Università degli Studi *"Roma Tre"*

Facoltà di Ingegneria

Modelli aerodinamici per l'analisi della stabilità aeroelastica di veicoli propulsi ad elica

Tesi di Dottorato

Ing. Greco Luca

Dottorato di Ricerca in Ingegneria Meccanica e Industriale

XIX Ciclo

Docente Guida	Coordinatore
Prof. Massimo Gennaretti	Prof. Luigi Morino

Indice

Elenco delle Figure 13

Introduzione **14**

1 Generalità sullo studio del comportamento aeroelastico di configurazioni rotore/ala fissa **31**

1.1 Il problema aeroelastico: definizione e procedura risolutiva 32

1.2 Analisi della stabilità 34

1.2.1 Teoria di Floquet-Lyapunov 36

1.2.2 Riduzione del sistema in coordinate multipala 38

2 Modelli aerodinamici di ordine ridotto basati su solutori 2D **44**

2.1 Schematizzazione del rotore e definizione dei sistemi di riferimento 46

2.2 Modelli aerodinamici non stazionari 2D per il rotore 48

2.2.1 Carichi aerodinamici di sezione 49

2.2.2 Carichi aerodinamici di sezione 53

2.2.3 Carichi aerodinamici di pala: operatore aerodinamico 54

2.2.4 Approssimazione razionale matriciale dell'operatore aerodinamico 59

2.2.5 Legame cinematico tra ala e pala 62

2.2.6 Modello aerodinamico ROM per il rotore 68

2.3 Modello aerodinamico per l'ala 70

2.3.1 Sistemi di riferimento e descrizione cinematica 70
2.3.2 Ordering scheme 75
2.3.3 Carichi aerodinamici di di sezione 76
2.3.4 Operatore aerodinamico e identificazione del modello ROM 77

3 Modelli aerodinamici di ordine ridotto basati su solutori 3D 80

3.1 Modello aerodinamico del rotore 81
3.1.1 Equazione integrale di contorno 82
3.1.2 Formulazione BEM nel dominio della frequenza 84
3.1.3 Calcolo delle forze aerodinamiche generalizzate 87
3.1.4 L'operatore aerodinamico 89
3.2 Contributo del moto di rotore ai carichi aerodinamici di pala 90
3.2.1 Calcolo delle condizioni al contorno sulla singola pala 90
3.2.2 Operatore aerodinamico per il rotore multipala 94
3.3 Contributo del moto elastico ai carichi aerodinamici di pala 97
3.3.1 Calcolo delle condizioni al contorno sulla singola pala 97
3.3.2 Calcolo delle forze generalizzate sulla singola pala 99
3.3.3 Operatore aerodinamico per il rotore multipala 102
3.4 Modello ROM per rotori multipala dotati di pale flessibili 105
3.5 Modelli aerodinamici ROM per l'ala 109
3.5.1 Operatore aerodinamico 109
3.5.2 Identificazione del modello ROM per l'ala 111

4 Modello per lo studio dell'aerodinamica interazionale del sistema ala/rotore 112

4.1 Modello agli elementi di contorno time–marching per sistemi ala/rotore 113
4.2 Interazione ala/scia rotorica 117
4.2.1 Tecnica di allineamento della scia 117

4.2.2 Simulazione dell'impatto scia/ala 120
4.3 Integrazione del modello aerodinamico interazionale nel modello ROM per l'ala . . 125

5 Modelli aeroelastici per il sistema ala/rotore 130
5.1 Modello aeroelastico del rotore 132
5.1.1 Modello strutturale del rotore 132
5.1.2 Equazioni della dinamica per i corpi rigidi 132
5.1.3 Cinematica della catena ala-albero-rotore 133
5.1.4 Dinamica delle pale di rotore 136
5.2 Descrizione del modello aeroelastico dell'ala 140
5.2.1 Introduzione al modello strutturale di ala 140
5.2.2 Equazioni della dinamica strutturale 141
5.3 Meccanismo di trasferimento dei carichi tra rotore ed ala 144
5.3.1 Impostazione del problema: equazioni dei carichi 145
5.3.2 Trasferimento dei carichi inerziali 146
5.3.3 Trasferimento dei carichi aerodinamici 148
5.3.4 Effetto del pilone 152
5.3.5 Ordering scheme 154

6 Definizione e soluzione del problema aeroelastico per il sistema ala/rotore 156
6.1 Definizione del problema aeroelastico in forma modale per l'ala 157
6.2 Struttura delle matrici aeroelastiche 161
6.3 Dinamica degli stati aggiunti 165
6.4 Sistema aeroelastico in forma normale 166

7 Applicazioni e risultati 168
7.1 Validazione della procedura di identificazione del modello ROM di rotore 168
7.1.1 Validazione della RMA per l'operatore aerodinamico di rotore 169

7.1.2 Validazione della procedura di identificazione del modello ROM per il rotore . . . 172

7.2 Validazione del modello aerodinamico interazionale . . . 184

7.2.1 Validazione della tecnica di allineamento della scia rotorica: propeller isolato . . . 184

7.2.2 Analisi idrodinamica di configurazioni elica/timone . . . 189

7.3 Applicazioni del modello aeroelastico per un sistema ala/rotore . . . 217

7.3.1 Studio della stabilità al whirl–flutter di un sistema pilone/rotore . . . 219

7.3.2 Valutazione dei margini di stabilità all'*air resonance* per un velivolo tiltrotor . . . 231

Conclusioni **238**

A Teoria di Floquet-Lyapunov **247**

B Flussi potenziali incomprimibili **253**

B.1 Equazione di Laplace . . . 253

B.2 Condizioni al contorno . . . 254

B.3 Problema di Neumann . . . 258

C Matrici di rotazione **259**

D Descrizione cinematica per l'ala **261**

D.1 La matrice $\mathbf{M}_{eq}$ . . . 263

D.2 La matrice $\mathbf{N}$ . . . 265

E Metodo numerico di integrazione al passo **267**

Elenco delle figure

1 Esempi di prototipi di velivoli tiltrotor: velivolo in condizioni di hover (sinistra), rotori in posizione *airplane mode* (destra). 15

2 Esempi di propulsori azimutali pod di tipo traente 16

3 Schema delle interazioni fluido–struttura per configurazioni ala/rotore 17

1.1 Piano di Gauss. 38

1.2 Trasformazione degli autovalori dal sistema in coordinate pala singola a quello in coordinate multipala. 42

2.1 Sistemi di riferimento albero e disco. 47

2.2 Carichi aerodinamici di sezione. 50

2.3 Sistemi di riferimento per la generica sezione di pala. 55

2.4 Sistemi di riferimento albero e ultima sezione. 62

2.5 Sistemi di riferimento disco e sistema di riferimento pala (nel caso di pala rigidamente connessa con il mozzo). 68

2.6 Angolo diedro. 71

2.7 Calettamento della sezione prima (sinistra), e dopo la deformazione (destra). 71

2.8 Riferimento ala deformata. 72

3.1 Esempio di mesh sulla pala. 85

3.2 Esempio di mesh sulla scia. 87

3.3 Numerazione per un rotore dotato di tre pale. 95

4.1 Esempio di griglia BEM per un propulsore azimutale (pod) traente. 114

4.2 Diagramma di flusso della procedura iterativa per la risoluzione del problema potenziale per configurazioni ala/rotore 116

4.3 Esempio di geometria di scia ottenuta mediante tecnica di allineamento al flusso locale. 119

4.4 Visualizzazioni LIF del flusso attorno ad una pala in condizioni di impatto ortogonale con un vortice (rif. [26]). 121

4.5 Fotografia della configurazione elica/timone sperimentata nel tunnel idrodinamico. 121

4.6 Visualizzazione del flusso attorno ad una configurazione elica/timone: vista laterale. 122

4.7 Visualizzazione del flusso attorno ad una configurazione elica/timone: vista in pianta. 123

4.8 Esempi di andamenti della funzione di vorticità F_W. 124

5.1 Modello ala/albero. 131

5.2 Tagli e momenti concentrati al tip dell'ala. 144

7.1 RMA della funzione di trasferimento tra $\mathbf{v}_x$ e la portanza sulla pala 1 (con 30 stati aggiunti aerodinamici). 170

7.2 RMA della funzione di trasferimento tra q_2^d e la portanza sulla pala 1 (con 30 stati aggiunti aerodinamici). 171

7.3 RMA della funzione di trasferimento tra q_3^d e la portanza sulla pala 1 (con 30 stati aggiunti aerodinamici). 171

7.4 Andamento nel tempo della portanza sulla pala 1 dovuto al moto armonico del pilone e della pala 173

7.5 Andamento nel tempo della portanza sulla pala 1 dovuto al moto armonico dell'ala e della pala: dettaglio dell'evoluzione iniziale. 173

7.6 Andamento nel tempo del momento torcente di pala 1 dovuto al moto armonico dell'ala e della pala. 174

7.7 Andamento nel tempo della portanza di pala 1 dovuto al moto perturbativo smorzato dell'ala. 175

7.8 Andamento nel tempo della portanza di pala 1 dovuto al moto perturbativo smorzato dell'ala: dettaglio di una finestra temporale ridotta. 176

7.9 Andamento nel tempo del momento di flap di pala 1 dovuto al moto perturbativo smorzato dell'ala. 177

7.10 Andamento nel tempo dei momenti di flap agenti sulle pale dovuti al moto perturbativo smorzato dell'ala. 178

7.11 Momenti di flappeggio in funzione della posizione angolare di pala dovuti al moto perturbativo smorzato dell'ala (flappeggio e torsione). 179

7.12 Momenti di flappeggio in funzione della posizione angolare di pala dovuti al moto perturbativo smorzato dell'ala (flappeggio). 180

7.13 RMA della funzione di trasferimento tra $\mathbf{v}_x$ e la portanza sulla pala 1 (con 5 stati aggiunti aerodinamici) 182

7.14 Andamento temporale della portanza sulla pala 1 dovuta al moto smorzato dell'ala. ROM identificato utilizzando una RMA con 5 poli. 182

7.15 Andamento della portanza sulle pale del rotore. Confronto tra rotore *gimbaled* e *hinged*. 183

7.16 Livelli di turbolenza assiale misurati in un piano longitudinale a valle dell'elica confrontati con le previsioni numeriche delle tracce della scia (linee tratteggiate nere). Elica INSEAN E779A in condizioni di $J = 0.748$ (in alto), $J = 0.88$ (al centro), $J = 1.012$ (in basso). 185

7.17 Livelli di turbolenza assiale misurati su piani trasversali a valle dell'elica confrontati con le previsioni numeriche delle tracce della scia (linee tratteggiate nere). Elica INSEAN E779A in condizioni di $J = 0.88$; piani trasversali a $x/R = 0.2$ (in alto a sinistra), $x/R = 0.65$ (in basso a sinistra), $x/R = 1.15$ (in alto a destra), e $x/R = 1.65$ (in basso a destra). 186

7.18 Curve dei coefficienti di spinta (K_T) e di coppia (K_Q) per un'elica quadripala (INSEAN E779A): predizioni numeriche (linee) confrontate con risultati sperimentali (simboli): confronto tra scia prescritta (B) e scia libera (A). 187

7.19 Campi di velocità assiale V_X e radiale V_R a valle dell'elica INSEAN E779A: previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.88$, sul piano a $x/R = 0.2$ e per $r/R = 0.7$ e $r/R = 0.9$. 189

7.20 Campi di velocità assiale V_X e radiale V_R a valle dell'elica INSEAN E779A: previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.88$, sul piano a $x/R = 1.15$ e per $r/R = 0.7$ e $r/R = 0.9$. 190

7.21 Configurazione dell'esperimento di Molland e Turnock (1992) 191

7.22 Esempio di discretizzazione a pannelli per la configurazione studiata in [27]. Sono mostrati: l'elica e la scia rilasciata da una sua pala, il mozzo ed il timone con relativa scia 192

7.23 Coefficiente di portanza del timone dietro elica al variare dell'angolo di incidenza. Previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.35$. 195

7.24 Coefficiente di portanza del timone dietro elica al variare dell'angolo di incidenza. Previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.51$. 195

7.25 Coefficiente di portanza del timone dietro elica al variare dell'angolo di incidenza. Previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.94$. 196

7.26 Coefficiente di portanza del timone dietro elica al variare dell'angolo di incidenza. Previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.51$ in assenza di modello numerico di impatto. 196

7.27 Coefficiente di portanza per il timone isolato e per il timone dietro elica al variare dell'angolo di incidenza. Previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.35$, $J = 0.51$ e $J = 0.94$. 197

7.28 Coefficiente di momento del timone dietro elica al variare dell'angolo di incidenza. Previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.51$ e $J = 0.94$. . 197

7.29 Coefficiente di resistenza per il timone nella scia dell'elica a $J = 0.35$. 198

7.30 Coefficiente di di resistenza per il timone nella scia dell'elica a $J = 0.51$. 198

7.31 Coefficiente di resistenza per il timone nella scia dell'elica a $J = 0.94$. 198

7.32 Posizione dei trasduttori di pressione sulla superficie del timone ([27]). 199

7.33 $J = 0,51$, $\alpha = -20$ 202

7.34 $J = 0.35$, $\alpha = -10$ (sinistra) e $\alpha = -20$ (destra) - I 203

7.35 $J = 0.35$, $\alpha = -10$ (sinistra) e $\alpha = -20$ (destra) - II 204

7.36 $J = 0.51$, $\alpha = -10$ (sinistra) e $\alpha = -20$ (destra) - I 205

7.37 $J = 0.51$, $\alpha = -10$ (sinistra) e $\alpha = -20$ (destra) - II 206

7.38 $J = 0.94$, $\alpha = -10$ (sinistra) e $\alpha = -20$ (destra) - I 207

7.39 $J = 0.94$, $\alpha = -10$ (sinistra) e $\alpha = -20$ (destra) - II 208

7.40 $J = 0.94$, $\alpha = -20$: confronto differenti funzioni di vorticità 209

7.41 $J = 0.94$, $\alpha = -20$: confronto scia prescritta, scia pseudo-libera e scia libera . . . 210

7.42 Fotografia della configurazione elica/timone sperimentata nel tunnel idrodinamico. 211

7.43 Distribuzione della componente assiale della perturbazione di velocità per $\theta = 0^\circ$ (piano a monte). 213

7.44 Distribuzione della componente assiale della perturbazione di velocità per $\theta = 30^\circ$ (piano a monte). 213

7.45 Distribuzione della componente assiale della perturbazione di velocità per $\theta = 60^\circ$ (piano a monte). 214

7.46 Distribuzione della componente assiale della perturbazione di velocità per $\theta = 0^\circ$ (piano a valle). 214

7.47 Distribuzione della componente assiale della perturbazione di velocità per $\theta = 30^\circ$ (piano a valle). 215

7.48 Distribuzione della componente assiale della perturbazione di velocità per $\theta = 60^\circ$ (piano a valle). 215

7.49 Interazione elica/timone: esempio della deformazione della scia rotorica indotta dal timone calcolata mediante il modello aerodinamico interazionale proposto. . . . 216

7.50 Interazione elica/timone: esempio della deformazione della scia rotorica indotta dal timone calcolata mediante il modello aerodinamico interazionale proposto. Confronto dei risultati numerici con la visualizzazione del vortice di estremità cavitante. 216

7.51 Funzione di trasferimento tra ω_1 ed il momento aerodinamico di flappeggio di pala (parte reale). 218

7.52 Schematizzazione del sistema pilone/rotore per lo studio della stabilità al whirl flutter di un velivolo tiltrotor. 220

7.53 Margini di stabilità al whirl flutter: rotore tripala, $\mu = 1.0$. 222

7.54 Margini di stabilità al whirl flutter: rotore bipala, $\mu = 1.0$. 224

7.55 Margini di stabilità al whirl–flutter: rotore tripala, $\mu = 0.3$. 224

7.56 Margini di stabilità al whirl–flutter: rotor bipala, $\mu = 0.3$. 225

7.57 Margini di stabilità al whirl–flutter: rotore tripala, $\mu = 1.0$. 226

7.58 Margini di stabilità al whirl–flutter: rotor bipala, $\mu = 1.0$. 226

7.59 Margini di stabilità al whirl–flutter: rotore tripala, $\mu = 0.3$. 227

7.60 Margini di stabilità al whirl–flutter: rotor bipala, $\mu = 0.3$. 228

7.61 Margini di stabilità al whirl–flutter: effetto dell'allungamento palare nei modelli aerodinamici 2D e 3D per un rotore tripala, $\mu = 1.0$. 228

7.62 Margini di stabilità al whirl–flutter: effetto dell'allungamento palare nei modelli aerodinamici 2D e 3D per un rotore bipala, $\mu = 1.0$. 229

7.63 Esempio di geometria di scia ottenuta mediante tecnica di allineamento al flusso locale. 230

7.64 Margini di stabilità al whirl–flutter: effetto della forma della scia nel modello aerodinamico 3D per un rotore tripala, $\mu = 1.0$, $\lambda = 8.3$. 230

7.65 Margini di stabilità al whirl–flutter: effetto della forma della scia nel modello aerodinamico 3D per un rotore tripala, $\mu = 0.3$, $\lambda = 8.3$. 231

7.66 Air resonance del sistema ala/rotore: lacune di instabilità per diverse velocità di crociera Dati sperimentali confrontati con risultati numerici ottenuti in [20]. 233

7.67 Air resonance del sistema ala/rotore: lacune di instabilità in diverse condizioni di volo ottenute mediante il modello aeroelastico introdotto nel presente lavoro. . . . 234

7.68 Air resonance del sistema ala/rotore: lacune di instabilità a 50 nodi. Modello aerodinamico ROM di ala e rotore basato sulla teoria di Greenberg. 235

7.69 Air resonance del sistema ala/rotore: lacune di instabilità a 100 nodi. Modello aerodinamico ROM di ala e rotore basato sulla teoria di Greenberg. 236

7.70 Air resonance del sistema ala/rotore: lacune di instabilità a 50 nodi. Modello aerodinamico ROM di ala e rotore basato sul solutore BEM. 237

7.71 Air resonance del sistema ala/rotore: lacune di instabilità a 100 nodi. Modello aerodinamico ROM di ala e rotore basato sul solutore BEM. 237

A.1 Piano di Gauss. 252

Introduzione

Le moderne esigenze di mezzi di trasporto sempre più efficienti e versatili hanno portato negli anni allo sviluppo di sistemi di propulsione di complessità crescente nei quali si hanno forti interazioni aerodinamiche e strutturali tra parti fisse e parti rotanti.

Il presente lavoro di tesi è inquadrato nell'ambito dello studio dei sistemi propulsivi innovativi in ambito aeronautico e navale. Sono state infatti individuate configurazioni che, nei rispettivi campi di applicazione, mostrano caratteristiche comuni in particolare per gli aspetti che riguardano le interazioni tra il mezzo fluido in cui si muove il veicolo e le parti che costituiscono la struttura del propulsore.

Dal punto di vista della modellazione del sistema in esame nasce dunque l'esigenza di dirigere lo studio verso due diversi campi di investigazione: da un lato occorre studiare gli aspetti legati alla fluidodinamica del sistema propulsivo e dall'altro gli aspetti propriamente strutturali dello stesso.

In quest'ottica l'obiettivo del presente lavoro è lo sviluppo di modelli teorici ed algoritmi numerici per l'analisi aero/idrodinamica del propulsore che siano mirati specificatamente all'accoppiamento con le equazioni della dinamica strutturale del sistema in esame. In tal modo è possibile costruire il modello aero/idroelastico del propulsore e dunque studiarne la stabilità al variare di caratteristiche costruttive e di condizioni di funzionamento nonché sintetizzare leggi per il controllo del sistema stesso.

Gli strumenti sviluppati consentono, in fase di progettazione preliminare, di analizzare diverse varianti di progetto e di studiare le risposte del sistema nelle diverse condizioni di lavoro riducendo in tal modo le scelte da effettuare nella successiva fase di progettazione di dettaglio.

Naturalmente l'obiettivo prefissato condiziona la scelta dei modelli da sviluppare. In particolare, dal punto di vista della progettazione di massima, caratteristica essenziale dei modelli teorici sviluppati nel presente lavoro è un buon compromesso tra accuratezza del risultato e onere

computazionale della simulazione.

Nel seguito verranno dapprima descritte le configurazioni propulsive di interesse nell'ambito del lavoro di tesi illustrandone il principio di funzionamento e gli aspetti tecnologici critici per la loro progettazione. Saranno poi illustrati gli obiettivi del presente lavoro e delineate le metodologie in esso sviluppate, inserendole nel contesto scientifico appropriato.

Configurazioni propulsive di interesse

Il presente lavoro di tesi si pone come obiettivo l'analisi aeroelastica di configurazioni aeronautiche e navali con propulsione ad elica. In particolare, nell'ambito di veicoli e propulsori a carattere innovativo sono state prese in considerazione configurazioni caratterizzate da una forte interazione aerodinamica e strutturale tra parti rotanti e fisse del propulsore.

Figura 1: Esempi di prototipi di velivoli tiltrotor: velivolo in condizioni di hover (sinistra), rotori in posizione *airplane mode* (destra).

Nelle figure 1 e 2 ne sono riportati due esempi. In figura 1 è riportata l'immagine di un velivolo a decollo ed atterraggio verticale propulso ad elica chiamato tiltrotor (o convertiplano). In figura 2 è invece riportata l'immagine di un propulsore azimutale (o pod) di impiego in ambito navale in cui si notano l'elica, la gondola in cui viene alloggiato il motore (elettrico) e gli organi di trasmissione, e lo strut che collega il pod alla carena della nave e serve anche come organo di manovra sostituendo il timone tradizionale.

Come si può notare esistono notevoli similitudini legate sia agli aspetti fluidodinamici sia a quelli

strutturali tra il sistema ala/rotore di un tiltrotor ed un sistema elica/gondola/strut di un propulsore pod.

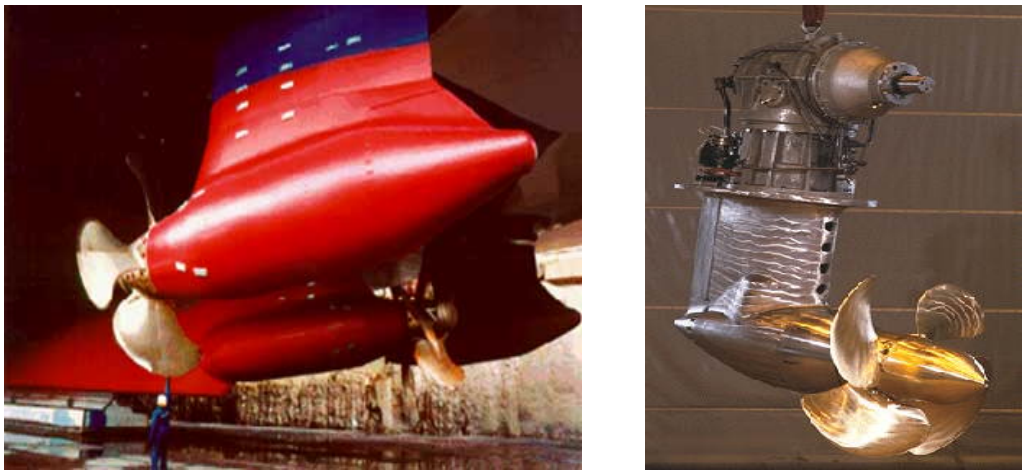

Figura 2: Esempi di propulsori azimutali pod di tipo traente

In figura 3 è riportata la catena delle interazioni che caratterizzano entrambi i sistemi rotore/ala fissa. Come si nota le interazioni sono di due tipologie. La prima è di natura aerodinamica: il moto dell'ala influenza quello del rotore e dunque i carichi agenti sulle pale; inoltre l'aerodinamica di rotore (in particolare la scia vorticosa rilasciata dalle pale rotoriche) influenza l'aerodinamica di ala (aerodinamica interazionale). La seconda tipologia di interazione riguarda il trasferimento dei carichi dal rotore all'ala per via delle reazioni vincolari al mozzo che si trasferiscono all'estremità dell'ala. Dunque in un sistema di tipo rotore/ala fissa si instaura un ciclo aeroelastico tipico delle catene multicorpo in cui la dinamica di ciascun membro influenza quella degli altri.

Nel presente lavoro i termini aeroelastico e idroelastico verranno implicitamente utilizzati come sinonimi in quanto i modelli sviluppati nel presente lavoro hanno come obiettivo l'applicazione sia a configurazioni aeronautiche che navali. Le applicazioni cui è rivolto il presente lavoro verranno genericamente indicate con il nome di "sistemi ala/rotore" indicando sia il sottosistema ala/pilone/rotore di un tiltrotor, sia il sottosistema strut/gondola/elica di un propulsorre azimutale

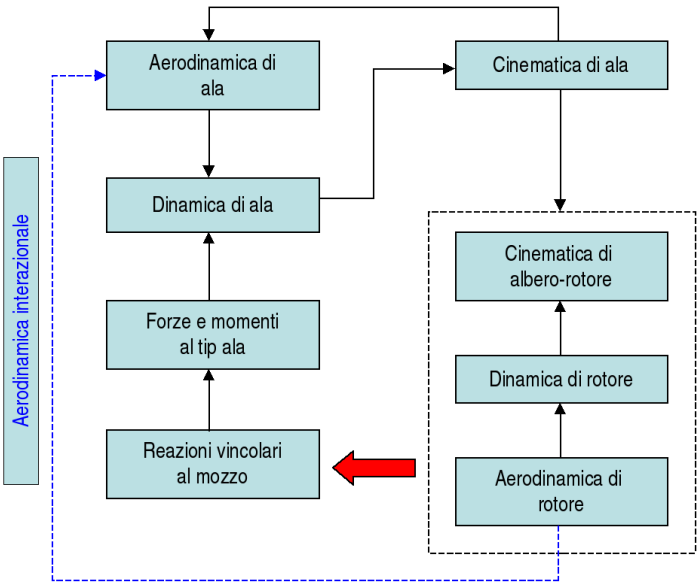

Figura 3: Schema delle interazioni fluido–struttura per configurazioni ala/rotore

Velivoli tiltrotor: panoramica e aspetti progettuali critici

I velivoli tiltrotor appartengono alla categoria dei velivoli di tipo V/STOL (*Vertical and short take–off and landing*) e uniscono la capacità di decollo verticale degli elicotteri alla elevata velocità di crociera ed al maggior raggio d'azione dei velivoli turboelica. Questo velivolo è caratterizzato da due rotori controrotanti di grande diametro posizionati ad ogni estremità alare. Ciascun rotore (detto *proprotor*) è calettato su un albero alloggiato, insieme con il relativo motore e gli organi di trasmissione, nella cosiddetta *nacelle*. Tale alloggiamento è in grado di ruotare in un piano ortogonale all'apertura alare per realizzare la conversione tra le due modalità di funzionamento.

Nella configurazione *helicopter mode*, il rotore è disposto con asse verticale e fornisce le forze di sostentamento e controllo per le operazioni in hover e a basse velocità; in queste condizioni, la richiesta di potenza è massima in quanto i rotori devono bilanciare il peso dell'intero velivolo e compensare la deportanza prodotta dall'ala che è investita dalla scia rotorica (questo carico aggiuntivo può arrivare al 20% della spinta prodotta).

Nella modalità *airplane mode* il rotore è ruotato di $90°$ e funziona da propeller, fornendo la spinta necessaria al volo in crociera. Tale spinta deve bilanciare solo la resistenza aerodinamica in quanto la portanza è fornita dalle ali.

In termini di velocità di avanzamento un elicottero ha dei limiti dovuti agli effetti della comprimibilità sulla pala avanzante, e dallo stallo su quella retrocedente, oltre che dalla elevata resistenza opposta dal rotore. Il convertiplano, invece, supera questi limiti per via della possibilità della conversione del moto, potendo raggiungere, in modalità *airplane* velocità quasi doppie rispetto ad un elicottero; inoltre, per via della minore resistenza all'avanzamento, questo velivolo ha un raggio d'azione in termini di autonomia maggiore rispetto ad un elicottero.

A questi vantaggi si sommano la capacità di volo a velocità più basse ed in condizioni di minor rumorosità rispetto ai velivoli turboelica.

Queste caratteristiche, insieme alla elevata capacità di trasportare carico pagante e alla flessibilità di utilizzo, rendono il tiltrotor un velivolo molto interessante per le applicazioni che richiedono, in particolare, decollo e atterraggio verticale e nelle quali il tempo e la distanza da percorrere sono parametri fondamentali che influenzano il costo e l'efficacia della missione. Tra le applicazioni maggiormente indicate per questa tipologia di velivoli, oltre a quelle di natura militare, sono rilevanti quelle di pronto intervento in luoghi di difficile accesso (missioni mediche, evacuazioni, etc.) che sfruttano l'elevata velocità e la versatilità del velivolo.

Un'altra applicazione cui si guarda con notevole interesse è l'utilizzo del convertiplano per la riduzione dei problemi di congestione degli aeroporti. Recenti studi hanno dimostrato la potenziale competitività anche economica del tiltrotor rispetto ai tradizionali velivoli turboelica. In particolare, quindi, tale velivolo potrebbe essere impiegato per il trasporto a breve raggio riducendo in tal modo la congestione delle piste di decollo e atterraggio e quindi i tempi di attesa per gli utenti.

Molti sono gli aspetti tecnici del tiltrotor che sono oggetto di studio da parte della comunità scientifica. In particolare, fondamentali ai fini della commercializzazione del velivolo sono: l'aumento del comfort del carico pagante (inteso come riduzione del rumore interno e delle vibrazioni), la riduzione dell'impatto ambientale dal punto di vista del rumore generato, la certificazione della sicurezza in volo (stabilità, sistemi di controllo, operatività in condizioni di emergenza) ed infine la competitività economica (efficienza dei rotori e dell'ala, riduzione del peso, elevata affidabilità, etc.).

Risulta evidente la difficoltà di ottimizzare il progetto per entrambe le modalità di funzionamento del velivolo, pertanto solitamente si pone maggior attenzione nel progetto per la modalità *airplane mode* nel quale il velivolo trascorre la maggior parte della sua vita operativa. Pertanto gli strumenti sviluppati saranno rivolti a questo tipo di applicazione.

Lo studio delle instabilità aeroelastiche di un tiltrotor in volo di crociera al variare dei parametri costruttivi (geometrici) e di funzionamento (condizioni di lavoro) è tra gli obiettivi obiettivi fondamentali del lavoro di tesi.
La particolare configurazione del velivolo con un rotore posto all'estremità di un'ala flessibile, dà luogo ad una serie di fenomeni aeroelastici assenti negli elicotteri e nei tradizionali velivoli turboelica. Questi fenomeni dipendono dalla modalità di funzionamento; in particolare nel volo in crociera la sollecitazione sulle pale rotoriche è minore rispetto all'*hover*, tuttavia esse, a causa della loro flessibilità , subiscono moti, nel piano e fuori dal piano di rotazione, maggiori rispetto ai tradizionali propeller. Questo influenza il comportamento dell'ala (aspetto, questo, tipico delle catene multicorpo) e, sotto certe condizioni, può portare all'instabilità del sistema. In particolare un'instabilità tipica per questi velivoli è legata all'accoppiamento del moto di flappeggio dell'ala con il moto di lag delle pale ed è denominata *air resonance*.

Un'altra tipologia di instabilità aeroelastica che è tipica dei convertiplani è il cosiddetto *whirl flutter*: si tratta di un'instabilità che compare alle alte velocità di crociera e pertanto impone dei limiti sulle velocità massime raggiungibili dagli attuali prototipi. Il rotore di un tiltrotor è soggetto a notevoli sollecitazioni di natura aerodinamica che sono sostanzialmente dovute al moto di torsione e brandeggio dell'ala e che aumentano all'aumentare della velocità di crociera. Questo tipo di interazione aeroelastica può portare il sistema all'instabilità ed in ogni caso induce delle vibrazioni che sollecitano a fatica le parti meccaniche del sistema. Il gioco meccanico che sussiste tra l'albero su cui è calettato il rotore ed i cuscinetti che lo sostengono contribuisce ad indurre questo tipo di instabilità. Lo studio e la previsione dei margini di stabilità al whirl flutter di un tiltrotor è tra gli obiettivi prefissati del lavoro di tesi.

Propulsori azimutali POD: descrizione e aspetti progettuali critici

I sistemi di propulsione tradizionali impiegati in ambito navale per una vasta classe di unità prevede l'impiego di unità propulsive caratterizzate da un'elica che lavora a monte di un timone che funziona da organo direzionale. Tale unità elementare può essere utilizzata anche in configurazioni multielica.
In anni recenti grande interesse tecnologico e scientifico è stato rivolto ai propulsori azimutali (pod).

Dal punto di vista costruttivo un propulsore azimutale è costituito da tre parti fondamentali: uno strut che costituisce sia l'organo di manovra che la struttura di sostegno del propulsore, una gondola che costituisce l'alloggiamento del motore (elettrico), degli organi di trasmissione e dell'albero sul quale è calettata l'elica. L'unità pod può ruotare di $360°$ attorno al suo asse di cerniera. Infine, l'elica può essere montata a monte dello strut (pod traente) o a valle (pod spingente). In questa sede si intendono trattare pod di tipo traente (nei quali l'elica si trova installata a monte della gondola, si veda figura 2).

Nati come semplici organi di manovra, i propulsori azimutali stanno rapidamente prendendo piede come unità propulsive principali per una vasta classe di unità navali dai traghetti alle navi da crociera fino alle grandi navi per trasporto container.

Numerosi sono i vantaggi di un propulsore di questo tipo rispetto a quelli tradizionali. Innanzitutto si tratta di un propulsore che presenta una grande modularità e flessibilità di installazione in quanto costituisce una unità stand–alone che richiede esclusivamente alimentazione elettrica. In effetti l'utilizzo di tali propulsori consente un'ampia scelta per quanto riguarda tipologia e posizione del generatore di corrente consentendo di effettuare tale scelta tenendo presenti i vincoli legati all'ottimizzazione degli spazi interni ed al comfort del carico pagante (si pensi ad applicazioni per navi per trasporto merci e navi da crociera). L'assenza della linea di trasmissione consente inoltre di ridurre le vibrazioni che il propulsore induce sulla carena.

Dal punto di vista fluidodinamico nel caso di un propulsore pod traente di fatto l'elica si trova a lavorare in condizioni di flusso meno perturbate rispetto a quanto accade nelle configurazioni elica–timone tradizionali nelle quali la linea d'assi, le appendici aerodinamiche e lo strato limite della carena disposti a monte dell'elica disturbano notevolmente il flusso in ingresso all'elica stessa. Questo comporta una maggiore efficienza propulsiva dell'unità. Infine la possibilità di ruotare attorno all'asse di cerniera conferisce alle unità navali propulse tramite pod una maggiore manovrabilità. Tutti gli aspetti citati rendono dunque tali propulsori competitivi rispetto a quelli tradizionali. D'altro canto la complessità ed il relativo recente utilizzo dei pod come unità propulsive principali (con unità che ormai hanno superato i $20MW$ di potenza e le 200 tonnellate di peso) comporta numerosi aspetti tecnici delicati che devono essere tenuti in considerazione nella fase di progetto. Un recente studio su numerose unità pod installate su mezzi di diversa classe (si veda [2]) ha preso in esame i problemi che hanno portato a guasti del propulsore. In particolare la caratteristica fondamentale dei propulsori pod di tipo traente è l'interazione non stazionaria tra le componenti

fisse e rotanti che induce carichi variabili nel tempo sulle pale e distribuzione di pressione variabile nel tempo sullo strut con consegenti picchi di pressione in corrispondenza delle zone in cui la scia rilasciata dalle pale dell'elica impatta sulla superficie dello strut. Questo tipo di interazione induce vibrazioni sull'albero sul quale sono calettate le pale che sollecitano i cuscinetti causando fenomeni di fatica. In effetti la rottura dei cuscinetti che sostengono l'albero motore risulta essere il fattore statisticamente più importante nel caso di guasti all'unità propulsiva. Un altro problema rilevato sui pod e imputabile alla non stazionarietà della distribuzione di pressione sulla superficie dello strut è la difficoltà di mantenere costante l'angolo di orientamento rispetto alla direzione di avanzamento della nave. Occorre tenere infine in conto i problemi derivanti dalla cavitazione sulle pale e sullo strut (quest'ultima accentuata dall'impatto della scia rotorica che induce picchi di pressione) che limitano attualmente la velocità massima di utilizzo dei pod a circa 25 nodi.
Lo studio delle interazioni aerodinamiche non stazionarie tra parti fisse e rotanti di un propulsore azimutale è tra gli obiettivi principali del lavoro di tesi. Lo sviluppo di strumenti per l'analisi idrodinamica di configurazioni di questo tipo si pone come obiettivo finale l'inclusione degli effetti della aerodinamica interazionale legati agli effetti della scia rotorica sull'aerodinamica della parte fissa.

Scopo della tesi

La descrizione dei velivoli tiltrotor e dei propulsori azimutali ha messo in evidenza aspetti comuni nelle fenomenologie legate all'interazione fluido/struttura che li riguardano. In particolare sono state evidenziate similitudini negli accoppiamenti cinematici e dinamici e nelle interazioni aerodinamiche tra parte rotante e parte fissa.

Lo scopo del presente lavoro di tesi è lo sviluppo di modelli teorici e strumenti computazionali che, con i necessari distinguo legati al fluido specifico in cui si muove il mezzo, consenta di studiare la stabilità aeroelastica di sistemi di tipo rotore/ala fissa. Nel caso di propulsori azimutali il sistema ala/rotore di fatto rappresenta completamente il propulsore dal punto di vista globale. Nel caso di un tiltrotor il sottosistema ala/rotore risulta essere il principale e più complesso apparato fonte di possibili instabilità per cui su di esso si incentra tipicamente gran parte dell'analisi aeroelastica.
Lo schema delle interazioni cinematiche aerodinamiche per configurazioni di questo tipo (figura 3)

mostra le interazioni aeroleastiche presenti nella catena multicorpo costituita dall'ala e dal rotore. Risulta evidente come in questo caso i margini di stabilità aeroelastica di un sistema così complesso possano essere anche molto diversi dai margini di stabilità dei singoli componenti del sistema.
È necessario dunque sviluppare strumenti per l'analisi aeroelastica che possano tener in conto quanto più accuratamente possibile le diverse interazioni che sussistono tra parti rotanti e fisse del sistema. L'ottica con la quale è stata impostata l'attività illustrata nel presente lavoro è quella della costruzione di strumenti che risultino utili nella fase di progetto preliminare del mezzo; in particolare quindi strumenti che, coniugando semplicità, accuratezza e ridotti oneri computazionali possano essere facilmente inseriti in algoritmi per l'ottimizzazione vincolata, consentano, dal punto di vista dei vincoli progettuali di stabilità del sistema, delle analisi parametriche al variare delle caratteristiche costruttive e delle condizioni di funzionamento nonché la sintesi di leggi di controllo. In definitiva si intende sviluppare degli strumenti computazionali che forniscano le linee guida per una prima scrematura tra le possibili scelte progettuali di massima.

La definizione di un modello teorico per l'analisi aeroelastica richiede da un lato lo sviluppo di modelli aerodinamici per il calcolo dei carichi agenti sulle pale del rotore e sull'ala; dall'altro la costruzione di modelli per la descrizione della dinamica strutturale del sistema. Infine occorre sviluppare ed implementare in algoritmi numerici opportune metodologie per la definizione e la risoluzione del problema aeroelastico che deriva dall'accoppiamento dei modelli aerodinamici con le equazioni della dinamica stutturale.
Nel presente lavoro l'enfasi è soprattutto sugli aspetti aerodinamici della modellazione aeroelastica. Il principale contributo innovativo del lavoro è la definizione di un modello di ordine ridotto (ROM) per il calcolo dei carichi aerodinamici non stazionari agenti sul rotore: si tratta di una metodologia che consente di ottenere un legame esplicito lineare e a coefficienti periodici tra i carichi aerodinamici agenti sulle pale del rotore ed i gradi di libertà del sistema completo. L'identificazione del modello ROM sarà basata su un solutore aerodinamico nel dominio della frequenza che consente di tener conto della presenza delle scie rilasciate dalle pale e della mutua e contemporanea influenza tra le pale stesse. In particolare, il rotore genera una scia vorticosa che descrive un'elica con asse parallelo all'asse del rotore stesso e che induce nel campo fluidodinamico un campo di velocità (velocità indotta) che altera sensibilmente la distribuzione dei carichi aerodinamici sulla pala. La presenza della scia a valle ed al di sotto di ciacuna pala, nonché l'interazione tra le pale rende necessario lo sviluppo di un modello aerodinamico che sia in grado di tener conto degli effetti

di non–stazionarietà e di tridimensionalità del flusso attorno al rotore.
La metodologia per l'identificazione del modello ROM sviluppata nel presente lavoro è molto flessibile e pertanto risulta applicabile a diverse tipologie di solutori aerodinamici nel dominio della frequenza. Tuttavia, per poter tenere in conto gli aspetti legati alla deformazione della scia rotorica provocata dalla presenza dell'ala a valle, aspetti questi valutabili nel dominio della frequenza solo mediante metodologie piuttosto complesse ed onerose dal punto di vista computazionale, si è reso necessario sviluppare uno strumento in grado di caratterizzare l'interazione aerodinamica ala rotore e che potesse essere integrato con il suddetto modello ROM.

Per quanto riguarda l'ala è stato utilizzato un analogo modello di ordine ridotto basato su un solutore tridimensionale, non stazionario per la descrizione dei carichi aerodinamici di ala, ottenendo, in questo caso un modello ROM a coefficienti costanti.

La possibilità di ottenere legami espliciti lineari tra carichi aerodinamici di rotore e di ala e gradi di libertà del sistema consente di accoppiare tali modelli direttamente alle equazioni della dinamica strutturale espresse in funzione dei medesimi gradi di libertà ottenendo dunque la formalizzazione del problema aeroelastico per lo studio della stabilità del sistema ala/rotore mediante tecniche basate sull'analisi degli autovalori del sistema stesso.

Lo strumento sviluppato ha consentito, a seguito di una completa validazione dei vari passi che la sua identificazione richiede, di valutare gli effetti dell'utilizzo di solutori aerodinamici caratterizzati da crescenti livelli di accuratezza, sulle capacità del modello di individuare con sufficiente approssimazione i margini di stabilità di un sistema rappresentativo del sottosistema ala/rotore di un velivolo tiltrotor realistico confrontandosi con risultati di campagne di investigazione sperimentali.

