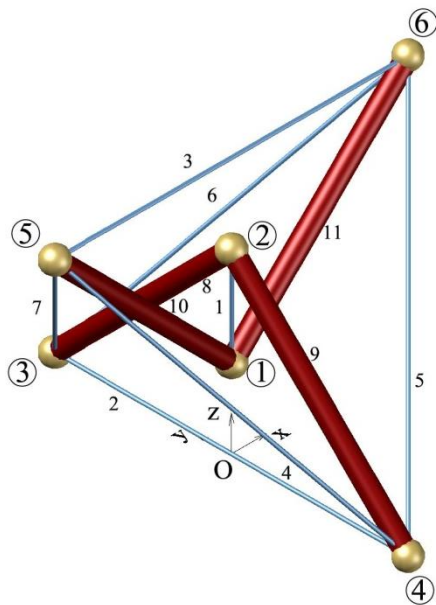


Figura 15. Variante I, assonometria.

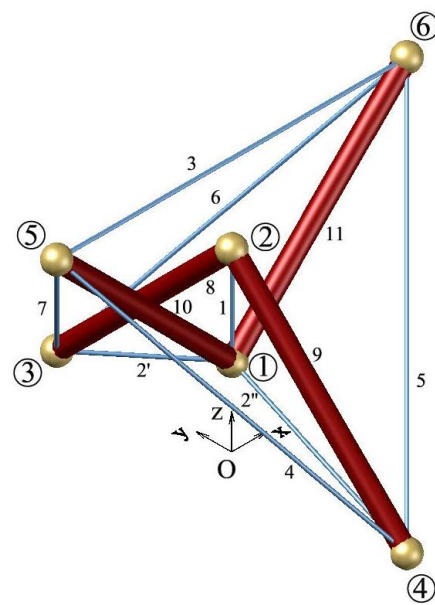


Figura 16. Variante II, assonometria.

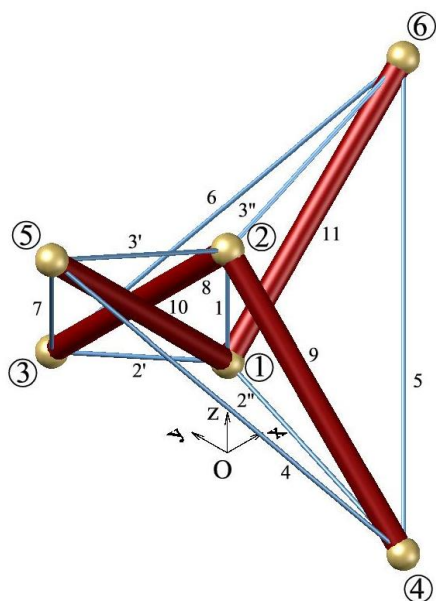


Figura 17. Variante III, assonometria.

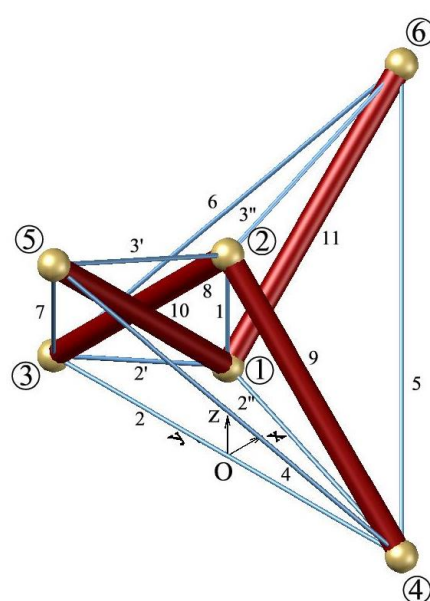


Figura 18. Variante IV, assonometria.

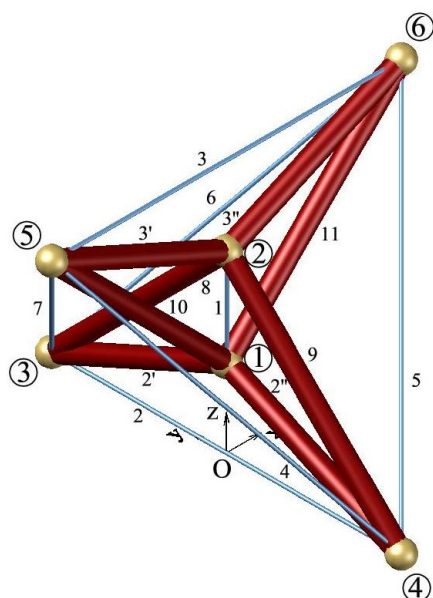


Figura 19. Variante V, assonometria.

Con riferimento alle precedenti figure e tenendo conto delle proprietà di simmetria delle celle si identificano gli elementi attraverso la seguente notazione:

- CV, cavo verticale 1,
- CH, cavi orizzontali 2 (inferiore) e 3 (superiore),
- CL, cavi inferiori 2' e 2'' (punti per la Variante V),
- CU, cavi superiori 3' e 3'' (punti per la Variante V),
- CD, cavi diagonali 4, 5, 6 e 7,
- S2, punti superiori 8 e 9,

- S1, puntoni inferiori 10 e 11.

	m	s	c
Variante I	11	4	7
Variante II	12	4	8
Variante III	13	4	9
Variante IV	14	4	10
Variante V	15	8	7

Tabella 5. Caratteristiche topologiche delle varianti.

Nella Tabella 5 si riporta una sintesi delle caratteristiche topologiche delle varianti proposte.

Le varianti tensegrity proposte mostrano una complessità crescente, dalla Variante I alla Variante V. Si osserva che il simplex free-standing è composto da 12 elementi: 3 puntoni e 9 cavi. Richiamando il concetto di valenza \bar{v}_i ($i=1,2,\dots,n$) del nodo i -esimo di un grafo [6], ovvero il numero di elementi che convergono nel nodo, è possibile determinare la valenza massima \bar{v}_{\max} e la valenza minima \bar{v}_{\min} di una cella tensegrity, rispettivamente pari al numero massimo e al numero minimo di elementi incidenti nei nodi della struttura. Si suggerisce di considerare come parametro topologico in grado di descrivere il grado di complessità di una struttura tensegrity, oltre al numero totale di elementi m , anche la valenza massima della cella: tale indicatore diventa tanto più significativo quanto più piccola è la scala a cui si fa riferimento per la realizzazione delle celle (si veda ad esempio l'utilizzo dei sistemi tensegrity per la realizzazione dei cosiddetti *lattice materials* [7, 8]). Ciò detto, nella Tabella 6 si riportano le valenze, massima e minima, determinate per ciascuna variante:

	m	\bar{v}_{\max}	\bar{v}_{\min}
Variante I	11	4	3
Variante II	12	5	3
Variante III	13	5	4
Variante IV	14	5	4
Variante V	15	5	5

Tabella 6. Valenze dei nodi delle varianti.

Si fa notare che il simplex free-standing, in virtù delle proprietà di simmetria di cui gode, ha valenza massima ($\bar{v}_{\max} = \bar{v}_{\min}$) pari a 4, confrontabile quindi con quella delle cinque varianti proposte.

4.3 DEFINIZIONE DELLA GEOMETRIA

La definizione della geometria di ciascuna delle 5 celle tensegrity analizzate è condotta considerando una descrizione parametrica della configurazione geometrica. Si osserva che tale configurazione può essere descritta compiutamente utilizzando esclusivamente 3 parametri geometrici (Figura 20):

- r , il raggio della circonferenza che circoscrive, nel piano xy , le proiezioni dei nodi esterni dei puntone,
- h , l'altezza del triangolo (V-Expander) formato da ciascuna coppia di puntone e misurata lungo il cavo verticale,
- d , la misura della sovrapposizione dei due triangoli, mutuamente ortogonali nello spazio euclideo tridimensionale, formati da ciascuna coppia di puntone (tale parametro risulta essere quindi la lunghezza dell'asse expander della cella) ($0 < d < h$).

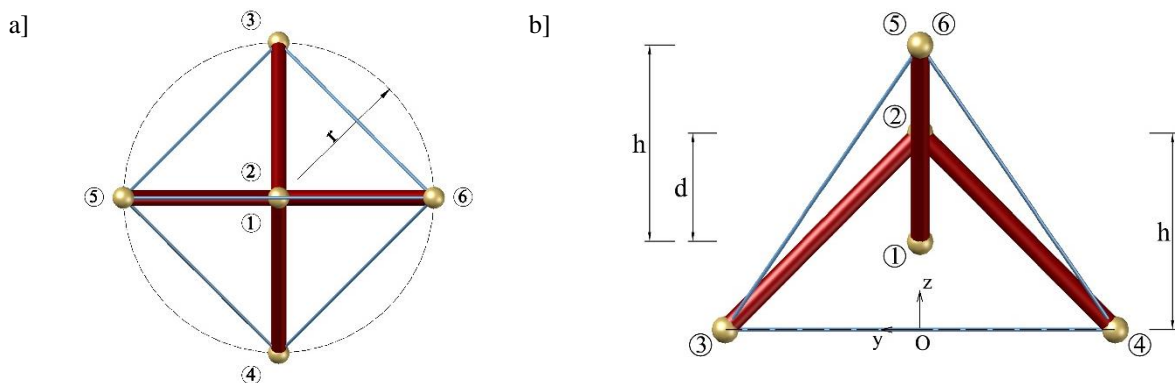


Figura 21. Parametri per la definizione della geometria a) vista dall'alto (Variante I). b) vista laterale (Variante I).

Una descrizione parametrica alternativa della geometria della cella può essere fatta considerando, in sostituzione del raggio r , l'angolo α (misurato nel piano che contiene il triangolo V-Expander) che ciascun puntone forma con il cavo verticale (Figura 22):

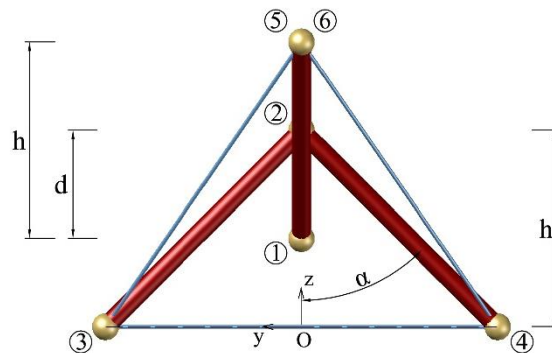


Figura 22. Descrizione alternativa della geometria.

In virtù di tale descrizione parametrica, è possibile esprimere i vettori delle coordinate nodali \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} , della cella free-standing nel sistema di riferimento $Oxyz$ (uguali per tutte le 5 varianti analizzate) come riportato in Tabella 7.

	Vettori delle coordinate nodali
\mathbf{x}	{0, 0, 0, 0, -r, r}
\mathbf{y}	{0, 0, r, -r, 0, 0}
\mathbf{z}	{h-d, h, 0, 0, 2h-d, 2h-d}

Tabella 7. Vettori delle coordinate nodali delle celle.

Pertanto la matrice $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{3 \times 6}$, vettorializzazione dei vettori delle coordinate dei nodi, risulta essere definita nel modo seguente:

$$\mathbf{N}_{(3 \times 6)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -r & r \\ 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 \\ h-d & h & 0 & 0 & 2h-d & 2h-d \end{bmatrix}, \quad (154)$$

Ricordando la (14), è possibile determinare la lunghezza dell'elemento k -esimo, considerando \mathbf{C}_k la k -esima riga di \mathbf{C} , mediante la seguente espressione:

$$l_k = \sqrt{(\mathbf{C}_k \mathbf{x})^2 + (\mathbf{C}_k \mathbf{y})^2 + (\mathbf{C}_k \mathbf{z})^2}, \quad (155)$$

Nella Tabella 8 si riportano le lunghezze degli elementi calcolati con la precedente espressione.

Elemento	Nodi	l_k
1	1 - 2	d
2	3 - 4	2r
2'	1 - 3	$\sqrt{(h-d)^2 + r^2}$
2''	1 - 4	$\sqrt{(h-d)^2 + r^2}$
3	5 - 6	2r
3'	2 - 5	$\sqrt{(h-d)^2 + r^2}$
3''	2 - 6	$\sqrt{(h-d)^2 + r^2}$

4	4 - 5	$\sqrt{(2h-d)^2 + 2r^2}$
5	4 - 6	$\sqrt{(2h-d)^2 + 2r^2}$
6	3 - 6	$\sqrt{(2h-d)^2 + 2r^2}$
7	3 - 5	$\sqrt{(2h-d)^2 + 2r^2}$
8	2 - 3	$\sqrt{h^2 + r^2}$
9	2 - 4	$\sqrt{h^2 + r^2}$
10	1 - 5	$\sqrt{h^2 + r^2}$
11	1 - 6	$\sqrt{h^2 + r^2}$

Tabella 8. Lunghezze degli elementi delle celle.

4.3.1 Variante I

Dalla (9) è possibile determinare la matrice di connessione $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{11 \times 6}$:

$$\mathbf{C}_{(11 \times 6)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (156)$$

Dalla (10), determinata la matrice di connessione della cella, è possibile calcolare la matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 11}$ degli elementi:

$$\mathbf{M}_{(3 \times 11)} = \mathbf{N}\mathbf{C}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2r & r & -r & -r & r & 0 & 0 & r & -r \\ 0 & 2r & 0 & -r & -r & r & r & -r & r & 0 & 0 \\ -d & 0 & 0 & d-2h & d-2h & d-2h & d-2h & h & h & -h & -h \end{bmatrix}. \quad (157)$$

I vettori delle differenze delle coordinate nodali \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} , si determinano a partire dalle coordinate nodali definite in Tabella 7, mediante le (13):

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \{0, 0, -2r, r, -r, -r, r, 0, 0, r, -r\}, \quad (158)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{y} = \{0, 2r, 0, -r, -r, r, r, -r, r, 0, 0\}, \quad (159)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{z} = \{-d, 0, 0, d-2h, d-2h, d-2h, d-2h, h, h, -h, -h\}. \quad (160)$$

Ricordando inoltre la (24) è possibile definire la matrice geometrica $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{11 \times 6}$:

$$\mathbf{G}_{(11 \times 6)} = [\mathbf{U}\mathbf{u}, \mathbf{V}\mathbf{v}, \mathbf{W}\mathbf{w}, \mathbf{U}\mathbf{v}, \mathbf{U}\mathbf{w}, \mathbf{V}\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (2h-d)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (2h-d)r & (2h-d)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (2h-d)r & (d-2h)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \end{bmatrix}, \quad (161)$$

il cui rango r_G è pari a 6, il che assicura che la cella tensegrity è non degenera nello spazio euclideo tridimensionale.

4.3.2 Variante II

Analogamente, sfruttando le relazioni descritte nel capitolo 2, è possibile determinare gli operatori che descrivono la configurazione geometrica della seconda variante tensegrity proposta. La matrice di connessione $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{12 \times 6}$, in tal caso, è espressa:

$$\mathbf{C}_{(12 \times 6)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2' \\ 2'' \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6' \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}, \quad (162)$$

Si determina quindi la matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 12}$ degli elementi:

$$\mathbf{M}_{(3 \times 12)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -2r & r & -r & -r & r & 0 & 0 & r & -r \\ 0 & -r & r & 0 & -r & -r & r & r & -r & r & 0 & 0 \\ -d & -d+h & -d+h & 0 & d-2h & d-2h & d-2h & d-2h & h & h & -h & -h \end{bmatrix}, \quad (163)$$

e i vettori delle differenze delle coordinate nodali \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} :

$$\mathbf{u} = \{0, 0, 0, -2r, r, -r, -r, r, 0, 0, r, -r\}, \quad (164)$$

$$\mathbf{v} = \{0, -r, r, 0, -r, -r, r, r, -r, r, 0, 0\}, \quad (165)$$

$$\mathbf{w} = \{-d, -d+h, -d+h, 0, d-2h, d-2h, d-2h, d-2h, h, h, -h, -h\}. \quad (166)$$

Ricordando infine la (24) è possibile definire la matrice geometrica $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{12 \times 6}$:

$$\mathbf{G}_{(12 \times 6)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & (h-d)^2 & 0 & 0 & (d-h)r \\ 0 & r^2 & (h-d)^2 & 0 & 0 & (h-d)r \\ 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (2h-d)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (2h-d)r & (2h-d)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (2h-d)r & (d-2h)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \end{bmatrix}. \quad (167)$$

Il rango r_G della matrice geometrica è pari a 6, il che assicura che la cella tensegrity è non degenera nello spazio euclideo tridimensionale.

4.3.3 Variante III

Per la Variante III, la matrice di connessione $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{13 \times 6}$ è espressa:

$$\mathbf{C}_{(13 \times 6)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2' \\ 2'' \\ 3' \\ 3'' \\ 4 \\ 5, \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}, \quad (168)$$

e attraverso la quale si determina la matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 13}$ degli elementi:

$$\mathbf{M}_{(3 \times 13)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & r & -r & r & -r & -r & r & 0 & 0 & r & -r \\ 0 & -r & r & 0 & 0 & -r & -r & r & r & -r & r & 0 & 0 \\ -d & -d+h & -d+h & d-h & d-h & d-2h & d-2h & d-2h & d-2h & h & h & -h & -h \end{bmatrix}, \quad (169)$$

e i vettori delle differenze delle coordinate nodali \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} :

$$\mathbf{u} = \{0, 0, 0, r, -r, r, -r, -r, r, 0, 0, r, -r\}, \quad (170)$$

$$\mathbf{v} = \{0, -r, r, 0, 0, -r, -r, r, r, -r, r, 0, 0\}, \quad (171)$$

$$\mathbf{w} = \{-d, -d+h, -d+h, d-h, d-h, d-2h, d-2h, d-2h, d-2h, h, h, -h, -h\}. \quad (172)$$

Si definisce quindi la matrice geometrica $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{13 \times 6}$:

$$\mathbf{G}_{(13 \times 6)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & (h-d)^2 & 0 & 0 & (d-h)r \\ 0 & r^2 & (h-d)^2 & 0 & 0 & (h-d)r \\ r^2 & 0 & (d-h)^2 & 0 & (d-h)r & 0 \\ r^2 & 0 & (d-h)^2 & 0 & (h-d)r & 0 \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (2h-d)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (2h-d)r & (2h-d)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (2h-d)r & (d-2h)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \end{bmatrix}. \quad (173)$$

Anche in questa variante, il rango r_G della matrice geometrica è pari a 6, il che assicura che la cella tensegrity è non degenera nello spazio euclideo tridimensionale.

4.3.4 Variante IV

Nella Variante IV, la matrice di connessione $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{14 \times 6}$ è definita come segue:

$$\mathbf{C}_{(14 \times 6)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2' \\ 2'' \\ 3' \\ 3'' \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}. \quad (174)$$

Si determina la matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 14}$ degli elementi:

$$\mathbf{M}_{(3 \times 14)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & r & -r & -r & r & 0 & 0 & r & -r \\ 0 & 2r & -r & r & 0 & 0 & -r & -r & r & r & -r & r & 0 & 0 \\ -d & 0 & -d+h & -d+h & d-h & d-h & d-2h & d-2h & d-2h & d-2h & h & h & -h & -h \end{bmatrix}. \quad (175)$$

I vettori delle differenze delle coordinate nodali \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} sono determinati con le seguenti espressioni:

$$\mathbf{u} = \{0, 0, 0, 0, r, -r, r, -r, -r, r, 0, 0, r, -r\}, \quad (176)$$

$$\mathbf{v} = \{0, 2r, -r, r, 0, 0, -r, -r, r, r, -r, r, 0, 0\}, \quad (177)$$

$$\mathbf{w} = \{-d, 0, -d+h, -d+h, d-h, d-h, d-2h, d-2h, d-2h, d-2h, h, h, -h, -h\}. \quad (178)$$

Si definisce quindi la matrice geometrica $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{13 \times 6}$:

$$\mathbf{G}_{(14 \times 6)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & (h-d)^2 & 0 & 0 & (d-h)r \\ 0 & r^2 & (h-d)^2 & 0 & 0 & (h-d)r \\ r^2 & 0 & (d-h)^2 & 0 & (d-h)r & 0 \\ r^2 & 0 & (d-h)^2 & 0 & (h-d)r & 0 \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (2h-d)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (2h-d)r & (2h-d)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (2h-d)r & (d-2h)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \end{bmatrix}. \quad (179)$$

Dalla (179) risulta che il rango r_G della matrice geometrica è pari a 6, il che assicura che la cella tensegrity è non degenere nello spazio euclideo tridimensionale.

4.3.5 Variante V

In definitiva per l'ultima variante, dalla (9) è possibile determinare la matrice di connessione $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{15 \times 6}$:

$$\mathbf{C}_{(15 \times 6)} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 2' \\ 2'' \\ 3 \\ 3' \\ 3'' \\ 4. \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \\ 10 \\ 11 \end{matrix}. \quad (180)$$

Dalla (10), nota la matrice di connessione della cella, è possibile calcolare la matrice $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{3 \times 15}$ degli elementi:

$$\mathbf{M}_{(3 \times 15)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -2r & r & -r & r & -r & -r & r & 0 & 0 & r & -r \\ 0 & 2r & -r & r & 0 & 0 & 0 & -r & -r & r & r & -r & r & 0 & 0 \\ -d & 0 & -d+h & -d+h & 0 & d-h & d-h & d-2h & d-2h & d-2h & d-2h & h & h & -h & -h \end{bmatrix}. \quad (181)$$

I vettori delle differenze delle coordinate nodali \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} , si determinano a partire dalle coordinate nodali definite in Tabella 7, mediante le (13), ovvero:

$$\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \{0, 0, 0, 0, -2r, r, -r, r, -r, -r, r, 0, 0, r, -r\}, \quad (182)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{C}\mathbf{y} = \{0, 2r, -r, r, 0, 0, 0, -r, -r, r, r, -r, r, 0, 0\}, \quad (183)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{C}\mathbf{z} = \{-d, 0, -d+h, -d+h, 0, d-h, d-h, d-2h, d-2h, d-2h, d-2h, h, h, -h, -h\}. \quad (184)$$

Ed infine la matrice geometrica $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{15 \times 6}$ risulta essere pari a:

$$\mathbf{G}_{(15 \times 6)} = [\mathbf{U}\mathbf{u}, \mathbf{V}\mathbf{v}, \mathbf{W}\mathbf{w}, \mathbf{U}\mathbf{v}, \mathbf{U}\mathbf{w}, \mathbf{V}\mathbf{w}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & (h-d)^2 & 0 & 0 & (d-h)r \\ 0 & r^2 & (h-d)^2 & 0 & 0 & (h-d)r \\ 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ r^2 & 0 & (d-h)^2 & 0 & (d-h)r & 0 \\ r^2 & 0 & (d-h)^2 & 0 & (h-d)r & 0 \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (2h-d)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (2h-d)r & (2h-d)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (2h-d)r & (d-2h)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \end{bmatrix}, \quad (185)$$

il cui rango r_G è pari a 6, il che assicura che la cella tensegrity è non degenera nello spazio euclideo tridimensionale.

4.4 ANALISI DELLO STATO DI PRE-SOLLECITAZIONE

A valle della definizione del modello e della descrizione parametrica della geometria è possibile analizzare gli stati di pre-sollecitazione possibili negli elementi che compongono le celle innovative tensegrity già descritte; ciò può farsi in riferimento al punto 3 del diagramma di flusso presentato in §2.2.4. Nello specifico, si riportano nei seguenti paragrafi, la matrice di equilibrio \mathbf{A} (o dualmente la matrice cinematica \mathbf{B}), lo stato di auto-sollecitazione ammissibile $\bar{\mathbf{q}}_a$ e i meccanismi infinitesimi \mathbf{d}_m determinati per ciascuna delle 5 varianti della cella elementare tensegrity V-Expander.

4.4.1 Variante I

Nell'ipotesi di struttura free-standing e in assenza di carichi esterni, si può determinare la matrice di equilibrio $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{18 \times 11}$ della prima variante utilizzando la (37) e in virtù della (156):

$$\mathbf{A}_{(18 \times 11)} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{C}\mathbf{x}) \\ \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{C}\mathbf{y}) \\ \mathbf{C}^T \text{diag}(\mathbf{C}\mathbf{z}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2r & -r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 2r & 0 & r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & r & 0 & 0 \\ 0 & 2r & 0 & 0 & 0 & r & r & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2r & 0 & -r & -r & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h & -h \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d-2h & d-2h & -h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-2h & d-2h & 0 & 0 & 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2h-d & 0 & 0 & 2h-d & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2h-d & 2h-d & 0 & 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}. \quad (186)$$

Dalla scrittura del sistema delle equazioni di equilibrio (38) e dall'analisi dei sottospazi fondamentali associati alla matrice di equilibrio \mathbf{A} , è possibile determinarne il nucleo $N(\mathbf{A})$, che rappresenta il sottospazio vettoriale delle pre-sollecitazioni negli elementi in assenza di carichi esterni.

Il rango r_A di \mathbf{A} è pari a 10, pertanto dalla (39) e dalla (20) si ricavano rispettivamente la nullità s_A della matrice di equilibrio e il numero m_i dei meccanismi infinitesimi

$$s_A = m - r_A = 11 - 10 = 1, \quad (187)$$

$$m_i = 3n - n^{nb} - r_B = 18 - 6 - 10 = 2. \quad (188)$$

Da ciò si deduce che esistono un unico stato di auto-sollecitazione equilibrato \mathbf{q}_0 e 2 meccanismi infinitesimi (escludendo i 6 moti rigidi), le cui basi sono riportate rispettivamente nelle Tabelle 9 e 10.

Stato di auto-sollecitazione equilibrato	
\mathbf{q}_0	$\left\{ \frac{2h}{d}, \frac{d-h}{2(d-2h)}, \frac{-d+h}{2(-d+2h)}, \frac{h}{2(-d+2h)}, \frac{h}{2(-d+2h)}, \frac{h}{2(-d+2h)}, \frac{h}{2(-d+2h)}, -1, -1, -1, -1 \right\}$

Tabella 9. Stato di auto-sollecitazione equilibrato Variante I.

Meccanismi infinitesimi	
\mathbf{d}_{m1}	$\left\{ \frac{h}{2r}, 0, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, 0, -\frac{d-h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 1 \right\}$
\mathbf{d}_{m2}	$\left\{ -\frac{h}{2r}, 0, -\frac{-d+2h}{2r}, -\frac{-d+2h}{2r}, 0, 0, 0, -\frac{d-h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 1, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m3}	$\left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{d+h}{r}, -\frac{-d+2h}{r}, -\frac{-d+2h}{r}, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m4}	$\left\{ 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m5}	$\left\{ 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m6}	$\{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
\mathbf{d}_{m7}	$\{1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$
\mathbf{d}_{m8}	$\{0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$

Tabella 10. Meccanismi infinitesimi della Variante I.

Dalla Tabella 9 si evince che lo stato di auto-sollecitazione equilibrato \mathbf{q}_0 che genera il nucleo di \mathbf{A} è in accordo con le proprietà di simmetria della cella tensegrity evidenziate in Fig. 14, e per di più, esso soddisfa le condizioni di comportamento meccanico unilatero degli elementi (cavi in trazione e puntoni in compressione); pertanto esso rappresenta uno stato di auto-sollecitazione ammissibile $\bar{\mathbf{q}}_a$ per la Variante I. Si osserva inoltre che $\bar{\mathbf{q}}_a$ (composto dai coefficienti di densità di forza degli elementi nello stato di auto-equilibrio) è espresso in forma parametrica rispetto ai parametri geometrici d e h che descrivono la geometria della cella.

Ricordando la definizione del parametro d , si fa notare che per ragioni di realizzabilità della cella tale valore deve essere strettamente maggiore di 0, mentre affinché resti invariata la topologia del sistema tale parametro deve risultare strettamente minore di h . Ciò detto, è possibile scrivere una relazione lineare tra i parametri d e h , in ragione di un coefficiente reale a :

$$d = a \cdot h, \quad (189)$$

con $a \in]0, 1[$.

Tenendo in conto la (189), si riportano di seguito le curve che esprimono la variazione dei coefficienti di densità di forza, rispettivamente, del cavo verticale (q_{cv} – Figura 23), del cavo orizzontale 2 (q_{ch2} – Figura

24) e del cavo diagonale 4 (q_{cd4} – Figura 25), in funzione dei possibili valori che il coefficiente a può assumere.

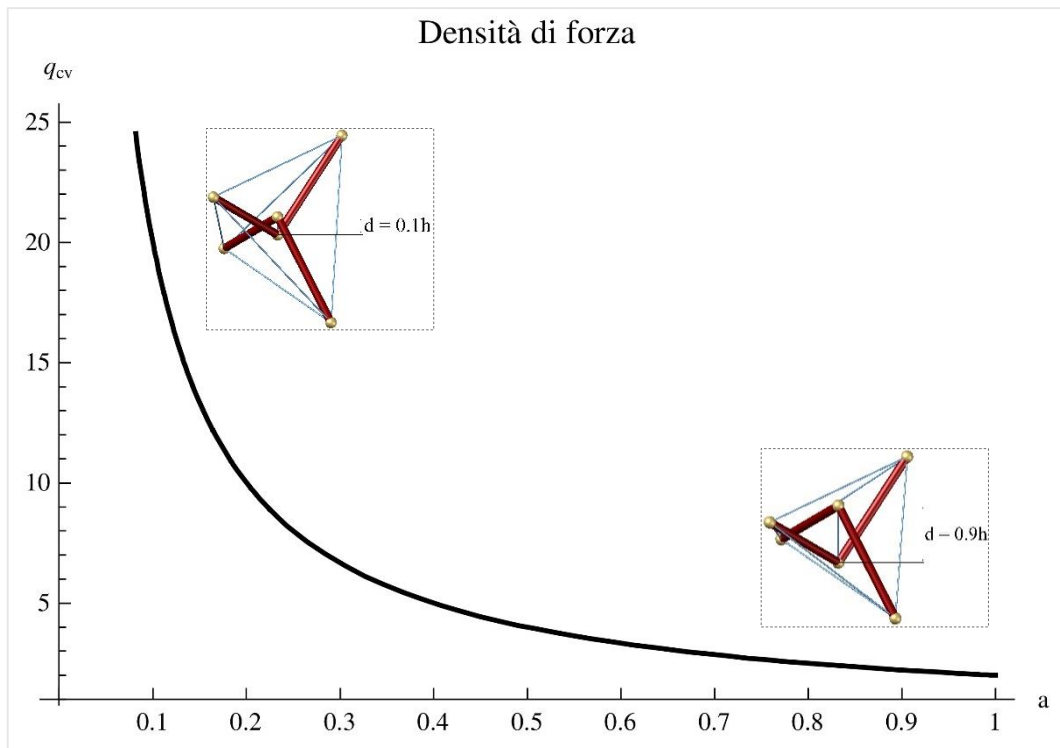


Figura 23. Densità di forza del cavo verticale nella Variante I.

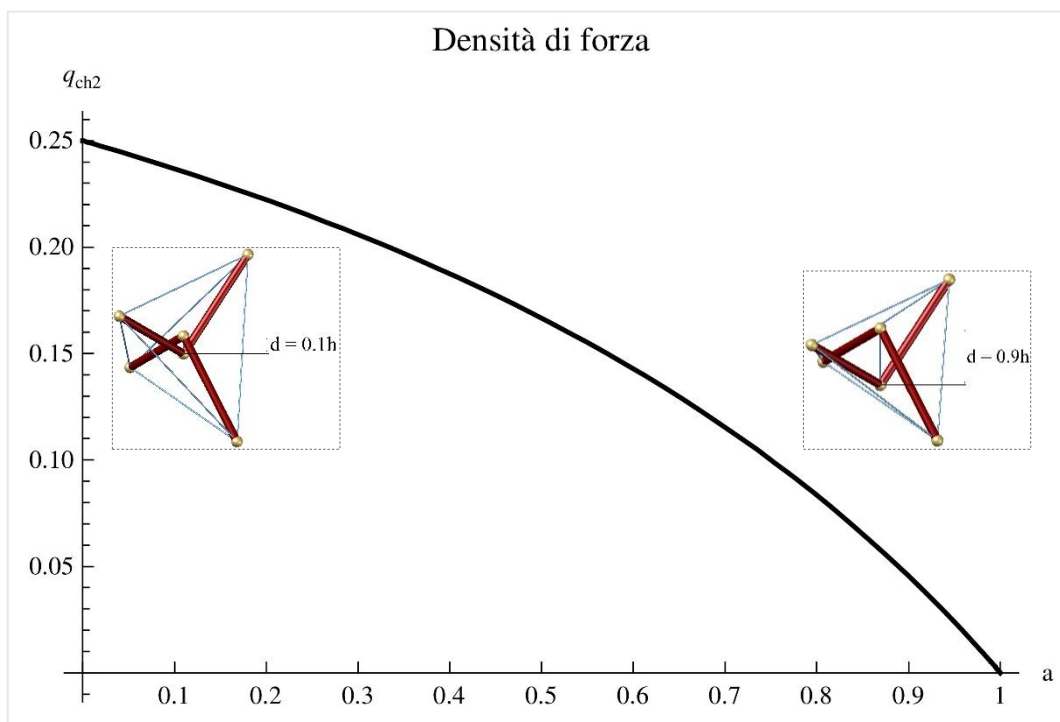


Figura 24. Densità di forza del cavo orizzontale 2 nella Variante I.

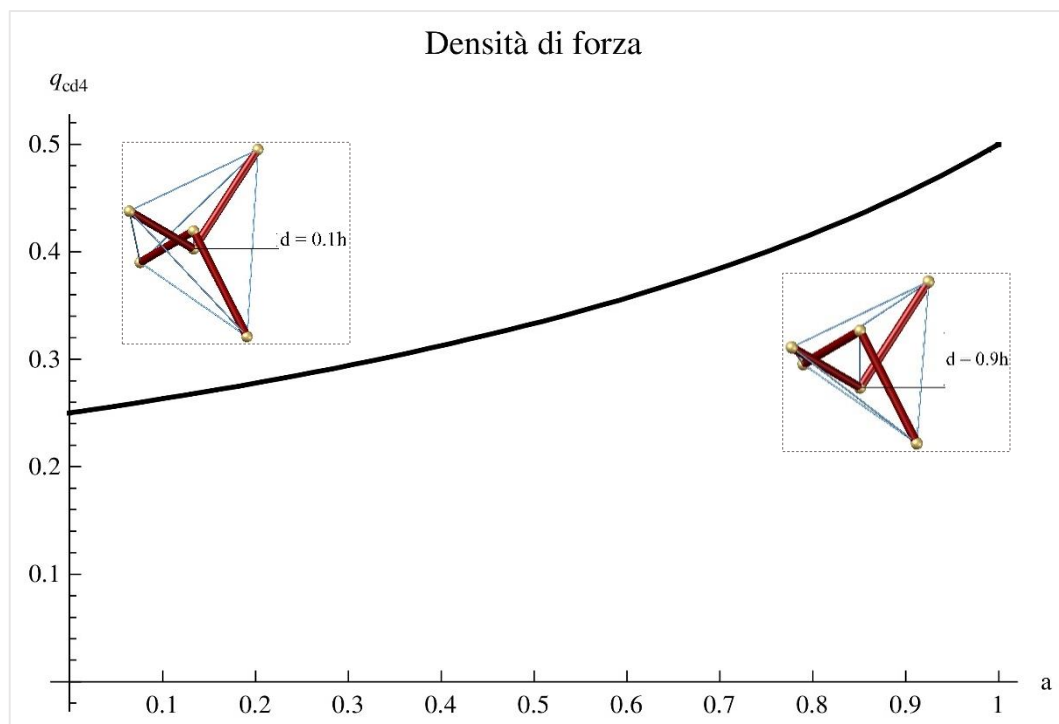


Figura 25. Densità di forza del cavo diagonale 4 nella Variante I.

In base ai risultati ottenuti è possibile fare le seguenti osservazioni:

- La densità di forza q_{cv} del cavo verticale decresce non linearmente all'aumentare del valore di a , ed in particolare quando tale valore tende ad 1 la densità di forza tende a 2,
- Per quanto concerne i cavi orizzontali, la densità di forza q_{ch} tende a zero al tendere del parametro a ad 1, ovvero quando il cavo verticale ha una lunghezza pari ad h i suoi nodi di estremità sono allineati rispettivamente con i nodi inferiori e superiori delle coppie di puntoni ed in tale condizione geometrica (collinearità dei nodi rispetto a ciascun layer) l'equilibrio dei suddetti nodi di estremità dei puntoni impone che sia nulla la densità di forza del cavo orizzontale. Tale risultato è in accordo con quanto determinato in [9],
- Nei cavi diagonali la densità di forza q_{cd} presenta un limite superiore pari a 0.5 nella condizione di collinearità dei nodi nei rispettivi layer.

Si riportano nei seguenti paragrafi i risultati dell'analisi dello stato di auto-equilibrio per le altre varianti tensegrity proposte.

4.4.2 Variante II

La matrice di equilibrio $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{18 \times 12}$ della Variante II risulta essere pari a:

$$\mathbf{A}_{(18 \times 12)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2r & -r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2r & 0 & r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & -r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & r & r & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & -r & -r & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d & h-d & h-d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h & -h \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h & h & 0 & 0 \\ 0 & d-h & 0 & 0 & 0 & 0 & d-2h & d-2h & -h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d-h & 0 & d-2h & d-2h & 0 & 0 & 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2h-d & 0 & 0 & 2h-d & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2h-d & 2h-d & 0 & 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}. \quad (190)$$

Il rango di tale matrice è pari a 11, pertanto dalla (39) e dalla (20) si ricavano rispettivamente la nullità s_A della matrice di equilibrio e il numero m_i dei meccanismi infinitesimi

$$s_A = m - r_A = 12 - 11 = 1, \quad (191)$$

$$m_i = 3n - n^{rb} - r_B = 18 - 6 - 11 = 1. \quad (192)$$

Da ciò si deduce che esistono un unico stato di auto-sollecitazione equilibrato \mathbf{q}_0 ed un unico meccanismo infinitesimo (escludendo i 6 moti rigidi). Le basi sono riportate rispettivamente nelle Tabelle 11 e 12.

Stato di auto-sollecitazione equilibrato	
\mathbf{q}_0	$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{2h^3}{d^2(d-2h)}, \frac{(d-h)h}{d(d-2h)}, \frac{(d-h)h}{d(d-2h)}, \frac{d-h}{2(d-2h)}, -\frac{h}{2(d-2h)}, \\ -\frac{h}{2(d-2h)}, -\frac{h}{2(d-2h)}, -\frac{h}{2(d-2h)}, \frac{h^2}{d(d-2h)}, \frac{h^2}{d(d-2h)}, -1, -1 \end{array} \right\}$

Tabella 11. Stato di auto-sollecitazione equilibrato Variante II.

Meccanismi infinitesimi	
\mathbf{d}_{m1}	$\left\{ \frac{h}{2r}, 0, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{h}{2r}, -\frac{d-h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 1 \right\}$
\mathbf{d}_{m2}	$\left\{ -\frac{h}{2r}, 0, -\frac{2h-d}{2r}, -\frac{2h-d}{2r}, 0, 0, \frac{h}{2r}, -\frac{d-h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 1, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m3}	$\left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{h}{r}, -\frac{h-d}{r}, -\frac{2h-d}{r}, -\frac{2h-d}{r}, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m4}	$\left\{ 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m5}	$\left\{ 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m6}	$\{ 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \}$
\mathbf{d}_{m7}	$\{ 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \}$

Tabella 12. Meccanismi infinitesimi della Variante II.

Dalla Tabella 11 si deduce che lo stato di auto-sollecitazione equilibrato \mathbf{q}_0 determinato è in accordo sia con le proprietà di simmetria della cella tensegrity e sia con le condizioni di comportamento meccanico unilatero degli elementi e pertanto tale vettore rappresenta un possibile stato di auto-sollecitazione ammissibile $\bar{\mathbf{q}}_a$ per la Variante II. Considerando la (189), si riportano di seguito le curve rappresentative della variazione dei coefficienti di densità di forza, rispettivamente, del cavo verticale (q_{cv} – Figura 26), del cavo inferiore 2' (q_{cl} – Figura 27), del cavo orizzontale 3 (q_{ch3} – Figura 28), del cavo diagonale 4 (q_{cd4} – Figura 29) e, infine, del puntone superiore 8 (q_{cs2} – Figura 30), al variare del parametro a .

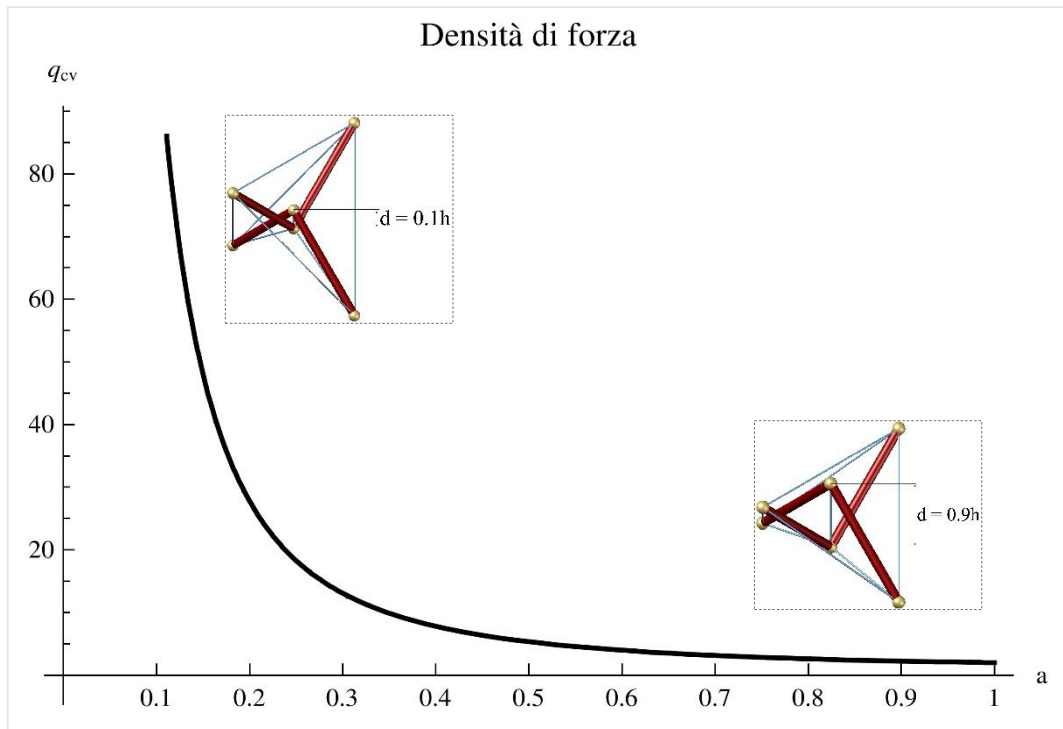


Figura 26. Densità di forza del cavo verticale nella Variante II.

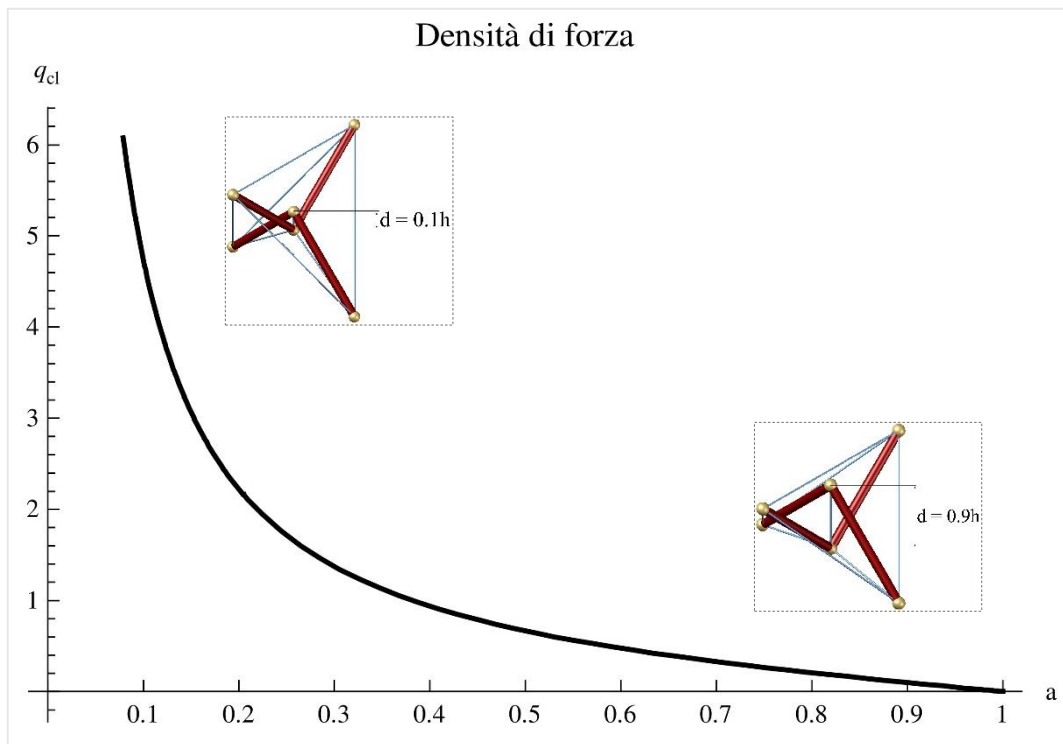


Figura 27. Densità di forza del cavo inferiore 2' nella Variante II.

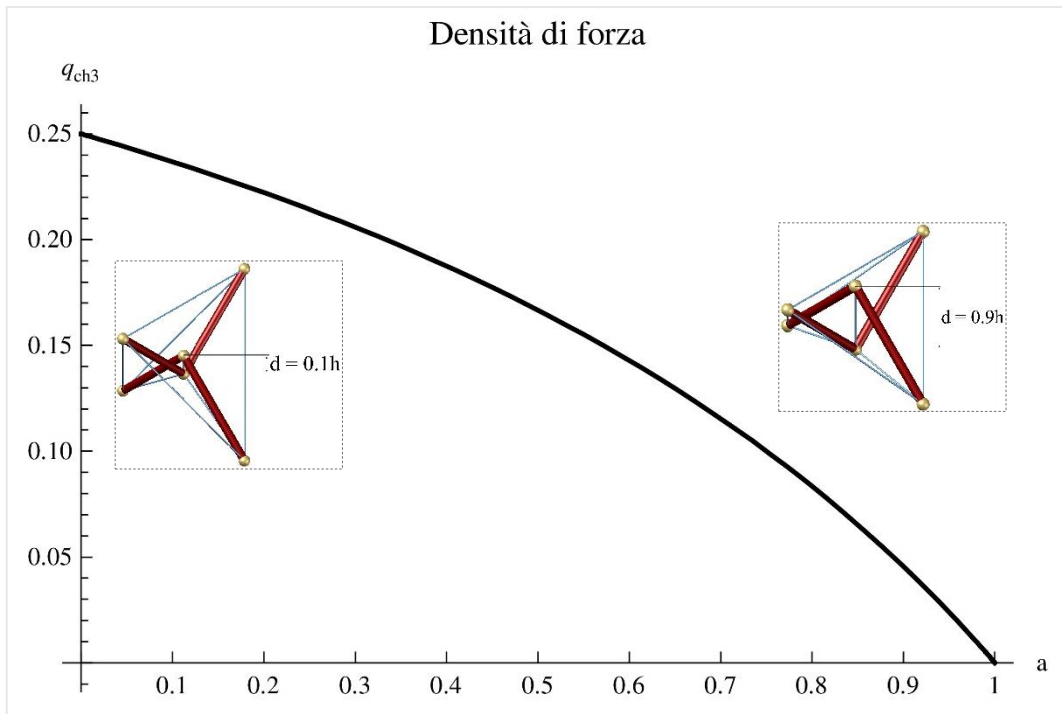


Figura 28. Densità di forza del cavo orizzontale 3 nella Variante II.

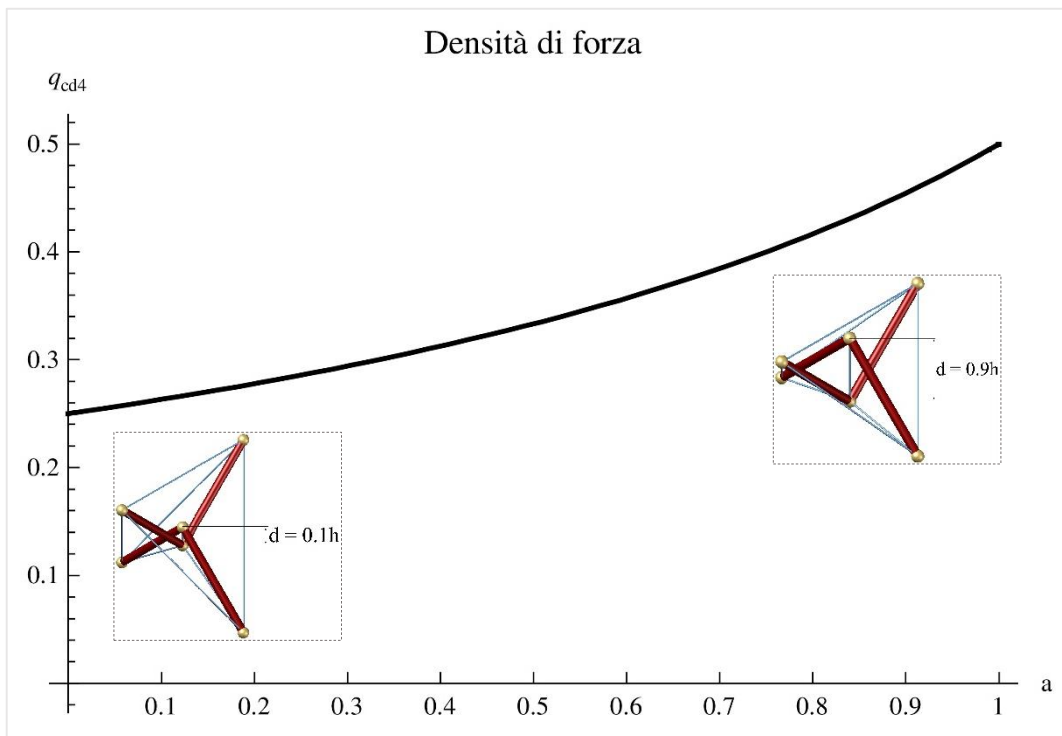


Figura 29. Densità di forza del cavo diagonale 4 nella Variante II.

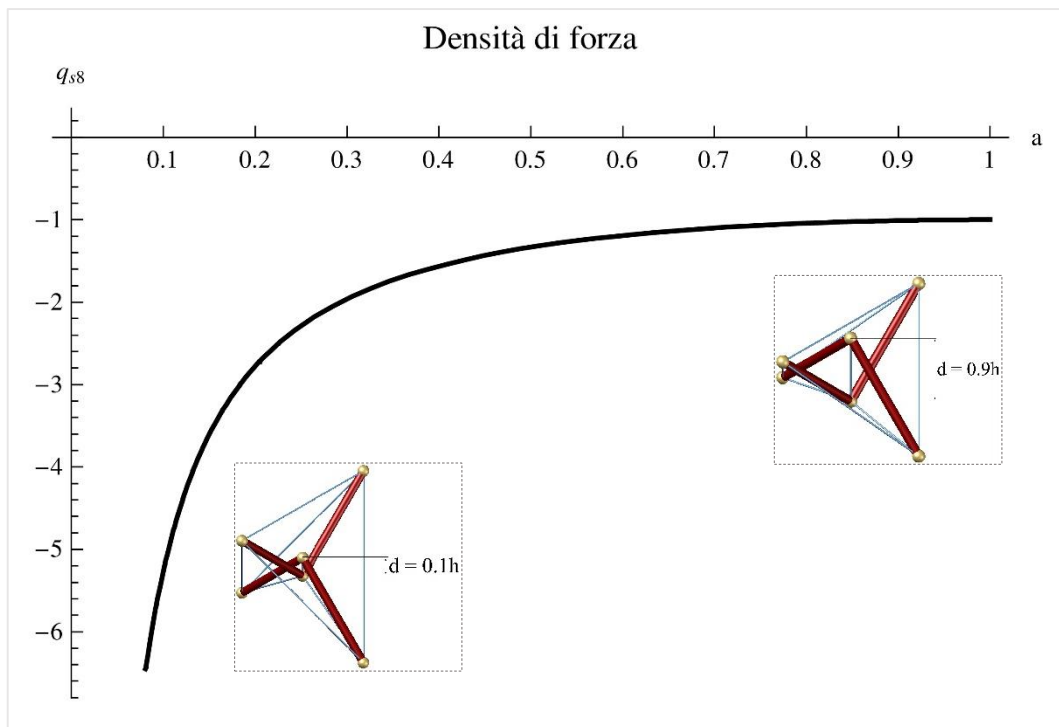


Figura 30. Densità di forza del puntone superiore 8 nella Variante II.

In base ai risultati ottenuti è possibile fare le seguenti osservazioni:

- La densità di forza q_{cv} del cavo verticale decresce non linearmente all'aumentare del valore di a , tendendo a 2 al crescere di a ,
- La densità di forza q_{cl} dei cavi inferiori decresce non linearmente al crescere di a , fino a raggiungere il valore nullo in corrispondenza di $a = 1$,
- Per quanto concerne il cavo orizzontale 3, la densità di forza q_{ch3} tende a zero al tendere del parametro a ad 1, con una legge di variazione molto simile a quella del corrispondente cavo orizzontale nella Variante I,
- Nei cavi diagonali la densità di forza q_{cd} presenta un limite superiore pari a 0.5 ed un limite inferiore pari a 0.25,
- Nei puntoni superiori la densità di forza presenta una legge di variazione caratterizzata da un asintoto orizzontale ($q_{s8} = -1$) per a che tende ad 1.