Contesto del presente lavoro

Il presente lavoro si inserisce nel contesto del forte interesse della comunità scientifica aeronautica e navale verso le configurazioni propulsive descritte precedentemente come sistemi ala/rotore.

L'aspetto maggiormente trattato nella letteratura del settore in ambito aeronautico è lo sviluppo dei modelli per la descrizione della dinamica strutturale del sistema rotore/ala fissa. A tal proposito si vedano ad esempio [37], [14], [24] per quanto riguarda l'analisi dei margini di stabilità al whirl flutter utilizzando un modello semplificato in cui il sistema rotore/ala viene schematizzato come un

albero motore su supporto elastico (che simula l'elasticità dei vincoli tra albero motore e alloggiamenti nella nacelle) sul quale sono calettate le pale del rotore; per l'analisi di stabilità del sistema ala/rotore di un velivolo tiltrotor completo i lavori [30, 38, 39, 31] costituiscono un esempio di sviluppo ed applicazione di modelli strutturali complessi.

Per quanto riguarda la modellazione aerodinamica, nei lavori citati tipicamente vengono adottati modelli bidimensionali quasi–stazionari con l'introduzione di correzioni basate su modelli molto semplici o rilevanze sperimentali per tener conto in misura approssimata di fenomeni importanti dal punto di vista aeroelastico quali la velocità indotta dal rotore nel campo, la presenza della scia rilasciata dalle pale, la tridimensionalità del flusso attorno al rotore e la non stazionarietà dei carichi agenti sulle pale del rotore e sull'ala.

La complessità del campo fluidodinamico attorno ad una configurazione rotore/ala fissa è tale per cui sarebbe necessario l'utilizzo di uno strumento di simulazione CFD per catturare con accuratezza tutti i fenomeni aerodinamici di interazione tra parti fisse e rotanti. Esistono in letteratura, soprattutto in campo idrodinamico, numerosi esempi di utilizzo di codici basati sulla soluzione delle equazioni di Navier–Stokes per flussi viscosi (RANS) allo scopo di indagare il campo fluidodinamico attorno a configurazioni di tipo rotore/ala fissa. Un'applicazione di tali metodi allo studio dell'idrodinamica di propulsori azimutali si trova in [34] mentre l'utilizzo di metodi RANS per la progettazione di propulsori per navi veloci è trattata in [35].

Tuttavia tali strumenti richiedono ancora oggi notevoli risorse di calcolo con conseguenti tempi di simulazione piuttosto lunghi; inoltre occorre tener conto delle notevoli difficoltà di generazione delle griglie di calcolo e di numerosi aspetti numerici e di modellazione tipicamente legati a questi strumenti. Infine tali modelli non consentono un accoppiamento diretto con le equazioni della dinamica strutturale, ma richiedono algoritmi di natura iterativa e al passo nel tempo per poter studiare la stabilità del sistema.

Possibili approcci alternativi per lo studio delle configurazioni in esame sono quelli cosiddetti "ibridi" che utilizzano solutori RANS o Eulero (per flussi rotazionali non viscosi) per la parte fissa e solutori BEM o Vortex Lattice per la parte rotante. Nelle formulazioni citate il limite principale risiede nel fatto che il campo di velocità indotto dal rotore viene mediato nel tempo prima di essere passato al solutore per la parte fissa. In tal modo si perdono informazioni relative alla non–stazionarietà dei fenomeni in gioco. Un esempio di analisi idrodinamica completamente non–stazionaria si trova in [4] dove un solutore BEM per il rotore di un propulsore pod viene utilizzato

in combinazione con un solutore RANS per la gondola e lo strut.

Allo scopo di ottenere strumenti di simulazione ed analisi orientati alla progettazione preliminare, l'attenzione è stata dunque rivolta ad un nucleo risolutore basato su un modello aerodinamico valido per flussi potenziali, 3D e non–stazionari per la descrizione aerodinamica dei carichi agenti sulle parti rotanti e fissa che costituiscono il sistema. La discretizzazione delle equazioni del modello aerodinamico mediante un approccio agli elementi di contorno (BEM - *Boundary Element Method*) consente di scrivere il medesimo nelle forme più adatte all'accoppiamento con le equazioni della dinamica strutturale (descritta mediante modelli classici per questo tipo di applicazioni) permettendo in definitiva di condurre analisi di stabilità che coniugano accuratezza e bassi oneri computazionali.

Sommario della tesi

Il nucleo centrale del presente lavoro è costituito dalla descrizione dei modelli aerodinamici sviluppati per le configurazioni propulsive di interesse. Le similitudini tra velivoli tiltrotor e propulsori azimutali per quanto riguarda gli aspetti legati all'aerodinamica interazionale, consentono di sviluppare una formulazione aerodinamica unificata per flussi attorno a configurazioni che in genere è possibile identificare con la dicitura "sistemi rotore/ala fissa". Naturalmente sono da tener presenti le specificità dei fluidi nei quali i due mezzi si muovono: da un lato gli effetti della comprimibilità in aria, dall'altro i fenomeni di cavitazione, che compaiono nel caso di flussi ad alta velocità in acqua. Tali effetti non ledono la generalità della formulazione qui presentata in quanto costituiscono successivi sviluppi del medesimo solutore aerodinamico.

Dopo una breve panoramica sull'impostazione generale di un problema aeroelastico per la configurazione in esame e sulle metodologie classicamente utilizzate per la sua soluzione e per l'analisi della stabilità del sistema, vengono affrontati nel dettaglio gli aspetti legati alla modellazione aerodinamica. Due strade diverse per la definizione del modello aerodinamico del sistema rotore/ala fissa sono state seguite nel presente lavoro. Ciascuno dei due approcci presenta vantaggi e svantaggi che, come sarà evidente nel seguito, sono complementari e sono stati sviluppati con l'obiettivo di essere integrati per lo studio dell'aeroelasticità del sistema.

In entrambi i casi il nucleo del solutore aerodinamico è basato sulle ipotesi di flussi potenziali,

ipotesi valida in condizioni di flussi attaccati ad alto numero di Reynolds in cui sono trascurabili gli effetti della viscosità. Sotto tali ipotesi è possibile ottenere una formulazione per il potenziale di velocità che, tramite il teorema di Bernoulli, è in grado di descrivere i carichi non stazionari agenti sulle pale del rotore e sull'ala tenendo conto degli effetti di tridimensionalià del flusso e quelli legati al rilascio di vorticità al bordo d'uscita delle pale e dell'ala connesso con la generazione dei carichi aerodinamici.

Sono stati dunque sviluppati, da un lato, modelli aerodinamici di ordine ridotto (ROM, ovvero *Reduced Order Model*) basati su nuclei risolventi scritti nel dominio della frequenza e, dall'altro, modelli aerodinamici time–marching.

Per quanto attiene ai modelli ROM, il contributo innovativo dell'attività descritta è rappresentato dall'identificazione di un modello aerodinamico ROM per il rotore basato su un solutore aerodinamico più evoluto rispetto a quelli tradizionalmente utilizzati per applicazioni aeroelastiche. Tale modello consente di esprimere i carichi aerodinamici agenti sulle pale del rotore in funzione degli spostamenti elastici del sistema rotore/ala mediante un legame esplicito lineare a coefficienti periodici e dunque può essere direttamente accoppiato con le equazioni della dinamica strutturale del sistema.

Il solutore aerodinamico si basa su una metodologia agli elementi di contorno (BEM, *Boundary Element Method*) ed il modello ROM che ne deriva tiene conto dell'influenza dell'ala sul rotore solo per il tramite dei vincoli cinematici che legano il moto delle pale a quello dell'ala. Inoltre sono tenuti in conto tutti gli effetti legati alla presenza delle scie rilasciate dalle pale e alla tridimensionalità del flusso.

L'identificazione del modello aerodinamico ROM sviluppato si articola nell'ambito dell'analisi delle piccole perturbazioni dello stato del sistema attorno ad una configurazione di equilibrio. Essa avviene sostanzialmente in due fasi: identificazione dell'operatore aerodinamico e definizione del legame cinematico. L'utilizzo di un solutore BEM nel dominio della frequenza consente di ottenere un operatore che rappresenta la funzione di trasferimento tra gradi di libertà perturbativi delle pale e carichi agenti sulle stesse per il rotore considerato isolato e libero di muoversi nello spazio solidale all'ala. I gradi di libertà di pala necessari per descrivere l'aerodinamica di pala sono le componenti dell'atto di moto rigido (ovvero tre componenti di velocità di traslazione e tre di velocità di rotazione della pala) e gli spostamenti elastici della pala.

La descrizione degli effetti delle scie rilasciate dalle pale fa si che l'operatore aerodinamico contenga termini che sono funzione trascendente dalla frequenza; un esempio di questa dipendenza si ritrova nella formulazione aerodinamica di Theodorsen che tiene conto degli effetti della vorticità di scia tramite la funzione $C(k)$ detta *Lift Deficiency Function*. Tale dipendenza funzionale richiederebbe, nel dominio del tempo, un numero infinito di stati per la descrizione dell'operatore aerodinamico. Si rende pertanto necessaria la riduzione del numero degli stati mediante una tecnica di approssimazione razionale matriciale (RMA) dell'operatore aerodinamico basata su una tecnica ai minimi quadrati. Questa procedura richiede l'introduzione di "dinamiche aggiuntive" rispetto a quelle propriamente fisiche del fenomeno che sono necessarie per ottenere l'approssimazione dell'operatore aerodinamico. Naturalmente, il numero degli stati aggiunti dipende dall'accuratezza che si desidera per la definizione dei carichi aerodinamici.

Il passo finale per arrivare all'identificazione del modello ROM è la definizione del cosiddetto legame cinematico, ovvero dell'operatore che lega i gradi di libertà di pala ai gradi di libertà del sistema rotore/ala. Tale legame risulta essere a coefficienti periodici poichè il moto dell'ala influenza la cinematica di pala in modo differente a seconda della posizione angolare della pala stessa.

Per quanto riguarda l'aerodinamica dell'ala, è stato adottato un modello di ordine ridotto analogo a quello descritto per il rotore. Anche in questo caso si perviene ad un legame esplicito (a coefficienti costanti) tra carichi aerodinamici e gradi di libertà del sistema. In questa formulazione non si tiene conto degli effetti aerodinamici sull'ala dovuti alla presenza del rotore: di fatto il rotore influenza la dinamica dell'ala solo per il tramite dei carichi trasmessi al mozzo che è considerato solidale all'ultima sezione dell'ala.

È da notare che nella formulazione descritta viene trascurato l'altro effetto aerodinamico importante nell'interazione rotore/ala ovvero la deformazione della scia vorticosa rilasciata dalle pale dovuta alla presenza dell'ala. Il vantaggio di tale approssimazione risiede nella possibilità di ottenere un legame esplicito e lineare tra i carichi agenti sulle pale del rotore ed i gradi di libertà del sistema. Tuttavia, la necessità di comprendere gli effetti dei fenomeni di aerodinamica interazionale sulla stabilità del sistema ha indotto a percorrere anche la strada dei modelli accurati nel tempo con l'obiettivo di integrare le informazioni derivanti da questi nel modello ROM qui descritto. Di questo aspetto si occupa il capitolo 4 nel quale verrà illustrato lo sviluppo di modelli aerodinamici interazionali che consentano la caratterizzazione del campo fluidodinamico interazionale non–stazionario attorno a configurazioni di tipo rotore/ala fissa. Nell'ambito di strumenti rivolti

alla fase di progettazione preliminare, anche in questo caso la scelta è ricaduta su approcci basati su una formulazione agli elementi di contorno valida per flussi potenziali, 3D e non–stazionari. Una caratteristica fondamentale del modello sviluppato è rappresentata dalla cosiddetta metodologia *time–accurate*. Come detto il campo fluidodinamico attorno ad una configurazione rotore/ala fissa è caratterizzato da una forte non stazionarietà. Il modello sviluppato consente di valutare i carichi aerodinamici agenti sulle pale e sull'ala calcolando, ad ogni istante di tempo, la soluzione alle equazioni integrali di contorno contemporaneamente su tutte le parti (fisse e rotanti) che costituiscono il sistema rotore/ala fissa.

Un altro aspetto fondamentale del modello sviluppato riguarda l'interazione tra la scia rilasciata dalle pale del rotore e l'ala posta a valle. È necessario da un lato tener conto dell'effetto della porzione di scia che, impattando sulla superficie dell'ala in misura variabile nel tempo, genera dei picchi di pressione sulla superficie stessa; dall'altro la presenza del corpo fisso modifica in modo sensibile il campo fluidodinamico a valle del rotore e dunque influenza la forma della scia vorticosa rilasciata dalle pale. È stato dunque sviluppato un approccio numerico che, nell'ambito di formulazioni aerodinamiche basate su solutori agli elementi di contorno, consenta di tener conto, seppur in misura approssimata, dei fenomeni di impatto tra la scia rotorica e la superficie dell'ala. Basandosi su rilevanze sperimentali relative alla deformazione di strutture vorticose che impattano su un profilo alare (si veda ad esempio [26]), è stata introdotta una correzione dei contributi di quelle porzioni di scia rotorica che si trovano ad interagire con la parte fissa del propulsore. In particolare, poichè nella formulazione potenziale per corpi portanti la scia non può avere soluzione di continuità, è stata introdotta una funzione modulante che tenga conto della posizione della porzione di scia rispetto all'ala (esterna e lontana dalla superficie, esterna e vicina, interna al corpo fisso) per modificarne il contributo alla soluzione del campo fluidodinamico.

Inoltre, per affrontare l'aspetto legato alla deformazione della scia rotorica dovuta alla presenza di corpi solidi nel campo è stato considerato un algoritmo che, a partire dal campo di velocità a valle del rotore calcolato mediante il solutore BEM, consente di allineare la superficie della scia al campo fluidodinamico locale. Utilizzando tale metodologia è pertanto possibile ottenere la forma della scia come parte integrante della soluzione non lineare del problema potenziale.

Nel capitolo 5 i modelli aerodinamici descritti verranno utilizzati in accoppiamento con le equazioni della dinamica strutturale per costruire il modello aeroelastico del sistema completo. Per quanto riguarda il rotore, il modello aerodinamico sviluppato può essere accoppiato con le equazioni del-

la dinamica strutturale delle pale sia considerando pale modellate come corpi rigidi vincolati al mozzo mediante molle che ne simulano l'elasticità (modello elastico a parametri concentrati). Nel caso dell'ala le equazioni della dinamica strutturale che sono state considerate per l'accoppiamento aeroelastico sono quelle di una trave incastrata biflesso–torsionale sviluppate su base modale.
L'accoppiamento tra parte rotante e fissa del propulsore è stato realizzato in modo tale che i carichi aerodinamici agenti sul rotore siano influenzati dal moto dell'ala tramite il legame esplicito che li lega ai gradi di libertà del sistema (ovvero le deformazioni elastiche dell'ala e della pala). Tali carichi vanno direttamente ad influenzare la dinamica dell'ala per il tramite dei vincoli tra pale e albero e tra albero e ultima sezione dell'ala. In tal modo si chiude un ciclo aeroelastico in cui l'interazione rotore/ala si ottiene come risultato di vincoli cinematici che trasferiscono moto dall'ala al rotore e carichi dal rotore all'ala. In quest'ottica viene quindi trascurato l'effetto aerodinamico legato all'interazione tra la scia rotorica e l'ala.

L'ultimo aspetto importante dal punto di vista delle metodologie di accoppiamento per configurazioni rotore/ala fissa è quello legato all'interazione tra la scia rotorica e l'ala. La possibilità di tenere in conto anche questo effetto nell'analisi aeroelastica, seppur in misura approssimata, è stata realizzata utilizzando come completamento del modello ROM basato sul solutore BEM nel dominio della frequenza un input che deriva dal modello aerodinamico interazionale *time–marching*. In particolare, la metodologia agli elementi di contorno per l'aerodinamica interazionale consente di calcolare il campo di velocità non–stazionario che il rotore induce sull'ala. Tale calcolo viene effettuato sulla configurazione di equilibrio non perturbata del sistema, ovvero senza considerare gli effetti delle deformazioni elastiche dell'ala sul campo di velocità indotto. Questa approssimazione viene fatta allo scopo di includere nel modello ROM delle informazioni relative al campo di velocità indotto dai fenomeni interazionali. Il campo così calcolato viene infatti utilizzato in tale modello per modificare le condizioni al contorno aerodinamiche sull'ala per tener conto sia della velocità di deformazione elastica che di quella indotta dai fenomeni interazionali. Si otterrà dunque la relazione che lega lo stato del sistema ai carichi agenti sull'ala.
In entrambi i casi considerati, a seguito dell'accoppiamento aerodinamica/struttura si ottiene un sistema lineare di equazioni differenziali a coefficienti periodici che consente di studiare la stabilità del sistema mediante classiche tecniche agli autovalori per sistemi a coefficienti periodici.
La definizione del modello aeroelastico per il sistema ala/rotore è stata affiancata dalla validazione dei singoli passi necessari al suo completamento mediante confronto con risultati sperimentali e

numerici disponibili in letteratura.

Infine sono state considerate alcune applicazioni del modello sviluppato: in particolare lo studio dei margini di stabilità al whirl flutter del sistema albero motore/rotore di un velivolo tiltrotor e la determinazione delle curve di stabilità aeroelastica al variare delle condizioni di funzionamento di un sistema completo ala/rotore di un velivolo tiltrotor in volo di crociera.

Capitolo 1

Generalità sullo studio del comportamento aeroelastico di configurazioni rotore/ala fissa

La descrizione dei velivoli tiltrotor e dei propulsori pod ha evidenziato le analogie che essi presentano dal punto di vista dell'interazione fluido/struttura. Le due configurazioni propulsive di interesse sono inquadrabili nella tipologia di sistemi ala/rotore nel quale il rotore è calettato su un albero che trasmette i carichi rotorici inerziali ed aerodinamici all'ala che, a sua volta, influenza il comportamento aerodinamico e cinematico del rotore.

L'obiettivo del presente lavoro di tesi è la definizione di un modello per l'analisi della stabilità aeroelastica attorno ad una configurazione di equilibrio di un sistema ala/rotore di questo tipo. La configurazione di equilibrio di interesse è quella del moto di crociera ovvero il moto orizzontale rettilineo uniforme con l'albero disposto parallelamente alla velocità di crociera.

Nel presente capitolo verranno descritte le principali caratteristiche del modello aeroelastico che sarà dettagliatamente descritto nei capitoli successivi. Particolare attenzione sarà posta sulle motivazioni che hanno portato alla definizione del modello e sulle metodologie adottate per lo studio della stabilità .

1.1 Il problema aeroelastico: definizione e procedura risolutiva

Dal punto di vista formale il problema aeroelastico può essere scritto in forma del tutto generale come

$$\mathcal{L}_A[\mathbf{u}] = 0 \tag{1.1}$$

nella quale l'operatore aeroelastico $\mathcal{L}$, integro–differenziale in generale, rappresenta formalmente l'accopppiamento tra le equazioni della dinamica strutturale e quelle che descrivono le azioni aerodinamiche che forzano il sistema. Il vettore $\mathbf{u}$ è l'insieme delle variabili (gradi di libertà) che descrivono il campo di spostamenti elastici del sistema.

L'operatore aeroelastico in generale è in forma di equazioni integro-differenziali, spazio–temporali, alle derivate parziali, non-lineari. Le equazioni che lo costituiscono vengono integrate nello spazio e trasformate in equazioni differenziali ordinarie nel tempo, non-lineari, utilizzando il *metodo di Galërkin*. Tale approccio prevede di esprimere le funzioni incognite di spostamento elastico mediante un insieme chiuso e completo di funzioni linearmente indipendenti. Come si vedrà nel seguito, i gradi di libertà dell'ala nel modello strutturale adottato sono i due spostamenti dell'asse elastico nel piano (lag) e fuori dal piano (flap) e la rotazione della generica sezione attorno al centro elastico (torsione), per i quali:

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{N_{lag}} v_i(t)\,\Psi_i(x) \tag{1.2}$$

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^{N_{flap}} w_j(t)\,\Psi_j(x) \tag{1.3}$$

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{N_{tors}} \phi_n(t)\,\Theta_n(x)\ . \tag{1.4}$$

Nel caso specifico del sistema ala/rotore, solo l'ala è considerata come un continuo soggetto a deformazione elastica distribuita (mentre per le pale del rotore si considera un modello di elasticità a parametri concentrati): le funzioni modali adottate sono i modi $\Psi_i(x)$ e $\Theta_n(x)$ flessionali e torsionali della trave incastrata–libera, noti analiticamente. Sostituendo poi nelle equazioni del moto tali espansioni modali, le equazioni integro–differenziali alle derivate parziali possono essere ricondotte ad equazioni differenziali ordinarie applicando la proiezione delle stesse sulle funzioni modali secondo quanto prescritto dal metodo di Galërkin. In particolare si genera un sistema di

$N_{lag} + N_{flap} + N_{tors}$ equazioni modali in termini di coordinate generalizzate le $v_i(t)$, $w_j(t)$, $\phi_n(t)$. Per ottenere il sistema di equazioni che governa la dinamica delle piccole perturbazioni queste possono essere espresse come la somma di due termini; il primo, rappresenta il contributo corrispondente alla condizione di equilibrio, il secondo, che al contrario ne dipende, rappresenta il contributo non stazionario di perturbazione

$$v_i(t) = v_{0i} + V_i(t) \tag{1.5}$$

$$w_j(t) = w_{0j} + W_j(t) \tag{1.6}$$

$$\phi_n(t) = \phi_{0n} + \Phi_n(t) \tag{1.7}$$

Sostituendo le precedenti nel sistema aeroelastico, eliminando i termini che soddisfano l'equilibrio ed infine ritenendo solo i termini di ordine non superiore al primo poiché si intende descrivere la dinamica delle piccole perturbazioni attorno alla condizione di equilibrio (linearizzazione), si ottiene un sistema di equazioni differenziali nella forma

$$\mathbf{M}_s(\mathbf{x}_{eq}, t)\ \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}_s(\mathbf{x}_{eq}, t)\ \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_s(\mathbf{x}_{eq}, t)\ \mathbf{x} = \mathbf{f}_a(\mathbf{x}, t) \tag{1.8}$$

dove $\mathbf{M}_s$, $\mathbf{C}_s$ e $\mathbf{K}_s$, sono rispettivamente le matrici di massa, smorzamento e rigidezza strutturali del sistema (dipendenti in generale dall configurazione di equilibrio e dal tempo), mentre a secondo membro si hanno i carichi aerodinamici perturbativi agenti su ala e rotore. Nel dominio del tempo tali carichi sono stati indicati in forma implicita rispetto ai gradi di libertà del sistema. Ciò è dovuto sostanzialmente agli effetti non–stazionari indotti dalla vorticità rilasciata nella scia a valle dell'ala e delle pale. Tali effetti inducono nel flusso una sorta di "memoria" nel flusso a causa della quale i carichi aerodinamici all'istante attuale dipendono anche da ciò che accade negli istanti precedenti. Questo tipo di dipendenza si traduce, nel dominio della frequenza, in una dipendenza di tipo trascendente dall frequenza degli operatori aerodinamici introdotti nel presente lavoro.

Lo stato del sistema è rappresentato dal vettore dei gradi di libertà $\mathbf{x}$ ($\mathbf{x}_{eq}$ per lo stato di equilibrio). Tale stato è determinato dagli spostamenti elastici dell'ala e della pala: il comportamento aeroelastico (e le eventuali instabilità) del sistema viene determinato proprio da tali spostamenti.

1.2 Analisi della stabilità

L'analisi di stabilità del sistema fornito dalla 1.8 può essere realizzata risolvendo nel tempo le equazioni differenziali mediante classici algoritmi di integrazione al passo e analizzando il comportamento asintotico degli spostamenti elastici nel tempo.
Molto più conveniente per questo tipo di analisi risultano le tecniche basate sul calcolo degli autovalori del sistema. Tramite tali metodologie, infatti, è possibile rapidamente conoscere il comportamento dinamico del sistema e dunque esse si prestano particolarmente per analisi parametriche e per le fasi di design preliminare. La corretta identificazione degli autotovalori ed autovettori del problema, per quanto di più complessa interpretazione, fornisce infatti uno strumento utile per analisi successive dei risultati ottenuti e rendono chiari gli accoppiamenti tra i vari gradi di libertà del sistema in modo da comprendere nelle varie fasi del transitorio che si ha a seguito della perturbazione quale modo sia dominante.

Allo scopo di adottare questo tipo di approcci è necessario poter esprimere le forzanti aerodinamiche a secondo membro mediante un legame esplicito, lineare con i medesimi gradi di libertà del sistema. Come è stato accennato nell'introduzione, la metodologia adottata per la descrizione dei carichi aerodinamici agenti sull'ala e sul rotore è stata sviluppata appositamente con l'obiettivo di ottenere tale legame. I solutori aerodinamici che verranno introdotti nel presente lavoro, pur essendo lineari perché ottenuti nell'ipotesi di piccole perturbazioni attorno ad una configurazione di equilibrio, non sono in grado di fornire un legame esplicito tra carichi e spostamenti elastici: come detto ciò deriva dalla presenza degli effetti della scia che induce una dipendenza trascendente degli operatori aerodinamici dalla frequenza. L'introduzione di una opportuna approssimazione polinomiale degli operatori aerodinamici consente di ottenere un modello ROM nel quale i carichi sono scritti in funzione esplicità dei gradi di libertà del sistema e di un certo numero di stati aerodinamici che tengono conto della dinamica di scia.
Si ottiene, in definitiva, un sistema omogeneo di equazioni differenziali che può essere messo nella forma di stato $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{eq}, t)\ \mathbf{x}$ per studiarne gli autovalori. È importante sottolineare che la periodicità del sistema è strettamente connessa con il particolare tipo di accoppiamento aerodinamico e cinematico che sussiste tra ala e rotore nella configurazione considerata.

Nel seguito verranno illustrate le due metodologie adottate nel presente lavoro per l'analisi della stabilità del sistema. La prima è basata sulla teoria di Floquet–Lyapunov per sistemi di equazio-

ni differenziali ordinarie, lineari, del primo ordine, a coefficienti periodici. La seconda si fonda invece su una trasformazione del vettore degli stati del sistema in un sistema di coordinate detto "multipala" che permette di approssimare il sistema di equazioni differenziali con uno a coefficienti costanti e dunque di studiarne la stabilità mediante il semplice calcolo degli autovettori del sistema trasformato. Tale procedimento comporta una notevole riduzione dei tempi di calcolo rispetto all'applicazione della teoria di Floquet; inoltre, come sarà chiaro nel seguito, in questo caso si evitano le difficoltà nel calcolo delle frequenze aeroelastiche che il metodo di Floquet comporta.

1.2.1 Teoria di Floquet-Lyapunov

La teoria illustrata nel presente paragrafo consente di analizzare la stabilità di un sistema di equazioni lineari, periodiche, del primo ordine mediante il calcolo degli autovalori di una opportuna matrice di transizione.
Rimandando all'appendice A per i dettagli analitici. in questa sede verrà illustrata brevemente la procedura per l'applicazione della teoria e se ne commenteranno gli aspetti salienti.

Si consideri un sistema dinamico descritto da equazioni differenziali ordinarie, a coefficienti tempo varianti, del primo ordine, nella forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} \tag{1.9}$$

La matrice $\mathbf{A}$ è funzione del tempo ed in particolare, in questa sede, si è interessati a matrici che siano periodiche, in quanto la matrice di stato che si ottiene per il sistema ala/rotor è di tipo periodico.

La teoria di Floquet consente di studiare la stabilità di un sistema a coefficienti periodici riconducendosi, mediante un opportuno cambiamento di base, ad uno a coefficienti costanti equivalente. In particolare, un corollario del teorema di Floquet afferma che esiste un cambiamento di base, caratterizzato da una matrice non singolare e periodica, che trasforma il sistema A.1 in un sistema a coefficienti costanti; ovvero, dato il sistema

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} \tag{1.10}$$

esiste una cambiamento di base

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{y}(t)\ , \tag{1.11}$$

nella quale $\mathbf{P}$ è una matrice periodica, che lo trasforma nel sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mathbf{y} \tag{1.12}$$

a coefficienti costanti, la cui soluzione è :

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{B}t}\mathbf{y}_0 \tag{1.13}$$

con $\mathbf{y}_0$ condizione iniziale. La determinazione del comportamento dinamico del sistema di partenza si riconduce dunque al calcolo degli autovalori della matrice a coefficienti costanti $\mathbf{B}$.

Come dimostrato nell'appendice A, per risalire alla matrice $\mathbf{B}$ occorre definire la matrice $\mathbf{C}$ monodroma, a coefficienti costanti: tale matrice è non singolare è costruita in modo tale che ciascuna sua colonna rappresenti il vettore delle risposte del sistema ad ognuna delle condizioni iniziali fondamentali (ovvero le colonne della matrice identità) calcolate in corrispondenza al periodo del sistema. La matrice delle soluzioni fondamentali risulta legata alla $\mathbf{B}$ dalla relazione

$$\mathbf{C} = e^{\mathbf{B}T} \tag{1.14}$$

e dunque il calcolo degli autovalori di $\mathbf{B}$ richiede la conoscenza della matrice $\mathbf{C}$. Dal punto di vista operativo, nota la matrice $\mathbf{A}(t)$ di dimensione n, si calcola, tramite integrazione al passo, la risposta $\mathbf{x}(t)$ ad una condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ *fondamentale* (ovvero una colonna di $\mathbf{I}$); il procedimento viene ripetuto per n volte ed in tal modo si costruisce la matrice $\mathbf{C}$.
Il calcolo della matrice monodroma è la chiave per lo studio della stabilità di sistemi a coefficienti periodici. Infatti, come si è visto, il teorema di Floquet consente di capire il comportamento dinamico di un sistema di questo tipo semplicemente analizzando gli autovalori della matrice $\mathbf{B}$; poiché essa è legata alla matrice $\mathbf{C}$, risulta utile trovare un analogo legame tra gli autovalori di $\mathbf{B}$ e quelli di $\mathbf{C}$ in modo che l'analisi si riconduca allo studio degli autovalori di $\mathbf{C}$.
Come dimostrato in appendice, il legame tra gli autovalori θ di $\mathbf{C}$ e λ di $\mathbf{B}$ è

$$\lambda = \frac{1}{T}(\ln|\theta| + j\angle\theta) + n\frac{2\pi}{T}j \tag{1.15}$$

nella quale si è indicata con j l'unità immaginaria.

La condizione di instabilit del sistema si traduce allora nelle due condizioni equivalenti:

$$|\theta_i| > 1 \qquad Re(\lambda_i) > 0 \tag{1.16}$$

Nelle figure A.1si possono vedere le regioni di stabilit nel piano di Gauss per θ_i e per λ_i.

É interessante notare che nei sistemi periodici si presenta un tipo di instabilità che nei sitemi a coefficienti costanti non esiste. Come si vede, nelle figure è anche riportato un possibile luogo delle radici per sistemi periodici: la separazione dei rami, che per un sistema a coefficienti costanti può verificarsi solo sull'asse reale, per sistemi periodici può verificarsi per frequenza diversa da zero.
Da quanto esposto appare evidente il parallelo tra l'analisi di stabilità di sistemi a coefficienti costanti e di sistemi a coefficienti variabili nel tempo: tuttavia è opportuno sottolineare che, per questi

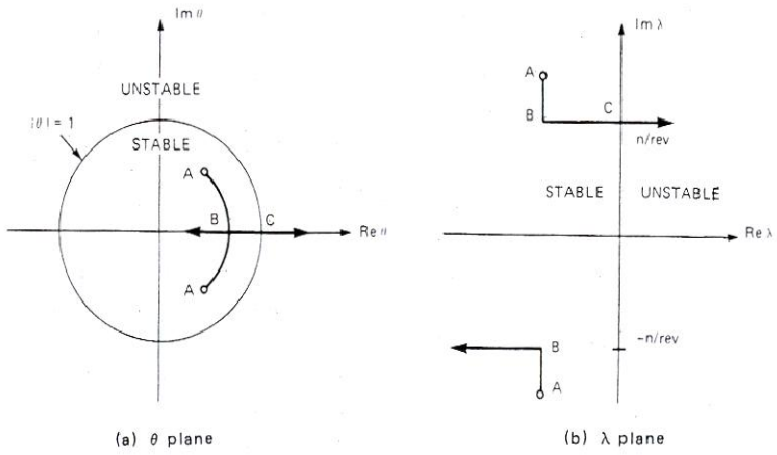

Figura 1.1: Piano di Gauss.

ultimi, l'analisi è subordinata alla possibilità di calcolare, imponendo diverse condizioni iniziali, la soluzione del sistema in corrispondenza al periodo T.

Per quanto riguarda la parte immaginaria dell'autovalore, legata come detto alla frequenza, vale la relazione

$$Im(\lambda) = j(\frac{\angle\theta}{T} + \frac{1}{T}2n\pi) \tag{1.17}$$

ovvero ad un autovalore θ corrispondono infiniti autovalori λ aventi una frequenza base (legata a quella di θ) a cui vengono sommati dei multipli della frequenza giro. Ciò risulta comprovato dall'analisi dello spettro in frequenza della risposta del sistema nel tempo.

Questo aspetto rende l'utilizzo della teoria di Floquet delicato quando si renda necessario conoscere le frequenze proprie del sistema al variare delle condizioni di funzionamento per motivi legati, per esempio, alla scelta degli attuatori opportuni per il dimensionamento dei sistemi di controllo, al dimensionamento di tutte le componenti del sistema per evitare fenomeni di risonanza, etc.

1.2.2 Riduzione del sistema in coordinate multipala

L'approccio descritto in questo paragrafo è l'approccio classico (e quello più utilizzato) nello studio numerico della stabilità di pale elicotteristiche. Esso si basa sul passaggio ad un sistema di coordinate differente che consente di ottenere dal sistema di partenza un altro sistema a coefficienti costanti che, in misura approssimata, risulta equivalente al primo (per maggiori dettagli si veda

[21]).

Per poter comprendere meglio questo approccio è necessario descrivere in linea generale la struttura che assume il sistema aeroelastico messo in forma normale. Come detto, si ottiene un sistema del tipo

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}_{eq}, t)\ \mathbf{x}\ . \tag{1.18}$$

Sia $\mathbf{q}^w$ il vettore degli N_{tot} gradi di libertà che descrivono il moto dell'ala. Gli elementi di tale vettore sono le ampiezze modali introdotte in precedenza nell'adottare il metodo di Galërkin per discretizzare spazialmente il problema. Sia inoltre $\mathbf{q}^r$ il vettore degli $N_m * N_b$ gradi di libertà di tutte le N_b pale: come si vedrà nel seguito, per lo specifico modello di rotore articolato adottato nel presente lavoro i gradi di libertà per ciascuna pala saranno i due moti nel piano (lag) e fuori del piano di rotazione (flap), quindi si avrà $N_m = 2$. Sia infine $\mathbf{r}$ il vettore che raccoglie gli N_a stati aggiunti aerodinamici di ala e di rotore. Ciò posto, la struttura del vettore degli stati $\mathbf{x}$ è la seguente:

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}^w \\ \mathbf{q}^r \\ \dot{\mathbf{q}}^w \\ \dot{\mathbf{q}}^r \\ \mathbf{r} \end{array} \right\}\ . \tag{1.19}$$

La trasformazione multipala consente di esprimere le variabili di pala in funzione lineare di un diverso set di variabili che rappresentano complessivamente i gradi di libertà di rotore. Tale trasformazione si applica alle variabili di rotore. Si consideri, ad esempio, un rotore isolato. In generale le equazioni del moto del rotore sono derivate nel sistema di riferimento rotante ed i gradi di libertà del rotore descrivono il moto di ciascuna pala separatamente. Le coordinate che si introducono con la trasformazione multipala descrivono il moto complessivo del rotore nel sistema di riferimento non rotante.

Si introducono dunque le seguenti variabili:

$$\begin{aligned}
\beta_0 &= \frac{1}{N_b}\sum_{m=1}^{N_b}\beta^{(m)} \\
\beta_{N_b/2} &= \frac{1}{N_b}\sum_{m=1}^{N_b}\beta^{(m)}(-1)^m \\
\beta_{nc} &= \frac{2}{N_b}\sum_{m=1}^{N_b}\beta^{(m)}\cos(n\psi_m) \\
\beta_{ns} &= \frac{2}{N_b}\sum_{m=1}^{N_b}\beta^{(m)}\sin(n\psi_m)
\end{aligned} \tag{1.20}$$

nella quale $\psi_m = \Omega t - 2\pi(m-1)/N_b$ è l'angolo azimutale della m–esima pala e si è indicato con $\beta^{(m)}$ il generico grado di libertà della m–esima pala. La trasformazione dal generico grado di libertà di pala β_m alle coordinate multipala è dunque

$$\beta_m(t) = \beta_0(t) + \sum_n \Big[\beta_{nc}(t)\cos(n\psi_m) + \beta_{ns}(t)\sin(n\psi_m)\Big] + \beta_{N/2}(t)\,(-1)^m\,, \tag{1.21}$$

con $n = 1, \frac{(N-1)}{2}$ per N dispari e $n = 1, \frac{(N-2)}{2}$ per N pari. Il grado di libertà $\beta_{N/2}$ compare solo se il numero di pale è pari.

Le variabili introdotte sono funzioni del tempo e descrivono il moto di rotore nel suo insieme. Si può dimostrare che per sistemi ala/rotore solo le variabili β_0 (detta modo collettivo), β_{1c}, β_{1s} (denominate modi ciclici) sono importanti nel definire la dinamica del rotore in quanto si accoppiano con la dinamica dell'ala, mentre le altre variabili multipala β_{nc}, β_{ns} e $\beta_{N/2}$ (modo differenziale) descrivono esclusivamente il moto interno del rotore e non sono responsabili di alcun trasferimento di carichi dal rotore all'ala. Ad esempio, per un rotore dotato di tre pale, i gradi di libertà multipala sono β_0, β_{1c} e β_{1s}. Si noti che la trasformazione è tale per cui il numero delle variabili totali rimane immutato e dunque non si aumenta la dimensione del problema.

Partendo dalle equazioni 1.21, è possibile definire una matrice di trasformazione $\mathbf{T}^r_M$ tale per cui

$$\mathbf{q}^r = \mathbf{T}^r_M(t)\,\mathbf{q}^r_M\,, \tag{1.22}$$

nella quale si è indicato con $\mathbf{q}^r_M$ il vettore delle variabili multipala relative a ciascun grado di libertà di pala nell'ordine β_0, β_{1c}, β_{1s} e $\beta_{N/2}$. La matrice $\mathbf{T}^r_M$ è definita a blocchi. In particolare, per N_b pari a 4 e considerando solo le variabili multipala β_0, β_{1c}, β_{1s} e $\beta_{N/2}$, per la m–esima pala dotata di

2 gradi di linertà si ha una struttura del tipo

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos(\psi_m) & \sin(\psi_m) & (-1)^m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \cos(\psi_m) & \sin(\psi_m) & (-1)^m \end{bmatrix} .$$

Tale blocco riceve in ingresso le variabili multipala corrispondenti ai due gradi di libertà della pala m–esima e fornisce in uscita i gradi di libertà medesimi.

È possibile dunque ottenere una matrice di trasformazione per il vettore di stato $\mathbf{x}$ nella forma

$$\mathbf{T}_M = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_M^r & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dot{\mathbf{T}}_M^r & \mathbf{0} & \mathbf{T}_M^r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} , \tag{1.23}$$

mediante la quale si può scrivere

$$\mathbf{x} = \mathbf{T}_M \, \mathbf{y} \tag{1.24}$$

dove $\mathbf{y}$ è il vettore delle variabili del sistema in coordinate multipala.

Sostituendo nel sistema 1.18 si ottiene

$$(\dot{\mathbf{T}}_M \, \mathbf{y} + \mathbf{T}_M \dot{\mathbf{y}}) = \mathbf{A} \, \mathbf{T}_M \, \mathbf{y} \tag{1.25}$$

e quindi

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{T}_M^{-1} \, (\mathbf{A} \, \mathbf{T}_M - \dot{\mathbf{T}}_M) \, \mathbf{y} \, . \tag{1.26}$$

Introducendo la matrice $\mathbf{B}(t) = \mathbf{T}_M^{-1} \, (\mathbf{A} \, \mathbf{T}_M - \dot{\mathbf{T}}_M)$ il sistema può essere riscritto nella forma

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}(t) \, \mathbf{y} \, , \tag{1.27}$$

formalmente identica al 1.18, e può essere risolto con le stesse tecniche.

Ciò che risulta interessante ai fini dell'analisi di stabilità è che la trasformazione di coordinate introdotta comporta una ridistribuzione del contenuto armonico della matrice di stato. Infatti, applicando alla matrice $\mathbf{A}(t)$ uno sviluppo in serie di Fourier, si nota che il sistema presenta oltre al contributo costante, tutte le frequenze multiple della Ω relativa alla velocità di rotazione. Se si applica il medesimo sviluppo al sistema trasformato, ovvero alla matrice di stato $\mathbf{B}(t)$, si trova un contenuto armonico dovuto solo alle frequenze multiple della $(N_b/2)\Omega$ per N_b pari e $[(N_b+1)/2]\Omega$

se N_b è dispari. Di fatto, quindi, la trasformazione multipala fa si che una parte del contenuto armonico del sistema di partenza si sposti sul valor medio del sistema trasformato. Questo fatto fa si che lo studio del sistema completo possa essere ridotto, con un'ottima approssimazione, ad un sistema a coefficienti costanti, considerando nell'analisi di stabilità solo il valor medio della matrice di stato $\mathbf{B}(t)$.

È a questo punto chiaro che il problema della determinazione della stabilità viene ricondotto, in questo modo, ad un'analisi degli autovalori della matrice $\mathbf{B}_0$ così ottenuta.

La parte reale di questi autovalori, differirà da quella degli autovalori del sistema originale, per la semplice approssimazione della matrice $\mathbf{B}$ con il suo valor medio e non per il passaggio alle coordinate multipala. Questo passaggio, infatti, non può far altro che modificarne le frequenze (ovvero la parte immaginaria) in quanto introduce nel sistema prodotti con funzioni $\sin$ e $\cos$ che accoppiandosi danno origine a un modo fondamentale di vibrare che ha parte reale pari alla parte reale degli autovalori associati al sistema di partenza e parte immaginaria pari a $n \pm i\Omega$. Prendendo

Figura 1.2: Trasformazione degli autovalori dal sistema in coordinate pala singola a quello in coordinate multipala.

in considerazione un semplice sistema analitico a coefficienti periodici caratterizzato da 10 gradi di libertà , in figura 1.2 è mostrato il confronto tra la parte reale dei primi 6 autovalori del sistema calcolati utilizzando la teoria di Floquet e la trasformazione multipala. Come si nota i due meto-

di forniscono risultati coincidenti Dal punto di vista dell'accuratezza della metodologia illustrata, tipicamente l'errore commesso a seguito dell'approssimazione affligge maggiormente gli autovalori più lontani dal limite di stabilità, garantendo quindi una certa sicurezza nella predizione degli autovalori critici.

Rispetto alla teoria di Floquet, il metodo illustrato consente con buona approssimazione di determinare univocamente le frequenze aeroelastiche del sistema. Inoltre, la trasformazione multipala e la successiva approssimazione della matrice di stato con il proprio valor medio comporta oneri computazionali molto ridotti: per poter determinare gli autovalori mediante la teoria di Floquet è necessario integrare al passo il sistema (utilizzando quindi una discrettizzazione temporale piuttosto fitta) su un arco temporale pari al periodo ed un numero di volte pari al numero complessivo di stati. La determinazione di un sistema a coefficienti costanti che approssima il sistema di partenza richiede invece solo i pochi campioni sul giro necessari per la determinazione del valor medio della matrice di stato multipala. La possibilità di avere tempi di calcolo molto ridotti rende questa metodologia particolarmente adatta qualora si intenda utilizzare il sistema aeroelastico per ottimizzare i vari aspetti globali del velivolo tenendo conto dei vincoli di stabilità . Per ulteriori dettagli relativi al confronto tra le due metodologie illustrate si veda [36].

Capitolo 2

Modelli aerodinamici di ordine ridotto basati su solutori 2D

I modelli aerodinamici di ordine ridotto (ROM nel seguito, dall'inglese *Reduced–Order Models*) nascono espressamente per applicazioni legate allo studio della stabilità aeroelastica.
In questo capitolo verranno illustrati i passi che consentono di identificare un modello ROM per il calcolo dei carichi aerodinamici non stazionari agenti sulle pale del rotore e sull'ala di una configurazione rotore/ala fissa.
L'identificazione di un modello di ordine ridotto consente, per definizione, di ridurre il numero di variabili di stato necessari per descrivere i carichi aerodinamici e, come sarà chiaro nel seguito, l'espressione che si ottiene ben si presta all'accoppiamento con le equazioni della dinamica strutturale del sistema per lo studio del comportamento aeroelastico dello stesso e per la sintesi di leggi di controllo.
La definizione di un modello aerodinamico ROM per la descrizione dei carichi aerodinamici agenti sulle pale del rotore rappresenta il contributo innovativo del presente lavoro di tesi. In particolare, il modello sviluppato è basato su un operatore aerodinamico che lega in forma esplicita le perturbazioni dei gradi di libertà di ala e rotore con le forze generalizzate agenti sulle pale del rotore ottenuto mediante approssimazione polinomiale del solutore aerodinamico.
Come sarà chiaro nel seguito, la formulazione adottata per la definizione del modello ROM risulta particolarmente indicata per applicazioni in fase di progettazione preliminare del sistema, fase nella quale sono richiesti strumenti di simulazione che coniughino accuratezza e ridotti oneri computa-

zionali.

Il modello aerodinamico approssimato illustrato nel presente capitolo per descrivere i carichi agenti sulle pale del rotore è basato su una teoria bidimensionale non–stazionario che consente di calcolare i carichi aerodinamici agenti sulla generica sezione di una pala isolata. L'assunzione di base è che il moto della pala sia influenzato da quello dell'ala per il tramite dell'albero motore (denominato pilone nel seguito). Nessuna interferenza aerodinamica reciproca tra le varie pale costituenti il rotore può essere tenuta in conto dal modello utilizzato. Viene inoltre trascurata l'interazione di natura aerodinamica tra la scia rilasciata a valle di ciascuna pala del rotore e la superficie dell'ala. Tale argomento verrà affrontato con maggiore dettaglio nei capitoli 3 e 4 nei quali verranno illustrati solutori aerodinamici maggiormente evoluti.

In ogni caso, il solutore aerodinamico presentato nel presente capitolo è ampiamente adottato in letteratura per lo studio della stabilità aeroelastica sia di rotori che di sistemi ala/rotore.

Entrando maggiormente nel dettaglio, il modello ROM che verrà identificato nel presente capitolo (come peraltro anche quello basato su un solutore aerodinamico più evoluto che verrà presentato nel capitolo 3) consente, considerando un rotore nella condizione di equilibrio corrispondente al volo in flusso assiale (ovvero la condizione di un tiltrotor in configurazione *airplane mode*), di valutare i carichi non–stazionari agenti sulle pale del rotore e indotti dall'accoppiamento cinematico tra ala e rotore e dall'elasticità della pala. Il modello ROM viene identificato nella forma di un set di equazioni lineari che legano l'evoluzione temporale dei carichi aerodinamici di pala alle deformazioni dell'ala e ai gradi di libertà elastici delle pale stesse. A causa dell'accoppiamento cinematico tra queste grandezze ed il moto rotatorio delle pale, tali equazioni presentano coefficienti tempo–varianti. Inoltre, l'inclusione degli effetti di "memoria" del flusso indotti dalla presenza della vorticità rilasciata a valle di ciascuna pala comporta l'introduzione di un numero finito di variabili di stato aerodinamiche (denominate nel seguito "stati aggiunti") nel modello matematico.

Il contributo innovativo del presente lavoro è rappresentato dalla circostanza che, nonostante il modello ROM risulti avere coefficienti periodici, la sua identificazione si basa su solutori aerodinamici scritti nel dominio della frequenza.

Un approccio del tutto analogo verrà seguito per la determinazione del modello ROM per i carichi aerodinamici agenti sulla'ala in funzione degli spostamenti elastici della stessa.

Nel presente capitolo verrà illustrata nel dettaglio la procedura per l'identificazione del modello

ROM per il rotore partendo dalla descrizione della schematizzazione adottata per il rotore, e dalla derivazione del solutore utilizzati per la descrizione dei carichi aerodinamici.

Il moto di ciascuna pala del rotore viene visto come sovrapposizione di un moto di trascinamento dovuto all'ala e di un moto relativo rispetto al sistema di riferimento rotante che ha origine nel mozzo del rotore. Di fatto ciascuna pala è dotata di un insieme di gradi di libertà di corpo rigido per la sua appartenenza al rotore e di gradi di libertà elastici che ne definiscono il suo moto relativo nel sistema di riferimento rotante. Identificando, il legame cinematico che lega tali gradi di libertà ai gradi di libertà del sistema (ovvero vincolando matematicamente il rotore al pilone che è solidale all'estremità dell'ala) si completa l'identificazione del modello ROM. In particolare solo i gradi di libertà che definiscono il moto rigido daranno luogo a coefficienti periodici nel modello ROM in quanto il moto di trascinamento dell'ala si proietta nel sistema di riferimento rotante in misura variabile a seconda della posizione angolare del rotore. I gradi di libertà elastici danno invece luogo a coefficienti costanti in quanto descritti da modi costanti nel riferimento rotante.
Tale procedura risulta del tutto generale, ovvero può essere applicata a qualunque solutore aerodinamico scritto nel dominio della frequenza che sia in grado di descrivere i carichi aerodinamici perturbativi agenti sulle pale del rotore purchè la tempo–varianza dei coefficienti del modello ROM sia di natura cinematica e non legata alla variazione della posizione relativa tra la generica pala e la vorticità da essa rilasciata (questa circostanza si verifica se si tiene in conto la deformazione che la presenza dell'ala induce sulla scia rotorica). Naturalmente l'onere computazionale del modello dipende fortemente dalla complessità del solutore aerodinamico utilizzato per la sua identificazione.

2.1 Schematizzazione del rotore e definizione dei sistemi di riferimento

Nel presente lavoro il rotore è di tipo articolato e viene descritto mediante un modello di elasticità parametri concentrati: i gradi di libertà di ciascuna delle N_b pale che lo costituiscono sono gli angoli di flappeggio β e di brandeggio (*lag*) γ mentre in prima approssimazione si assume bloccata la torsione (*pitch*). La scelta di considerare il pitch bloccato rigidamente è stata operata osservando che, per le caratteristiche di rigidezza torsionale tipiche delle pale dei tiltrotor, tale grado di libertà risulta influenzare la dinamica del sistema in misura minore rispetto agli altri.

Ciascuna pala è schematizzata come corpo rigido dotato di due gradi di libertà e connesso all'albero, in corrispondenza del mozzo, mediante due cerniere, dotate di molle, che simulano l'effetto dell'elasticità.

Le pale sono sfasate spazialmente di un angolo pari all'azimuth ψ e la cinematica di ciascuna di esse è influenzata dal moto di trascinamento dell'ala in modo diverso a seconda della posizione angolare. Pertanto sarà essenziale nel seguito descrivere la cinematica della catena multicorpo per comprendere le interazioni dinamiche e cinematiche tra gli elementi che la costituiscono.

Per la descrizione della dinamica strutturale e dell'aerodinamica di rotore è necessario definire alcuni sistemi di riferimento cartesiani ortogonali che saranno adottati nel seguito. In particolare i

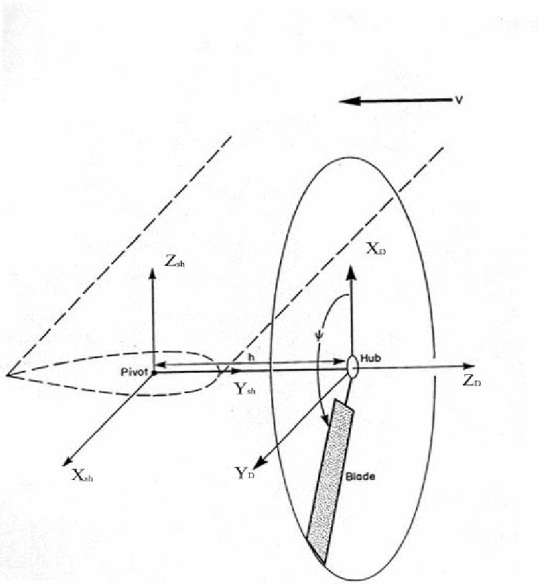

Figura 2.1: Sistemi di riferimento albero e disco.

riferimenti considerati sono (si veda figura 2.1):

1. **Riferimento albero**:

   riferimento solidale con il tip alare, avente origine nel centro elastico dell'ultima sezione, asse x_{sh} diretto come la tangente all'asse elastico deformato e assi y_{sh} e z_{sh} contenuti nel piano della sezione; in particolare l'asse y_{sh} è diretto come l'albero, mentre l' asse z_{sh} è verticale verso l'alto. Nel seguito si indicherà tale riferimento con $\mathcal{R}_{sh}(x_{sh}, y_{sh}, z_{sh})$.

2. **Riferimento Disco**:

   ha origine nel mozzo del rotore, piano $x_d y_d$ ortogonale all'albero e asse z_d allineato con esso. Gli assi del riferimento rotore sono sempre paralleli ed equiorientati rispetto agli assi del riferimento albero. Nel seguito si indicherà tale riferimento con $\mathcal{R}_D(x_d, y_d, z_d)$.

3. **Riferimento Disco-Rotante**:

   all'istante $t = 0$ coincide con il sistema di riferimento disco; segue la pala esclusivamente nel suo moto di rotazione attorno all'asse z_d. Nel seguito si indicherà tale riferimento con $\mathcal{R}_{dr}(x_{dr}, y_{dr}, z_{dr})$.

4. **Riferimento pala**:

   ha origine nell'hub e coincide con il riferimento $\mathcal{R}_{Dr}$ per la pala 1 di riferimento; è solidale alla pala. Nel seguito si indicherà tale riferimento con $\mathcal{R}_b(x_b, y_b, z_b)$. Rispetto a tale riferimento la pala risulta dotata di calettamento. In questo riferimento sono definiti i modi che caratterizzano i gradi di libertà elastici di pala.

5. **Riferimento di sezione**:

   è definito per ogni sezione di pala; ha origine nel centro aerodinamico della sezione ed è solidale alla pala. L'asse x_c è parallelo alla corda e rivolto dal bordo d'uscita al bordo d'attacco; l'asse ortogonale alla corda ed è diretto da ventre a dorso. Nel seguito si indicherà tale riferimento con $\mathcal{R}_c(x_c, y_c, z_c)$.

Nel seguito verranno indicate con gli apici sh,D,dr e b le immagini delle grandezze vettoriali nei riferimenti albero, disco, disco rotante e pala.

2.2 Modelli aerodinamici non stazionari 2D per il rotore

Il modello non stazionario bidimensionale descritto in questa sezione è basato su una descrizione dei carichi aerodinamici agenti sulla generica sezione di pala. I carichi globali agenti sulla pala vengono successivamente ottenuti integrando i carichi di sezione secondo un approccio di tipo *strip theory*.

2.2.1 Carichi aerodinamici di sezione

La determinazione dei carichi aerodinamici che agiscono sulla pala di un rotore in condizioni di propeller (moto in direzione parallela all'asse), è derivata dall'estensione compiuta da Greenberg [13] della teoria bidimensionale di Theodorsen [40] per un profilo sottile in un flusso potenziale e incomprimibile. Entrando in dettaglio si può dire che la teoria di Greenberg è una estensione della teoria bidimensionale, incompressibile, potenziale non stazionaria di Theodorsen in cui si ricavano le forze aerodinamiche agenti su un profilo sottile in grado di ruotare attorno ad un punto di *pivot*, in genere distinto dal fuoco, e di traslare normalmente al flusso. L'estensione di Greenberg a questo modello è data dall'introduzione di un moto rigido in direzione della corrente, simulato con l'introduzione di una velocità asintotica pulsante. La teoria utilizzata considera quindi il flusso bidimensionale attorno ad un profilo sottile che forma un angolo $\epsilon(t)$ rispetto la corrente all'infinito, e che si trova ad una altezza $h(t)$ rispetto ad un piano di riferimento parallelo alla V_∞, presa positiva quando il punto di pivot è più in basso del piano suddetto.

La teoria di Greenberg consente di tener conto degli effetti non stazionari legati al rilascio di vorticità a valle del bordo d'uscita del profilo. La presenza di una scia vorticosa a valle del profilo è strettamente legata alla generazione dei carichi aerodinamici sul profilo stesso; nella teoria di Theodorsen essa è vista come una linea vorticosa che si trova a valle del profilo rispetto alla direzione della velocità tangenziale indotta dalla rotazione.
Le espressioni per la portanza e per il momento aerodinamico assumono la forma

$$L = L_C + L_{NC} \tag{2.1}$$

$$M = M_C + M_{NC} \tag{2.2}$$

nella quale sono evidenziati le componenti circolatoria e non circolatoria del momento e della portanza (si veda figura 2.2). In particolare il contributo circolatorio della portanza risulta ortogonale al vento relativo al profilo (identificato dalla velocità U) mentre quello non circolatorio è ortogonale alla corda del profilo. I carichi circolatori sono legati agli effetti indotti dal rilascio di vorticità nel campo, mentre quelli non circolatori sono connessi essenzialmente alla non stazionarietà del moto, ovvero al coinvolgimento della massa d'aria circostante il corpo nella valutazione di effetti di inerzia complessiva.
Nel caso particolare in cui si consideri la posizione dell'asse di torsione al quarto di corda del pro-

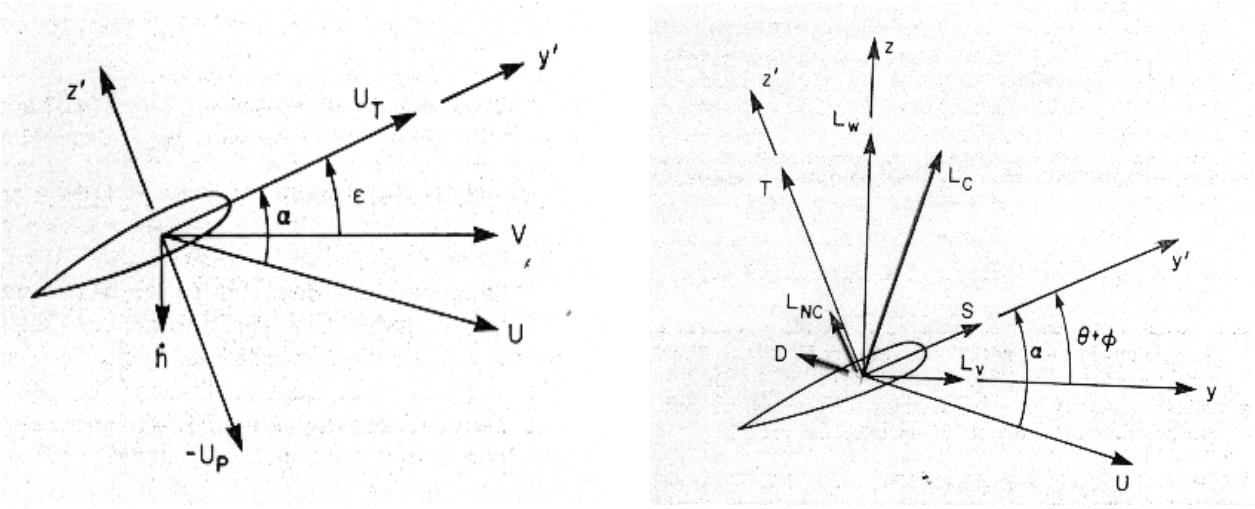

Figura 2.2: Carichi aerodinamici di sezione.

filo (dal bordo di attacco) componenti circolatorie e non circolatorie di forza e momento assumono la forma

$$L_{NC} = \frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \frac{c}{4} \left(\ddot{h} + V\dot{\epsilon} + \dot{V}\epsilon + \frac{c}{4}\ddot{\epsilon} \right) \tag{2.3}$$

$$L_C = \frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} V \left(\dot{h} + V\epsilon + \frac{c}{2}\dot{\epsilon} \right) \tag{2.4}$$

$$M_{NC} = -\frac{c}{4} L_{NC} - \frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \left(\frac{c}{4} \right)^3 \frac{\ddot{\epsilon}}{2} \tag{2.5}$$

$$M_C = \frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \left(\frac{c}{4} \right)^2 V\dot{\epsilon} \tag{2.6}$$

in cui ϵ è rappresenta il grado di libertà di torsione del profilo, h il grado di libertà di sezione indotto dal moto di flappeggio della pala, V rapresenta la somma del moto dovuto alla velocità di rotazione e di quello dovuto al lag di pala, ρ_∞ è la densità dell'aria, c_{l_α} rappresenta la pendenza della curva del coefficiente di portanza del profilo e c identifica la corda del profilo. L'angolo d'attacco della sezione è l'angolo compreso tra la corda del profilo e la direzione della velocità della corrente effettiva U; esso può essere scritto in funzione delle componenti della U in direzione rispettivamente ortogonale (U_P) e parallela alla corda (U_T) nella forma $\alpha = tan^{-1}(U_P/U_T)$.

Dal punto di vista matematico, gli effetti indotti dalla presenza della scia a valle del profilo sono inclusi nel modello mediante la cosiddetta *Lift Deficiency Function* $\mathcal{C}(k)$, ovvero una funzione che dipende in modo trascendente dalla frequenza ridotta $k = \omega c/2\Omega R$ e che moltiplica i termini circolatori della portanza. Tali effetti sono riconducibili ad una sorta di "effetto memoria" nel flusso introdotto dai ritardi di scia a causa del quale ciò che accade all'istante t dipende anche da ciò che

è accaduto negli istanti precedenti.

In definitiva le espressioni di forza e momento sono

$$L = L_C \ \mathcal{C}(k) + L_{NC} \tag{2.7}$$

$$M = M_C + M_{NC} \tag{2.8}$$

Nell'ipotesi di piccoli angoli d'attacco α e piccole perturbazioni del moto di torsione è possibile definire le velocità di sezione nel modo seguente

$$U_P \approx -\dot{h} - V\epsilon \tag{2.9}$$

$$U_T \approx U = \sqrt{U_T^2 + U_P^2} \approx V \tag{2.10}$$

Sostituendo le 2.9 e 2.10 nelle espressioni della portanza e del momento si ottengono le seguenti espressioni

$$L_{NC} = \frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \frac{c}{4} \left(-\dot{U}_P + \frac{c}{4}\ddot{\epsilon} \right) \tag{2.11}$$

$$L_C = \frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} V \left(-U_P + \frac{c}{2}\dot{\epsilon} \right) \tag{2.12}$$

$$M_{NC} = -\frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \left(\frac{c}{4} \right)^2 \left(-\dot{U}_P + \frac{3c}{8}\ddot{\epsilon} \right) \tag{2.13}$$

$$M_C = -\frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \left(\frac{c}{4} \right)^2 U_T \dot{\epsilon} \tag{2.14}$$

Nella trattazione viene inclusa anche una resistenza che tiene conto dell'attrito di forma del profilo. Tale forza agisce in direzione parallela e verso opposto alla velocità U della corrente e dipende da un coefficiente costante di natura empirico–sperimentale il c_{d_0}.

$$D = \frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \frac{c_{d_0}}{a} \left(U_T^2 + U_P^2 \right) \tag{2.15}$$

È possibile ora ottenere le componenti dei carichi di sezione in direzione normale alla corda (T) e parallela alla stessa (S)

$$T = L_C cos\alpha + L_{NC} + D sin\alpha \tag{2.16}$$

$$S = L_C sin\alpha - D cos\alpha \tag{2.17}$$

Per il $cos\alpha$ ed il $sin\alpha$ si ha

$$cos\alpha = \frac{U_T}{U} = \frac{U_T}{\sqrt{U_T^2 + U_P^2}} \tag{2.18}$$

$$sin\alpha = -\frac{U_P}{U} = -\frac{U_P}{\sqrt{U_T^2 + U_P^2}} \tag{2.19}$$

Sostituendo le espressioni 2.11, 2.12, 2.15, 2.18 e 2.19 nelle equazioni 2.16 e 2.17 trascurando il contributo della resistenza nella T, in quanto in essa tale termine comparirebbe come rapporto rispetto al c_{l_α} e pertanto $<< 1$, e confondendo la U con U_T nell'espressione della S si perviene a

$$T = \frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \left[\left(-U_T U_P + \frac{c}{2} U_T \dot{\epsilon} \right) \mathcal{C}(k) - \frac{c}{4} \dot{U}_P + \left(\frac{c}{4} \right)^2 \ddot{\epsilon} \right] \tag{2.20}$$

$$S = \frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \left[\left(U_P^2 - \frac{c}{2} U_P \dot{\epsilon} \right) \mathcal{C}(k) - \frac{c_{d_0}}{c_{l_\alpha}} U_T^2 \right] \tag{2.21}$$

I carichi aerodinamici ottenuti sono espressi in componenti rispetto al sistema di riferimento di sezione, pertanto occorre esprimerli nel riferimento pala mediante (indicato con y, z in figura 2.2, destra) la seguente trasformazione

$$L_v = S\, cos\theta - T\, sen\theta \tag{2.22}$$

$$L_w = T\, cos\theta + S\, sen\theta \tag{2.23}$$

nella quale θ rappresenta l'angolo di calettamento della sezione considerata.

In definitiva i carichi aerodinamici di sezione in termini di forza nella direzione del moto di lag, di flap e di momento rispetto al quarto di corda assumono la seguente forma:

$$\begin{aligned} L_v &= \frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \left\{ - \left[\left(-U_T U_P + \frac{c}{2} U_T \dot{\epsilon} \right) \mathcal{C}(k) - \frac{c}{4} \dot{U}_P + \left(\frac{c}{4} \right)^2 \ddot{\epsilon} \right] \; sen\theta \right\} \\ &+ \frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \left\{ \left[\left(U_P^2 - \frac{c}{2} U_P \dot{\epsilon} \right) \mathcal{C}(k) - \frac{c_{d_0}}{c_{l_\alpha}} U_T^2 \right] cos\theta \right\} \end{aligned} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned} L_w &= \frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \left\{ \left[\left(-U_T U_P + \frac{c}{2} U_T \dot{\epsilon} \right) \mathcal{C}(k) - \frac{c}{4} \dot{U}_P + \left(\frac{c}{4} \right)^2 \ddot{\epsilon} \right] \; cos\theta \right\} \\ &+ \frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \left\{ \left[\left(U_P^2 - \frac{c}{2} U_P \dot{\epsilon} \right) \mathcal{C}(k) - \frac{c_{d_0}}{c_{l_\alpha}} U_T^2 \right] sen\theta \right\} \end{aligned} \tag{2.25}$$

$$M_A = -\frac{\rho_\infty c_{l_\alpha} c}{2} \left(\frac{c}{4} \right)^2 \left(-\dot{U}_P + \frac{3c}{8} \ddot{\epsilon} + U_T \dot{\epsilon} \right) \tag{2.26}$$

Come si nota la descrizione dei carichi di sezione risulta in una forma mista tempo–frequenza per via della presenza della funzione $\mathcal{C}(k)$. È importante sottolineare che, a partire da questa formulazione generale è possibile ottenere una descrizione quasi–stazionaria dei carichi di sezione valida per bassi valori della frequenza ponendo $\mathcal{C}(k) \cong 1$. Tale modello è ampiamente impiegato in letteratura per lo studio della stabilità aeroelastica di rotori di elicottero e di sistemi rotore/ala; nel presente lavoro verrà utilizzato come riferimento per confronti con i modelli aerodinamici non stazionari più evoluti.

2.2.2 Carichi aerodinamici di sezione

Per operatore aerodinamico si intende la matrice delle funzioni di trasferimento che, nel dominio della frequenza, legano le forze aerodinamiche generalizzate alle piccole perturbazioni dei gradi di libertà di pala.

Allo scopo di ottenere l'operatore aerodinamico necessario per la successiva fase dell'identificazione del modello ROM è necessario considerare una piccola perturbazione del moto della sezione di pala rispetto al suo stato di equilibrio in volo assiale per ottenere una forma linearizzata dell'espressione dei carichi in funzione delle velocità di perturbazione u_p, u_t ed ε.

Innanzitutto è necessario esprimere le velocità di sezione come somma di un contributo corrispondente alla condizione di equilibrio e uno perturbativo

$$U_P = U_{P_0} + u_p \tag{2.27}$$

$$U_T = U_{T_0} + u_t \tag{2.28}$$

$$\epsilon = \epsilon_0 + \varepsilon\,. \tag{2.29}$$

Sostituendo tali espressioni nelle 2.79–2.26 e trascurando i termini di ordine superiore al primo si ottengono delle espressioni per L_v, L_w e M_A/R che risultano lineari nelle variabili u_p, u_t ed ε e nelle loro derivate temporali. Infine, mettendo in evidenza il termine $1/2\rho\Omega^2R^2\bar{c}$ (dove con Ω, R e $\bar{c}$ si intendono, rispettivamente la velocità di rotazione, il raggio e la corda media del rotore) si ottengono infine le espressioni dimensionali dei carichi di sezione

$$\begin{aligned}
L_v &= \frac{1}{2}\rho\Omega^2R^2\bar{c}\ \frac{c_{l_\alpha}c}{\bar{c}}\left\{\left[\frac{U_{P_0}}{\Omega R}\mathcal{C}(k)sen\theta - 2\frac{U_{T_0}}{\Omega R}\frac{c_{d_0}}{c_{l_\alpha}}cos\theta\right]\ \frac{u_t}{\Omega R}\right.\\
&+ \left[\left(2\frac{U_{P_0}}{\Omega R}cos\theta + \frac{U_{T_0}}{\Omega R}sen\theta\right)\mathcal{C}(k)\right]\frac{u_p}{\Omega R}\\
&+ \left[\frac{c}{4}sen\theta\right]\frac{\dot{u}_p}{\Omega^2R^2} + \left[\left(-\frac{U_{P_0}}{\Omega R}\frac{c}{2}cos\theta - \frac{U_{T_0}}{\Omega R}\frac{c}{2}sen\theta\right)\mathcal{C}(k)\right]\frac{\zeta}{\Omega R}\\
&- \left.\left[\left(\frac{c}{4}\right)^2 sen\theta\right]\frac{\dot{\zeta}}{\Omega^2R^2}\right\}
\end{aligned} \tag{2.30}$$

$$
\begin{aligned}
L_w &= \frac{1}{2}\rho\Omega^2 R^2 \bar{c}\ \frac{c_{l_\alpha} c}{\bar{c}} \left\{ \left[-\frac{U_{P_0}}{\Omega R}\mathcal{C}(k)cos\theta - 2\frac{U_{T_0}}{\Omega R}\frac{c_{d_0}}{c_{l_\alpha}} sen\theta \right] \frac{u_t}{\Omega R} \right. \\
&+ \left[\left(2\frac{U_{P_0}}{\Omega R} sen\theta - \frac{U_{T_0}}{\Omega R} cos\theta \right) \mathcal{C}(k) \right] \frac{u_p}{\Omega R} \\
&+ \left[-\frac{c}{4} cos\theta \right] \frac{\dot{u}_p}{\Omega^2 R^2} + \left[\left(\frac{U_{T_0}}{\Omega R}\frac{c}{2} cos\theta - \frac{U_{P_0}}{\Omega R}\frac{c}{2} sen\theta \right) \mathcal{C}(k) \right] \frac{\zeta}{\Omega R} \\
&- \left. \left[\left(\frac{c}{4} \right)^2 cos\theta \right] \frac{\dot{\zeta}}{\Omega^2 R^2} \right\}
\end{aligned} \tag{2.31}
$$

$$
M_A/R = -\frac{1}{2}\rho\Omega^2 R^2 \bar{c}\ \frac{c_{l_\alpha} c}{R\bar{c}} \left(\frac{c}{4} \right)^2 \left[-\frac{\dot{u}_p}{\Omega^2 R^2} + \frac{U_{T_0}}{\Omega R}\frac{\zeta}{\Omega R} + \frac{3c}{8}\frac{\dot{\zeta}}{\Omega^2 R^2} \right]. \tag{2.32}
$$

Si noti che nelle precedenti si è definita con $\zeta = \dot{\varepsilon}$ la velocità angolare della sezione attorno al quarto di corda.

Le espressioni ottenute risultano di tipo misto tempo–frequenza quindi occorre trasformarle nel dominio di Laplace tenendo conto della definizione della frequenza ridotta riferita alla corda media del profilo $\bar{k} = \omega\bar{c}/2\Omega R$. Raggruppando i termini si ottiene l'operatore aerodinamico di sezione sotto forma di una matrice funzioni di trasferimento che legano i carichi aerodinamici di sezione alle variabili $\tilde{u}_p$, $\tilde{u}_t$ e $R\tilde{\zeta}$ che definiscono le velocità perturbative della sezione nel dominio della frequenza. In forma simbolica i carichi di sezione dimensionali sono dunque

$$
\tilde{\mathbf{B}}_a^s = \hat{c} \begin{Bmatrix} \tilde{L}_v \\ \tilde{L}_w \\ \tilde{M}_A/R \end{Bmatrix} = \hat{c}\ \mathbf{E}^s(j\bar{k}) \begin{Bmatrix} \tilde{u}_t \\ \tilde{u}_p \\ R\tilde{\zeta} \end{Bmatrix} \tag{2.33}
$$

Il coefficiente che compare nella 2.33 è $\hat{c} = 1/2\rho\Omega R\bar{c}c_{l_\alpha}$.

2.2.3 Carichi aerodinamici di pala: operatore aerodinamico

Finora sono stati analizzati i carichi di sezione. L'operatore aerodinamico che si desidera derivare nel seguito fornisce i carichi aerodinamici globali agenti sulla pala in funzione esplicita delle componenti dell'atto di moto rigido della pala. Le sei componenti dell'atto di moto rigido sono sufficienti per descrivere le veloctià dei punti appartenenti alla pala dovute al moto di trascinamento dell'ala. Tale moto darà luogo ad un contributo ai carichi aerodinamici di pala in considerazione del fatto che, dal punto di vista fisico, essi nascono dalla velocità del corpo. La velocità relativa dei punti appartenenti alla pala rispetto al sistema di riferimento pala può essere descritta com velocità

di deformazione elastica e anche essa darà luogo ad un contributo ai carichi aerodinamici di pala. Occorre quindi innanzitutto esprimere le velocità della generica sezione di pala in funzione delle tre componenti di velocità di traslazione del mozzo, delle tre componenti della velocità angolare della pala e della velocità di deformazione elastica. Le prime costituiscono le sei componenti dell'atto di moto rigido della pala, infatti, per un corpo rigido, si può scrivere la velocità di un punto appartenente ad esso in funzione della velocità di un altro punto del corpo e della velocità angolare del corpo stesso. Si può dunque scrivere

$$\vec{v}_P(\vec{x},t) = \vec{v}_H(t) + \vec{\omega}_b(t) \times (\vec{x} - \vec{x}_H) + \vec{v}^d(\vec{x},t) \tag{2.34}$$

nella quale $\vec{v}_P$ e $\vec{v}_H$ sono, rispettivamente, la velocità assoluta di un punto appartenente alla superficie della pala e quella del mozzo, mentre $\vec{\omega}_b$ è la velocità angolare assoluta della pala, $\vec{x} - \vec{x}_H$ è il vettore distanza tra il mozzo ed il punto della pala considerato e $\vec{v}^d$ rappresenta la velocità di deformazione elastica. Si noti che tutte le velocità che compaiono nella 2.34 sono da intendersi come perturbazioni rispetto ai valori corrispondenti alla configurazione di equilibrio.

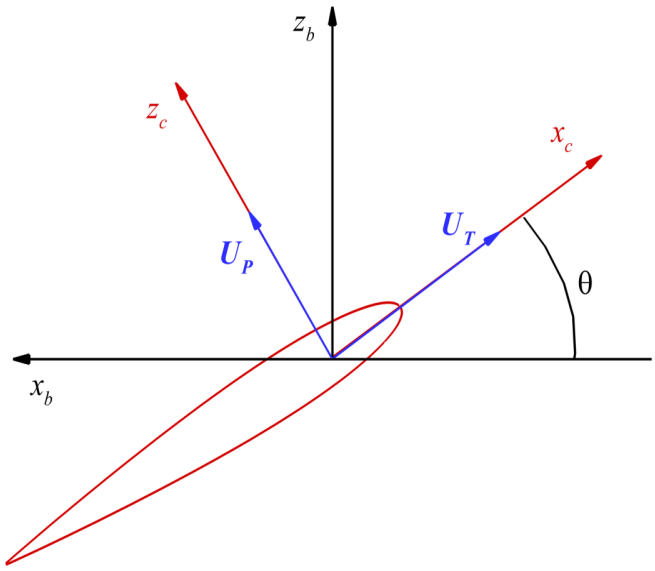

Figura 2.3: Sistemi di riferimento per la generica sezione di pala.

Poiché si intende considerare l'atto di moto rigido della pala in componenti rispetto al riferimento pala, è necessario esprimere le velocità di sezione in tale riferimento. In particolare è possibile esprimere la velocità di un punto appartenente alla generica sezione di pala in componenti nel

riferimento di sezione x_c, z_c di figura 2.3 (ovvero il sistema di riferimento in cui sono definite le u_p e u_t) in funzione delle componenti dell'atto di moto rigido in componenti pala nella seguente forma:

$$\mathbf{v}_P^{\mathcal{R}_c} = \mathbf{R}_{cb}\, \mathbf{v}_P^{\mathcal{R}_b} \tag{2.35}$$

nella quale

$$\mathbf{R}_{cb} = \begin{bmatrix} -cos\theta & 0 & sen\theta \\ 0 & -1 & 0 \\ sen\theta & 0 & cos\theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_{\mathrm{P}}^{\mathcal{R}_{\mathrm{b}}} = \begin{Bmatrix} v_H^{x_b} - r_{PH}\, \omega_b^{z_b} \\ v_H^{y_b} \\ v_H^{z_b} + r_{PH}\, \omega_b^{x_b} \end{Bmatrix} \tag{2.36}$$

nella quale con r_{PH} si è indicato il modulo della distanza tra il punto P a tre quarti della corda (ovvero il punto in cui sono definite le velocità di sezione u_t e u_p) ed il mozzo. Si ottengono dunque le espressioni di u_p, u_t e $R\zeta$ considerando che $u_t = v_P^{x_c}$, $u_p = v_P^{z_c}$ e $\zeta = \omega_b^{y_c}$:

$$\begin{Bmatrix} u_t \\ u_p \\ R\zeta \end{Bmatrix} = \mathbf{K}_B(\xi)\, \mathbf{R}_Q(R)\, \mathbf{v} + \mathbf{v}^d \tag{2.37}$$

avendo utilizzato le matrici

$$\mathbf{K}_B(\xi) = \begin{bmatrix} -cos\theta & 0 & sen\theta & \xi\, sen\theta & 0 & \xi\, cos\theta \\ sen\theta & 0 & cos\theta & \xi\, cos\theta & 0 & -\xi\, sen\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\mathbf{R}_Q(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix}$$

nella quale è stato posto $\xi = r/R$. Il vettore colonna $\mathbf{v}$ ha sei elementi che corrispondono alle

componenti dell'atto di moto rigido della pala nel sistema di riferimento pala, ovvero

$$\mathbf{v}^{\mathcal{R}_b} = \left\{ \begin{array}{c} v_H^x \\ v_H^y \\ v_H^z \\ \omega_b^x \\ \omega_b^y \\ \omega_b^z \end{array} \right\} \tag{2.38}$$

La velocità di deformazione elastica $\mathbf{v}^d$ è espressa in componenti nel sistema di riferimento pala. Per calcolarla è conveniente esprimere gli spostamenti $\mathbf{d}^d(\mathbf{x}, t)$ indotti dalla deformazione nei punti appartenenti alla pala come combinazione lineare di N_m forme modali vettoriali. In particolare si ha

$$\mathbf{d}^d(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^{N_m} q_l^d(t)\, \mathbf{\Phi}_l(\mathbf{x}), \tag{2.39}$$

nella quale i coefficienti q_l^d rappresentano le coordinate generalizzate del moto elastico della pala (nel seguito definite anche variabili lagrangiane) mentre le $\mathbf{\Phi}_l$ sono le funzioni modali (o funzioni di forma) scelte per descrivere la distribuzione degli spostamenti nei punti della pala e indotti dalla deformazione della stessa. Le variabili lagrangiane dipendono dal tempo mentre le funzioni modali sono tempo–invarianti nel sistema di riferimento solidale alla i–esima pala. Derivando rispetto al tempo la 3.45 si ottiene l'espressione della velocità di deformazione nella forma

$$\mathbf{v}^d(\mathbf{x}, t) = \sum_{l=1}^{N_m} \dot{q}_l^d(t)\, \mathbf{\Phi}_l(\mathbf{x})\ . \tag{2.40}$$

A questo punto è necessario costruire un vettore che raccolga le forze ed i momenti aerodinamici di sezione espressi in componenti nel sistema di riferimento pala ed infine procedere all'integrazione di tali carichi di sezione lungo l'apertura. In particolare tale vettore $\mathbf{B}_a$ contiene le due forze in direzione x_b e z_b (la forza in direzione y_b non può essere calcolata per via della natura bidimensionale del modello aerodinamico qui descritto) ed i tre momenti attorno agli assi x_b, y_b e z_b.

$$\widetilde{\mathbf{B}}_a = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{F}^{x_b} \\ \tilde{F}^{z_b} \\ \tilde{M}^{z_b} \\ \tilde{M}^{x_b} \\ \tilde{M}^{y_b} \end{array} \right\} = \int_0^R \mathbf{R}_{FG}(R)\, \mathbf{R}_{MAT}(\xi) \left\{ \begin{array}{c} \tilde{L}_v \\ \tilde{L}_w \\ \tilde{M}_A/R \end{array} \right\} dr = \tag{2.41}$$

nella quale

$$\mathbf{R}_{FG}(R) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{R}_{\mathrm{MAT}}(\xi) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \xi & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.42}$$

Sostituendo le 2.33 e 2.37 nella 2.41 si ottiene

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathbf{B}}_a(jk) &= \hat{c}' \, \mathbf{R}_{FG}(R) \left[\int_0^1 \mathbf{R}_{MAT}(\xi) \, \mathbf{E}^s(jk) \, \mathbf{K}_B(\xi) \, d\xi \right] \mathbf{R}_Q(R) \, \tilde{\mathbf{v}} \\ &+ \hat{c}' \, \mathbf{R}_{FG}(R) \left[\int_0^1 \mathbf{R}_{MAT}(\xi) \, \mathbf{E}^s(jk) \, d\xi \right] \tilde{\mathbf{v}}^d \end{aligned} \tag{2.43}$$

nella quale il coefficiente $\hat{c}'$ è pari a $R\,\hat{c}$ e nella quale si è ipotizzato di avere una pala caratterizzata da una distribuzione costante della corda lungo l'apertura (per cui $\bar{c} = c$ e dunque $\bar{k} = k$).

Definendo con $\mathbf{E}_{rig}(jk)$ il termine integrale della 2.43 relativo ai gradi di libertà rigidi e con $\mathbf{E}_{def}(jk)$ il termine integrale relativo ai gradi di libertà elastici ottenuto a seguito della sostituzione della velocità di deformazione elastica in funzione delle variabili modali, e dividendo le componenti delle forze per il termine $\rho\Omega^2 R^4$ e le componenti dei momenti per $\rho\Omega^2 R^5$ si ottengono le espressioni compatte per le forze ed i momenti aerodinamici (adimensionali) di pala nel dominio della frequenza

$$\widetilde{\mathbf{B}}^*_a(jk) = \lambda \, c_{l_\alpha} \, \mathbf{E}(jk) \, \tilde{\mathbf{q}}^* \tag{2.44}$$

nella quale si è indicato con $\mathbf{q}^* = [\mathbf{v}^* \quad \mathbf{q}^{d^*}]^{\mathrm{T}}$ il vettore che raccoglie i gradi di libertà rigidi ed elastici adimensionali. Nella 2.44 le componenti di traslazione del atto di moto rigido sono state adimensionalizzate rispetto ad ΩR mentre quelle legate alla velocità angolare della pala sono divise per Ω. Il coefficiente $\lambda = \bar{c}/2R$ rappresenta l'allungamento della pala.