4.4.3 Variante III

La matrice di equilibrio $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{18 \times 13}$ della Variante III è pari a:

$$\mathbf{A}_{(18 \times 13)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r \\ 0 & 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r & 0 & -r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & -r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & r & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & r & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r & 0 & 0 & -r & -r & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d & h-d & h-d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h & -h \\ d & 0 & 0 & d-h & d-h & 0 & 0 & 0 & 0 & h & h & 0 & 0 \\ 0 & d-h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d-2h & d-2h & -h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d-h & 0 & 0 & d-2h & d-2h & 0 & 0 & 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & h-d & 0 & 2h-d & 0 & 0 & 2h-d & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h-d & 0 & 2h-d & 2h-d & 0 & 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}. \quad (193)$$

Il rango della matrice di equilibrio \mathbf{A} è pari a 12, pertanto dalla (39) e dalla (20) si ricavano rispettivamente la nullità s_A della matrice di equilibrio e il numero m_i dei meccanismi infinitesimi

$$s_A = m - r_A = 13 - 12 = 1, \quad (194)$$

$$m_i = 3n - n^{rb} - r_B = 18 - 6 - 12 = 0. \quad (195)$$

Da ciò si deduce che esiste un unico stato di auto-sollecitazione equilibrato \mathbf{q}_0 , mentre non esiste alcun meccanismo infinitesimo (esclusi i 6 moti rigidi), le cui basi sono riportate rispettivamente nelle Tabelle 13 e 14.

Stato di auto-sollecitazione equilibrato	
\mathbf{q}_0	$\left\{ \frac{2(d^2 - 2dh + 2h^2)}{dh}, \frac{-d+h}{h}, \frac{-d+h}{h}, \frac{-d+h}{h}, \frac{-d+h}{h}, \frac{d}{2h}, \frac{d}{2h}, \frac{d}{2h}, \frac{d}{2h}, -1, -1, -1, -1 \right\}$

Tabella 13. Stato di auto-sollecitazione equilibrato Variante III.

Meccanismi infinitesimi	
\mathbf{d}_{m1}	$\left\{ \frac{h}{2r}, -\frac{d-h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{h}{2r}, -\frac{d-h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 1 \right\}$
\mathbf{d}_{m2}	$\left\{ -\frac{h}{2r}, -\frac{h-d}{2r}, -\frac{2h-d}{2r}, -\frac{2h-d}{2r}, 0, 0, \frac{h}{2r}, -\frac{d-h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 1, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m3}	$\left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{h}{r}, -\frac{h-d}{r}, -\frac{2h-d}{r}, -\frac{2h-d}{r}, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m4}	$\left\{ 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m5}	$\left\{ 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m6}	$\{ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \}$

Tabella 14. Meccanismi infinitesimi della Variante III.

Dalla Tabella 13 si deduce che lo stato di auto-sollecitazione equilibrato \mathbf{q}_0 determinato è in accordo sia con le proprietà di simmetria della cella tensegrity e sia con le condizioni di comportamento meccanico unilatero degli elementi e pertanto tale vettore rappresenta un possibile stato di auto-sollecitazione ammissibile $\bar{\mathbf{q}}_a$ per la Variante III.

Si riportano di seguito le curve rappresentative della variazione dei coefficienti di densità di forza, rispettivamente, del cavo verticale (q_{cv} – Figura 31), del cavo inferiore 2' (q_{cl} – Figura 32) e del cavo diagonale 4 (q_{cd4} – Figura 33), in funzione dei possibili valori che il parametro α può assumere.

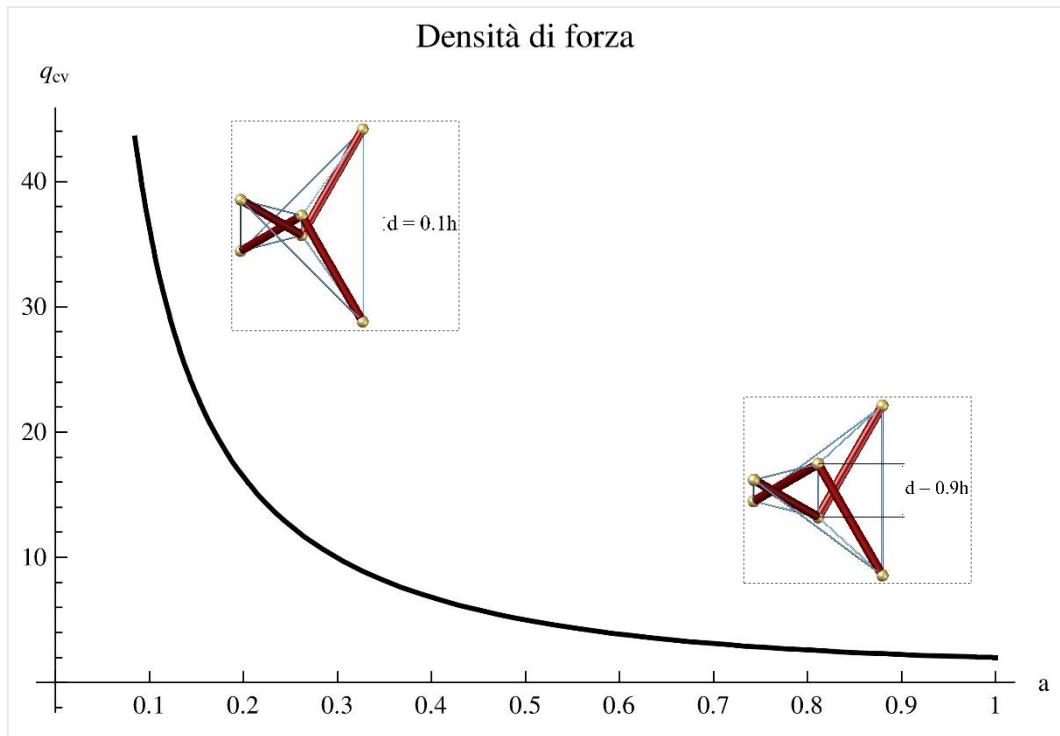


Figura 31. Densità di forza del cavo verticale nella Variante III.

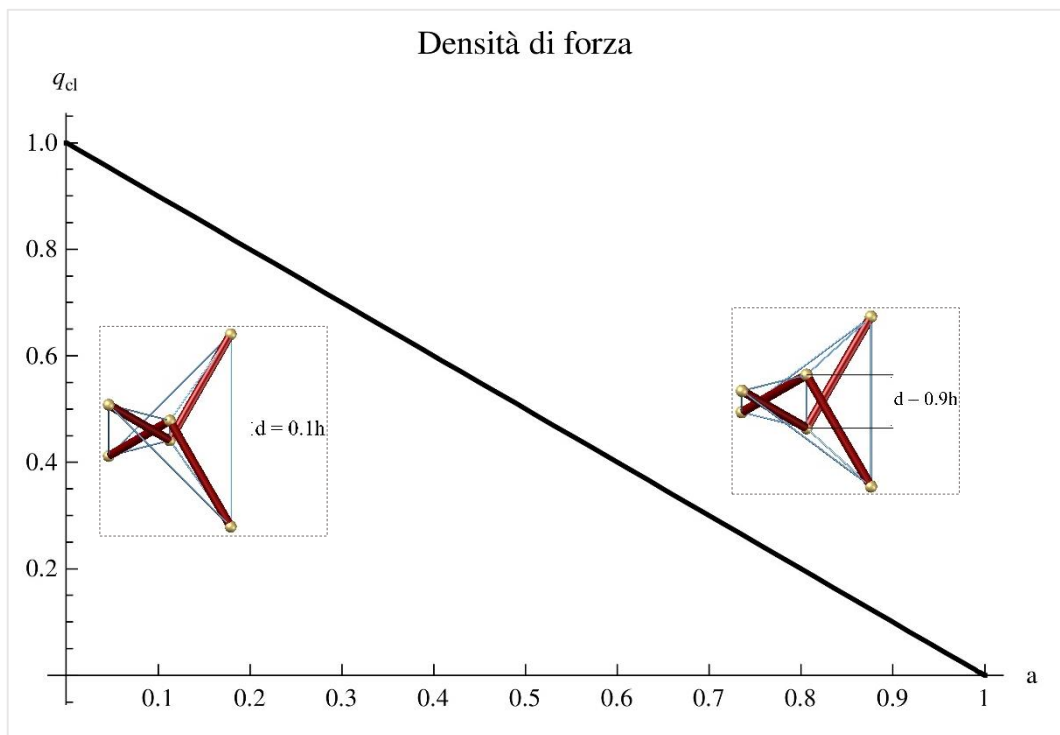


Figura 32. Densità di forza del cavo inferiore 2' nella Variante III.

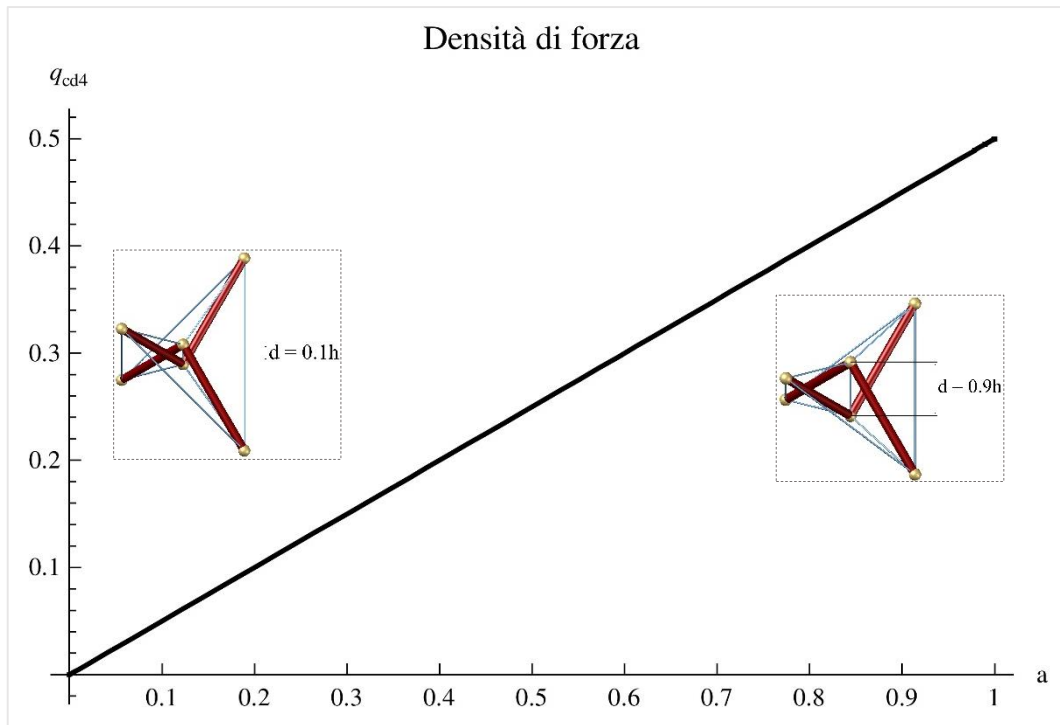


Figura 33. Densità di forza del cavo diagonale 4 nella Variante III.

In base ai risultati ottenuti è possibile fare le seguenti osservazioni:

- La densità di forza q_{cv} del cavo verticale decresce non linearmente all'aumentare del valore di a , tendendo a 2 al crescere di a ,
- La densità di forza q_{cl} dei cavi inferiori e superiori decresce linearmente al crescere di a , fino a raggiungere il valore nullo in corrispondenza di $a = 1$,
- Nei cavi diagonali la densità di forza q_{cd} cresce linearmente fino a raggiungere il valore massimo di 0.5 in corrispondenza di $a = 1$.

4.4.4 Variante IV

La matrice di equilibrio $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{18 \times 14}$ della Variante IV risulta essere pari a:

$$\mathbf{A}_{(18 \times 14)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & -r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & -r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & r & 0 & 0 \\ 0 & 2r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & r & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2r & 0 & -r & 0 & 0 & -r & -r & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d & 0 & h-d & h-d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h & -h \\ d & 0 & 0 & 0 & d-h & d-h & 0 & 0 & 0 & 0 & h & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d-h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d-2h & d-2h & -h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-h & 0 & 0 & d-2h & d-2h & 0 & 0 & 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & h-d & 0 & 2h-d & 0 & 0 & 2h-d & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h-d & 0 & 2h-d & 2h-d & 0 & 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}. \quad (196)$$

Il rango della matrice di equilibrio \mathbf{A} è pari a 12, pertanto dalla (39) e dalla (20) si ricavano rispettivamente la nullità s_A della matrice di equilibrio e il numero m_i dei meccanismi infinitesimi

$$s_A = m - r_A = 14 - 12 = 2, \quad (197)$$

$$m_i = 3n - n^{rb} - r_B = 18 - 6 - 12 = 0. \quad (198)$$

Da ciò si deduce che esistono due stati di auto-sollecitazione equilibrati \mathbf{q}_{0i} , mentre non esiste alcun meccanismo infinitesimo (esclusi i 6 moti rigidi). Le basi sono riportate rispettivamente nelle Tabelle 15 e 16.

Stati di auto-sollecitazione equilibrati	
\mathbf{q}_{01}	$\left\{ -\frac{2(d^2 - 2dh + h^2)}{dh}, \frac{d}{2(d-h)}, \frac{d(d-2h)}{(d-h)h}, \frac{d(d-2h)}{(d-h)h}, -\frac{d+h}{h}, -\frac{d+h}{h}, -\frac{d}{2h}, -\frac{d}{2h}, -\frac{d}{2h}, -\frac{d}{2h}, 0, 0, 1, 1 \right\}$
\mathbf{q}_{02}	$\left\{ -\frac{2h}{d}, -\frac{d}{2(d-h)}, -\frac{h}{-d+h}, -\frac{h}{-d+h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0 \right\}$

Tabella 15. Stato di auto-sollecitazione equilibrato Variante IV.

Meccanismi infinitesimi	
\mathbf{d}_{m1}	$\left\{ \frac{h}{2r}, -\frac{d-h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{h}{2r}, -\frac{d-h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 1 \right\}$
\mathbf{d}_{m2}	$\left\{ -\frac{h}{2r}, -\frac{d+h}{2r}, -\frac{d+2h}{2r}, -\frac{d+2h}{2r}, 0, 0, \frac{h}{2r}, -\frac{d-h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 1, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m3}	$\left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{h}{r}, -\frac{d+h}{r}, -\frac{d+2h}{r}, -\frac{d+2h}{r}, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m4}	$\left\{ 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m5}	$\left\{ 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m6}	$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$

Tabella 16. Meccanismi infinitesimi della Variante IV.

Come risulta dalla Tabella 15, nessuno dei due stati di auto-sollecitazione equilibrati risulta essere compatibile con le proprietà di simmetria della struttura e con il comportamento unilatero degli elementi, ovvero puntoni in compressione e cavi in trazione. Si ricorda che il generico stato di auto-sollecitazione equilibrato \mathbf{q}_0 può essere espresso come combinazione lineare delle basi dello spazio nullo della matrice di equilibrio (49). In particolare è necessario determinare i coefficienti α_1 e α_2 tali per cui lo stato di auto-sollecitazione equilibrato, risultato della combinazione lineare delle basi \mathbf{q}_{01} e \mathbf{q}_{02} , diviene ammissibile.

È necessario in tal caso costruire la matrice $\bar{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{14 \times 7}$ definita nella (55) (le cui prime due colonne contengono le componenti di \mathbf{q}_{01} e \mathbf{q}_{02} , mentre le restanti colonne, si determinano in funzione delle proprietà di simmetria della struttura) ovvero:

$$\bar{\mathbf{G}}_{(14 \times 7)} = \begin{bmatrix} \frac{2(d^2-2hd+h^2)}{dh} & -\frac{2h}{d} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d}{2(d-h)} & -\frac{d}{2(d-h)} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d(d-2h)}{(d-h)h} & -\frac{h}{h-d} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{d(d-2h)}{(d-h)h} & -\frac{h}{h-d} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{h-d}{h} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{h-d}{h} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{d}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{d}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{d}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -\frac{d}{2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (199)$$

e risolvere la (54) per determinare il vettore $\bar{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^7$ che risulta essere pari a:

$$\bar{\mathbf{a}} = \left\{ -1, -1, \left(-4 + \frac{2d}{h} + \frac{4h}{d} \right), 0, \frac{-d+h}{h}, \frac{d}{2h}, -1 \right\}. \quad (200)$$

Dalla (199) si possono osservare le proprietà di simmetria della Variante IV. In particolare, il primo gruppo di simmetria è composto unicamente dal cavo verticale, il secondo gruppo contiene il cavo orizzontale 2, il terzo gruppo raccoglie i due cavi inferiori, 2' e 2'', e i due cavi superiori 3' e 3'', il quarto gruppo è formato dai quattro cavi diagonali, mentre l'ultimo gruppo di simmetria raccoglie i puntoni della cella tensegrity. Si ricorda inoltre che gli ultimi h ($h = 5$) elementi del vettore $\bar{\mathbf{a}}$ rappresentano i coefficienti di densità di forza degli elementi appartenenti a ciascun gruppo di simmetria della cella. Dalla scrittura della relativa matrice di connessione \mathbf{C} nella (174) e dal confronto di tale matrice con il vettore $\bar{\mathbf{a}}$ è possibile osservare che il cavo orizzontale 2 ha densità di forza nulla, tuttavia la sua presenza è determinante per l'individuazione dei meccanismi infinitesimi che giacciono nello spazio nullo della matrice cinematica \mathbf{B} . Si nota inoltre, dalla (200) che le densità di forza negli altri elementi che compongono la cella in esame, ovvero il cavo verticale, i cavi inferiori e superiori, i cavi diagonali e i puntoni, presentano le stesse leggi di variazione degli analoghi elementi della Variante III, perciò si può fare riferimento alle Figg. 31-32-33 e alle relative osservazioni per la comprensione del comportamento meccanico della cella.

4.4.5 Variante V

La matrice di equilibrio $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{18 \times 15}$ della Variante IV risulta essere pari a:

$$\mathbf{A}_{(18 \times 15)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2r & -r & 0 & -r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & -r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2r & 0 & r & 0 & r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & r \\ 0 & 0 & -r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -r & r & 0 & 0 \\ 0 & 2r & r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & r & r & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2r & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & -r & -r & 0 & 0 & 0 & -r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & 0 & 0 & -r & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & r & -r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -d & 0 & h-d & h-d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -h & -h \\ d & 0 & 0 & 0 & 0 & d-h & d-h & 0 & 0 & 0 & 0 & h & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d-h & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d-2h & d-2h & -h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d-h & 0 & 0 & 0 & d-2h & d-2h & 0 & 0 & 0 & -h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h-d & 0 & 2h-d & 0 & 0 & 2h-d & 0 & 0 & h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & h-d & 0 & 2h-d & 2h-d & 0 & 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}. \quad (201)$$

Il rango della matrice di equilibrio \mathbf{A} è pari a 12, pertanto dalla (39) e dalla (20) si ricavano rispettivamente la nullità s_A della matrice di equilibrio e il numero m_i dei meccanismi infinitesimi

$$s_A = m - r_A = 15 - 12 = 3, \quad (202)$$

$$m_i = 3n - n^{rb} - r_B = 18 - 6 - 12 = 0. \quad (203)$$

Da ciò si deduce che esistono tre stati di auto-sollecitazione equilibrati \mathbf{q}_{0i} , mentre non esiste alcun meccanismo infinitesimo (esclusi i 6 moti rigidi). Le basi sono riportate rispettivamente nelle Tabelle 17 e 18.

Stati di auto-sollecitazione equilibrati	
\mathbf{q}_{01}	$\left\{ -\frac{2h}{d}, 0, 0, 0, -\frac{d}{2(d-h)}, -\frac{h}{-d+h}, -\frac{h}{-d+h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1 \right\}$
\mathbf{q}_{02}	$\left\{ -\frac{2h}{d}, -\frac{d}{2(d-h)}, -\frac{h}{-d+h}, -\frac{h}{-d+h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0 \right\}$
\mathbf{q}_{03}	$\left\{ \frac{4(d-2h)}{d}, -\frac{h}{d-h}, -\frac{2(d-2h)}{d-h}, -\frac{2(d-2h)}{d-h}, -\frac{h}{d-h}, -\frac{2(d-2h)}{d-h}, -\frac{2(d-2h)}{d-h}, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0 \right\}$

Tabella 17. Stato di auto-sollecitazione equilibrato Variante V.

Meccanismi infinitesimi	
\mathbf{d}_{m1}	$\left\{ \frac{h}{2r}, -\frac{d-h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{h}{2r}, -\frac{d-h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 1 \right\}$
\mathbf{d}_{m2}	$\left\{ -\frac{h}{2r}, -\frac{-d+h}{2r}, -\frac{-d+2h}{2r}, -\frac{-d+2h}{2r}, 0, 0, \frac{h}{2r}, -\frac{d-h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, -\frac{d-2h}{2r}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 1, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m3}	$\left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{h}{r}, -\frac{-d+h}{r}, -\frac{-d+2h}{r}, -\frac{-d+2h}{r}, 0, 0, 0, 0, -1, 1, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m4}	$\left\{ 0, 0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m5}	$\left\{ 0, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}$
\mathbf{d}_{m6}	$\{ 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \}$

Tabella 18. Meccanismi infinitesimi della Variante V.

Anche per la Variante V, come risulta dalla Tabella 17, nessuno dei tre stati di auto-sollecitazione equilibrati risulta essere compatibile con le proprietà di simmetria della struttura e con il comportamento unilatero degli elementi.

Ricordando che il generico stato di auto-sollecitazione equilibrato \mathbf{q}_0 può essere espresso come combinazione lineare delle basi dello spazio nullo della matrice di equilibrio (49), è necessario determinare i coefficienti α_1 , α_2 e α_3 tali per cui lo stato di auto-sollecitazione equilibrato, risultato della combinazione lineare delle basi \mathbf{q}_{01} , \mathbf{q}_{02} e \mathbf{q}_{03} , risulta ammissibile.

È necessario anche in tal caso costruire la matrice $\bar{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{15 \times 7}$ definita nella (55):

$$\bar{\mathbf{G}}_{(15 \times 7)} = \begin{bmatrix} -\frac{2h}{d} & -\frac{2h}{d} & \frac{4(d-2h)}{d} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{d}{2(d-h)} & -\frac{h}{d-h} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h}{h-d} & -\frac{2(d-2h)}{d-h} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{h}{h-d} & -\frac{2(d-2h)}{d-h} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{d}{2(d-h)} & 0 & -\frac{h}{d-h} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{h}{h-d} & 0 & -\frac{2(d-2h)}{d-h} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{h}{h-d} & 0 & -\frac{2(d-2h)}{d-h} & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (204)$$

e risolvere la (54) per determinare il vettore $\bar{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^7$ che risulta essere pari a:

$$\bar{\mathbf{a}} = \left\{ -1, -1, \frac{d^2 - 8dh + 8h^2}{2(4d^2 - 11dh + 8h^2)}, \frac{2(d^2 - 2dh + 2h^2)}{4d^2 - 11dh + 8h^2}, \frac{-d^2 + 5dh - 8h^2}{4d^2 - 11dh + 8h^2}, \frac{d^2 - 8dh + 8h^2}{2(4d^2 - 11dh + 8h^2)}, -1 \right\}. \quad (205)$$

Dalla (204) si possono osservare le proprietà di simmetria individuate nella Variante V. In particolare, il primo gruppo di simmetria è composto dal cavo verticale e dai due cavi orizzontali, il secondo gruppo raccoglie i due *puntoni* inferiori, 2' e 2'', e i due *puntoni* superiori 3' e 3'', il terzo gruppo è formato dai quattro cavi diagonali, mentre l'ultimo gruppo di simmetria raccoglie i puntoni (8, 9, 10, 11) della cella tensegrity. Dalla (205) si evince, come già accennato in precedenza, che per la Variante V gli elementi 2', 2'', 3' e 3'' risultano compressi e non tesi come nelle precedenti varianti.

Si ricorda inoltre che gli ultimi h ($h = 4$) elementi del vettore $\bar{\mathbf{a}}$ rappresentano i coefficienti di densità di forza degli elementi appartenenti a ciascun gruppo di simmetria della cella. Di seguito si riportano le leggi di variazione dei coefficienti di densità di forza, rispettivamente, del cavo verticale (in questa variante i cavi orizzontali hanno stessa densità di forza del cavo verticale) (q_{cv} – Figura 34), del *puntone* inferiore 2' (q_{sl} – Figura 35) e del cavo diagonale 4 (q_{cd4} – Figura 36).

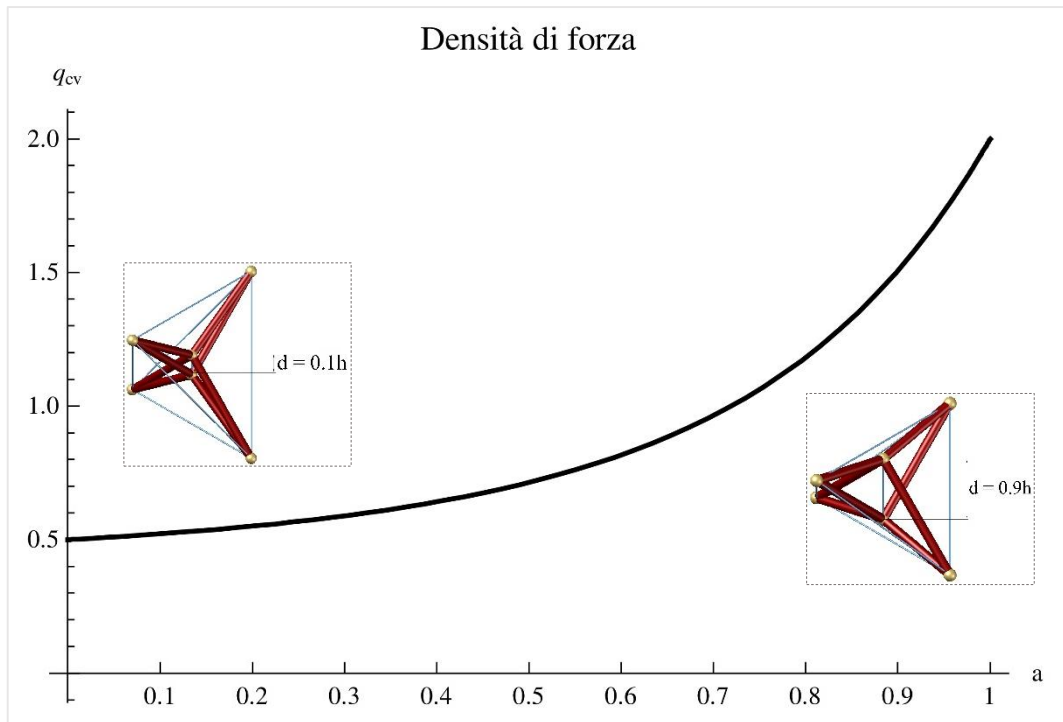


Figura 34. Densità di forza del cavo verticale nella Variante V.

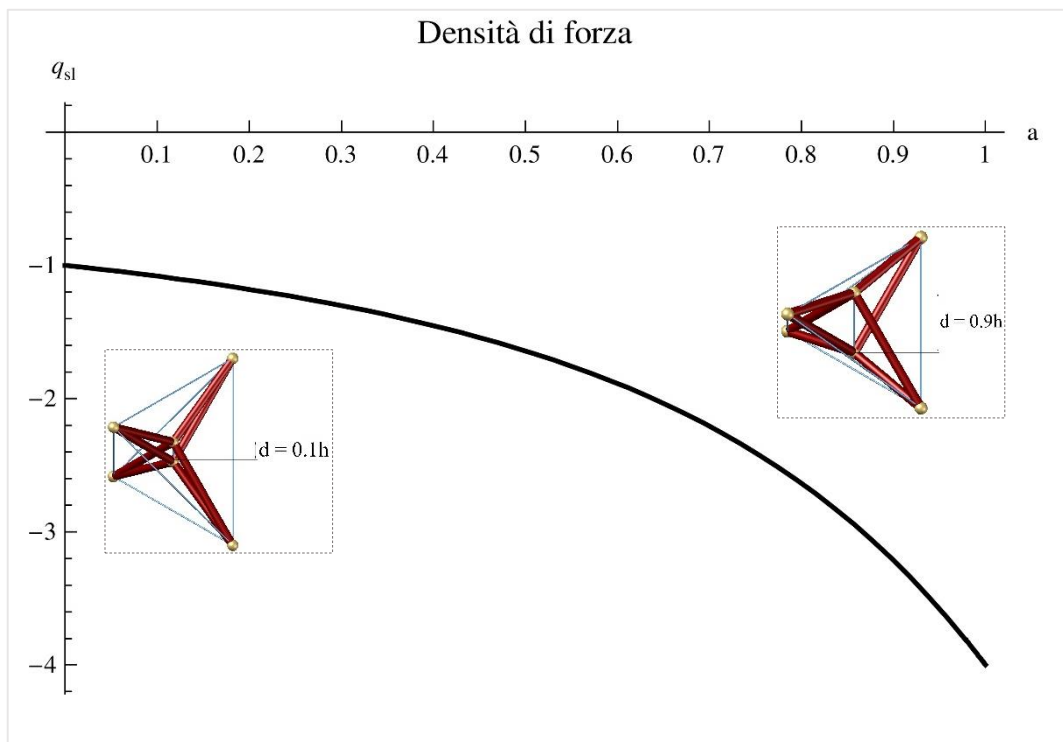


Figura 35. Densità di forza del puntone inferiore nella Variante V.

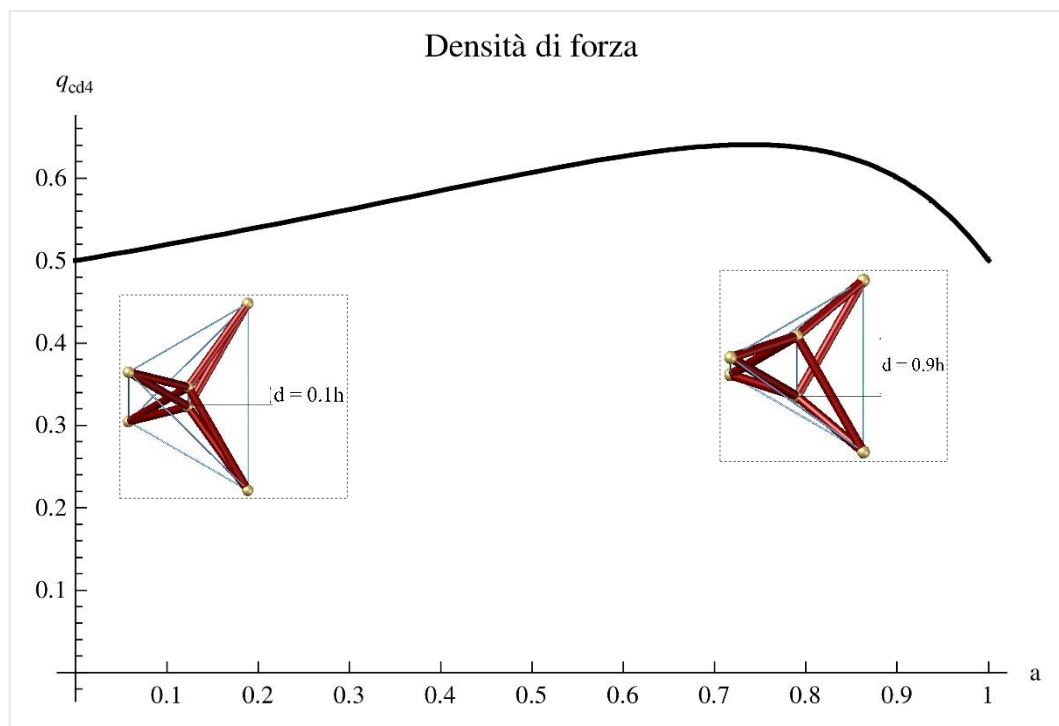


Figura 36. Densità di forza del cavo diagonale 4 nella Variante V.

In base ai risultati ottenuti è possibile fare le seguenti osservazioni:

- La densità di forza q_{cv} del cavo verticale cresce non linearmente all'aumentare del valore di a , con un valore pari a 0.5 per $a = 0$,
- Nella Variante V, la densità di forza q_{sl} degli elementi inferiori e superiori risulta essere negativa per tutti i valori del parametro a considerati, pertanto tali elementi devono essere considerati puntoni con una legge di variazione che decresce non linearmente partendo da un valore pari a -1 per a che tende a zero,
- Nei cavi diagonali la densità di forza q_{cd} presenta diversa monotonia nel complesso, in particolare risulta essere crescente fintantoché il parametro a resta minore di 0.7, per valori di a maggiori di tale quantità la legge decresce non linearmente.

Lo stato di auto-sollecitazione ammissibile determinato per quest'ultima variante, come già esposto, descrive un comportamento meccanico differente rispetto a quello evidenziato per le precedenti varianti. Non si esclude la possibilità che la risoluzione di un problema di ottimizzazione a variabili multiple possa restituire un vettore $\bar{\mathbf{a}}$ caratterizzato dalla presenza di densità di forza positive per gli elementi inferiori e superiori.

4.5 ANALISI DELLO SFORZO NORMALE NEGLI ELEMENTI

Noto lo stato di auto-sollecitazione ammissibile $\bar{\mathbf{q}}_a$ per la struttura tensegrity in esame, dalla (26) è possibile ottenere il vettore degli sforzi normali negli elementi $\bar{\mathbf{n}}$ tramite la (59).

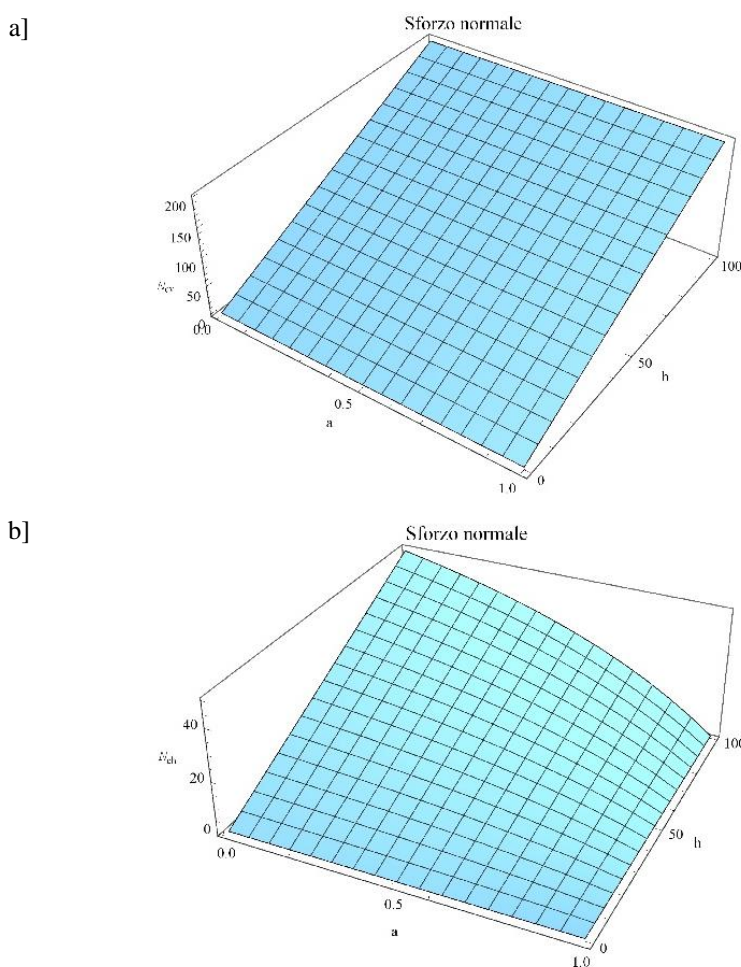
Risulta evidente che lo sforzo normale N negli elementi dipende, diversamente da ciò che accade per le densità di forza, da tutti i parametri geometrici (r , d e h) che definiscono la configurazione geometrica della cella tensegrity. È quindi necessario diagrammare i risultati ottenuti tenendo in conto anche della variabilità del parametro r .

Tuttavia è possibile ottenere una soluzione particolare del problema legando i parametri r ed h , ad esempio ponendo $r = h$ (i grafici seguenti riportano un range di variazione di h compreso tra 0 e 100). Si fa notare che tale condizione geometrica, come risulta dalla descrizione in Fig. 22, comporta un valore dell'angolo α (misurato nel piano che contiene il triangolo V-Expander) pari a $\pi/4$.

Di seguito si riportano i risultati ottenuti per le cinque varianti tensegrity proposte in termini di sforzo normale negli elementi.

4.5.1 Variante I

Ricordando la (155) e le Tabelle 8 e 9, è possibile ricavare gli sforzi normali N negli elementi della Variante I. In Figura 37 si riportano i diagrammi di tali sforzi in uno spazio $O(a, h, N_i)$ e cioè al variare del parametro geometrico a e avendo posto $h = r$.



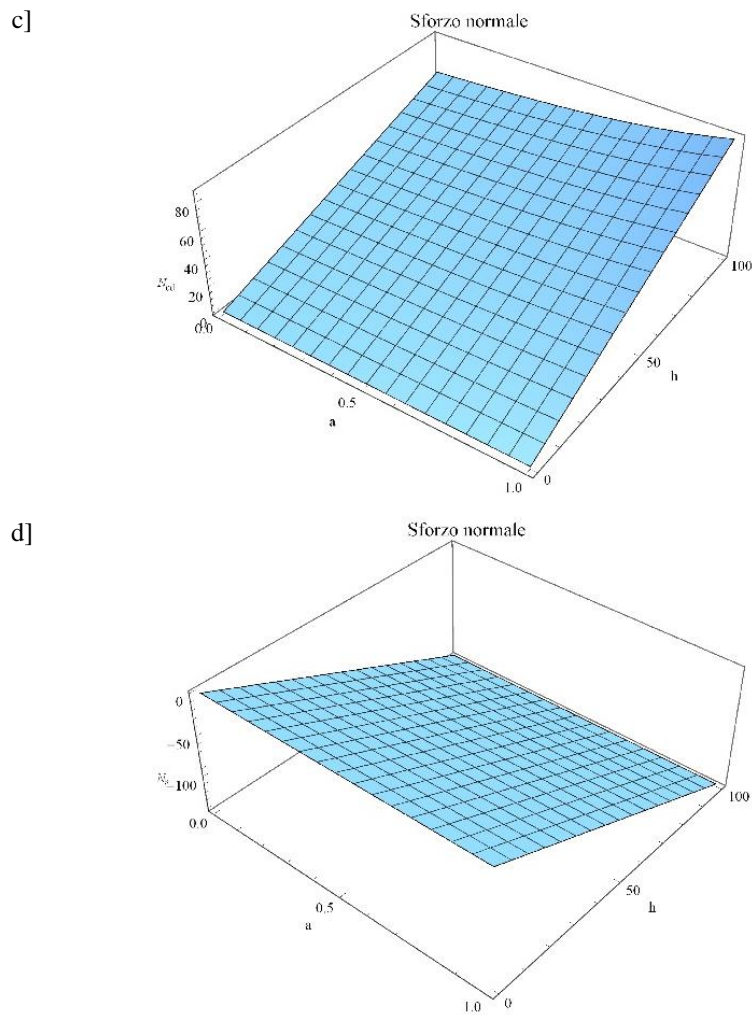


Figura 37. a) Sforzo normale nel cavo verticale. b) Sforzo normale nei cavi orizzontali.
c) Sforzo normale nei cavi diagonali. d) Sforzo normale nei puntoni.

Nell'ipotesi di porre $r = h$, come già accennato, è possibile esprimere lo sforzo normale negli elementi in funzione esclusivamente del parametro h . Pertanto, per questo paragrafo e per i successivi, si sceglie di diagrammare in funzione del parametro geometrico a il rapporto fra lo sforzo normale N_i del generico elemento ($i = 1, 2, \dots, m$) e il parametro h , ossia N_i/h ($i = 1, 2, \dots, m$). In figura 38 si mostra il risultato di tale analisi per la Variante I.

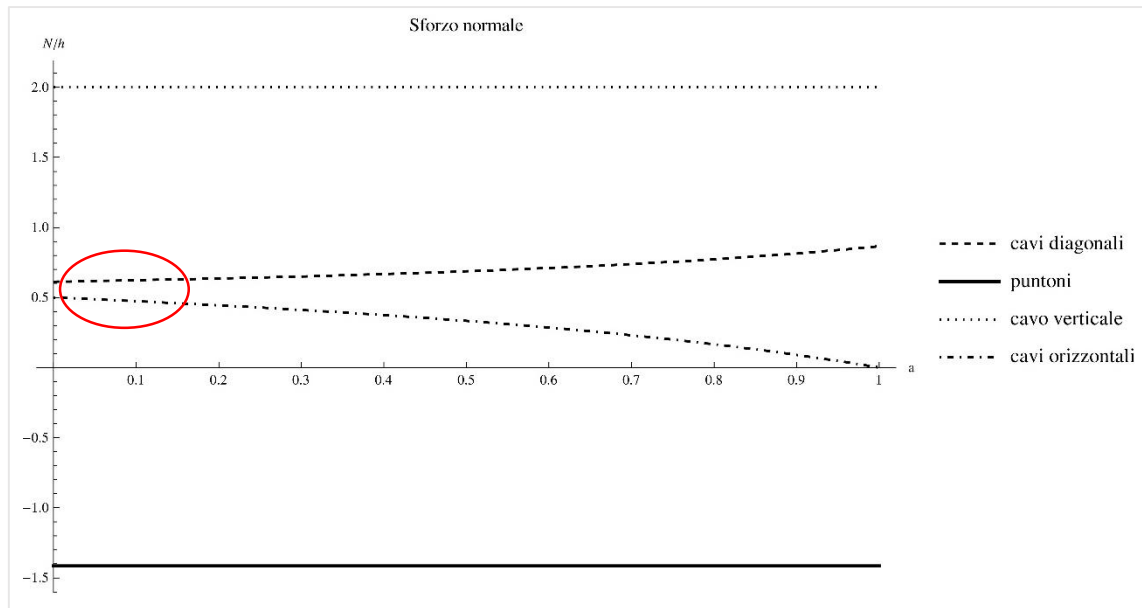


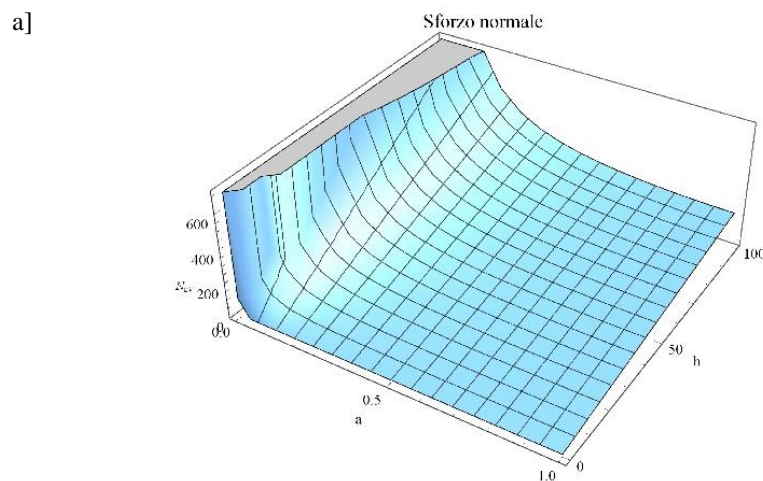
Figura 38. Sforzo normale negli elementi della Variante I ($r = h$).

Si osserva che:

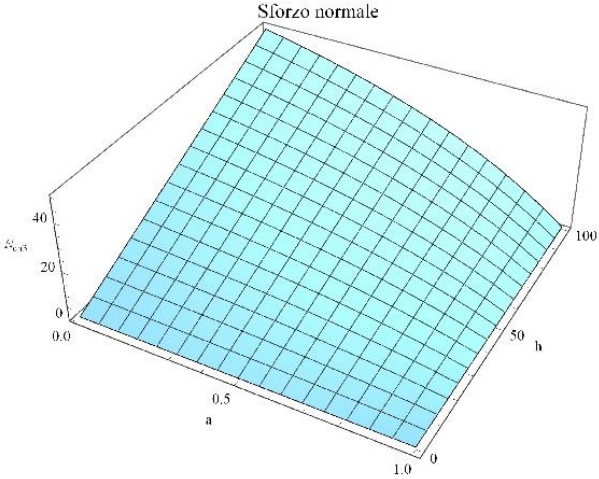
- Il cavo verticale ha uno sforzo normale costante al variare di a ,
- Lo sforzo normale di compressione nei puntoni non varia al variare del parametro a ,
- Gli sforzi normali di trazione nei cavi diagonali e nei cavi orizzontali assumono valori quasi uguali per valori del parametro a sufficientemente piccoli, mentre si differenziano sensibilmente al crescere di tale parametro.

4.5.2 Variante II

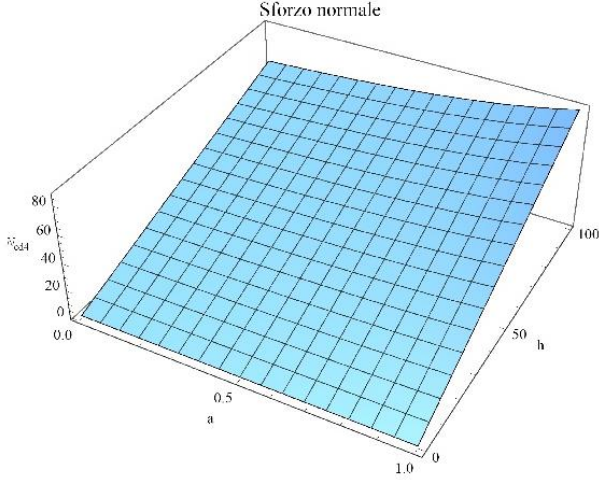
Quanto esposto per la Variante I si ripropone per la Variante II. In particolare, nello spazio $O(a, h, N_i)$, si riporta la variazione dello sforzo normale negli elementi al variare del parametro a e per $r = h$. In Figura 39 si mostrano i risultati ottenuti per la Variante II.



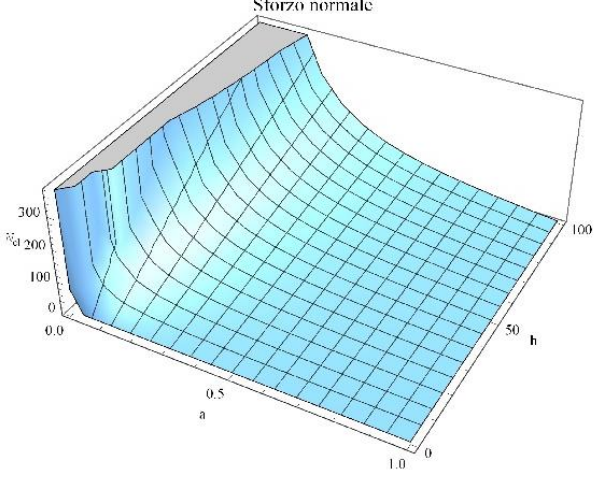
b]



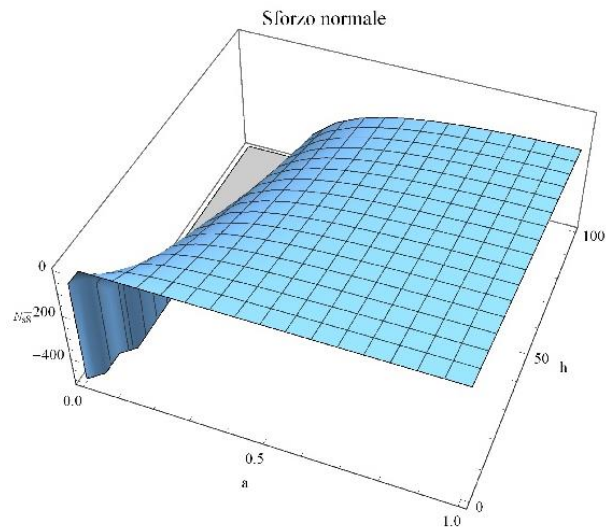
c]



d]



e]



f]

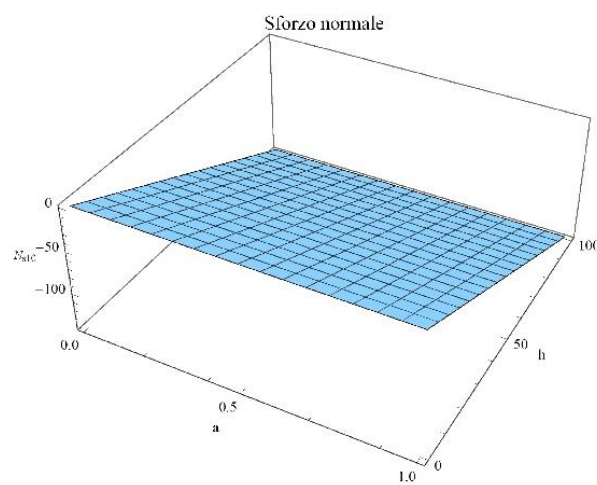


Figura 39. a) Sforzo normale nel cavo verticale. b) Sforzo normale nei cavi orizzontali.
 c) Sforzo normale nei cavi diagonali. d) Sforzo normale nei cavi inferiori.
 e) Sforzo normale nei puntoni superiori. f) Sforzo normale nei puntoni inferiori.

Nell'ipotesi di $r = h$, si ottengono i valori del rapporto tra gli sforzi normali N negli elementi e il parametro geometrico h . Tali valori sono mostrati, rispettivamente, in Figura 40 e in Figura 41 per i cavi e per i puntoni della Variante II.

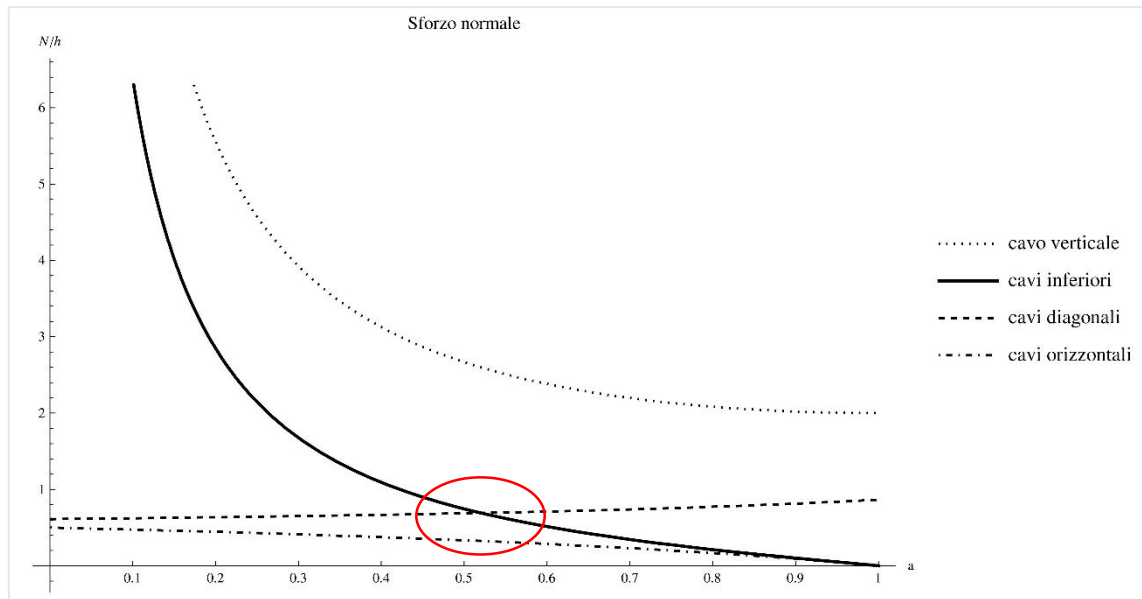


Figura 40. Sforzo normale nei cavi della Variante II ($r = h$).

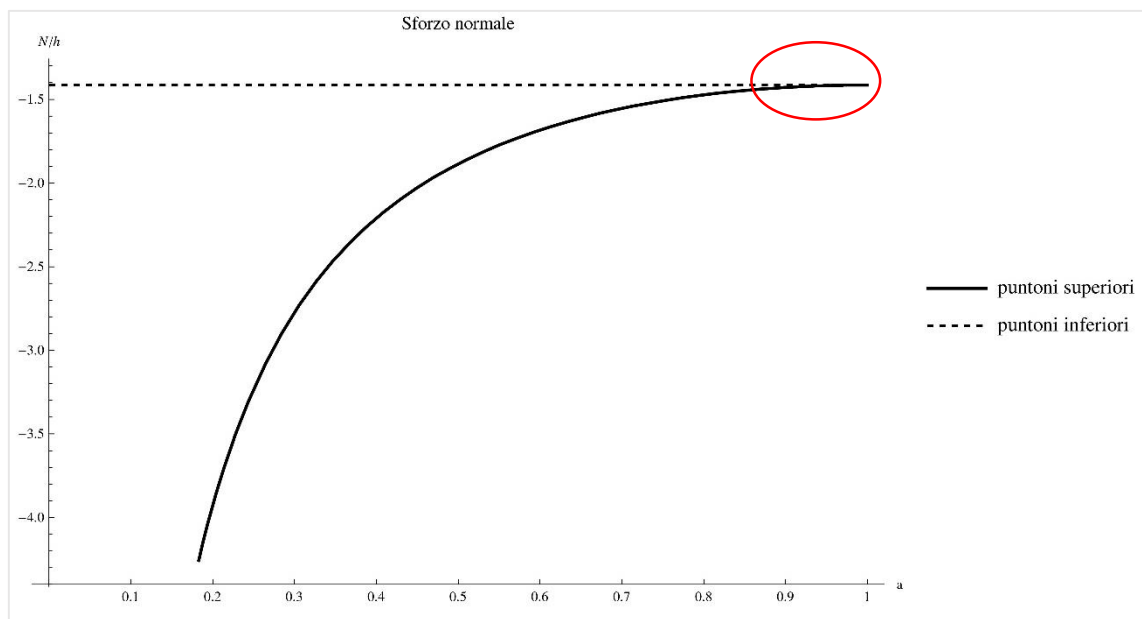


Figura 41. Sforzo normale nei puntoni della Variante II ($r = h$).