È stato dunque ottenuto l'operatore aerodinamico $\mathbf{E}(jk)$ che, nel dominio della frequenza, è rappresentato da una matrice che ha dimensioni $[5 \times 6 + N_m]$ e contiene l'insieme delle funzioni di trasferimento che forniscono i carichi aerodinamici agenti sulla pala in funzione delle le componenti dell'atto di moto rigido perturbativo della pala considerata libera di muoversi nel sistema di riferimento rotante e delle ampiezze modali relative ai gradi di libertà elastici. Tale operatore presenta una dipendenza trascendente dalla frequenza che non ne consente la immediata antitrasformazione nel dominio del tempo in quanto essa darebbe luogo ad un numero infinito di stati.

Tale dipendenza si esplica negli elementi della matrice $\mathbf{E}(jk)$ che moltiplicano la $\mathcal{C}(k)$ che tiene conto degli effetti della vorticità rilasciata a valle del profilo.

La completa identificazione del modello ROM per l'operatore aerodinamico di Greenberg necessita pertanto di due ulteriori passi: la approssimazione razionale matriciale dell'operatore $\mathbf{E}(jk)$ per eliminarne la dipendenza trascendente dalla frequenza e la definizione di un legame cinematico tempo–variante che definisca i vincoli tra la pala e l'ala per il tramite del mozzo e dell'albero motore. Questi aspetti verranno trattati nei due paragrafi seguenti.

2.2.4 Approssimazione razionale matriciale dell'operatore aerodinamico

La formulazione aerodinamica nel dominio della frequenza ha condotto ad un legame lineare tra le forze ed i momenti agenti sulla generica pala del rotore e le componenti dell'atto di moto rigido della pala. Come si è visto, tale legame è rappresentato da una matrice nella quale compaiono anche termini che sono funzioni trascendenti della frequenza a causa degli effetti legati alla vorticità presente nella scia. La descrizione di tali funzioni di trasferimento nel dominio del tempo richiederebbe un numero infinito di poli. Una descrizione aerodinamica di questo tipo di fatto limita l'analisi di stabilità del sistema alla sola valutazione dei margini di stabilità ed inoltre rende difficoltosa la sintesi di leggi di controllo per applicazioni aeroservoelastiche. L'obiettivo è, quindi, quello di ottenere una espressione analitica razionale per l'approssimazione della matrice aerodinamica che consenta una analisi di stabilità mediante analisi agli autovalori e faciliti notevolmente la sintesi di leggi di controllo potendo poi esprimere il sistema aeroelastico in forma normale.
L'approssimazione della matrice aerodinamica mediante una forma razionale polinomiale ottenuta interpolando i campioni in frequenza relativi ai singoli elementi della matrice consente di ottenere un modello agli stati finiti che è in grado di fornire una rappresentazione notevolmente accurata dell'operatore aerodinamico nel campo di frequenze di interesse per l'analisi che si desidera condurre.
Tecniche di questa tipologia sono molto spesso utilizzate in ambito aeroelastico per lo studio di ali fisse (si vedano ad esempio [22]–[7]), e sono state applicate in passato per l'analisi della stabilità di rotori in hover (si veda [6]). Specificatamente, l'approccio seguito nel presente lavoro segue la metodologia presentata in [29] ed è strettamente collegata ad una metodologia molto nota denominata *minimum–state technique* introdotta da Karpel in [22] (si vedano [29] e [8] per le questioni legate

al confronto tra la metodologia utilizzata nel presente lavoro e quella introdotta da Karpel).

Il modello agli stati finiti adottato nel presente lavoro è basato sulla seguente approssimazione per la matrice aerodinamica (si veda [29] per i dettagli della metodologia):

$$\mathbf{E}(s) \approx s^2\ \mathbf{A}_2 + s\ \mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 + \left[\sum_{m=0}^{M} \mathbf{D}_m s^m\right]^{-1} \left[\sum_{m=0}^{M-1} \mathbf{R}_m s^m\right], \tag{2.45}$$

dove le matrici $\mathbf{A}_m$ (di dimensioni pari a quelle dell'operatore aerodinamico da approssimare), $\mathbf{D}_m$ e $\mathbf{R}_m$ sono reali (dunque non dipendono dalla frequenza) e piene (eccetto la $\mathbf{D}_M$ che viene scelta pari alla matrice unitaria).

L'operatore aerodinamico $\mathbf{E}(s)$ come detto rappresenta la funzione di trasferimento tra i carichi aerodinamici e le variabili di stato scelte per descrivere la dinamica della pala; risulta dunque evidente che valutare la $\mathbf{E}(s)$ in corrispondenza ad un certo valore della frequenza significa conoscere la risposta del "sistema aerodinamico" ad un ingresso di velocità di tipo sinusoidale (con quella frequenza) in termini di forze agenti sulla pala.

Le matrici $\mathbf{A}_m$, $\mathbf{D}_m$ e $\mathbf{R}_m$ vengono determinate per mezzo di una tecnica di approssimazione ai minimi quadrati, applicata al dominio ristretto definito dall'asse immaginario (ovvero si ipotizzano ingressi esclusivamente di tipo sinusoidale): si può infatti dimostrare sulla base delle proprietà delle funzioni analitiche di variabile complessa che, una volta ottenuta l'approssimazione della matrice per valori di $s = j\omega$, tale approssimazione è valida per qualunque valore complesso di s (ovvero per ingressi non necessariamente sinusoidali).

La relazione 2.45 prevede l'approssimazione dell'operatore aerodinamico mediante polinomi del secondo ordine in generale: in realtà , il comportamento asintotico delle funzioni di trasferimento tra velocità e carichi aerodinamici è di tipo lineare come è possibile vedere dalle espressioni dei carichi di sezione considerando la presenza delle derivate prime nel tempo delle velocitè e che anche la funzione $\mathcal{C}(k)$ ha un andamento asintotico lineare; per quanto riguarda le funzioni di trasferimento tra gradi di libertà elastici e carichi aerodinamici è di tipo quadratico in quanto la velocità di deformazione dipende dalla frequenza.

L'approssimazione razionale matriciale espressa dalla 2.45 può essere più convenientemente riscritta nella seguente forma

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{A}_2\, s^2 + \mathbf{A}_1\, s + \mathbf{A}_0 + \mathbf{C}\,(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\,\mathbf{B} \tag{2.46}$$

nella quale la matrice $\mathbf{C}$ (che dipende dalle matrici $\mathbf{R}_m$), ha un numero di righe pari al numero

di forze aerodinamiche N_f che l'operatore aerodinamico è in grado di descrivere (5 nel caso del modello aerodinamico sopra descritto) ed un numero di colonne pari al numero di poli N_a che è necessario utilizzare per avere una corretta approssimazione della $\mathbf{E}(s)$. La matrice $\mathbf{A}$ (che dipende dalle matrici $\mathbf{D}_m$) ha dimensioni $[N_a \times N_a]$ e la matrice $\mathbf{B}$ ha dimensioni $[N_a \times N_f]$.Tutte le matrici che compaiono nella 2.46 non dipendono dalla frequenza e vengono calcolate a valle del procedimento ai minimi quadrati.

Applicando la 2.46 alla 2.44 e tenendo conto della forma adimensionale della 2.44 si ottiene:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathbf{B}}_a^*(\bar{s}) = c_1 \, [\mathbf{A}_2^* \, \bar{s}^2 \, \tilde{\mathbf{q}}^* + \mathbf{A}_1^* \, \bar{s} \, \tilde{\mathbf{q}}^* + \mathbf{A}_0^* \, \tilde{\mathbf{q}}^* + \mathbf{C}^* \, \tilde{\mathbf{r}}] \\ \\ \tilde{\mathbf{r}} = (\bar{s}\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}^* \tilde{\mathbf{q}}^* \end{cases} \tag{2.47}$$

nella quale il coefficiente c_1 è pari a $\lambda \; c_{l_\alpha}$ e $\bar{s} = sc/(2\Omega R)$. Le matrici $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_0$ hanno dimensioni $[N_f \times (6 + N_m)$ e risultano partizionate nel modo seguente (per semplicità è stato eliminato l'apice *)

$$\mathbf{A}_k = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}_k^v & \mathbf{A}_k^q \end{array} \right] \tag{2.48}$$

con $\mathbf{A}_2^v = \mathbf{0}$. Inoltre, $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata di dimensioni $[N_a \times N_a]$, $\mathbf{C}$ ha dimensioni $[N_f \times N_a]$, e $\mathbf{B}$ ha dimensioni $[N_a \times (6 + N_m)]$ e sono partizionate come segue:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{B}^v & \mathbf{B}^q \end{array} \right] . \tag{2.49}$$

Passando nel dominio del tempo si ottiene quindi:

$$\begin{cases} \mathbf{B}_a^*(t) = c_1 \, [\mathbf{A}_2^* \, \lambda^2 \ddot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{A}_1^* \, \lambda \dot{\mathbf{q}}^* + \mathbf{A}_0^* \, \mathbf{q}^* + \mathbf{C}^* \, \mathbf{r}] \\ \\ \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\lambda} \, [\mathbf{A} \, \mathbf{r} + \mathbf{B}^* \, \mathbf{q}^*] \end{cases} \tag{2.50}$$

Il vettore $\tilde{\mathbf{r}}$ è il vettore degli stati aggiunti introdotti dall'approssimazione agli stati finiti: essi non rappresentano la dinamica "fisica" legata ai gradi di libertà della pala, ma sono necessari per tener conto delle dinamiche introdotte nell'aerodinamica dalla presenza della vorticità sulla scia.

Dal sistema di equazioni sopra scritto si possono ottenere, una volta noto il vettore dei gradi di libertà rigidi ed elastici della pala, le dinamiche degli stati aggiunti e delle forze aerodinamiche generalizzate. Tuttavia il problema non è ancora definito completamente per quanto riguarda il sistema ala/rotore; infatti è necessario legare le componenti dell'atto di moto della pala isolata con gradi di libertà dell'ultima sezione dell'ala attraverso le opportune relazioni vincolari.

2.2.5 Legame cinematico tra ala e pala

Nel paragrafo precedente è stato introdotto il modello aerodinamico per il rotore considerando l'atto di moto di ciascuna pala ipotizzata libera di muoversi nel sistema di riferimento rotante.
In questa sezione si introduce il vincolo che la pala sia collegata, tramite il mozzo, all'ala del sistema ala/rotore: la sua cinematica e la sua dinamica sono quindi influenzate dal moto di trascinamento dell'ala oltre che dalla deformazione elastica che essa subisce. In tal modo i carichi aerodinamici di pala risulteranno espressi esplicitamente in funzione dei gradi di libertà del sistema e dunque potranno essere accoppiati direttamente alle equazioni della dinamica strutturale per l'analisi della stabilità.
Per i dettagli sul modello strutturale dell'ala si rimanda ai successivi capitoli, per ora è sufficiente sapere che, i gradi di libertà del sistema ala/rotore da cui dipende il moto di trascinamento dell'ala sono gli spostamenti elastici al tip alare. Definito il sistema di riferimento relativo all'ultima sezione di ala in configurazione indeformata $\mathcal{R}_{w_{tip}}$ (in rosso in figura 2.4), i sei gradi di libertà

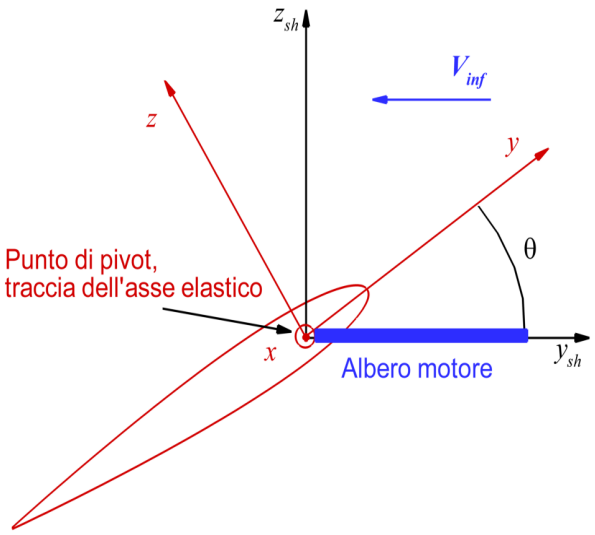

Figura 2.4: Sistemi di riferimento albero e ultima sezione.

perturbativi dell'ultima sezione di ala che inducono il moto del pilone di ala sono tre spostamenti e tre rotazioni. In particolare, gli spostamenti sono quelli di lag in direzione y (v), nella direzione ad essa ortogonale appartenente al piano della sezione nella configurazione indeformata z (w) ed in direzione dell'apertura dell'ala x (u). Le tre rotazioni della sezione sono rispettivamente ϕ attorno

all'asse x, $-w$ attorno all'asse y e v attorno all'asse z. A tali gradi di libertà vanno aggiunti i gradi di libertà di pala, che tuttavia non entrano nella definizione del legame cinematico in quanto descrivono solo il moto relativo della pala rispetto al sistema di riferimento rotante.

Con il termine legame cinematico si intende identificare la relazione matriciale che lega il vettore costituito dalle tre componenti della velocità assoluta del mozzo e dalle tre componenti della velocità angolare assoluta della pala (espresse tutte nel riferimento pala) al vettore costituito dalle variabili cinematiche dell'ultima sezione e dalle variabili di pala. Naturalmente il legame che si otterrà sarà tempo variante in quanto l'influenza del moto dell'ala sul moto di ciascuna pala (ovvero il moto di trascinamento) dipende dalla posizione angolare della pala stessa.

Cinematica della catena ala/albero/rotore

In questa sezione le componenti dell'atto di moto rigido di ciascuna pala verranno espresse in funzione dei gradi di libertà del sistema ala/rotore, ovvero u,v,w,ϕ,w',v' (calcolate al tip alare). Le variabili cinematiche citate sono da intendersi come somma di un contributo all'equilibrio e di uno perturbativo.

L'albero è schematizzato come corpo rigido, pertanto la velocità di un punto appartenente ad esso è esprimibile come:

$$\vec{v}_P = \vec{v}_H + \vec{\omega}_{sh} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_H) \tag{2.51}$$

dove $\vec{v}_H$ e $\vec{v}_P$ sono rispettivamente la velocità assoluta del mozzo e del centro elastico al tip alare, e $\vec{\omega}_{sh}$ è la velocità angolare assoluta dell'albero; essa coincide con la velocità angolare assoluta dell'ultima sezione di ala.

In accordo con quanto riportato nel Rif. [16], la velocità angolare del tip alare è esprimibile, nel riferimento ala deformata al tip, mediante le seguenti componenti:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\phi} \\ \omega_{y'} &= \dot{v}' \sin(\Theta + \phi) - \dot{w}' \cos(\Theta + \phi) \\ \omega_{z'} &= \dot{v}' \cos(\Theta + \phi) + \dot{w}' \sin(\Theta + \phi) \end{aligned} \tag{2.52}$$

dove le variabili cinematiche si intendono calcolate al tip (ovvero per $x = L_w$).
La velocità del centro elastico al tip espressa nello stesso riferimento è data da:

$$\mathbf{v}_P^{\mathcal{R}_{wtip}} = \mathbf{T} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{v} + V_\infty \\ \dot{w} \end{array} \right\} \tag{2.53}$$

La matrice $\mathbf{T}$ è la matrice della rotazione che governa il passaggio dalla terna ala indeformata a quella deformata (si veda [16]). Le variabili cinematiche che compaiono (esplicitamente e negli elementi della matrice $\mathbf{T}$ [1]) sono da intendersi calcolate al tip.
Note le componenti della velocità $\vec{v}_P$ nel riferimento ala deformata al tip è possibile ottenere le componenti di tale vettore nel sistema di riferimento pala; tale trasformazione è necessaria in quanto (come si vedrà nel seguito) per le equazioni che descrivono la dinamica di pala si utilizzano le immagini delle equazioni cardinali nel riferimento pala. In componenti pala la velocità del mozzo è dunque

$$\mathbf{v}_H^{\mathcal{R}_b} = \mathbf{R}_{bw_{tip}} \left(\mathbf{v}_P^{\mathcal{R}_{w_{tip}}} + \mathbf{\Omega}_{tip_\wedge}^{\mathcal{R}_{w_{tip}}} \mathbf{r}_{PH}^{\mathcal{R}_{wtip}} \right) \tag{2.54}$$

in cui $\mathbf{R}_{bw_{tip}}$ è la matrice di rotazione che porta dal riferimento dell'ultima sezione di ala in configurazione deformata a quello pala [2], mentre $\mathbf{\Omega}_{tip_\wedge}^{\mathcal{R}_{w_{tip}}}$ è la matrice emisimmetrica associata al prodotto vettore $\vec{\omega}_{w_{tip}} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_H)$:

$$\mathbf{\Omega}_{tip_\wedge}^{\mathcal{R}_{w_{tip}}} = \left[\begin{array}{ccc} 0 & -\omega_{z'} & \omega_{y'} \\ \omega_{z'} & 0 & -\omega_{x'} \\ -\omega_{y'} & \omega_{x'} & 0 \end{array} \right] \tag{2.55}$$

Nell'equazione 2.54 risulta evidente l'origine della tempo varianza del legame cinematico: la matrice $\mathbf{R}_{bw_{tip}}$ dipende infatti dalla posizione angolare della pala; in altri termini la tempo varianza nasce dal fatto che la velocità del tip alare (che dà luogo al moto di trascinamento dell'ala) si proietta, in ogni istante, nel sistema di riferimento che ruota con la pala.
Per quanto riguarda la velocità angolare assoluta di ciascuna pala, essa è data dalla somma della velocità relativa di pala rispetto al sistema di riferimento disco rotante, e della velocità angolare di trascinamento dovuta alla rotazione del riferimento disco rotante stesso:

$$\vec{\omega}_b = \vec{\omega}_{r_{dr}} + \vec{\omega}_{t_{dr}} \tag{2.56}$$

[1] per l'espressione di questa matrice si veda il paragrafo 2.3
[2] per l'espressione di questa e delle altre matrici di rotazione introdotte in seguito si veda in appendice C

La velocità angolare di trascinamento è proprio la velocità angolare assoluta del disco rotante $\vec{\omega}_{dr}$ ed è pari alla somma di due contributi:

$$\vec{\omega}_{dr} = \vec{\omega}_{r_d} + \vec{\omega}_{t_d} = \vec{\omega}_{r_d} + \vec{\omega}_{wtip} \tag{2.57}$$

dove $\vec{\omega}_{r_d}$ è la velocità angolare relativa del sistema di riferimento disco rotante rispetto al riferimento disco, mentre $\vec{\omega}_{t_d}$ è la velocità di trascinamento dovuta al moto del riferimento disco ed è pari alla velocità angolare assoluta dell'ultima sezione alare. La $\vec{\omega}_{r_d}$ è naturalmente nota in quanto è la velocità angolare di rotazione del rotore; in componenti disco si ha:

$$\boldsymbol{\omega}_{r_d}^{\mathcal{R}_d} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{Bmatrix} \tag{2.58}$$

Per esprimere tale velocità angolare nel riferimento pala è necessario premoltiplicare la 2.58 per la matrice che porta dal riferimento disco al riferimento pala ovvero:

$$\boldsymbol{\omega}_{r_d}^{\mathcal{R}_b} = \mathbf{R}_{bd}\boldsymbol{\omega}_{r_d}^{\mathcal{R}_d} \tag{2.59}$$

Analogamente si dovrà procedere per la $\vec{\omega}_{wtip}$ premoltiplicando la 2.52 per la matrice che porta dal riferimento ultima sezione al riferimento pala:

$$\boldsymbol{\omega}_{wtip}^{\mathcal{R}_b} = \mathbf{R}_{bw_{tip}}\boldsymbol{\omega}_{wtip}^{\mathcal{R}_{wtip}} \tag{2.60}$$

In definitiva quindi la velocità angolare assoluta di pala in componenti riferimento pala è data dalla:

$$\boldsymbol{\omega}_{b}^{\mathcal{R}_b} = \mathbf{R}_{bd}\boldsymbol{\omega}_{r_d}^{\mathcal{R}_d} + \mathbf{R}_{bw_{tip}}\boldsymbol{\omega}_{wtip}^{\mathcal{R}_{wtip}} \tag{2.61}$$

Anche per l'equazione della velocità angolare di pala vale quanto detto per la velocità del mozzo: in questo caso la tempo varianza deriva sia dalla matrice $\mathbf{R}_{bw_{tip}}$, sia dalla $\mathbf{R}_{bd}$.
In conclusione, le equazioni 2.54 e 2.61 consentono di esprimere la velocità assoluta del mozzo e la velocità angolare assoluta della singola pala in funzione dei gradi di libertà del sistema; infatti:

- $\mathbf{R}_{bw_{tip}}$ e $\mathbf{R}_{bd}$ sono matrici di rotazione che dipendono esclusivamente dai gradi di libertà di pala, dalla velocità di rotazione della pala e dall'angolo di calettamento dell'albero (si veda in appendice);

- $\mathbf{v}_p^{\mathcal{R}_{wtip}}$ rappresenta la velocità del centro elastico al tip alare e (come si nota nella 2.53) è espressa in funzione delle variabili cinematiche di ala calcolate al tip;

- $\mathbf{\Omega}_{tip_\wedge}^{\mathcal{R}_{wtip}}$ dipende esclusivamente dalle variabili cinematiche di ala al tip alare (si veda l'equazione 2.52 e la 2.55);

- $\boldsymbol{\omega}_{r_d}^{\mathcal{R}_d}$ è una costante e ω_{wtip} dipende dalle variabili cinematiche di ala calcolate al tip (si veda equazione 2.52).

È dunque possibile scrivere:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{v}_H \\ \dots \\ \omega_{\mathbf{b}} \end{Bmatrix}^{\mathcal{R}_b} = \mathbf{f}(v_{wtip}, w_{wtip}, \phi_{wtip}, t) \tag{2.62}$$

Operatore cinematico

La relazione 2.62, ottenuta nel paragrafo precedente, contiene un numero di termini tale da rendere oppurtuno l'impiego dell'ordering scheme descritto nel paragrafo 5.3.5 per valutare l'importanza del contributo di ciascun termine. Inoltre nella funzione $\mathbf{f}$ sono presenti numerose non linearità dovute al prodotto di gradi di libertà che compaiono di fatto sia nelle matrici di rotazione, sia nei vettori che devono subire il cambiamento di sistema di riferimento; poiché si desidera ottenere un legame cinematico lineare è necessario procedere alla linearizzazione della $\mathbf{f}$. I gradi di libertà del sistema vengono scomposti in un contributo all'equilibrio (identificato dal pedice 0) e di un contributo perturbativo. Trascurando in questo processo i termini di ordine superiore al primo si ottiene il legame cinematico tra l'atto di moto rigido perturbativo della pala ed i gradi di libertà del sistema:

$$\mathbf{v} = \mathbf{K}_0(V_\infty, \Omega, t)\,\mathbf{x} + \mathbf{K}_1(\Omega, t)\,\dot{\mathbf{x}} \tag{2.63}$$

nella quale il $\mathbf{v}$ raccoglie le perturbazioni delle componenti dell'atto di moto rigido della pala nel sistema di riferimento pala ed il vettore dei gradi di libertà perturbativi è costituito dagli spostamenti

elastici al tip alare, dalle rotazioni dell'ultima sezione dell'ala. In forma simbolica si ha dunque:

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}_H \\ \dots \\ \omega_{\mathbf{b}} \end{array} \right\}^{\mathcal{R}_b} \quad , \qquad \mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} v \\ w \\ \phi \\ w' \\ v' \end{array} \right\} . \tag{2.64}$$

Si noti che non compare tra i gradi di libertà lo spostamento in direzione dell'apertura dell'ala: tale spostamento è posto pari a zero in quanto, come si vedrà nel seguito, l'ala è considerata inestensibile assialmente.

È possibile distinguere tali matrici in un contributo costante nel tempo e uno tempo variante; in particolare si ha:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{0\,k} &= \mathbf{CK}_t + \mathbf{CK}_{cost} = \mathbf{CKS}\, sen(\Omega t - \psi_k) + \mathbf{CKC}\, cos(\Omega t - \psi_k) + \mathbf{CK}_{cost} \\ \mathbf{K}_{1\,k} &= \mathbf{CD}_t + \mathbf{CD}_{cost} = \mathbf{CDS}\, sen(\Omega t - \psi_k) + \mathbf{CDC}\, cos(\Omega t - \psi_k) + \mathbf{CD}_{cost} \end{aligned}$$

Le matrici tempo–varianti che compaiono nella precedente hanno dimensione $[6 \times 5]$ e dipendono essenzialmente dal valore (calcolato nella configurazione di equilibrio) di *v*, *w*, ϕ, v', w', ϕ al tip.

È opportuno, in questa sede, fornire un esempio degli elementi presenti nelle matrici $\mathbf{K}_0$ e $\mathbf{K}_1$ per meglio comprendere l'origine dei termini tempo–varianti nel legame cinematico. Tale dipendenza dal tempo delle matrici cinematiche è legata al moto del sistema di riferimento pala (nel quale sono definite le componenti dell'atto di moto rigido della pala) rispetto dal sistema di riferimento dell'ultima sezione alare in configurazione deformata. Inoltre, la dipendenza di tali matrici dalla velocità V_∞ deriva dalla variazione nel tempo delle componenti della velocità di avanzamento nel sistema di riferimento disco rotante. Per meglio comprendere queste considerazioni si consideri un rotore dotato di pale rigidamente connesse al mozzo, ovvero non dotate di gradi di libertà elastici corrispondenti ai moti di flap e lag. Si consideri ora una perturbazione del moto del tip alare di tipo traslatorio in direzione dell'asse x_d e una di tipo rotatorio attorno all'asse x_d: esse corrispondono alla traslazione indotta dal flappeggio dell'ala $w(L_w, t)$ e dalla rotazione della sezione al tip indotta dal lag di ala $v'(L_w, t)$. Il moto traslatorio $w(L_w, t)$ induce delle velocità di trascinamento nei punti appartenenti alla pala; in particolare, nel sistema di riferimento $\mathcal{R}_{dr}$ esso darà luogo a due componenti tempo varianti di tali velocità:

$$v^{x_b} = \dot{w}\, \cos(\Omega t), \quad v^{y_b} = -\dot{w}\, \sin(\Omega t). \tag{2.65}$$

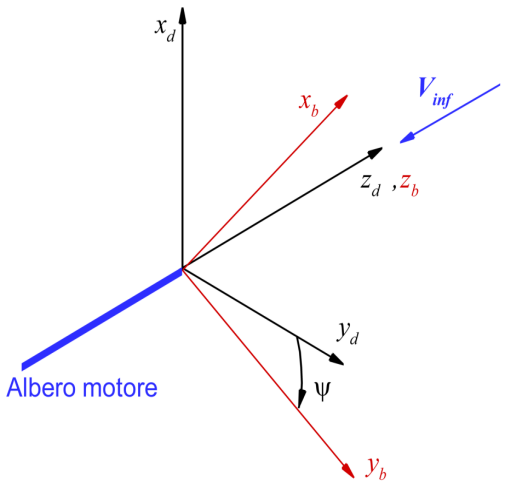

Figura 2.5: Sistemi di riferimento disco e sistema di riferimento pala (nel caso di pala rigidamente connessa con il mozzo).

Inoltre, la rotazione del pilone dovuta a $v'(L_w, t)$ induce una velocità perturbativa $V_\infty v'(L_w, t)$ che, in direzione dell'asse y_b ha componenti

$$v^{x_b} = V_\infty \, v' \, \sin(\Omega t), \quad v^{y_b} = V_\infty \, v' \, \cos(\Omega t). \tag{2.66}$$

Le espressioni 2.65 e 2.66 costituiscono un esempio degli elementi tempo–varianti che compaiono nelle matrici cinematiche.

2.2.6 Modello aerodinamico ROM per il rotore

La definizione dell'operatore aerodinamico come insieme di funzioni di trasferimento nel dominio della frequenza tra le componenti dell'atto di moto rigido della pala, i gradi di libertà elastici e le forze generalizzate, la sua successiva approssimazione razionale matriciale ed infine la definizione dei vincoli di natura cinematica che legano il moto della pala al moto dell'ultima sezione alare attraverso il mozzo e l'albero motore, consentono di identificare infine il modello di ordine ridotto basato sul solutore aerodinamico derivato dalla teoria di Greenberg.

Come sarà chiaro nel seguito, l'accoppiamento con le equazioni della dinamica strutturale è stato impostato utilizzando i carichi aerodinamici in forma dimensionale. Pertanto, con riferimento alle equazioni 2.50, moltiplicando gli elementi delle matrici relativi alle forze per il coefficiente $\rho\Omega^2 R^4$

e quelli relativi ai momenti per $\rho\Omega^2 R^5$, si ottiene

$$\begin{cases} \mathbf{B}_a(t) = c_1\,\rho\,\left[\mathbf{A}_2\,\lambda^2\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}_1\,\lambda\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}_0\,\mathbf{q} + \mathbf{C}\,\mathbf{r}\right] \\ \\ \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\lambda}\,\left[\mathbf{A}\,\mathbf{r} + \mathbf{B}\,\mathbf{q}\right] \end{cases} \tag{2.67}$$

nella quale con ρ si è indicata la densità dell'aria.

Sostituendo le equazioni 2.63 che descrivono l'atto di moto della pala in funzione dei gradi di libertà perturbativi del sistema nell'espressione dei carichi fornita dalla 2.67 si può finalmente identificare il modello ROM basato sul solutore aerodinamico di Greenberg nella seguente forma

$$\begin{cases} \mathbf{B}_a(t) = \mathbf{D}_2(t)\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_1(t)\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_0(t)\,\mathbf{x} + c_1\,\rho\,\mathbf{C}\,\mathbf{r} \\ \\ \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\lambda}\,[\mathbf{A}\,\mathbf{r} + \mathbf{H}_1(t)\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_0(t)\,\mathbf{x}], \end{cases} \tag{2.68}$$

nella quale le matrici periodiche che compaiono sono partizionate nel seguente modo

$$\mathbf{D}_j(t) = [\mathbf{D}_j^p(t)\;\mathbf{D}_j^d(t)] \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_j(t) = [\mathbf{H}_j^p(t)\;\mathbf{H}_j^d(t)]. \tag{2.69}$$

e risulta

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_2^v(t) &= c_1\,\rho\,\mathbf{A}_1^v\mathbf{K}_1(t), \\ \mathbf{D}_2^d(t) &= \mathbf{A}_2^q, \\ \mathbf{D}_1^v(t) &= c_1\,\rho\,\left\{\mathbf{A}_1^v[\dot{\mathbf{K}}_1(t) + \mathbf{K}_0(t)] + \mathbf{A}_0^v\mathbf{K}_1(t)\right\}, \\ \mathbf{D}_1^d(t) &= \mathbf{A}_1^q, \\ \mathbf{D}_0^v(t) &= c_1\,\rho\,\left[\mathbf{A}_1^v\dot{\mathbf{K}}_0(t) + \mathbf{A}_0^v\mathbf{K}_0(t)\right], \\ \mathbf{D}_0^d(t) &= \mathbf{A}_0^q, \\ \mathbf{H}_1^v(t) &= \mathbf{B}^v\mathbf{K}_1(t), \\ \mathbf{H}_1^d(t) &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{H}_0^v(t) &= \mathbf{B}^v\mathbf{K}_0(t) \\ \mathbf{H}_0^d(t) &= \mathbf{B}^q. \end{aligned}$$

Dato come ingresso una fissata legge di variazione temporale del moto perturbativo dell'ultima sezione dell'ala, la relazione 2.68 fornisce, istante per istante, i corrispondenti carichi aerodinamici agenti sulla pala del rotore.

2.3 Modello aerodinamico per l'ala

In questa sezione verrà affrontato il problema dell'identificazione di un modello di ordine ridotto per la descrizione dei carichi aerodinamici agenti sull'ala. Anche in questo caso si otterrà un legame esplicito tra forze (e momenti) e gradi di libertà del sistema in analogia con quanto visto per il rotore. La differenza fondamentale è che in questo caso il modello ROM sarà a coefficienti costanti: infatti anche in questo caso l'ala è soggetta ad un moto di trascinamento (quello della fusoliera), tuttavia essa nel sistema di riferimento solidale alla fusoliera non è in rotazione. In altri termini, la descrizione cinematica dell'ala utilizza dei modi che sono tempo–costanti nello spazio solidale alla ala, diversamente da quelli utilizzati per la descrizione dell'atto di moto rigido della pala.

2.3.1 Sistemi di riferimento e descrizione cinematica

Nel seguito si fará uso dei seguenti riferimenti cartesiani ortogonali:

1. **Riferimento ala indeformata** $Oxyz$:
   ha origine nel centro elastico della sezione alla radice, asse x diretto lungo l'asse elastico indeformato, asse y orizzontale e asse z diretto in modo che la terna si destra. Tale sistema di riferimento verrà indicato nel seguito con il simbolo $\mathcal{R}_i$.

2. **Riferimento fusoliera** $Ox_f y_f z_f$:
   è il riferimento ottenuto dal precedente mediante una rotazione attorno ad y seguendo la regola della mano destra, di un angolo pari all'angolo diedro Δ.

3. **Riferimento di sezione** $P\eta\zeta$:
   in configurazione indeformata questo riferimento é ottenibile da quello $Oxyz$ attraverso una rotazione di un angolo pari al calettamento Θ attorno l'asse x. A deformazione avvenuta occorre considerare anche l'effetto della torsione elastica.

4. **Riferimento ala deformata** $Px'y'z'$ di versori:
   questa terna, solidale alla generica sezione di trave, ha origine nel generico punto materiale P dell'asse elastico. In particolare l'asse x' è ortogonale alla sezione trasversale e tangente all'asse elastico deformato, mentre gli assi y' e z' sono contenuti nel piano della sezione e

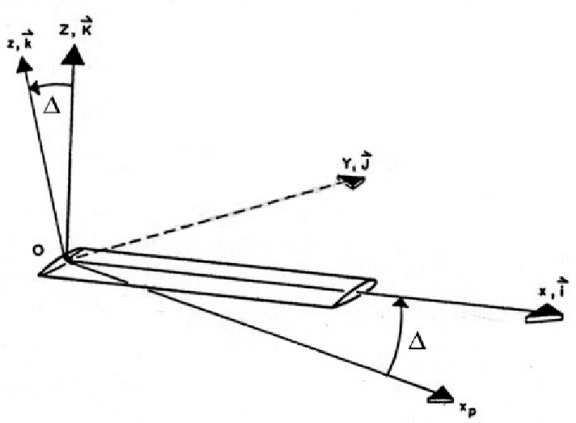

Figura 2.6: Angolo diedro.

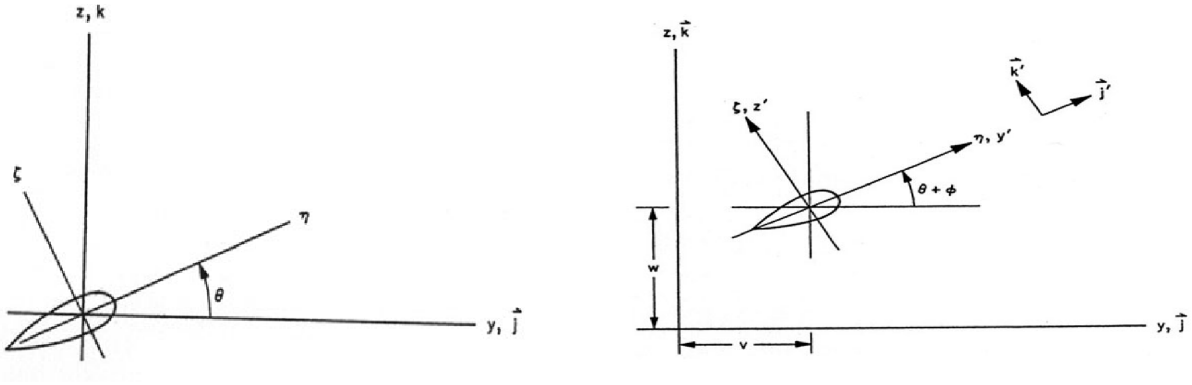

Figura 2.7: Calettamento della sezione prima (sinistra), e dopo la deformazione (destra).

diretti secondo gli assi principali η e ζ della stessa. Tale sistema di riferimento verrà indicato nel seguito con il simbolo $\mathcal{R}_d$.

Nel procedimento che verrà utilizzato per la definizione del modello aeroelastico per l'ala è necessaria la conoscenza dei sistemi di riferimento illustrati in precedenza ma anche la conoscenza degli aspetti cinematici legati al particolare modello utilizzato per schematizzare l'ala. Essa è rappresentata con un modello di trave, ovvero di continuo monodimensionale dotato di struttura locale (sezioni) con gradi di libertà nel piano (lag), fuori del piano (flap) e di torsione; in particolare le equazioni della dinamica strutturale sono ottenute dal modello non lineare di pala elastica hingeless di Hodges e Dowell nelle quali l'ala è vista come una trave rettilinea, di materiale omogeneo ed

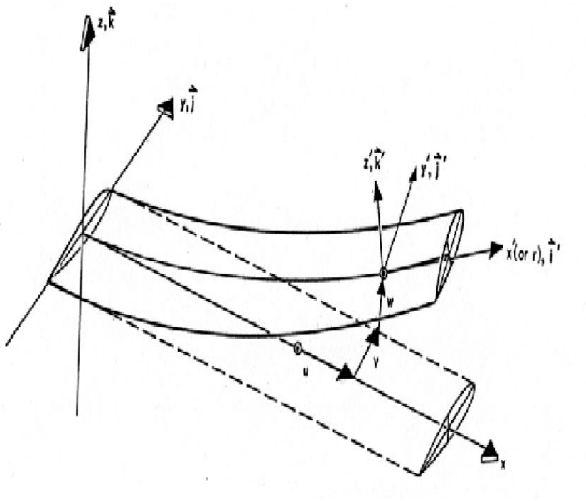

Figura 2.8: Riferimento ala deformata.

isotropo a comportamento elastico lineare. Si intende ora ricavare la relazione che, a partire da una configurazione indeformata, consente di calcolare la posizione dei punti dell'ala a seguito di una deformazione nel campo dei moderati spostamenti. In particolare il modello di trave adottato ipotizza che le sezioni della trave rimangano rigide pertanto la posizione di un qualunque punto ad esse appartenente è individuabile dalla conoscenza della posizione dell'asse elastico a seguito della deformazione e della rotazione di torsione attorno al medesimo asse subita dalla sezione in esame. Un punto dell'asse elastico in configurazione indeformata ha coordinate rispetto $Oxyz$ date da:

$$\mathbf{r} = \left\{ \begin{array}{c} x \\ 0 \\ 0 \end{array} \right\} \tag{2.70}$$

mentre a deformazione avvenuta lo stesso punto materiale avrà coordinate individuate da

$$\mathbf{r}' = \left\{ \begin{array}{c} x+u \\ v \\ w \end{array} \right\} \tag{2.71}$$

essendo $u(x,t)$,[3] $v(x,t)$ e $w(x,t)$ gli spostamenti elastici assiali, a flessione nel piano e fuori del piano, rispettivamente. Per poter caratterizzare la cinematica di un qualsiasi altro punto materiale

[3]Per completezza descrittiva si considera anche lo spostamento assiale ma, nel modello di ala di tiltrotor questo grado di libertà verrà eliminato in accordo con le considerazioni riportate in seguito.

appartenente al piano della sezione é necessario individuare l'assetto di quest'ultima rispetto la terna $Oxyz$; esso si ottiene facendo riferimento agli angoli di Eulero $\overline{\zeta}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\vartheta}$, associati alla sequenza di rotazioni con la quale la terna $Pxyz$ va a sovrapporsi alla terna $Px'y'z'$:

- rotazione di angolo $\overline{\zeta}$ intorno all'asse z: *xyz* $\longrightarrow x_1 y_1 z$
- rotazione di angolo $\overline{\beta}$ intorno all'asse y_1 : $x_1 y_1 z \longrightarrow x' y_1 z_2$
- rotazione di angolo $\overline{\vartheta}$ intorno all'asse x' : $x' y_1 z_2 \longrightarrow x' y' z'$

È evidente che in configurazione indeformata l'unico angolo di Eulero diverso da zero sarà l'angolo di calettamento $\Theta = \overline{\vartheta}$. La matrice di rotazione che governa il passaggio dalla terna $Pxyz$ a quella $Px'y'z'$ è quindi rappresentato dalla matrice $\mathbf{T}$ ottenuta dal prodotto delle tre matrici associate alle rotazioni indipendenti di Eulero . Nel Rif. [16], sono esplicitate le componenti di questa matrice in funzione delle variabili cinematiche del problema; trascurando i termini di ordine superiore al secondo nelle variabili suddette, la trasposta ha espressione:

$$\mathbf{T}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{(v')^2}{2} - \dfrac{(w')^2}{2} & -v' c_{\Theta+\hat{\phi}} - w' s_{\Theta+\hat{\phi}} & v' s_{\Theta+\hat{\phi}} - w' c_{\Theta+\hat{\phi}} \\ v' & \left[1 - \dfrac{(v')^2}{2}\right] c_{\Theta+\hat{\phi}+v'w'} & -\left[1 - \dfrac{(v')^2}{2}\right] s_{\Theta+\hat{\phi}+v'w'} \\ w' & \left[1 - \dfrac{(w')^2}{2}\right] s_{\Theta+\hat{\phi}} & \left[1 - \dfrac{(w')^2}{2}\right] c_{\Theta+\hat{\phi}} \end{bmatrix} \tag{2.72}$$

nella quale con $c_\square$ e $s_\square$ si sono indicate rispettivamente le fuzioni $\cos(\square)$ e $\sin(\square)$, con $\square'$ si è indicata la derivata di $\square$ secondo rispetto a x, mentre $\hat{\phi}$, dato da

$$\hat{\phi} = \phi + \int_0^x v'' w' dx \tag{2.73}$$

rappresenta la variazione di calettamento geometrico della sezione, dovuta alla rotazione di torsione cui si somma un termine di ordine due dovuto alla variazione di orientamento dell'asse elastico (si veda [16]).

Le considerazioni che seguono sono rivolte alla comprensione degli sviluppi analitici necessari per la definizione del modello ROM per l'ala. In particolare esse saranno utili per la definizione del modello aerodinamico 3D che verrà descritto nel paragrafo 3.5. Considerazioni del tutto analoghe

sono necessarie per la formalizzazione del modello strutturale dell'ala: uno schema degli sviluppi necessari per la definizione di tale modello strutturale dell'ala verrà presentato nel paragrafo 5 mentre per i dettagli si rimanda al lavoro [41]. Si consideri l'ala in configurazione indeformata: in essa sono state già considerate alcune rotazioni rigide quali quelle di passo, di precone e di sweep; quest'ultima avviene in un piano parallelo al piano alare risulta positiva se in direzione opposta alla velocità di avanzamento. Le grandezze che si riferiscono alla configurazione indeformata della struttura saranno nel seguito indicate con un pedice zero.

Sia $\vec{x}_P$ il vettore posizione del punto P della pala nella condizione deformata, in cui P sia appartenente al contorno di una sezione qualunque della struttura. Lo spostamento cui è soggetto il punto P è definito come $\vec{d_P} = \vec{x}_P - \vec{x}_{P_0}$, dove $\mathbf{x}_P$ è la posizione di P dopo la deformazione elastica.
La posizione del generico punto P della sezione può essere individuato come somma del vettore che individua la traccia dell'asse elastico per quella sezione e del vettore distanza tra tale traccia ed il punto P; in altri termini

$$\vec{x}_{P_0} = \vec{x}_{e_0} + \vec{r}_{d_0}\,. \tag{2.74}$$

Analogamente, nella configurazione indeformata si può scrivere

$$\vec{x}_P = \vec{x}_e + \vec{r}_d. \tag{2.75}$$

Per calcolare lo spostamento $\vec{d_P}$ si può dunque scrivere

$$\vec{d_P} = \vec{d_e} + \vec{r}_d - \vec{r}_{d_0}\,. \tag{2.76}$$

dove con $\vec{d_e}$ si è indicato lo spostamento dell'asse elastico. La differenza vettoriale $\vec{r}_d - \vec{r}_{d_0}$ rappresenta di fatto la variazione che la distanza Pe subisce a seguito della deformazione. Tale variazione può essere calcolata ricordando che sotto l'ipotesi di rigidità infinita delle sezioni si può scrivere, nel sistema di riferimento indeformato utilizzato in [16] (ovvero la terna $Oxyz$)

$$\mathbf{r}_d = \mathbf{T}^{\mathrm{T}}\mathbf{r}_{d_0} \tag{2.77}$$

e dunque

$$\mathbf{d}_P = \mathbf{d}_e + \left(\mathbf{T}^{\mathrm{T}} - \mathbf{I}\right)\mathbf{r}_{d_0}\,. \tag{2.78}$$

2.3.2 Ordering scheme

Le relazioni che si ottengono seguendo il processo descritto nella definizione della cinematica (e, come si vedrà , della dinamica) del sistema ala/rotore sono fortemente non lineari e contengono un numero di termini tali da rendere opportuno lo sviluppo di un ordering scheme che permetta di valutare i diversi contributi ed eventualmente ridurre le non linearità e quindi i termini in gioco. Questo è ancor più necessario se si pensa che, per via della formulazione adottata, l'ala è il primo corpo della catena multibody e come tale influenza cinematicamente tutti i corpi a valle (nella fattispecie albero e rotore), rendendo il numero di termini di fatto ingestibile. Entrando in dettaglio si puó dire che le variabili del problema sono confrontate con la lunghezza dell'ala ed in particolare introducendo un parametro di piccolezza ϵ si può affermare ragionevolmente che gli spostamenti adimensionali $\frac{v}{L_w}$ e $\frac{w}{L_w}$ siano di ordine ϵ mentre per lo spostamento assiale si ritiene che $\frac{u}{L_w}$ sia di ordine ϵ^2; per la torsione, nella parte strutturale l'angolo ϕ verrá definito piccolo rispetto all'angolo Θ, nel senso che $\sin\phi \approx \phi$ e $\cos\phi \approx 1$, mentre nella parte aerodinamica ϕ e Θ verranno definiti piccoli, nel senso che $\sin(\Theta+\phi) \approx (\Theta+\phi)$ e $\cos(\Theta+\phi) \approx 1$.
Le coordinate η e ζ sono dello stesso ordine di grandezza della corda c e dello spessore t del profilo della sezione di ala, e possono avere lo stesso ordine di grandezza di v e w. Quanto detto è riassunto dalla seguente tabella :

$\frac{u}{L_w} = \circ(\varepsilon)^2$	$\frac{t}{L_w} = \circ(\varepsilon)$
$\frac{v}{L_w}, \frac{w}{L_w} = \circ(\varepsilon)$	$\Delta = \circ(\varepsilon)$
$\phi = \circ(\varepsilon)$	$\Theta = \circ(1)$
$\frac{x}{L_w} = \circ(1)$	Θ (solo per forze aerodinamiche) $= \circ(\varepsilon)$
$\frac{\eta}{L_w} = \circ(\varepsilon)$	$\frac{K_A}{R}, \frac{K_{m_1}}{R}, \frac{K_{m_2}}{R}, \frac{K_m}{R} = \circ(\varepsilon)$
$\frac{\zeta}{L_w} = \circ(\varepsilon)$	$\frac{c}{L_w} = \circ(\varepsilon)$

2.3.3 Carichi aerodinamici di di sezione

I carichi aerodinamici agenti sull'ala sono ottenuti adattando il modello quasi-stazionario di Greenberg, esposto nel paragrafo 2.2 per il rotore, per descrivere i carichi di sezione che vengono successivamente integrati lungo l'ala secondo quanto previsto da un approccio di tipo *strip theory*. In questa sezione verrà illustrato il procedimento per il calcolo dei carichi di sezione.

Facendo riferimento alle espressioni 2.20 e 2.21 che esprimono i carichi aerodinamici di sezione T ed S nel sistema di riferimento di sezione, si possono calcolare le componenti di tali carichi nel sistema di riferimento ala indeformata $Oxyz$ mediante la trasformazione

$$L_v \cong S - T\ (\theta + \phi) \tag{2.79}$$

$$L_w \cong T + S\ (\theta + \phi) \tag{2.80}$$

nella quale gli angoli di calettamento sono stati assunti piccoli in quanto si sta trattando l'aerodinamica di un'ala; la stessa ipotesi non è stata fatta nelle 2.22 e 2.23 in quanto non valida per un propeller. Le espressioni per L_v, L_w e M_a sono dunque ottenibili dalle 2.79, 2.80 e 2.26 sostituendo $sen(\theta + \phi) \cong (\theta + \phi)$ e $cos(\theta + \phi) \cong 1$).

Per esprimere i carichi aerodinamici in termini di gradi di libertà elastici, occorre esplicitare la dipendenza delle componenti di velocità U_T, U_T ed $\dot{\epsilon}$ da quest'ultimi; il tutto è ottenibile se si osserva che esiste il seguente legame tra le componenti del vettore velocità $\vec{U}$ nel sistema di riferimento ala indeformata ed ala deformata:

$$\vec{U} = \dot{u}\vec{i} + (V_\infty + \dot{v})\vec{j} + \dot{w}\vec{k} = U_R\vec{i}' + U_T\vec{j}' + U_P\vec{k}' \tag{2.81}$$

cosa questa che permette di scrivere[4]

$$\left\{ \begin{array}{c} U_R \\ U_T \\ U_P \end{array} \right\}^{\mathcal{R}_d} = \mathbf{T} \left\{ \begin{array}{c} \dot{u} \\ \dot{v} + V_\infty \\ \dot{w} \end{array} \right\}^{\mathcal{R}_i} . \tag{2.82}$$

Tenendo in considerazione l'ordering scheme adottato (paragrafo 2.3.2), ed osservando inoltre che $\dot{\epsilon}$ è la componente della velocità angolare della sezione attorno all'asse x', al second'ordine si

[4]Per lo spostamento u si veda quanto detto in precedenza.

ottengono le seguenti espressioni:

$$U_T = U_\infty + \dot{v}$$

$$U_P = -U_\infty(\Theta + \phi + \int_0^x v' w'' dx) + \dot{w} - (\Theta + \phi)\dot{v} \ . \tag{2.83}$$

$$\dot{\epsilon} = \dot{\phi}$$

Nell'ottica di un'analisi perturbativa è necessario esprimere le velocità di sezione come somma di un contributo corrispondente alla condizione di equilibrio e di uno perturbativo

$$\begin{cases} U_P &= U_{P_0} + u_p \\ U_T &= U_{T_0} + u_t \\ \epsilon &= \epsilon_0 + \varepsilon \end{cases} \ . \tag{2.84}$$

Procedendo dunque alla linearizzazione delle espressioni ottenute sostituendo le 2.84 nelle 2.83 e quindi nelle 2.79 e 2.80 si può ottenere il legame lineare tra i carichi aerodinamici di sezione e gli spostamenti dell'asse elastico in corrispondenza alla sezione considerata. In particolare, in forma matriciale, si ha

$$\begin{Bmatrix} \tilde{L}_v \\ \tilde{L}_w \\ \tilde{M}_a \end{Bmatrix} = \mathbf{M}(jk) \begin{Bmatrix} \ddot{v} \\ \ddot{w} \\ \ddot{\phi} \end{Bmatrix} + \mathbf{D}(jk) \begin{Bmatrix} \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{\phi} \end{Bmatrix} + \mathbf{K}(jk) \begin{Bmatrix} v \\ w \\ \phi \end{Bmatrix} \tag{2.85}$$

nella quale le matrici $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{K}$ hanno dimensioni $[3 \times 3]$ e dipendono dalla frequenza per via della presenza della funzione $\mathcal{C}(k)$. Come si nota la forma è di tipo misto tempo–frequenza.

2.3.4 Operatore aerodinamico e identificazione del modello ROM

L'identificazione dell'operatore aerodinamico, e, successivamente, del modello ROM per l'ala richiedono una serie di passaggi che sono legati alla metodologia che è stata scelta per la soluzione del problema aeroelastico. Innanzitutto si utilizza la ricostruzione cinematica dei gradi di libertà

perturbativi di ala su base modale secondo quanto illustrato nel capitolo 1 e riportata di seguito

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{N_l} v_i(t)\,\Psi_i(x) \tag{2.86}$$

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^{N_f} w_j(t)\,\Psi_j(x) \tag{2.87}$$

$$\phi(x,t) = \sum_{n=1}^{N_t} \phi_n(t)\,\Theta_n(x)\ . \tag{2.88}$$

per esprimere le variabili cinematiche di ala in funzione delle ampiezze modali (nel seguito raccolte nel vettore $\mathbf{q}^w$). Nelle 2.86-2.88, le funzioni modali Ψ_i, Ψ_j e Θ_n sono rispettivamente i modi fondamentali di vibrazione di una trave incastrata/libera. Si ottiene in questo modo un legame tra le forze aerodinamiche di sezione e le ampiezze modali. Tale legame è tempo–invariante e presenta una dipendenza trascendente dalla frequenza. A questo punto è necessario calcolare le forze generalizzate secondo quanto richiesto dal metodo di Galerkin proiettando $\tilde{L}_v$, $\tilde{L}_w$ e $\tilde{M}_A$ sui modi elastici secondo le

$$\begin{aligned} f_i^l &= -\int_0^L L_v\,\Psi_i(x)\,\mathrm{d}x \\ f_j^f &= -\int_0^L L_w\,\Psi_j(x)\,\mathrm{d}x \\ m_n^t &= -\int_0^L M_a\,\Psi_i(x)\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.89}$$

per ottenere le $N_{tot} = N_l + N_f + N_t$ forzanti che dovranno essere accoppiate con le equazioni modali che descrivono la dinamica della struttura. Definendo il vettore $\tilde{\mathbf{f}}_a^w$ che raccoglie le N_{tot} forze generalizzate, ed il vettore $\tilde{\mathbf{q}}^w$ che raccoglie le ampiezze modali relative alle variabili di ala, si può scrivere

$$\mathbf{f}_a^w = \hat{\mathbf{M}}(jk)\,\ddot{\mathbf{q}}^w + \hat{\mathbf{D}}(jk)\,\dot{\mathbf{q}}^w + \hat{\mathbf{K}}(jk)\,\mathbf{q}^w\ , \tag{2.90}$$

la quale presenta ancora una forma mista tempo/frequenza. Trasformando la precedente nel dominio di Laplace, e ricordando che $k = \omega c/2V_\infty$, si ottiene

$$\tilde{\mathbf{f}}_a^w(k) = \left[-\frac{k^2}{\tau^2}\,\hat{\mathbf{M}}(k) + j\,\frac{k}{\tau}\,\hat{\mathbf{D}}(k) + \hat{\mathbf{K}}(k)\right]\tilde{\mathbf{q}}^w, \tag{2.91}$$

nella quale si è posto $\tau = c/2V_\infty$. Si giunge dunque a definire l'operatore aerodinamico per l'ala nella forma di una matrice $\mathbf{E}_w(jk)$ di dimensioni $[N_{tot} \times N_{tot}]$ i cui elementi rappresentano, nel

dominio della frequenza, le funzioni di trasferimento tra ampiezze modali e forze generalizzate. Formalmente risulta dunque

$$\tilde{\mathbf{f}}_a^w(jk) \;=\; \mathbf{E}_w(jk)\,\tilde{\mathbf{q}}^w \;. \tag{2.92}$$

Per definire il modello ROM per l'ala basato sul solutore aerodinamico di Greenberg occorre applicare all'operatore aerodinamico definito l'approssimazione razionale matriciale descritta nel paragrafo 2.2.4 per quanto attiene al rotore. In questo caso la 2.47 si deve riscrivere nella forma

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{f}}_a^w(\bar{s}) = [\mathbf{A}_2^w\,(\bar{s})^2 + \mathbf{A}_1^w\,\bar{s} + \mathbf{A}_0^w]\,\tilde{\mathbf{q}}^w + \mathbf{C}^w\,\tilde{\mathbf{r}}^w \\ \\ \tilde{\mathbf{r}}^w = (\bar{s}\,\mathbf{I} - \mathbf{A}^w)^{-1}\mathbf{B}^w\,\tilde{\mathbf{q}}^w \end{cases}, \tag{2.93}$$

nella quale con $\bar{s}$ si è indicata la variabile adimensionale di Laplace la cui parte immaginaria corrisponde alla frequenza ridotta.

Gli N_a^w stati aggiunti $\tilde{\mathbf{r}}^w$ che derivano dall'utilizzo dell'approssimazione razionale sono sostanzialmente legati, così come visto per il rotore, agli effetti di non stazionarietà della scia rilasciata dall'ala.

Antitrasformando la 2.93 si giunge alla completa identificazione del modello ROM a coefficienti costanti che descrive le forze aerodinamiche generalizzate agenti sull'ala in funzione esplicita e lineare delle variabili lagrangiane utilizzate per la descrizione della deformazione dell'ala. Si ha dunque

$$\begin{cases} \mathbf{f}_a^w(t) = \mathbf{D}_2^w\,\ddot{\mathbf{q}}^w + \mathbf{D}_1^w\,\ddot{\mathbf{q}}^w + \mathbf{D}_0^w\,\mathbf{q}^w + \mathbf{C}^w\,\mathbf{r}^w \\ \\ \dot{\mathbf{r}}^w = \mathbf{A}^w\,\mathbf{r}^w + \mathbf{H}_0^w\,\mathbf{q}^w \end{cases}, \tag{2.94}$$

nella quale

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_2^w &= \tau^2\,\mathbf{A}_2^w, \\ \mathbf{D}_1^w &= \tau\,\mathbf{A}_1^w, \\ \mathbf{D}_0^w &= \mathbf{A}_0^w, \\ \mathbf{A}^w &= 1/\tau\,\mathbf{A}^w, \\ \mathbf{H}_0^w &= 1/\tau\,\mathbf{B}^w \;. \end{aligned}$$

Capitolo 3

Modelli aerodinamici di ordine ridotto basati su solutori 3D

Nel presente capitolo verranno illustrati i passi che consentono di identificare un modello ROM per il calcolo dei carichi aerodinamici non stazionari agenti sulle pale del rotore e sull'ala più evoluto rispetto a quello descritto nel capitolo precedente. In particolare, sulla falsa riga di quanto già visto nel capitolo 2, si illustrerà in questa sede la procedura di identificazione di un modello ROM che si basa su un solutore aerodinamico 3D, non stazionario scritto nel dominio della freqenza e basato sul metodo agli elementi di contorno (BEM, dall'inglese *Boundary Element Method*). La specifica natura del solutore aerodinamico utilizzato comporta alcune differenze rispetto all procedura già illustrata; tali differenze verranno rimarcate nel corso della trattazione.

L'ipotesi di partenza per l'identificazione del modello ROM è che il moto del rotore (e quindi i carichi aerodinamici agenti sulle pale dello stesso) sia influenzato da quello dell'ala per il tramite del pilone. Si tratta pertanto di un tipo di interazione di carattere cinematico.
Un secondo tipo di interazione tra rotore ed ala è di carattere aerodinamico ed è legato alla distorsione della scia rilasciata dalle pale rotoriche indotta dalla presenza dell'ala. Tale fenomeno, anche in assenza di perturbazioni del moto dell'ala genera carichi aerodinamici non–stazionari sulle pale. L'inclusione di tali effetti è realizzabile utilizzando un solutore aerodinamico nel dominio del tempo che sia in grado di calcolare, ad ogni istante e mediante una procedura non lineare, la forma della scia rotorica. Tale solutore è stato sviluppato nel corso del presente lavoro di tesi basandosi

su un solutore BEM insieme ad una metodologia di accoppiamento con il modello ROM lineare (si veda capitolo 4) che verrà identificato in questo capitolo. Tale accoppiamento consente, come si vedrà, di tener conto, seppur in misura approssimata, dell'interferenza aerodinamica tra rotore ed ala dovuta all'interazione tra la scia rotorica e la superficie dell'ala. In ogni caso, il modello ROM presentato nel presente capitolo rappresenta uno strumento di previsione del comportamento del sistema ala/rotore piuttosto semplice e utile per la fase di progettazione preliminare e per la sintesi di leggi di controllo pur trascurando l'interazione di natura aerodinamica interazionale.

Il modello ROM che si otterrà è , analogamente a quello basato sul solutore di Greenberg, lineare, a coefficienti periodici e descrive i carichi aerodinamici non–stazionari agenti sulle pale del rotore in presenza di una perturbazione del moto in condizioni di crociera di un sistema ala/rotore. Oltre agli effetti legati all'aerodinamica interazionale vengono trascurati anche quelli legati a fenomeni transonici e viscosi la cui descrizione richiederebbe un modello matematico non lineare.
Viene pertanto preso in considerazione il problema di un sistema pilone/rotore isolato in moto assiale in un flusso potenziale. Le perturbazioni del moto del pilone si intendono rappresentative del moto dell'ultima sezione dell'ala cui è solidale il pilone nel caso di una configurazione tiltrotor o pod.

Per quanto riguarda la definizione dei sistemi di riferimento e alla schematizzazione del rotore, si fa riferimento al capitolo 2. Dapprima verrà illustrata la procedura di identificazione dell'operatore aerodinamico.

Per quanto riguarda l'identificazione del modello ROM, il moto della pala può essere visto come sovrapposizione di un contributo legato all'atto di moto rigido del rotore (ovvero il moto di trascinamento del sistema di riferimento rotante) e di uno elastico legato alla deformazione delle pale (ovvero il moto relativo delle pale rispetto al sistema di riferimento rotante). Questi due contributi verranno nel seguito trattati separatamente.

3.1 Modello aerodinamico del rotore

In questo paragrafo verrà presentato il modello utilizzato per determinare i carichi aerodinamici agenti su ciascuna delle pale del rotore. In particolare si arriverà a definire un'operatore aerodinamico che, nel dominio della frequenza, lega tali carichi alle condizioni al contorno cinematiche

sulla pala.

Analogamente a quanto visto nel capitolo 2 per l'operatore aerodinamico di Greenberg, adottando una metodologia agli stati finiti sarà successivamente possibile ottenere una approssimazione razionale, nella dominio della frequenza, di tale operatore.
Questa metodologia consente, in sintesi, di esprimere i carichi aerodinamici di pala nel dominio del tempo e quindi di inserirli nelle equazioni che governano la dinamica della pala stessa.
Il solutore aerodinamico utilizzato è basato su principi primi, ovvero sulle equazioni di conservazione di massa e quantità di moto scritte nell'ipotesi di flussi non viscosi. Esso è in grado, per la sua natura tridimensionale, di tenere in conto dei complessi fenomeni di interazione aerodinamica che si verificano in un rotore in volo assiale. In particolare, ciascuna pala del rotore genera una scia vorticosa che descrive un'elica con asse parallelo all'asse del rotore stesso e che induce nel campo fluidodinamico un campo di velocità (velocità indotta) che altera sensibilmente la distribuzione dei carichi aerodinamici sulla pala. Inoltre la scia è presente non solo a valle del profilo, ma anche al di sotto di esso; infine ciascuna pala è soggetta agli effetti dovuti alla tridimensionalità del flusso e alla interazione con le altre pale e con le loro scie.

3.1.1 Equazione integrale di contorno

In questa sezione verrà descritto il solutore aerodinamico 3D ottenuto dall'applicazione del metodo agli elementi di contorno (nel seguito indicato con l'acronimo BEM) per flussi potenziali non stazionari. In questa sede le considerazioni partiranno dalla formulazione integrale scritta nel dominio del tempo mentre per i dettagli sulla sua derivazione si rimanda all'appendice B. Il metodo proposto si basa sulle ipotesi di flusso incomprimibile, non viscoso e irrotazionale all'istante $t = 0$ (flusso *potenziale*), che consentono di intreodurre una funzione potenziale per la velocità φ che soddisfa l'equazione di Laplace. L'imposizione delle condizioni al contorno sul corpo e sulla scia e della condizione di assenza di perturbazione all'infinito, consente di pervenire alla formulazione del problema di Neumann esterno per l'equazione di Laplace esteso al caso di flussi portanti (ovvero con presenza di scia).

L'ipotesi di flusso incomprimibile non è da considerarsi limitativa per il modello introdotto. L'introduzione degli effetti di comprimibilità nella formulazione potenziale di fatto comporterebbe solo lievi correzioni all'impianto complessivo del modello qui introdotto. Per quanto riguarda l'ipotesi

di flusso non viscoso, essa viene introdotta sia perché, in condizioni di volo lontane dallo stallo, il contributo dei termini viscosi al tensore delle tensioni è trascurabile (oltre che piuttosto complesso da valutare), sia perché la viscosità influisce soprattutto sul calcolo della configurazione all'equilibrio e non tanto sull'analisi perturbativa attorno ad essa.

Partendo dalla formulazione differenziale in appendice e applicando il metodo delle equazioni integrali di contorno (si veda [17]) si ottiene la cosiddetta equazione integrale di Green per il caso di flussi incomprimibili e potenziali. Essa fornisce il valore del potenziale di velocità per un punto identificato dal vettore posizione $\vec{x}_*$ nella seguente forma:

$$E(\vec{x}_*)\varphi(\vec{x}_*,t) = \int_{\mathcal{S}_B} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}G - \varphi\frac{\partial G}{\partial n}\right) \mathrm{d}\mathcal{S}(\vec{x}) \; - \int_{\mathcal{S}_W} \left(\Delta\varphi\frac{\partial G}{\partial n}\right) \mathrm{d}\mathcal{S}(\vec{x}) \tag{3.1}$$

dove:

- $\mathcal{S}_B$ e $\mathcal{S}_W$ rappresentano rispettivamente la superficie (chiusa) del corpo e e quella della scia. In particolare $\mathcal{S}_W$ è la superficie costituita da tutte le particelle fluide che sono entrate in contatto con la superficie del corpo lasciandolo in corrispondenza del bordo d'uscita;

- la funzione di punto
$$G = \frac{-1}{4\pi \parallel \vec{x} - \vec{x_*} \parallel}$$
rappresenta la sorgente unitaria soluzione dell'equazione di Laplace, mentre la sua derivata normale rappresenta il potenziale dovuto alla presenza di una doppietta di intensità unitaria nel campo;

- $\Delta\varphi$ rappresenta la differenza di potenziale attraverso la scia; in particolare per ogni punto della scia esso è dato dal salto di potenziale che esisteva al bordo di uscita nell'istante in cui tale punto si è staccato dal bordo stesso;

- $E(\vec{x}_*)$ è definita come:
$$E(\mathbf{x}_*) = \begin{cases} 1 & \forall\, \vec{x}_* \in \mathcal{V}_F \\ \frac{1}{2} & \forall\, \vec{x}_* \in \mathcal{S}_B \\ 0 & \forall\, \vec{x}_* \in \mathcal{V}_B \end{cases}$$
nella quale con $\mathcal{V}_F$ e $\mathcal{V}_B$ sono indicati rispettivamente il volume del dominio fluidodinamico esterno al corpo e il volume interno al corpo stesso.

Si noti che nell'equazione 3.1 la presenza del corpo nel campo compare nel termine dal primo termine integrale: esso viene rappresentato in termini di una distribuzione di sorgenti di intensità $\partial\varphi/\partial n$ e di doppiette di intensità φ (valutato sul corpo).
La scia invece è rappresentata come una distribuzione di doppiette sulla superficie geometrica definita dal luogo dei punti spazzati dal bordo d'uscita della pala, equivalente ad uno di vortici, di intensità $\Delta\varphi$.
Se $\vec{x}_*$ è nel campo, l'equazione 3.1 può essere utilizzata per calcolare il potenziale in un qualunque punto del campo in funzione del valore di φ e $\partial\varphi/\partial n$ su $\mathcal{S}_B$ e di $\Delta\varphi$ su $\mathcal{S}_W$. Per calcolare il valore del potenziale nei punti appartenenti alla superficie del corpo si può utilizzare la stessa equazione facendo tendere, in un processo al limite, $\vec{x}_*$ ad un punto di $\mathcal{S}_B$; in tal caso infatti il valore di $\varphi(\vec{x}_*)$ tende al valore di φ in quel punto di $\mathcal{S}_B$ (da questo processo deriva il valore $1/2$ che la funzione $E(\vec{x}_*)$ assume sulla superficie del corpo). In altri termini, per i punti di $\mathcal{S}_B$, l'equazione del potenziale è una condizione di compatibilità tra φ e $\partial\varphi/\partial n$ su $\mathcal{S}_B$ e $\Delta\varphi$ su $\mathcal{S}_W$. Si noti che $\partial\phi/\partial n$ su $\mathcal{S}_B$ è nota dalle condizioni al contorno sulla superficie del corpo, mentre $\Delta\varphi$ su $\mathcal{S}_W$ è nota dalla "storia" del flusso negli istanti precedenti a quello attuale. Quest'ultimo aspetto va sottolineato in quanto l'ipotesi di presenza della scia in un flusso potenziale introduce una sorta di "effetto memoria" nella soluzione: il campo di velocità in un certo istante dipende da ciò che è successo negli istanti precedenti.

3.1.2 Formulazione BEM nel dominio della frequenza

Nell'ottica di poter effettuare una analisi di stabilità del sistema aeroelastico ala/rotore mediante un'analisi agli autovalori, è necessario passare nel dominio della frequenza per ottenere un legame lineare tra i carichi aerodinamici agenti sulla pala e i gradi di libertà scelti per la descrizione cinematica delle condizioni al contorno sul corpo. La formulazione ottenuta è valida per configurazioni nelle quali la scia rilasciata dal corpo portante in esame risulti fissa rispetto ad un sistema di riferimento solidale al corpo stesso (come accade per esempio per le ali in moto traslatorio, per rotori in hover e per propeller in moto assiale).

È importante sottolineare che la formulazione presentata nella presente sezione è del tutto generale e vale sia per rotori dotati di pale rigide che per rotori con pale flessibili. La differenza sostanziale si ha nella definizione delle condizioni al contorno sul corpo. Infatti occorre tener presente che

la generazione dei carichi aerodinamici sulla pala è legata all'insorgere di componenti di velocità diverse da zero in direzione della normale alla superficie del corpo, ovvero dalla presenza di una $\partial\varphi/\partial n$ diversa da zero sul corpo. Dato che la presenza dei gradi di libertà elastici di pala ha carattere cinematico essa influenza sostanzialmente la forma delle condizioni al contorno sul corpo ma non il resto della formulazione. Questa osservazione sarà più chiara una volta illustrata la procedura per l'identificazione dell'operatore aerodinamico.

Nel dominio della frequenza si ottiene la seguente equazione integrale per la funzione potenziale di velocità nei punti del campo

$$\frac{1}{2}\tilde{\varphi}(\vec{x}_*,t) = \int_{\mathcal{S}_B}\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial n}G - \tilde{\varphi}\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}\mathcal{S}(\vec{x}) - \int_{\mathcal{S}_W}\left(\Delta\tilde{\varphi}^{TE}e^{(-s\,\tau)}\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}\mathcal{S}(\vec{x}) \tag{3.2}$$

nella quale τ è il tempo necessario affinché il punto materiale della scia venga convetto dal *trailing edge* alla posizione attuale.

La soluzione numerica della 3.2 si ottiene dalla sua approssimazione algebrica derivante dalla discretizzazione della pala e della scia in pannelli quadrangolari, nei quali $\tilde{\varphi}, \partial\tilde{\varphi}/\partial n$ e $\Delta\tilde{\varphi}$, sono assunti costanti (BEM di ordine zero).

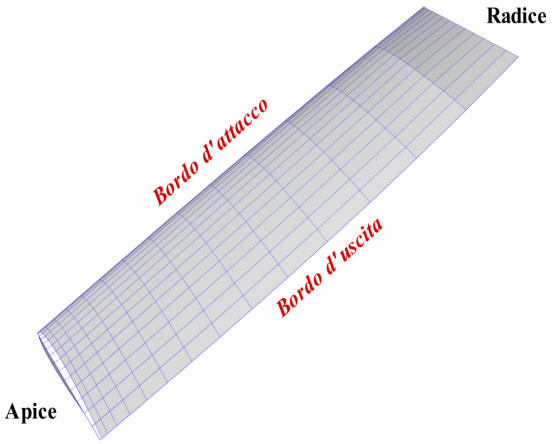

Figura 3.1: Esempio di mesh sulla pala.

Imponendo che la 3.2 sia soddisfatta al centro dei pannelli (metodo di collocazione) del corpo ($N_c = N_B$) tale approssimazione algebrica assume la forma

$$\frac{1}{2}\tilde{\varphi}_k = \sum_{j=1}^{N_B} B_{kj}\tilde{\chi}_j + \sum_{j=1}^{N_B} C_{kj}\tilde{\varphi}_j + \sum_{n=1}^{N_W} F_{kn}\Delta\tilde{\varphi}_n^{TE} \tag{3.3}$$

dove $\tilde{\chi} = \partial\tilde{\varphi}/\partial n$ e l'indice k scorre su tutti gli N_B pannelli del corpo.

I coefficienti tempoinvarianti che compaiono nella 3.3 sono dati dalle relazioni

$$B_{kj} = \int_{\mathcal{S}_{B_j}} G_k \, \mathrm{d}\mathcal{S}, \quad C_{kj} = -\int_{\mathcal{S}_{B_j}} \frac{\partial G_k}{\partial n} \, \mathrm{d}\mathcal{S}, \quad F_{kn} = -e^{(-s\tau_n)} \int_{\mathcal{S}_{W_n}} \frac{\partial G_k}{\partial n} \, \mathrm{d}\mathcal{S}$$

dove $G_k = G|_{\mathbf{x}_* = \mathbf{x}_k}$, e $\mathcal{S}_{B_j}$ e $\mathcal{S}_{W_n}$ rappresentano rispettivamente le superfici del j-esimo pannello di $\mathcal{S}_B$ e dell'n-esimo pannello di $\mathcal{S}_W$. Dal punto di vista fisico i coefficienti del tipo B_{kj} rappresentano l'influenza che le sorgenti sul generico pannello $\vec{x}$ hanno sul punto di collocazione ($\vec{x}_k$); analogamente i coefficienti C_{kj} e F_{kn} relativamente alle doppiette distribuite sul corpo e sulla scia. Nel calcolo dell'influenza di ciascun pannello sul k-esimo si considera anche l'influenza del pannello su se stesso.

Si noti che i coefficienti B_{kj} e C_{kj} dipendono dalla distanza $\| \vec{x} - \vec{x}_k \|$ e risultano tempo–invarianti nel caso in cui il corpo si muova di moto rigido. Allo stesso modo i coefficienti F_{kn} sono tempo–invarianti se si considera la scia come una superficie rigidamente connessa con il corpo. Nel presente lavoro viene fatta questa assunzione in quanto la pala è schematizzata come corpo rigido ed inoltre il moto della stessa consiste in piccole perturbazioni attorno alla configurazione di equilibrio pertanto si terrà conto dell'effetto dell'elasticità della pala solo nella valutazione delle condizioni al contorno; pertanto la scia può essere considerata alla stregua di un foglio di lamiera, sagomato in modo da formare un'elica, rigidamente connesso al bordo di uscita della pala. In particolare si ipotizza che la scia elicoidale del rotore abbia una generatrice perfettamente cilindrica con asse parallelo all'asse di rotazione del rotore.

L'ultimo passo consiste nell'esprimere la discontinuità sul potenziale al *trailing edge* in funzione del valore del potenziale al centro dei pannelli sul corpo mediante la relazione

$$\Delta\tilde{\varphi}_n^{TE} = \sum_{j=1}^{N_B} S_{nj}\tilde{\varphi}_j \tag{3.4}$$

nella quale $\mathcal{S}_{nj} = 1$ sul pannello superiore al *trailing edge*, $\mathcal{S}_{nj} = -1$ sul pannello inferiore e $\mathcal{S}_{nj} = 0$ per ogni altro pannello.

In definitiva si ottiene una formulazione del tipo

$$\frac{1}{2}\tilde{\varphi}_k = \sum_{j=1}^{N_B} B_{kj}\tilde{\chi}_j + \sum_{j=1}^{N_B} C_{kj}\tilde{\varphi}_j + \sum_{n=1}^{N_W}\sum_{j=}^{N_B} F_{kn}S_{nj}\tilde{\varphi}_j \tag{3.5}$$

che può essere scritta in modo più chiaro in forma matriciale come segue:

$$\mathbf{Y}\,\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{B}\,\tilde{\boldsymbol{\chi}} \tag{3.6}$$

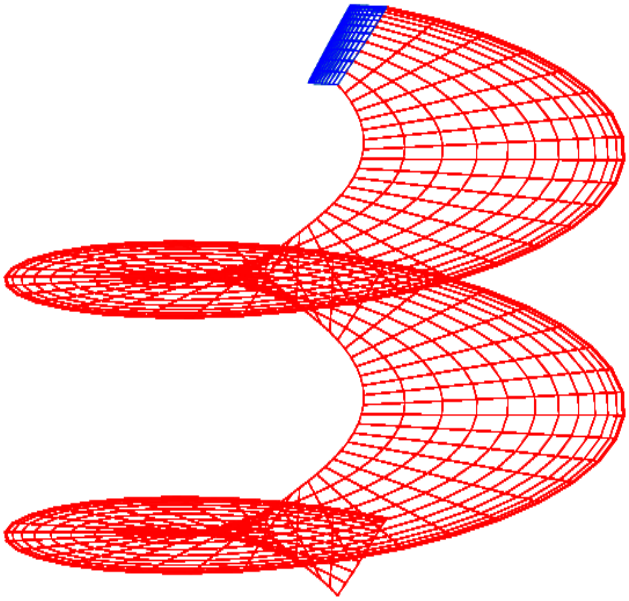

Figura 3.2: Esempio di mesh sulla scia.

avendo indicato con

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{C} - \mathbf{F}(s)\,\mathbf{S} \tag{3.7}$$

nella quale $\mathbf{C}$ (di dimensioni $[N_B \times N_B]$) e $\mathbf{F}$ (di dimensioni $[N_B \times N_W]$) sono le matrici che contengono rispettivamente i coefficienti C_{kj} e F_{kn} mentre la matrice $\mathbf{B}$, di dimensioni $[N_B \times N_B]$ contiene i coefficienti B_{kj}.

In definitiva è dunque possibile scrivere esplicitamente la funzione di trasferimento che lega le condizioni al contorno calcolate nei centroidi dei pannelli al valore del potenziale negli stessi punti nella seguente forma:

$$\tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \mathbf{E}_{\varphi}(s)\,\tilde{\boldsymbol{\chi}}, \tag{3.8}$$

nella quale $\mathbf{E}_{\varphi}$ è una matrice di dimensioni $[N_c \times N_c]$ data da

$$\mathbf{E}_{\varphi}(s) = \left[\frac{1}{2}\mathbf{I} - \mathbf{C} - \mathbf{F}(s)\,\mathbf{S}\right]^{-1}\mathbf{B}. \tag{3.9}$$

3.1.3 Calcolo delle forze aerodinamiche generalizzate

Dalla conoscenza della distribuzione del potenziale sulla superficie del corpo è possibile risalire alla distribuzione di pressione sulla stessa applicando il teorema di Bernoulli scritto nel sistema di

riferimento solidale alla pala, ovvero

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mathbf{v}_B \cdot \nabla \varphi + \frac{\| \mathbf{v} \|^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} \tag{3.10}$$

dove p indica la pressione locale, p_∞ la pressione del flusso indisturbato, $\mathbf{v} = \nabla\varphi$, e $\partial/\partial t$ rappresenta la derivata temporale fatta nel riferimento solidale alla pala.

Nell'ottica di una analisi perturbativa del sistema, si considerano il potenziale e la pressione in un punto come somma di una parte all'equilibrio, costante, e una parte perturbativa dipendente dal tempo:

$$p = p_0 + p' \tag{3.11}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi' \tag{3.12}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}' = \nabla\varphi_0 + \nabla\varphi' \tag{3.13}$$

dove p_0, φ_0 e $\mathbf{v}_0$ indicano, rispettivamente,il campo del potenziale, il campo di pressione e il campo di velocità attorno alla pala nella configurazione indeformata (calcolata dalla soluzione stazionaria del problema), mentre p', φ' e $\mathbf{v}'$ denotano il potenziale, la pressione e il campo di velocità indotti dal moto perturbativo della pala.

Operando tale sostituzione nella 3.10 si ottiene

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \mathbf{v}_B \cdot \nabla\varphi_0 - \mathbf{v}_B \cdot \nabla\varphi' + \frac{1}{2}\Big[{\mathbf{v}_0}^2 + 2\mathbf{v}_0 \cdot \nabla\varphi' + \nabla\varphi' \cdot \nabla\varphi'\Big] + \frac{p_0 + p'}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} \tag{3.14}$$

dalla quale, eliminando i termini all'equilibrio e trascurando i termini di ordine superiore (non lineari), si trova

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \Big(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_B\Big) \cdot \nabla\varphi + \frac{p}{\rho} = 0 \tag{3.15}$$

Per semplicità di notazione nell'equazione precedente l'apice per indicare le grandezze perturbative è omesso: d'ora in avanti ci si riferirà ad esse *sempre* omettendo l'apice.

Passando nel dominio della frequenza si ottiene:

$$\tilde{p} = -\rho\left(s\tilde{\varphi} - \mathbf{v}_0 \cdot \nabla\tilde{\varphi} + \nabla\varphi_0 \cdot \nabla\tilde{\varphi}\right) \tag{3.16}$$

Infine discretizzando la superficie della pala si ottiene la forma matriciale

$$\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{E}_p(s)\tilde{\boldsymbol{\varphi}} \tag{3.17}$$

dove la matrice $\mathbf{E}_p(s)$ ha dimensioni $[N_B \times N_B]$ e deriva dalla discretizzazione dell'operatore gradiente, mentre il vettore $\tilde{\mathbf{p}}$ ha dimensioni $[N_B]$ ed è il vettore delle pressioni perturbative al centro di ogni pannello.
Si noti che non si è linearizzato il termine $\mathbf{v}_B$; infatti si desidera ottenere un legame tra variabili lagrangiane e carichi aerodinamici di tipo lineare: la linearizzazione di tale termine avrebbe fatto comparire il prodotto tra le variabili lagrangiane stesse e $\nabla\varphi'$ rendendo di fatto non lineare il legame tra la pressione e il potenziale.

Nota la distribuzione della pressione sulla superficie del corpo è possibile valutare i carichi aerodinamici agenti sul corpo. In particolare si identifica una matrice $\mathbf{E}_f$ che fornisce il legame tra le forze aerodinamiche generalizzate e il campo di pressione sulla superficie della pala.
Per definizione la j-esima forza generalizzata indotta dalle variabili di stato perturbative è

$$f_n = -\int_{\mathcal{S}_B} p' \, \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\Upsilon}_n(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathcal{S}(\mathbf{x}), \tag{3.18}$$

nella quale le $\boldsymbol{\Upsilon}_n$ costituiscono un set di funzioni modali vettoriali costanti nel sistema di riferimento pala. Si noti che, per applicazioni in ambito aeroelastico tali funzioni devono necessariamente coincidere con quelle che verranno utilizzate per definire il moto (elastico o rigido) del corpo. In particolare, utilizzando dei modi rigidi, le sei forze generalizzate che si ottengono coincidono con la proiezione della risultante di forze e momenti aerodinamici sugli assi del sistema di riferimento solidale alla pala.
In forma matriciale il legame tra forze generalizzate e campo di pressione diventa

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{E}_f \, \tilde{\mathbf{p}} \tag{3.19}$$

nella quale la matrice $\mathbf{E}_f$ ha dimensione $[N_f \times N_c]$ ed i suoi elementi sono

$$E_{f_{nj}} = -\int_{\mathcal{S}_{B_j}} \mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\Upsilon}_n(\mathbf{x}) \, \mathrm{d}\mathcal{S} \tag{3.20}$$

3.1.4 L'operatore aerodinamico

Per operatore aerodinamico si intende la matrice che raccoglie le funzioni di trasferimento che, nel dominio della frequenza, legano il vettore delle condizioni al contorno perturbative sul corpo $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$, alle forze generalizzate agenti su di esso $\tilde{\mathbf{f}}$.
Dal punto di vista fisico, note le condizioni al contorno sulla pala, è possibile calcolare, per ogni

pannello del corpo, il potenziale $\tilde{\varphi}$ sul corpo mediante la formulazione BEM esposta nel paragrafo 3.1.2 ovvero mediante la soluzione dell'equazione integrale discretizzata. Applicando il teorema di Bernoulli, dal potenziale sul corpo si risale alla distribuzione delle pressioni tramite la 3.17, ed infine, integrando le pressioni sulla superficie del corpo, e dunque utilizzando la 3.19 si ottengono le forze aerodinamiche generalizzate agenti sulla pala.
Pertanto è possibile esprimere le forze generalizzate in funzione delle condizioni al contorno sul corpo nella seguente forma:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{Q}(s)\,\tilde{\boldsymbol{\chi}}, \tag{3.21}$$

nella quale l'operatore aerodinamico $\mathbf{Q}(s)$ è una matrice $[N_f \times N_c]$ che si ottiene dunque dal prodotto delle tre matrici descritte nel modo che segue:

$$\mathbf{Q}(s) = \mathbf{E}_f\,\mathbf{E}_p(s)\,\mathbf{E}_\phi(s). \tag{3.22}$$

3.2 Contributo del moto di rotore ai carichi aerodinamici di pala

In questa sezione si arriverà a definire un modello aerodinamico ROM che lega l'atto di moto rigido perturbativo del rotore alle corrispondenti forze aerodinamiche. Il calcolo del contributo ai carichi aerodinamici di pala dovuto all'atto di moto rigido del rotore ha effetti diretti sul calcolo delle condizioni al contorno sulla superficie delle pale.