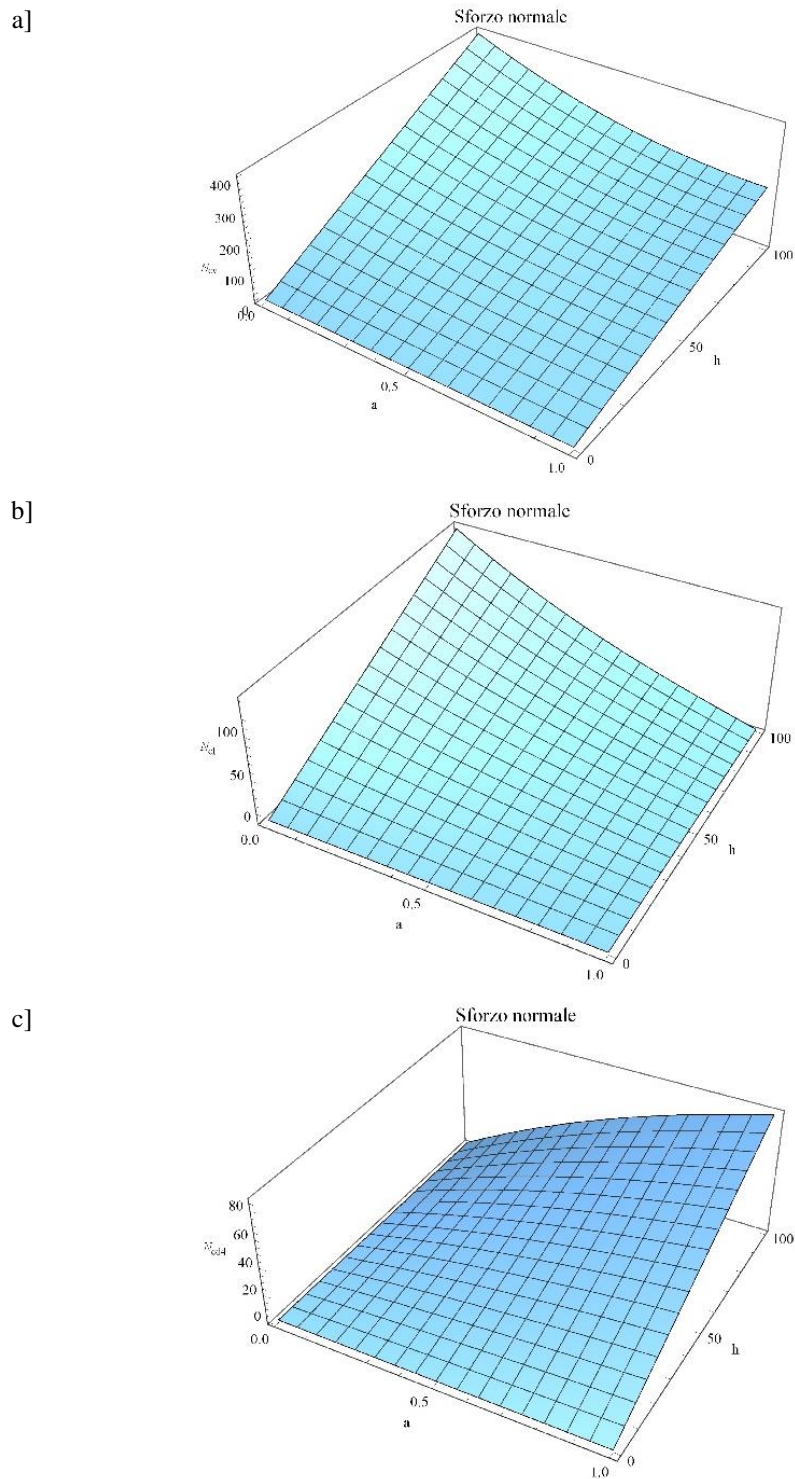
Da quanto esposto si può osservare che:

- Lo sforzo normale di trazione nel cavo verticale, nei cavi inferiori e nel cavo orizzontale, decresce all'aumentare del parametro a ,
- I cavi diagonali mostrano una legge di variazione leggermente crescente dello sforzo normale all'aumentare di a ,
- Gli sforzi normali di trazione nei cavi diagonali, nei cavi orizzontali e in quelli inferiori sono pressoché uguali per $a \cong 0.5$,

- Per a che tende ad 1, invece, il valore dello sforzo normale di compressione nei puntoni assume valore quasi identici.

4.5.3 Variante III

Per quanto riguarda la Variante III, si ottengono i risultati mostrati in Figura 42.



d]

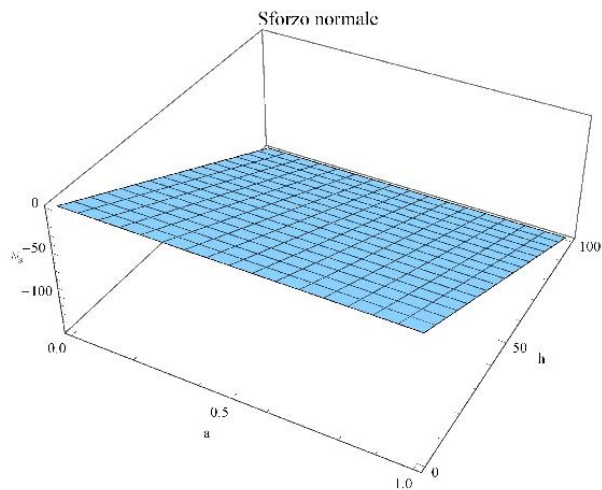


Figura 42. a) Sforzo normale nel cavo verticale. b) Sforzo normale nei cavi inferiori e superiori.
c) Sforzo normale nei cavi diagonali. d) Sforzo normale nei puntoni.

Ponendo $r = h$ si ottiene (Figura 43) il rapporto N/h tra lo sforzo normale negli elementi della Variante III e il parametro h :

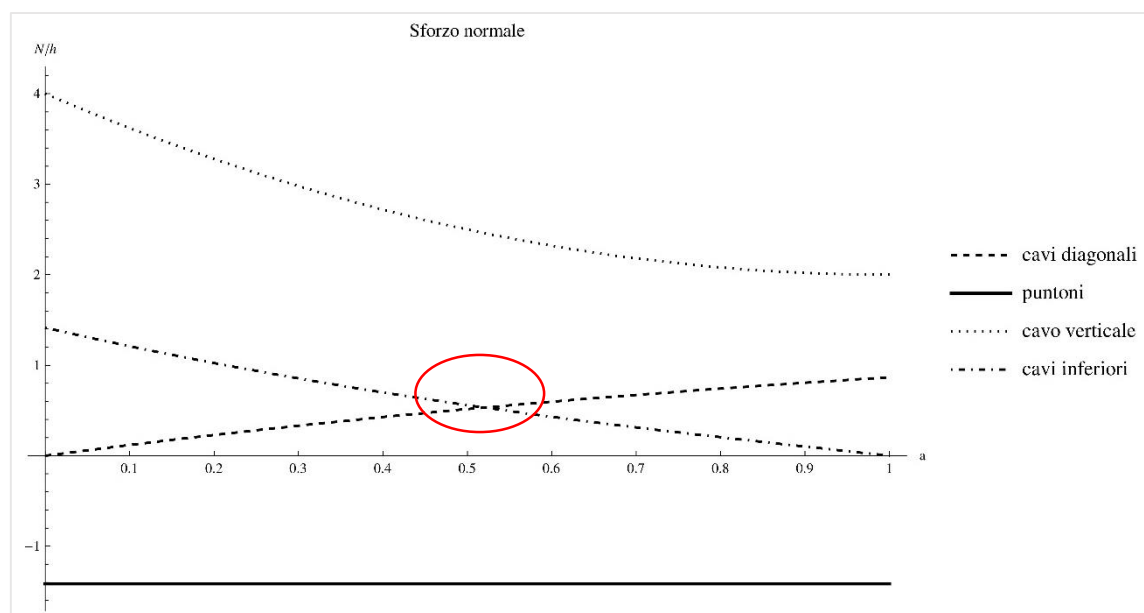


Figura 43. Sforzo normale negli elementi della Variante III ($r = h$).

Dalla Fig. 43 si possono trarre le seguenti considerazioni:

- Lo sforzo di trazione nel cavo verticale decresce non linearmente all'aumentare di a ,
- I puntoni hanno uno sforzo normale costante,
- Per $a \cong 0.52$ si ottiene una uguale distribuzione degli sforzi di trazione nei cavi diagonali e nei cavi inferiori e superiori.

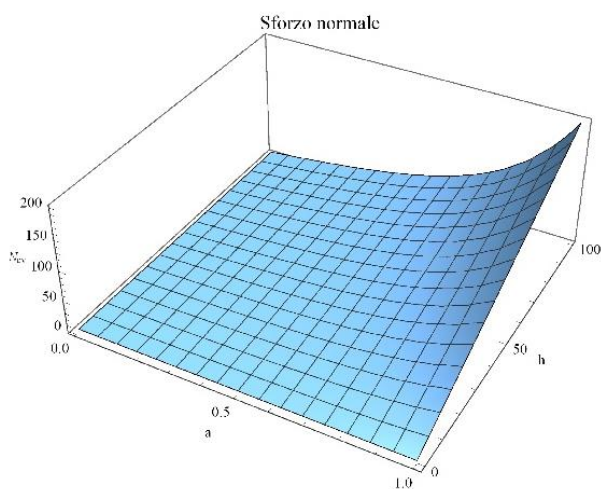
4.5.4 Variante IV

Si faccia riferimento alle Figg. 42-43 per i risultati analoghi alla Variante III. Le stesse considerazioni possono essere fatte per le leggi di variazione degli sforzi normali negli elementi della Variante IV. In aggiunta, si ricorda che essendo nulla la densità di forza del cavo orizzontale, lo sforzo normale in tale cavo risulta nullo per ogni valore del parametro a .

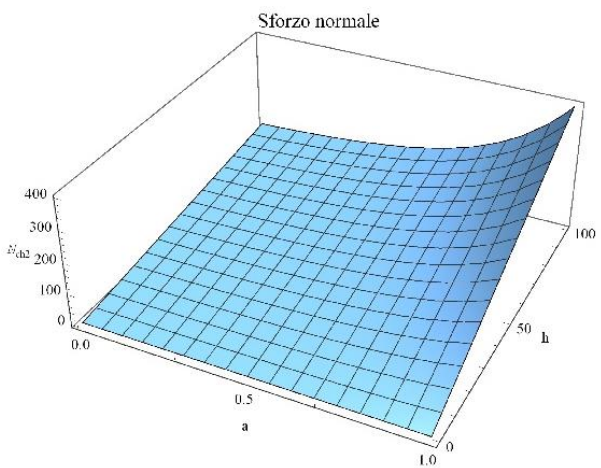
4.5.5 Variante V

Infine per l'ultima variante tensegrity analizzata, si ottengono i risultati riportati in Figura 44:

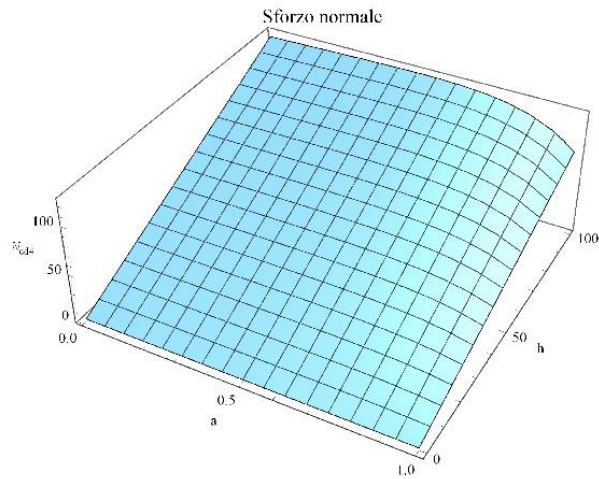
a)



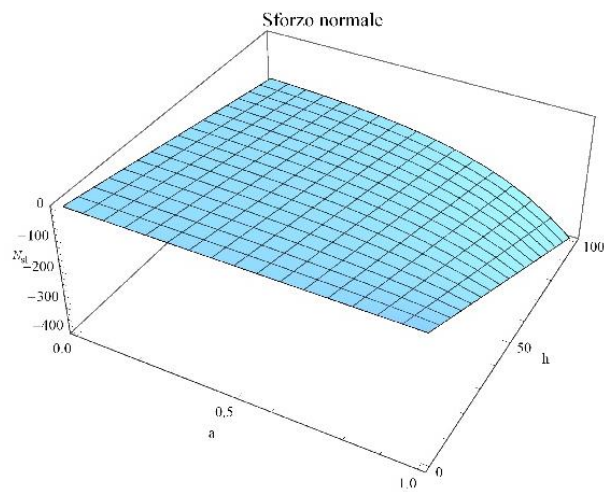
b)



c]



d]



e]

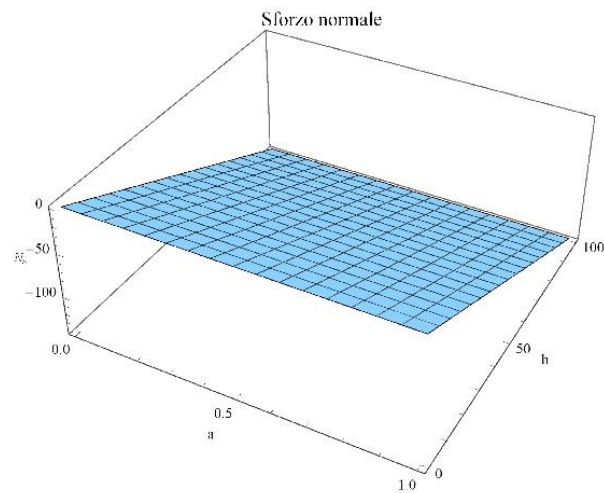


Figura 44. a) Sforzo normale nel cavo verticale. b) Sforzo normale nei cavi orizzontali.
 c) Sforzo normale nei cavi diagonali. d) Sforzo normale nei puntoni inferiori e superiori.
 e) Sforzo normale nei puntoni.

Considerando N_i/h , si ottengono, per i cavi, i risultati mostrati in Figura 45.

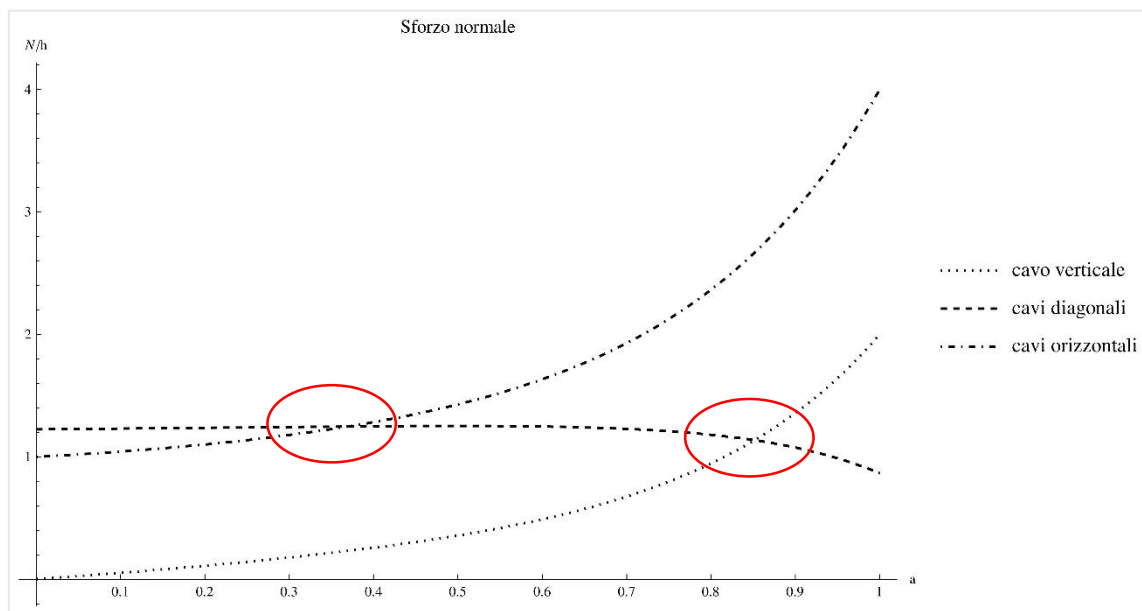


Figura 45. Sforzo normale nei cavi della Variante V ($r = h$).

Per gli elementi compressi, invece, si riportano i risultati in Figura 46.

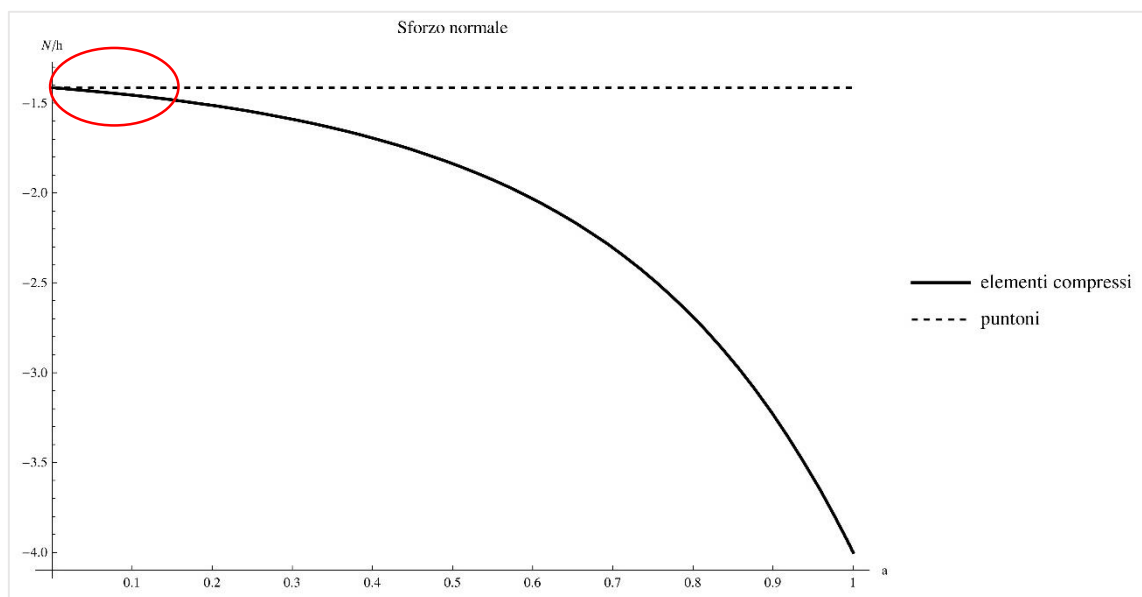


Figura 46. Sforzo normale negli elementi compressi della Variante V ($r = h$).

Dalle Figg. 45 e 46 si possono trarre le seguenti considerazioni:

- Lo sforzo di trazione nel cavo verticale, così come nei cavi orizzontali, cresce non linearmente all'aumentare di a , mentre per i cavi diagonali la legge di variazione di N_{cd} è decrescente non linearmente,
- I puntoni hanno uno sforzo normale costante, mentre gli elementi inferiori e superiori compressi presentano una legge di variazione dello sforzo normale N_{sl} non linearmente decrescente,

- Per $a \cong 0.35$ si ottengono valori simili degli sforzi di trazione nei cavi diagonali e nei cavi orizzontali; inoltre per $a \cong 0.85$ il cavo verticale e i cavi diagonali hanno lo stesso valore dello sforzo normale di trazione,
- Gli elementi compressi e i puntoni presentano pari sforzo normale per a che tende a 0.

Per concludere l'analisi delle leggi di variazione dello sforzo normale negli elementi delle 5 varianti tensegrity proposte, al variare del parametro geometrico a e per $r = h$, è utile effettuare un raffronto per ciascuna tipologia di elemento fra i valori che lo sforzo normale N assume nelle 5 varianti suddette.

A tal proposito si riportano di seguito i diagrammi degli sforzi normali rapportati al parametro h , ossia il valore del rapporto N_i/h ($i=1,2,\dots,m$), rispettivamente per il cavo verticale (Figura 47), per i cavi orizzontali (Figura 48), per gli elementi inferiori (superiori) (Figura 49), per i cavi diagonali (Figura 50) e per i puntoni superiori (Figura 51).

Si osserva che lo sforzo normale nei puntoni inferiori è uguale per ciascuna delle varianti considerate, ed in particolare risulta $N_i/h = -\sqrt{2}h$.

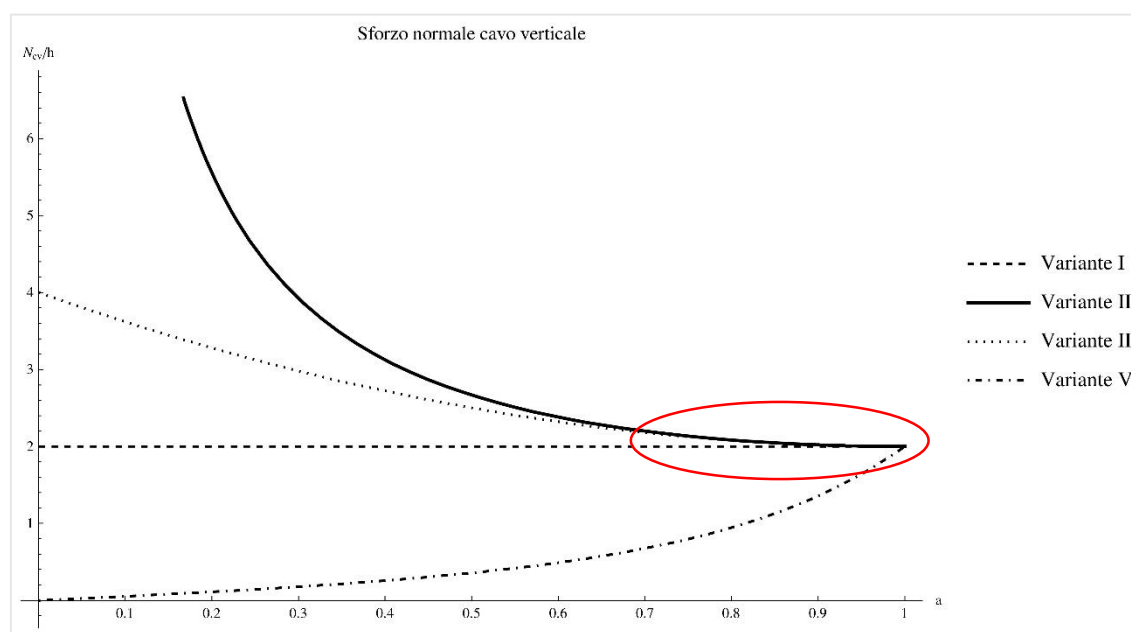


Figura 47. Sforzo normale nei cavi verticali ($r = h$).

Dalla Fig. 47 si osserva che il cavo verticale risulta essere maggiormente sollecitato a parità di a per la Variante II, e meno per la Variante V. Tuttavia per valori di a che tendono ad 1, ovvero quando $d = h$, gli sforzi normali di trazione per le cinque varianti analizzate tendono a coincidere. Si ricorda che lo sforzo normale nel cavo verticale della Variante IV ha la stessa legge di variazione di quello della Variante III, pertanto per evitare sovrapposizioni, nella Fig. 47 non si riporta la curva che rappresenta il valore di tale sforzo al variare del parametro a .

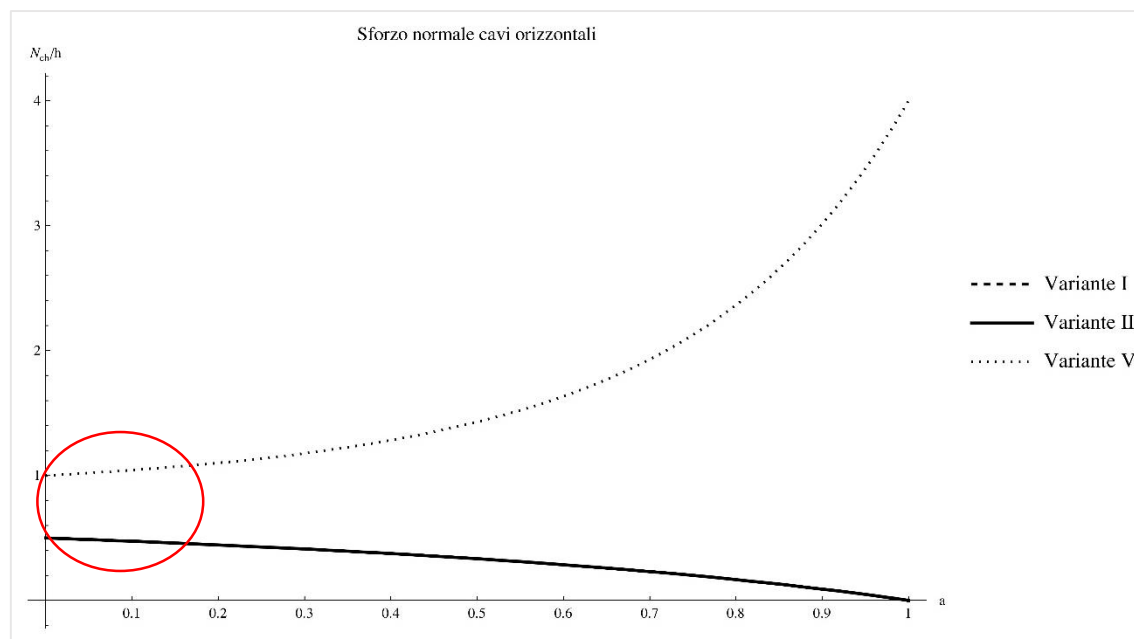


Figura 48. Sforzo normale nei cavi orizzontali ($r = h$).

Si ricorda che i cavi orizzontali non sono presenti nella Variante III, mentre è nullo il valore dello sforzo normale per il cavo orizzontale della Variante IV, pertanto si riportano le curve rappresentative del rapporto N_{ch}/h per le varianti I, II e V.

Per quanto concerne i cavi orizzontali, si può osservare che la Variante V presenta i valori più elevati dello sforzo di trazione. Ad ogni modo, per a che tende a 0 gli sforzi normali tendono ad assumere valori simili per tutte le varianti. Si nota inoltre che le varianti I e II presentano la stessa legge di variazione per lo sforzo normale nei cavi orizzontali.

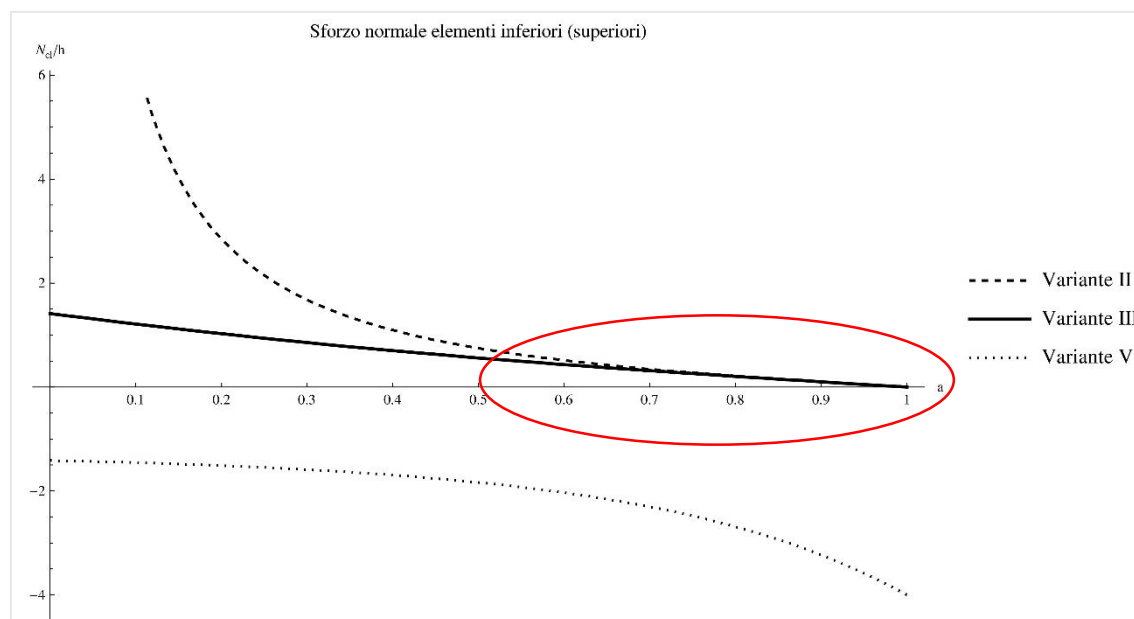


Figura 49. Sforzo normale negli elementi inferiori (superiori) ($r = h$).

Si fa notare che gli elementi inferiori (superiori) non sono presenti nella Variante I, e che per tali elementi il valore del rapporto N_{cd}/h calcolato per la Variante III è uguale a quello determinato per la Variante IV. Pertanto si sceglie di rappresentare le curve che rappresentano il valore di N_{cd}/h al variare del parametro a per le varianti II, III e V.

Il più alto valore di sforzo normale di trazione nei cavi inferiori (superiori) si ottiene nella Variante II, e per valori del parametro a che tendono ad 1 il rapporto N_{cd}/h calcolato per la Variante II e per la Variante III tende ad assumere lo stesso valore.

Nella Variante V, risultano, come già accennato, compressi tali elementi con legge di variazione decrescente non lineare.

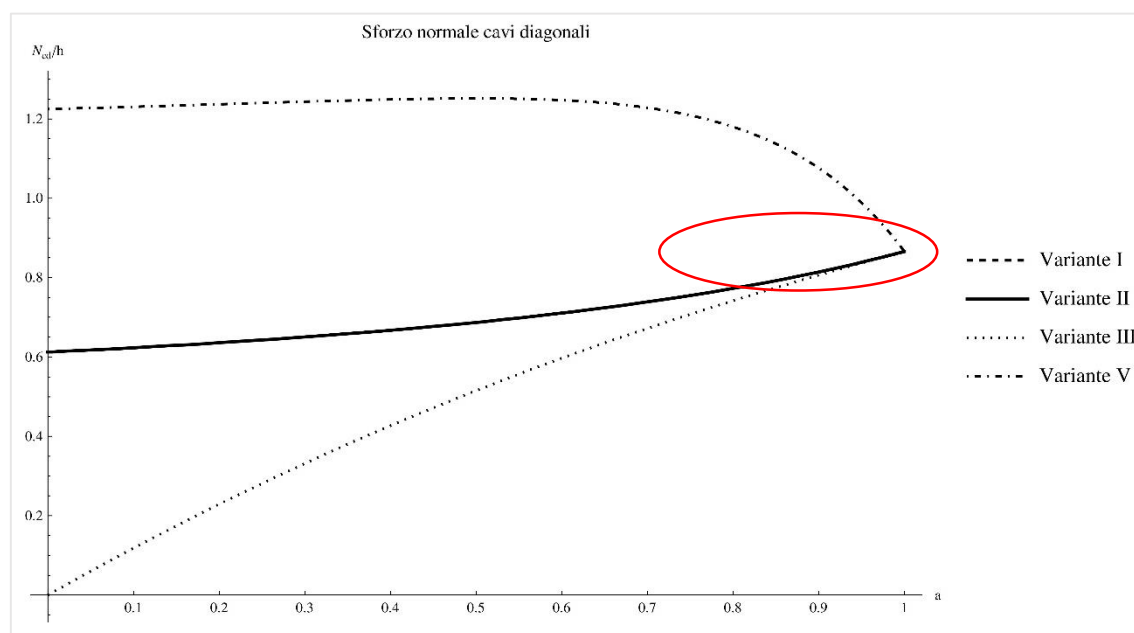


Figura 50. Sforzo normale nei cavi diagonali ($r = h$).

Nella Fig. 50 si riportano i valori del rapporto N_{cd}/h al variare del parametro a per i cavi diagonali, per le varianti I, II, III e V, ricordando che anche per tale elemento la legge di variazione del rapporto N_{cd}/h calcolata per la Variante IV è uguale a quella ottenuta per la Variante III.

La Variante V mostra il più alto valore di sforzo normale di trazione nei cavi diagonali, mentre il valore più basso si osserva nella variante III. Per valori del parametro a che tendono ad 1 le prime tre varianti presentano analogo valore dello sforzo di trazione nei cavi diagonali delle celle tensegrity.

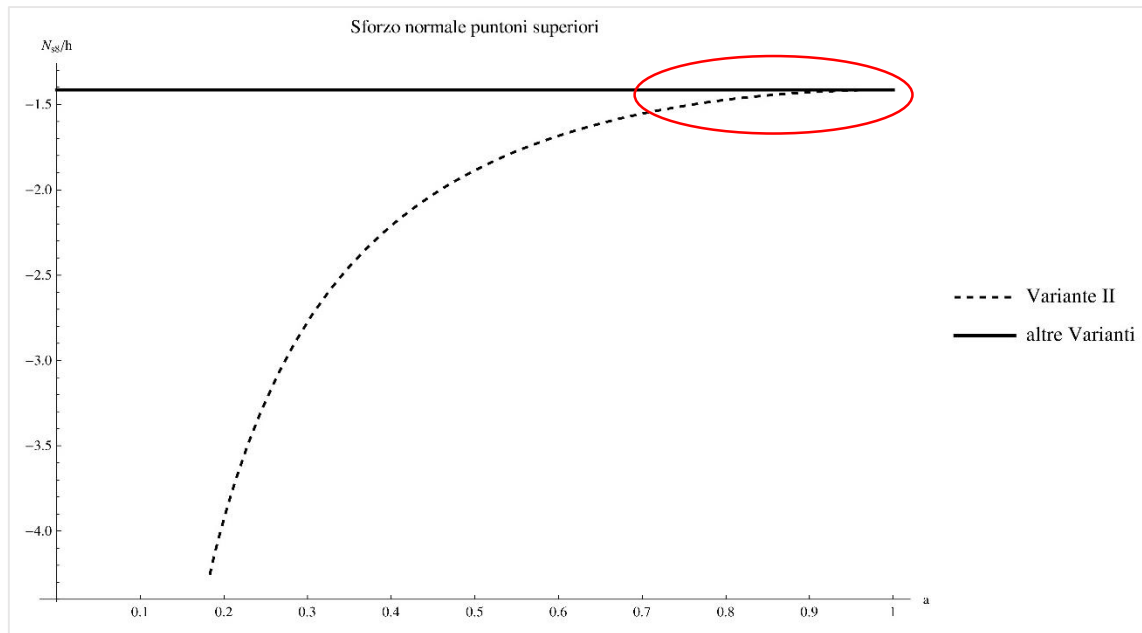


Figura 51. Sforzo normale nei puntoni superiori ($r = h$).

Per quanto riguarda i puntoni superiori, lo sforzo normale di compressione maggiore si osserva nella Variante II, mentre nelle altre varianti analizzate resta costante ossia $N_{s8}/h = -\sqrt{2}h$.

Le analisi condotte finora rispondono al secondo quesito posto in §4.1, ovvero: *è possibile determinare una soluzione in forma chiusa dello stato di auto-sollecitazione ammissibile e dei meccanismi infinitesimi di tali varianti?*

Ciò consente di poter approntare, a valle dell'analisi delle condizioni di stabilità, lo studio di un opportuno assemblaggio della cella elementare tensegrity V-Expander.

4.6 STABILITÀ NELLA CONFIGURAZIONE PRE-SOLLECITATA

L'analisi cinematica, e quella statica, condotte nei precedenti paragrafi per le 5 varianti proposte possono essere sintetizzate nella Tabella 19.

	n	m	s_A	m_i^{40}	Staticamente indeterminata	Cinematicamente indeterminata
Variante I	6	11	1	2	si	si
Variante II	6	12	1	1	si	si
Variante III	6	13	1	0	si	no
Variante IV	6	14	2	0	si	no
Variante V	6	15	3	0	si	no

Tabella 19. Caratterizzazione statica e cinematica delle varianti tensegrity.

Ricordando quanto esposto in §3.3, una struttura tensegrity si definisce stabile nella configurazione pre-sollecitata se la configurazione di auto-equilibrio è stabile nelle direzioni dei meccanismi infinitesimi.

Se la struttura è cinematicamente indeterminata (come nel caso delle varianti I e II) è possibile definire la forma quadratica della matrice di rigidezza geometrica calcolata rispetto alla matrice dei meccanismi infinitesimi $\mathbf{Q}_m \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ dalla (139); affinché tale struttura tensegrity cinematicamente indeterminata risulti essere stabile nella pre-sollecitazione, la forma quadratica \mathbf{Q}_m deve essere definita positiva.

Tuttavia la struttura risulta stabile se la rigidezza assiale degli elementi è sufficientemente grande rispetto alla rigidezza geometrica dovuta alla pre-sollecitazione, poiché come richiamato in §3.3, in questa condizione la forma quadratica della matrice di rigidezza lineare, che dipende dalla rigidezza assiale degli elementi, è dominante rispetto alla forma quadratica della matrice di rigidezza geometrica, che è funzione della rigidezza geometrica legata alla pre-sollecitazione.

Nel caso di strutture cinematicamente determinate (come nel caso delle varianti III, IV e V), ossia risulta $m_i = 0$, la forma quadratica della matrice di rigidezza geometrica è nulla. Tuttavia anche tali strutture sono definite stabili nella pre-sollecitazione.

Per quanto detto, di seguito si riporta lo studio delle condizioni di stabilità della pre-sollecitazione esclusivamente delle prime due varianti.

4.6.1 Variante I

Dalla (139) si ricorda che la stabilità della configurazione pre-sollecitata si ricerca imponendo che la forma quadratica \mathbf{Q}_m della matrice di rigidezza geometrica calcolata rispetto alla matrice dei meccanismi infinitesimi risulti definita positiva, ovvero che, escludendo i sei autovalori nulli corrispondenti ai moti rigidi, i restanti autovalori siano strettamente positivi.

Per tale variante la matrice di rigidezza geometrica $\mathbf{K}_G \in \mathbb{R}^{18 \times 18}$, dalla (108), risulta essere pari a:

⁴⁰ Non considerando i 6 moti rigidi nello spazio euclideo tridimensionale.

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s & \mathbf{0}_6 & \mathbf{0}_6 \\ \mathbf{0}_6 & \mathbf{D}_s & \mathbf{0}_6 \\ \mathbf{0}_6 & \mathbf{0}_6 & \mathbf{D}_s \end{bmatrix}, \quad (206)$$

avendo determinato la matrice di densità di forza $\mathbf{D}_s \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ mediante la (34):

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \frac{2h}{d} & -2 & -\frac{2h}{d} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{2h}{d} & \frac{2h}{d} & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{d-h}{2(d-2h)} + \frac{h}{2h-d} & -1 & -\frac{d-h}{2(d-2h)} & -\frac{h}{2(2h-d)} & -\frac{h}{2(2h-d)} \\ 0 & 1 & -\frac{d-h}{2(d-2h)} & \frac{d-h}{2(d-2h)} + \frac{h}{2h-d} & -1 & -\frac{h}{2(2h-d)} & -\frac{h}{2(2h-d)} \\ 1 & 0 & -\frac{h}{2(2h-d)} & -\frac{h}{2(2h-d)} & \frac{h}{2h-d} + \frac{h-d}{2(2h-d)} & -1 & -\frac{h-d}{2(2h-d)} \\ 1 & 0 & -\frac{h}{2(2h-d)} & -\frac{h}{2(2h-d)} & -\frac{h-d}{2(2h-d)} & \frac{h}{2h-d} + \frac{h-d}{2(2h-d)} & -1 \end{bmatrix}. \quad (207)$$

Dalla (206) e dalla (139) si ricavano gli autovalori della forma quadratica \mathbf{Q}_m :

$$\{\lambda_{\mathbf{D}_s, i}\} = \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, -6 \left(\frac{1}{2r^2} - \frac{h}{2dr^2} \right) (h^2 + r^2), -2 \left(\frac{1}{2r^2} - \frac{h}{2dr^2} \right) (d^2 - 2dh + h^2 + 4r^2) \right\}. \quad (208)$$

Gli autovalori non nulli risultano essere tutti strettamente positivi, ricordando la (189), se e solo se i parametri geometrici che definiscono la configurazione geometrica della struttura rispettano le seguenti condizioni: $[0 < a < 1 \wedge h > 0 \wedge r > 0]$, ciò risulta compatibile con la definizione parametrica della struttura (Figura 52).

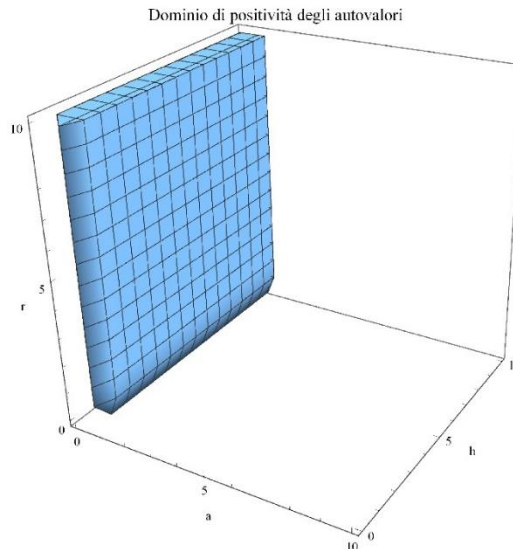


Figura 52. Dominio positività degli autovalori di \mathbf{Q}_m .

Ciò garantisce che la Variante I è stabile nella pre-sollecitazione per qualsiasi valore del parametro a , compreso nel suo dominio di definizione, e per ogni valore dei parametri h e r .

4.6.2 Variante II

Per tale variante la matrice di rigidezza geometrica $\mathbf{K}_G \in \mathbb{R}^{18 \times 18}$, dalla (108), risulta essere pari a:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s & \mathbf{0}_6 & \mathbf{0}_6 \\ \mathbf{0}_6 & \mathbf{D}_s & \mathbf{0}_6 \\ \mathbf{0}_6 & \mathbf{0}_6 & \mathbf{D}_s \end{bmatrix}, \quad (209)$$

avendo determinato la matrice di densità di forza $\mathbf{D}_s \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ mediante la (34):

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} -\frac{2h^3}{d^2(d-2h)} + \frac{2(d-h)h}{d(d-2h)} - 2 & \frac{2h^3}{d^2(d-2h)} & -\frac{(d-h)h}{d(d-2h)} & -\frac{(d-h)h}{d(d-2h)} & 1 & 1 \\ \frac{2h^3}{d^2(d-2h)} & \frac{2h^2}{d(d-2h)} - \frac{2h^3}{d^2(d-2h)} & -\frac{h^2}{d(d-2h)} & -\frac{h^2}{d(d-2h)} & 0 & 0 \\ -\frac{(d-h)h}{d(d-2h)} & -\frac{h^2}{d(d-2h)} & \frac{h^2}{d(d-2h)} - \frac{h}{d-2h} + \frac{(d-h)h}{d(d-2h)} & 0 & \frac{h}{2(d-2h)} & \frac{h}{2(d-2h)} \\ -\frac{(d-h)h}{d(d-2h)} & -\frac{h^2}{d(d-2h)} & 0 & \frac{h^2}{d(d-2h)} - \frac{h}{d-2h} + \frac{(d-h)h}{d(d-2h)} & \frac{h}{2(d-2h)} & \frac{h}{2(d-2h)} \\ 1 & 0 & \frac{h}{2(d-2h)} & \frac{h}{2(d-2h)} & \frac{d-h}{2(d-2h)} - \frac{h}{d-2h} - 1 & -\frac{d-h}{2(d-2h)} \\ 1 & 0 & \frac{h}{2(d-2h)} & \frac{h}{2(d-2h)} & -\frac{d-h}{2(d-2h)} & \frac{d-h}{2(d-2h)} - \frac{h}{d-2h} - 1 \end{bmatrix}. \quad (210)$$

Dalla (209) e dalla (139) si ricavano gli autovalori della forma quadratica \mathbf{Q}_m :

$$\{\lambda_{\mathbf{D}_s, i}\} = \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{(d-h)h^2(d^2 - 2dh + h^2 + 4r^2)}{d^2(d-2h)r^2} \right\}. \quad (211)$$

L'autovalore non nullo risulta essere strettamente positivo, ricordando la (189), se e solo se i parametri geometrici che definiscono la configurazione geometrica della struttura rispettano le seguenti condizioni: $[(a < 0 \wedge h > 0 \wedge r > 0) \vee (0 < a < 1 \wedge h > 0 \wedge r > 0) \vee (a > 2 \wedge h > 0 \wedge r > 0)]$. Tali condizioni risultano compatibili con la definizione parametrica della geometria della variante solo se si considera l'intervallo dei parametri: $[0 < a < 1 \wedge h > 0 \wedge r > 0]$ (Figura 53).

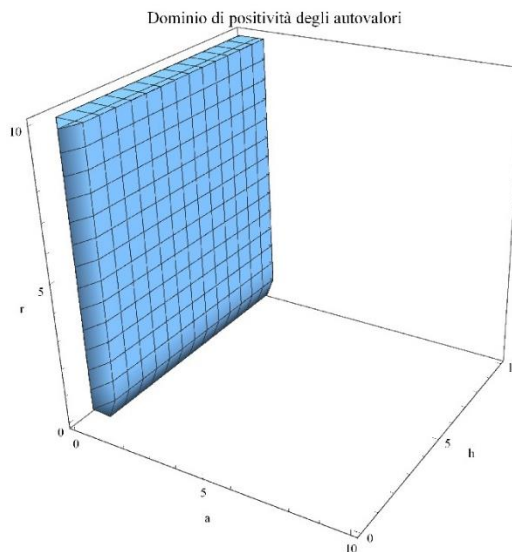


Figura 53. Dominio positività degli autovalori di \mathbf{Q}_m .

Ciò garantisce che la Variante II è stabile nella pre-sollecitazione per qualsiasi valore del parametro a , compreso nel suo dominio di definizione, e per ogni valore dei parametri h e r .

4.7 SUPER-STABILITÀ

Una struttura tensegrity si definisce super-stabile se risulta essere stabile nello stato di auto-equilibrio (minimo locale dell'energia potenziale totale) indipendentemente dalle proprietà meccaniche del materiale e dal livello della pre-sollecitazione.

In §3.4 si definisce super-stabile una struttura tensegrity se si verificano le seguenti condizioni:

1. Il rango della matrice geometrica r_G è pari a 6,
2. La nullità della matrice di densità di forza è pari a 4,
3. La matrice di densità di forza è semi-definita positiva.

Di seguito si riportano le analisi della super-stabilità relative alle 5 varianti tensegrity proposte.

4.7.1 Variante I

La matrice di densità di forza $\mathbf{D}_s \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ definita nella (34) risulta essere pari a:

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \frac{2h}{d}-2 & -\frac{2h}{d} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -\frac{2h}{d} & \frac{2h}{d}-2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{d-h}{2(d-2h)} + \frac{h}{2h-d} -1 & -\frac{d-h}{2(d-2h)} & -\frac{h}{2(2h-d)} & -\frac{h}{2(2h-d)} \\ 0 & 1 & -\frac{d-h}{2(d-2h)} & \frac{d-h}{2(d-2h)} + \frac{h}{2h-d} -1 & -\frac{h}{2(2h-d)} & -\frac{h}{2(2h-d)} \\ 1 & 0 & -\frac{h}{2(2h-d)} & -\frac{h}{2(2h-d)} & \frac{h}{2h-d} + \frac{h-d}{2(2h-d)} -1 & -\frac{h-d}{2(2h-d)} \\ 1 & 0 & -\frac{h}{2(2h-d)} & -\frac{h}{2(2h-d)} & -\frac{h-d}{2(2h-d)} & \frac{h}{2h-d} + \frac{h-d}{2(2h-d)} -1 \end{bmatrix}, \quad (212)$$

il cui rango è pari a 2. Tuttavia gli autovalori $\lambda_{D_s,i}$ ($i=1,2,\dots,6$) sono pari a:

$$\{\lambda_{D_s,i}\} = \left\{ 0, 0, 0, 0, -\frac{3(d^2-2dh)}{d(d-2h)}, -\frac{3d^2-8dh+8h^2}{d(d-2h)} \right\}, \quad (213)$$

da cui si evince che il primo autovalore non nullo, ovvero $-\frac{3(d^2-2dh)}{d(d-2h)}$, è negativo per ogni valore del parametro a , come mostrato in Figura 54.

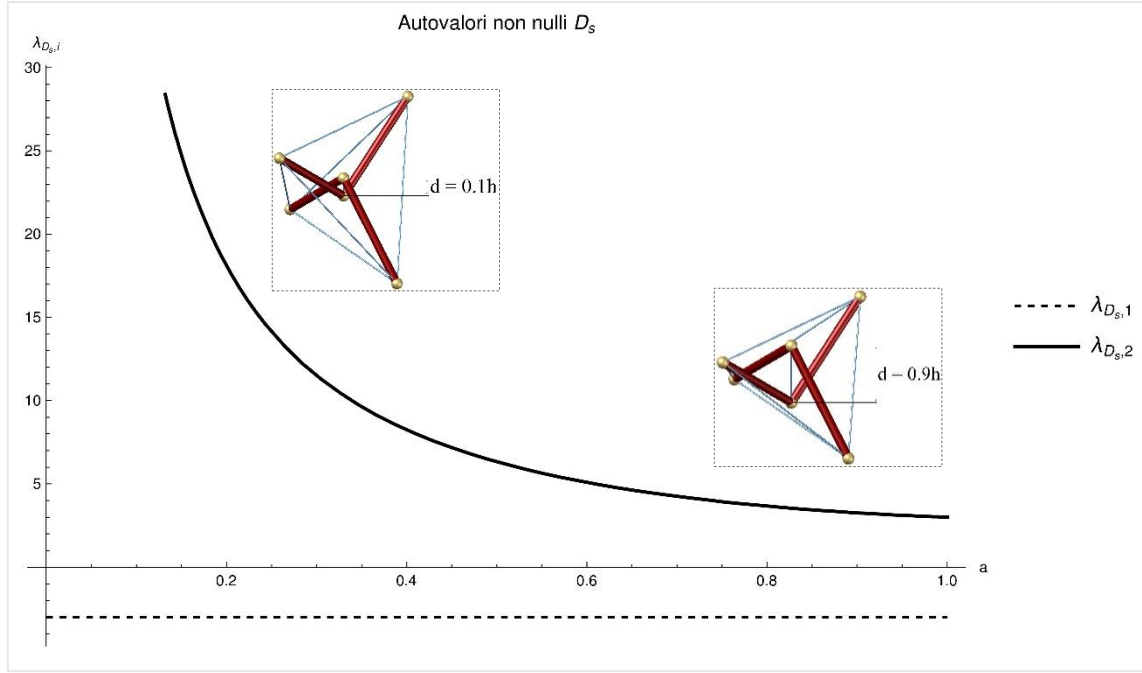


Figura 54. Autovalori della matrice di densità di forza della Variante I.

Da quanto detto si evince che la Variante I non è super-stabile.