3.2.1 Calcolo delle condizioni al contorno sulla singola pala

In questo paragrafo verranno derivate le espressioni per il calcolo delle condizioni al contorno sulla superficie della pala.
La trattazione verrà sviluppata per una singola pala pertanto, parlando di sistema di riferimento pala si intenderà il riferimento solidale alla i–esima pala. L'estensione ad un rotore multipala verrà affrontata successivamente quando sarà necessario modificare opportunamente la forma dell'operatore aerodinamico per il calcolo dei carichi che il rotore trasferisce all'ala e dei carichi che forzano la dinamica delle singole pale.

La velocità di un punto appartenente alla superficie della pala all'istante t può essere scritta nella forma

$$\mathbf{v}_B(\mathbf{x},t) = \mathbf{v}_{B_0}(\mathbf{x}) + \sum_{n=1}^{N_{bc}} q_n(t)\ \mathbf{\Psi}_n(\mathbf{x}) \tag{3.23}$$

nella quale $\mathbf{v}_{B_0}$ è la velocità del punto in esame nella configurazione di equilibrio della pala e le $\mathbf{\Psi}_n$ costituiscono un opportuno set di funzioni dipendenti solo dalla posizione del punto sulla superficie della pala. Tali funzioni rappresentano i modi scelti per rappresentare la velocità di perturbazione nei punti della pala; le q_n sono quindi le variabili lagrangiane del problema (dette anche variabili modali) e, come si nota, dipendono dal tempo.

La scelta dei modi per la rappresentazione delle velocità dei punti appartenenti alla pala necessita un approfondimento.

L'ipotesi di rotore dotato di pale rigide consente di esprimere la velocità assoluta di un punto appartenente alla generica pala utilizzando l'espressione dell'atto di moto di un corpo rigido. In particolare, si può esprimere la velocità di un punto appartenente ad un corpo rigido in funzione della velocità di un altro punto del corpo e della velocità angolare del corpo stesso; nel caso della pala del rotore, in un sistema di riferimento inerziale fisso rispetto al flusso indisturbato, si potrà dunque scrivere

$$\vec{v}_P(\vec{x},t) = \vec{v}_H(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{x} - \vec{x}_H) \tag{3.24}$$

nella quale $\vec{v}_P$ e $\vec{v}_H$ sono, rispettivamente, la velocità assoluta di un punto appartenente alla superficie della pala e quella del mozzo, mentre $\vec{\omega}$ è la velocità angolare assoluta del rotore visto come corpo rigido. Le velocità che compaiono nella 3.24 sono da intendersi come perturbazioni rispetto alla condizione di equilibrio.

Considerando un sistema di riferimento $H\,x_b y_b z_b$ di versori $\mathbf{i}_b, \mathbf{j}_b, \mathbf{k}_b$ che abbia origine nel mozzo la distribuzione della velocità nei punti appartenenti alla pala può essere espressa mediante una combinazione lineare di sei forme modali vettoriali $\mathbf{\Psi}_n$ indipendenti dal tempo i cui coefficienti sono rappresentati dalle componenti di $\vec{v}_H$ e $\vec{\omega}$ nel sistema di riferimento pala. In altri termini, posto $\mathbf{v}_H = v_H^{x_b}\,\mathbf{i}_b + v_H^{y_b}\,\mathbf{j}_b + v_H^{z_b}\,\mathbf{k}_b$, e $\boldsymbol{\omega} = \omega^{x_b}\,\mathbf{i}_b + \omega^{y_b}\,\mathbf{j}_b + \omega^{z_b}\,\mathbf{k}_b$, l'equazione 3.24 può essere riscritta nel seguente modo

$$\mathbf{v}(\mathbf{x},t) = \sum_{n=1}^{6} v_n(t)\,\mathbf{\Psi}_n(\mathbf{x}), \tag{3.25}$$

nella quale le componenti $v_n(t)$ possono essere viste come velocità generalizzate e risultano in

particolare essere $v_1 = v_H^{x_b}$, $v_2 = v_H^{y_b}$, $v_3 = v_H^{z_b}$, $v_4 = \omega^{x_b}$, $v_5 = \omega^{y_b}$, $v_6 = \omega^{z_b}$, mentre, posto $\mathbf{x}-\mathbf{x}_H = (x-x_H)\,\mathbf{i}_b + (y-y_H)\,\mathbf{j}_b + (z-z_H)\,\mathbf{k}_b$, le forme modali vettoriali $\mathbf{\Psi}_n$ risultano essere

$$\begin{aligned}
\mathbf{\Psi}_1(\mathbf{x}) &= \mathbf{i}_b, \\
\mathbf{\Psi}_2(\mathbf{x}) &= \mathbf{j}_b, \\
\mathbf{\Psi}_3(\mathbf{x}) &= \mathbf{k}_b, \\
\mathbf{\Psi}_4(\mathbf{x}) &= -(z - z_{_H})\,\mathbf{j}_b + (y - y_{_H})\,\mathbf{k}_b, \\
\mathbf{\Psi}_5(\mathbf{x}) &= (z - z_{_H})\,\mathbf{i}_b - (x - x_{_H})\,\mathbf{k}_b, \\
\mathbf{\Psi}_6(\mathbf{x}) &= -(y - y_{_H})\,\mathbf{i}_b + (x - x_{_H})\,\mathbf{j}_b \; .
\end{aligned}$$

In conclusione quindi i modi utilizzati sono i sei modi relativi alle componenti della velocità del mozzo e della velocità angolare del rotore nel riferimento pala. Questa scelta è dettata innanzitutto dalla necessità di ottenere una funzione di trasferimento tra atto di moto e carichi aerodinamici che sia a coefficienti costanti; inoltre è confortata che, dal punto di vista fisico, i carichi aerodinamici nascono dalla velocità del corpo.

Si noti che, utilizzando il legame cinematico che lega il moto della pala al moto del pilone (e quindi dell'ala) definito nel capitolo 2 e, tenendo conto del fatto che, per un rotore dotato di pale rigide la velocità angolare di pala coincide con la velocità angolare del rotore stesso, per ogni perturbazione del moto dell'ala è possibile ottenere le corrispondenti sei velocità generalizzate. Nota la funzione di trasferimento tra tali velocità ed i carichi aerodinamici agenti sulle pale, è possible quindi calcolare le forze ed i momenti aerodinamici indotti dalla perturbazione del moto dell'ala. Risulta pertanto opportuno ottenere il legame che, date le velocità generalizzate, fornisce le condizioni al contorno sulla superficie del corpo necessarie per il calcolo dei carichi aerodinamici utilizzando il solutore agli elementi di contorno. Per quanto detto nell'appendice B tali condizioni al contorno sono espresse dalla

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{S}_B \tag{3.26}$$

Della velocità dei punti del corpo si è già detto. Per quanto riguarda la normale alla superficie del corpo, essa può essere espressa, in ogni istante t, mediante la relazione

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{n}_0(\mathbf{x}) \tag{3.27}$$

Tale equazione si spiega riflettendo sul fatto che l'atto di moto rigido non comporta l'effettivo moto del corpo, ma rappresenta solo la distribuzione di velocità nei punti del corpo in un certo istante; in effetti il moto del corpo è costituito dalla successione nel tempo di tali situzioni istantanee. Per meglio dire si adotta un'ottica euleriana: in un certo istante t, e in un punto A dello spazio, esiste un vettore $\vec{e}_A$ che esprime la velocità di quel punto del corpo rigido che, nell'istante considerato, transita per A. L'atto di moto è l'insieme dei vettori $(A, \vec{e}_A)$ nei vari punti dello spazio; naturalmente al variare dell'istante t varia il punto del corpo che transita per A.
Da quanto detto discende che in ogni istante (e per ogni punto della superficie del corpo) il vettore normale sarà lo stesso che si aveva in quel punto nella configurazione indeformata, ovvero all'equilibrio.
In definitiva la condizione al contorno nel generico punto di collocazione m sulla pala diventa:

$$\chi_m(t) = \mathbf{v}(\mathbf{x}_m, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_m) = \sum_{n=1}^{6} v_n(t)\, \mathbf{\Psi}_n(\mathbf{x}_m) \cdot \mathbf{n}_0(\mathbf{x}_m), \tag{3.28}$$

nella quale, nell'ottica di un'analisi delle piccole perturbazioni attorno ad una configurazione di equilibrio del sistema, sono stati eliminati i termini corrispondenti all'equilibrio ed i termini di ordine superiore al primo.
Nel dominio della frequenza la condizione al contorno (perturbativa) su tutti i punti di collocazione che derivano dalla discretizzazione del corpo può quindi essere espressa nella seguente forma matriciale

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{E}_{BC}\, \tilde{\mathbf{v}}, \tag{3.29}$$

nella quale $\tilde{\mathbf{v}}$ è il vettore che raccoglie le sei velocità generalizzate mentre la matrice $\mathbf{E}_{BC}$ ha dimensioni $[N_c \times 6]$ ed i suoi elementi sono dati da

$$E^{BC}_{mn} = \mathbf{\Psi}_n(\mathbf{x}_m) \cdot \mathbf{n}_0(\mathbf{x}_m). \tag{3.30}$$

Combinando la 3.29 con la 3.21 si ottiene

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{E}(s)\, \tilde{\mathbf{v}}, \tag{3.31}$$

nella quale $\mathbf{E}(s) = \mathbf{Q}(s)\, \mathbf{E}^{BC}$ è la matrice di dimensioni $[N_f \times 6]$ che raccoglie le funzioni di trasferimento tra le componenti delle velocità di corpo rigido generalizzate e le corrispondenti forze aerodinamiche.

3.2.2 Operatore aerodinamico per il rotore multipala

La presenza di un numero di pale maggiore di uno comporta delle modifiche alla struttura della matrice $\mathbf{E}_\varphi(s)$. Occorre tener conto, infatti, delle mutue influenze tra le pale per cui il flusso attorno ad una generica pala dipende fortemente da quello indotto dalle altre pale. In particolare, la distribuzione del potenziale sulla generica pala risulta influenzato dal potenziale e, dunque, dalle condizioni al contorno, sulle altre pale. La matrice delle funzioni di trasferimento tra condizioni al contorno e potenziale assume pertanto la forma generale

$$\mathbf{E}_\phi = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{E}_{11} & \mathbf{E}_{12} & \dots & \mathbf{E}_{1\,N_b} \\ \hline \mathbf{E}_{21} & \mathbf{E}_{22} & \dots & \mathbf{E}_{2\,N_b} \\ \hline \mathbf{E}_{j1} & \mathbf{E}_{j2} & \dots & \mathbf{E}_{j N_b} \\ \hline \mathbf{E}_{N_b 1} & \mathbf{E}_{N_b 2} & \dots & \mathbf{E}_{N_b N_b} \\ \hline \end{array} \tag{3.32}$$

nella quale ogni partizione $\mathbf{E}_{ij}$ ha dimensione $[N_B \times N_B]$ e rappresenta il contributo al potenziale sulla pala i-esima dovuta al moto (e quindi alle condizioni al contorno) della pala j-esima. Risulta evidente che il calcolo della matrice complessiva $\mathbf{E}_\varphi(s)$ risulta più oneroso, tuttavia è possibile sfruttare le simmetrie geometriche del rotore per ricondursi ad un problema di dimensione minore. In particolare, assumendo che le pale del rotore abbiano tutte la medesima geometria è possibile scrivere la generica matrice di influenza come

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{ij} = \mathbf{E}_{i+1\,j+1} \;,\; i,j = (1,N_b)\; mod(N_b) & \text{se } i > j \\ \mathbf{E}_{ij} = \mathbf{E}_{11} \;, \qquad i,j = 1,N_b & \text{se } i = j \end{cases} \tag{3.33}$$

nella quale la funzione $(1,N_b)\; mod(N_b)$ è tale per cui gli indici i e j possono assumere valore $1,2,\dots,N_b,1,2,\dots,N_b,1,\dots$. È sufficiente pertanto calcolare solo i contributi dovuti all'influenza delle varie pale su una pala scelta come riferimento per poter ricostruire poi tutta la matrice. In particolare, per il caso di un rotore dotato di tre pale in cui si sceglie la pala 1 come riferimento si ottiene (con riferimento alla figura 3.3):

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{21} = \mathbf{E}_{32} = \mathbf{E}_{13} \\ \mathbf{E}_{22} = \mathbf{E}_{33} = \mathbf{E}_{11} \\ \mathbf{E}_{23} = \mathbf{E}_{31} = \mathbf{E}_{12} \end{cases} . \tag{3.34}$$

Raccogliendo quindi in un unico vettore il potenziale calcolato nei punti di collocazione di tutte le

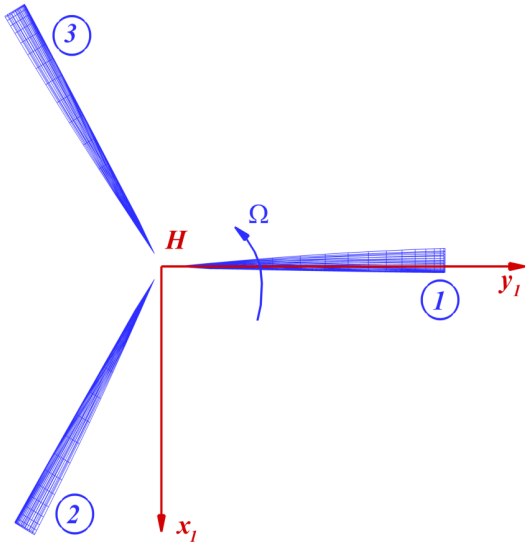

Figura 3.3: Numerazione per un rotore dotato di tre pale.

pale del rotore si ottiene dunque

$$\begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\varphi}}_{N_b} \end{Bmatrix} = \mathbf{E}_{\varphi}(s) \begin{Bmatrix} \tilde{\boldsymbol{\chi}}_1 \\ \tilde{\boldsymbol{\chi}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\boldsymbol{\chi}}_{N_b} \end{Bmatrix} \tag{3.35}$$

Risulta dunque evidente la dipendenza della soluzione sulla i–esima pala dalle condizioni al contorno sulle altre pale.

È possibile dunque esprimere le forze generalizzate agenti sulla generica pala in funzione delle condizioni al contorno sulle varie pale. In particolare, scelta la pala 1 come riferimento, si ha

$$\tilde{\mathbf{f}}_k = \sum_i \mathbf{E}_i(s)\, \tilde{\mathbf{v}}_i, \quad i = (k, \ldots, N_b + k - 1)\ mod(N_b). \tag{3.36}$$

Nella 3.36 la funzione mod è utilizzata in modo che l'indice se i, partendo dal valore k supera il valore N_b esso viene posto pari a 1 e si prosegue nella permutazione. La generica matrice $\mathbf{E}_i$ è ottenuta utilizzando l'espressione 3.22 applicata alle partizioni di $\mathbf{E}_{\varphi}$, ovvero $\mathbf{E}_i(s) = \mathbf{E}_f\, \mathbf{E}_p(s)\, \mathbf{E}_{1i}(s)\, \mathbf{E}_{BC}$.

Si riporta, a scopo esemplificativo, l'espressione 3.36 per il caso specifico di un rotore dotato di tre

pale

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{f}}_1 &= \mathbf{E}_1(s)\,\tilde{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{E}_2(s)\,\tilde{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{E}_3(s)\,\tilde{\mathbf{v}}_3 \\ \tilde{\mathbf{f}}_2 &= \mathbf{E}_1(s)\,\tilde{\mathbf{v}}_2 + \mathbf{E}_2(s)\,\tilde{\mathbf{v}}_3 + \mathbf{E}_3(s)\,\tilde{\mathbf{v}}_1 \\ \tilde{\mathbf{f}}_3 &= \mathbf{E}_1(s)\,\tilde{\mathbf{v}}_3 + \mathbf{E}_2(s)\,\tilde{\mathbf{v}}_1 + \mathbf{E}_3(s)\,\tilde{\mathbf{v}}_2 \end{cases} \tag{3.37}$$

È il caso di ricordare che negli sviluppi che hanno portato alla definizione dell'operatore aerodinamico e dunque a ciascuna delle 3.37 (si veda il paragrafo 3.2.1), le componenti dell'atto di moto rigido sono state considerate nel sistema di riferimento pala quindi nell'espressione delle forze generalizzate agenti sulla pala k–esima tutte le velocità $\mathbf{v}_i$ sono intese in componenti nel sistema di riferimento della pala i–esima. Nel caso di un rotore multipala occorre dunque modificare anche il calcolo delle condizioni al contorno. Risulta conveniente esprimere tali velocità tutte in un unico sistema di riferimento. Tale riferimento è il riferimento disco rotante $\mathcal{R}_{dr}$ che, istante per istante, coincide con il sistema di riferimento solidale alla pala 1 (si ricordi che le pale non sono dotate di elasticità). La matrice di rotazione che consente di ottenere le componenti dell'atto di moto rigido nel sistema di riferimento pala i–esima a partire dalle componenti nel sistema di riferimento $\mathcal{R}_{dr}$ dipende solo dallo sfasamento geometrico tra le pale e pertanto contiene solo elementi tempo–invarianti. In particolare si ha

$$\mathbf{v}^{\mathcal{R}_{b_n}} = \mathbf{R}_n(\psi_n)\,\mathbf{v}^{\mathcal{R}_{dr}} \tag{3.38}$$

nella quale la matrice $\mathbf{R}_n(\psi_n)$ ha dimensioni $[6 \times 6]$ ed è costruita nel modo seguente

$$\mathbf{R}_n(\psi_n) = \begin{bmatrix} cos(\psi_n) & -sen(\psi_n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sen(\psi_n) & cos(\psi_n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & cos(\psi_n) & -sen(\psi_n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & sen(\psi_n) & cos(\psi_n) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

e l'angolo di fase dell'n–esima pala rispetto alla pala di riferimento è $\psi_n = 2\pi(n-1)/N_b$.

Utilizzando la trasformazione 3.38 per esprimere le velocità che compaiono nella 3.36 e ricordando che il sistema di riferimento $\mathcal{R}_{dr}$ coincide con il sistema di riferimento della pala 1 (e pertanto $\mathbf{R}_1 \equiv \mathbf{I}$) si ha

$$\tilde{\mathbf{f}}_k^{\mathcal{R}_{b_k}} = \sum_i \mathbf{E}_i(s)\,\mathbf{R}_i\,\mathbf{R}_k\,\tilde{\mathbf{v}}^{\mathcal{R}_{dr}} \quad , \quad k \neq 1, \quad i = mod(N_b). \tag{3.40}$$

nella quale la presenza di $\mathbf{R}_k$ consente di esprimere il vettore dell'atto di moto della k–esima pala nel sistema di riferimento disco rotante. Per un rotore tripala si avrà dunque

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{f}}_1 &= [\mathbf{E}_1(s)\mathbf{R}_1 + \mathbf{E}_2(s)\,\mathbf{R}_2 + \mathbf{E}_3(s)\mathbf{R}_3\,]\,\tilde{\mathbf{v}}^{\mathcal{R}_{dr}} \\ \tilde{\mathbf{f}}_2 &= [\mathbf{E}_1(s)\mathbf{R}_1 + \mathbf{E}_2(s)\,\mathbf{R}_2 + \mathbf{E}_3(s)\mathbf{R}_3\,]\,\mathbf{R}_2\,\tilde{\mathbf{v}}^{\mathcal{R}_{dr}} \\ \tilde{\mathbf{f}}_3 &= [\mathbf{E}_1(s)\mathbf{R}_1 + \mathbf{E}_2(s)\,\mathbf{R}_2 + \mathbf{E}_3(s)\mathbf{R}_3\,]\,\mathbf{R}_3\,\tilde{\mathbf{v}}^{\mathcal{R}_{dr}} \end{cases} . \tag{3.41}$$

È possibile pertanto definire l'operatore aerodinamico per un rotore dotato di pale rigide nella forma

$$\mathbf{E}_D^{rig}(s) = \sum_{i=1}^{N_b} \mathbf{E}_i(s)\,\mathbf{R}_i(\psi_i) \tag{3.42}$$

e dunque esprimere le forze generalizzate agenti su ciascuna pala in funzione dei gradi di libertà di rotore, ovvero le componenti dell'atto di moto rigido, nella forma

$$\tilde{\mathbf{f}}_k = \mathbf{E}_D^{rig}(s)\,\mathbf{R}_k(\psi_k)\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{E}_{D_k}^{rig}(s)\tilde{\mathbf{v}} \ . \tag{3.43}$$

3.3 Contributo del moto elastico ai carichi aerodinamici di pala

In questa sezione verrà estesa la formulazione illustrata nei paragrafi precedenti al caso in cui si consideri il moto elastico delle pale indipendenti una dall'altra. In questo caso nella definizione dell'operatore aerodinamico compariranno termini che derivano dall'effetto dell'elasticità delle pala sulle condizioni al contorno e dunque sarà necessario includere i gradi di libertà elastici di pala nel calcolo delle forze generalizzate. Inoltre sarà necessario valutare le componenti delle forze generalizzate ottenute come proiezione sui modi elastici utilizzati per la descrizione della deformazione della pala.

3.3.1 Calcolo delle condizioni al contorno sulla singola pala

L'inclusione della flessibilità delle pale si riflette sui carichi aerodinamici da un lato perchè compare un termine aggiuntivo all'espressione che descrive la velocità del generico punto appartenente alla pala (equazione 3.24), dall'altro perchè la deformazione della pala induce una perturbazione ai versori normali che compaiono nella definizine delle condizioni al contorno 3.26.

La trattazione viene sviluppata per la singola pala e dunque tutti i vettori si intendono scritti in componenti rispetto al sistema di riferimento della i–esima pala. L'estensione ad un rotore multipala verrà affrontata nei paragrafi successivi.

La velocità di un punto P appartenente alla pala può essere espressa nella forma

$$\vec{v}_P(\vec{x},t) = \vec{v}_H(t) + \vec{\omega}(t) \times (\vec{x} - \vec{x}_H) + \vec{v}^d(\vec{x},t) \ , \tag{3.44}$$

nella quale $\vec{v}^d$ indica la velocità di deformazione elastica. Per calcolare tale velocità è conveniente esprimere gli spostamenti $\mathbf{d}^d(\mathbf{x},t)$ indotti dalla deformazione nei punti appartenenti alla pala come combinazione lineare di N_m forme modali vettoriali. In particolare si ha

$$\mathbf{d}^d(\mathbf{x},t) = \sum_{l=1}^{N_m} q_l^d(t)\, \mathbf{\Phi}_l(\mathbf{x}), \tag{3.45}$$

nella quale i coefficienti q_l^d rappresentano le coordinate generalizzate del moto elastico della pala (nel seguito definite anche variabili lagrangiane) mentre le $\mathbf{\Phi}_l$ sono le funzioni modali (o funzioni di forma) scelte per descrivere la distribuzione degli spostamenti nei punti della pala e indotti dalla deformazione della stessa. Le variabili lagrangiane dipendono dal tempo mentre le funzioni modali sono tempo–invarianti nel sistema di riferimento solidale alla i–esima pala.

Per il calcolo delle condizioni al contorno è necessario calcolare la velocità dei punti appartenenti alla superficie della pala e le normali nei medesimi punti. Derivando rispetto al tempo la 3.45 si ottiene l'espressione della velocità di deformazione nella forma

$$\mathbf{v}^d(\mathbf{x},t) = \sum_{l=1}^{N_m} \dot{q}_l^d(t)\, \mathbf{\Phi}_l(\mathbf{x}), \tag{3.46}$$

mentre il versore normale nel generico punto $\mathbf{x}$ può essere espresso in funzione delle coordinate generalizzate utilizzando uno sviluppo in serie di Taylor attorno alla configurazione di equilibrio. In particolare, troncando lo sviluppo al primo ordine e ricordando che il versore normale all'equilibrio coincide con quello in cui le pale sono dotate esclusivamente di moto rigido (si veda il paragrafo 3.2.1), si ha

$$\mathbf{n}(\mathbf{x},t) = \mathbf{n}_{rig}(\mathbf{x}) + \sum_{l=1}^{N_m} \frac{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x})}{\partial q_l^d} q_l^d(t), \tag{3.47}$$

nella quale $\partial \mathbf{n}/\partial q_l^d$ sono vettori tempo–invarianti se espressi nel sistema di riferimento della pala i–esima (tali vettori possono essere ottenuti utilizzando la 3.45.

Combinando le espressioni 3.46 e 3.47 con l'equazione 3.44 scritte in componenti nel sistema di riferimento pala, nell'ipotesi di piccole perturbazioni (per cui è possibile trascurare i termini di ordine superiore al primo), le condizioni al contorno perturbative si ottengono dalla seguente espressione

$$\begin{aligned}\chi_m(t) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}_m,t)\cdot\mathbf{n}(\mathbf{x}_m) = \sum_{n=1}^{6} v_n(t)\,\mathbf{\Psi}_n(\mathbf{x}_m)\cdot\mathbf{n}_{rig}(\mathbf{x}_m) \\ &+ \sum_{l=1}^{N_m}\dot{q}_l^d(t)\,\mathbf{\Phi}_l(\mathbf{x}_m)\cdot\mathbf{n}_{rig}(\mathbf{x}_m) + \sum_{l=1}^{N_m}\mathbf{v}_{cr}\cdot\frac{\partial\mathbf{n}(\mathbf{x}_m)}{\partial q_l^d}q_l^d(t),\end{aligned} \tag{3.48}$$

nella quale $\mathbf{v}_{cr} = \mathbf{V}_\infty + \mathbf{\Omega}\times(\mathbf{x}-\mathbf{x}_H)$ è la velocità del generico punto $\mathbf{x}$ della pala nella confgurazione di equilibrio in volo assiale. Si noti che il termine $\sum_{n=1}^{6} v_n(t)\,\mathbf{\Psi}_n(\mathbf{x}_m)\cdot\mathbf{n}_{rig}(\mathbf{x}_m)$ coincide esattamente con quanto ottenuto per il rotore con pala rigida (equazione 3.28).

Passando nel dominio della frequenza si ottiene la matrice delle funzioni di trasferimento tra le velocità che identificano il moto (rigido e di deformazione) della pala ed il vettore delle condizioni al contorno sulla pala stessa $\tilde{\boldsymbol{\chi}}$

$$\tilde{\boldsymbol{\chi}} = \mathbf{E}_{rig}^{BC}\;\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{E}_{def}^{BC}(s)\,\tilde{\mathbf{q}}^d, \tag{3.49}$$

nella quale $\mathbf{q}^d$, è il vettore colonna che raccoglie le N_m coordinate generalizzate q_l^d del moto elastico della pala e $\mathbf{E}_{rig}^{BC}$ coincide con la matrice definita nell'equazione 3.30. La matrice $\mathbf{E}_{def}^{BC}$ ha dimensioni $[N_c\times N_m]$ ed i suoi elementi sono dati dalla

$$E_{def}^{BC}(s)_{ml} = \mathbf{v}_{cr}(\mathbf{x}_m)\cdot\frac{\partial\mathbf{n}(\mathbf{x}_m)}{\partial q_l^d} + s\;\mathbf{\Phi}_l(\mathbf{x}_m)\cdot\mathbf{n}_{rig}(\mathbf{x}_m).$$

Si definisce quindi una nuova matrice delle condizioni al contorno

$$\mathbf{E}^{BC}(s) = \left[\begin{array}{cc}\mathbf{E}_{rig}^{BC} & \mathbf{E}_{def}^{BC}(s)\end{array}\right], \tag{3.50}$$

tale matrice non dipende dalla pala considerata in quanto contiene solo grandezze geometriche che sono invarianti passando da una pala all'altra.

3.3.2 Calcolo delle forze generalizzate sulla singola pala

Come si è visto nel paragrafo 3.1.3 le forze aerodinamiche generalizzate agenti sulla pala si ottengono come integrale della pressione sulla superficie del corpo proiettata sulle funzioni modali

scelte. In particolare, tali funzioni modali devono essere le stesse utilizzate per la descrizione del moto della pala.

Nel paragrafo 3.1.3 è stata ottenuta la funzione di trasferimento tra il vettore delle pressioni sul corpo e le forze generalizzate nella forma

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{E}_f \, \tilde{\mathbf{p}} \tag{3.51}$$

nella quale la matrice $\mathbf{E}_f$ aveva dimensione $[N_f \times N_c]$. Il numero di modi per la descrizione delle forze generalizzate era 6 nel caso di pale rigide; ora, ai sei gradi di libertà che rappresentano l'atto di moto rigido del rotore è necessario aggiungere i gradi di libertà elastici della pala. Essi saranno in numero pari al numero N_m di variabili lagrangiane scelte per la descrizione degli spostamenti elastici nei punti appartenenti alla pala.

Si definisce dunque una nuova matrice delle forze generalizzate partizionata in modo tale che le prime sei righe corrispondono alla proiezione sui modi rigidi e le successive N_m a quella sui modi elastici. In forma simbolica si ha

$$\mathbf{E}_f = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_f^{rig} \\ \\ \mathbf{E}_f^{def} \end{bmatrix}. \tag{3.52}$$

Ricordando l'espressione della matrice che raccoglie le funzioni di trasferimento tra le condizioni al contorno e le forze generalizzate 3.22 e combinandola con le 3.49 e 3.51 si definisce l'operatore aerodinamico che rappresenta la funzione di trasferimento tra gradi di libertà (rigidi ed elastici) e forze generalizzate corrispondenti agenti sulla pala

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{E}_f \, \mathbf{E}_p(s) \, \mathbf{E}_\phi(s) \, \mathbf{E}^{BC}(s). \tag{3.53}$$

Pertanto l'espressione delle forze generalizzate risulta essere

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{E}(s) \, \tilde{\mathbf{w}}, \tag{3.54}$$

nella quale il vettore $\tilde{\mathbf{w}}$ ha dimensioni $[6 + N_m]$ e contiene le variabili lagrangiane relative all'atto di moto rigido del rotore e a quello elastico della pala, ovvero

$$\tilde{\mathbf{w}} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{v}} \\ \\ \tilde{\mathbf{q}}^d \end{Bmatrix}. \tag{3.55}$$

La matrice ha dimensioni $[(6+N_m)\times(6+N_m)]$ e risulta partizionata nel modo seguente

$$\mathbf{E}(s) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}^{rr} & \mathbf{E}^{re} \\ \\ \mathbf{E}^{er} & \mathbf{E}^{ee} \end{bmatrix}. \tag{3.56}$$

La definizione delle partizioni che compaiono nella 3.56 è riportata di seguito:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{rr} &= \mathbf{E}_f^{rig}\,\mathbf{E}_p(s)\,\mathbf{E}_\phi(s)\,\mathbf{E}_{rig}^{BC}, \qquad \text{dimensioni}: [6\times 6] \\ \\ \mathbf{E}^{re} &= \mathbf{E}_f^{rig}\,\mathbf{E}_p(s)\,\mathbf{E}_\phi(s)\,\mathbf{E}_{def}^{BC}, \qquad \text{dimensioni}: [6\times N_m] \\ \\ \mathbf{E}^{er} &= \mathbf{E}_f^{def}\,\mathbf{E}_p(s)\,\mathbf{E}_\phi(s)\,\mathbf{E}_{rig}^{BC}, \qquad \text{dimensioni}: [N_m\times 6] \\ \\ \mathbf{E}^{ee} &= \mathbf{E}_f^{def}\,\mathbf{E}_p(s)\,\mathbf{E}_\phi(s)\,\mathbf{E}_{def}^{BC}, \qquad \text{dimensioni}: [N_m\times N_m]\,. \end{aligned} \tag{3.57}$$

È importante tenere presente che la matrice $\mathbf{E}_\phi(s)$ che compare nella 3.57 è la matrice che lega il potenziale sulla pala i–esima alle condizioni al contorno sulla medesima pala. Questa osservazione è importante per poter comprendere l'estensione degli sviluppi qui presentati al casi di rotori multipala.

La necessità di ottenere le forze generalizzate sia come proiezioni sui modi relativi all'atto di moto rigido del rotore (moto d'assieme del rotore) sia come proiezioni sui modi elastici deriva dal fatto che le prime verranno utilizzate per calcolare i carichi che il rotore scarica sul pilone (e, in definitiva, sull'ala) mentre le seconde vengono utilizzate come forzanti nelle equazioni della dinamica delle singole pale. È evidente che ciascuna delle due tipologie di forze generalizzate avrà un contributo che deriva dal moto d'assieme rigido e dalla deformazione delle pale.

È opportuno notare che, nel caso del modello ROM basato sul solutore aerodinamico 2D non è stato necessario distinguere tra pale rigide e flessibili. In quel caso, infatti, i carichi aerodinamici dipendono esclusivamente dalle velocità di sezione che, mediante il legame cinematico, vengono espresse in funzione dei gradi di libertà del tip alare e dei gradi di libertà elastici di ciascuna pala. Nel caso del solutore BEM, invece, come si è visto, il cambiamento della normale sulla superficie del corpo e l'introduzione della velocità di deformazione elastica fanno si che i gradi di libertà di pala compaiano direttamente nella formulazione in frequenza dell'operatore aerodinamico (equazioni 3.54 e 3.55). Inoltre, come si vedrà nel paragrafo successivo, data la reciproca influenza

tra le pale, nel caso di un rotore multipala le forze generalizzate agenti su ciascuna pala saranno influenzate dalle condizioni al contorno (rigide ed elastiche) sulle altre pale.

3.3.3 Operatore aerodinamico per il rotore multipala

Per definire l'operatore aerodinamico nel caso di un rotore multipala si fa riferimento a quanto esposto nel paragrafo 3.2.2. In particolare, per quanto riguarda la partizione $\mathbf{E}^{rr}$ la procedura è esattamente la stessa vista per il rotore dotato di pale rigide e si perviene alla seguente espressione per quanto riguarda la funzione di trasferimento tra i gradi di libertà di rotore (ovvero dell'atto di moto rigido) le forze generalizzate proiettate sui modi rigidi

$$\tilde{\mathbf{f}}_k^{rr} = \mathbf{E}_D^{rig}(s)\,\mathbf{R}_k(\psi_k)\tilde{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{N_b} \mathbf{E}_i^{rr}(s)\,\mathbf{R}_i(\psi_i)\,\mathbf{R}_k(\psi_k)\,\tilde{\mathbf{v}}\ . \tag{3.58}$$

Utilizzando la partizione $\mathbf{E}^{re}$ è possibile calcolare la funzione di trasferimento tra l'insieme delle variabili lagrangiane elastiche di pala e le forze generalizzate proiettate sui modi rigidi. Ricordando le simmetrie sfruttate per definire la 3.36 e scegliendo la pala 1 scelta come riferimento, si ottiene

$$\tilde{\mathbf{f}}_k^{re} = \sum_i \mathbf{E}_i^{re}(s)\,\tilde{\mathbf{q}}_i^d, \quad i = (k, \ldots, N_b + k - 1)\ mod(N_b). \tag{3.59}$$

Nelle espressioni scritte si è indicato con $\mathbf{q}_i^d$ il vettore colonna che raccoglie le N_m coordinate generalizzate che rappresentano le variabili lagrangiane scelte per descrivere gli spostamenti elastici della i–esima pala.

La funzione di trasferimento tra le componenti dell'atto di moto rigido e le forze generalizzate proiettate sui modi elastici si ottiene utilizzando la matrice $\mathbf{E}^{er}$ identificata per la singola pala. Gli sviluppi necessari sono esattamente gli stessi che hanno condotto alla definizione della matrice $\mathbf{E}_D^{rig}$ del paragrafo 3.2.2. In questo caso si ottiene

$$\mathbf{E}_D^{er}(s) = \sum_{i=1}^{N_b} \mathbf{E}_i^{er}(s)\,\mathbf{R}_i(\psi_i) \tag{3.60}$$

e dunque le forze generalizzate sulla singola pala sono date da

$$\tilde{\mathbf{f}}_k^{er} = \mathbf{E}_D^{er}(s)\,\mathbf{R}_k(\psi_k)\tilde{\mathbf{v}}. \tag{3.61}$$

Infine, utilizzando la partizione $\mathbf{E}^{ee}$ che, per la singola pala, fornisce la funzione di trasferimento tra gradi di libertà elastici e forze generalizzate proiettate sui modi elastici e ricordando le usuali simmetrie geometriche, si ottiene l'espressione del contributo dei modi elastici alle forze generalizzate

elastiche per un rotore multipala. In particolare, scelta come riferimento la pala 1 si ha

$$\tilde{\mathbf{f}}_k^{ee} = \sum_i \mathbf{E}_i^{ee}(s)\,\tilde{\mathbf{q}}_i^d, \quad i = (k, \ldots, N_b + k - 1)\; mod(N_b). \tag{3.62}$$

Per un rotore tripala le 3.58, 3.59, 3.60 e 3.62 forniscono

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{f}}_1^r &= \mathbf{E}_D^{rig}\,\mathbf{R}_1\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{E}_1^{re}\,\tilde{\mathbf{q}}_1^d + \mathbf{E}_2^{re}\,\tilde{\mathbf{q}}_2^d + \mathbf{E}_3^{re}\,\tilde{\mathbf{q}}_3^d \\ \tilde{\mathbf{f}}_1^e &= \mathbf{E}_D^{er}\,\mathbf{R}_1\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{E}_1^{ee}\,\tilde{\mathbf{q}}_1^d + \mathbf{E}_2^{ee}\,\tilde{\mathbf{q}}_2^d + \mathbf{E}_3^{ee}\,\tilde{\mathbf{q}}_3^d \\ \\ \tilde{\mathbf{f}}_2^r &= \mathbf{E}_D^{rig}\,\mathbf{R}_2\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{E}_1^{re}\,\tilde{\mathbf{q}}_2^d + \mathbf{E}_2^{re}\,\tilde{\mathbf{q}}_3^d + \mathbf{E}_3^{re}\,\tilde{\mathbf{q}}_1^d \\ \tilde{\mathbf{f}}_2^e &= \mathbf{E}_D^{er}\,\mathbf{R}_2\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{E}_1^{ee}\,\tilde{\mathbf{q}}_2^d + \mathbf{E}_2^{ee}\,\tilde{\mathbf{q}}_3^d + \mathbf{E}_3^{ee}\,\tilde{\mathbf{q}}_1^d \\ \\ \tilde{\mathbf{f}}_3^r &= \mathbf{E}_D^{rig}\,\mathbf{R}_3\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{E}_1^{re}\,\tilde{\mathbf{q}}_3^d + \mathbf{E}_2^{re}\,\tilde{\mathbf{q}}_1^d + \mathbf{E}_3^{re}\,\tilde{\mathbf{q}}_2^d \\ \tilde{\mathbf{f}}_3^e &= \mathbf{E}_D^{er}\,\mathbf{R}_3\tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{E}_1^{ee}\,\tilde{\mathbf{q}}_3^d + \mathbf{E}_2^{ee}\,\tilde{\mathbf{q}}_1^d + \mathbf{E}_3^{ee}\,\tilde{\mathbf{q}}_3^d \end{cases}, \tag{3.63}$$

nella quale con $\tilde{\mathbf{f}}_k^r$ e $\tilde{\mathbf{f}}_k^e$ sono stati indicati i vettori delle forze generalizzate agenti sulla k–esima pala ottenute come proiezione sui modi rigidi ed elastici rispettivamente.

La definizione dell'operatore aerodinamico per un rotore multipala dotato di pale flessibili può essere completata considerando il differente ruolo che, nell'accoppiamento con le equazioni della dinamica strutturale del sistema, giocano le forze generalizzate rigide e quelle elastiche. In particolare si può dimostrare che utilizzando i modi rigidi per ottenere le forze generalizzate si ottengono esattamente i carichi aerodinamici agenti sulla pala i–esima in componenti rispetto al sistema di riferimento solidale alla medesima pala. Esprimendo tali forze nel sistema di riferimento disco rotante e sommando i contributi derivanti da ciascuna pala si ottengono i carichi complessivi che il rotore scarica sul mozzo e che vengono trasportati, tramite il pilone, al tip dell'ala. Le forze generalizzate ottenute dalla proiezione sui modi elastici forniscono invece direttamente le forzanti della dinamica di ciascuna pala quindi non dovranno subire altri trattamenti.