4.7.2 Variante II

La matrice di densità di forza $\mathbf{D}_s \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ definita nella (34) risulta essere pari a:

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \frac{2h^3}{d^2(d-2h)} + \frac{2(d-h)h}{d(d-2h)} - 2 & \frac{2h^3}{d^2(d-2h)} & -\frac{(d-h)h}{d(d-2h)} & -\frac{(d-h)h}{d(d-2h)} & 1 & 1 \\ \frac{2h^3}{d^2(d-2h)} & \frac{2h^2}{d(d-2h)} - \frac{2h^3}{d^2(d-2h)} & -\frac{h^2}{d(d-2h)} & -\frac{h^2}{d(d-2h)} & 0 & 0 \\ \frac{(d-h)h}{d(d-2h)} & -\frac{h^2}{d(d-2h)} & \frac{h^2}{d(d-2h)} - \frac{h}{d-2h} + \frac{(d-h)h}{d(d-2h)} & 0 & \frac{h}{2(d-2h)} & \frac{h}{2(d-2h)} \\ \frac{(d-h)h}{d(d-2h)} & -\frac{h^2}{d(d-2h)} & 0 & \frac{h^2}{d(d-2h)} - \frac{h}{d-2h} + \frac{(d-h)h}{d(d-2h)} & \frac{h}{2(d-2h)} & \frac{h}{2(d-2h)} \\ 1 & 0 & \frac{h}{2(d-2h)} & \frac{h}{2(d-2h)} & \frac{d-h}{2(d-2h)} - \frac{h}{d-2h} - 1 & -\frac{d-h}{2(d-2h)} \\ 1 & 0 & \frac{h}{2(d-2h)} & \frac{h}{2(d-2h)} & -\frac{d-h}{2(d-2h)} & \frac{d-h}{2(d-2h)} - \frac{h}{d-2h} - 1 \end{bmatrix} \quad (214)$$

il cui rango è pari a 2. Dal relativo calcolo degli autovalori $\lambda_{D_s,i}$ ($i=1,2,\dots,6$) risulta che:

$$\{\lambda_{D_s,i}\} = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{-3d^3 + 7d^2h - \sqrt{9d^6 - 42d^5h + 85d^4h^2 - 72d^3h^3 + 40d^2h^4 + 16h^6} - 4h^3}{2d^2(d-2h)}, \frac{-3d^3 + 7d^2h + \sqrt{9d^6 - 42d^5h + 85d^4h^2 - 72d^3h^3 + 40d^2h^4 + 16h^6} - 4h^3}{2d^2(d-2h)} \right\} \quad (215)$$

Come si può osservare in Figura 55, il secondo autovalore non nullo risulta essere sempre negativo per ogni valore del parametro a :

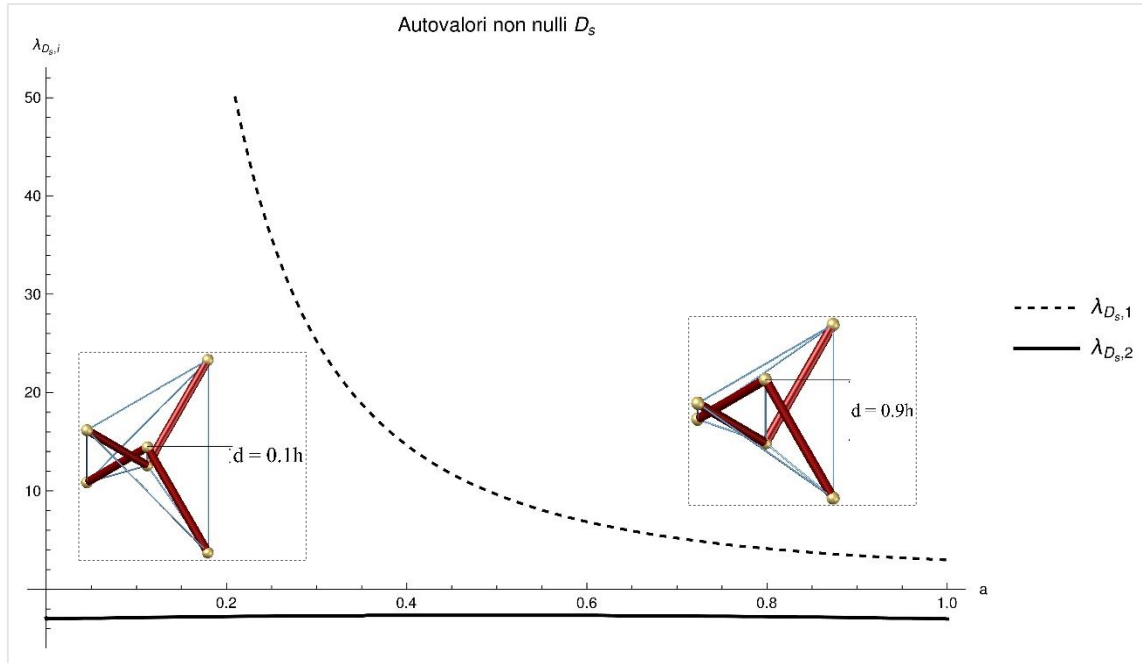


Figura 55. Autovalori della matrice di densità di forza della Variante II.

Dalla Fig. 55 si deduce che la Variante II non è super-stabile.

4.7.3 Variante III e Variante IV

La matrice di densità di forza $\mathbf{D}_s \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ definita nella (34) risulta essere pari a:

$$\mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \frac{2(h-d)}{h} + \frac{2(d^2-2hd+2h^2)}{dh} - 2 & -\frac{2(d^2-2hd+2h^2)}{dh} & -\frac{h-d}{h} & -\frac{h-d}{h} & 1 & 1 \\ -\frac{2(d^2-2hd+2h^2)}{dh} & \frac{2(h-d)}{h} + \frac{2(d^2-2hd+2h^2)}{dh} - 2 & 1 & 1 & -\frac{h-d}{h} & -\frac{h-d}{h} \\ -\frac{h-d}{h} & 1 & \frac{d}{h} + \frac{h-d}{h} - 1 & 0 & -\frac{d}{2h} & -\frac{d}{2h} \\ -\frac{h-d}{h} & 1 & 0 & \frac{d}{h} + \frac{h-d}{h} - 1 & -\frac{d}{2h} & -\frac{d}{2h} \\ 1 & -\frac{h-d}{h} & -\frac{d}{2h} & -\frac{d}{2h} & \frac{d}{h} + \frac{h-d}{h} - 1 & 0 \\ 1 & -\frac{h-d}{h} & -\frac{d}{2h} & -\frac{d}{2h} & 0 & \frac{d}{h} + \frac{h-d}{h} - 1 \end{bmatrix}, \quad (216)$$

il cui rango r_{D_s} è pari a 2, pertanto risulta rispettata la condizione sul valore della nullità di tale matrice.

Dal relativo calcolo degli autovalori $\lambda_{D_s,i}$ ($i=1,2,\dots,6$) risulta che:

$$\{\lambda_{D_s,i}\} = \left\{ 0, 0, 0, 0, -\frac{3d}{h}, \frac{3d^2-8dh+8h^2}{dh} \right\}. \quad (217)$$

Esiste quindi almeno un autovalore negativo ($-3d/h$) che rende la matrice di densità di forza indefinita. Ciò implica che la struttura non è super-stabile.

Tuttavia tale variante è cinematicamente determinata, e quindi stabile nella pre-sollecitazione; se inoltre la rigidezza assiale degli elementi risulta sufficientemente grande rispetto alla rigidezza geometrica, legata alla pre-sollecitazione, la struttura risulta essere stabile.

Analoghe considerazioni possono essere fatte per la Variante IV, poiché gli autovalori della matrice di densità di forza sono identici.

4.7.4 Variante V

Dal calcolo degli autovalori della matrice di densità di forza $\mathbf{D}_s \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ per questa variante si ottiene:

$$\{\lambda_{D_s,i}\} = \left\{ 0, 0, 0, 0, \frac{3(3d^2 - 8dh + 8h^2)}{4d^2 - 11dh + 8h^2}, \frac{3(5d^2 - 16dh + 16h^2)}{4d^2 - 11dh + 8h^2} \right\}, \quad (218)$$

Come risulta dalla Figura 56, i due autovalori non nulli λ_{D_s1} e λ_{D_s2} sono sempre strettamente positivi per qualsiasi valore del parametro a .

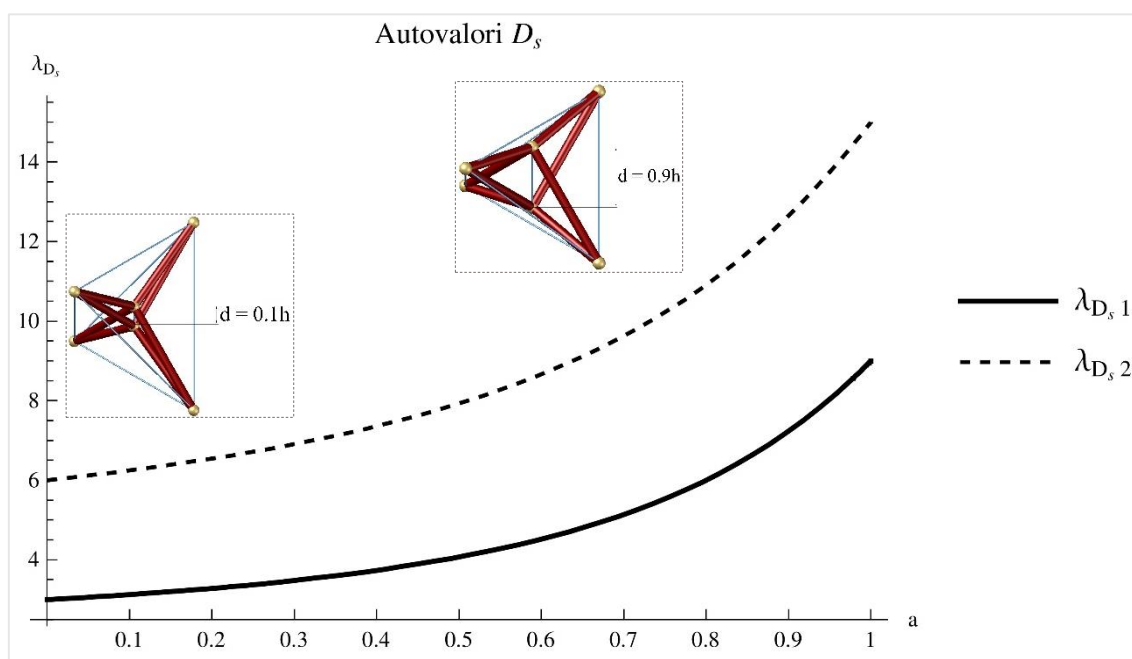


Figura 56. Autovalori della matrice di densità di forza della Variante V.

Da ciò si deduce che tale variante è super-stabile, ovvero stabile nello stato di auto-equilibrio indipendentemente dalle proprietà meccaniche del materiale e dal livello della pre-sollecitazione.

4.8 CONCLUSIONI

In questo capitolo è stata effettuata un'analisi di tipo morfologico che ha condotto alla definizione di una famiglia di celle elementari tensegrity innovative a partire dal modulo V-Expander di Motro. In particolare, è stato possibile definire cinque varianti della cella tensegrity brevettata da Motro, ciascuna caratterizzata da una peculiare configurazione geometrica e da un caratteristico comportamento meccanico.

La configurazione geometrica di ciascuna delle cinque celle è definita mediante l'utilizzo di tre parametri geometrici che, nello spazio euclideo tridimensionale, descrivono compiutamente la geometria del sistema (r , h e d , con $d = a \times h$, $0 < a < 1$).

In tal senso, la Variante I costituisce una generalizzazione della cella di Motro: nel caso in cui il parametro d coincide col valore di h la Variante I descrive la geometria del modulo V-Expander ideato da Motro.

Le altre varianti (II, III, IV e V) si ottengono a partire dalla Variante I per successive integrazioni e/o sostituzioni con un grado di complessità via via crescente. Si suggerisce di valutare tale grado di complessità mediante il calcolo della valenza massima (minima) dei nodi della cella, con riferimento alla Teoria dei Grafi, che è pari al numero massimo (minimo) di elementi incidenti nel generico nodo della struttura. Tale parametro, contestualmente al numero complessivo m degli elementi, è anche indicativo della difficoltà di realizzazione e di fabbricabilità della cella, nel senso che tanto più elevato è il valore di tale parametro tanto maggiore è la difficoltà nella realizzazione del modulo tensegrity. Si fa notare che la valenza massima di ciascuna delle celle tensegrity innovative proposte è confrontabile con la valenza massima del simplex tensegrity (la più semplice cella elementare tensegrity che si può costruire nello spazio euclideo tridimensionale); ciò detto qualifica positivamente tali celle innovative.

Inoltre, la regolarità geometrica e le proprietà di simmetria rendono tali celle facilmente assemblabili con altre celle simili per la realizzazione di strutture tensegrity complesse, quali torri, archi, volte o cupole. La possibilità di poter variare la geometria della cella, variando la lunghezza di un solo elemento, costituisce un punto di forza di tale modulo, rendendolo adattabile geometricamente a svariate richieste progettuali.

Dal punto di vista topologico, in base al numero massimo di puntoni che risultano incidenti nel generico nodo della cella, le varianti I, II, III e IV si definiscono di classe 2, mentre la Variante V si definisce di classe 4.

Dal punto di vista meccanico, si è indagato il comportamento di ciascuna cella nella condizione di auto-equilibrio, ovvero in assenza di carichi esterni. Ciò ha consentito di determinare lo stato di auto-sollecitazione ammissibile per ciascuna variante, ovvero lo stato di pre-sollecitazione negli elementi nella configurazione di auto-equilibrio compatibile con le proprietà di simmetria della cella e con il comportamento unilatero degli elementi: puntoni in compressione e cavi in trazione.

Contrariamente a quanto accade nella Variante V, nelle varianti I, II, III e IV lo sforzo normale negli elementi nella condizione di auto-equilibrio, ad eccezione dei cavi diagonali, decresce, più o meno velocemente, al crescere del parametro a , ossia all'aumentare della lunghezza del cavo in rapporto all'altezza della cella decresce lo sforzo normale negli elementi della cella, eccezion fatta per i cavi diagonali.

Inoltre, a parità del valore dei parametri a ed h , il cavo verticale risulta essere maggiormente sollecitato nella Variante II, e meno per la Variante V. I cavi orizzontali sono maggiormente sollecitati nella Variante V, con valori crescenti dello sforzo normale di trazione per valori del parametro a che tendono ad 1. Il più elevato valore dello sforzo normale di trazione negli elementi inferiori (superiori) si registra nella Variante

II; nella Variante V tali elementi diventano puntoni, con un valore crescente dello sforzo normale di compressione per valori del parametro a che tendono ad 1.

Nei cavi diagonali invece, al crescere del rapporto d/h si osserva che lo sforzo normale di trazione assume valori sempre più elevati nelle varianti I, II e III; nella Variante V la curva che rappresenta tale sforzo presenta un massimo in corrispondenza di $a \cong 0.7$.

Sono state valutate, quindi, le condizioni relative alla stabilità della pre-sollecitazione e alla super-stabilità. Si ricorda che le varianti I e I sono cinematicamente indeterminate, mentre risultano cinematicamente determinate le varianti III, IV e V. Le varianti I e II risultano stabili nella pre-sollecitazione per ogni valore del parametro a , poiché risulta positiva la forma quadratica della matrice di rigidezza geometrica calcolata rispetto ai meccanismi infinitesimi. Anche le varianti III, IV e V vengono definite stabili nella pre-sollecitazione: come discusso in §3.3, per le strutture cinematicamente determinate e staticamente indeterminate la forma quadratica della matrice di rigidezza geometrica non può essere determinata in quanto non esistono meccanismi infinitesimi che generano lo spazio nullo della matrice di compatibilità.

Dall'analisi risulta inoltre che solo la Variante V è super-stabile, ovvero stabile indipendentemente dalle proprietà meccaniche del materiale e dal livello della pre-sollecitazione. Solo per tale variante infatti sono rispettate le condizioni necessarie e sufficienti affinché una struttura tensegrity free-standing risulti super-stabile: il rango della matrice geometrica r_G è pari a 6, la matrice di densità di forza è semi-definita positiva e la sua nullità è pari a 4.

In conclusione, la Variante I risulta evidentemente la più semplice dal punto di vista della realizzabilità e consente una maggiore adattabilità nell'assemblaggio con altre celle tensegrity simili. Analoga predisposizione all'assemblaggio è presente nella Variante III, in virtù delle proprietà di simmetria che caratterizzano la geometria della cella.

I cavi orizzontali, presenti nelle varianti II, IV e V, limitano le possibilità di assemblare tali celle, in particolar modo nel caso di assemblaggi a torre, in cui la presenza di tali cavi riduce il dominio di esistenza del parametro a , e quindi influisce sul rapporto tra la lunghezza del cavo verticale (expander) e l'altezza della cella.

In base alle considerazioni su esposte, nel capitolo successivo si studieranno alcuni esempi applicativi di assemblaggi a torre delle varianti I e III, determinando per ciascuna lo stato di auto-sollecitazione ammissibile, nonché le condizioni relative alla stabilità della pre-sollecitazione e alla super-stabilità.

Inoltre, a tale studio si fa precedere quello relativo al Mast di Fuller, descritto nel dettaglio nel capitolo 5, e ad una sua versione modificata; tale studio, per quanto si conosce, non è presente in letteratura.

Bibliografia

- [1] R. BUCKMINSTER FULLER, E. J. APPLEWHITE, A. L. LOEB, *Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking*, Sebastopol (CA), Macmillan Publishing Co. Inc., 1975.
- [2] R. MOTRO, *Tensarch Project*, in “Proceedings of Fifth International Conference on Space Structures”, 2003, pp. 57-66.
- [3] V. RADUCANU, *Architecture et système constructif : cas des systèmes de tensegrité*, Université de Montpellier II, Thèse de doctorat, 2001.
- [4] J. QIRANT, K. KEBICHE, M. N. KAZI-AOUAL, *Etude des systemes de tensegrite*, Revue Francaise de Genie Civil, 2000.
- [5] V. RADUCANU, R. MOTRO, *Systeme à autoequilibre stable pour element de construction*. Demande de brevet francais n° 01 04 822, deposee le 9 avril 2001aux noms de C.N.R.S. - Ste Tissage et Enduction Serge Ferrari.
- [6] A. KAVEH, *Structural Mechanics: Graph and Matrix Methods*, 3rd ed., Research Studies Press, 2004.
- [7] F. FRATERNALI, L. SENATORE, C. DARAIIO, *Solitary waves on tensegrity lattices*, in “J Mech Phys Solids”, 2012, 60, pp. 1137-1144.
- [8] J. XIONG, *et al.*, *Advanced Micro-Lattice Materials*, in “Adv Eng Mater”, 2015, 17(9), pp.1253-1264.
- [9] J. Y. ZHANG, *Structural Morphology and Stability of Tensegrity Structures*. Ph.D. Thesis, Kyoto University, Japan, 2007.

Capitolo 5

CASO APPLICATIVO: ASSEMBLAGGI A TORRE

Come accennato all'inizio del precedente capitolo, l'obiettivo applicativo della tesi è quello di studiare il comportamento meccanico di alcune strutture tensegrity costruite per assemblaggio a torre di alcune delle celle innovative V-Expander proposte in questo lavoro. La morfologia di tali strutture si ispira ad un noto esempio di struttura tensegrity realizzata circa 60 anni fa da Buckminster Fuller, il *Tensegrity mast*.

5.1 IL TENSEGRITY MAST

Nel settembre del 1959, in occasione dell'esposizione "*Three Structures by Buckminster Fuller*" allestita presso *The Museum of Modern Art* (MoMA) di New York, diretta dal Direttore del Dipartimento di Architettura e Design dello stesso museo Arthur Drexler, Buckminster Fuller realizza tre strutture suggestive e dal forte impatto scenografico (Figura 57, [1]). La straordinaria forza e l'inaspettata leggerezza che caratterizzano tali strutture rappresentano in modo paradigmatico alcune delle peculiarità dei sistemi tensegrity.

In particolare Fuller, pensando prevalentemente ad un possibile utilizzo militare, realizza per tale esposizione una cupola geodetica in collaborazione col *Lincoln Laboratory* del *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), una struttura reticolare spaziale denominata "*Octet Truss*" in collaborazione con la *Aluminium Limited Sales, Inc.* e una torre denominata "*Tensegrity mast*" con la partecipazione dell'architetto Shoji Sadao e della *Edison Price, Inc.*

La struttura "*Octet Truss*" (di dimensioni pari a circa $30\text{ m} \times 10\text{ m} \times 6\text{ m}$) è composta da 2380 aste in alluminio disposte in modo tale da formare un assemblaggio di tetraedri e ottaedri, con una parte a sbalzo la cui luce massima misura circa 20 m.

La cupola, che raggiunge un'altezza di circa 15 m con un diametro di 17 m, è realizzata con l'intento di ospitare la stazione radar americana nell'Artide denominata "*Distant Early Warning Line*", e deriva dalle ricerche di Fuller sulle cupole geodetiche. Sebbene ciascun componente della struttura risulti leggero a tal punto da poter essere trasportato a mano, la cupola è in grado di resistere alle sollecitazioni derivanti da condizioni atmosferiche avverse, come quelle artiche, con velocità del vento di oltre 320 km/h.

Il "*Tensegrity mast*", alto circa 14 m, è realizzato con barre in una lega di nichel e rame denominata *Monel metal*, e puntoni in alluminio a sezione tubolare, ed è formata dalla giustapposizione di 20 unità tetraedriche. La forma delle tre strutture esprime appieno le leggi della natura consistenti nell'interazione tra forze di compressione e forze di trazione; l'impiego di tali sistemi innovativi nei campi dell'architettura e dell'ingegneria civile suggerisce spunti di riflessione interessanti, in grado di condurre a nuove forme e a

nuove tecniche costruttive. Si pensi ad esempio alle coperture di grandi strutture pubbliche (aeroporti, stadi, centri commerciali, teatri, musei, ecc.), il cui design può essere radicalmente innovato introducendo i sistemi tensegrity come paradigma costruttivo.

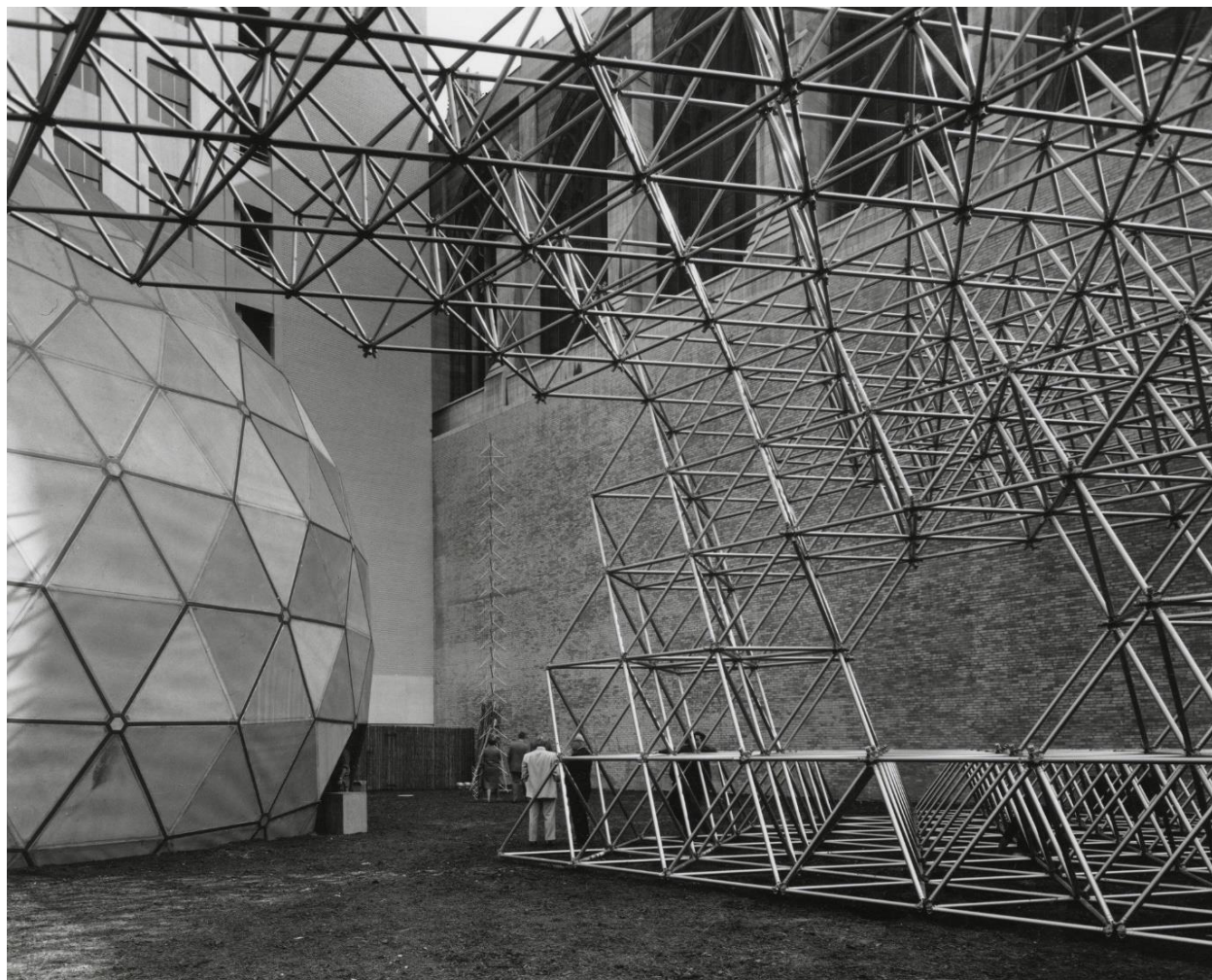


Figura 57. Esposizione MoMA, Settembre 1959, *Three Structures by Buckminster Fuller*.

A sinistra la cupola geodetica, a destra la struttura “Octet Truss”, sullo sfondo il “Tensegrity mast”.

Il Tensegrity mast, realizzato per l’esposizione presso il MoMA, rappresenta in particolare un efficace esempio di compressione fluttuante in una maglia di trazione continua. Il peso estremamente contenuto della struttura (circa 60 kg) in relazione alla rigidità della stessa è uno degli aspetti più significativi che caratterizzano il mast.

Nella descrizione riportata nell’archivio del MoMA [2] non si dichiarano immediate possibili applicazioni pratiche di tali sistemi, tuttavia si ipotizza un possibile utilizzo delle strutture tensegrity per la costruzione di opere di grandi dimensioni derivanti da assemblaggi, pressoché illimitati, di moduli elementari.

La cella elementare di cui si compone il Tensegrity mast, viene presentata da Buckminster Fuller in due possibili soluzioni tetraedriche (Figg. 58-59, [3,4⁴¹]).

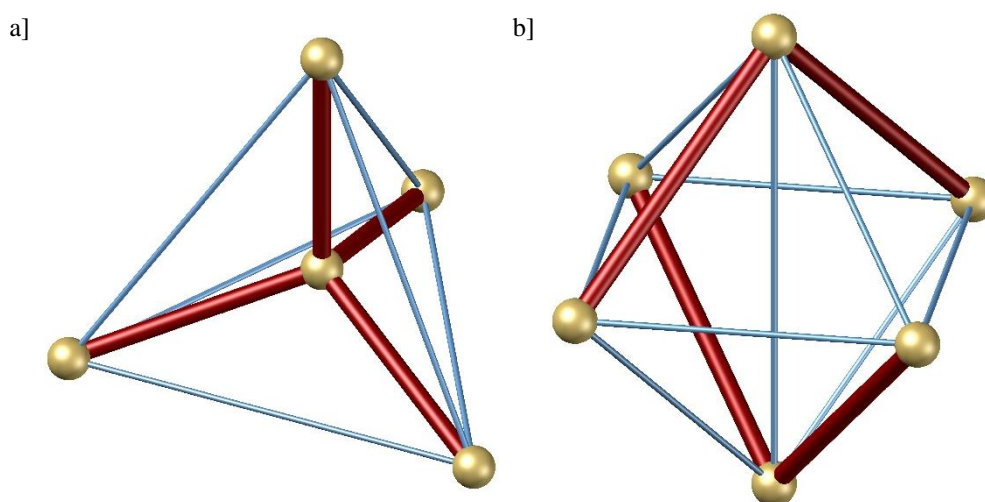


Figura 58. Modello celle elementari Tensegrity Mast: a) Soluzione I b) Soluzione II.

Nella soluzione I la morfologia della cella è ricavata dallo studio del tetraedro: in particolare gli spigoli del tetraedro sono rappresentati dai cavi, mentre le altezze (misurate da ciascun vertice alla faccia opposta e concluse nel baricentro del solido) sono individuate dai puntoni. La soluzione II ha una geometria evidentemente simile a quella della cella elementare V-Expander brevettata da Motro (già ampiamente descritta nel capitolo 4 [5,6]), dalla quale differisce in quanto i nodi di estremità dei puntoni sono complanari, ciò implica che i due triangoli formati idealmente da ciascuna coppia di puntoni adiacenti non si compenetrano nello spazio euclideo tridimensionale.

Nella cella innovativa “Variante I”, che risulta essere una generalizzazione della cella elementare V-Expander brevettata da Motro, e da cui derivano le altre varianti proposte in questo lavoro, la compenetrazione fra i due triangoli, legata all’altezza del cavo verticale, risulta essere variabile nei limiti geometrici definiti nel capitolo precedente.

Come già accennato, nel caso in cui l’altezza del cavo verticale risulta essere uguale all’altezza dei due triangoli formati dalle coppie di puntoni adiacenti la Variante I coincide con la cella V-Expander di Motro. Inoltre, nel caso in cui la lunghezza del cavo verticale risulta essere pari al doppio dell’altezza dei triangoli suddetti, la Variante I risulta essere coincidente con la soluzione II per il Tensegrity mast studiata da Buckminster Fuller.

Pertanto, fissati due dei tre parametri geometrici che definiscono la configurazione geometrica della Variante I, ossia h e r , variando la lunghezza del cavo verticale, che costituisce l’asse expander per la cella, ossia modificando il valore del parametro geometrico d , è possibile ottenere differenti geometrie per la cella; fra queste, risultano anche la cella V-Expander di Motro e la soluzione II di Buckminster Fuller.

⁴¹ In [4], 730.12.

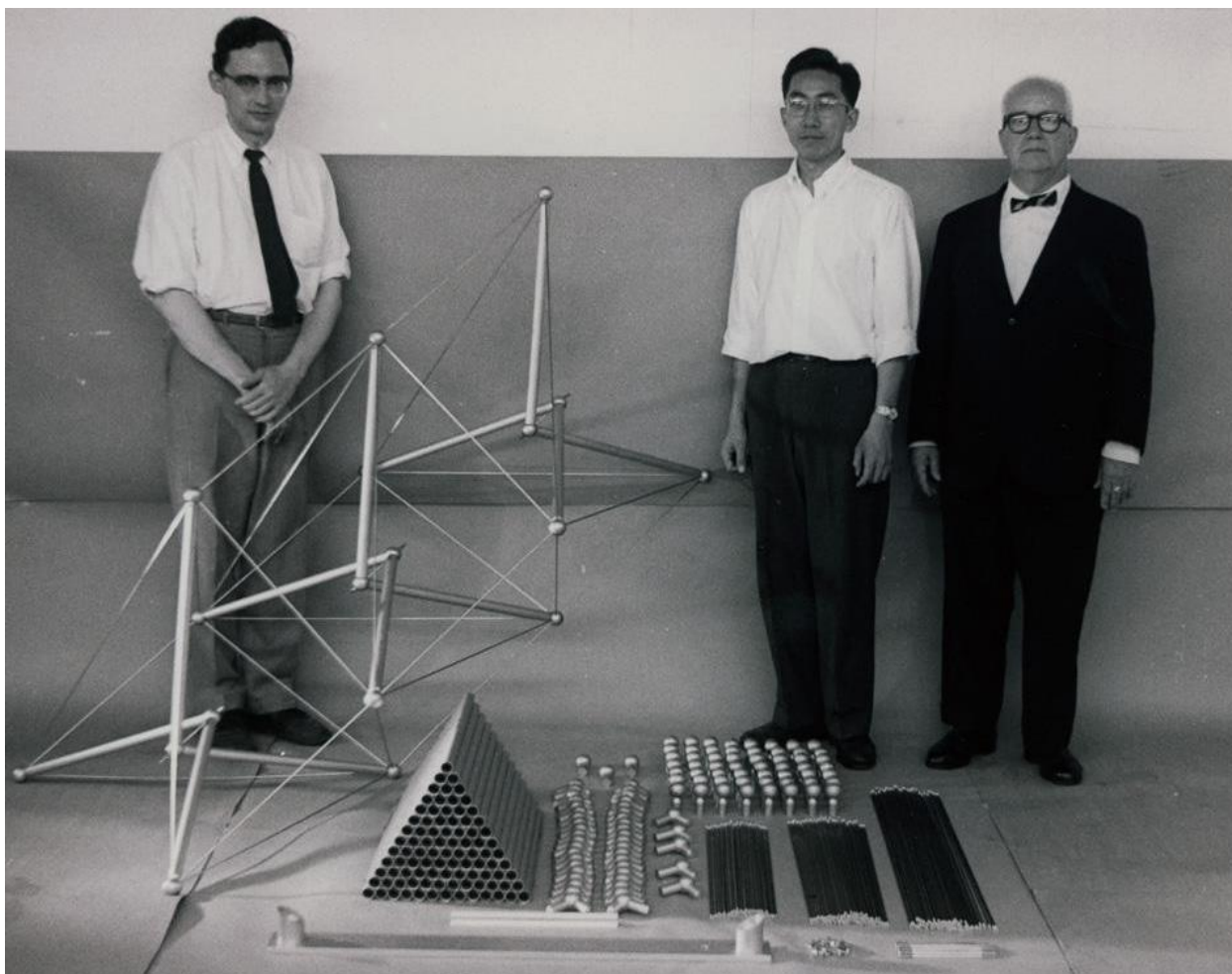


Figura 59. Edison Price, Shoji Sadao, and Buckminster Fuller. Seconda soluzione per il Tensegrity mast, 1959.

La Fig. 59 raffigura il prototipo di sistema costruttivo tensegrity che ha ispirato l'esempio applicativo di questo lavoro di tesi e che ha suggerito un approccio di tipo morfologico all'analisi del comportamento meccanico dei sistemi tensegrity realizzati sulla base del principio V-Expander, richiamato nel quarto capitolo.

Nella Fig. 59 inoltre, si può notare come la torre venga realizzata a partire da una cella tensegrity elementare simile alla cella V-Expander denominata Variante I, proposta in questo lavoro; la differenza si riscontra nell'assenza dei cavi orizzontali che connettono le estremità dei puntoni.

Ciò detto, i casi applicativi che si studieranno in questo capitolo sono:

- Torre I, che coincide con la seconda soluzione del Tensegrity mast,
- Torre II, che si ottiene aggiungendo due cavi orizzontali connessi ai nodi dei puntoni posti alle estremità della seconda soluzione del Tensegrity mast proposta da Buckminster Fuller,
- Torre III, realizzata per assemblaggio di tre celle V-Expander denominate Variante I,
- Torre IV, realizzata per assemblaggio di tre celle V-Expander denominate Variante III.

Per ciascuna delle quattro torri si studieranno i possibili stati di auto-sollecitazione ammissibili, la variazione dello sforzo normale negli elementi e le condizioni relative alla stabilità della struttura.

5.2 DEFINIZIONE DEL MODELLO

L'assemblaggio a torre delle celle prevede l'introduzione di due ulteriori tipologie di elementi: i cavi longitudinali (CL_o) che connettono l'estremità del puntone i -esimo della cella k -esima con il corrispondente nodo di estremità del puntone i -esimo della cella $(k+1)$ -esima; e i cavi di sella (CS) che rappresentano gli elementi di giunzione fra i nodi di estremità dei puntoni inferiori della cella k -esima e le estremità dei puntoni superiori della cella $(k+1)$ -esima. In generale la torre è composta complessivamente da N_t celle elementari, di cui due celle di estremità e $(N_t - 2)$ celle intermedie.

5.2.1 Torre I

La Torre I è composta da 43 elementi, tipologicamente raggruppati come segue (Figura 60):

- 3 cavi verticali (CV),
- 12 cavi diagonali (CD),
- 8 cavi longitudinali (CL_o),
- 8 cavi di sella (CS),
- 6 puntoni inferiori (SI),
- 6 puntoni superiori (SS).

La valenza massima \bar{v}_{\max} per la torre è pari a 7, mentre la valenza minima \bar{v}_{\min} risulta essere pari a 3.

In particolare si osserva che i nodi interni, relativi ai cavi verticali, sono caratterizzati dal fatto che in essi è minimo il numero delle aste incidenti; mentre i nodi esterni, relativi alle estremità dei puntoni, posseggono un'elevata valenza, maggiore per il modulo centrale.

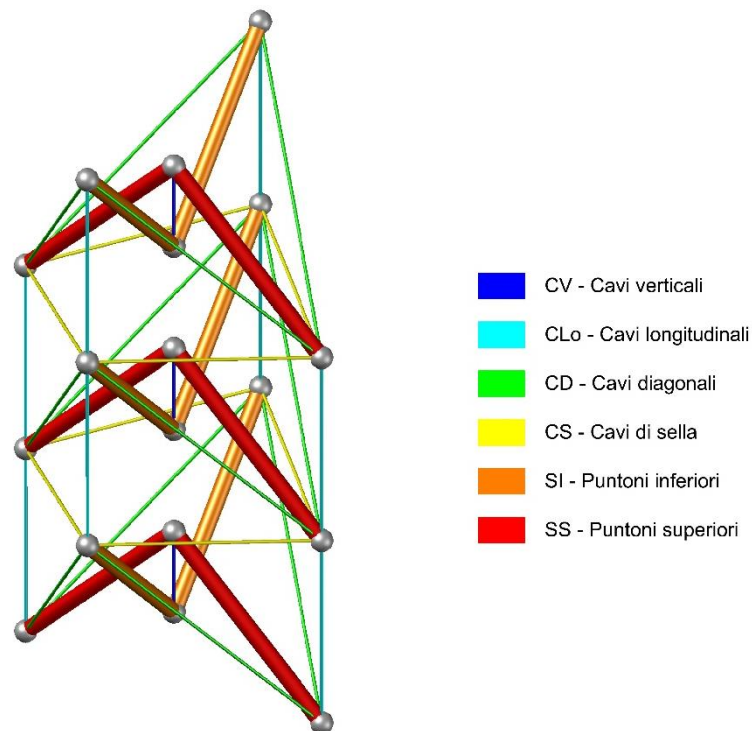


Figura 60. Modello Torre I.

5.2.2 *Torre II*

Come già accennato, la Torre II si ottiene aggiungendo due elementi alla Torre I, per un totale di 45 elementi (Figura 61):

- 1 cavo orizzontale inferiore (COi),
- 1 cavo orizzontale superiore (COs).

Le valenze massime e minime evidentemente non cambiano rispetto alla Torre I, ossia $\bar{v}_{\max} = 7$ e $\bar{v}_{\min} = 3$. L'inserimento dei due cavi orizzontali ha modificato esclusivamente le valenze dei nodi di estremità della torre: il numero degli elementi incidenti in tali nodi è infatti passato da 4, per la Torre I, a 5.

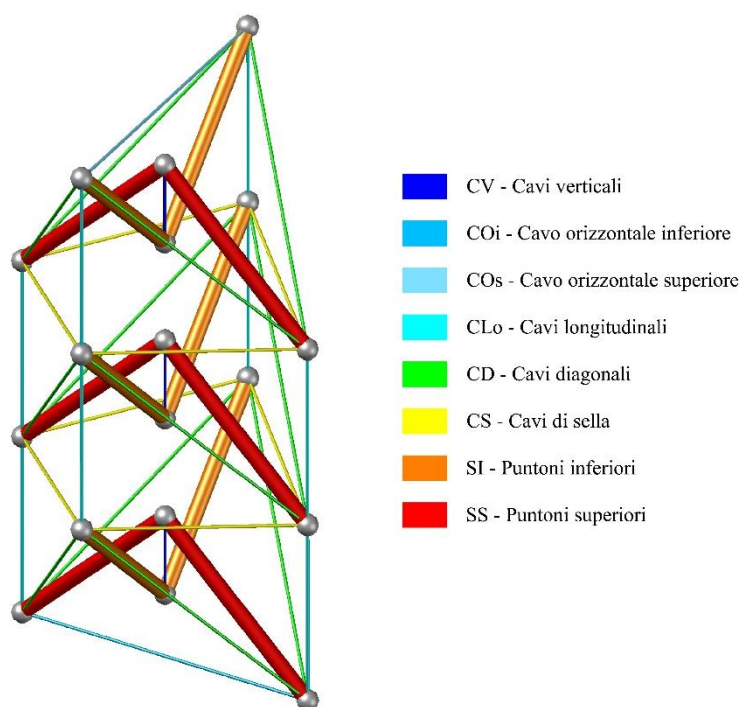


Figura 61. Modello Torre II.

5.2.3 *Torre III*

La Torre III è realizzata per assemblaggio di tre celle V-Expander Variante I e si ottiene dalla Torre II aggiungendo 4 cavi orizzontali intermedi (CO). Tale torre è quindi composta da 49 elementi (Figura 62).

La valenza massima \bar{v}_{\max} in tal caso è pari a 8, mentre la valenza minima \bar{v}_{\min} risulta essere sempre pari a 3. L'inserimento dei cavi orizzontali intermedi ha modificato la valenza dei nodi interni della torre: il numero degli elementi incidenti in tali estremità è passato da 7 (come per le prime due torri) a 8.

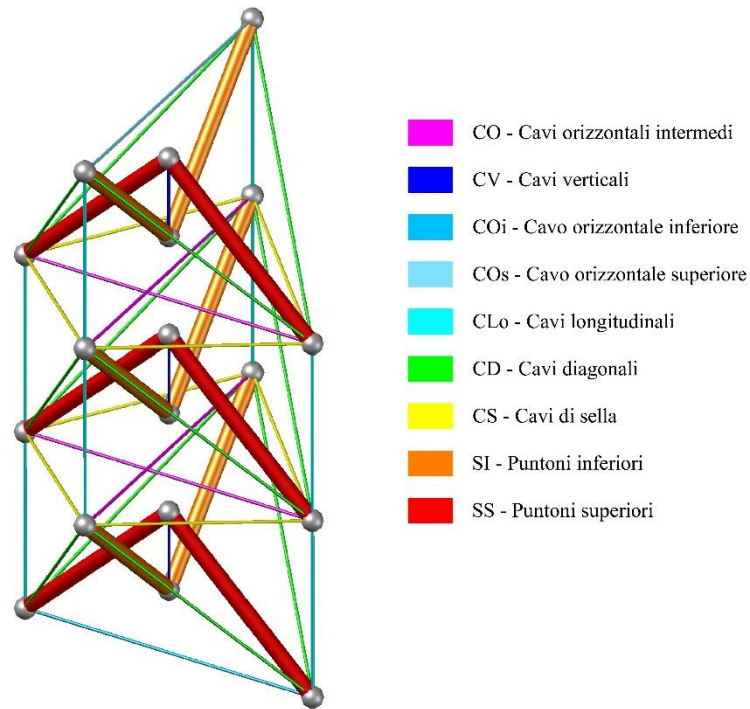


Figura 62. Modello Torre III.

5.2.4 *Torre IV*

La Torre IV è costruita per assemblaggio di tre celle V-Expander Variante III (Figura 63), tipologicamente raggruppati nel modo seguente:

- 3 cavi verticali (CV),
- 12 cavi diagonali (CD),
- 8 cavi longitudinali (CL_o),
- 8 cavi di sella (CS),
- 12 cavi intermedi (CI),
- 6 puntoni inferiori (SI),
- 6 puntoni superiori (SS).

Complessivamente la Torre IV è composta da 55 elementi, 12 puntoni e 43 cavi. Anche la valenza massima \bar{v}_{\max} per la Torre IV è pari a 8, mentre la valenza minima \bar{v}_{\min} risulta essere pari a 5.

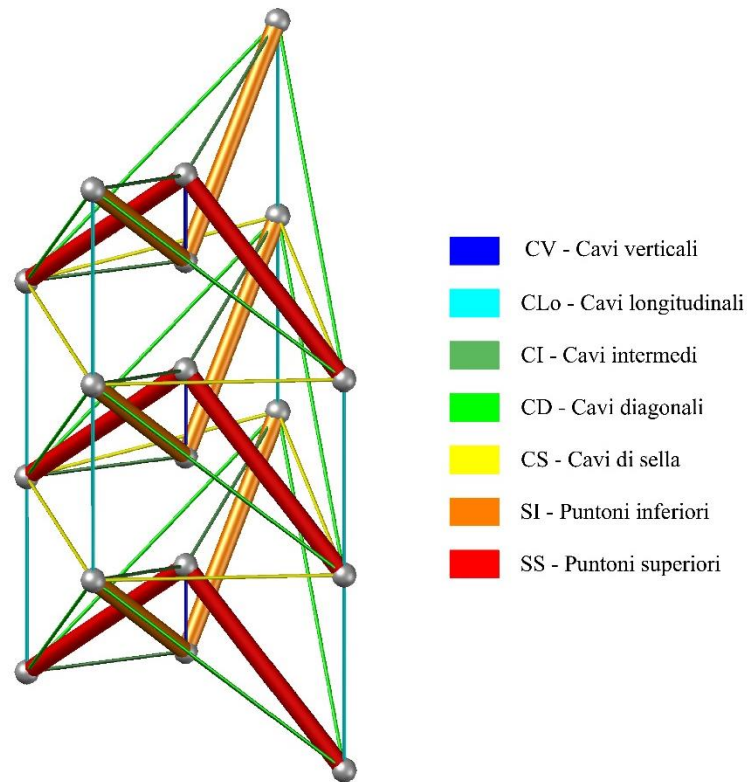


Figura 63. Modello Torre IV.

5.3 DEFINIZIONE DELLA GEOMETRIA

Riprendendo la descrizione parametrica della geometria delle celle tensegrity innovative V-Expander proposte, introdotta in §4.3, è possibile definire la configurazione geometrica delle torri utilizzando i seguenti parametri geometrici (Figura 64):

- r , il raggio della circonferenza che circoscrive, nel piano xy , le proiezioni dei nodi esterni dei puntoni,
- h , l'altezza di ciascun triangolo (V-Expander) formato da ciascuna coppia di puntoni e misurata lungo il cavo verticale,
- d , la misura della sovrapposizione dei due triangoli, mutuamente ortogonali nello spazio euclideo tridimensionale, formati da ciascuna coppia di puntoni (tale parametro risulta essere quindi la lunghezza dell'asse expander di ogni cella) ($0 < d < h$),
- b , la misura, riferita all'asse z , della sovrapposizione fra due celle adiacenti (negli studi si porrà $b = d$).

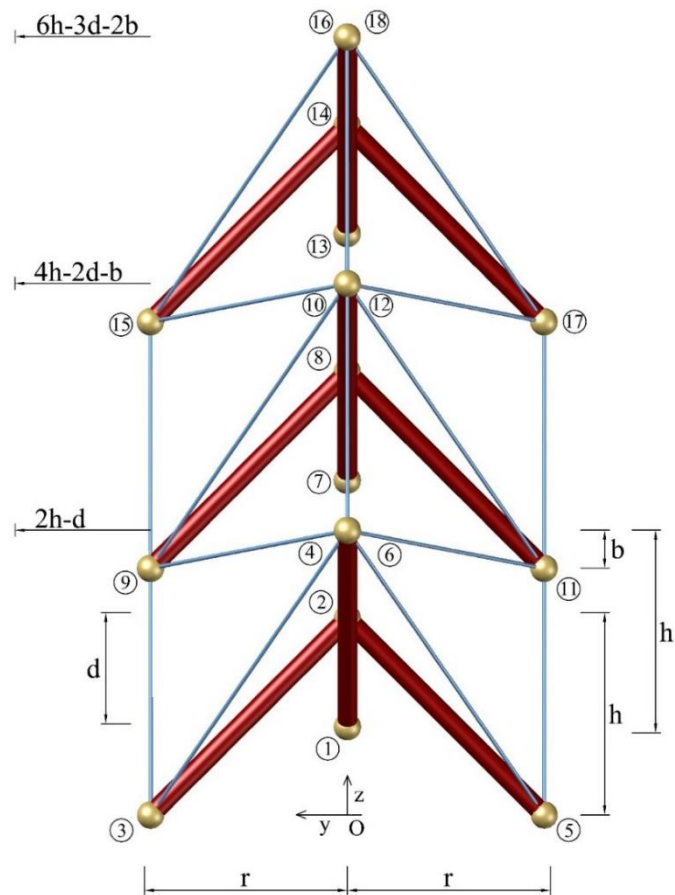


Figura 64. Parametri per la definizione della geometria (vista laterale Torre I).

Anche per le torri è possibile definire una descrizione parametrica alternativa della geometria considerando, in sostituzione del raggio r , l'angolo α (misurato nel piano che contiene il triangolo V-Expander) che ciascun puntone forma con il cavo verticale.

Nel sistema di riferimento $Oxyz$, considerando i parametri geometrici r , h , d e b , è possibile esprimere i vettori delle coordinate nodali \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} , delle torri free-standing e determinare quindi la matrice $\mathbf{N}^T \in \mathbb{R}^{18 \times 3}$, che risulta essere la vettorializzazione di tali vettori:

$$\mathbf{N}_{(18 \times 3)}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & h-d \\ 0 & 0 & h \\ r & 0 & 0 \\ 0 & r & 2h-d \\ -r & 0 & 0 \\ 0 & -r & 2h-d \\ 0 & 0 & -b-2d+3h \\ 0 & 0 & -b-d+3h \\ r & 0 & -b-d+2h \\ 0 & r & -b-2d+4h \\ -r & 0 & -b-d+2h \\ 0 & -r & -b-2d+4h \\ 0 & 0 & -2b-3d+5h \\ 0 & 0 & -2b-2d+5h \\ r & 0 & -2b-2d+4h \\ 0 & r & -2b-3d+6h \\ -r & 0 & -2b-2d+4h \\ 0 & -r & -2b-3d+6h \end{bmatrix}, \quad (219)$$

Ricordando la (155) e la (219), nella Tabella 20 si riportano le lunghezze degli elementi delle torri analizzate.

Elemento	Nodi	l_k	
Elementi Torre I	1	1 - 2	d
	2	3 - 4	$\sqrt{(d-2h)^2 + 2r^2}$
	3	4 - 5	$\sqrt{(d-2h)^2 + 2r^2}$
	4	5 - 6	$\sqrt{(d-2h)^2 + 2r^2}$
	5	3 - 6	$\sqrt{(d-2h)^2 + 2r^2}$
	6	4 - 9	$\sqrt{b^2 + 2r^2}$
	7	4 - 11	$\sqrt{b^2 + 2r^2}$
	8	6 - 11	$\sqrt{b^2 + 2r^2}$
	9	6 - 9	$\sqrt{b^2 + 2r^2}$
	10	3 - 9	(2h-d-b)

11	4 – 10	$(2h-d-b)$
12	5 – 11	$(2h-d-b)$
13	6 – 12	$(2h-d-b)$
14	7 – 8	d
15	9 – 10	$\sqrt{(d-2h)^2 + 2r^2}$
16	10 – 11	$\sqrt{(d-2h)^2 + 2r^2}$
17	11 – 12	$\sqrt{(d-2h)^2 + 2r^2}$
18	9 – 12	$\sqrt{(d-2h)^2 + 2r^2}$
19	10 – 15	$\sqrt{b^2 + 2r^2}$
20	10 – 17	$\sqrt{b^2 + 2r^2}$
21	12 – 17	$\sqrt{b^2 + 2r^2}$
22	12 – 15	$\sqrt{b^2 + 2r^2}$
23	9 – 15	$(2h-d-b)$
24	10 – 16	$(2h-d-b)$
25	11 – 17	$(2h-d-b)$
26	12 – 18	$(2h-d-b)$
27	13 – 14	d
28	15 – 16	$\sqrt{(d-2h)^2 + 2r^2}$
29	16 – 17	$\sqrt{(d-2h)^2 + 2r^2}$
30	17 – 18	$\sqrt{(d-2h)^2 + 2r^2}$
31	15 – 18	$\sqrt{(d-2h)^2 + 2r^2}$
32	2 – 3	$\sqrt{h^2 + r^2}$
33	2 – 5	$\sqrt{h^2 + r^2}$

	34	1 - 4	$\sqrt{h^2 + r^2}$
	35	1 - 6	$\sqrt{h^2 + r^2}$
	36	8 - 9	$\sqrt{h^2 + r^2}$
	37	8 - 11	$\sqrt{h^2 + r^2}$
	38	7 - 10	$\sqrt{h^2 + r^2}$
	39	7 - 12	$\sqrt{h^2 + r^2}$
	40	14 - 15	$\sqrt{h^2 + r^2}$
	41	14 - 17	$\sqrt{h^2 + r^2}$
	42	13 - 16	$\sqrt{h^2 + r^2}$
	43	13 - 18	$\sqrt{h^2 + r^2}$
Cavi aggiuntivi Torre II (da Torre I)	44	3 - 5	2r
	45	16 - 18	2r
Cavi aggiuntivi Torre III (da Torre II)	50	4 - 6	2r
	51	9 - 11	2r
	56	10 - 12	2r
	57	15 - 17	2r
Cavi aggiuntivi Torre IV (da Torre I)	46	1 - 3	$\sqrt{(d-h)^2 + r^2}$
	47	1 - 5	$\sqrt{(d-h)^2 + r^2}$
	48	2 - 4	$\sqrt{(d-h)^2 + r^2}$
	49	2 - 6	$\sqrt{(d-h)^2 + r^2}$
	52	7 - 9	$\sqrt{(d-h)^2 + r^2}$
	53	7 - 11	$\sqrt{(d-h)^2 + r^2}$
	54	8 - 10	$\sqrt{(d-h)^2 + r^2}$

55	8 - 12	$\sqrt{(d-h)^2 + r^2}$
58	13 - 15	$\sqrt{(d-h)^2 + r^2}$
59	13 - 17	$\sqrt{(d-h)^2 + r^2}$
60	14 - 16	$\sqrt{(d-h)^2 + r^2}$
61	14 - 18	$\sqrt{(d-h)^2 + r^2}$

Tabella 20. Lunghezze degli elementi delle torri.

5.3.1 Torre I

In Figura 65 si riporta la geometria della Torre I che rappresenta la generalizzazione della seconda soluzione del Tensegrity mast presentata da Buckminster Fuller nel 1959.

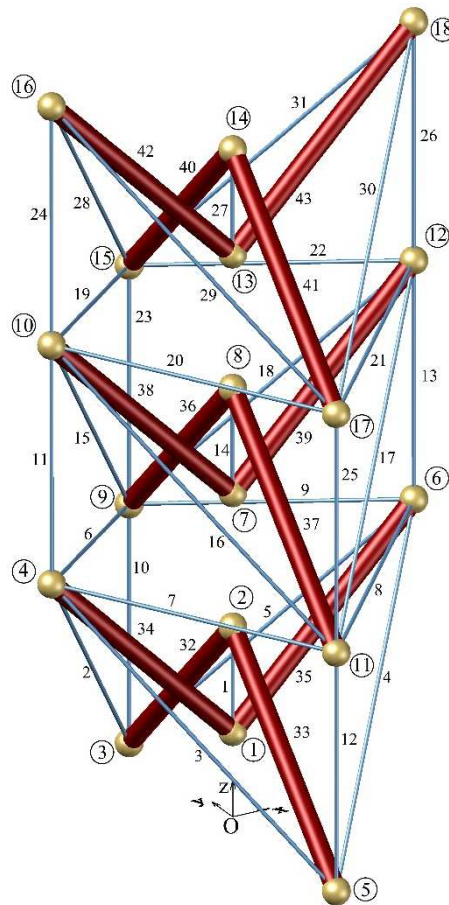


Figura 65. Torre I (vista assometrica).