Il primo passo per valutare i carichi complessivi al mozzo consiste nell'esprimere i carichi di pala nel sistema di riferimento $\mathcal{R}_{dr}$ utilizzando la trasposta della matrice di rotazione $\mathbf{R}_n(\psi_n)$. Partendo dalle 3.58 e 3.59 (nelle quali le forze sono espresse in componenti pala k–esima), premoltiplicando per la matrice di rotazione e sommando i contributi delle singole pale, si ottiene

$$\tilde{\mathbf{f}}_H \;=\; \sum_{k=1}^{N_b} \mathbf{R}_k^{\mathrm{T}} \left[\tilde{\mathbf{f}}_k^{rr} + \tilde{\mathbf{f}}_k^{re}\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{N_b} \mathbf{R}_k^{\mathrm{T}}\, \mathbf{E}_D^{rig}(s)\, \mathbf{R}_k \tilde{\mathbf{v}} \;+\; \sum_{k=1}^{N_b} \mathbf{R}_k^{\mathrm{T}} \sum_i \mathbf{E}_i^{re}(s)\, \tilde{\mathbf{q}}_i^d, \tag{3.64}$$

nella quale $i = (k, \ldots, N_b + k - 1)\ mod(N_b)$. Il vettore $\tilde{\mathbf{f}}_H$ contiene le tre componenti delle forze e le tre componenti dei momenti che il rotore scarica sul mozzo. Tali componenti sono espresse nel sistema di riferimento disco rotante, ovvero

$$\tilde{\mathbf{f}}_H = \left\{ \begin{array}{c} f_H^x \\ f_H^y \\ f_H^z \\ m_H^x \\ m_H^y \\ m_H^z \end{array} \right\}^{\mathcal{R}_{dr}} . \tag{3.65}$$

Definendo un vettore colonna $\tilde{\mathbf{q}}^d$ che raccolga le $N_m \times N_b$ coordinate generalizzate $\tilde{\mathbf{q}}_i^d$ si può riscrivere la 3.64 in forma compatta

$$\tilde{\mathbf{f}}_H \;=\; \mathbf{E}_H^{rig}(s)\, \tilde{\mathbf{v}} + \mathbf{E}_H^{el}(s)\, \tilde{\mathbf{q}}^d, \tag{3.66}$$

nella quale le matrici $\mathbf{E}_H^{rig}$ e $\mathbf{E}_H^{el}$ hanno dimensioni $[6 \times 6]$ e $[6 \times N_m * N_b]$ rispettivamente.

È dunque possibile identificare l'operatore aerodinamico per un rotore multipala dotato di pale flessibili. Si definisce pertanto un vettore colonna che raccolga gli elementi di $\tilde{\mathbf{f}}_H$ e gli N_m elementi relativi alle forze generalizzate elastiche per ciascuna pala

$$\tilde{\mathbf{e}}(s) = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{f}}_H \\ \\ \tilde{\mathbf{f}}_E \end{array} \right\} . \tag{3.67}$$

che ha dimensioni $[6 + (N_m * N_b)]$. Inoltre, raccogliendo le componenti generalizzate dell'atto di moto rigido $\tilde{\mathbf{v}}$ e le variabili lagrangiane elastiche di ciascuna pala nel vettore

$$\tilde{\mathbf{w}} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{v}} \\ \\ \tilde{\mathbf{q}}^d \end{array} \right\} \tag{3.68}$$

di dimensioni $[6 + (N_m * N_b)]$, si può identificare infine l'operatore aerodinamico che rappresenta la funzione di trasferimento tra i gradi di libertà complessivi del rotore (rigidi ed elastici) ed i carichi

aerodinamici al mozzo e sulle singole pale. Si ottiene dunque

$$\mathbf{E}(s) = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \mathbf{E}_H^{rig}(s) & \multicolumn{3}{c|}{\mathbf{E}_H^{el}(s)} \\ \hline \mathbf{E}_D^{er}(s)\,\mathbf{R}_1(\psi_1) & \mathbf{E}_1^{ee}(s) & \dots & \mathbf{E}_{N_b}^{ee}(s) \\ \hline \mathbf{E}_D^{er}(s)\,\mathbf{R}_k(\psi_k) & \mathbf{E}_{N_b}^{ee}(s) & \mathbf{E}_1^{ee}(s) & \dots \\ \hline \mathbf{E}_D^{er}(s)\,\mathbf{R}_{N_b}(\psi_{N_b}) & \dots & \mathbf{E}_{N_b}^{ee}(s) & \mathbf{E}_1^{ee}(s) \\ \hline \end{array}. \tag{3.69}$$

Tale matrice ha complessivamente dimensioni $[6 + (N_m * N_b) \times 6 + (N_m * N_b)]$ e, per quanto riguarda la partizione $(2, 2)$ è necessario ricordare le simmetrie definite nel paragrafo 3.3.3.
Si tenga presente che, per assemblare la matrice $\mathbf{E}(s)$ è sufficiente valutare, per ogni pala del rotore la matrice aerodinamica espressa dalla 3.56 e poi ricombinarla sfruttando le simmetrie come illustrato precedentemente.

In definitiva si può scrivere la seguente relazione tra i gradi di libertà di rotore e pala ed i carichi aerodinamici al mozzo e sulle pale:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \mathbf{E}(s)\,\tilde{\mathbf{w}}. \tag{3.70}$$

Essa è formalmente identica alla 3.83 ma ora è scritta per un rotore multipala.

3.4 Modello ROM per rotori multipala dotati di pale flessibili

La completa identificazione del modello ROM basato sul solutore aerodinamico BEM prevede, analogamente a quanto visto nel paragrafo 2.2.4 per il solutore aerodinamico bidimensionale, l'approssimazione razionale matriciale dell'operatore aerodinamico per eliminare la sua dipendenza trascendente dalla frequenza. Questa operazione comporterà anche in questo caso l'introduzione

di un certo numero N_a di stati aggiunti che andranno a far parte degli numero delle variabili che definiscono lo stato del sistema.

In questo caso l'approssimazione razionale matriciale dell'operatore aerodinamico si scrive nella forma seguente

$$\mathbf{E}(s) \approx s^2\,\mathbf{A}_2 + s\,\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_0 + \mathbf{C}\,[s\,\mathbf{I} - \mathbf{A}]^{-1}\,\mathbf{B}, \tag{3.71}$$

nella quale le matrici $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}_1$ e $\mathbf{A}_0$ hanno dimensioni $[N_f \times (6 + N_b * N_m)]$ (si è posto $N_f = 6 + (N_m * N_b)$) e risultano partizionate nel modo seguente

$$\mathbf{A}_k = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{A}_k^v & \mathbf{A}_k^q \end{array}\right] \tag{3.72}$$

con $\mathbf{A}_2^v = \mathbf{0}$. Inoltre, $\mathbf{A}$ è una matrice quadrata di dimensioni $[N_a \times N_a]$, $\mathbf{C}$ ha dimensioni $[N_f \times N_a]$, e $\mathbf{B}$ ha dimensioni $[N_a \times (6 + N_b * N_m)]$ e sono partizionate come segue:

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{B}^v & \mathbf{B}^q \end{array}\right]. \tag{3.73}$$

Per quanto visto nel caso del modello ROM basato sul solutore aerodinamico di Greenberg anche in questo caso compare la matrice $\mathbf{A}_2$ che introduce nella approssimazione razionale la dipendenza quadratica dalla frequenza. Tale dipendenza è indotta dal fatto che la matrice delle condizioni al contorno $\mathbf{E}^{BC}$ dipende linearmente dalla frequenza a causa della presenza delle variabili associate alla deformazione elastica delle pale: è possibile dimostrare che il comportamento asintotico delle funzioni di trasferimento tra gli spostamenti elastici ed i carichi aerodinamici e di tipo quadratico (si veda, ad esempio, [8]).

È ora possibile completare l'identificazione del modello ROM per un rotore multipala dotato di pale deformabili. Combinando le 3.71 e 3.70, si opera, nell'ordine, la trasformazione nel dominio del tempo e, successivamente, l'espressione, mediante il legame cinematico definito nel paragrafo 2.2.5, delle velocità generalizzate $\mathbf{v}$ in funzione dei gradi di libertà del sistema ala/rotore ovvero $\mathbf{q}^p = \{v, w, \phi, w', v'\}^{\mathrm{T}}$ (calcolate al tip alare). Si noti che i gradi di libertà elastici della j–esima pala fanno già parte delle variabili necessarie per la completa descrizione dell'aerodinamica di pala pertanto esse vengono riportate nel vettore dei gradi di libertà direttamente e per tutte le pale. Il legame cinematico sarà quindi quello che fornisce $\mathbf{v}$ in funzione di $\mathbf{q}^p$, ovvero

$$\mathbf{v} = \mathbf{K}_0(V_\infty, \Omega, t)\,\mathbf{q}^p + \mathbf{K}_1(\Omega, t)\,\dot{\mathbf{q}}^p, \tag{3.74}$$

(si veda il paragrafo 2.2.5).

La procedura descritta porta al seguente sistema di equazioni a coefficienti periodici che descrivono i carichi perturbativi non–stazionari in funzione dei gradi di libertà del sistema

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{e}(t) & = & \mathbf{D}_2(t)\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_1(t)\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_0(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{C}\,\mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} & = & \mathbf{A}\,\mathbf{r} + \mathbf{H}_1(t)\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_0(t)\,\mathbf{x} \end{array} \right. . \tag{3.75}$$

nelle quali il vettore colonna delle variabili di ingresso $\mathbf{x}$ ha dimensioni $[6 + N_b * N_m]$ ed è definito nel modo seguente

$$\mathbf{x} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}^p \\ \\ \mathbf{q}^d \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} v \\ w \\ \phi \\ w' \\ v' \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \beta_{N_b} \\ \gamma_{N_b} \end{array} \right\} \tag{3.76}$$

e le matrici periodiche che compaiono nelle (3.75) and (3.75) sono partizionate nel seguente modo

$$\mathbf{D}_j(t) = [\mathbf{D}_j^p(t)\ \mathbf{D}_j^d(t)] \quad \text{e} \quad \mathbf{H}_j(t) = [\mathbf{H}_j^p(t)\ \mathbf{H}_j^d(t)]. \tag{3.77}$$

Le partizioni delle matrici $\mathbf{D}_j$ e $\mathbf{H}_j$ sono riportate di seguito

$$
\begin{aligned}
\mathbf{D}_2^p(t) &= \mathbf{A}_1^v \mathbf{K}_1(t), \\
\mathbf{D}_2^d(t) &= \mathbf{A}_2^q, \\
\mathbf{D}_1^p(t) &= \mathbf{A}_1^v [\dot{\mathbf{K}}_1(t) + \mathbf{K}_0(t)] + \mathbf{A}_0^v \mathbf{K}_1(t), \\
\mathbf{D}_1^d(t) &= \mathbf{A}_1^q, \\
\mathbf{D}_0^p(t) &= \mathbf{A}_1^v \dot{\mathbf{K}}_0(t) + \mathbf{A}_0^v \mathbf{K}_0(t), \\
\mathbf{D}_0^d(t) &= \mathbf{A}_0^q, \\
\mathbf{H}_1^p(t) &= \mathbf{B}^v \mathbf{K}_1(t), \\
\mathbf{H}_1^d(t) &= \mathbf{0}, \\
\mathbf{H}_0^p(t) &= \mathbf{B}^v \mathbf{K}_0(t) \\
\mathbf{H}_0^d(t) &= \mathbf{B}^q.
\end{aligned}
$$

Data una fissata legge di variazione del moto del tip dell'ala $\mathbf{q}^p$ e della deformazione elastica della pala $\mathbf{q}^d$, le equazioni 3.75 forniscono le corrispondenti forze aerodinamiche che il rotore scarica sul mozzo ed i carichi che forzano la dinamica delle pale.

3.5 Modelli aerodinamici ROM per l'ala

Analogamente a quanto visto per il rotore, si intende definire un modello ROM per l'ala basato su un solutore aerodinamico 3D, non stazionario utilizzando il metodo degli elementi di contorno.

3.5.1 Operatore aerodinamico

Seguendo quanto visto nel paragrafo 3.1 è possibile definire l'operatore aerodinamico che lega le forze generalizzate agenti sull'ala ai gradi di libertà della stessa, ovvero le variabili lagrangiane utilizzate per la descrizione della deformazione dell'ala. Tuttavia, poiché l'ala è schematizzata con un modello di trave biflesso–torsionale, è necessario trattare in modo diverso da quanto visto per il rotore la definizione dei modi necessari per la descrizione delle condizioni al contorno sulla superficie del corpo e per la definizione delle forze generalizzate. Tali modi sono legati ai modi utilizzati per la descrizione cinematica dei gradi di libertà dell'ala $v(x,t)$, $w(x,t)$ e $\phi(x,t)$ (e le rispettive derivate) tuttavia questi ultimi sono modi scalari in quanto scalari risultano gli spostamenti che essi devono descrivere. Nel caso del solutore aerodinamico BEM la definizione delle condizioni al contorno sulla superficie di un corpo elastico richiede la conoscenza degli spostamenti di ciascun punto di collocazione che deriva dalla discretizzazione della superficie stessa. Tali spostamenti sono grandezze vettoriali e come tali avranno tre componenti nel sistema di riferimento ala indeformata: sarà dunque necessario utilizzare delle forme modali vettoriali per descriverli.

L'espressione dello spostamento di un generico punto P appartenente ad una sezione dell'ala in funzione dello spostamento del centro elastico della sezione medesima è fornita dalla 2.78 che si riporta per comodità

$$\mathbf{d}_P = \mathbf{d}_e + \left(\mathbf{T}^{\mathrm{T}} - \mathbf{I}\right) \mathbf{r}_{d_0}, \tag{3.78}$$

nella quale $\mathbf{r}_{d_0} = \mathbf{x}_{P_0} - \mathbf{x}_{e_0}$ è il vettore distanza tra il generico punto P ed il centro elastico di sezione. Si ricorda che, nella 3.78 i vettori sono espressi in componenti nel sistema di riferimento ala indeformata.

Esprimendo il vettore spostamento come sommma di un termine all'equilibrio e di un termine perturbativo e linearizzando la 3.78 tenendo conto che, nell'ipotesi di sezioni infinitamente rigide, il vettore $\mathbf{r}_d$ non varia a seguito di una deformazione, si può scrivere la seguente espressione per lo

spostamento perturbativo nel generico punto P

$$\mathbf{d}_p|_{pert} = \mathbf{d}_e|_{pert} + \mathbf{T}|^{\mathrm{T}}_{lin}(\mathbf{x}_{p0} - \mathbf{x}_{e0}), \tag{3.79}$$

nella quale con $\mathbf{T}|^{\mathrm{T}}_{lin}$ si è indicata la forma linearizzata della matrice $\mathbf{T}^{\mathrm{T}}$.

Seguendo gli sviluppi riportati in appendice D si ottiene la relazione tra lo spostamento elastico nel punto P ed i gradi di libertà che definiscono la deformazione elastica dell'ala, ovvero v, w, ϕ, v', w' raccolte nel vettore $\mathbf{q}^p$

$$\mathbf{d}_p|_{pert}(\mathbf{x}, t) \cong \mathbf{M}_{eq}\ \mathbf{q}^p(\mathbf{x}, t). \tag{3.80}$$

La matrice $\mathbf{M}_{eq}$ ha dimensioni $[3 \times 5]$ e dipende dai gradi di libertà di ala calcolati nella configurazione indeformata di equilibrio, oltre che dagli eventuali angoli di precone e freccia.

Utilizzando lo sviluppo in forma modale (si veda appendice D) si esprimono i gradi di libertà di pala in funzione delle variabili lagrangiane di ala $\mathbf{q}^w$ nella forma $\mathbf{q}^p = \mathbf{N}\ \mathbf{q}^w$ ottenendo la seguente espressione lineare per lo spostamento elastico

$$\mathbf{d}_p|_{pert} \cong \sum_{n}^{N^w_m} q^w_n \mathbf{\Phi_n}, \tag{3.81}$$

arrivando pertanto alla definizione della base modale $\mathbf{\Phi_n}$ che consente di descrivere lo spostamento dei punti appartenenti alla superficie dell'ala in funzione delle variabili lagrangiane di ala q^w_n. Il numero di variabili lagrangiane N^w_m è pari alla somma del numero di modi scelto per rappresentare gli spostamenti elastici di flap, lag e torsione di ala, ovvero $N^w_m = N_{tot} = N_l + N_f + N_t$.

Quanto esposto consente di definire dunque le matrici $\mathbf{E}_f$ e $\mathbf{E}^{BC}(s)$ per l'ala in analogia con quanto visto per il rotore. In particolare, per quanto riguarda la matrice $\mathbf{E}_f$ che contiene, nel dominio della frequenza, le funzioni di trasferimento tra la pressione sul corpo e le forze generalizzate, la procedura è identica a quella del paragrafo 3.1.3 eccetto che per la sostituzione dei modi $\mathbf{\Upsilon}_n$ con le $\mathbf{\Phi_n}$.

Il calcolo della matrice delle condizioni al contorno segue gli sviluppi del paragrafo 3.3.1 utilizzando la 3.81, che è analoga alla 3.45, per ottenere

$$\begin{aligned} \chi_m(t) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}_m, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_m) = \\ &= \sum_{n=1}^{N^w_m} \dot{q}^w_n(t)\ \mathbf{\Phi}_n(\mathbf{x}_m) \cdot \mathbf{n}_0(\mathbf{x}_m) + \sum_{n=1}^{N^w_m} \mathbf{v}_{cr} \cdot \frac{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}_m)}{\partial q^w_n} q^w_n(t)\ , \end{aligned} \tag{3.82}$$

nella quale $\mathbf{v}_{cr} = \mathbf{V}_\infty$ è la velocità del generico punto $\mathbf{x}$ dell'ala nella confgurazione di equilibrio in volo assiale.

Passando nel dominio della frequenza (ridotta) si ottiene dunque l'operatore aerodinamico che raccoglie le funzioni di trasferimento che forniscono le forze generalizzate agenti sull'ala in funzione delle ampiezze modali nella forma

$$\tilde{\mathbf{f}}^w = \mathbf{E}^w(jk)\,\tilde{\mathbf{q}}^w, \tag{3.83}$$

nella quale la matrice $\mathbf{E}^w(jk)$ di dimensioni $[N_m^w \times N_m^w]$ ed è data da

$$\mathbf{E}^w(jk) = \mathbf{E}_f\,\mathbf{E}_p(jk)\,\mathbf{E}_\phi(jk)\,\mathbf{E}^{BC}(jk). \tag{3.84}$$

3.5.2 Identificazione del modello ROM per l'ala

L'identificazione del modello ROM basato sul solutore BEM per l'ala segue esattamente la procedura vista nel paragrafo 2.3.4 per il solutore di Greenberg.

Applicando dunque l'approssimazione razionali matriciale e antitrasformando per tornare nel dominio del tempo, si ottiene

$$\begin{cases} \mathbf{f}_a^w(t) = \mathbf{D}_2^w\,\ddot{\mathbf{q}}^w + \mathbf{D}_1^w\,\ddot{\mathbf{q}}^w + \mathbf{D}_0^w\,\mathbf{q}^w + \mathbf{C}^w\,\mathbf{r}^w \\ \\ \dot{\mathbf{r}}^w = \mathbf{A}^w\,\mathbf{r}^w + \mathbf{H}_0^w\,\mathbf{q}^w \end{cases}, \tag{3.85}$$

nella quale

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_2^w &= \tau^2\,\mathbf{A}_2^w, \\ \mathbf{D}_1^w &= \tau\,\mathbf{A}_1^w, \\ \mathbf{D}_0^w &= \mathbf{A}_0^w, \\ \mathbf{A}^w &= 1/\tau\,\mathbf{A}^w, \\ \mathbf{H}_0^w &= 1/\tau\,\mathbf{B}^w\ . \end{aligned}$$

Capitolo 4

Modello per lo studio dell'aerodinamica interazionale del sistema ala/rotore

Nel presente capitolo si intende illustrare il modello aerodinamico tridimensionale non–stazionario che è stato sviluppato per caratterizzare il campo fluidodinamico attorno a configurazioni ala/rotore. L'obiettivo è quello di definire un modello che sia in grado di tener conto delle interazioni aerodinamiche che sussistono tra ala e rotore e di svilupparlo nell'ottica della sua integrazione con il modello ROM basato sul solutore BEM introdotto nel capitolo 3.

L'interazione aerodinamica tra rotore ed ala si esplica nella forma di complessi fenomeni non–stazionari particolarmente importanti nella caratterizzazione del flusso attorno ad una configurazione di questo tipo. La definizione del modello interazionale sviluppato nel presente lavoro si basa sull'ipotesi di flussi potenziali, in perfetta analogia con il modello ROM illustrato nel capitolo precedente e sulla base delle medesime motivazioni legate alla capacità di questi modelli di catturare con sufficiente accuratezza i fenomeni caratteristici della configurazione di interesse pur mantenendo ridotti oneri computazionali.

Ragionando quindi in termini di solutore BEM si intende in questa sezione descrivere il modello sviluppato per caratterizzare gli aspetti fondamentali dell'interazione aerodinamica tra ala e rotore. Innanzitutto il campo fluidodinamico indotto dall'ala agisce sul rotore in misura variabile nel tempo e legata alla posizione azimutale del rotore: questo tipo di influenza si verifica in modo diretto ed indiretto. La presenza dell'ala posta a valle del rotore, infatti, induce un campo di velocità sulle pale del rotore e dunque genera un cambiamento nelle condizioni al contorno che si riflette su una

variazione nel tempo dei carichi agenti sulle pale; si tratta dunque di un effetto diretto. D'altra parte, l'interazione con la superficie dell'ala produce una deformazione della scia rilasciata dalle pale e ciò indirettamente ha un influenza sui carichi aerodinamici di pala. Infine, è necessario tener conto degli effetti legati alla porzione della scia rotorica che, impattando sulla superficie dell'ala in misura variabile nel tempo, genera dei picchi di pressione locali sulla superficie stessa che si riflettono sui carichi aerodinamici agenti sull'ala e dunque sulle sollecitazioni di natura aeroelastica cui essa è soggetta.

Nel presente capitolo verrà brevemente delineato il modello aerodinamico interazionale sviluppato, soffermandosi in particolare sulla metodologia numerica sviluppata per tener conto, nell'ambito di solutori basati su tecniche agli elementi di contorno per lo studio di flussi potenziali, dei principali fenomeni di mutua influenza ala/rotore descritti. Per i dettagli sulla formulazione presentata si rimanda a [3].

4.1 Modello agli elementi di contorno time–marching per sistemi ala/rotore

Il modello proposto si basa sulla formulazione introdotta nel capitolo 3 per quanto riguarda il modello aerodinamico di rotore e di ala. In particolare, la formulazione agli elementi di contorno nel dominio del tempo scritta per il rotore isolato (equazione 3.1) è stata estesa a configurazioni multicomponente in cui è possibile individuare una parte fissa ed una rotante.

L'equazione integrale di contorno che fornisce il valore del potenziale di velocità indotto nel punto $\vec{x}_*$ dalla perturbazione del campo dovuta alla presenza dell'ala e del rotore e delle rispettive scie potenziali assume la medesima forma

$$E(\vec{x}_*)\varphi(\vec{x}_*,t) = \int_{\mathcal{S}_B}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}G - \varphi\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}\mathcal{S}(\vec{x}) - \int_{\mathcal{S}_W}\left(\Delta\varphi\frac{\partial G}{\partial n}\right)\mathrm{d}\mathcal{S}(\vec{x}) \tag{4.1}$$

tuttavia ora gli integrali delle sorgenti e delle doppiette tengono conto della presenza contemporanea della parte fissa e della parte rotante del propulsore. In particolare $\mathcal{S}_B$ rappresenta l'insieme delle superfici (chiuse) di tutti i corpi solidi (ovvero l'ala, la nacelle e le pale nel caso di un velivolo tiltrotor, e lo strut, la gondola e le pale per un propulsore azimutale), mentre $\mathcal{S}_W$ rappresenta l'in-

sieme delle superfici di scia di tutti i corpi portanti (ovvero le pale e l'ala nel caso di un tiltrotor, le pale e lo strut nel caso di un pod).

La soluzione dell'equazione 4.1 richiede le opportune condizioni al contorno. Tali condizioni sono definite nell'appendice B tuttavia è opportuno chiarire che la velocità del corpo $\mathbf{v}_B$ che compare nella B.6 risulta differente a seconda che si calcolino le condizioni al contorno sulla parte fissa o sulla parte rotante. In particolare si avrà $\vec{v}_B = \vec{V}_\infty$ per l'ala mentre sul rotore risulterà $\vec{v}_B = \vec{V}_\infty + \vec{\omega} \times \vec{x}_*$.

L'equazione 4.1 viene risolta utilizzando anche in questo caso il metodo agli elementi di contorno (BEM) per determinarne la soluzione numerica. Come primo passo occorre discretizzare la superficie dei corpi solidi e delle scie mediante pannelli quadrangolari iperboloidali, assumendo costanti su ciascun pannello il valore del potenziale, della sua derivata normale e del $\Delta\varphi$. Inoltre, data la natura non–stazionaria del flusso attorno alla configurazione, è necessario discretizzare il problema nel tempo in modo da poter descrivere la posizione relativa tra rotore e ala ad ogni passo temporale. Si noti che la geometria delle scie può essere nota a priori oppure determinata come parte della soluzione del problema potenziale: di questo aspetto si occuperà il paragrafo 4.2.1. Seguendo la

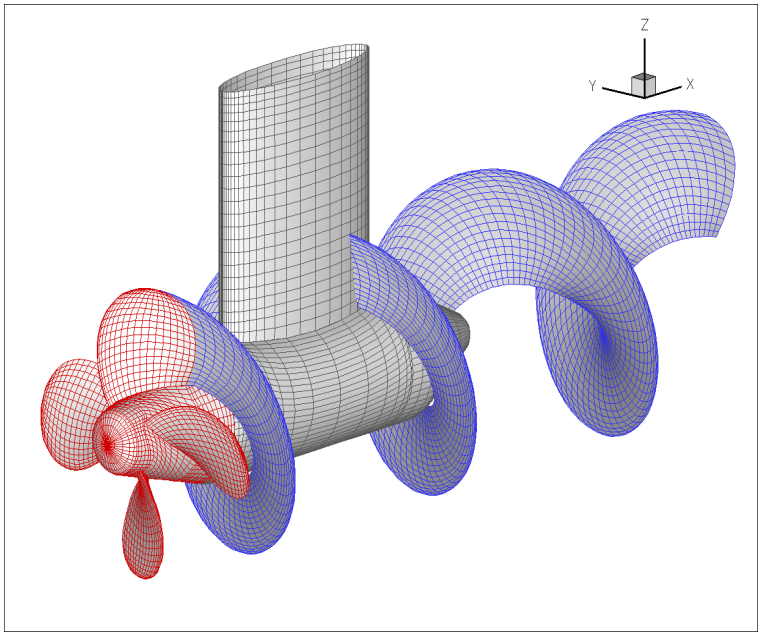

Figura 4.1: Esempio di griglia BEM per un propulsore azimutale (pod) traente.

procedura illustrata ed imponendo che l'equazione 4.1 sia soddisfatta ad ogni istante temporale nei

centroidi relativi ai corpi fissi ed a quelli rotanti, si ottiene un sistema di equazioni lineari del tipo

$$\mathbf{A}(t)\,\mathbf{y}(t) = \boldsymbol{\chi}(t) \tag{4.2}$$

nel quale $\mathbf{A}$ è la matrice dei coefficienti di influenza, $\mathbf{y}$ è il vettore delle incognite costituito dal valore incognito del potenziale e dal $\Delta\varphi$ su tutti i centroidi appartenenti a $\mathcal{S}_B$ e $\mathcal{S}_W$ rispettivamente. Il vettore $\boldsymbol{\chi}$ raccoglie tutte le quantità note del problema, ovvero le condizioni al contorno sulla superficie dei corpi ed i salti di potenziale al bordo d'uscita relativi agli istanti precedenti a quello attuale. Le condizioni al contorno dipendono dal tempo per via dei contributi legati alle doppiette sulla superficie delle scie; infatti, data la non stazionarietà del campo fluidodinamico, in generale la forma della scia rotorica e di quella dell'ala cambierà nel tempo, dando luogo a coefficienti di influenza di doppietta variabili nel tempo. Ovviamente tale tempo–varianza non si ha nel caso in cui si consideri congelata la forma delle scie dei corpi portanti. Per quanto riguarda la matrice di influenza, essa risulta tempo–variante per via della mutua influenza tra parte rotante e parte fissa del propulsore.

Una volta ottenuta la soluzione del problema 4.2, è possibile calcolare i carichi agenti sull'ala e sul rotore integrando il teorema di Bernouilli.

Dal punto di vista degli oneri computazionali, ciò che richiede maggior tempo di calcolo è il calcolo degli elementi della matrice di influenza e la sua l'inversione. Dato che $\mathbf{A}$ è dipendente dal tempo, entrambe le operazioni devono essere effettuate ad ogni istante di tempo. Le dimensioni di tale matrice possono facilmente raggiungere valori elevati con le discretizzazioni necessarie per ottenere una soluzione che sia indipendente dal numero di pannelli utilizzato per discretizzare i corpi solidi e le scie.

Rimandando a [3] per ulteriori dettagli, è opportuno soffermarsi in questa sede sulla struttura della matrice di influenza e sul metodo utilizzato per risolvere il sistema di equazioni in 4.2. Identificando con il pedice F le grandezze relative alla parte fissa del propulsore e con il pedice R quelle relative alla parte rotante, il problema 4.2 può essere riscritto nella forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_{FF} & \mathbf{A}_{FR} \\ \mathbf{A}_{RF} & \mathbf{A}_{RR} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{y}_F \\ \mathbf{y}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\chi}_F \\ \boldsymbol{\chi}_R \end{Bmatrix} \tag{4.3}$$

nella quale $\mathbf{A}_{FF}$ indica l'influenza delle parti fisse su se stesse, così come $\mathbf{A}_{RR}$ rappresenta l'insieme dei coefficienti di influenza delle parti rotanti su se stesse. Tali partizioni risultano dunque

costanti nel tempo. Le partizioni $\mathbf{A}_{FR}$ e $\mathbf{A}_{RF}$ rappresentano la mutua influenza della parte rotante sulla fissa e di quella fissa su quella rotante, rispettivamente. Il vettore delle incognite e quello delle condizioni al contorno risulteranno partizionati in modo analogo. Allo scopo di ridurre i tempi di calcolo, la soluzione del sistema di equazioni 4.2 può essere ottenuta mediante l'approccio iterativo illustrato nel diagramma di flusso riportato in figura 4.2. Il vantaggio di una simile tecnica

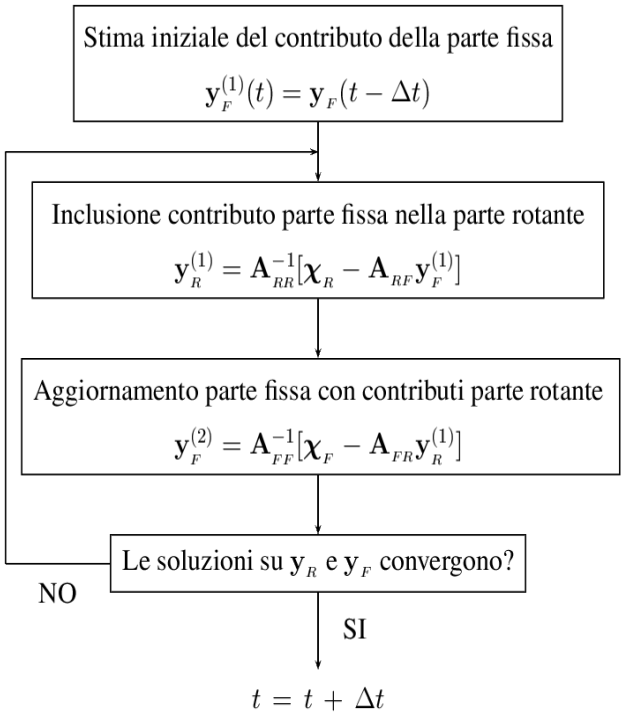

Figura 4.2: Diagramma di flusso della procedura iterativa per la risoluzione del problema potenziale per configurazioni ala/rotore

di decomposizione del sistema è legato al fatto che la definizione delle partizioni della matrice di influenza $\mathbf{A}$ consente di invertire matrici di minor dimensione. In particolare solo le partizioni $\mathbf{A}_{RR}$ e $\mathbf{A}_{FF}$ vengono invertite e, dato che esse risultano indipendenti dal tempo, questa operazione deve essere fatta solo una volta piuttosto che ad ogni passo temporale. L'algoritmo presentato è stato oggetto di verifiche numeriche per quanto riguarda la convergenza alla soluzione ottenuta risolvendo il sistema completo (si veda [1]) ed il numero di iterate necessarie per ottenere tale convergenza. L'impiego di questa tecnica di decomposizione ha dimostrato di portare ad un notevole risparmio computazionale rispetto alla risoluzione del sistema completo. Inoltre tale algoritmo ha mostrato una convergenza molto rapida alla soluzione ottenuta dal sistema completo. Si noti che, pur uti-

lizzando una tecnica di decomposizione del sistema, il modello introdotto consente di risolvere il problema potenziale al passo nel tempo e contemporaneament su tutti i corpi fissi e rotanti che costituiscono la configurazione in esame: si tratta quindi di una tecnica cosiddetta “time–accurate”. Un altro aspetto che occorre notare è che la formulazione è stata sviluppati per corpi rigidi: infatti nelle condizioni al contorno su rotore ed ala non si tiene conto delle deformazioni dovute all’elasticità .

4.2 Interazione ala/scia rotorica

La capacità del modello aerodinamico interazionale di caratterizzare il campo fluidodinamico attorno alla configurazione ala/rotore è strettamente legata allo sviluppo di una tecnica che consenta di determinare la forma della scia rotorica a seguito della sua interazione con l’ala e di tener conto con buona approssimazione dei fenomeni di impatto della scia stessa con la superficie dell’ala.

In questo paragrafo verrà illustrata la tecnica di allineamento della scia al campo fluidodinamico indotto dalla presenza del rotore e dell’ala. Tale metodologia, ampiamente utilizzata e validata per rotori isolati, è stata estesa al caso di un sistema ala/rotore. Infine si illustrerà il modello adottato, nell’ambito dei modelli validi per flussi potenziali basati sul metodo BEM, per caratterizzare alcuni dei tratti salienti dell’interazione scia/corpo.

4.2.1 Tecnica di allineamento della scia

La tecnica di allineamento della scia utilizzanda nel presente lavoro consente di ottenere la geometria della scia come parte della soluzione del campo attorno al sistema ala/rotore tenendo conto delle deformazioni indotte dai corpo solidi, dalle altre scie (quella dell’ala per esempio) e quelle autoindotte.

Il primo passo della procedura è il calcolo della velocità indotta da tutti i corpi solidi e le scie presenti nel campo nei punti che appartengono alla scia della quale si intende determinare la forma. Una volta nota tale velocità , ciascun nodo della griglia di scia (identificato dal vettore posizione $\mathbf{x}_w$) viene vincolato a muoversi compatibilmente con il campo di velocità locale, utilizzando uno

schema di tipo Lagrangiano, come segue

$$\vec{x}_w(t+\Delta t) = \vec{x}_w(t) + \int_t^{t+\Delta t} \vec{V}[\vec{x}_w(\tau)]\, d\tau, \tag{4.4}$$

dove:

$$\vec{V} = \vec{V}_I + \nabla\varphi \tag{4.5}$$

è la velocità totale, somma della velocità incidente sulla pala e della velocità di perturbazione indotta.

Il campo di velocità indotto nei punti della scia $\mathbf{x}_w$ si determina mediante una rappresentazione integrale ottenuta dalla definizione della velocità come gradiente del potenziale. In particolare, applicando l'operatore gradiente alla 4.1 scritta per i punti appartenenti alla scia si ottiene

$$\vec{v}(\vec{x}_w, t) = \nabla_{\vec{x}_w} \int_{S_B} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, G - \varphi\, \frac{\partial G}{\partial n} \right) d\mathcal{S}(\vec{x}) - \nabla_{\vec{x}_w} \int_{S_W} \Delta\varphi\, \frac{\partial G}{\partial n}\, d\mathcal{S}(\vec{x}), \tag{4.6}$$

Come si nota, la velocità in un generico punto dipende dalla soluzione del potenziale sui corpi solidi presenti nel campo e dai salti di potenziali sulle relative scie. Poiché la soluzione del problema potenziale stesso dipende dalla forma della scia, risulta evidente che la tecnica di allineamento della scia preveda un algoritmo di tipo iterativo. Si fissa dunque come geometria di primo tentativo una scia la cui superficie lascia il bordo d'uscita della pala lungo la tangente alla linea media del profilo ed il cui passo viene fissato in base al rapporto tra la velocità di avanzamento dell'elica e la velocità tangenziale calcolata all'estremità della pala (questo rapporto si definisce coefficiente d'avanzo e viene identificato con $\mu = V_\infty/\Omega R$ in ambito aeronautico e $J = V_\infty/nD$ in ambito navale). Una volta calcolato il potenziale sul rotore e sull'ala mediante la 4.2 è possibile calcolare il campo di velocità indotto nei nodi della griglia di scia mediante la 4.6 e dunque aggiornarne la posizione mediante la 4.4. In tal modo i nodi della scia vengono allineati al campo di velocità locale indotto dal rotore, dall'ala e dalle rispettive scie. Questa procedura viene ripetuta fino a convergenza utilizzando come nuova stima iniziale la geometria di scia ottenuta al passo precedente. In particolare per un rotore isolato (quindi condizioni di flusso stazionario) la convergenza si raggiunge quando la differenza tra la forma della scia al passo $n+1$ e quella al passo n è al di sotto di una fissata tolleranza. Un discorso specifico va fatto per il caso non–stazionario che si verifica trattando una configurazione di tipo ala/rotore. In linea di principio, in questo caso la procedura descritta andrebbe ripetuta ad ogni passo temporale fino a convergenza. Tuttavia la natura periodica

(con periodo legato alla velocità di rotazione dell'elica) dell'interazione ala/rotore consente di far coincidere il passo di aggiornamento della geometria di scia con quello della discretizzazione nel tempo: superata una fase di transitorio tale procedura andrà a convergenza su una forma di scia che varierà periodicamente per via dell'interazione con l'ala (questa tecnica è ampiamente utilizzata per la determinazione della scia di rotori di elicottero in condizioni di volo in avanzamento).

Ulteriori dettagli riguardo alla metodologia illustrata ed alle problematiche numeriche ad essa legate, sono riportate in [11], lavoro nel quale è ampiamente documentata la campagna di validazione della tecnica di allineamento di scia realizzata per un'elica navale in flusso uniforme. In figura 4.3 è riportata, a scopo esemplificativo, l'applicazione della tecnica di allineamento di scia ad un propeller di tipo aeronautico (per semplicità è riportata una singola pala). Si può notare come la

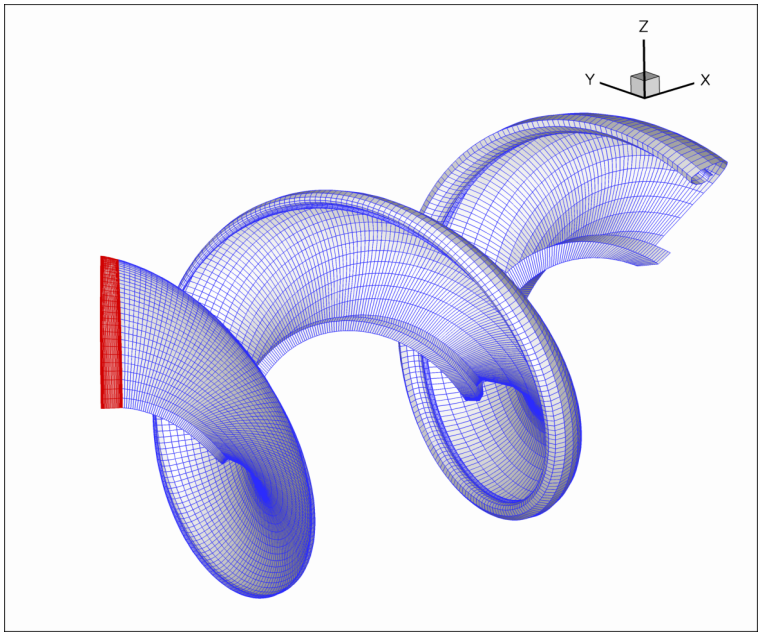

Figura 4.3: Esempio di geometria di scia ottenuta mediante tecnica di allineamento al flusso locale.

scia allineata al flusso abbia una forma piuttosto diversa da un elicoide con asse parallelo all'asse s di figura. In particolare si nota il caratteristico "arrotolamento" in corrispondenza a quello che fisicamente viene denominato "vortice di estremità " ed è legato alla distribuzione del carico palare lungo l'apertura. Meno evidente in figura ma comunque rilevato dal modello di scia libera è la caratteristica contrazione che la scia subisce immediatamente a valle dell'elica a causa dell'accelerazione indotta dalle pale. Di fatto la tecnica di allineamento della scia consente di determinare una forma di scia che è compatibile con la distribuzione del carico aerodinamico sulla pala.

Gli effetti dell'interazione scia/ala sulla tecnica di allineamento della scia verranno discussi nel paragrafo successivo.

4.2.2 Simulazione dell'impatto scia/ala

La modellazionde della fenomenologia dell'impatto tra la scia rotorica e la superficie dell'ala può essere inquadrata nell'ambito generale dei problemi di impatto tra vortici e corpi solidi. La definizione del modello di impatto proposto nel presente lavoro si basa sull'interpretazione di analisi sperimentali che hanno consentito di formulare un modello di impatto che fosse inquadrabile nell'ambito della metodologia agli elementi di contorno utilizzata per lo sviluppo del solutore aerodinamico.