Affinché la struttura non presenti contatti tra gli elementi in punti diversi dalle estremità degli stessi è necessario porre dei limiti ai parametri geometrici. In particolare, va posto $b < (2h - 2d)$ per evitare che il nodo di estremità inferiore del cavo verticale della cella $(k+1)$ -esima si sovrapponga all'estremità superiore

dell'analogo cavo della cella k -esima ($k=1,2,\dots,N_i$). Con tale limitazione, ponendo inoltre $b = d$, si ha che il parametro geometrico $a = d/h$ deve risultare sempre minore di $2/3$, e comunque sempre strettamente maggiore di 0 per definizione.

Ricordando la (9) è possibile determinare la matrice di connessione $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{43 \times 18}$ della Torre I:

$$\mathbf{C}_{(43 \times 18)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (220)$$

I vettori delle differenze delle coordinate nodali \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} , si determinano a partire dalle coordinate nodali definite nella (219), mediante le (13):

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0, r, r, -r, r, -r, r, r, -r, 0, 0, 0, 0, 0, r, r, -r, r, -r, r, r, \\ -r, 0, 0, 0, 0, 0, r, r, -r, r, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0 \end{pmatrix}, \quad (221)$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0, -r, r, r, r, r, r, r, -r, -r, 0, 0, 0, 0, 0, -r, r, r, r, r, r, -r, -r, \\ 0, 0, 0, 0, 0, -r, r, r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r \end{pmatrix}, \quad (222)$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -d, d-2h, -d+2h, d-2h, d-2h, b, b, b, b, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, \\ -d, d-2h, -d+2h, d-2h, d-2h, b, b, b, b, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, \\ -d, d-2h, -d+2h, d-2h, d-2h, h, h, -h, -h, h, h, -h, -h, h, h, -h, -h \end{pmatrix}. \quad (223)$$

Ricordando inoltre la (24) è possibile definire la matrice geometrica $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{43 \times 6}$:

$$\mathbf{G}_{(43 \times 6)} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (-d+2h)^2 & r^2 & (-d+2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (-d+2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & -br & br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & br & br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & br & -br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & -br & -br \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (-d+2h)^2 & r^2 & (-d+2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (-d+2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & -br & br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & br & br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & br & -br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & -br & -br \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (-d+2h)^2 & r^2 & (-d+2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (-d+2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr
 \end{bmatrix}, \quad (224)$$

il cui rango r_G risulta essere pari a 6, il che assicura che la Torre I non è degenera nello spazio euclideo tridimensionale.

5.3.2 Torre II

La Figura 66 mostra la configurazione geometrica della Torre II; si fa notare l'inserimento dei due cavi orizzontali di estremità (COi e COs).

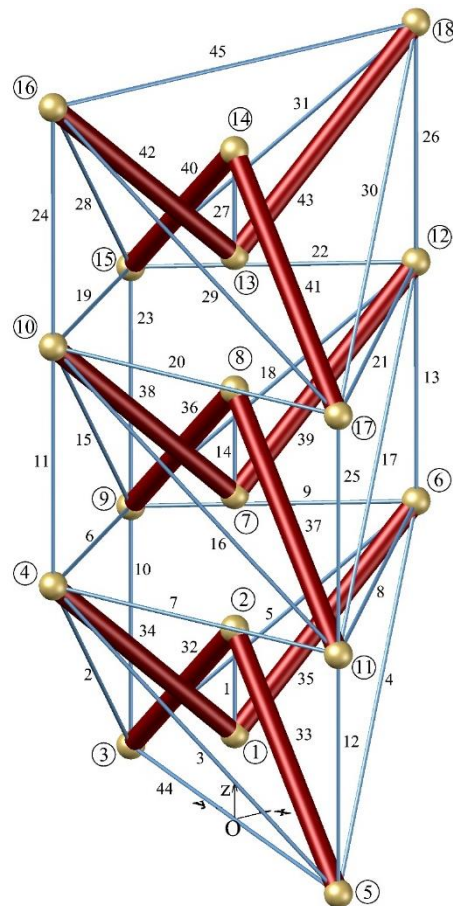


Figura 66. Torre II (vista assonometrica).

Anche per la Torre II è valida la stessa limitazione sul valore del parametro geometrico a posta per la Variante I, ossia deve risultare $0 < a < 2/3$.

La matrice di connessione $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{45 \times 18}$ si ottiene aggiungendo le due righe, relative ai cavi 44 e 45, alla matrice di connessione $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{43 \times 18}$ della Torre I. In definitiva la matrice di connessione per la Torre II è pari a:

$$\mathbf{C}_{(45 \times 18)} = \begin{bmatrix}
 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\
 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1
 \end{bmatrix}. \tag{225}$$

I vettori delle differenze delle coordinate nodali \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} , sono pari a:

$$\mathbf{u} = \left\{ 0, r, r, -r, r, -r, r, r, -r, 0, 0, 0, 0, r, r, -r, r, -r, r, r, -r, \right. \\
 \left. 0, 0, 0, 0, 0, r, r, -r, r, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, 2r, 0 \right\}, \tag{226}$$

$$\mathbf{v} = \left\{ 0, -r, r, r, r, r, r, -r, -r, 0, 0, 0, 0, -r, r, r, r, r, r, -r, -r, \right. \\
 \left. 0, 0, 0, 0, 0, -r, r, r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 2r \right\}, \tag{227}$$

$$\mathbf{w} = \left\{ -d, d-2h, 2h-d, d-2h, d-2h, b, b, b, b, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, \right. \\
 \left. -d, d-2h, 2h-d, d-2h, d-2h, b, b, b, b, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, \right. \\
 \left. -d, d-2h, 2h-d, d-2h, d-2h, h, h, -h, -h, h, h, -h, -h, h, h, -h, -h, 0, 0 \right\}. \tag{228}$$

Dalla (24) è possibile determinare la matrice geometrica $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{45 \times 6}$:

$$\mathbf{G}_{(45 \times 6)} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (-d+2h)^2 & r^2 & (-d+2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (-d+2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & -br & br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & br & br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & br & -br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & -br & -br \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (-d+2h)^2 & r^2 & (-d+2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (-d+2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & -br & br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & br & br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & br & -br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & -br & -br \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (-d+2h)^2 & r^2 & (-d+2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (-d+2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\
 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0
 \end{bmatrix}. \quad (229)$$

La Torre II risulta quindi non essere degenera nello spazio euclideo tridimensionale poiché la matrice geometrica \mathbf{G} ha rango massimo.

5.3.3 *Torre III*

La configurazione geometrica della Torre III è riportata in Figura 67.

La Torre III può essere considerata come assemblaggio di tre moduli, lungo la direzione dell'asse z , della Variante I della cella V-Expander proposta nel capitolo 4.

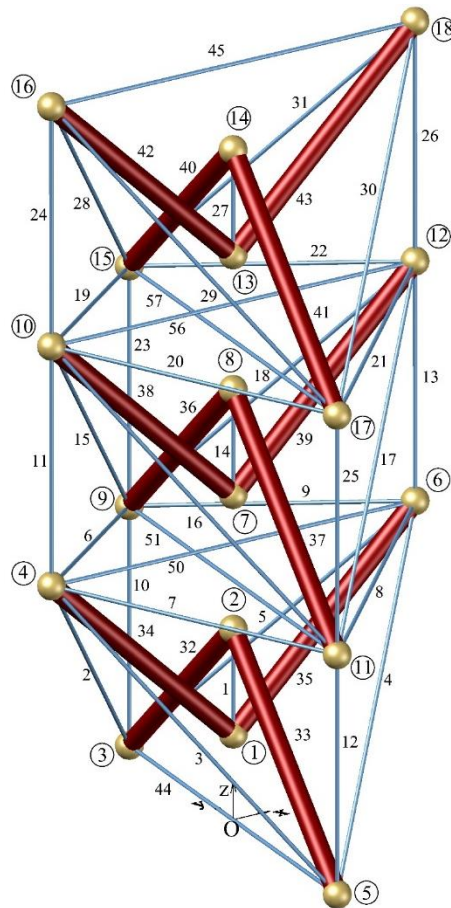


Figura 67. Torre III (vista assonometrica).

Ponendo $b = d$, si osserva che la variazione dei parametri geometrici che definiscono la configurazione geometrica è vincolata. In particolare, affinché non si verificano sovrapposizioni di nodi non compatibili con la geometria della torre, ovvero che il nodo di estremità inferiore del cavo verticale della cella $(k+1)$ -esima non si sovrapponga al cavo orizzontale superiore della cella k -esima ($k=1,2,\dots,N$), il valore del parametro geometrico $a = d/h$ deve risultare minore di $1/2$, e comunque sempre maggiore di 0.

La matrice di connessione $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{49 \times 18}$ si ottiene aggiungendo alla (225) le righe corrispondenti ai 4 cavi 50, 51, 56 e 57, ovvero:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} 50 \\ 51 \\ 56 \\ 57 \end{matrix} \quad (230)$$

I vettori delle differenze delle coordinate nodali \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} , determinati a partire dalle coordinate nodali, mediante le (13) sono:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0, r, r, -r, r, -r, r, r, -r, 0, 0, 0, 0, r, r, -r, r, -r, r, -r, 0, 0, \\ 0, 0, 0, r, r, -r, r, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, 2r, 0, 0, 2r, 0, 2r \end{pmatrix}, \quad (231)$$

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{l} 0, -r, r, r, r, r, r, r, -r, -r, 0, 0, 0, 0, 0, -r, r, r, r, r, r, -r, -r, 0, 0, \\ 0, 0, 0, -r, r, r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 2r, 2r, 0, 2r, 0 \end{array} \right\}, \quad (232)$$

$$\mathbf{w} = \left\{ \begin{array}{l} -d, d-2h, 2h-d, d-2h, d-2h, b, b, b, b, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, \\ -d, d-2h, 2h-d, d-2h, d-2h, b, b, b, b, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, \\ -d, d-2h, 2h-d, d-2h, d-2h, h, h, -h, -h, h, h, -h, -h, h, h, -h, -h, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \end{array} \right\}. \quad (233)$$

La matrice geometrica $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{49 \times 6}$ risulta essere pari a:

$$\mathbf{G}_{(49 \times 6)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (-d+2h)r \\ r^2 & r^2 & (-d+2h)^2 & r^2 & (-d+2h)r & (-d+2h)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (-d+2h)r & (d-2h)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\ r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & -br & br \\ r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & br & br \\ r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & br & -br \\ r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & -br & -br \\ 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (-d+2h)r \\ r^2 & r^2 & (-d+2h)^2 & r^2 & (-d+2h)r & (-d+2h)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (-d+2h)r & (d-2h)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\ r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & -br & br \\ r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & br & br \\ r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & br & -br \\ r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & -br & -br \\ 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (-d+2h)r \\ r^2 & r^2 & (-d+2h)^2 & r^2 & (-d+2h)r & (-d+2h)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (-d+2h)r & (d-2h)r \\ r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\ r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\ 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\ 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (234)$$

il cui rango è pari a 6. Ciò assicura che anche la Torre III non è degenera nello spazio euclideo tridimensionale.

5.3.4 *Torre IV*

La Figura 68 mostra la geometria della Torre IV.

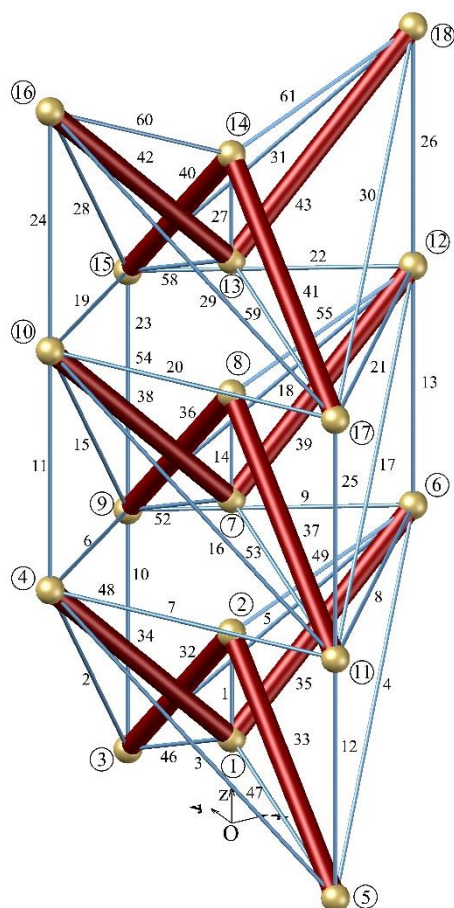


Figura 68. Torre IV (vista assonometrica).

A differenza della Torre III, per la Torre IV si riscontra evidentemente la stessa limitazione sul valore del parametro geometrico a , ovvero $0 < a < 2/3$.

La matrice di connessione $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{55 \times 18}$ si ottiene aggiungendo alla matrice di connessione $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{43 \times 18}$ della Torre I le righe corrispondenti ai 12 cavi inseriti, ovvero:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc|c}
 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 46 \\
 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 47 \\
 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 48 \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 49 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 52 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 53 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 54 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 55 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 58 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 59 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 60 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1
 \end{array} \quad (235)$$

I vettori delle differenze delle coordinate nodali, \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} , determinati a partire dalle coordinate nodali, mediante le (13), sono pari a:

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0, r, r, -r, r, -r, r, r, -r, 0, 0, 0, 0, 0, r, r, -r, r, -r, r, r, -r, 0, 0, 0, 0, 0, \\ r, r, -r, r, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0 \end{pmatrix}, \quad (236)$$

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0, -r, r, r, r, r, r, r, -r, -r, 0, 0, 0, 0, 0, -r, r, r, r, r, r, -r, -r, 0, 0, 0, 0, 0, \\ -r, r, r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r, 0, 0, -r, r \end{pmatrix}, \quad (237)$$

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} -d, d-2h, 2h-d, d-2h, d-2h, b, b, b, b, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, \\ -d, d-2h, 2h-d, d-2h, d-2h, b, b, b, b, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, b+d-2h, \\ -d, d-2h, 2h-d, d-2h, d-2h, h, h, -h, -h, h, h, -h, -h, h, h, -h, -h, h-d, h-d, d-h, \\ d-h, h-d, h-d, d-h, d-h, h-d, h-d, d-h, d-h \end{pmatrix}. \quad (238)$$

Infine, per la Torre IV la matrice geometrica $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{55 \times 6}$ risulta essere pari a:

$$\mathbf{G}_{(55 \times 6)} = \begin{bmatrix}
 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (-d+2h)^2 & r^2 & (-d+2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (-d+2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & -br & br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & br & br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & br & -br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & -br & -br \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (-d+2h)^2 & r^2 & (-d+2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (-d+2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & -br & br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & br & br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & -r^2 & br & -br \\
 r^2 & r^2 & b^2 & r^2 & -br & -br \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & (b+d-2h)^2 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & d^2 & 0 & 0 & 0 \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (d-2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (-d+2h)^2 & r^2 & (-d+2h)r & (-d+2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & -r^2 & (-d+2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & r^2 & (d-2h)^2 & r^2 & (d-2h)r & (d-2h)r \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & -hr & 0 \\
 r^2 & 0 & h^2 & 0 & hr & 0 \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & hr \\
 0 & r^2 & h^2 & 0 & 0 & -hr \\
 r^2 & 0 & (-d+h)^2 & 0 & (d-h)r & 0 \\
 r^2 & 0 & (-d+h)^2 & 0 & (-d+h)r & 0 \\
 0 & r^2 & (d-h)^2 & 0 & 0 & (-d+h)r \\
 0 & r^2 & (d-h)^2 & 0 & 0 & (d-h)r \\
 r^2 & 0 & (-d+h)^2 & 0 & (d-h)r & 0 \\
 r^2 & 0 & (-d+h)^2 & 0 & (-d+h)r & 0 \\
 0 & r^2 & (d-h)^2 & 0 & 0 & (-d+h)r \\
 0 & r^2 & (d-h)^2 & 0 & 0 & (d-h)r \\
 r^2 & 0 & (-d+h)^2 & 0 & (d-h)r & 0 \\
 r^2 & 0 & (-d+h)^2 & 0 & (-d+h)r & 0 \\
 0 & r^2 & (d-h)^2 & 0 & 0 & (-d+h)r \\
 0 & r^2 & (d-h)^2 & 0 & 0 & (d-h)r
 \end{bmatrix}. \tag{239}$$

che risulta avere rango massimo ($r_G = 6$). Ciò implica che anche la Torre IV non è degenera nello spazio euclideo tridimensionale.

5.4 ANALISI DELLO STATO DI PRE-SOLLECITAZIONE

Dopo aver definito il modello e aver descritto parametricamente la configurazione geometrica delle torri è possibile determinare gli stati di pre-sollecitazione ammissibili negli elementi che le compongono, facendo riferimento al punto 3 del diagramma di flusso presentato in §2.2.4.

Nello specifico, si riportano nei seguenti paragrafi: lo stato di auto-sollecitazione ammissibile $\bar{\mathbf{q}}_a$ e i meccanismi infinitesimi \mathbf{d}_m determinati per ciascuna delle 4 torri tensegrity V-Expander.

5.4.1 Torre I

Dalle (37) è possibile determinare la matrice di equilibrio $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{54 \times 43}$ della Torre I, il cui rango r_A è pari a 41. Ciò consente di determinare la molteplicità s_A degli stati di auto-sollecitazione equilibrati che generano lo spazio nullo della matrice di equilibrio e il numero m_i dei meccanismi indipendenti che giacciono nel nucleo della sua trasposta:

$$s_A = m - r_A = 43 - 41 = 2, \quad (240)$$

$$m_i = 3n - n^{rb} - r_B = 54 - 6 - 41 = 7. \quad (241)$$

Si evince pertanto che esistono 2 stati di auto-sollecitazione equilibrati \mathbf{q}_0 e 7 meccanismi infinitesimi (ad esclusione dei 6 moti rigidi). In Tabella 21 si riportano gli stati di auto-sollecitazione equilibrati che generano lo spazio nullo della matrice di equilibrio \mathbf{A} .

Stato di auto-sollecitazione equilibrato	
\mathbf{q}_{01}	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2h}{d}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \\ -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, \frac{2h}{d}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1 \end{array} \right\}$
\mathbf{q}_{02}	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2h}{d}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{2h}{d}, \\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0 \end{array} \right\}$

Tabella 21. Stato di auto-sollecitazione equilibrato Torre I.

Nessuno dei due stati di auto-sollecitazione equilibrati, \mathbf{q}_{01} e \mathbf{q}_{02} , risulta essere compatibile con le proprietà di simmetria della Torre I e con il comportamento unilatero degli elementi.

È tuttavia possibile costruire una combinazione lineare di tali stati di auto-sollecitazione equilibrati per determinare lo stato di auto-sollecitazione simmetrico, ossia quello stato di auto-sollecitazione che tiene in conto le proprietà di simmetria della struttura.

Come si vedrà nei paragrafi successivi, tutte le torri analizzate sono staticamente indeterminate con $s_A > 1$, pertanto per ciascuna di queste strutture tensegrity si determinerà lo stato di auto-sollecitazione simmetrico

seguendo l'algorithmo riportato in §2.2.4. In tal caso costruire la matrice $\bar{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{43 \times 12}$, definita nella (55), risulta pari a:

$$\bar{\mathbf{G}}_{(43 \times 12)} = \begin{bmatrix} \frac{2h}{d} & \frac{2h}{d} & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d-h}{b+d-2h} & \frac{d-h}{b+d-2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b+d-2h}{-d+h} & -\frac{b+d-2h}{-d+h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b+d-2h}{d-h} & -\frac{b+d-2h}{d-h} & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b+d-2h}{-d+h} & -\frac{b+d-2h}{-d+h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b+d-2h}{b+d-2h} & -\frac{b+d-2h}{b+d-2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2h}{d} & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{d-h}{b+d-2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b+d-2h}{-d+h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b+d-2h}{d-h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{b+d-2h}{b+d-2h} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b-d+2h & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2h}{d} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (242)$$

Risolvendo la (54) si determina il vettore $\bar{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{10}$ che risulta essere pari a:

$$\bar{\mathbf{a}} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{2}, 1, \\ \frac{h}{d}, -\frac{2h}{d}, \frac{1}{4}, 0, -\frac{d-h}{2(b+d-2h)}, -\frac{-d+h}{2(b+d-2h)}, -\frac{1}{2}, 1 \end{array} \right\}. \quad (243)$$

Si ricorda inoltre che gli ultimi h ($h = 8$) elementi del vettore $\bar{\mathbf{a}}$ rappresentano i coefficienti di densità di forza degli elementi appartenenti a ciascun gruppo di simmetria in cui possono essere classificati gli elementi della Torre I, mentre i primi 2 elementi rappresentano i coefficienti della combinazione lineare che consente di determinare lo stato di auto-sollecitazione simmetrico a partire dagli stati di auto-sollecitazione equilibrati. Si osserva che lo stato di auto-sollecitazione simmetrico determinato per la Torre è in accordo con la condizione di comportamento unilatero degli elementi, cavi tesi e puntoni compressi, pertanto tale vettore rappresenta lo stato di auto-sollecitazione ammissibile $\bar{\mathbf{q}}_a \in \mathbb{R}^{43}$ per tale struttura tensegrity. In Tabella 22 si riporta la sintesi di quanto ottenuto.

Stato di auto-sollecitazione ammissibile		
Gruppo	Densità di forza	Elementi del gruppo
1	$q_1 = \frac{h}{d}$	1, 27
2	$q_2 = -\frac{2h}{d}$	14
3	$q_3 = \frac{1}{4}$	2, 3, 4, 5, 28, 29, 30, 31
4	$q_4 = 0$	6, 7, 8, 9, 19, 20, 21, 22
5	$q_5 = -\frac{d-h}{2(b+d-2h)}$	10, 12, 24, 26
6	$q_6 = -\frac{-d+h}{2(b+d-2h)}$	11, 13, 23, 25
7	$q_7 = -\frac{1}{2}$	15, 16, 17, 18, 32, 33, 34, 35, 40, 41, 42, 43
8	$q_8 = 1$	36, 3, 38, 39

Tabella 22. Stato di auto-sollecitazione ammissibile per la Torre I.

Dalla Tab. 22 si evince che nello stato di auto-equilibrio ammissibile per la Torre I alcuni elementi originariamente definiti puntoni risultano essere tesi e, viceversa, alcuni elementi originariamente definiti cavi risultano essere compressi. Seguendo la rappresentazione grafica utilizzata in questo lavoro (cavi in ciano e puntoni in rosso, con diametro maggiore rispetto ai cavi), a titolo esplicativo si riporta in Figura 69 la configurazione geometrica della Torre I nello stato di auto-sollecitazione ammissibile.

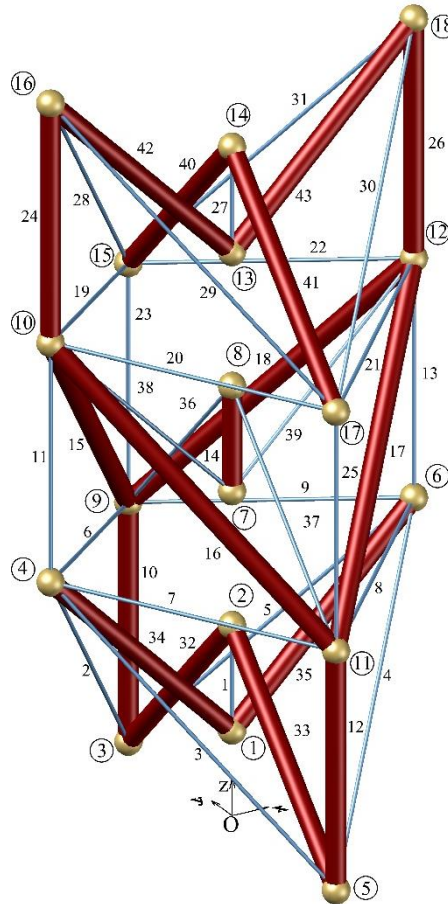


Figura 69. Torre I nello stato di auto-sollecitazione ammissibile (vista assometrica).

In tale stato di auto-sollecitazione decade la definizione di struttura tensegrity per la Torre I poiché non si realizza la maglia tesa continua al cui interno si inserisce l'insieme discontinuo degli elementi compressi. Ad ogni modo, al fine di valutare il comportamento meccanico di tale torre si riportano di seguito le curve che rappresentano le leggi di variazione dei coefficienti di densità di forza degli elementi che la compongono (Figg. 70-73).

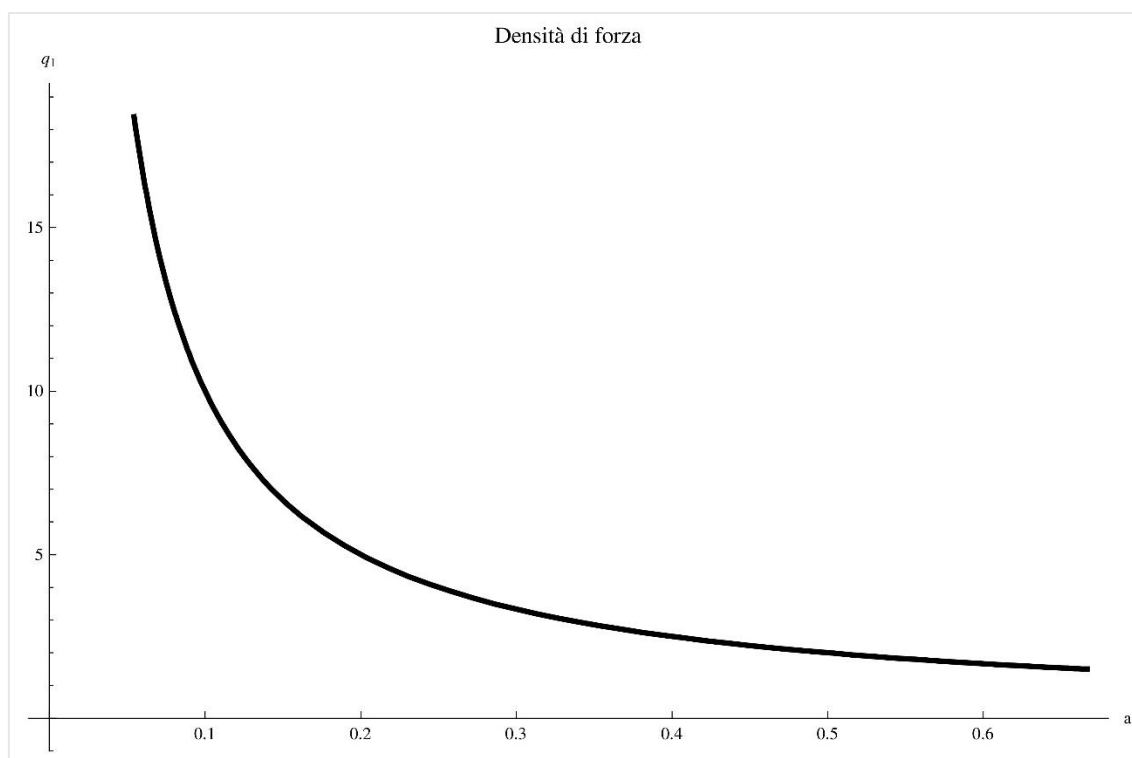


Figura 70. Densità di forza del gruppo 1 della Torre I.

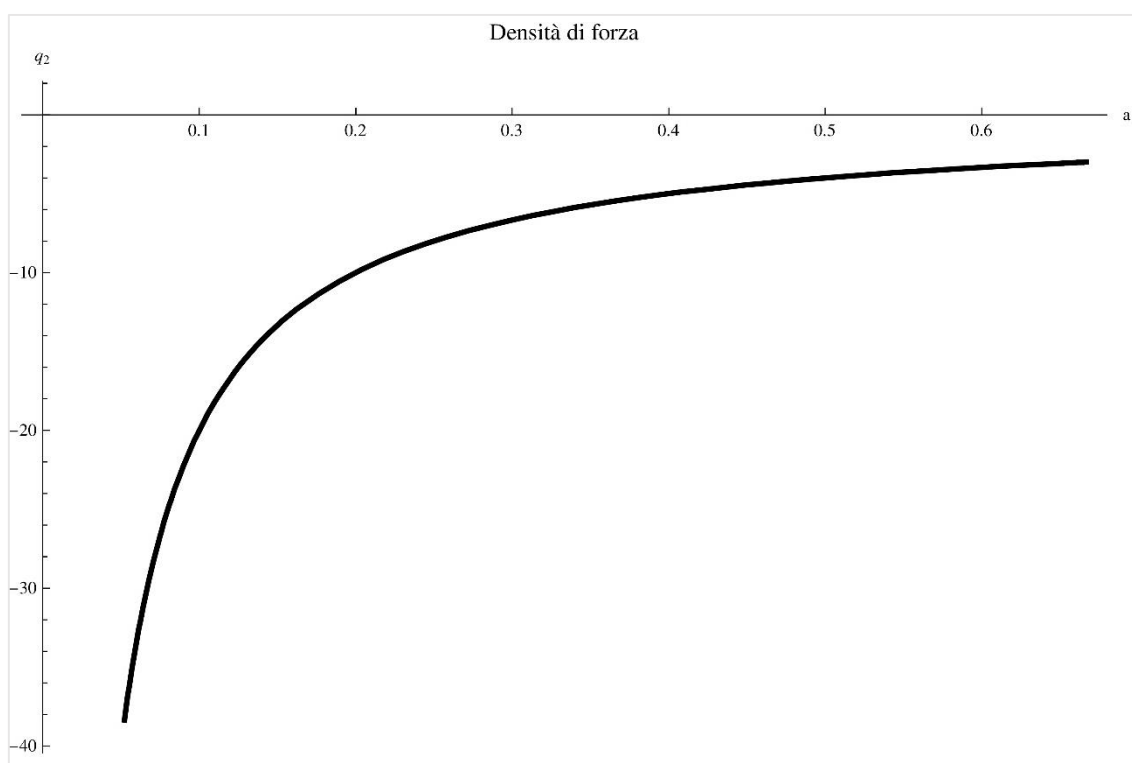


Figura 71. Densità di forza del gruppo 2 della Torre I.

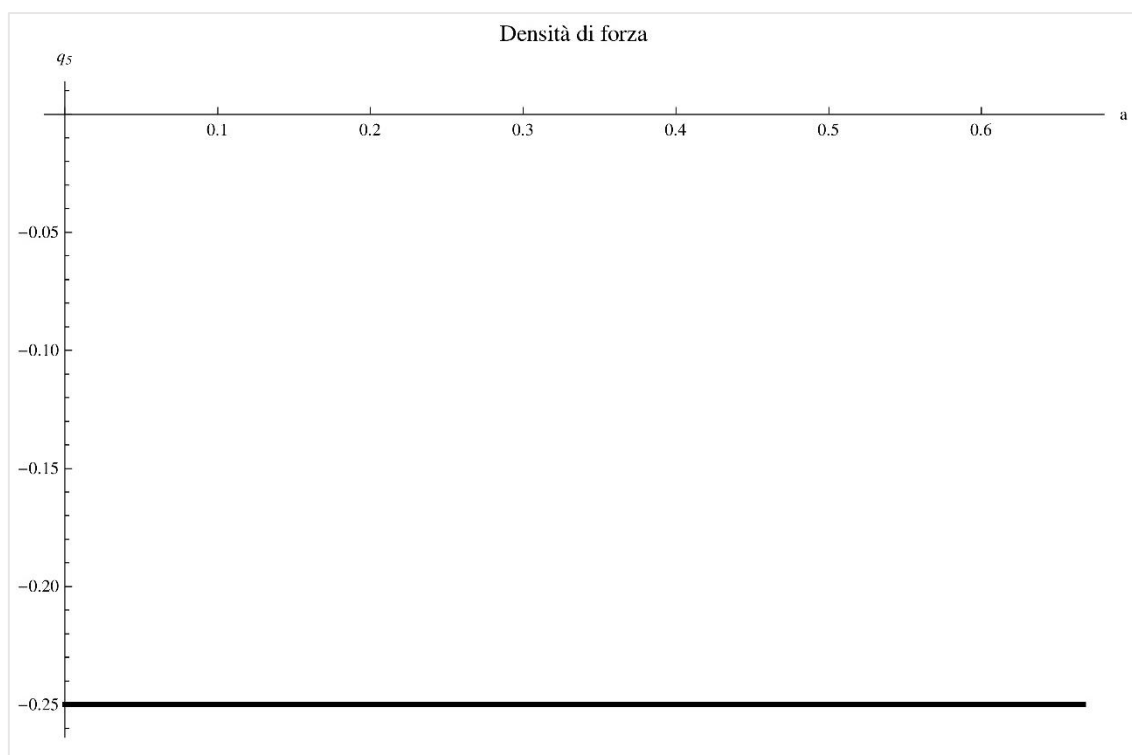


Figura 72. Densità di forza del gruppo 5 della Torre I.

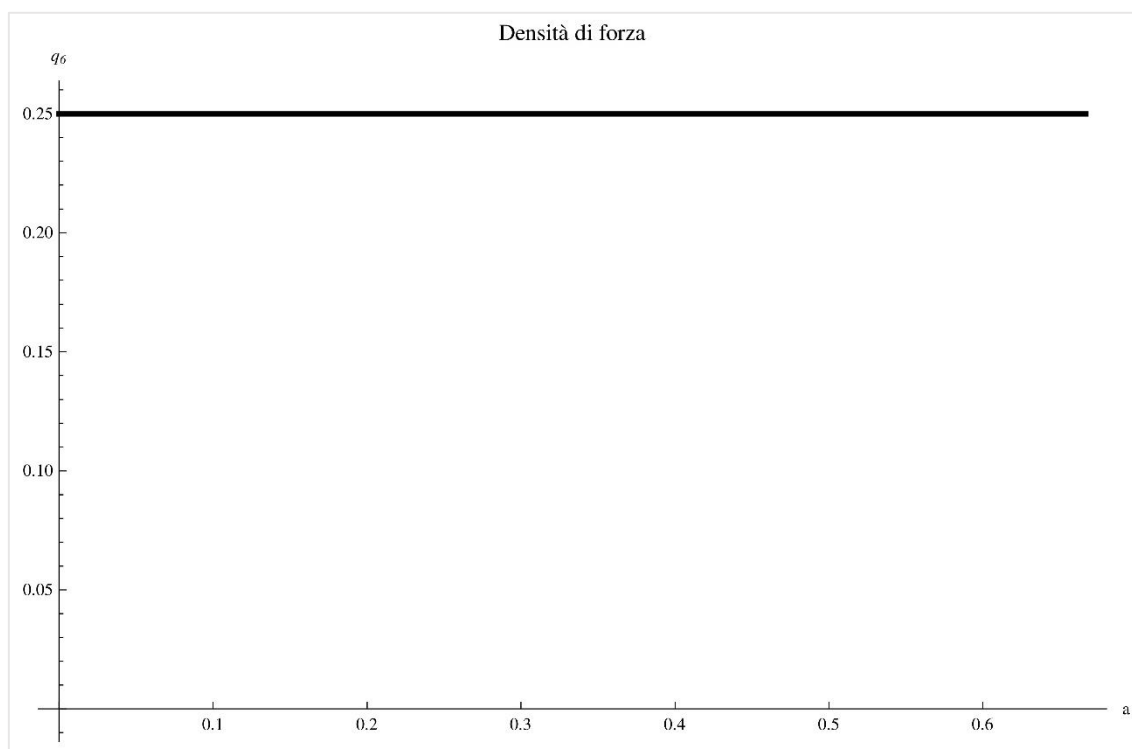


Figura 73. Densità di forza del gruppo 6 della Torre I.

Analizzando i grafici riportati nelle Figg. 70 - 73 e quanto riportato in Tab. 22 è possibile fare le seguenti considerazioni:

- La densità di forza degli elementi del gruppo 1 decresce non linearmente all'aumentare del parametro a ,
- La densità di forza nell'elemento 14, unico elemento del gruppo 2, risulta essere negativa per qualsiasi valore del parametro a ,
- La densità di forza degli elementi del gruppo 4 è nulla,
- Gli elementi del gruppo 5 presentano una densità di forza costante pari a -0.25 per qualsiasi valore del parametro a ,
- La densità di forza degli elementi del gruppo 6 risulta essere costante e pari a 0.25 per ogni valore del parametro a compreso nel suo insieme di definizione,
- Gli elementi del gruppo 7 hanno una densità di forza negativa e pari a $-1/2$.

5.4.2 Torre II

Dalla scrittura della (37) è possibile ricavare la matrice di equilibrio $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{54 \times 45}$ della Torre II, di cui non se ne riporta la scrittura completa per ragioni di spazio.

Dall'analisi si ricava che il rango r_A di \mathbf{A} è pari a 42, pertanto dalla (39) e dalla (20) si ricavano rispettivamente la nullità s_A della matrice di equilibrio e il numero m_i dei meccanismi infinitesimi:

$$s_A = m - r_A = 45 - 42 = 3, \quad (244)$$

$$m_i = 3n - n^{fb} - r_B = 54 - 6 - 42 = 6. \quad (245)$$

Si evince pertanto che esistono 3 stati di auto-sollecitazione equilibrati \mathbf{q}_0 e 6 meccanismi infinitesimi (ad esclusione dei 6 moti rigidi).

In Tabella 23 si riportano gli stati di auto-sollecitazione equilibrati che generano lo spazio nullo della matrice di equilibrio \mathbf{A} .

Stato di auto-sollecitazione equilibrato	
\mathbf{q}_0 1	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4(2bh+3dh-6h^2)}{d(d-h)}, -\frac{-2b-2d+5h}{d-h}, -\frac{-2b-2d+5h}{d-h}, -\frac{-2b-2d+5h}{d-h}, -\frac{-2b-2d+5h}{d-h}, 1, 1, 1, 1, -4, \\ \frac{2(b+2d-4h)}{b+d-2h}, -4, \frac{2(b+2d-4h)}{b+d-2h}, 0, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -2, \frac{2(d-2h)}{b+d-2h}, -2, \frac{2(d-2h)}{b+d-2h}, 0, -1, -1, -1, -1, \\ -\frac{2(2b+3d-6h)}{d-h}, -\frac{2(2b+3d-6h)}{d-h}, -\frac{2(2b+3d-6h)}{d-h}, -\frac{2(2b+3d-6h)}{d-h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1 \end{array} \right\}$
\mathbf{q}_0 2	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2h}{d}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \\ -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{-b-d+2h}, -\frac{2h}{d}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0 \end{array} \right\}$
\mathbf{q}_0 3	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2h}{d}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{2h}{d}, \\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \end{array} \right\}$

Tabella 23. Stato di auto-sollecitazione equilibrato della Torre II.

Nessuno dei tre stati di auto-sollecitazione equilibrati, \mathbf{q}_{01} , \mathbf{q}_{02} e \mathbf{q}_{03} , risulta essere compatibile con le proprietà di simmetria della Torre II e con il comportamento unilatero degli elementi.

È necessario in tal caso costruire la matrice $\bar{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{45 \times 12}$ definita nella (55), per costruire una combinazione lineare dei tre stati di auto-sollecitazione equilibrati che restituisca lo stato di auto-sollecitazione simmetrico:

$$\bar{\alpha} = \left\{ 1, -\frac{b+2d-4h}{d-h}, -\frac{2(b+d-2h)}{d-h}, \frac{2(bh+2dh-4h^2)}{d(d-h)}, \frac{4(b+d-2h)h}{d(d-h)}, -\frac{-b+2h}{2(d-h)}, 1, -\frac{b}{b+d-2h}, -\frac{-b+h}{d-h}, -\frac{b+2d-4h}{d-h}, -\frac{2(b+d-2h)}{d-h}, 1 \right\}. \quad (247)$$

Si ricorda inoltre che gli ultimi h ($h = 9$) elementi del vettore $\bar{\alpha}$ rappresentano i coefficienti di densità di forza degli elementi appartenenti a ciascun gruppo di simmetria della Torre II. Si osserva che lo stato di auto-sollecitazione simmetrico determinato per la Torre II è in accordo con la condizione di comportamento unilatero degli elementi, cavi tesi e puntoni compressi, pertanto tale vettore rappresenta lo stato di auto-sollecitazione ammissibile $\bar{q}_a \in \mathbb{R}^{45}$ per tale struttura tensegrity. In Tabella 23 si riporta la sintesi di quanto suddetto.

Stato di auto-sollecitazione ammissibile		
Gruppo	Densità di forza	Elementi del gruppo
1	$q_1 = \frac{2(bh+2dh-4h^2)}{d(d-h)}$	1, 27
2	$q_2 = \frac{4(b+d-2h)h}{d(d-h)}$	14
3	$q_3 = -\frac{-b+2h}{2(d-h)}$	2, 3, 4, 5, 28, 29, 30, 31
4	$q_4 = 1$	6, 7, 8, 9, 19, 20, 21, 22
5	$q_5 = -\frac{b}{b+d-2h}$	10, 11, 12, 13, 23, 24, 25, 26
6	$q_6 = -\frac{-b+h}{d-h}$	15, 16, 17, 18
7	$q_7 = -\frac{b+2d-4h}{d-h}$	32, 33, 34, 35, 40, 41, 42, 43
8	$q_8 = -\frac{2(b+d-2h)}{d-h}$	36, 37, 38, 39
9	$q_9 = 1$	44, 45

Tabella 23. Stato di auto-sollecitazione ammissibile per la Torre.

Si fa notare inoltre che la Torre II nello stato di auto-sollecitazione simmetrico rispetta la definizione di struttura Tensegrity data nel capitolo 1.

Da quanto risulta in Tab. 23 è evidente che i coefficienti di densità di forza degli elementi dei gruppi della Torre dipendono da tre parametri geometrici: h , d e b . Tali espressioni sono pertanto funzioni di tre variabili, e per poterle rappresentare, è conveniente porre una relazione fra alcune di queste; ad esempio si può porre $b = d$, senza in tal modo violare la limitazione fissata sul valore di b ($b < (2h - 2d)$) stabilita in §5.2.

Per tale condizione geometrica il parametro d non può variare liberamente ma deve risultare comunque minore di $\frac{2}{3}h$, affinché l'assemblaggio delle celle non presenti sovrapposizione dei nodi.

Di seguito si riportano le leggi di variazione dei coefficienti di densità di forza per ciascun gruppo di simmetria individuato (Figg. 74 - 80) in funzione del parametro geometrico $a=d/h$.

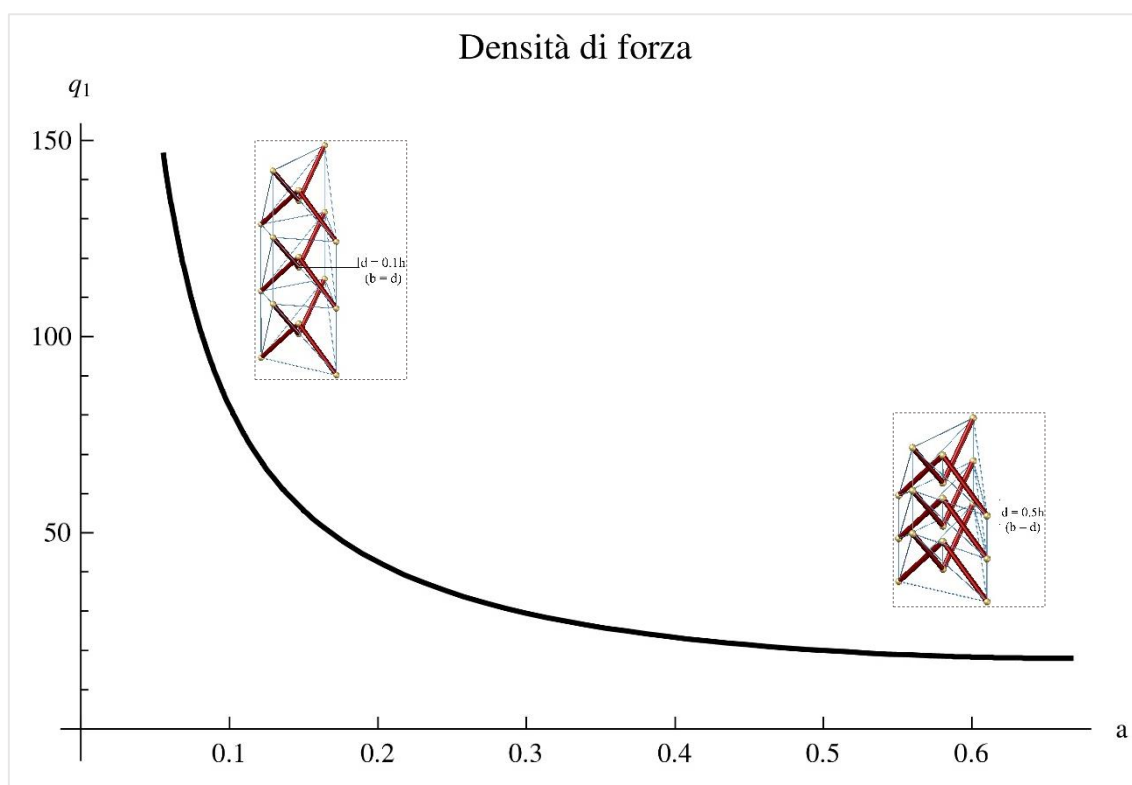


Figura 74. Densità di forza del gruppo 1 della Torre II.

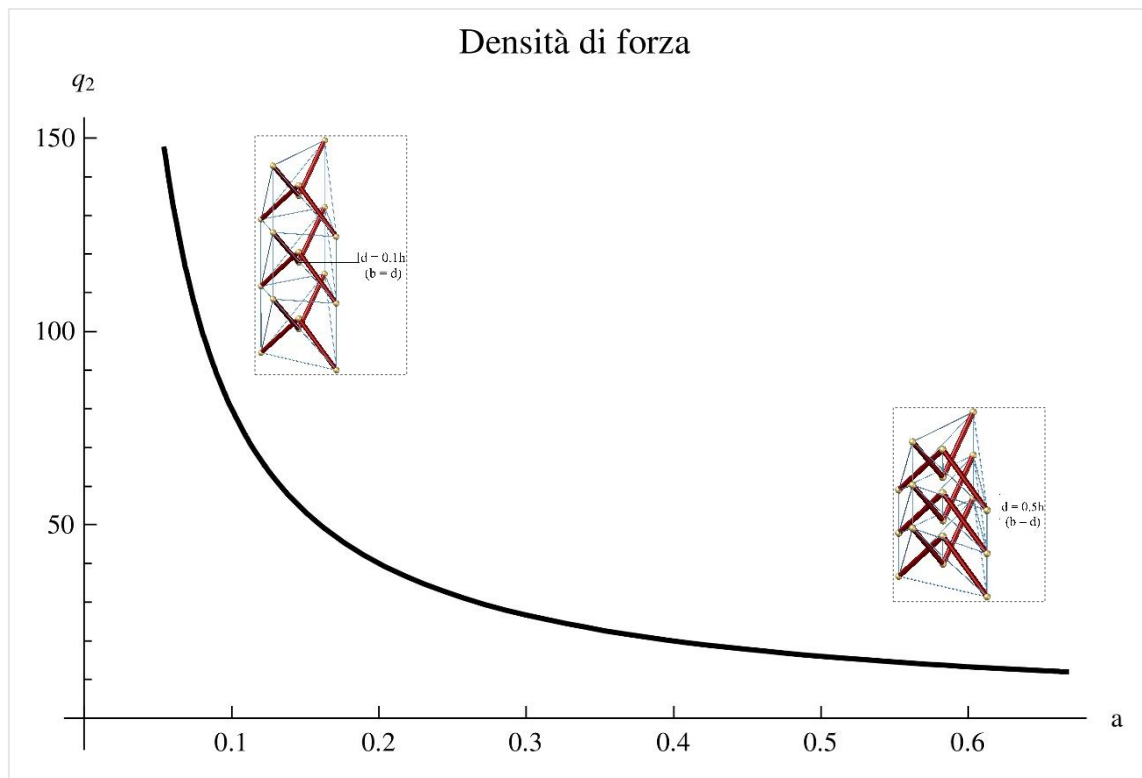


Figura 75. Densità di forza del gruppo 2 della Torre II.

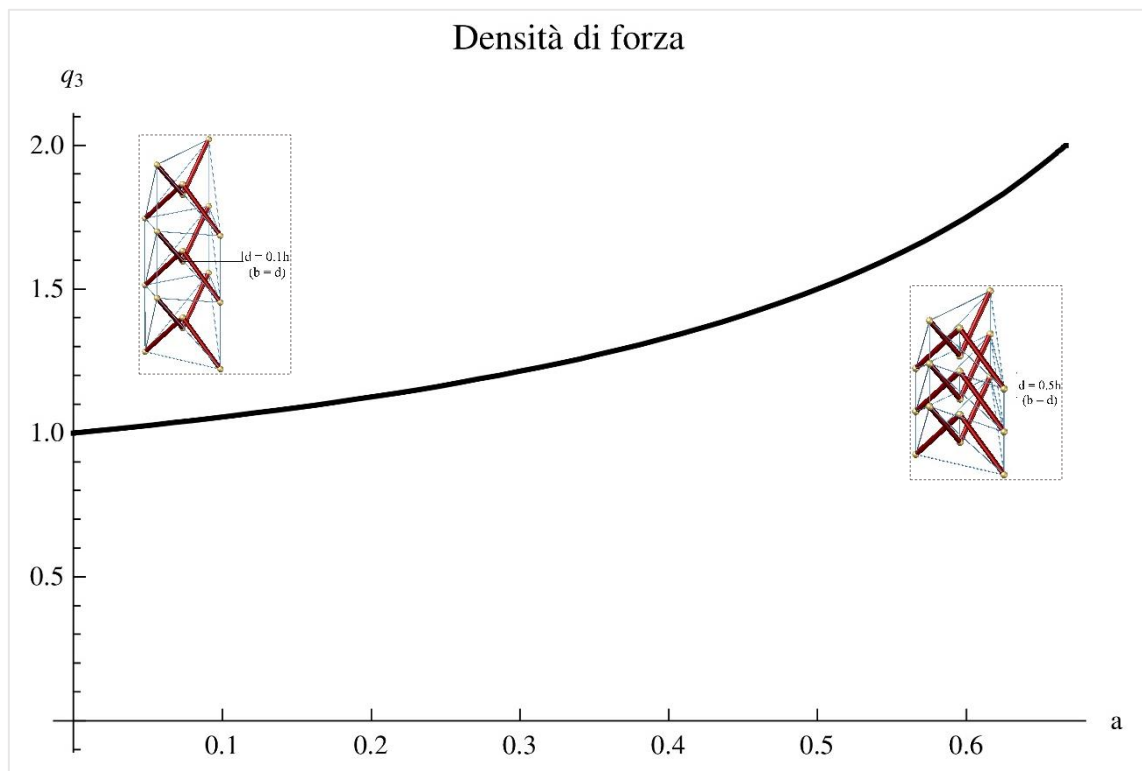


Figura 76. Densità di forza del gruppo 3 della Torre II.

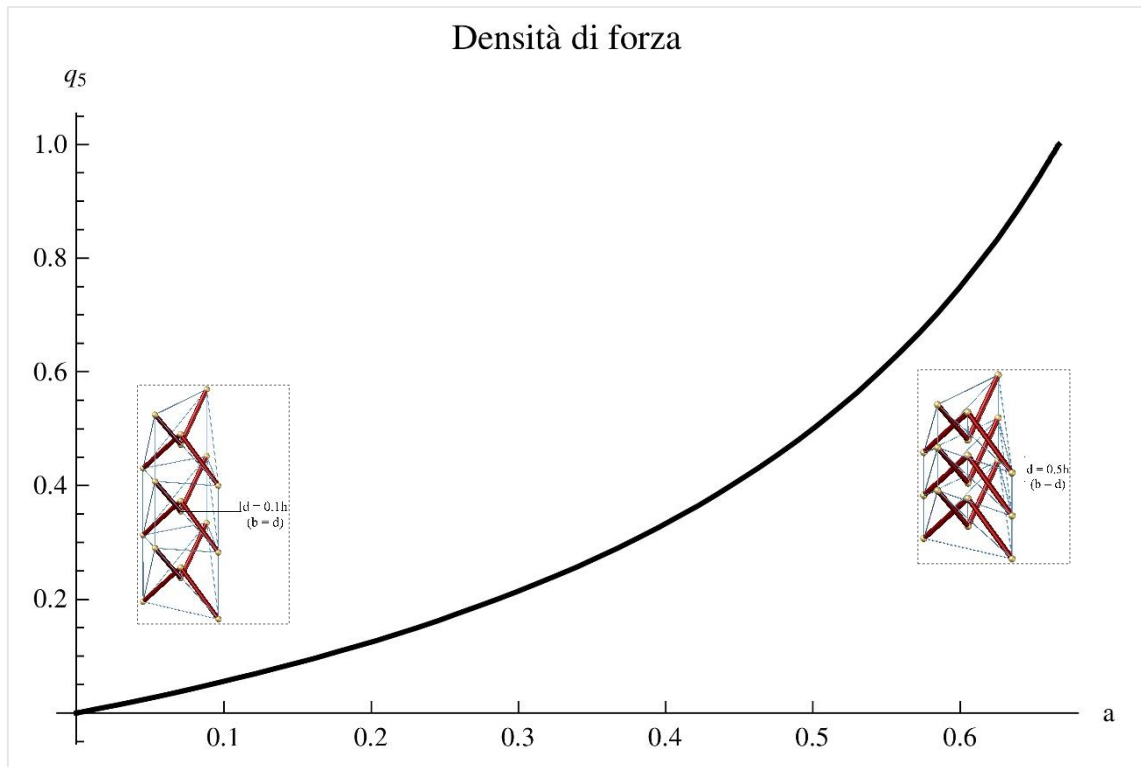


Figura 77. Densità di forza del gruppo 5 della Torre II.

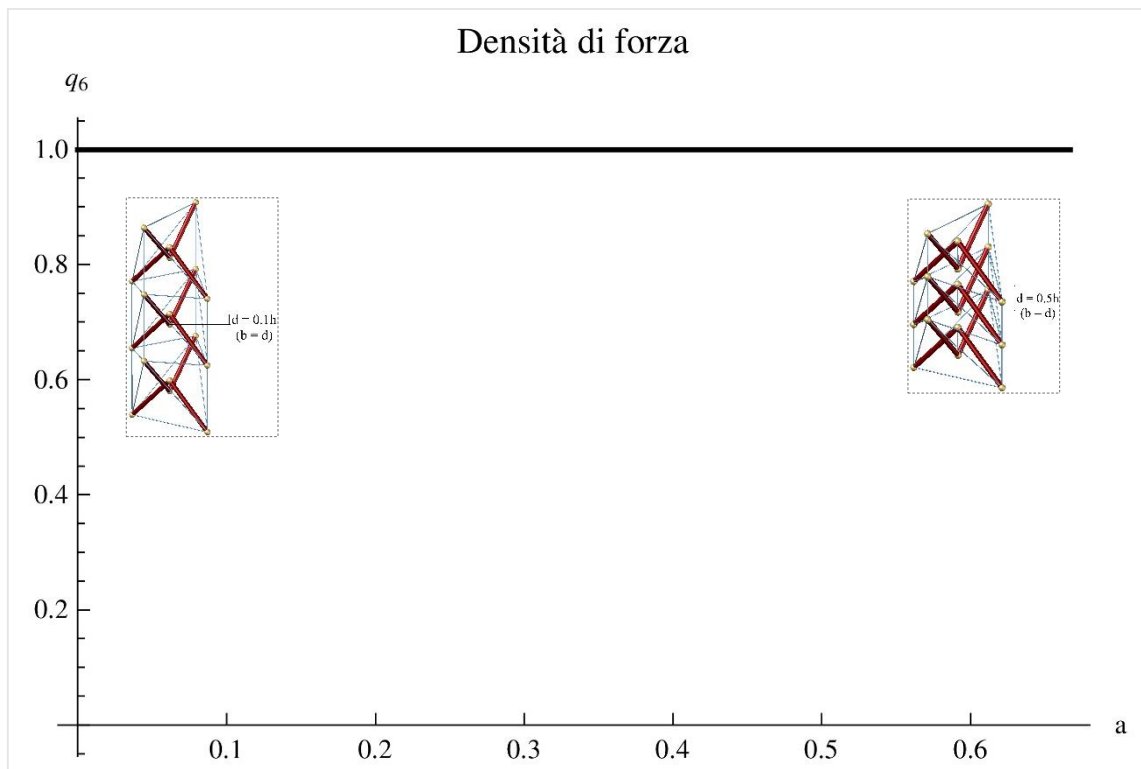


Figura 78. Densità di forza del gruppo 6 della Torre II.

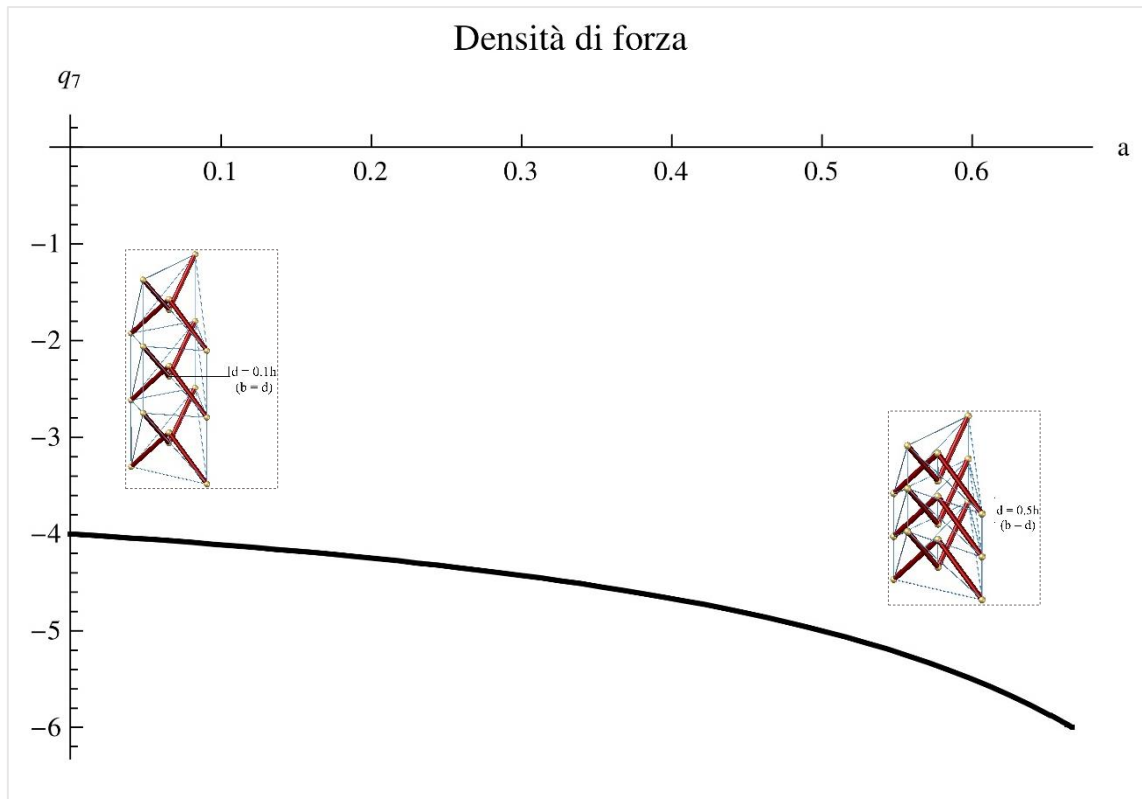


Figura 79. Densità di forza del gruppo 7 della Torre II.

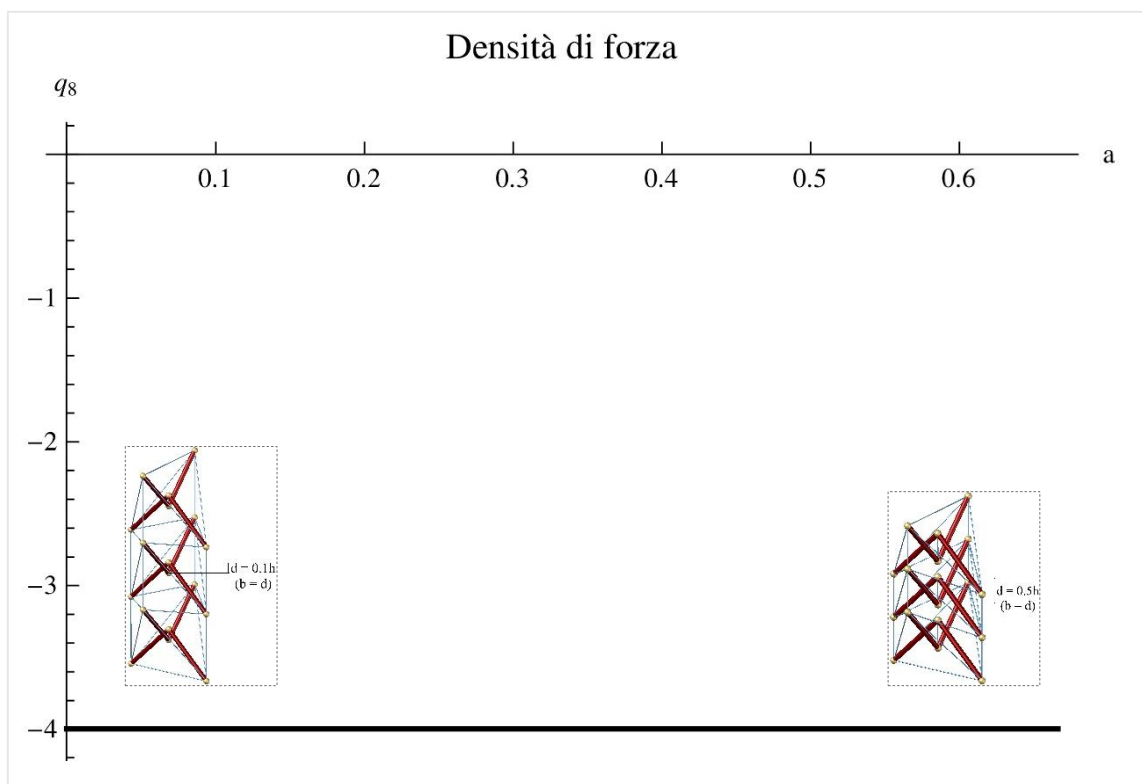


Figura 80. Densità di forza del gruppo 8 della Torre II.

Analizzando i grafici riportati nelle Figg. 74 - 80 e quanto riportato in Tab. 23 è possibile fare le seguenti osservazioni:

- La densità di forza nei cavi di sella CS e nei cavi orizzontali CO di estremità non dipendono dai parametri geometrici: il loro valore è costante e pari a 1,
- La densità di forza degli elementi del gruppo 1 decresce non linearmente all'aumentare del parametro a ,
- La densità di forza del cavo verticale 14, unico elemento del gruppo 2, decresce anch'essa non linearmente al crescere di a ,
- Per quanto riguarda gli elementi del gruppo 3, la loro densità di forza risulta essere crescente non linearmente, con un valore pari a 1 per a pari a 0,
- La legge di variazione della densità di forza degli elementi del gruppo 5 risulta essere crescente non linearmente con valore nullo per a pari a 0,
- Gli elementi del gruppo 6 presentano una densità di forza costante pari a 1 per qualsiasi valore del parametro a ,
- La densità di forza degli elementi del gruppo 7 risulta essere decrescente e non lineare con un valore che tende a -4 per a che tende a 0,
- Il gruppo 8 presenta una densità di forza degli elementi costante e pari a -4.

5.4.3 Torre III

La matrice di equilibrio $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{54 \times 49}$ della Torre III ha rango r_A pari a 42, pertanto si ha che:

$$s_A = m - r_A = 49 - 42 = 7, \quad (248)$$

$$m_i = 3n - n^{nb} - r_B = 54 - 6 - 42 = 6. \quad (249)$$

Si deduce quindi che esistono 7 stati di auto-sollecitazione equilibrati (Tabella 24), che generano lo spazio nullo della matrice di equilibrio, e 6 meccanismi infinitesimi (esclusi i 6 moti rigidi).

Stato di auto-sollecitazione equilibrato	
q_{01}	$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{8(bh+dh-2h^2)}{d(d-h)}, -\frac{2b+d-3h}{d-h}, -\frac{2b+d-3h}{d-h}, -\frac{2b+d-3h}{d-h}, -\frac{2b+d-3h}{d-h}, -1, -1, -1, -1, \frac{2b}{b+d-2h}+2, \\ -2, \frac{2b}{b+d-2h}+2, -2, 0, 1, 1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, \frac{2b}{b+d-2h}, 0, \frac{2b}{b+d-2h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{4(b+d-2h)}{d-h}, \\ \frac{4(b+d-2h)}{d-h}, \frac{4(b+d-2h)}{d-h}, \frac{4(b+d-2h)}{d-h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 1 \end{array} \right\}$
q_{02}	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4h(b+2d-4h)}{d(d-h)}, -\frac{b-d+3h}{d-h}, -\frac{b-d+3h}{d-h}, -\frac{b-d+3h}{d-h}, -\frac{b-d+3h}{d-h}, 1, 1, 1, 1, -2, \frac{2(d-2h)}{b+d-2h}, -2, \frac{2(d-2h)}{b+d-2h}, \\ 0, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{2(b+2d-4h)}{d-h}, -\frac{2(b+2d-4h)}{d-h}, -\frac{2(b+2d-4h)}{d-h}, \\ -\frac{2(b+2d-4h)}{d-h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, 0 \end{array} \right\}$
q_{03}	$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{4(bh+dh-2h^2)}{d(d-h)}, -\frac{b-h}{d-h}, -\frac{b-h}{d-h}, -\frac{b-h}{d-h}, -\frac{b-h}{d-h}, -1, -1, -1, -1, \frac{2b}{b+d-2h}, 0, \frac{2b}{b+d-2h}, \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{2(b+d-2h)}{d-h}, \frac{2(b+d-2h)}{d-h}, \\ \frac{2(b+d-2h)}{d-h}, \frac{2(b+d-2h)}{d-h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, 0, 0, 1, 0, 0 \end{array} \right\}$
q_{04}	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4(dh-2h^2)}{d(d-h)}, -\frac{h}{d-h}, -\frac{h}{d-h}, -\frac{h}{d-h}, -\frac{h}{d-h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{2(d-2h)}{d-h}, -\frac{2(d-2h)}{d-h}, -\frac{2(d-2h)}{d-h}, -\frac{2(d-2h)}{d-h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 0 \end{array} \right\}$
q_{05}	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4(2bh+3dh-6h^2)}{d(d-h)}, -\frac{2b-2d+5h}{d-h}, -\frac{2b-2d+5h}{d-h}, -\frac{2b-2d+5h}{d-h}, -\frac{2b-2d+5h}{d-h}, 1, 1, 1, 1, -4, \\ \frac{2(b+2d-4h)}{b+d-2h}, -4, \frac{2(b+2d-4h)}{b+d-2h}, 0, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, -2, \frac{2(d-2h)}{b+d-2h}, -2, \frac{2(d-2h)}{b+d-2h}, 0, -1, -1, -1, -1, \\ -\frac{2(2b+3d-6h)}{d-h}, -\frac{2(2b+3d-6h)}{d-h}, -\frac{2(2b+3d-6h)}{d-h}, -\frac{2(2b+3d-6h)}{d-h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0 \end{array} \right\}$
q_{06}	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2h}{d}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \\ \frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, \frac{2h}{d}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, \\ 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \end{array} \right\}$
q_{07}	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2h}{d}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, \frac{2h}{d}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \end{array} \right\}$

Tabella 24. Stato di auto-sollecitazione equilibrato Torre III.

Per determinare uno stato di auto-sollecitazione ammissibile, che sia quindi compatibile con le proprietà di simmetria della struttura e con il comportamento unilatero degli elementi, è necessario costruire la matrice $\bar{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{49 \times 12}$ definita nella (55) e di cui si riportano le colonne relative alla partizione in gruppi di simmetria degli elementi della Torre III:

$$\begin{array}{cccccc|c}
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 6 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 8 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 10 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 11 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 13 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 18 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 19 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 20 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 21 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 22 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 23 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 24 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 25 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 26 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 29 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 30 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 31 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 32 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 33 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 34 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 35 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 36 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 37 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 38 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 39 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 40 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 41 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 42 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 43 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 44 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 45 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 50 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 51 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 56 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 57
 \end{array} \tag{250}$$

e risolvere la (54) per determinare il vettore $\bar{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{12}$ che risulta essere pari a:

$$\bar{\mathbf{a}} = \left\{ \begin{array}{l} 1, 1, 1, 1, 1, -\frac{2(d-2h)}{d-h}, -\frac{2(d-2h)}{d-h}, \\ \frac{4h(d-2h)}{d(d-h)}, -\frac{h}{d-h}, 0, -\frac{2(d-2h)}{d-h}, 1 \end{array} \right\}. \tag{251}$$

In tale vettore gli ultimi h ($h = 5$) elementi rappresentano i coefficienti di densità di forza degli elementi appartenenti a ciascun gruppo di simmetria individuato per la Torre III.

In Tabella 25 si riporta la sintesi di quanto determinato nelle (250-251).

Stato di auto-sollecitazione ammissibile		
Gruppo	Densità di forza	Elementi del gruppo
1	$q_1 = \frac{4h(d-2h)}{d(d-h)}$	1, 14, 27
2	$q_2 = -\frac{h}{d-h}$	2, 3, 4, 5, 15, 16, 17, 18, 28, 29, 30, 31
3	$q_3 = 0$	6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26,
4	$q_4 = -\frac{2(d-2h)}{d-h}$	32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43
5	$q_5 = 1$	44, 45, 50, 51, 56, 57

Tabella 25. Stato di auto-sollecitazione ammissibile per la Torre III.

Di seguito si riportano le leggi di variazione dei coefficienti di densità di forza per ciascun gruppo di simmetria individuato (Figg. 81 - 84).

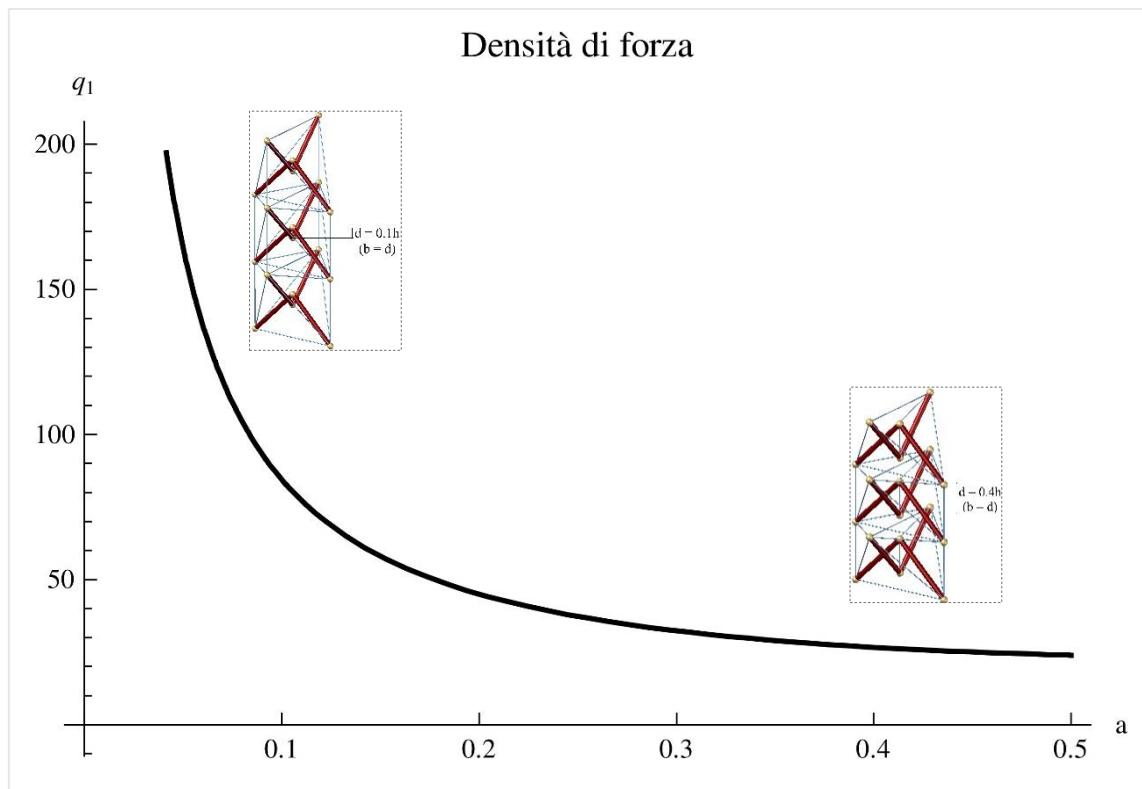


Figura 81. Densità di forza del gruppo 1 della Torre III.

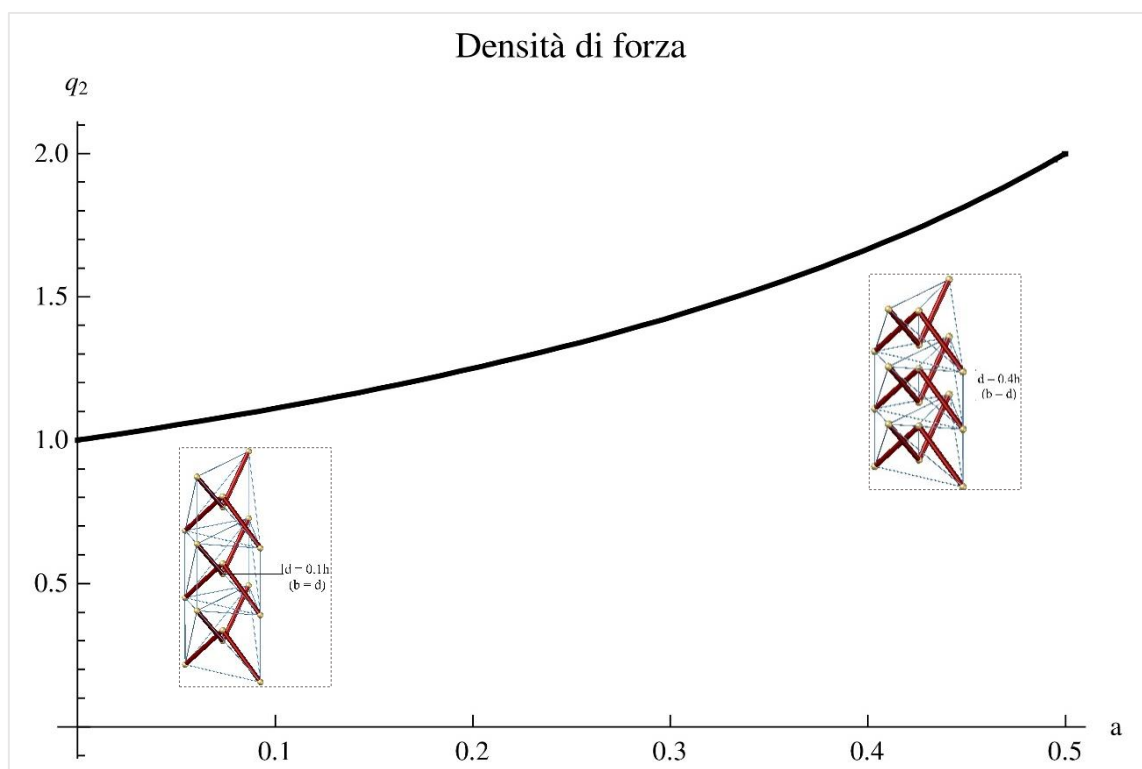


Figura 82. Densità di forza del gruppo 2 della Torre III.

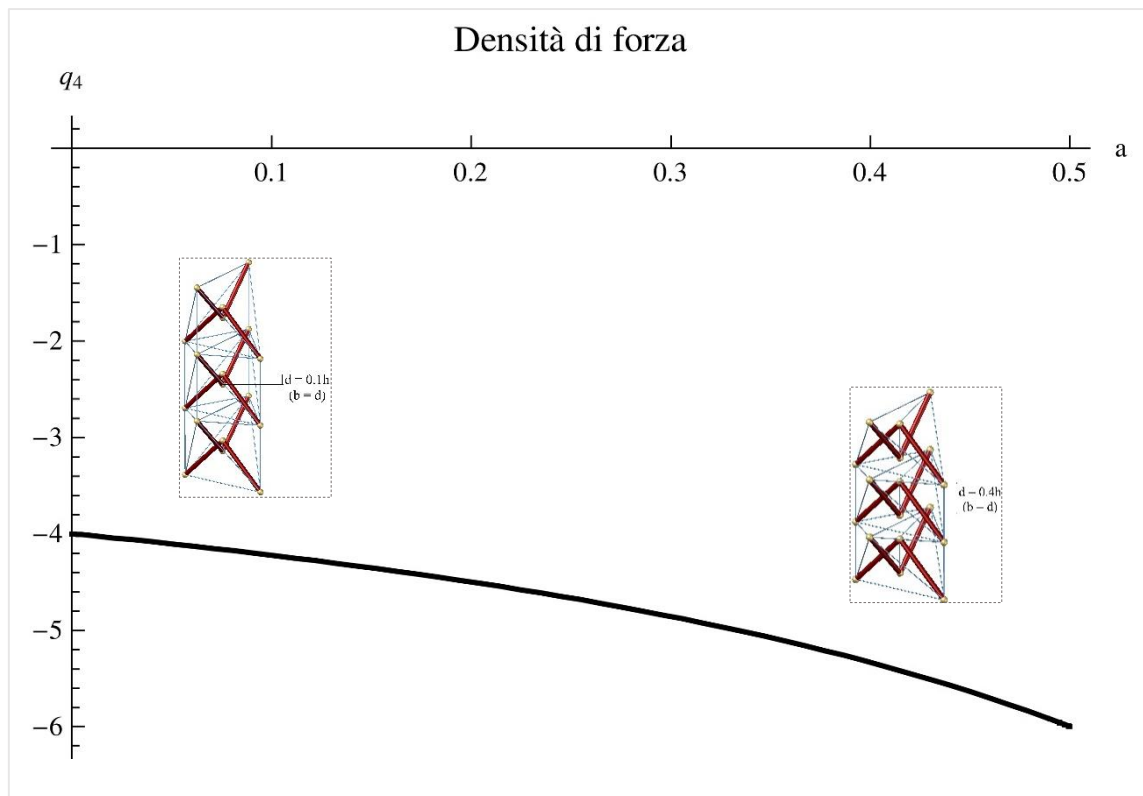


Figura 83. Densità di forza del gruppo 4 della Torre III.

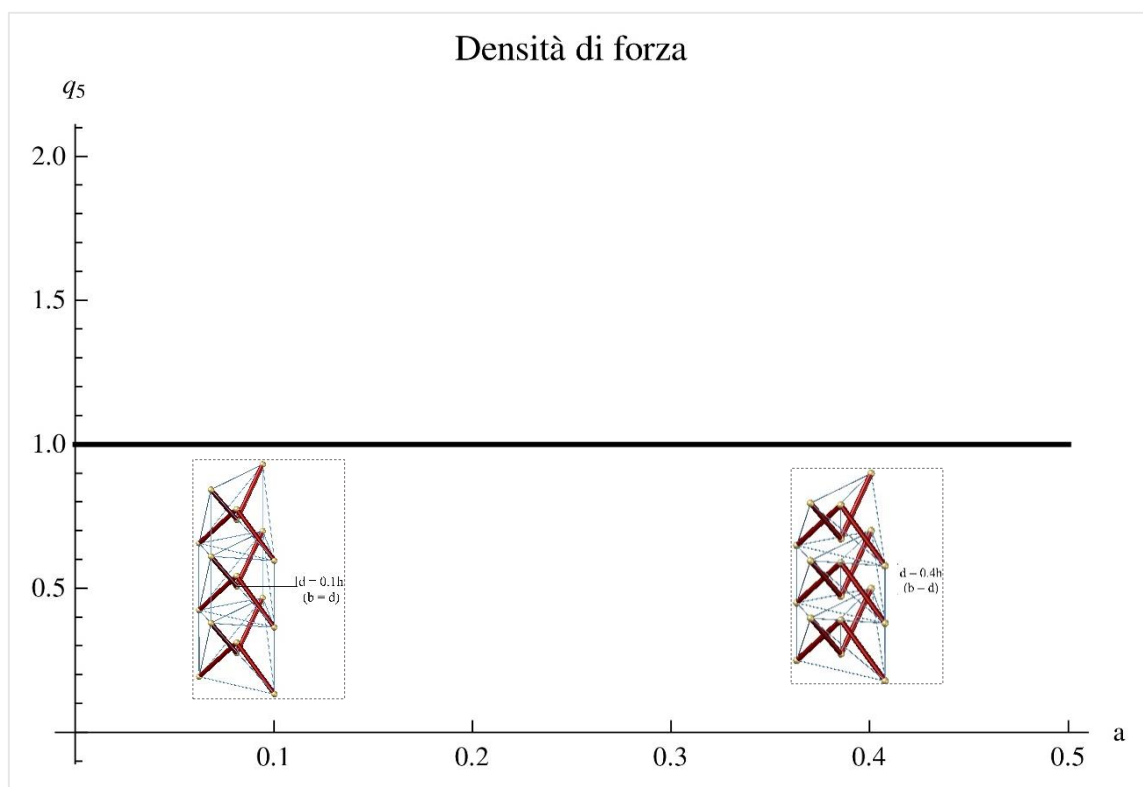


Figura 84. Densità di forza del gruppo 5 della Torre III.

Dai risultati ottenuti è possibile concludere che:

- La densità di forza dei cavi verticali decresce non linearmente fino a raggiungere un valore pari a 20 per a che tende ad $1/2$,
- Per quanto riguarda la densità di forza dei cavi diagonali, il valore cresce non linearmente con un limite inferiore pari a 1 per a che tende a 0,
- La densità di forza negli elementi compressi cresce non linearmente con un valore pari a -4 in corrispondenza del rapporto nullo tra d ed h .

5.4.4 Torre IV

La matrice di equilibrio $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{54 \times 55}$ della Torre IV ha rango r_A pari a 48, pertanto si ha che:

$$s_A = m - r_A = 55 - 48 = 7, \quad (252)$$

$$m_i = 3n - n^{rb} - r_b = 54 - 6 - 48 = 0. \quad (253)$$

Si deduce quindi che esistono 7 stati di auto-sollecitazione equilibrati (Tabella 26), che generano lo spazio nullo della matrice di equilibrio, e nessun meccanismo infinitesimo (esclusi i 6 moti rigidi). La Torre IV pertanto risulta cinematicamente determinata, poiché ad esclusione dei sei moti rigidi indipendenti non esiste alcun meccanismo infinitesimo che giace nello spazio nullo della matrice di compatibilità, o equivalentemente, nel nucleo della matrice di equilibrio.

Stato di auto-sollecitazione equilibrato	
\mathbf{q}_{01}	$\left[\begin{array}{cccccc} 2(2bd+d^2-2dh-2h^2) & 2bd+d^2-3dh-h^2 & 2bd+d^2-3dh-h^2 & 2bd+d^2-3dh-h^2 & 2bd+d^2-3dh-h^2 & \\ \frac{d(d-h)}{d} & \frac{2h(h-d)}{2bd+d^2-2dh-h^2} & \frac{2h(h-d)}{-bd-d^2+2dh+h^2} & \frac{2h(h-d)}{2bd+d^2-2dh-h^2} & \frac{2h(h-d)}{-bd-d^2+2dh+h^2} & \\ \frac{2h}{d} & \frac{2h}{d} & \frac{2h}{d} & \frac{2h}{d} & \frac{2h}{d} & 0, \\ \frac{h(b+d-2h)}{d} & \frac{h(b+d-2h)}{d} & \frac{h(b+d-2h)}{d} & \frac{h(b+d-2h)}{d} & \frac{h(b+d-2h)}{d} & \\ \frac{bd-h^2}{h} & \frac{bd-h^2}{h} & \frac{bd-h^2}{h} & \frac{bd-h^2}{h} & \frac{bd-h^2}{h} & 0, \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \frac{2bd+d^2-2dh-2h^2}{h(d-h)} & \frac{2bd+d^2-2dh-2h^2}{h(d-h)} & \frac{2bd+d^2-2dh-2h^2}{h(d-h)} & \frac{2bd+d^2-2dh-2h^2}{h(d-h)} & \frac{2bd+d^2-2dh-2h^2}{h(d-h)} & \\ 0, 0, 0, 0, -\frac{d-h}{h}, -\frac{d-h}{h}, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1 \end{array} \right]$
\mathbf{q}_{02}	$\left[\begin{array}{cccccc} \frac{2(2b+d-3h)}{d-h} & \frac{2h}{d} & \frac{2bd+d^2-3dh}{2h(d-h)} & \frac{2bd+d^2-3dh}{2h(d-h)} & \frac{2bd+d^2-3dh}{2h(d-h)} & \frac{2bd+d^2-3dh}{2h(d-h)} & \frac{d}{2h} & \frac{d}{2h} \\ \frac{d}{2h} & \frac{d}{2h} & \frac{-2bd-d^2+2dh}{h(b+d-2h)} & \frac{d}{h} & \frac{-2bd-d^2+2dh}{h(b+d-2h)} & \frac{d}{h} & 0, & \frac{d}{2h} & \frac{d}{2h} & \frac{d}{2h} & \frac{d}{2h} & \frac{d}{2h} & \frac{d}{2h} & \frac{d}{2h} \\ \frac{d}{2h} & \frac{bd}{h(b+d-2h)} & 0, & \frac{bd}{h(b+d-2h)} & 0, & \frac{2(d-h)}{d} & 0, 0, 0, 0, & \frac{-2bd-d^2+2dh+h^2}{h(d-h)} & \frac{-2bd-d^2+2dh+h^2}{h(d-h)} \\ \frac{2(bd+d^2-2dh)}{h(d-h)} & \frac{2(bd+d^2-2dh)}{h(d-h)} & 0, 0, 0, 0, & -\frac{h-d}{h} & -\frac{h-d}{h} & 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0 \end{array} \right]$

\mathbf{q}_{03}	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2(bd-2h^2)}{d(d-h)}, -\frac{bd-dh-h^2}{2h(h-d)}, -\frac{bd-dh-h^2}{2h(h-d)}, -\frac{bd-dh-h^2}{2h(h-d)}, -\frac{bd-dh-h^2}{2h(h-d)}, \frac{d}{2h}, \frac{d}{2h}, \frac{d}{2h}, \frac{d}{2h}, -\frac{bd-h^2}{h(b+d-2h)}, \\ -\frac{h}{b+d-2h}, -\frac{bd-h^2}{h(b+d-2h)}, -\frac{h}{b+d-2h}, 0, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{bd-2h^2}{h(d-h)}, \\ -\frac{bd-2h^2}{h(d-h)}, -\frac{bd+d^2-2dh-h^2}{h(d-h)}, -\frac{bd+d^2-2dh-h^2}{h(d-h)}, -\frac{d-h}{h}, -\frac{d-h}{h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0 \end{array} \right\}$
\mathbf{q}_{04}	$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{2(bd-h^2)}{d(d-h)}, \frac{d(h-b)}{2h(d-h)}, \frac{d(h-b)}{2h(d-h)}, \frac{d(h-b)}{2h(d-h)}, \frac{d(h-b)}{2h(d-h)}, -\frac{d}{2h}, -\frac{d}{2h}, -\frac{d}{2h}, -\frac{d}{2h}, \frac{bd}{h(b+d-2h)}, 0, \frac{bd}{h(b+d-2h)}, \\ 0, -\frac{2(d-h)}{d}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -\frac{h^2-bd}{h(d-h)}, -\frac{h^2-bd}{h(d-h)}, -\frac{-bd-d^2+2dh}{h(d-h)}, -\frac{-bd-d^2+2dh}{h(d-h)}, \\ -\frac{h-d}{h}, -\frac{h-d}{h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \end{array} \right\}$
\mathbf{q}_{05}	$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{2(d^2-2dh+2h^2)}{d(d-h)}, -\frac{d}{2(d-h)}, -\frac{d}{2(d-h)}, -\frac{d}{2(d-h)}, -\frac{d}{2(d-h)}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{h}{d-h}, \frac{h}{d-h}, -\frac{h}{h-d}, -\frac{h}{h-d}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, \\ 0, 0, 0, 0, 0 \end{array} \right\}$
\mathbf{q}_{06}	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2h}{d}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \\ -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{-b-d+2h}, -\frac{2h}{d}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, \\ 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \end{array} \right\}$
\mathbf{q}_{07}	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2h}{d}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{d-h}{b+d-2h}, -\frac{h-d}{b+d-2h}, -\frac{2h}{d}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \\ -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \\ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0 \end{array} \right\}$

Tabella 26. Stato di auto-sollecitazione equilibrato della Torre IV.

Per determinare uno stato di auto-sollecitazione ammissibile, che sia quindi compatibile con le proprietà di simmetria della struttura e con il comportamento unilatero degli elementi, è necessario costruire la matrice $\bar{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{55 \times 12}$ definita nella (55) e di cui si riportano le colonne relative alla partizione in gruppi di simmetria degli elementi della struttura:

$$\begin{array}{cccccc}
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 4 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 6 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 7 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 8 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 9 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 10 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 11 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 12 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 13 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 14 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 15 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 16 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 17 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 18 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 19 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 20 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 21 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 22 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 23 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 24 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 25 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 26 \\
 -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 27 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 28, \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 29 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 30 \\
 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 31 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 32 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 33 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 34 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 35 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 36 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 37 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 38 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 39 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 40 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 41 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 42 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 43 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 46 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 47 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 48 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 49 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 52 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 53 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 54 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 55 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 58 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 59 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 60 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 61
 \end{array}
 \tag{254}$$

e risolvere la (54) per determinare il vettore $\bar{\alpha} \in \mathbb{R}^{12}$ che risulta essere pari a:

$$\bar{\alpha} = \left\{ 1, 1, 1, 1, 1, \frac{h}{d-h}, \frac{h}{d-h}, \right. \\
 \left. -\frac{2(d^2-2dh+2h^2)}{d(d-h)}, -\frac{d}{2(d-h)}, 0, \frac{h}{d-h}, 1 \right\}.
 \tag{255}$$

In tale vettore gli ultimi h ($h = 5$) elementi rappresentano i coefficienti di densità di forza degli elementi appartenenti a ciascun gruppo di simmetria individuato per la Torre IV. La sintesi di quanto descritto nelle (254-255) è riportata in Tabella 27.

Stato di auto-sollecitazione ammissibile		
Gruppo	Densità di forza	Elementi del gruppo
1	$q_1 = -\frac{2(d^2 - 2dh + 2h^2)}{d(d-h)}$	1, 14, 27
2	$q_2 = -\frac{d}{2(d-h)}$	2, 3, 4, 5, 15, 16, 17, 18, 28, 29, 30, 31
3	$q_3 = 0$	6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26,
4	$q_4 = \frac{h}{d-h}$	32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43
5	$q_5 = 1$	46, 47, 48, 49, 52, 53, 54, 55, 58, 59, 60, 61

Tabella 27. Stato di auto-sollecitazione ammissibile della Torre IV.

Di seguito si riportano le leggi di variazione dei coefficienti di densità di forza per ciascun gruppo di simmetria individuato per gli elementi della Torre IV (Figg. 85 - 88).

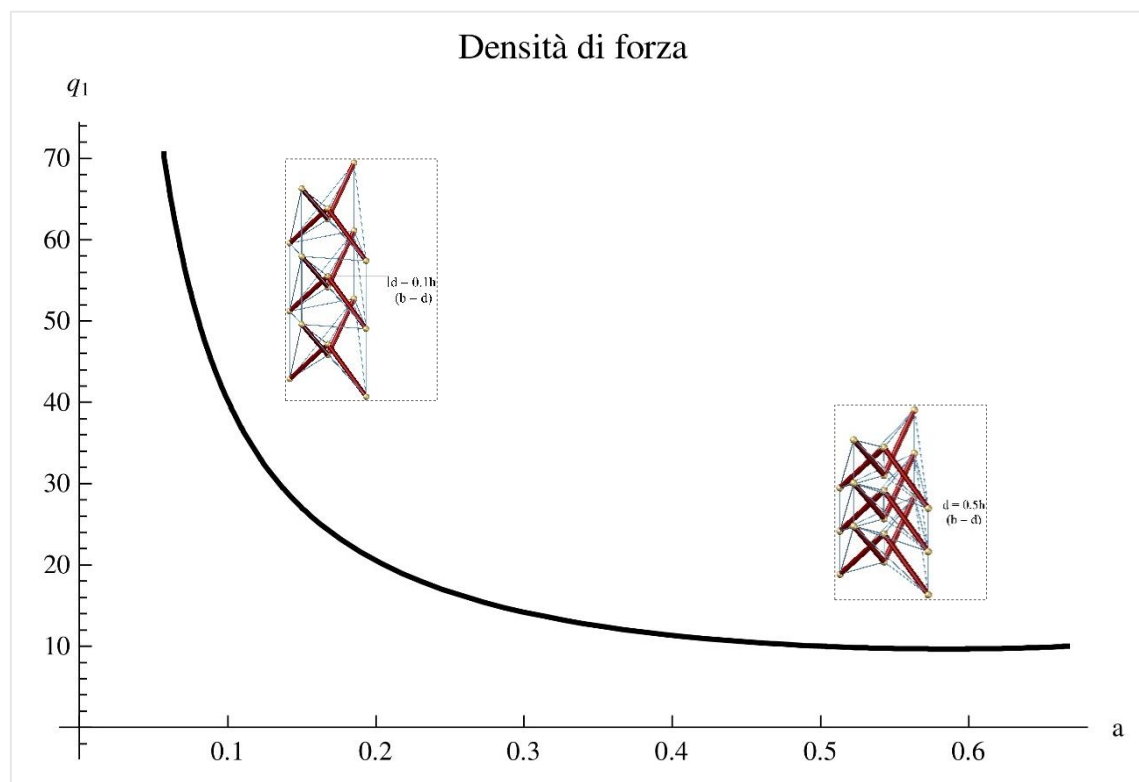


Figura 85. Densità di forza del gruppo 1 della Torre IV.

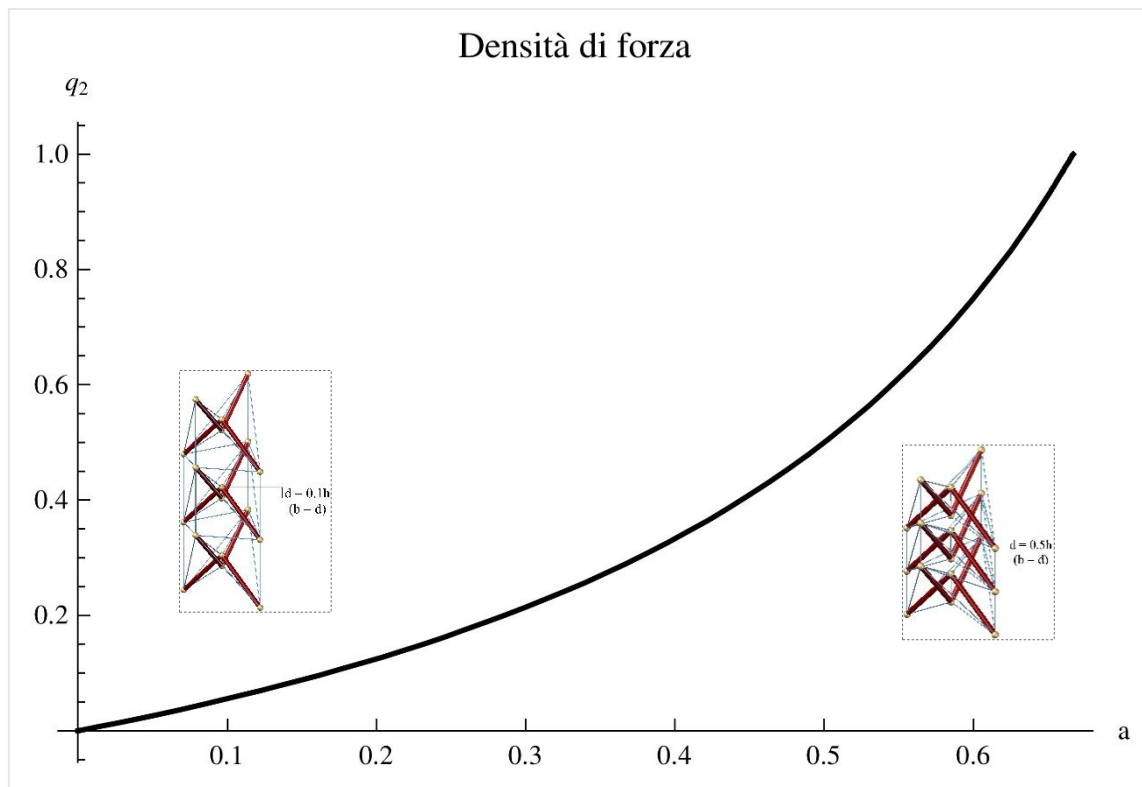


Figura 86. Densità di forza del gruppo 2 della Torre IV.

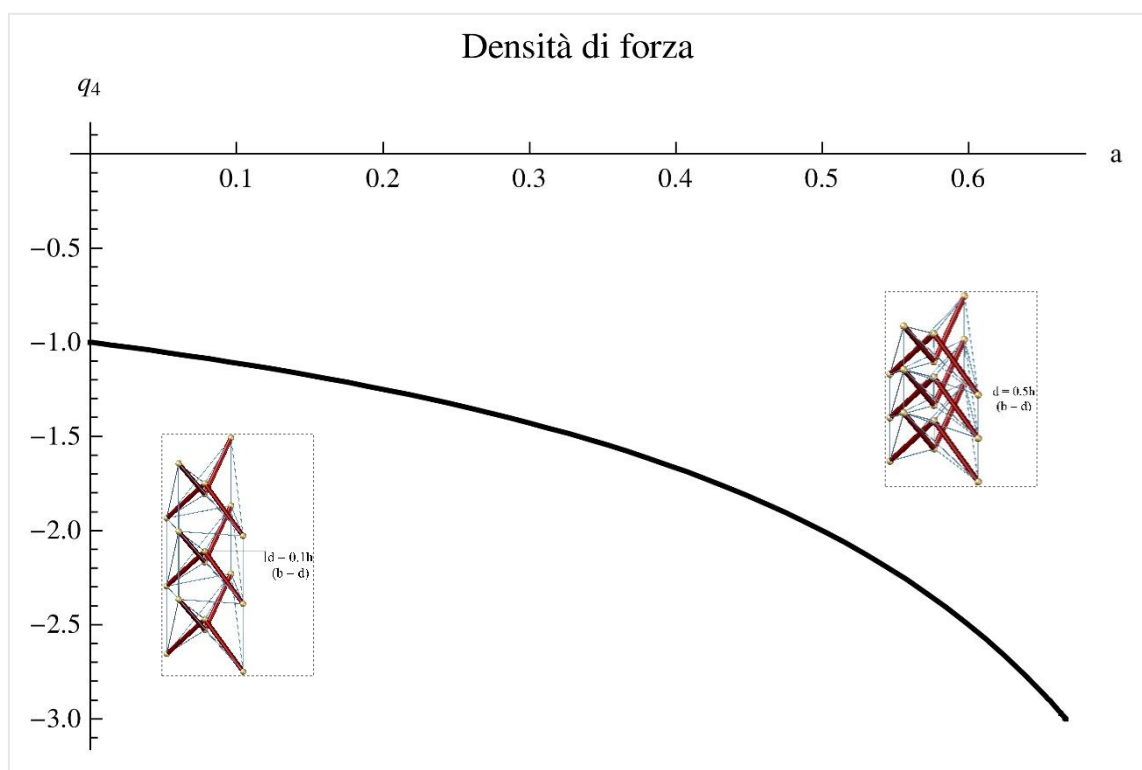


Figura 87. Densità di forza del gruppo 4 della Torre IV.

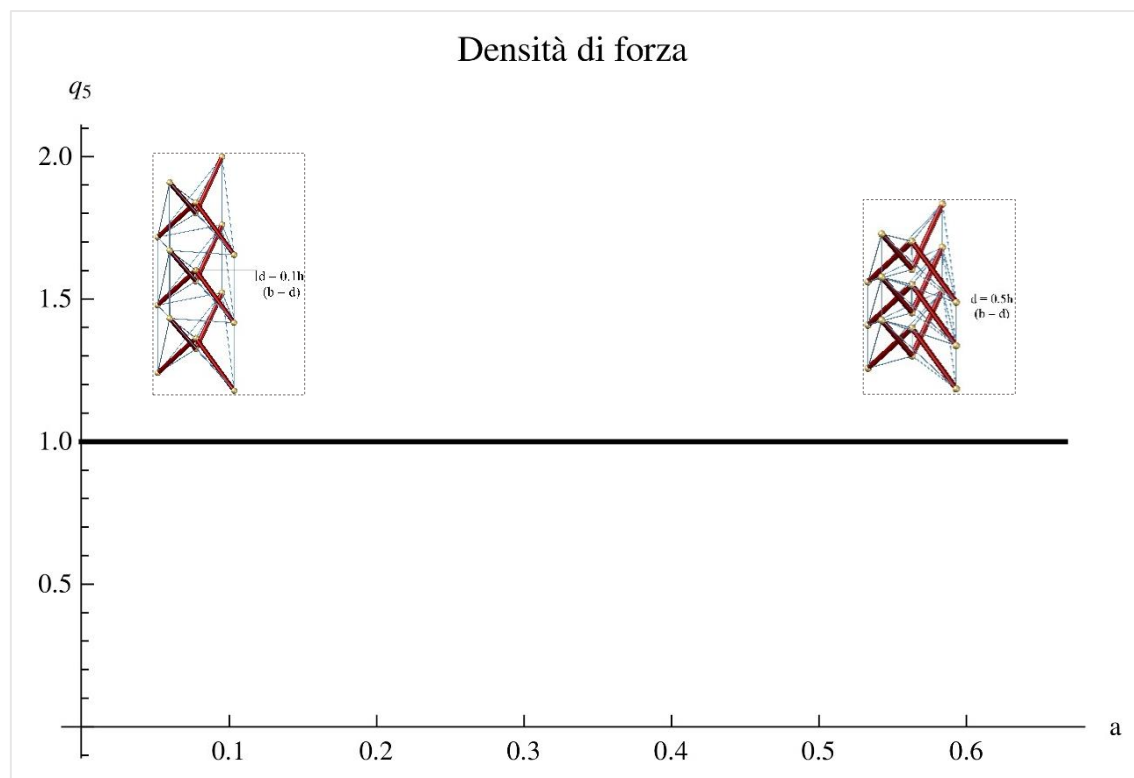


Figura 88. Densità di forza del gruppo 5 della Torre IV.

Dai risultati ottenuti è possibile concludere che:

- La densità di forza dei cavi verticali decresce non linearmente fino a raggiungere un valore pari a 10 per a che tende ad $2/3$,
- Per quanto riguarda la densità di forza dei cavi diagonali, il valore cresce non linearmente con una legge di variazione che comporta un valore nullo per a che tende a 0,
- La densità di forza negli elementi compressi cresce non linearmente con un valore pari a -1 in corrispondenza del rapporto nullo tra d ed h .

5.5 ANALISI DELLO SFORZO NORMALE NEGLI ELEMENTI

Nota lo stato di auto-sollecitazione ammissibile \bar{q}_a per le torri analizzate, dalla (26) è possibile ottenere il vettore degli sforzi normali negli elementi \bar{n} tramite la (59).

Risulta evidente che lo sforzo normale N negli elementi dipende, diversamente da quanto accade per le densità di forza, da tutti i parametri geometrici (r , d , h e b) che definiscono la configurazione geometrica delle torri.

In tal caso è necessario diagrammare i risultati ottenuti considerando anche della variabilità del parametro r , tuttavia, è possibile ottenere una soluzione particolare del problema legando i parametri r ed h , ad esempio ponendo $r = h$ (i grafici riportano un range di variazione di h compreso tra 0 e 100). Si fa notare che tale

condizione geometrica, come risulta dalla descrizione in Fig. 22, comporta un valore dell'angolo α (misurato nel piano che contiene il triangolo V-Expander) pari a $\pi/4$.

5.5.1 *Torre I*

Nelle Figg. 89 – 96 si riportano i risultati di tale analisi in riferimento agli elementi della Torre I.

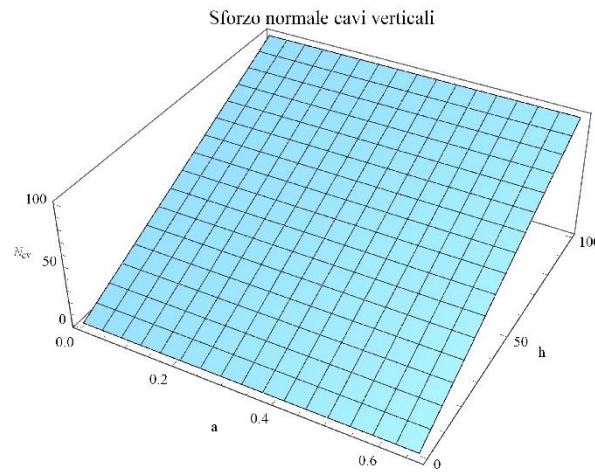


Figura 89. Sforzo normale nei cavi verticali della Torre I.

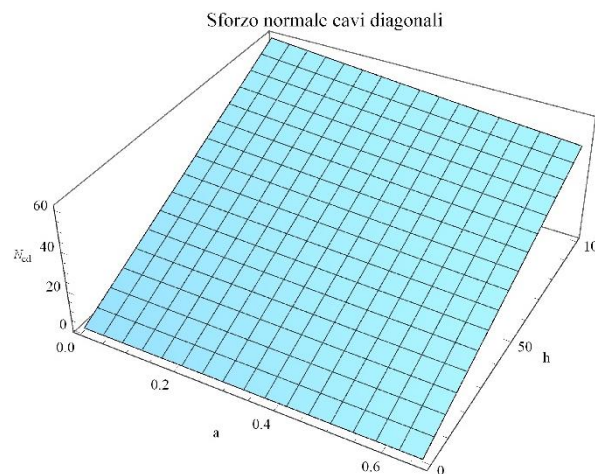


Figura 90. Sforzo normale cavi diagonali della Torre I.

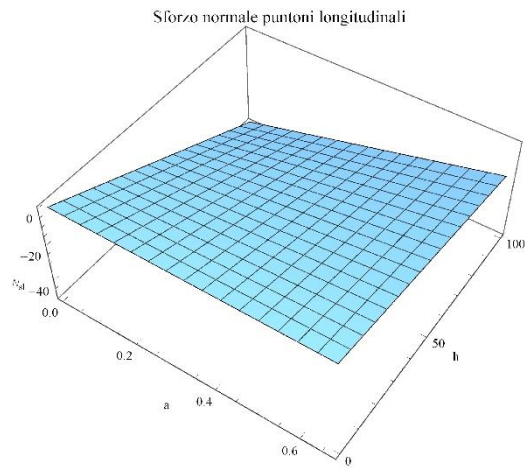


Figura 91. Sforzo normale puntoni longitudinali della Torre I.

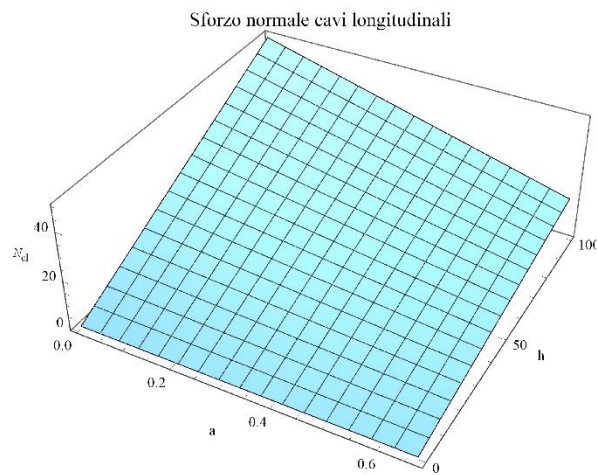


Figura 92. Sforzo normale cavi longitudinali della Torre I.

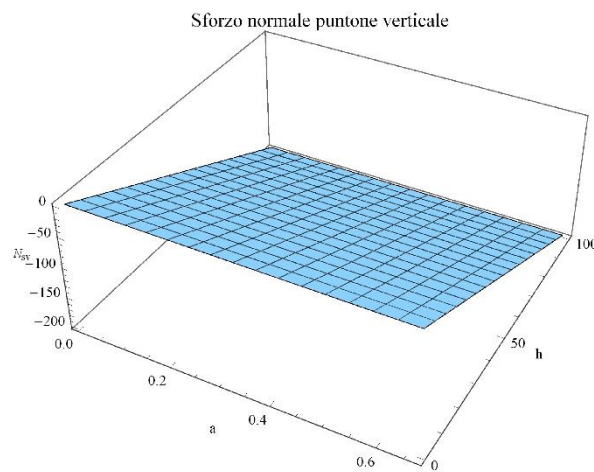


Figura 93. Sforzo normale puntone verticale della Torre I.

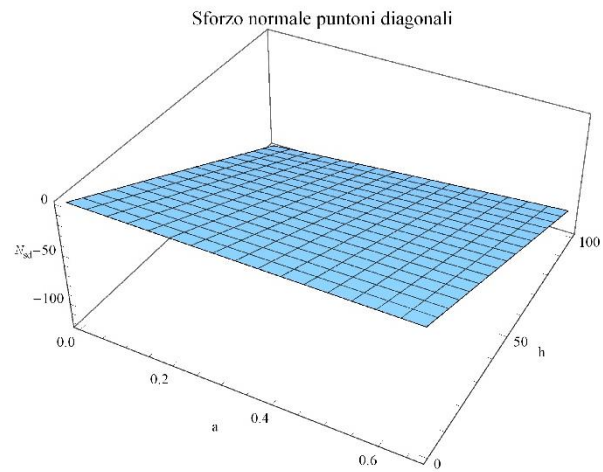


Figura 94. Sforzo normale puntoni diagonali della Torre I.

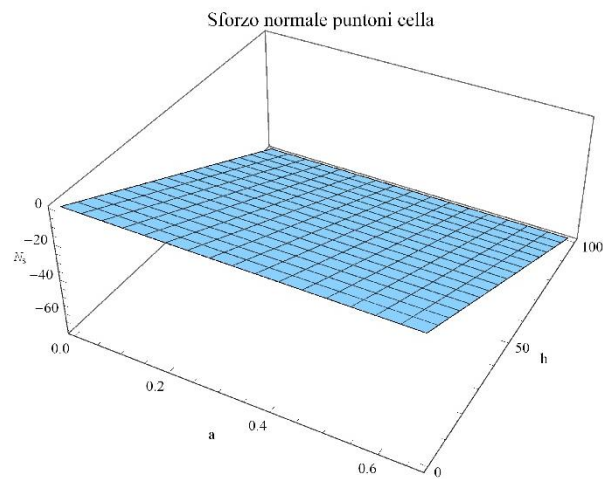


Figura 95. Sforzo normale puntoni celle estremità della Torre I.

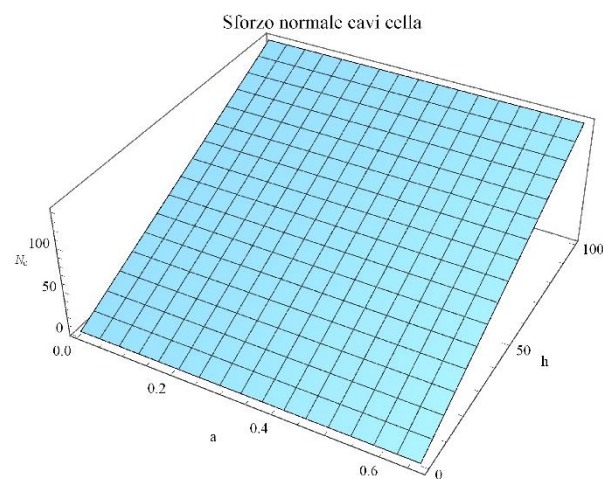


Figura 96. Sforzo normale cavi cella della Torre I.

Nell'ipotesi di porre $r = h$, come già accennato e $b = d$, è possibile esprimere lo sforzo normale negli elementi in funzione esclusivamente del parametro h . Pertanto è possibile determinare il rapporto tra lo

sforzamento normale e il valore del parametro h , ovvero N_i/h ($i=1,2,\dots,m$). In Figg. 97 - 98 si mostrano i risultati di tale studio.

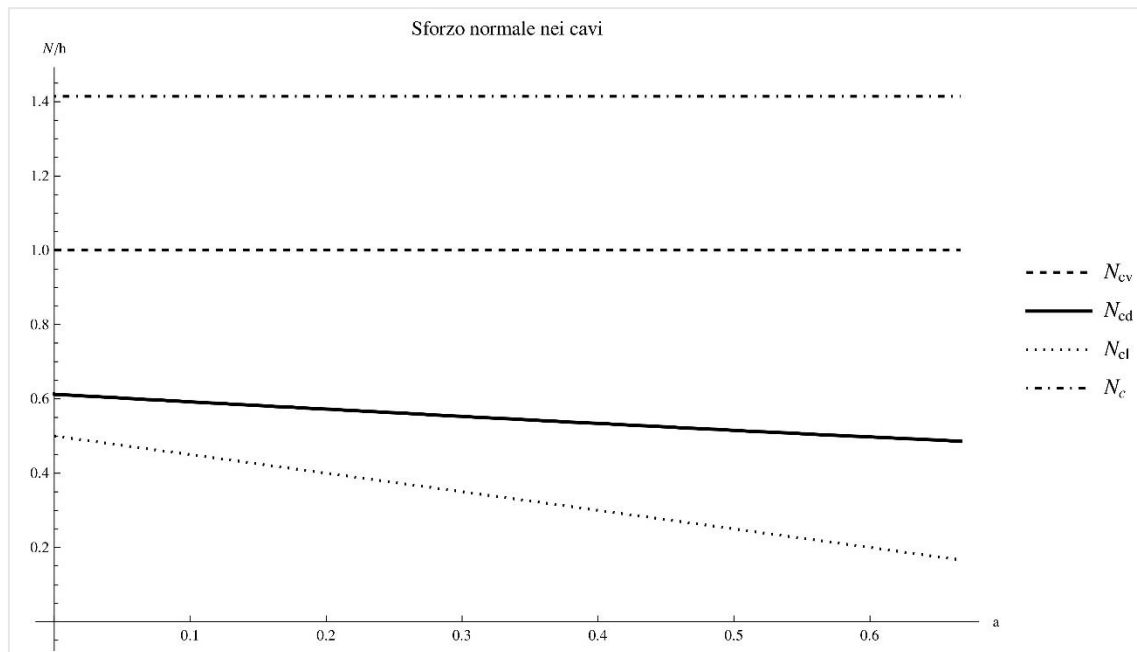


Figura 97. Sforzo normale nei cavi della Torre I.

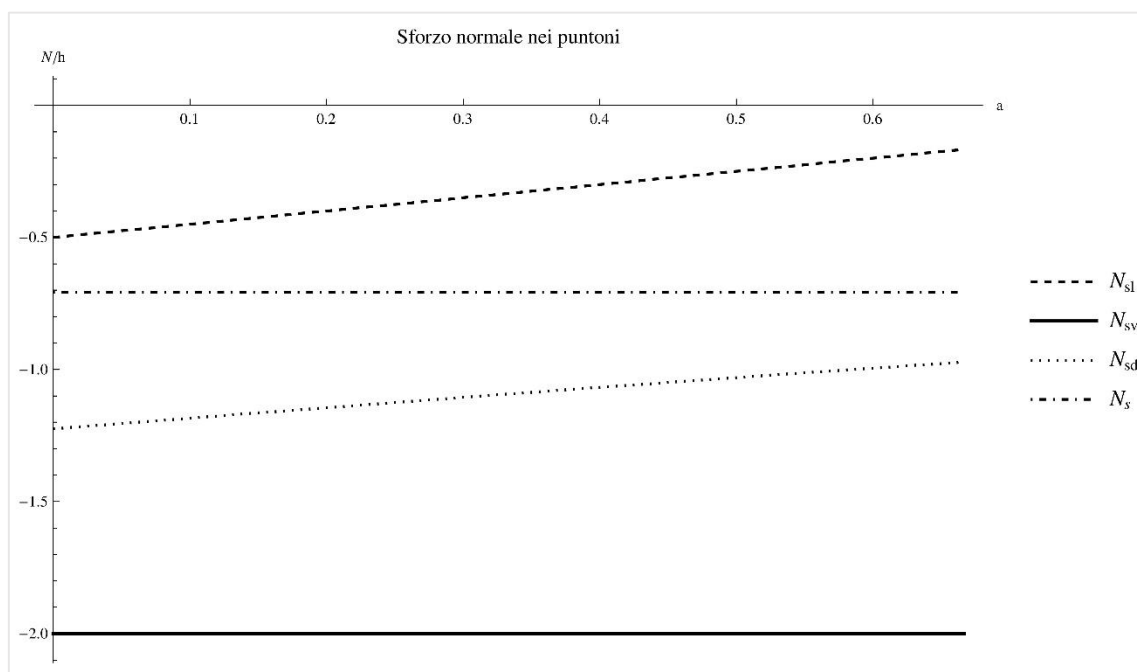


Figura 98. Sforzo normale nei puntoni della Torre I.

Per completare l'analisi, nell'ipotesi di aver fissato $b = d$ ed $r = h$, e ricordando che la lunghezza del cavo verticale può essere espressa in funzione dell'altezza del triangolo V-Expander: $d = a \times h$ ($a \in [0, 2/3]$), è

possibile determinare il range entro il quale varia lo sforzo normale negli elementi della Torre I nel dominio di esistenza del parametro a (Figura 99).

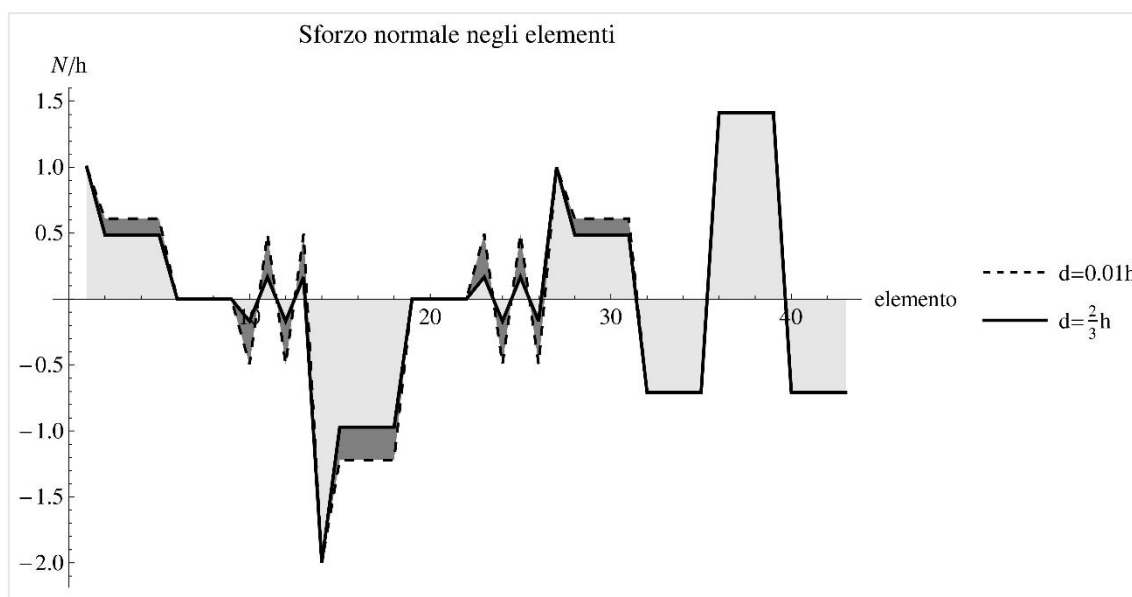


Figura 99. Variazione dello sforzo normale negli elementi della Torre I.

Nel grafico riportato in Fig. 99, l'intervallo evidenziato (campitura grigio scuro) mostra che lo sforzo normale negli elementi della Torre I, calcolato rispetto all'estremo superiore del dominio di esistenza del parametro a ($a = 2/3$), risulta essere, in modulo, sempre maggiore rispetto a quello calcolato per l'estremo inferiore ($a \cong 0.01$).

5.5.2 Torre II

Nelle Figg.100 - 108 si riportano i risultati ottenuti nell'analisi dello stato di sollecitazione negli elementi della Torre II.

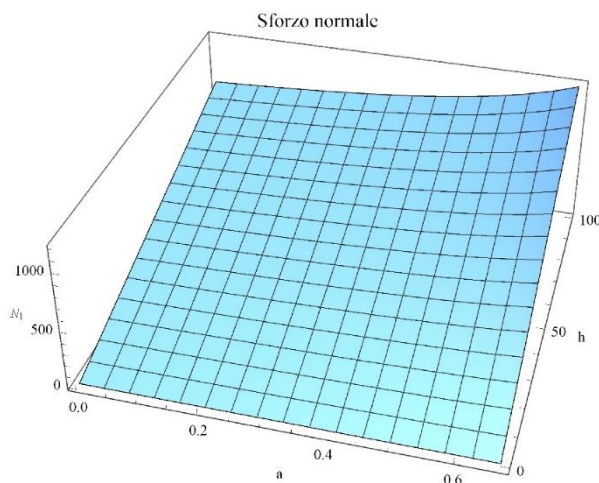


Figura 100. Sforzo normale negli elementi del gruppo 1 della Torre II.

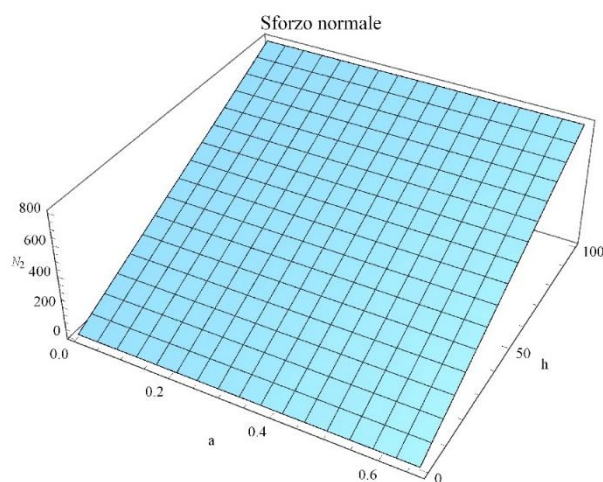


Figura 101. Sforzo normale negli elementi del gruppo 2 della Torre II.

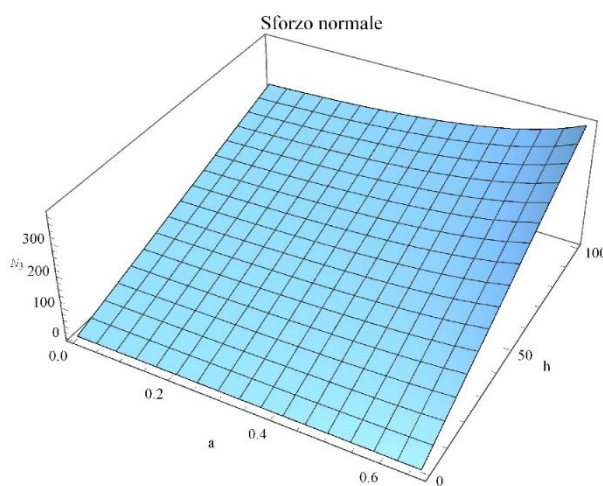


Figura 102. Sforzo normale negli elementi del gruppo 3 della Torre II.

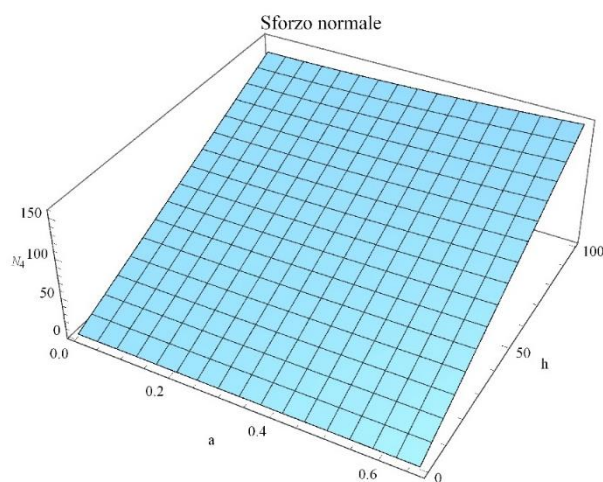


Figura 103. Sforzo normale negli elementi del gruppo 4 della Torre II.

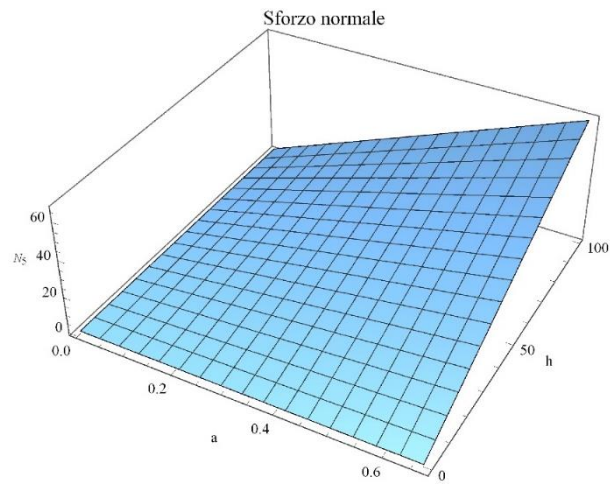


Figura 104. Sforzo normale negli elementi del gruppo 5 della Torre II.

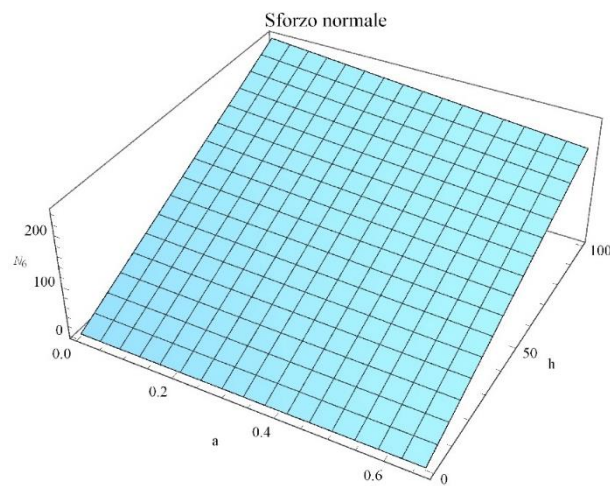


Figura 105. Sforzo normale negli elementi del gruppo 6 della Torre II.

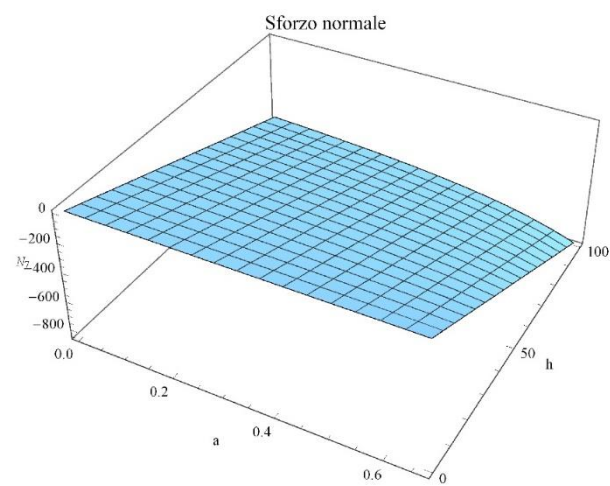


Figura 106. Sforzo normale negli elementi del gruppo 7 della Torre II.

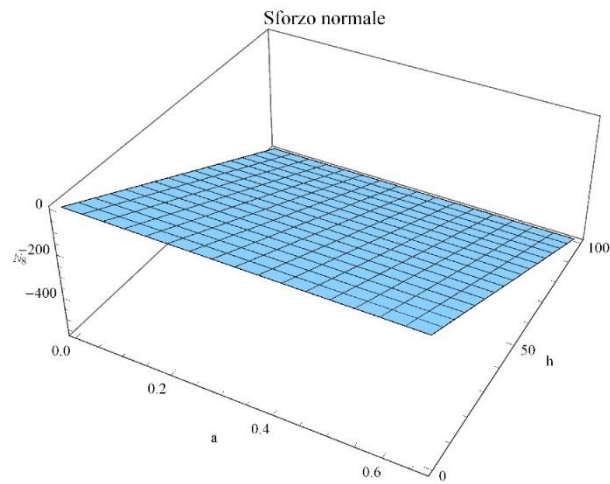


Figura 107. Sforzo normale negli elementi del gruppo 8 della Torre II.

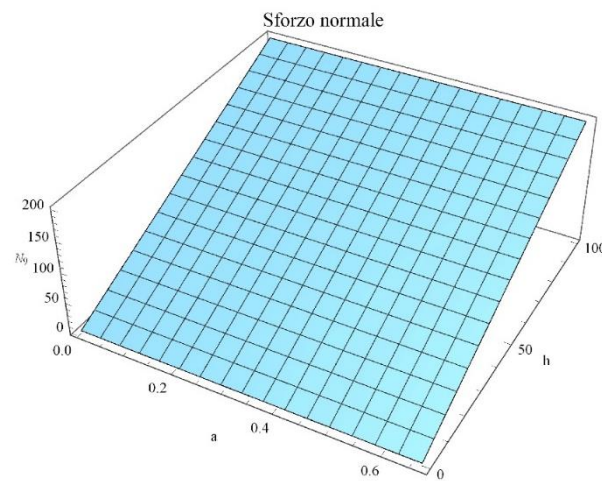


Figura 108. Sforzo normale negli elementi del gruppo 9 della Torre II.

Ponendo $r = h$ e $b = d$ è possibile esprimere lo sforzo normale negli elementi in funzione esclusivamente del parametro h . Pertanto è possibile fare riferimento al rapporto tra lo sforzo normale e il valore del parametro h , ovvero N_i / h ($i = 1, 2, \dots, m$). In Figg. 109 - 114 si mostrano i risultati di tale studio.

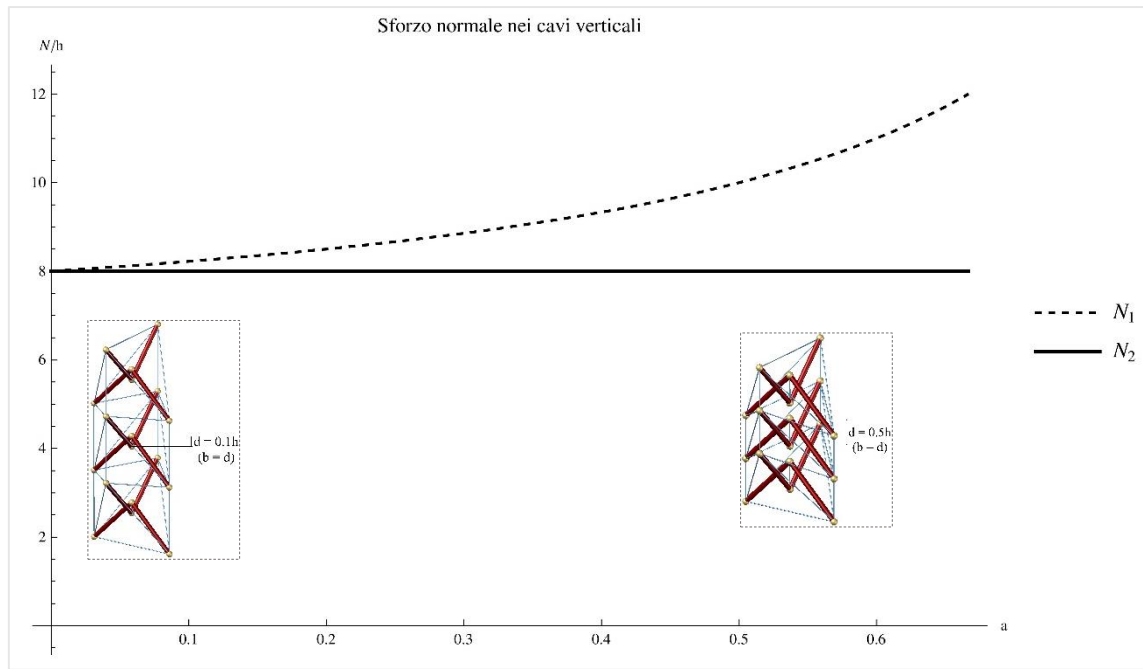


Figura 109. Sforzo normale nei cavi verticali della Torre II.

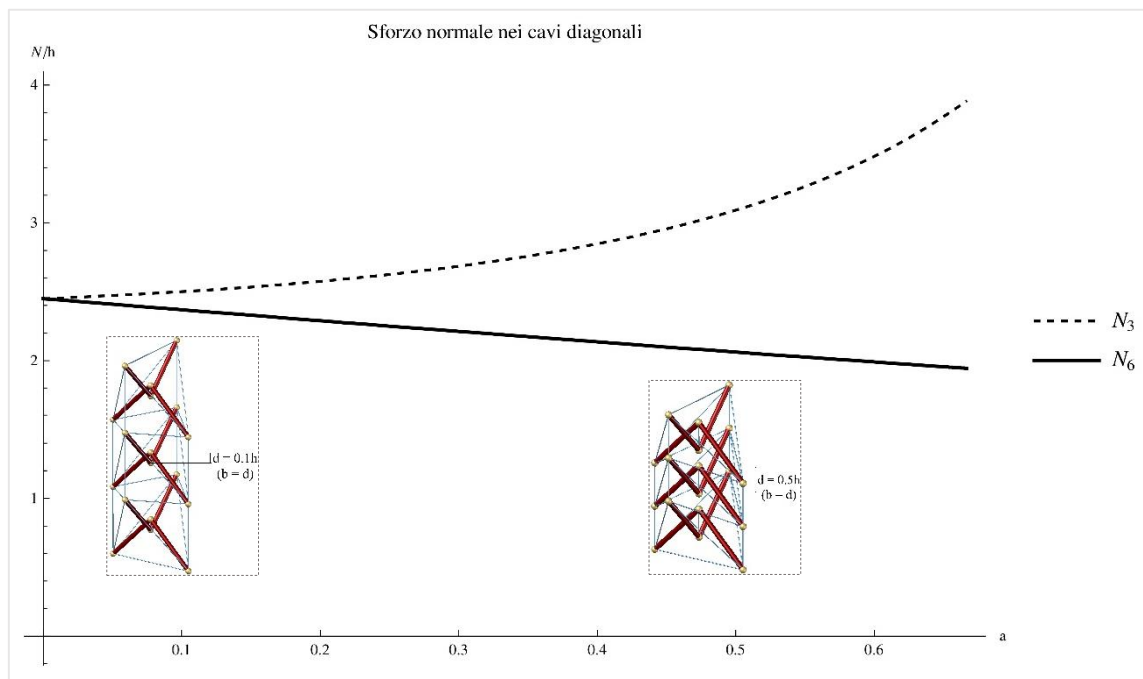


Figura 110. Sforzo normale nei cavi diagonali della Torre II.

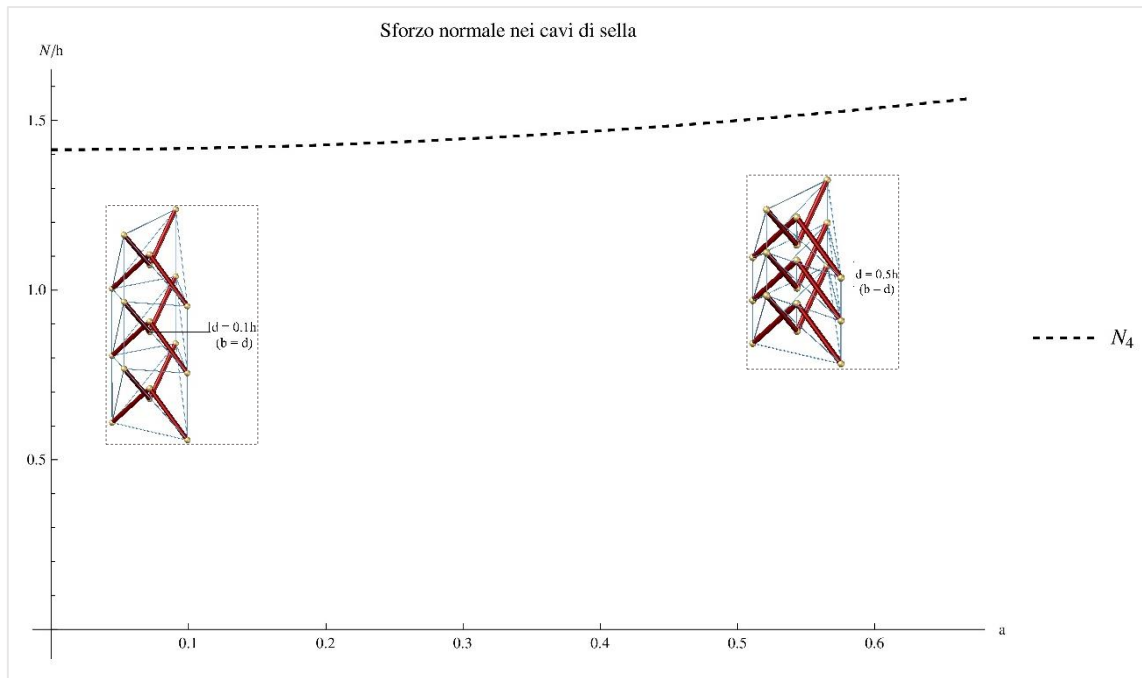


Figura 111. Sforzo normale nei cavi di sella della Torre II.

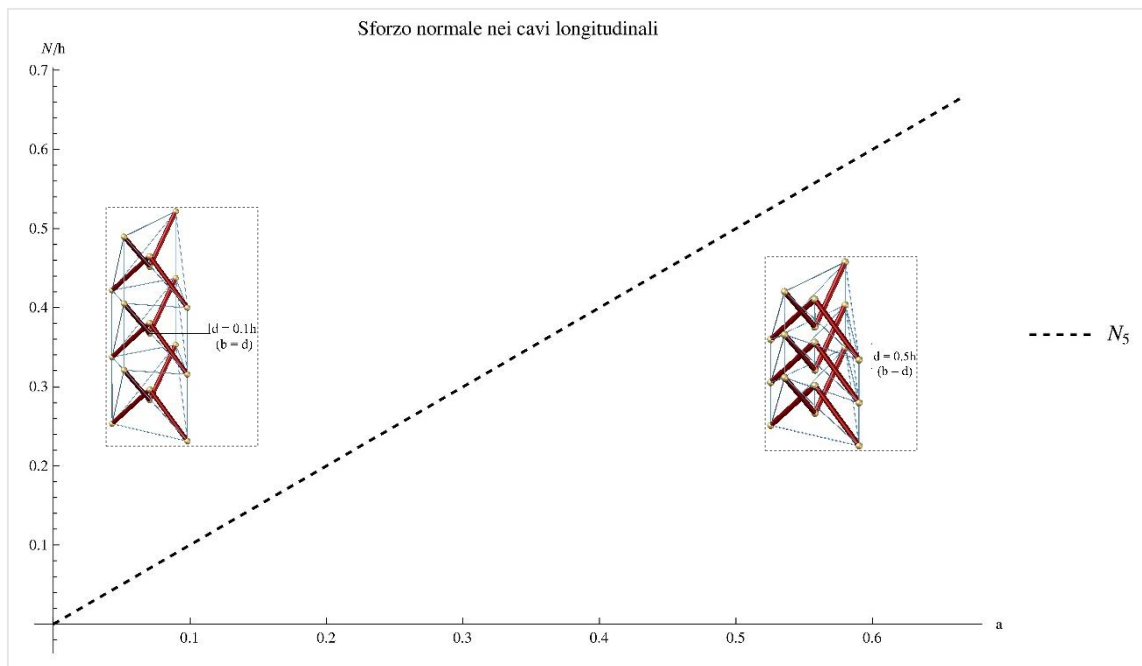


Figura 112. Sforzo normale nei cavi longitudinali della Torre II.

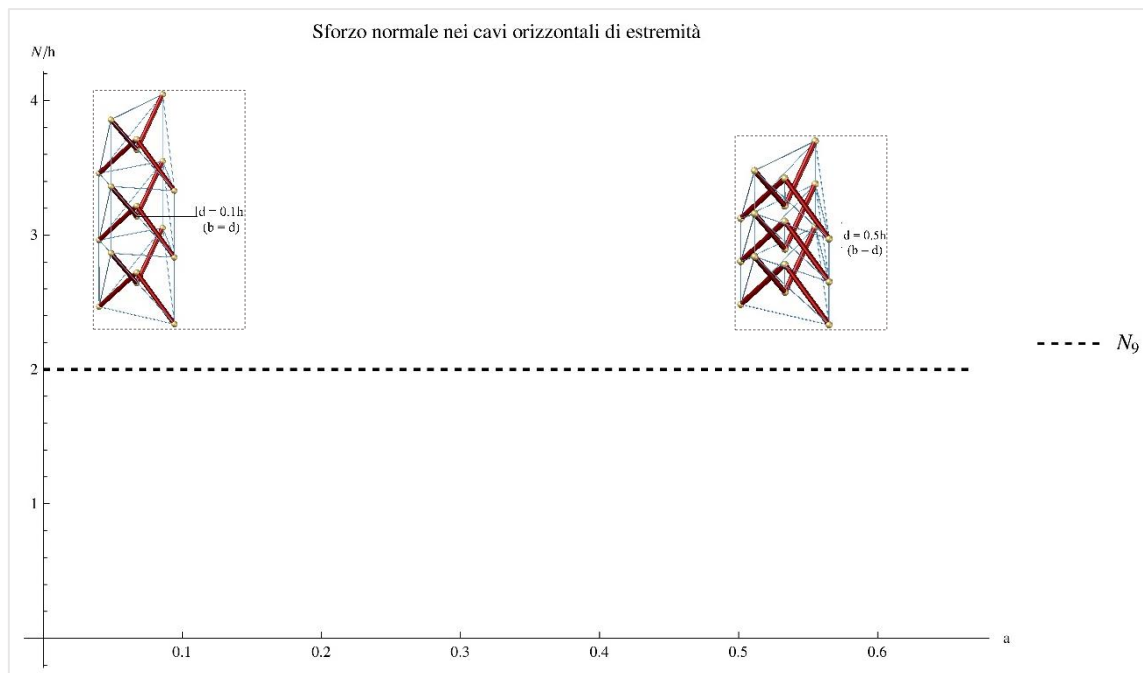


Figura 113. Sforzo normale nei cavi orizzontali di estremità della Torre II.

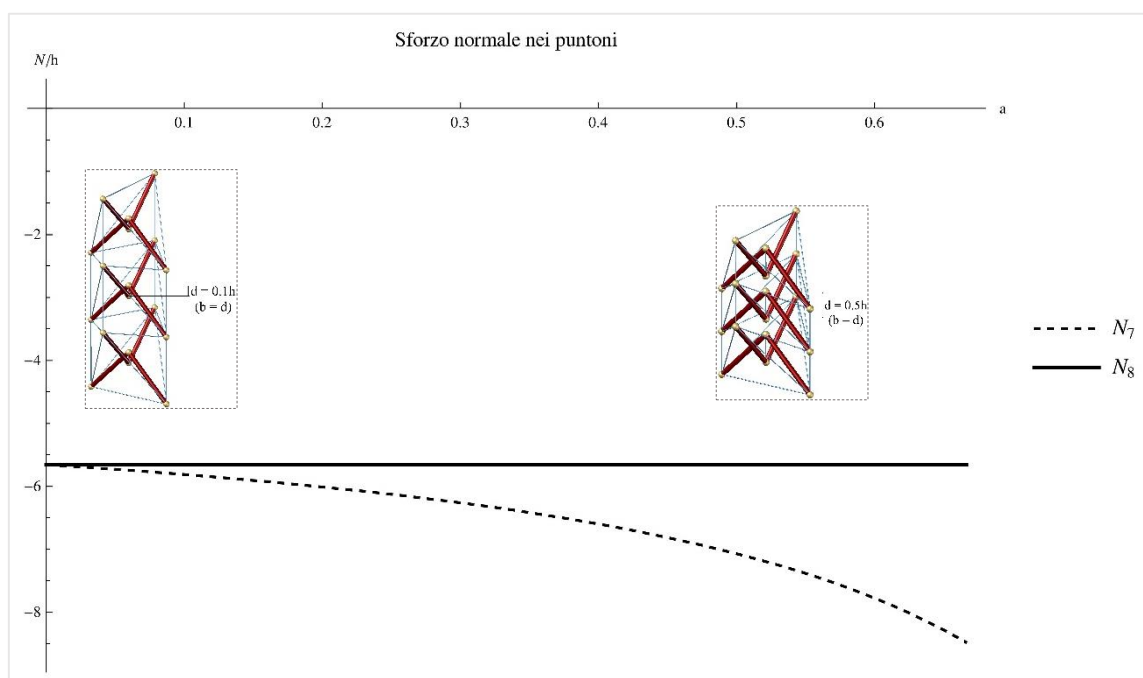


Figura 114. Sforzo normale nei puntoni della Torre II.

Per completare l'analisi, nell'ipotesi di aver fissato $b = d$ ed $r = h$, e ricordando che la lunghezza del cavo verticale può essere espressa in funzione dell'altezza del triangolo V-Expander: $d = a \times h$ ($a \in [0, 2/3]$), è possibile determinare il range entro il quale varia lo sforzo normale negli elementi della Torre II nel dominio di esistenza del parametro a (Figura 115).

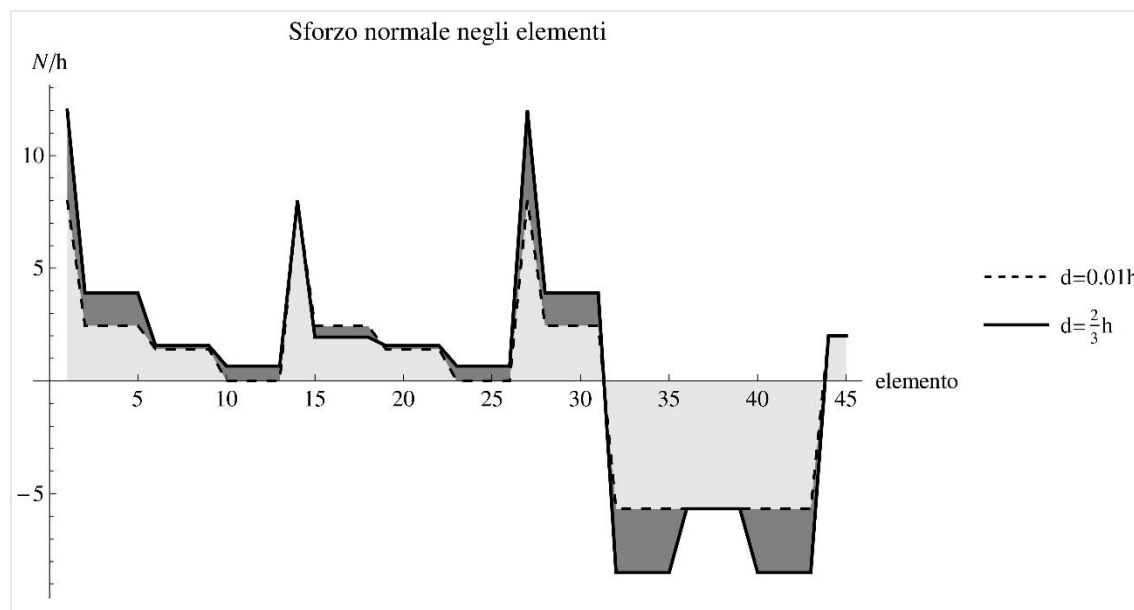


Figura 115. Variazione dello sforzo normale negli elementi della Torre II.

Nel grafico riportato in Fig. 115, l'intervallo evidenziato (campitura grigio scuro) mostra che lo sforzo normale negli elementi della Torre II, calcolato rispetto all'estremo superiore del dominio di esistenza del parametro a ($a = 2/3$), risulta essere in modulo sempre maggiore rispetto a quello calcolato per l'estremo inferiore ($a \cong 0.01$), eccezione fatta per i cavi diagonali del modulo centrale (15, 16, 17 e 18) per i quali tale tendenza si inverte.

5.5.3 *Torre III*

Determinato lo stato di auto-sollecitazione ammissibile \bar{q}_a per la Torre III, dalla (26) è possibile ottenere il vettore degli sforzi normali negli elementi \bar{n} mediante la (59). Così come mostrato per la Torre I nei precedenti paragrafi, anche per la Torre III è possibile studiare la variazione dello sforzo normale negli elementi nelle condizioni: $r = h$ e $b = d$, con $d = a \times h$ e considerando il dominio di esistenza del parametro a (Figg. 116-92).

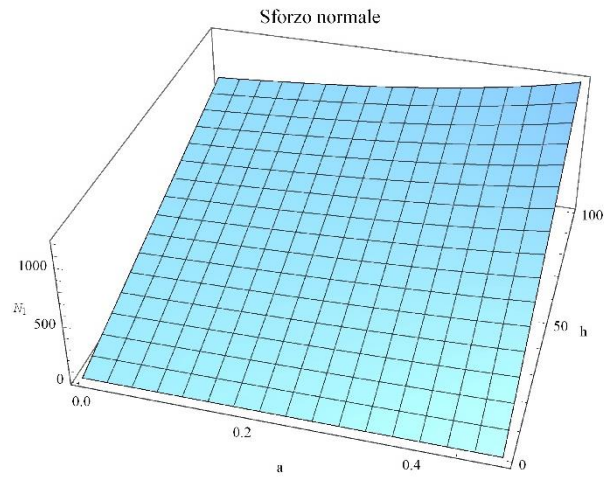


Figura 116. Sforzo normale negli elementi del gruppo 1 della Torre III.

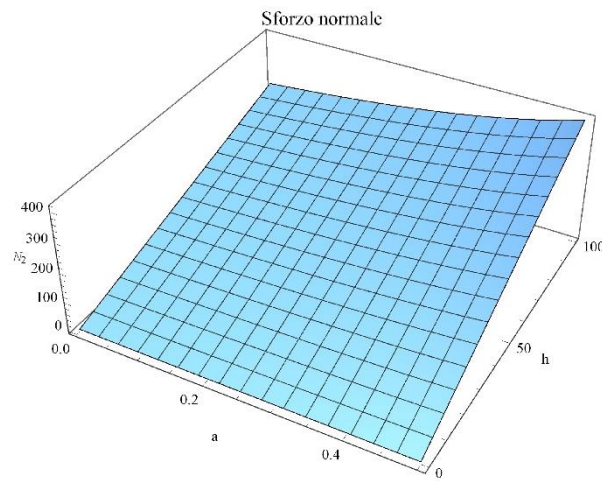


Figura 117. Sforzo normale negli elementi del gruppo 2 della Torre III.

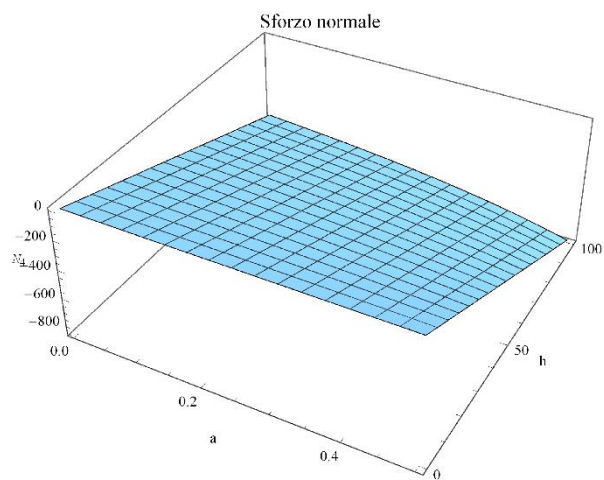


Figura 118. Sforzo normale negli elementi del gruppo 4 della Torre III.

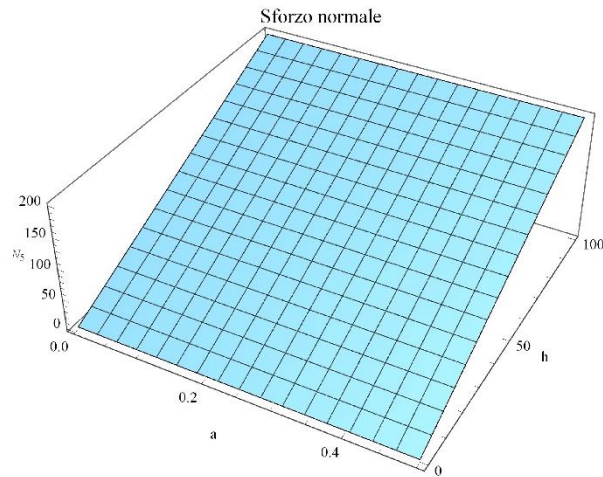


Figura 119. Sforzo normale negli elementi del gruppo 5 della Torre III.

È possibile esprimere lo sforzo normale negli elementi in funzione esclusivamente del parametro h , pertanto è possibile determinare il rapporto tra lo sforzo normale e il valore del parametro h , ovvero N_i/h ($i = 1, 2, \dots, m$). In Figg. 120 - 121 si mostrano i risultati di tale studio.

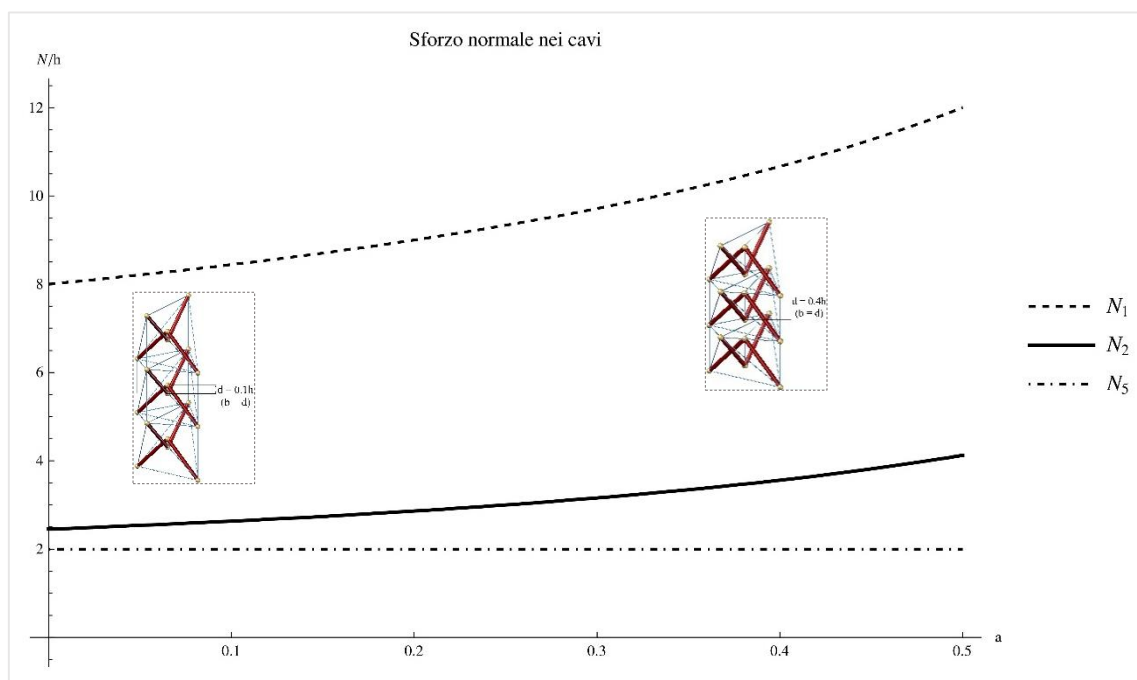


Figura 120. Sforzo normale nei cavi della Torre III.

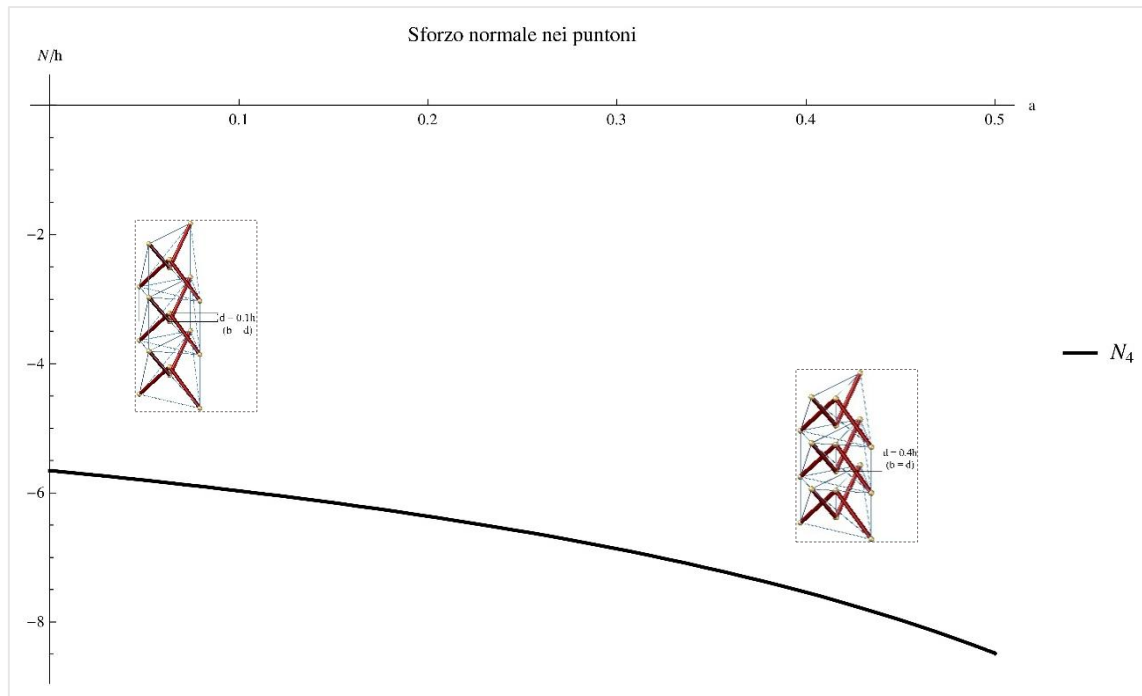


Figura 121. Sforzo normale nei puntoni della Torre III.

Infine, è possibile determinare il range entro il quale varia lo sforzo normale negli elementi della Torre III nel dominio di esistenza del parametro a ($a \in [0, 1/2]$), (Figura 122).

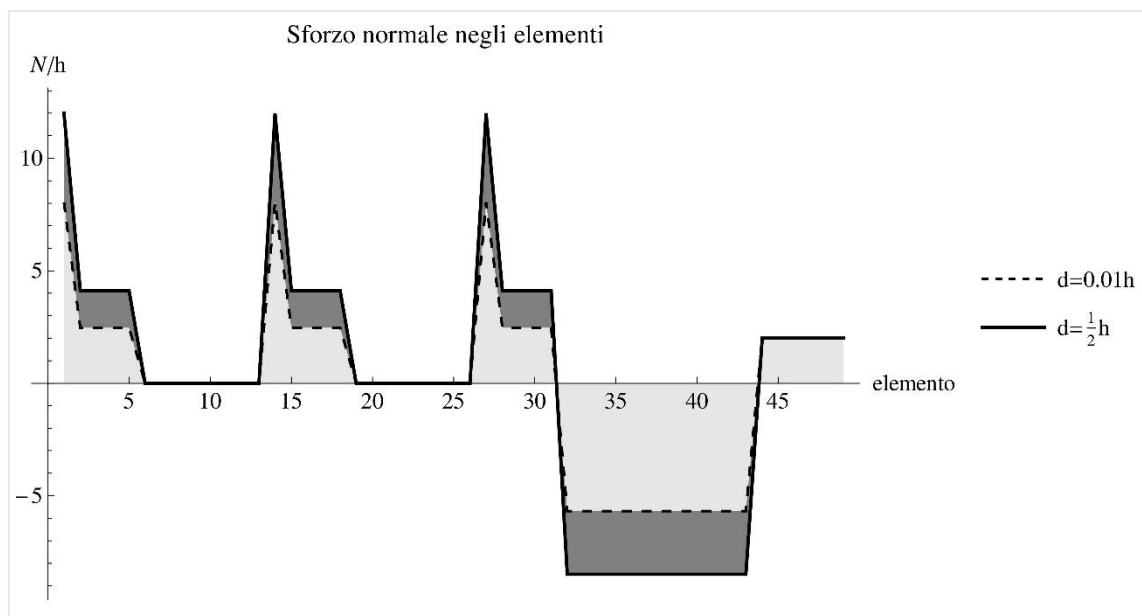


Figura 122. Variazione dello sforzo normale negli elementi della Torre III.

5.5.4 Torre IV

Determinato lo stato di auto-sollecitazione ammissibile $\bar{\mathbf{q}}_a$ per Torre IV, dalla (26) è possibile ottenere il vettore degli sforzi normali negli elementi $\bar{\mathbf{n}}$ utilizzando la (59) (Figg. 123 – 126).

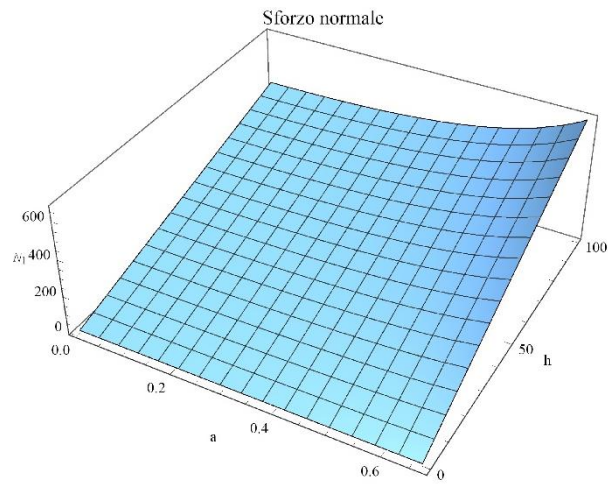


Figura 123. Sforzo normale negli elementi del gruppo 1 della Torre IV.

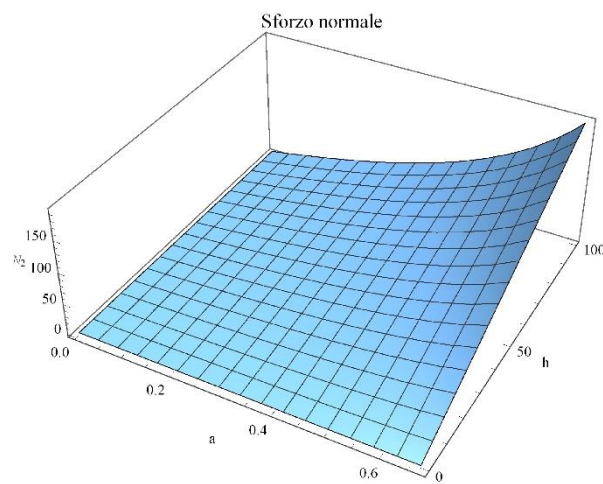


Figura 124. Sforzo normale negli elementi del gruppo 2 della Torre IV.

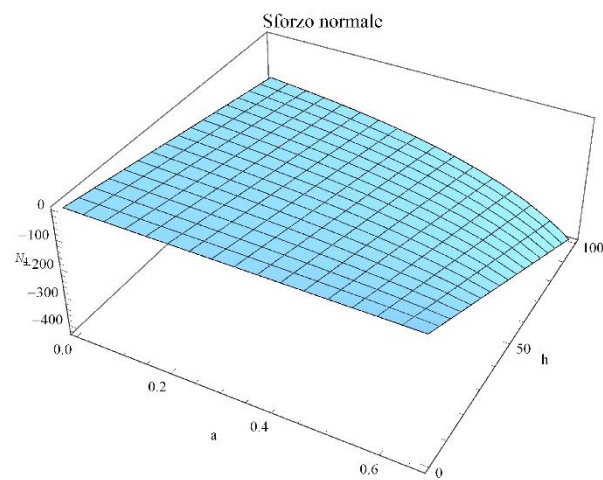


Figura 125. Sforzo normale negli elementi del gruppo 4 della Torre IV.

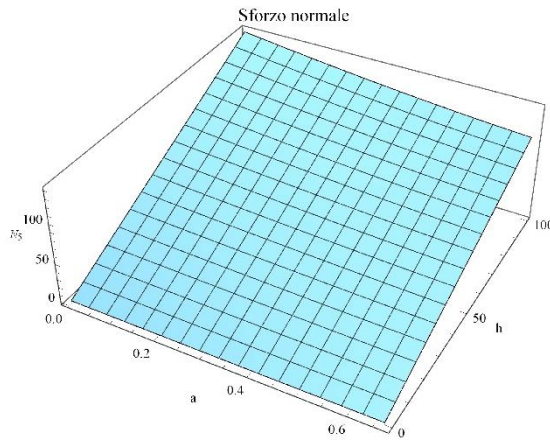


Figura 126. Sforzo normale negli elementi del gruppo 5 della Torre IV.

È possibile esprimere lo sforzo normale negli elementi in funzione esclusivamente del parametro h , pertanto è possibile determinare il rapporto tra lo sforzo normale e il valore del parametro h , ovvero N_i/h ($i = 1, 2, \dots, m$). In Figura 127 si mostrano i risultati di tale studio.

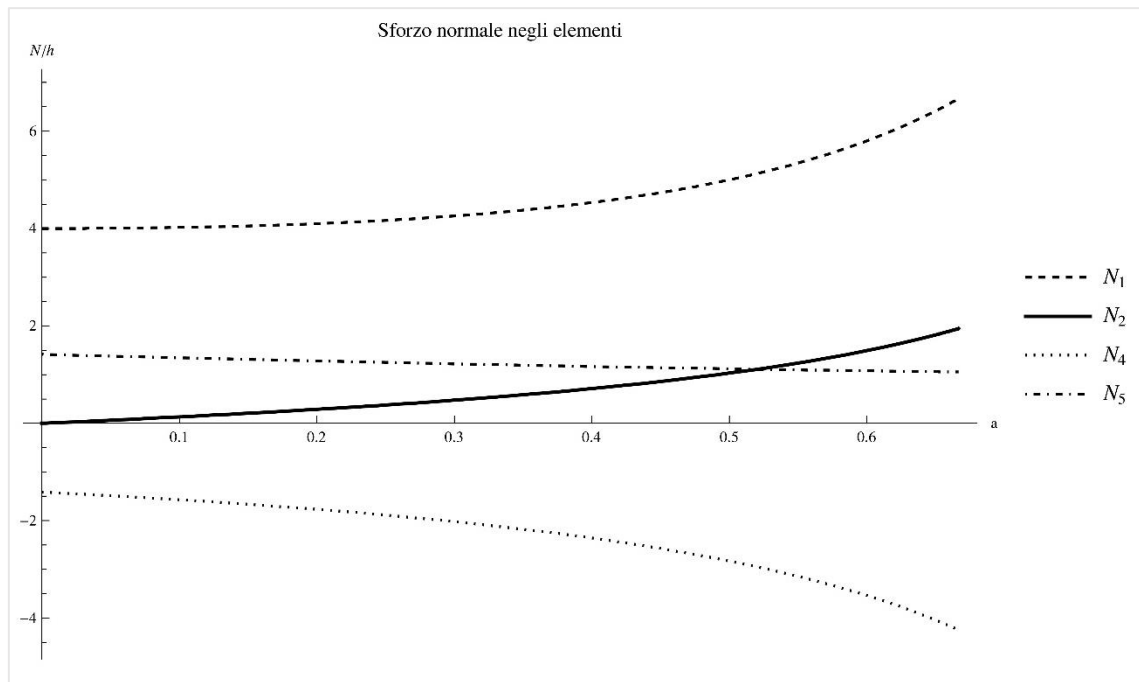


Figura 127. Sforzo normale negli elementi della Torre IV.

Infine, è possibile determinare il range entro il quale varia lo sforzo normale negli elementi della Torre IV nel dominio di esistenza del parametro a ($a \in [0, 2/3]$), (Figura 128).

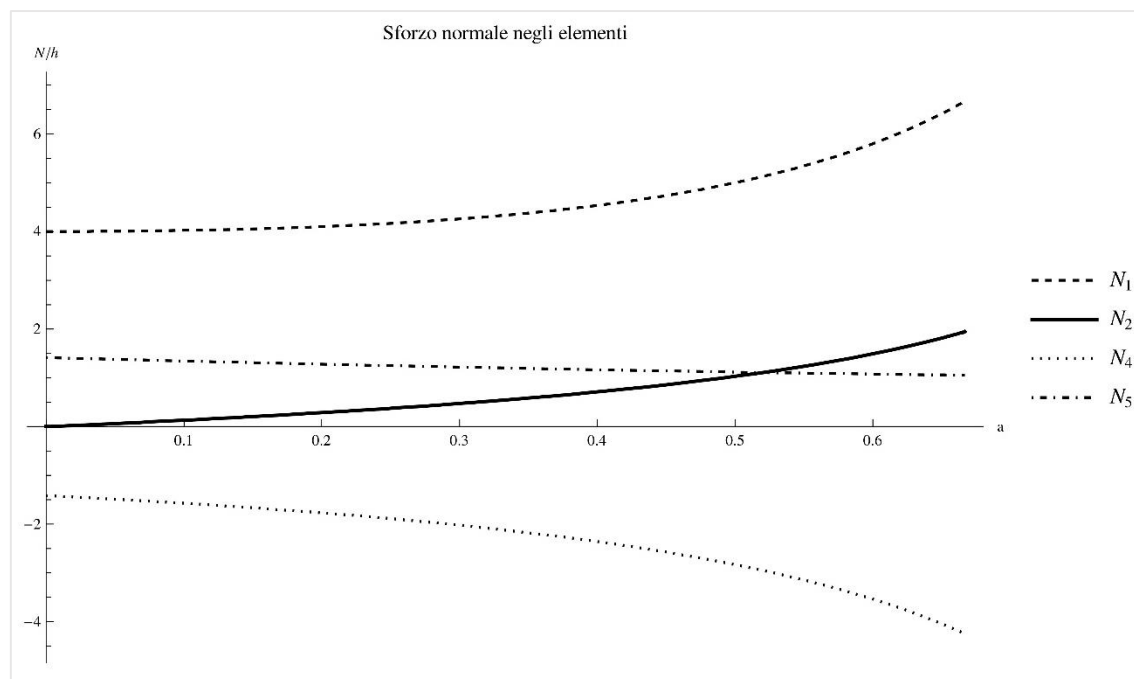


Figura 128. Variazione dello sforzo normale negli elementi della Torre IV.

5.6 STABILITÀ NELLA CONFIGURAZIONE PRE-SOLLECITATA

L'analisi cinematica, e quella statica, condotte nei precedenti paragrafi per le 4 torri studiate possono essere sintetizzate nella Tabella 28.

	n	m	s_A	m_i^{42}	Staticamente indeterminata	Cinematicamente indeterminata
Torre I	18	43	2	7	si	si
Torre II	18	45	3	6	si	si
Torre III	18	49	7	6	si	si
Torre V	18	55	7	0	si	no

Tabella 28. Caratterizzazione statica e cinematica delle torri tensegrity.

Si ricorda che, come esposto in §3.3, una struttura tensegrity si definisce stabile nella configurazione pre-sollecitata se la configurazione di auto-equilibrio è stabile nelle direzioni dei meccanismi infinitesimi.

Se la struttura è cinematicamente indeterminata (come nel caso delle Torri I, II e III) è possibile definire la forma quadratica della matrice di rigidezza geometrica calcolata rispetto alla matrice dei meccanismi

⁴² Non considerando i 6 moti rigidi nello spazio euclideo tridimensionale.

infinitesimi $\mathbf{Q}_m \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ dalla (139); tale la forma quadratica deve essere definita positiva affinché tali strutture tensegrity cinematicamente indeterminate risultino stabili nella pre-sollecitazione.

Tuttavia la struttura risulta stabile se la rigidità assiale degli elementi è sufficientemente grande rispetto alla rigidità geometrica dovuta alla pre-sollecitazione, poiché come richiamato in §3.3, in questa condizione la forma quadratica della matrice di rigidità lineare, che dipende dalla rigidità assiale degli elementi, è dominante rispetto alla forma quadratica della matrice di rigidità geometrica, che è funzione della rigidità geometrica legata alla pre-sollecitazione.

Nel caso di strutture cinematicamente determinate (come nel caso della Torre IV), ossia risulta $m_i = 0$, la forma quadratica della matrice di rigidità geometrica è nulla. Tuttavia anche tali strutture sono definite stabili nella pre-sollecitazione.

Per quanto detto, di seguito si riporta lo studio delle condizioni di stabilità della pre-sollecitazione esclusivamente delle prime tre torri.

5.6.1 Torre I

La Torre I è staticamente e cinematicamente indeterminata, ovvero esistono 2 stati di auto-sollecitazione equilibrati \mathbf{q}_0 che giacciono nello spazio nullo della matrice di equilibrio \mathbf{A} e 7 meccanismi infinitesimi (ad esclusione dei 6 moti rigidi) che generano lo spazio nullo della matrice cinematica \mathbf{B} .

Dalla (139) si ricava la forma quadratica della matrice di rigidità geometrica espressa rispetto a tali meccanismi $\mathbf{Q}_m \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ e si impone che tale matrice sia definita positiva, ovvero che risultino strettamente positivi gli autovalori corrispondenti ai meccanismi infinitesimi.

La matrice di rigidità geometrica $\mathbf{K}_G \in \mathbb{R}^{54 \times 54}$, dalla (108), risulta essere pari a:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s & \mathbf{0}_{18} & \mathbf{0}_{18} \\ \mathbf{0}_{18} & \mathbf{D}_s & \mathbf{0}_{18} \\ \mathbf{0}_{18} & \mathbf{0}_{18} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix}, \quad (256)$$

avendo determinato la matrice di densità di forza $\mathbf{D}_s \in \mathbb{R}^{18 \times 18}$ mediante la (34), ponendo $b = d$, $r = h$ e con la limitazione $b < (2h - 2d)$.

La matrice di rigidità geometrica \mathbf{K}_G risulta essere indefinita per ogni valore del parametro a compreso nel suo dominio di definizione, ossia $0 < a < 2/3$. Ciò implica che la Torre I non risulta stabile nella pre-sollecitazione. Ciò comporta anche che tale torre proposta da Buckminster Fuller non è super-stabile, poiché la super-stabilità è una condizione più restrittiva della stabilità della pre-sollecitazione.

5.6.2 Torre II

La Torre II risulta essere staticamente e cinematicamente indeterminata, ovvero esistono 3 stati di auto-sollecitazione equilibrati \mathbf{q}_0 che giacciono nello spazio nullo della matrice di equilibrio e 6 meccanismi infinitesimi (ad esclusione dei 6 moti rigidi) che generano lo spazio nullo della matrice cinematica.

È necessario pertanto valutare, anche per tale struttura, la stabilità di tale configurazione nella direzione dei meccanismi infinitesimi. Dalla (139) si ricava la forma quadratica della matrice di rigidezza geometrica espressa rispetto a tali meccanismi $\mathbf{Q}_m \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ e si impone che tale matrice sia definita positiva, ovvero che risultino maggiori di zero gli autovalori corrispondenti ai meccanismi infinitesimi.

La matrice di rigidezza geometrica $\mathbf{K}_G \in \mathbb{R}^{54 \times 54}$, dalla (108), risulta essere pari a:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s & \mathbf{0}_{18} & \mathbf{0}_{18} \\ \mathbf{0}_{18} & \mathbf{D}_s & \mathbf{0}_{18} \\ \mathbf{0}_{18} & \mathbf{0}_{18} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix}, \quad (257)$$

avendo determinato la matrice di densità di forza $\mathbf{D}_s \in \mathbb{R}^{18 \times 18}$ mediante la (34), ponendo $b = d$, $r = h$ e con la limitazione $b < (2h - 2d)$.

Gli autovalori non nulli risultano essere strettamente positivi se e solo se i parametri geometrici che definiscono la struttura sono tali per cui: $[0 < a < 2/3 \wedge h > 0]$, ciò risulta evidentemente compatibile con la definizione parametrica della struttura (Figura 129).

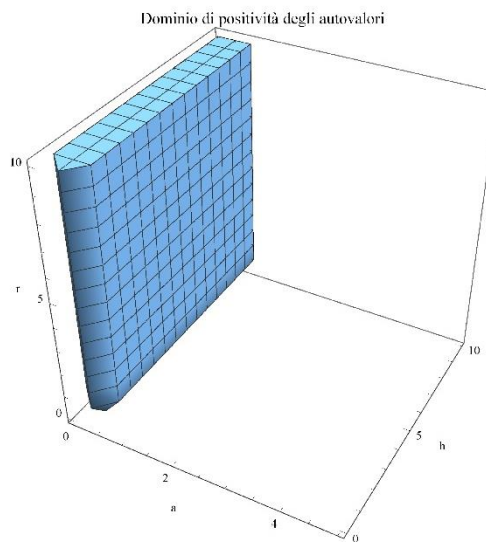


Figura 129 Dominio positività degli autovalori di \mathbf{Q}_m .

Ciò implica che la Torre II è stabile nella pre-sollecitazione per qualsiasi valore del parametro a , compreso nel proprio dominio di definizione.

5.6.3 Torre III

La Torre III risulta essere staticamente e cinematicamente indeterminata, ovvero esistono 7 stati di auto-sollecitazione equilibrati \mathbf{q}_0 che giacciono nello spazio nullo di \mathbf{A} e 6 meccanismi infinitesimi (eccezion fatta per i 6 moti rigidi) che generano il nucleo di \mathbf{B} .

È necessario pertanto valutare, anche per la Torre III, le condizioni di stabilità della configurazione pre-sollecitata, ovvero studiare la stabilità di tale configurazione nella direzione dei meccanismi infinitesimi.

Dalla (139) si ricava la forma quadratica della matrice di rigidezza geometrica espressa rispetto a tali meccanismi $\mathbf{Q}_m \in \mathbb{R}^{m_i \times m_i}$ e si impone che tale matrice sia definita positiva, ossia che risultino maggiori di zero gli autovalori corrispondenti ai meccanismi infinitesimi.

La matrice di rigidezza geometrica $\mathbf{K}_G \in \mathbb{R}^{54 \times 54}$, dalla (108), risulta essere pari a:

$$\mathbf{K}_G = \mathbf{I}_3 \otimes \mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_s & \mathbf{0}_{18} & \mathbf{0}_{18} \\ \mathbf{0}_{18} & \mathbf{D}_s & \mathbf{0}_{18} \\ \mathbf{0}_{18} & \mathbf{0}_{18} & \mathbf{D}_s \end{bmatrix}, \quad (258)$$

avendo determinato la matrice di densità di forza $\mathbf{D}_s \in \mathbb{R}^{18 \times 18}$ mediante la (34), ponendo $b = d$, $r = h$ e con la limitazione $b < (h - d)$.

Gli autovalori non nulli risultano essere strettamente positivi, ricordando la (189), se e solo se i parametri geometrici che definiscono la struttura sono tali per cui: $[0 < a < 1/2 \wedge h > 0]$, ciò risulta evidentemente compatibile con la definizione parametrica della struttura (Figura 130).

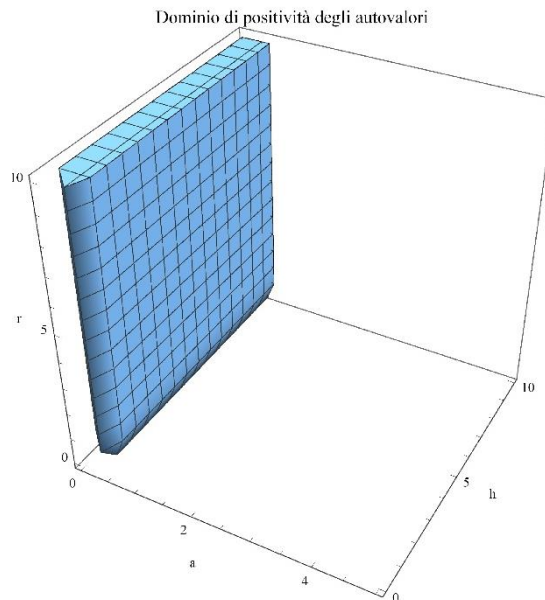


Figura 130 Dominio positività degli autovalori di \mathbf{Q}_m .

Ciò implica che la Torre III è stabile nella pre-sollecitazione per qualsiasi valore del parametro a , nel proprio dominio di definizione.

5.6.4 Torre IV

La Torre IV risulta essere staticamente indeterminata e cinematicamente determinata, ovvero esistono 7 stati di auto-sollecitazione equilibrati \mathbf{q}_0 che giacciono nello spazio nullo della matrice di equilibrio \mathbf{A} e nessun meccanismo infinitesimo (ad esclusione dei 6 moti rigidi) nel nucleo della matrice cinematica \mathbf{B} . Per quanto detto nel capitolo 3, la Torre IV risulta essere stabile nella pre-sollecitazione; se inoltre il livello

della pre-sollecitazione è relativamente basso rispetto alla rigidezza assiale degli elementi, la struttura risulta essere stabile.

5.7 SUPER-STABILITÀ

Si ricorda che una struttura tensegrity si definisce super-stabile se risulta essere stabile nello stato di auto-equilibrio (minimo locale dell'energia potenziale totale) indipendentemente dalle proprietà meccaniche del materiale e dal livello della pre-sollecitazione.

In §3.4 si definisce super-stabile una struttura tensegrity se si verificano le seguenti condizioni:

1. Il rango della matrice geometrica r_G è pari a 6,
2. La nullità della matrice di densità di forza n_{D_s} è pari a 4,
3. La matrice di densità di forza \mathbf{D}_s è semi-definita positiva.

Di seguito si riportano le analisi relative alle condizioni di super stabilità per le torri studiate in questo capitolo.

5.7.1 Torre I

La matrice geometrica \mathbf{G} della Torre I ha rango massimo e pertanto la torre risulta non degenerare nello spazio euclideo tridimensionale.

Il rango della matrice di densità di forza r_{D_s} è pari a 14 pertanto la dimensione dello spazio nullo di tale matrice è pari a 4.

Tuttavia la matrice di densità di forza \mathbf{D}_s è indefinita. Ciò implica che la Torre I non è super-stabile; tale discussione conferma evidentemente quanto esposto in §5.6.1.

5.7.2 Torre II

Dalla (229) si ricorda che il rango della matrice geometrica \mathbf{G} è pari a 6; inoltre il rango della matrice di densità di forza \mathbf{D}_s risulta essere pari a 14 e pertanto anche la condizione sulla nullità della matrice di densità di forza è rispettata.

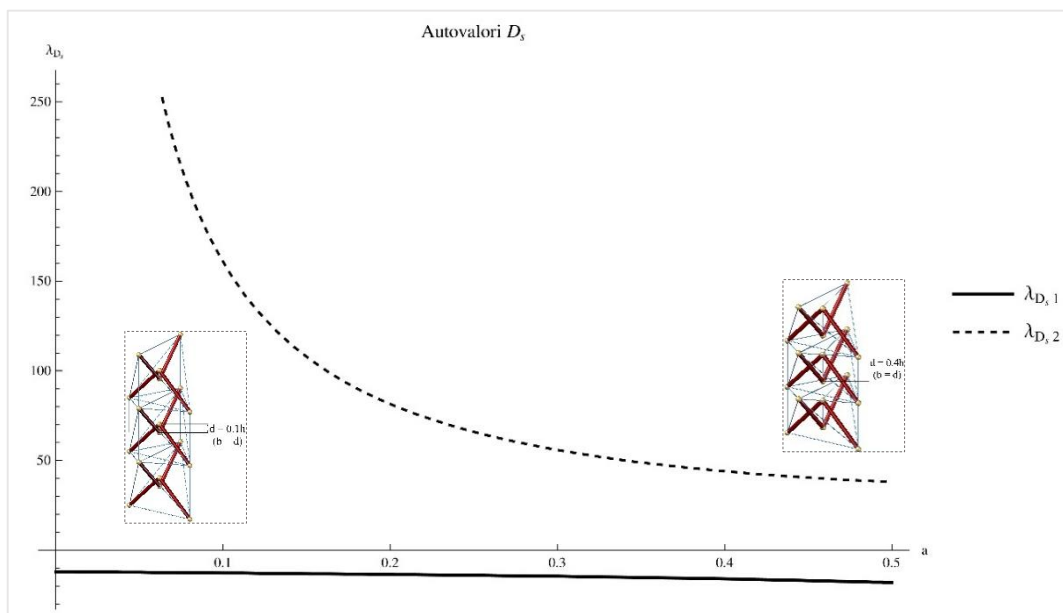
La matrice di densità di forza risulta, anche in questo caso, indefinita, ciò implica che la Torre II non è super-stabile.

5.7.3 Torre III

Dal calcolo degli autovalori della matrice di densità di forza $\mathbf{D}_s \in \mathbb{R}^{18 \times 18}$ per la Torre III si ottiene:

$$\{\lambda_{D_s,i}\} = \left\{ \begin{array}{l} 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \\ -\frac{6(a^2-2a)}{(a-1)a}, -\frac{6(a^2-2a)}{(a-1)a}, -\frac{6(a^2-2a)}{(a-1)a}, -\frac{2(3a^2-8a+8)}{(a-1)a}, -\frac{2(3a^2-8a+8)}{(a-1)a}, -\frac{2(3a^2-8a+8)}{(a-1)a} \end{array} \right\}, \quad (236)$$

in cui gli autovalori non nulli λ_{D_s1} e λ_{D_s2} variano col parametro a come mostrato in Figura 131.


 Figura 131 Autovalori di \mathbf{D}_s .

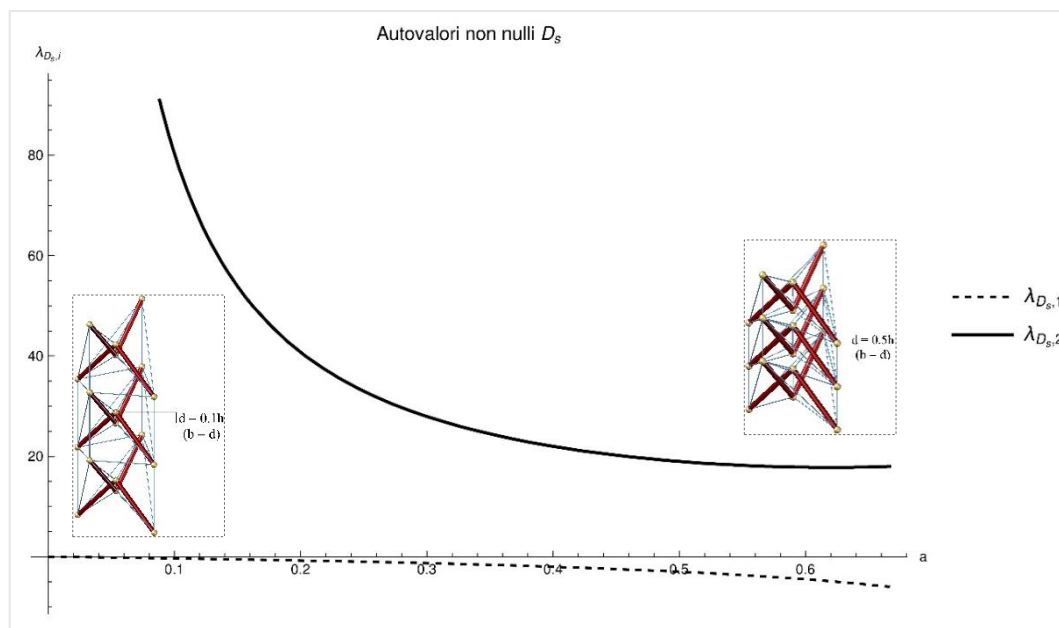
Si ottiene quindi che non esiste alcun valore del parametro a che rende positivi entrambi gli autovalori della matrice di densità di forza \mathbf{D}_s , pertanto la Torre III non è super-stabile.

5.7.4 Torre IV

Dal calcolo degli autovalori della matrice di densità di forza $\mathbf{D}_s \in \mathbb{R}^{18 \times 18}$ per la Torre IV si ottiene:

$$\{\lambda_{D_s,i}\} = \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{3a}{a-1}, \frac{3a}{a-1}, \frac{3a}{a-1}, -\frac{3a^2-8a+8}{(a-1)a}, -\frac{3a^2-8a+8}{(a-1)a}, -\frac{3a^2-8a+8}{(a-1)a} \right\}, \quad (237)$$

in cui gli autovalori non nulli λ_{D_s1} e λ_{D_s2} variano col parametro a come mostrato in Figura 132.


 Figura 132 Autovalori di D_s .

Si ottiene quindi che non esiste alcun valore del parametro a che rende positivi entrambi gli autovalori della matrice di densità di forza D_s , pertanto la Torre IV non è super-stabile.

5.8 CONCLUSIONI

In questo capitolo è stato studiato il comportamento meccanico di strutture tensegrity costruite per assemblaggio a torre di alcune delle celle innovative V-Expander proposte. La morfologia di tali casi applicativi si ispira ad un noto esempio di struttura tensegrity realizzata circa 60 anni fa, il *Tensegrity mast*. Il “*Tensegrity mast*”, alto circa 14 m, è realizzato con barre in una lega di nichel e rame denominata *Monel metal*, e puntoni in alluminio a sezione tubolare, ed è formata dalla giustapposizione di 20 unità tetraedriche. Tali informazioni possono essere dedotte dalla scheda descrittiva riportata nel catalogo dell’esposizione “*Three Structures by Buckminster Fuller*” allestita presso *The Museum of Modern Art (MoMA)* di New York [2] (Figura 133).

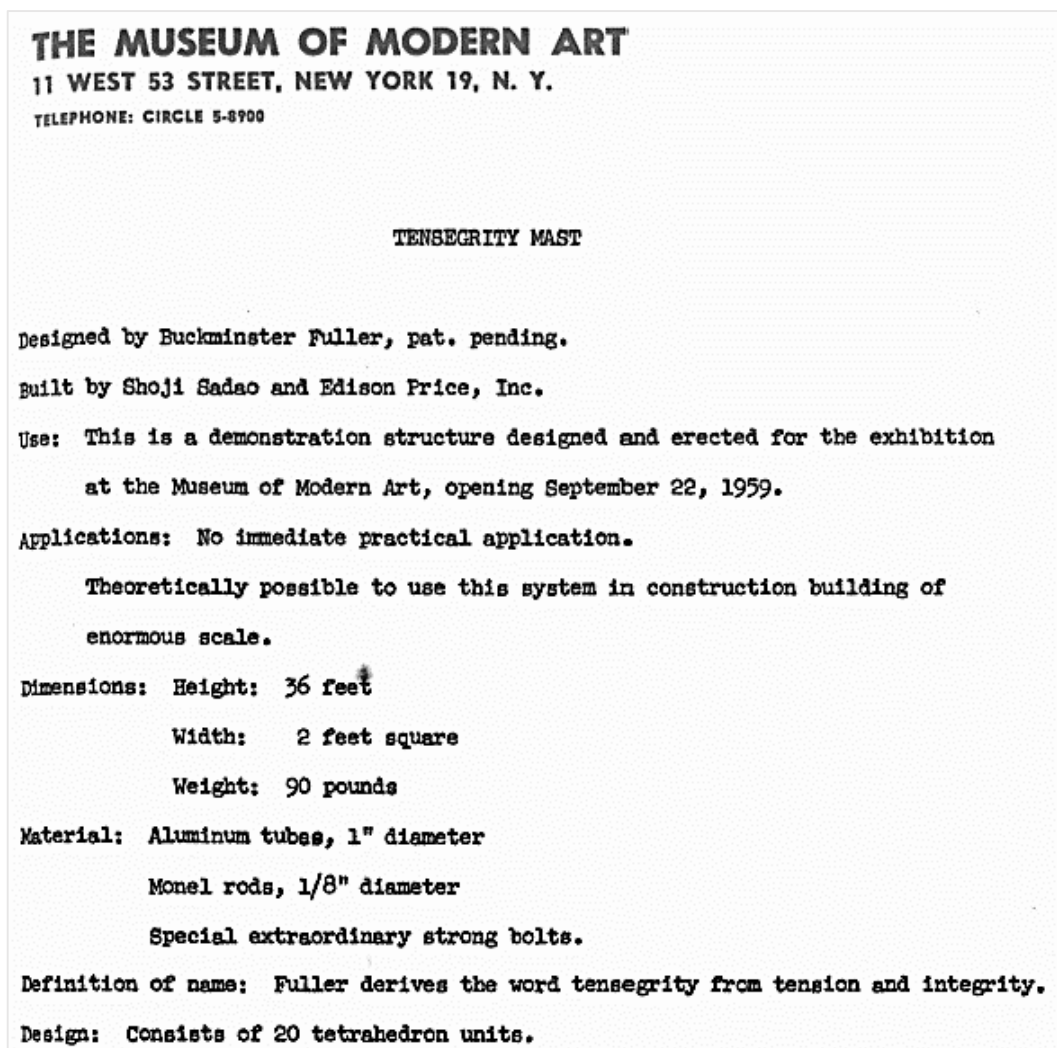


Figura 133. Estratto del catalogo dell'esposizione "Three Structures by Buckminster Fuller".

Come si evince dalla Fig. 133, non si hanno informazioni dettagliate sulle caratteristiche geometriche della struttura, e tantomeno si conoscono con precisione le proprietà meccaniche dei materiali utilizzati, ciò consentirebbe di effettuare un'analisi accurata del comportamento meccanico del mast.

Si ricorda che tale descrizione fa riferimento alla soluzione I del Tensegrity mast progettata da Buckminster Fuller, e realizzata da Shoji Sadao e dalla Edison Price, Inc.. Un'ulteriore descrizione, seppur qualitativa, del comportamento meccanico del Tensegrity mast è riportata in Figura 134 (come evidenziato dal riquadro in rosso).

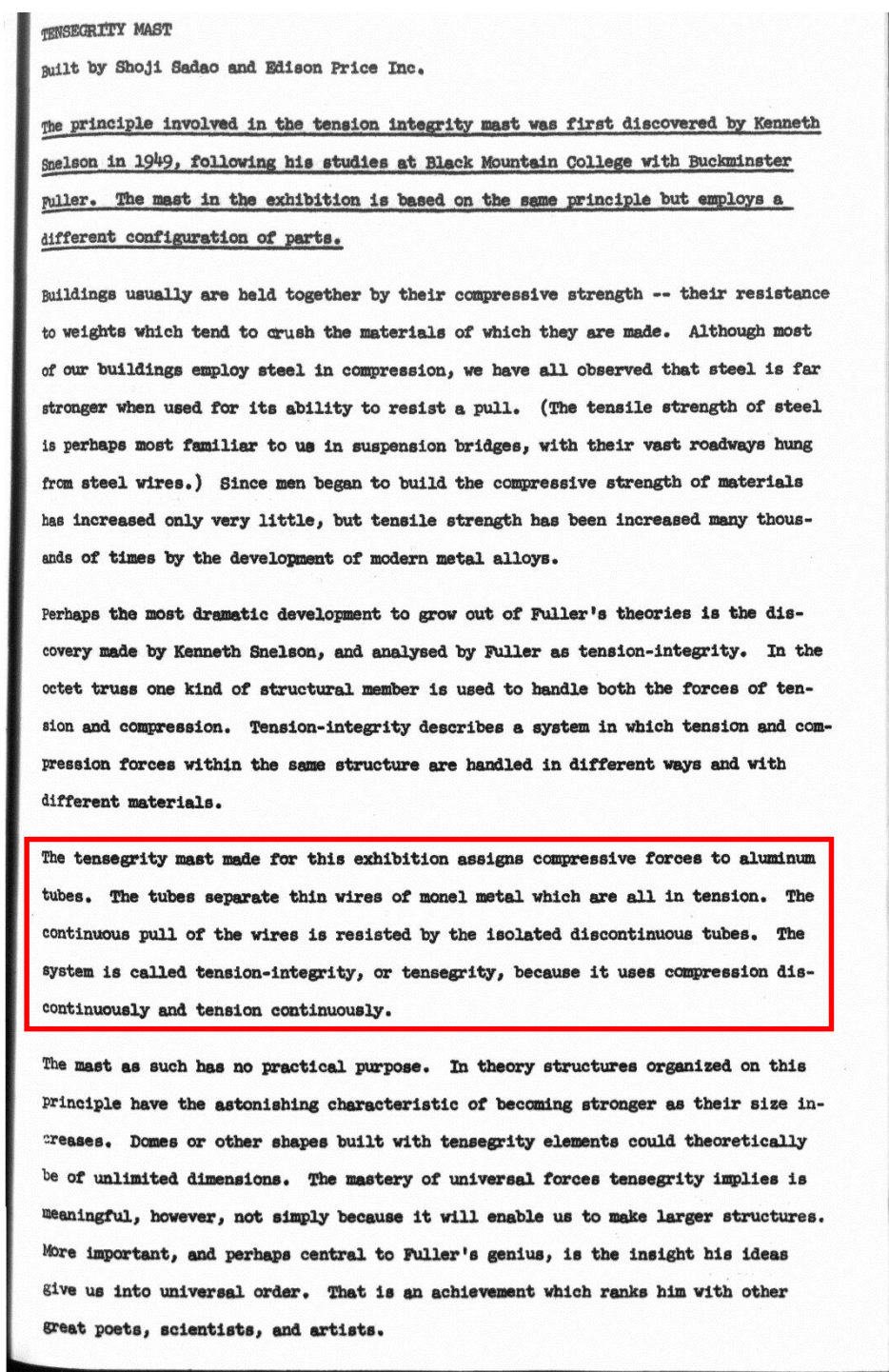


Figura 134. Estratto n.2 del catalogo dell'esposizione "Three Structures by Buckminster Fuller".

Si afferma che nel Tensegrity mast realizzato per l'esposizione del MoMA i puntoni tubolari in alluminio risultano compressi, mentre i sottili cavi in *monel metal* sono tutti tesi.

Al momento della scrittura di questo lavoro, non è stata trovata una descrizione, seppur qualitativa, della soluzione II del Tensegrity mast realizzata da Buckminster Fuller (Fig. 59).

Non c'è motivo, tuttavia, di supporre che siano stati utilizzati elementi con caratteristiche geometriche differenti, e/o materiali diversi, per la realizzazione di tale soluzione. Per quanto si conosce, inoltre, non

esiste alcuno studio analitico del comportamento meccanico della soluzione II in grado di definire compiutamente le caratteristiche della sollecitazione negli elementi della torre.

Dallo studio effettuato in questo capitolo emerge che la seconda soluzione del Tensegrity mast, ovvero la Torre I, nello stato di auto-sollecitazione ammissibile non rispetta la definizione di struttura tensegrity, in quanto alcuni cavi risultano compressi e alcuni puntoni tesi; viene meno pertanto la struttura della rete continua di trazione al cui interno fluttuano gli elementi compressi. Per di più, dall'analisi delle matrici di rigidezza della struttura (in particolare dal calcolo degli autovalori della forma quadratica della matrice di rigidezza geometrica calcolata rispetto ai meccanismi infinitesimi) si evince che la struttura non è stabile nella pre-sollecitazione. Ciò implica quindi che tale torre non è super-stabile.

Ciò detto, sono state proposte tre ulteriori torri che discendono morfologicamente dalla Torre I, e che si ottengono aggiungendo dei cavi a tale torre o assemblando alcune celle elementari proposte nel capitolo 4 (Variante I e Variante III) ritenute più idonee ad assemblaggi di tale tipologia.

Analogamente a quanto svolto nel capitolo precedente, l'analisi è stata condotta considerando una descrizione parametrica della configurazione geometrica della struttura (r , h , d e b), ottenendo in tal modo la soluzione analitica del problema statico dell'auto-equilibrio ammissibile e di quello cinematico.

Ponendo, senza perdere di generalità, delle relazioni fra i parametri geometrici che definiscono la geometria di ciascuna torre, sono stati determinati i meccanismi infinitesimi che generano il nucleo della matrice di compatibilità e le basi dello spazio nullo della matrice di equilibrio. Inoltre, sono state determinate le condizioni relative alla stabilità della pre-sollecitazione e alla super-stabilità.

Si riportano di seguito i diagrammi di confronto degli sforzi normali negli elementi delle torri II, III e IV per i due valori del parametro a considerati per la valutazione del range di tale caratteristica di sollecitazione, ossia per $a \cong 0.01$ (Figura 135) e per $a = 2/3$ ($1/2$ per la Torre III) (Figura 136). Per un opportuno confronto si riporta lo sforzo normale negli elementi che le torri in esame hanno in comune. La Per quanto detto in precedenza e per i risultati ottenuti nell'analisi svolta in questo capitolo, si omettono i valori relativi allo sforzo normale negli elementi della Torre I.

Nel primo caso, $a \cong 0.01$, si osserva che gli elementi della Torre II e della Torre III hanno un valore molto simile dello sforzo normale, ad eccezione dei cavi di sella della Torre III nei quali tale caratteristica della sollecitazione è nulla. Si evidenzia inoltre un'elevata differenza tra le sollecitazioni di trazione nei cavi, con i valori massimi raggiunti nei cavi verticali.

Per quanto riguarda la Torre IV, si osserva che, lo sforzo normale negli elementi è inferiore rispetto a quello determinato nei corrispondenti elementi delle altre torri; pertanto si può affermare che in questa torre si ha una più omogenea distribuzione degli sforzi normali, di trazione e compressione, negli elementi.

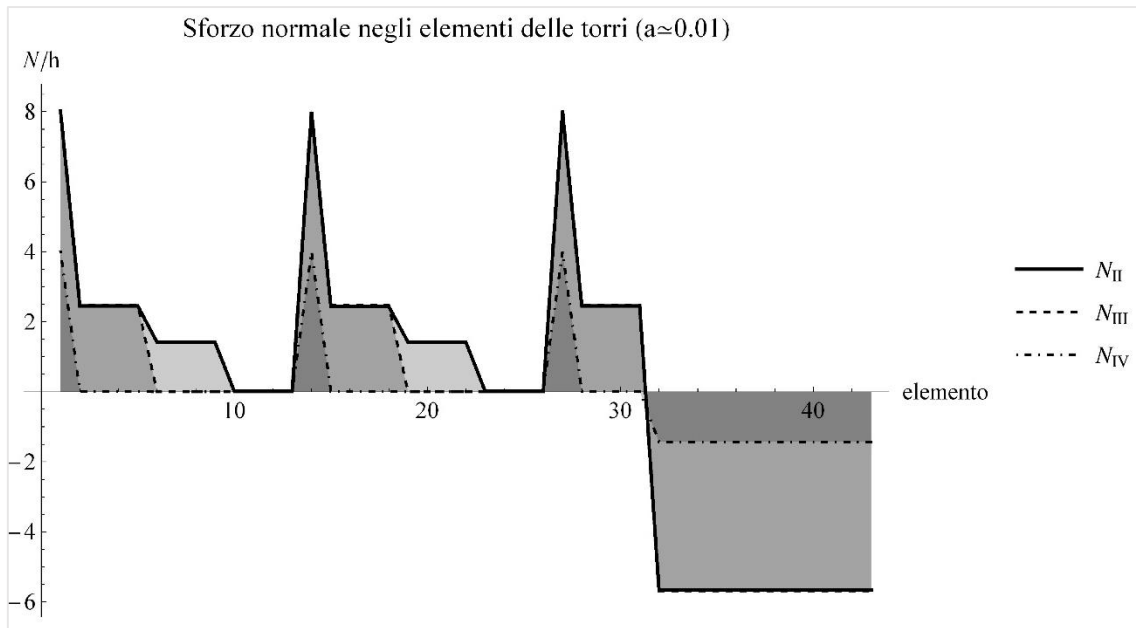


Figura 135. Variazione dello sforzo normale negli elementi delle torri per $a \approx 0.01$.

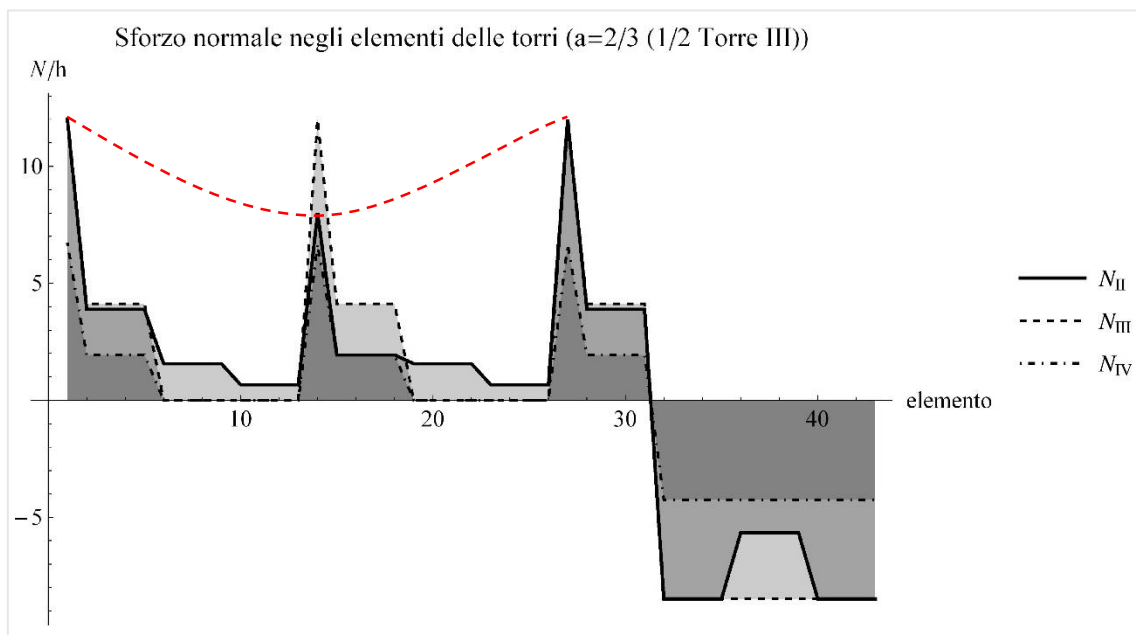


Figura 136. Variazione dello sforzo normale negli elementi delle torri per $a = 2/3$ (1/2 Torre III).

Anche nel caso in cui si considera il massimo valore che il parametro $a = d/h$ può raggiungere, si osserva che le sollecitazioni più basse negli elementi si hanno nella Torre IV, contestualmente ad una più omogenea distribuzione degli sforzi di trazione e compressione tra gli elementi di tale torre.

Considerando la Torre II si può notare un andamento del tipo “a clessidra” degli sforzi normali negli elementi: se si considerano, ad esempio, i cavi verticali (Fig. 136, linea tratteggiata in rosso) delle celle di estremità, questi hanno uno sforzo di trazione maggiore di quello del cavo verticale della cella centrale;

pertanto, elementi analoghi risultano maggiormente sollecitati nelle celle di estremità, registrando il valore minimo in corrispondenza della cella centrale.

In definitiva la Torre IV, realizzata mediante assemblaggio di tre celle V-Expander denominate Variante III, rispetto alle torri II e III presenta, a parità di valenza massima, sollecitazioni minori negli elementi, ciò la rende preferibile rispetto alle altre soluzioni analizzate.

Tuttavia, nessuna delle quattro torri risulta super-stabile, ossia stabile nella pre-sollecitazione indipendentemente dal livello di pre-sollecitazione e dalle caratteristiche dei materiali; pertanto è necessario proseguire nello studio di tali assemblaggi per riuscire a determinare torri Tensegrity che risultino super-stabili.

Bibliografia

- [1] MoMA Exhibition – 0649. The Museum of Modern Art Archives, New York, Settembre 1959-60.
- [2] MoMA Exhibition – 0079. The Museum of Modern Art Archives, New York, Settembre 1959-60.
- [3] S. PFEIFER, *Fuller and Noguchi: storia di un'amicizia*, in “Domusweb”, 2011. (<http://www.domusweb.it/en/interviews/2011/09/01/fuller-and-noguchi-story-of-a-friendship.html>).
- [4] R. BUCKMINSTER FULLER, E. J. APPLEWHITE, A. L. LOEB, *Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking*, Sebastopol (CA), Macmillan Publishing Co. Inc., 1975.
- [5] R. MOTRO, *Tensarch Project*, in “Proceedings of Fifth International Conference on Space Structures”, 2003, pp. 57-66.
- [6] V. RADUCANU, R. MOTRO, *Systeme à autoequilibre stable pour element de construction*. Demande de brevet francais n° 01 04 822, deposee le 9 avril 2001aux noms de C.N.R.S. - Ste Tissage et Enduction Serge Ferrari.

CONCLUSIONI

Le strutture tensegrity, sin dalla loro ideazione, hanno rappresentato una sfida avvincente per gli architetti e per gli ingegneri. Il rapporto tra forma e struttura trova probabilmente una delle sue massime declinazioni in tali sistemi: la configurazione geometrica di una struttura tensegrity è difatti strettamente connessa allo stato di sollecitazione negli elementi. Ne consegue che la scelta della geometria, del modello e della topologia si riflette in modo sostanziale sul sistema di forze interne negli elementi.

Il problema cruciale nello studio e nella progettazione delle strutture tensegrity è rappresentato dalla determinazione della configurazione geometrica iniziale in auto-equilibrio - *form-finding* - e dallo studio delle relative condizioni di (super-) stabilità. Legando la sollecitazione con la rispettiva lunghezza degli elementi è possibile, ad esempio, definirne la densità di forza: artificio matematico proposto da Schek (*Force Density Method – FDM*) che consente di studiare le condizioni di equilibrio della struttura mediante un sistema di equazioni lineari le cui incognite sono, per l'appunto, le densità di forza degli elementi.

La configurazione geometrica iniziale può essere tuttavia modificata facendo uso di elementi “attuatori”: variando la lunghezza di tali elementi se ne modifica lo stato di sollecitazione e di conseguenza si modifica in tal modo la geometria del sistema. La possibilità di realizzare sistemi “intelligenti”, in grado quindi di adattare la propria forma alle esigenze progettuali, rappresenta una delle peculiarità delle strutture tensegrity. L'estrema leggerezza, l'elevato rapporto rigidità/massa e le possibilità di dispiegamento costituiscono ulteriori punti di forza di tali strutture.

Tuttavia, sebbene tali caratteristiche rendano le strutture tensegrity particolarmente interessanti e promettenti dal punto di vista ingegneristico, ad oggi si annovera un numero esiguo di realizzazioni, soprattutto nei campi dell'ingegneria civile e dell'architettura.

Il ridotto numero di strutture tensegrity (o pseudo-tensegrity) esistenti in questi ambiti suggerisce di proseguire lo studio sulle possibili applicazioni ingegneristiche di tali sistemi, considerando sia gli aspetti meccanici e tecnologici, sia gli aspetti formali e compositivi.

In questo lavoro, l'attenzione è stata rivolta alle celle tensegrity denominate V-Expander: particolari strutture tensegrity di Classe 2, brevettate da Motro.

La regolarità geometrica e le proprietà di simmetria rendono tale cella facilmente assemblabile con altre celle simili, ciò consente la realizzazione di strutture tensegrity complesse (travi, torri, archi, grigli piane e/o curve) a partire da un sistema elementare.

In quest'ottica, sono state proposte cinque varianti della cella V-Expander brevettata da Motro: tali varianti sono generate mediante un processo topologico-morfologico di addizione e/o sottrazione di elementi rispetto alla Variante I che rappresenta una generalizzazione geometrica della cella V-Expander ideata da Motro.

L'analisi ha quindi condotto alla ideazione di una famiglia di celle tensegrity, ciascuna caratterizzata da una peculiare configurazione geometrica e da un caratteristico comportamento meccanico. Variando la

lunghezza del solo cavo verticale, che rappresenta l'asse expander della cella, è possibile modificare la configurazione geometrica della struttura e, contestualmente, lo stato di sollecitazione negli elementi.

Le varianti I e III risultano evidentemente più semplici da realizzare, in virtù delle proprietà di simmetria che le caratterizzano; ciò le rende preferibili alle altre varianti esaminate ai fini della costruzione, per assemblaggio di moduli elementari, di strutture tensegrity complesse.

La presenza di cavi orizzontali nelle varianti II, IV e V suggerisce invece di considerare tali celle come moduli elementari di griglie di copertura piane o con debole curvatura.

Queste considerazioni possono trovare maggiore rispondenza a valle di ulteriori studi inerenti gli aspetti morfologici e compositivi di assemblaggi tensegrity realizzati mediante la giustapposizione delle cinque varianti proposte.

Un primo passo in tal senso è stato condotto nel capitolo 5 di questo lavoro, in cui è stato studiato il comportamento meccanico di assemblaggi a torre di tre celle elementari (Variante I e Variante III). Questa analisi è preceduta da un analogo studio del comportamento meccanico di un noto esempio di struttura tensegrity realizzata da Buckminster Fuller nel 1959 e di una sua versione modificata. Si ricorda che della struttura originale di Buckminster Fuller non si hanno informazioni dettagliate circa le caratteristiche geometriche della struttura e le proprietà meccaniche dei materiali utilizzati per la costruzione.

I risultati ottenuti hanno evidenziato che la struttura ideata da Buckminster Fuller non è compatibile con la definizione di struttura tensegrity, in quanto alcuni elementi che avrebbero dovuto essere "cavi" risultano in realtà compressi, e alcuni elementi che avrebbero dovuto essere "puntoni" risultano tesi. A valle di tali considerazioni, è stata studiata una versione modificata di tale struttura tensegrity, ottenendo che tutti i cavi risultano tesi e i puntoni compressi, rispettando in tal modo il comportamento unilatero degli elementi.

Per le strutture tensegrity considerate in questo lavoro è stato studiato lo stato di auto-sollecitazione equilibrato stabile, ossia la configurazione di auto-equilibrio in assenza di carichi esterni, seppur gravitazionali.

Questo lavoro rappresenta un passo necessario per la comprensione e la definizione del comportamento meccanico delle strutture tensegrity esaminate, ed apre le prospettive di studio che mi riprometto di svolgere in futuro sulle seguenti linee di ricerca:

- studio morfologico e strutturale per l'ideazione di nuove celle tensegrity, di classe 1 o di classe 2,
- analisi del comportamento meccanico di opportuni assemblaggi di tali celle elementari,
- realizzazione di modelli in scala appropriata per la verifica di fattibilità,
- analisi sperimentali e numeriche della risposta meccanica di tali strutture a carichi esterni di vario tipo,
- ottimizzazione geometrica e topologica delle celle e degli assemblaggi,
- studio ed ottimizzazione dei nodi della struttura e delle tecnologie utilizzate per realizzarli,
- analisi di possibili soluzioni tensegrity per la realizzazione di elementi strutturali (travi, archi, torri, ecc.).