In particolare è stato preso in cosiderazione il problema dell'interazione tra un vortice ed una pala che lo taglia in direzione ortogonale al suo asse (fenomeno definito *vortex cutting*). Tale configurazione è stata studiata in [25] e [26] allo scopo di comprendere, tramite visualizzazioni del flusso e tramite simulazioni numeriche, il comportamento del vortice durante l'interazione con la pala. In figura 4.4 è riportato un esempio di visualizzazione del flusso attorno ad una pala in condizioni di impatto ortogonale con un vortice ottenute utilizzando una tecnica LIF (*Laser Induced Fluorescence*) che utilizza inchiostro per visualizzare le strutture presenti nel flusso. La freccia blu indica la direzione del moto del vortice rispetto alla pala (della quale è visualizzata la sezione) che si muove dal basso verso l'alto. Come si nota esiste una forte interazione del vortice con lo strato limite sulla pala, tuttavia i fenomeni principali riguardano la deformazione cui sono soggette le due porzioni di vortice che si trovano sui due lati della pala. In particolare si osserva che la porzione di vortice è soggetta ad una compressione se si sta muovendo in direzione della superficie della pala (lato sinistro in figura), mentre sarà soggetto ad un allungamento se se ne sta allontanando (lato destro in figura).Il raggio del vortice risulta aumentato rispetto al valore in condizione indeformata dal lato in cui c'è una compressione, mentre risulta ridotto dal lato in cui si ha l'allungamento. Nell'immagine il vortice sembra "tagliato" dal profilo della pala; in realtà la continuità del vortice viene garantita da un filamento vorticoso che avvolge il profilo e che raccorda i due tronconi di vortice mostrati in figura. Tale filamento è molto sottile ed interagisce fortemente con la vorticità presente nello strato limite della pala ed è responsabile del "ricongiungimento" tra le due porzioni di vortice che si osserva dopo il completo passaggio della pala.

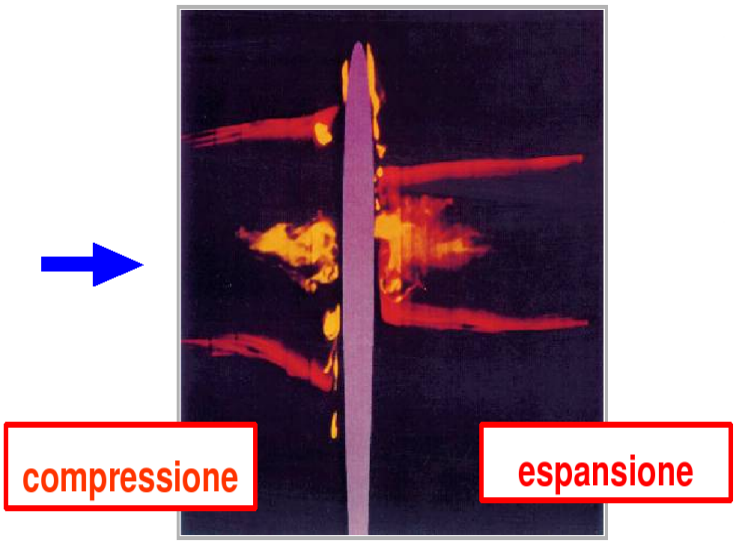

Figura 4.4: Visualizzazioni LIF del flusso attorno ad una pala in condizioni di impatto ortogonale con un vortice (rif. [26]).

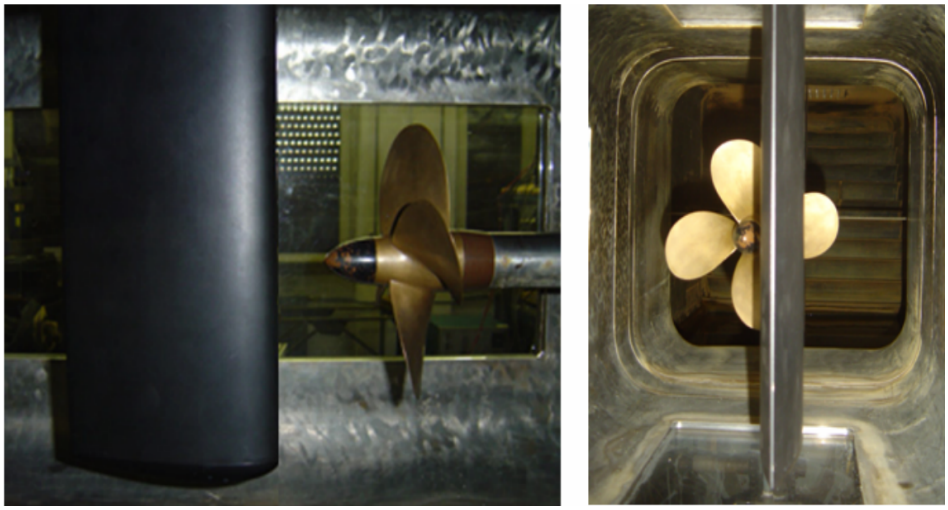

Figura 4.5: Fotografia della configurazione elica/timone sperimentata nel tunnel idrodinamico.

Ulteriori approfondimenti relativi ai fenomeni di interazione in configurazioni molto simili a quelle oggetto del presente lavoro sono stati possibili grazie ad una campagna di analisi sperimentale del flusso attorno ad una configurazione elica/timone condotta in un tunnel idrodinamico e riportata in [5]. In figura 4.5 è mostrata una foto dell'installazione per le prove sperimentali (per i dettagli sulle condizioni di prova si rimanda a [5]). Nelle figure 7.42 e 4.7 sono riportate, a titolo esemplificativo, due visualizzazioni del flusso ottenute mediante una tecnica che fa uso di fotocamere veloci. In

particolare, l'elica è posta a sinistra (non visibile nelle immagini se non per una porzione del mozzo in figura 4.7) e la direzione del flusso è da sinistra verso destra. La traccia chiara che si nota è relativa al vortice di estremità delle pala (le immagini si riferiscono ad una configurazione bipala). Allo scopo di visualizzare tale vortice il tunnel è stato depressurizzato per indurne la cavitazione: ciò che si vede nelle fotografie è dunque la traccia della zona vaporizzata in corrispondenza al vortice. Come si nota è possibile sostanzialmente distinguere tre fasi dell'interazione: nella fase di avvicinamento del vortice al timone esso risente del campo di velocità indotto dalla presenza del corpo fisso e dunque si nota la sua deformazione in prossimità del bordo d'attacco del timone (si veda figura 7.42 ed, in misura più evidente figura 4.7); successivamente il vortice impatta sulla superficie del timone presentando fenomeni simili a quelli descritti per il *blade cutting*: si noti che il filamento vorticoso che appare distorto all'approssimarsi al bordo d'attacco andrà ad interagire con lo strato limite del timone garantendo la continuità del vortice. Infine (non visibile nelle immagini) le due porzioni di vortice si ricongiungono a formare un unico filamento vorticoso a valle del timone. Il fenomeno di deformazione del vortice al suo avvicinarsi al bordo d'attacco del

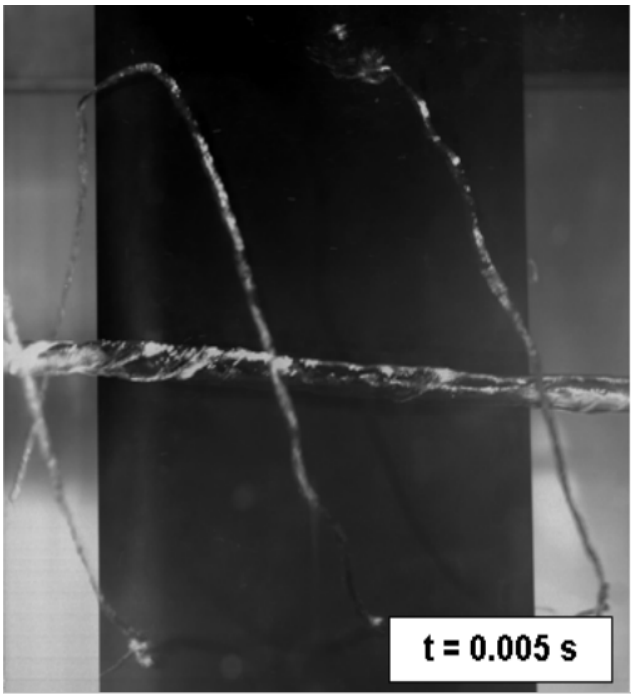

Figura 4.6: Visualizzazione del flusso attorno ad una configurazione elica/timone: vista laterale.

timone è un fenomeno sostanzialmente di natura potenziale. Infatti, come si vedrà nel capitolo 7 il solutore aerodinamico time–marching illustrato nei paragrafi precedenti è in grado di tener conto

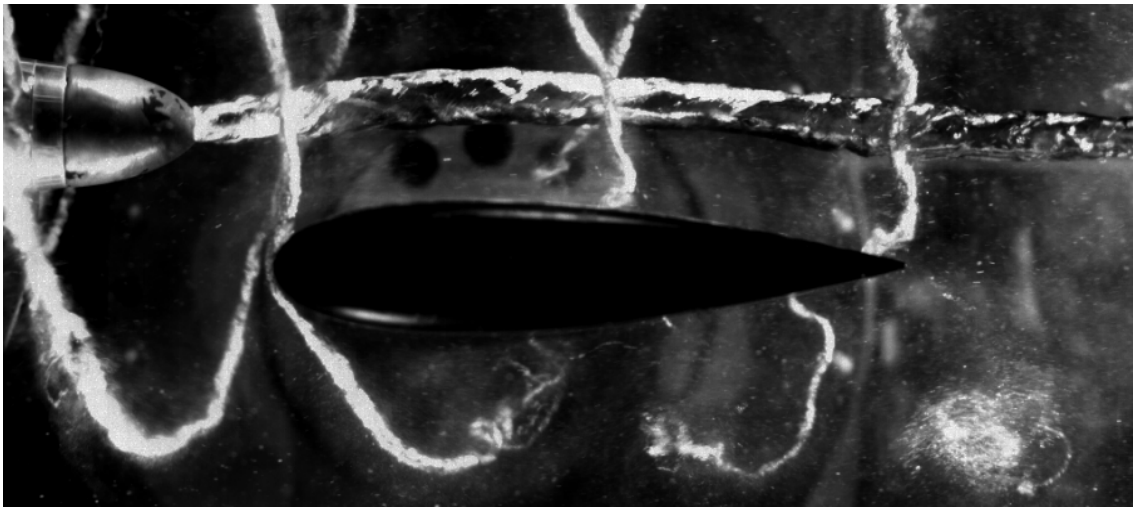

Figura 4.7: Visualizzazione del flusso attorno ad una configurazione elica/timone: vista in pianta.

di tale deformazione includendo nella simulazione l'algoritmo di allineamento della scia al campo fluidodinamico indotto da tutti i corpi presenti nella configurazione, in particolare quindi dal timone.

Per quanto riguarda invece la simulazione della fase di impatto successiva alla deformazione, è stato sviluppato un approccio numerico per poter tener conto in maniera opportuna delle porzioni di scia che interagiscono con la superficie del corpo fisso a valle dell'elica. In fenomeni di interazione vortici/corpi portanti risulta molto importante l'interazione del vortice con lo strato limite sulla superficie del corpo. Tuttavia, nell'ambito di modelli validi per flussi potenziali ci si è limitati a modellare gli effetti globali dell'interazione rinunciando ad una descrizione locale dell'interazione. Dal punto di vista fisico è evidente che la scia non può in alcun modo penetrare la superficie dell'ala (o del timone nel caso specifico). Tuttavia, nell'ambito di un approccio basato sulla metodologia agli elementi di contorno la scia potenziale non può avere soluzione di continuità pertanto si è scelto di mantenere la continuità della scia consentendole geometricamente di attraversare il timone ma tenendo conto della ridistribuzione sulla superficie della stessa dell'intensità della vorticità a causa delle deformazioni asimmetriche cui è soggetta la porzione di scia che impatta sulla superficie del corpo fisso. Nell'ambito di modelli agli elementi di contorno approcci alternativi a quello sviluppato nel presente lavoro prevedono di risolvere la continuità della scia permettendo di fatto ai pannelli di separarsi nel momento in cui entrano in contatto con il bordo d'attacco del corpo. Opportune condizioni di ricongiungimento dei pannelli, di ridistribuzione della vorticità

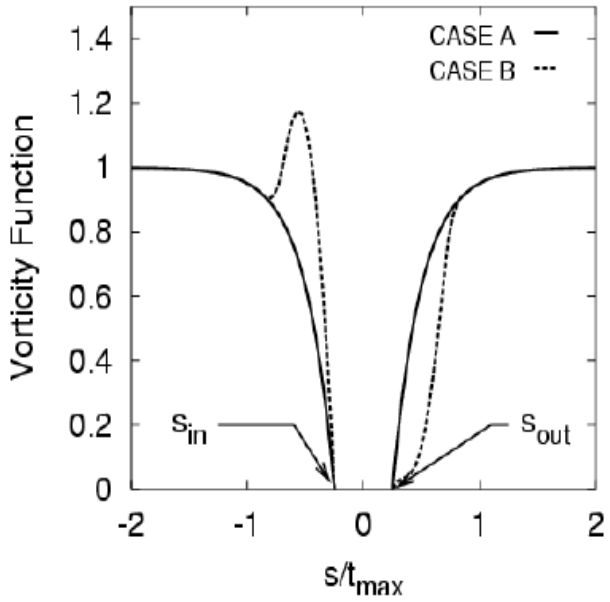

Figura 4.8: Esempi di andamenti della funzione di vorticità F_W.

sui pannelli che interagiscono con il corpo fisso, e di riduzione delle instabilità numeriche che tale metodo comporta completano tali approcci (si veda, ad esempio, [28]).

Ricordando la relazione tra la distribuzione di vorticità sulla superficie della scia ed il salto di potenziale attraverso la medesima ($\vec{\gamma} = \vec{n} \times \nabla_{S_W}(\Delta\varphi)$) si può introdurre una "funzione di vorticità " F_W che consenta di tener conto della compressione e della espansione delle porzioni di scia che interagiscono con la superficie dell'ala. In particolare dunque, tale funzione è stata utilizzata per modificare l'intensità delle doppiette distribuite sulla scia in una regione prossima all'ala definita da una dimensione caratteristica L_{box}. Per i centroidi di scia che ricadono all'interno di questa regione si definisce una nuova intensità delle doppiette come

$$\Delta\tilde{\varphi} = F_W \Delta\varphi \tag{4.7}$$

La definizione di tale funzione e la dimensione della regione in cui essa viene utilizzata sono state oggetto di validazione e verifica (si vedano [3] e [33]). Due esempi di definizione della funzione di vorticità sono illustrati in figura 4.8. Come si vede, al di fuori della regione di controllo che contiene il corpo fisso (ala, strut o timone) (tra -1 e 1 in figura), tale funzione vale 1 (e quindi l'intensità delle doppiette non viene alterata), mentre all'interno del corpo fisso risulta $F_W = 0$. Le considerazioni teoriche precedenti indicano l'opportunità di definire la funzione di vorticità in

modo asimmetrico rispetto alle due facce del timone (caso A in figura 4.8). Tuttavia, dal punto di vista computazionale, risulta difficile rappresentare adeguatamente la funzione asimmetrica eccetto nei casi in cui la discretizzazione della scia sia molto fitta. Tali discretizzazioni comportano un incremento dell'onere computazionale pertanto si é scelto di considerare solamente il caso di una funzione F_W monotona decrescente all'avvicinarsi alla parete in modo simmetrico da ambo i lati (caso B in figura 4.8).

Le verifiche numeriche condotte in [3] hanno peraltro mostrato, come si vedrà nel capitolo 7, che anche il modello di funzione di vorticità simmetrico garantisce risultati in discreto accordo con le evidenze sperimentali. È chiaro che ulteriori approfondimenti di questo aspetto della modellazione sono comunque necessari.

La funzione di vorticità di tipo A utilizzata è:

$$F_W = \begin{cases} = & 1 & \mathrm{d} > L_{box} \\ = & (1 - e^{C\,d}) & \mathrm{d} < L_{box} \\ = & 0 & \mathrm{d} \in ala \end{cases} \tag{4.8}$$

nella quale d rappresenta la distanza del generico punto appartenente alla scia rispetto alla superficie dell'ala.

4.3 Integrazione del modello aerodinamico interazionale nel modello ROM per l'ala

In questo paragrafo si intende illustrare la metodologia proposta per l'inclusione degli effetti dell'aerodinamica interazionale nel modello ROM descritto in precedenza.

In particolare si intende includere nella descrizione dei carichi aerodinamici di ala gli effetti dovuti all'interazione con la scia rilasciata dal rotore. Il metodo sviluppato si basa sul calcolo della velocità che la presenza del rotore e della sua scia induce sulla superficie dell'ala. Infatti, utilizzando una sorta di principio di sovrapposizione degli effetti è possibile decomporre la velocità nei punti appartenenti alla superficie dell'ala in tre componenti nella seguente forma

$$\vec{v}(\vec{x}_m, t) = \vec{v}_{cr}(\vec{x}_m) + \vec{v}^d(\vec{x}_m, t) + \vec{v}_I(\vec{x}_m, t) \tag{4.9}$$

nella quale $\vec{v}_{cr} = \vec{V}_\infty$ è la velocità di crociera del veicolo, $\vec{v}_d$ indica la velocità di deformazione elastica e $\vec{v}_I$ rappresenta la velocità che il rotore e la sua scia inducono, istante per istante, nei centroidi dell'ala.

Il calcolo della velocità indotta viene effettuato, utilizzando il solutore BEM al passo nel tempo descritto nel presente capitolo, sulla configurazione di equilibrio non perturbata del sistema ala/rotore in moto orizzontale rettilineo uniforme. In altri termini, per il calcolo del contributo alla velocità dovuto agli effetti interazionali non vengono considerati gli effetti delle deformazioni elastiche dell'ala. Questa approssimazione viene fatta allo scopo poter integrare le informazioni relative al campo di velocità che il rotore induce sull'ala nel modello ROM per il calcolo dei carichi aerodinamici di ala illustrato nel capitolo 3.

Sviluppando il vettore velocità ed il versore normale in ogni punto dell'ala come somma di un contributo corrispondente alla condizione di equilibrio e di uno perturbativo, eliminando i termini che contengono solo variabili all'equilibrio ed i termini di ordine superiore al primo, è possibile riscrivere le condizioni al contorno sull'ala tenendo conto della velocità indotta (che viene appunto considerata come contributo all'equilibrio):

$$\begin{aligned}
\chi_m(t) &= \mathbf{v}(\mathbf{x}_m, t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}_m) = \\
&= \mathbf{v}_0(\mathbf{x}_{m_{eq}}, t) \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x}_{m_{eq}}, t) + \mathbf{v}'(\mathbf{x}_{m_{eq}}, t) \cdot \mathbf{n}_0(\mathbf{x}_{m_{eq}}) = \qquad (4.10) \\
&= \left[\mathbf{v}_{cr}(\mathbf{x}_{m_{eq}}) \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x}_{m_{eq}}, t) + \mathbf{v}^d(\mathbf{x}_{m_{eq}}, t) \cdot \mathbf{n}_0(\mathbf{x}_{m_{eq}})\right] + \mathbf{v}_I(\mathbf{x}_{m_{eq}}, t) \cdot \mathbf{n}'(\mathbf{x}_{m_{eq}}, t)
\end{aligned}$$

nella quale le grandezze si intendo espresse in componenti nel sistema di riferimento ala indeformata. Come si nota, il termine tra parentesi quadre dell'ultima uguaglianza dell'equazione 4.10 coincide con le condizioni al contorno sull'ala scritte in assenza di velocità indotta (si veda paragrafo 3.5). Pertanto le condizioni al contorno possono essere riscritte come somma di due contributi

$$\chi_m(t) = \chi_m^0(t) + \chi_m^I(t) \; . \qquad (4.11)$$

(4.12)

Il termine χ_m^0 può essere sviluppato secondo quanto visto nel paragrafo 3.5 per ottenere l'operatore aerodinamico che lega le forze generalizzate di ala alle variabili lagrangiane che ne descrivono la

deformazione elastica. Per quanto riguarda il contributo legato alla velocità indotta, esso assume la forma

$$\chi_m^I(t) \;=\; \sum_{n=1}^{N_m^w} \mathbf{v}_I(t) \cdot \frac{\partial \mathbf{n}(\mathbf{x}_m)}{\partial q_n^w} q_n^w(t) \;, \tag{4.13}$$

esprimendo dunque la perturbazione del versore normale in funzione delle variabili lagrangiane di ala. Raccogliendo nel vettore $\boldsymbol{\chi}^I$ le condizioni al contorno su tutti i centroidi di ala si ottiene la forma matriciale

$$\boldsymbol{\chi}^I(t) = \mathbf{B}^I(t)\, \mathbf{q}^w(t) \;, \tag{4.14}$$

nella quale la matrice $\mathbf{B}^I$ ha dimensioni $[N_c^w \times N_m^w]$. Tale matrice risulta tempo–variante per via della presenza della $\mathbf{v}_I$: infatti, la velocità indotta sull'ala dipende dalla posizione relativa tra rotore ed ala.

La natura periodica dell'interazione ala/rotore consente di sviluppare gli elementi della matrice $\mathbf{B}^I$ in serie di Fourier

$$\mathbf{B}^I(t) = \mathbf{B}_0^I + \sum_{i=1}^{N_I} \left[\mathbf{B}_{C_i}^I \, \cos(i\Omega t) + \mathbf{B}_{S_i}^I \, \sin(i\Omega t) \right] \tag{4.15}$$

e, introducendo le variabili ausiliarie

$$\begin{cases} \mathbf{q}_c^i \;=\; \mathbf{q}^w \, \cos(i\Omega t) \\ \mathbf{q}_s^i \;=\; \mathbf{q}^w \, \sin(i\Omega t) \end{cases} \;, \tag{4.16}$$

è possibile riscrivere

$$\boldsymbol{\chi}^I(t) = \mathbf{B}_0^I \, \mathbf{q}^w + \sum_{i=1}^{N_I} \left[\mathbf{B}_{C_i}^I \, \mathbf{q}_c^i(t) + \mathbf{B}_{S_i}^I \, \mathbf{q}_s^i(t) \right] \;. \tag{4.17}$$

Come si nota è stato possibile ottenere, un legame a coefficienti costanti tra il vettore delle condizioni al contorno sull'ala dovute alla velocità indotta e l'insieme costituito dalle variabili lagrangiane di ala e le varibili ausiliarie introdotte con lo sviluppo in serie di Fourier.

Le condizioni al contorno definite possono essere interpretate esattamente come quelle viste nel paragrafo 3.5 e danno luogo dunque ad un contributo alle forze generalizzate dovuto alla velocità indotta. Si ha quindi

$$\mathbf{f}^w = \mathbf{f}^0 + \mathbf{f}^I \;, \tag{4.18}$$

nella quale si è definito con $\mathbf{f}^I$ tale contributo, mentre $\mathbf{f}^0$ è il contributo alle forze generalizzate dovuto al moto di deformazione elastica dell'ala e calcolato con il modello ROM introdotto nel capitolo 3. Passando nel dominio della frequenza è possibile scrivere

$$\tilde{\mathbf{f}}^I(jk) = \mathbf{E}_f\, \mathbf{E}_p(jk)\, \mathbf{E}_\phi(jk)\, \tilde{\boldsymbol{\chi}}^I \tag{4.19}$$

e, utilizzando la 4.17

$$\tilde{\mathbf{f}}^I(jk) = \mathbf{E}_0^I\, \tilde{\mathbf{q}}^w + \sum_{i=1}^{N_I} \left[\mathbf{E}_{C_i}^I\, \tilde{\mathbf{q}}_c^i + \mathbf{E}_{S_i}^I\, \tilde{\mathbf{q}}_s^i\right] \tag{4.20}$$

nella quale le matrici

$$\begin{cases} \mathbf{E}_0^I(jk) &= \mathbf{E}_f\, \mathbf{E}_p(jk)\, \mathbf{E}_\phi(jk)\, \mathbf{B}_0^I \\ \mathbf{E}_{C_i}^I(jk) &= \mathbf{E}_f\, \mathbf{E}_p(jk)\, \mathbf{E}_\phi(jk)\, \mathbf{B}_{C_i}^I \\ \mathbf{E}_{S_i}^I(jk) &= \mathbf{E}_f\, \mathbf{E}_p(jk)\, \mathbf{E}_\phi(jk)\, \mathbf{B}_{S_i}^I \end{cases} \tag{4.21}$$

sono in numero pari a N_I (numero di armoniche utilizzato per lo sviluppo in serie della velocità indotta $\mathbf{v}_I$) e dipendono dalla frequenza in forma trascendente per via dei contributi legati alla scia dell'ala. È dunque possibile applicare a queste matrici l'approssimazione razionale matriciale introdotta nel paragrafo 2.2.4 per ottenere

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}}^I(\bar{s}) &= \left[\mathbf{A}_2^0\, \bar{s}^2 + \mathbf{A}_1^0\, \bar{s} + \mathbf{A}_0^0\right] \tilde{\mathbf{q}}^w + \mathbf{C}^0\, \tilde{\mathbf{r}}_0 + \\ &+ \sum_{i=1}^{N_I} \left\{ \left[\mathbf{A}_2^{C_i}\, \bar{s}^2 + \mathbf{A}_1^{C_i}\, \bar{s} + \mathbf{A}_0^{C_i}\right] \tilde{\mathbf{q}}_c^i + \mathbf{C}^{C_i}\, \tilde{\mathbf{r}}_c^i + \left[\mathbf{A}_2^{S_i}\, \bar{s}^2 + \mathbf{A}_1^{S_i}\, \bar{s} + \mathbf{A}_0^{S_i}\right] \tilde{\mathbf{q}}_s^i + \mathbf{C}^{S_i}\, \tilde{\mathbf{r}}_s^i \right\}. \end{aligned} \tag{4.22}$$

La dinamica degli stati aggiunti è regolata dal seguente set di equazioni

$$\begin{cases} \bar{s}\, \tilde{\mathbf{r}}_0 &= \mathbf{A}_0\, \tilde{\mathbf{r}}_0 + \mathbf{B}_0\, \tilde{\mathbf{q}}^w \\ \bar{s}\, \tilde{\mathbf{r}}_c^i &= \mathbf{A}^{C_i}\, \tilde{\mathbf{r}}_c^i + \mathbf{B}^{C_i}\, \tilde{\mathbf{q}}^w \\ \bar{s}\, \tilde{\mathbf{r}}_s^i &= \mathbf{A}^{S_i}\, \tilde{\mathbf{r}}_s^i + \mathbf{B}^{S_i}\, \tilde{\mathbf{q}}^w \end{cases} \tag{4.23}$$

Antitrasformando nel dominio del tempo e utilizzando il legame tra le variabili lagrangiane di ala $\mathbf{q}^w$ e le variabili ausiliarie introdotte nella 4.16 si ottiene il seguente modello ROM lineare a coefficienti periodici per il contributo ai carichi dovuto alla velocità indotta

$$\begin{cases} \mathbf{f}_a^{w^I}(t) = \mathbf{D}_2^{w^I}\, \ddot{\mathbf{q}}^w + \mathbf{D}_1^{w^I}\, \ddot{\mathbf{q}}^w + \mathbf{D}_0^{w^I}\, \mathbf{q}^w + \mathbf{C}^{w^I}\, \mathbf{r}^{w^I} \\ \\ \dot{\mathbf{r}}^{w^I} = \mathbf{A}^{w^I}\, \mathbf{r}^{w^I} + \mathbf{H}_0^{w^I}\, \mathbf{q}^w \end{cases}, \tag{4.24}$$

nella quale

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_2^{w^I} &= \mathbf{A}_2^0 + \sum_{i=1}^{N_I} \left\{ \mathbf{A}_2^{C_i} \left[-(i\Omega)^2 \cos(i\Omega t) \right] + \mathbf{A}_2^{S_i} \left[-(i\Omega)^2 \sin(i\Omega t) \right] \right\} \\
\mathbf{D}_1^{w^I} &= \mathbf{A}_1^0 + \sum_{i=1}^{N_I} \left\{ \mathbf{A}_1^{C_i} \left[-(i\Omega) \sin(i\Omega t) \right] + \mathbf{A}_1^{S_i} \left[(i\Omega) \cos(i\Omega t) \right] \right\} \\
\mathbf{D}_0^{w^I} &= \mathbf{A}_0^0 + \sum_{i=1}^{N_I} \left\{ \mathbf{A}_0^{C_i} \left[\cos(i\Omega t) \right] + \mathbf{A}_0^{S_i} \left[\sin(i\Omega t) \right] \right\} .
\end{aligned}$$

Per quanto riguarda gli stati aggiunti, avendo definito il vettore $\mathbf{r}^{w^I} = \{\mathbf{r}_0,\, \mathbf{r}_c^i,\, \mathbf{r}_s^i\}^{\mathrm{T}}$ che raccoglie gli stati aggiunti relativi a tutti i contributi armonici introdotti sviluppando in serie la matrice delle condizioni al contorno, si ottiene

$$\mathbf{A}^{w^I} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{C_i} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^{S_i} \end{bmatrix} \quad e \quad \mathbf{H}_0^{w^I} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}^{C_i} \\ \mathbf{B}^{S_i} \end{bmatrix} . \tag{4.25}$$

In definitiva, la metodologia sviluppata consente di integrare le informazioni sul campo di velocità attorno all'ala di una configurazione ala/rotore ottenute mediante un solutore al passo nel tempo che tenga in conto gli aspetti globali dell'interazione scia/corpo, nel modello aerodinamico ROM per il calcolo dei carichi aerodinamici agenti sull'ala. È dunque possibile impostare la definizione del modello aeroelastico (si veda paragrafo 6) per il sistema completo ala/rotore nel quale si tenga in conto, seppure in maniera approssimata, degli effetti aerodinamici interazionali, oltre che di quelli cinematici. È da notare che tale integrazione è stata possibile grazie alle peculiarità del solutore BEM utilizzato che consente di definire, nel dominio della frequenza, un operatore aerodinamico che fornisce le funzioni di trasferimento tra condizioni al contorno (di natura perturbativa o legate alla velocità indotta intesa come ingresso esterno congelato) sull'ala (o sul rotore) ed i corrispondenti carichi aerodinamici.

Capitolo 5

Modelli aeroelastici per il sistema ala/rotore

Lo sviluppo di uno strumento per lo studio della stabilità aeroelastica di un sistema ala/rotore richiede la definizione del modello aeroelastico del sistema, ovvero l'accoppiamento delle equazioni che descrivono i carichi aerodinamici agenti sull'ala e sul rotore in funzione dei gradi di libertà del sistema con le equazioni della dinamica strutturale. Scrivendo tali equazioni in forma lineare rispetto ai gradi di libertà del sistema si può definire il sistema aeroelastico nella forma di un set di equazioni differenziali lineari a coefficienti periodici del quale è possibile studiare la stabilità mediante tecniche basata sul calcolo degli autovalori.

La configurazione di equilibrio di cui si intende studiare la stabilità aeroelastica è quella di moto orizzontale uniforme pertanto si assume fattore di carico pari ad uno, ovvero non si considerano forze d'inerzia derivanti da manovre e/o raffiche. È dunque lecito limitare l'analisi del veicolo ad un modello equivalente costituito da uno schema multicorpo ala/albero/rotore con la radice dell'ala incastrata ad un supporto fisso; questo consente di trascurare i moti di corpo rigido della fusoliera (a frequenza nulla e scarsamente accoppiati con quelli elastici oggetto di questo studio) e di porre l'enfasi sulla dinamica propria del sistema multicorpo precedentemente menzionato. Lo stato dell'arte in ambito aeroelastico indica che molti studi fatti sui tiltrotor attraverso codici commerciali come UMARC e CAMRAD hanno avuto come base di confronto proprio test in galleria del vento effettuati con modelli tipo quello adottato nel presente lavoro, in modo da validare la teoria prima di inserire le complessità introdotte dal moto rigido dell'intero veicolo.

Come già accennato, l'ala è pensata come una trave elastica biflesso-torsionale la cui cinematica è descritta dagli spostamenti elastici nel piano (lag bending), fuori del piano (flap bending) e dalla

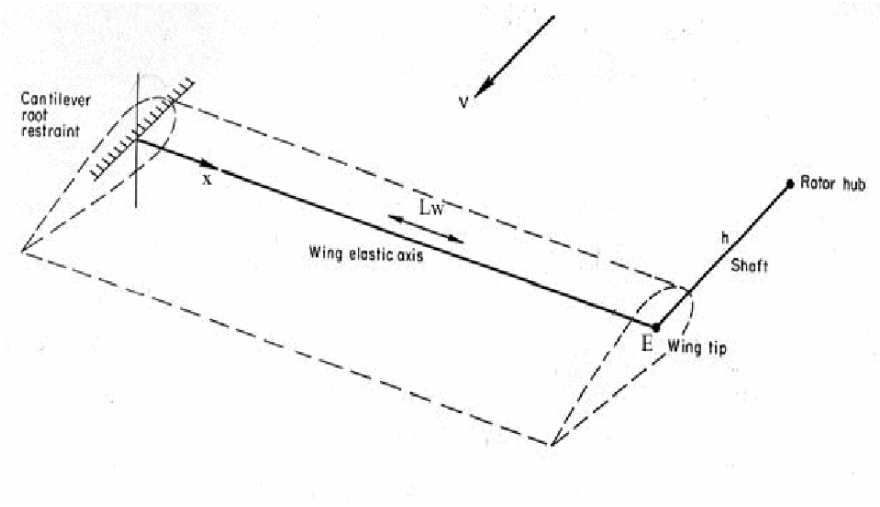

Figura 5.1: Modello ala/albero.

torsione; l'albero è invece considerato un corpo rigido connesso al tip alare il cui compito è quello di trasmettere al rotore il moto di trascinamento dell'ala e a quest'ultima i carichi rotorici (inerziali ed aerodinamici) in corrispondenza al tip. Di fatto, pur trascurando la dinamica propria del pilone si tiene conto della sua presenza in termini inerziali dal momento che, essendo in un tiltrotor (e nei propulsori azimutali) i motori e gli organi di trasmissione localizzati alle estremità alari, la massa e i momenti di inerzia delle nacelle (rappresentate dall'albero) sono dominanti su quelle dell'ala.

Per quanto riguarda il rotore, se ne considera uno di tipo *articolato* schematizzato attraverso un modello a di elasticità parametri concentrati; in particolare ciascuna delle N_b pale rotoriche è vista come un corpo rigido connesso al mozzo tramite molle che oltre a simulare l'elasticità della struttura, consentono moti nel piano (lag) e fuori del piano (flap), mentre in prima approssimazione si suppone che la torsione sia impedita in quanto, per le rigidezze torsionali in gioco nei sistemi in esame essa ha una minore influenza del comportamento aeroelastico (si pensi ad esempio alla tipica instabilità dei velivoli tiltrotor dovuta all'accoppiamento tra il moto di lag di pala e quello di flap di ala).

Nel presente capitolo verranno descritti i modelli aeroelastici del rotore e dell'ala partendo dalla definizione del modello strutturale ed illustrando poi l'accoppiamento con il calcolo dei carichi aerodinamici e, per l'ala, anche con i carichi che il rotore le trasmette tramite il mozzo.

5.1 Modello aeroelastico del rotore

Nelle sezioni che seguono verrà posta l'attenzione sui modelli strutturali utilizzati per il rotore e sul loro accoppiamento con i modelli aerodinamici descritti nelle sezioni precedenti.

Il rotore è di tipo articolato ed i gradi di libertà di ciascuna delle N_b pale che lo costituiscono sono gli angoli di flappeggio β e di brandeggio (*lag*) γ.

Ciascuna pala è schematizzata come corpo rigido dotato di due gradi di libertà e connesso all'albero, in corrispondenza del mozzo, mediante due cerniere, dotate di molle, che simulano l'effetto dell'elasticità .

Le pale sono sfasate spazialmente di un angolo pari all'azimuth Ψ e, come si è visto nello sviluppo dei modelli per l'aerodinamica, la cinematica di ciascuna di esse è influenzata dal moto di trascinamento dell'ala in modo diverso a seconda della posizione angolare. Pertanto sarà essenziale nel seguito descrivere la cinematica della catena multicorpo per comprendere le interazioni dinamiche e cinematiche tra gli elementi che la costituiscono.

5.1.1 Modello strutturale del rotore

5.1.2 Equazioni della dinamica per i corpi rigidi

Il moto di un corpo rigido in un riferimento inerziale R_I è governato dalle equazioni cardinali della dinamica (equazioni di Eulero):

$$\begin{cases} \dot{\vec{q}}^I = \vec{f}^I \\ \\ \dot{\vec{h}}^I_O + \vec{v}_O \times \vec{q}^I = \vec{m}^I_O \end{cases} \tag{5.1}$$

con:

$$\begin{cases} \vec{q}^I = m\vec{v}^I_G \\ \\ \vec{h}^I_O = J^I_O\vec{\omega}^I + m(\vec{r}^I_{OG} \times \vec{v}^I_O) \end{cases} \tag{5.2}$$

dove $\vec{q}^I$ e $\vec{h}^I_O$ sono rispettivamente la quantità di moto ed il momento della quantità di moto rispetto ad un generico polo mobile O. I vettori $\vec{v}^I_O$, $\vec{v}^I_G$, $\vec{\omega}^I$ rappresentano la velocità del polo, la velocità

del baricentro e la velocità angolare del corpo rigido; m e J_O^I sono rispettivamente la massa ed il tensore momento di inerzia riferito al polo O e agli assi inerziali. Infine con i vettori $\vec{f}^I$ e $\vec{m}_O^I$ si sono indicate la forza ed il momento esterni applicati. L'apice I indica che le grandezze vettoriali o tensoriali sono osservate nel sistema di riferimento inerziale $\mathcal{R}_I$. Sostituendo $\vec{q}^I$ e $\vec{h}_O^I$ nelle equazioni e ricavando l'immagine delle stesse nel sistema di riferimento mobile solidale con il generico corpo rigido[1] si ottiene (eliminado l'apice I per le grandezze immagine nel riferimento mobile)

$$\begin{cases} m(\dot{\mathbf{v}}_G + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_G) = \mathbf{f} \\ \mathbf{J}_O\dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{J}_O\boldsymbol{\omega}) + m\mathbf{r}_{OG} \times (\dot{\mathbf{v}}_O + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_O) = \mathbf{m}_O \end{cases} \tag{5.3}$$

Il motivo per cui viene utilizzata l'immagine, nel riferimento mobile, delle equazioni della dinamica risiede nel fatto che l'immagine del tensore momento d'inerzia $\mathbf{J}_O$ in tale riferimento non dipende dal tempo, consentendo una notevole semplificazione della formulazione.

5.1.3 Cinematica della catena ala-albero-rotore

Ogni pala rotorica è rappresentata come corpo rigido, in moto nel sistema di riferimento disco $\mathcal{R}_D$, connesso all'albero in corrispondenza del mozzo mediante due cerniere dotate di molle che simulano l'effetto dell'elasticità. Il comportamento dinamico è governato dalle due equazioni cardinali, la cui immagine nel sistema di riferimento pala è :

$$\begin{cases} m_b\left(\dot{\mathbf{v}}_{G_b} + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_{G_b}\right) = \mathbf{f}_b \\ \mathbf{J}_b\dot{\boldsymbol{\omega}}_b + \boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{J}_b\boldsymbol{\omega}_b) + m_b\mathbf{r}_{HG_b} \times \left(\dot{\mathbf{v}}_H + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_H\right) = \mathbf{m}_b \end{cases} \tag{5.4}$$

avendo scelto come polo dei momenti il punto H, ovvero il mozzo.

È evidente che il problema dinamico richiede la caratterizzazione della cinematica del rotore, che a sua volta, è funzione della cinematica di tutti i corpi a monte; è quindi necessario ricavare questi ingredienti cinematici inquadrando il problema nell'ambito generale delle catene multibody. In questo paragrafo si intende valutare le grandezze cinematiche di rotore che compaiono nella 5.4 in funzione dei gradi di libertà del sistema ala/rotore ovvero gli spostamenti elastici del tip alare e i gradi di libertà di pala.

Gli sviluppi che seguono ricalcano quanto già visto per la definizione dell'operatore cinematico

[1] Si ricorda che la derivata temporale $\frac{d}{dt}$ di una grandezza vettoriale $\mathbf{A}$ osservata da un riferimento assoluto è collegata alla derivata $\frac{\partial}{\partial t}$ della stessa grandezza vista dal riferimento mobile, per il tramite della $\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A}$.

nel paragrafo 2.2.5. Il polo scelto per scrivere la seconda equazione di bilancio è il mozzo; esso non è un punto fisso nello spazio in quanto risente della cinematica dell'ala. In particolare il mozzo appartiene all'albero che viene schematizzato come un corpo rigido; pertanto la velocità del mozzo è esprimibile in funzione della velocità di un qualunque altro punto dell'albero mediante l'espressione dell'atto di moto rigido:

$$\vec{v}_H = \vec{v}_P + \vec{\omega}_{sh} \times (\vec{x}_H - \vec{x}_P) \tag{5.5}$$

dove $\vec{v}_H$ e $\vec{v}_P$ sono rispettivamente la velocità assoluta del mozzo e del centro elastico al tip alare, e $\vec{\omega}_{sh}$ è la velocità angolare assoluta dell'albero dovuta alla deformazione elastica della sezione alare (in particolare all'estremità alare) cui è solidale; essa coincide con la velocità angolare assoluta dell'ultima sezione di ala.

In accordo con quanto riportato nel Rif. [16], la velocità angolare del tip alare, sviluppata al secondo ordine, è esprimibile, nel riferimento ala deformata, attraverso le seguenti componenti:

$$\begin{aligned} \omega_{x'} &= \dot{\phi} \\ \omega_{y'} &= \dot{v}' \sin(\Theta + \phi) - \dot{w}' \cos(\Theta + \phi) \\ \omega_{z'} &= \dot{v}' \cos(\Theta + \phi) + \dot{w}' \sin(\Theta + \phi) \end{aligned} \tag{5.6}$$

dove le variabili cinematiche sono quelle dell'ultima sezione (cioè per x=L_w, con L_w lunghezza dell'ala).

La velocità del centro elastico, nello stesso riferimento, ha componenti date da:

$$\mathbf{v}_P^{\mathcal{R}_{wtip}} = \mathbf{T} \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \dot{v} + V_\infty \\ \dot{w} \end{array} \right\} \tag{5.7}$$

dove anche qui le variabili cinematiche di ala che intervengono nella matrice $\mathbf{T}$ sono da intendersi calcolate al tip.

Quindi in componenti pala la velocità dell'hub è :

$$\mathbf{v}_H^{\mathcal{R}_b} = \mathbf{R}_{bw_{tip}} \left(\mathbf{v}_P^{\mathcal{R}_{w_{tip}}} + \mathbf{\Omega}_{tip_\wedge}^{\mathcal{R}_{w_{tip}}} \mathbf{r}_{PH}^{\mathcal{R}_{wtip}} \right) \tag{5.8}$$

in cui $\mathbf{R}_{bw_{tip}}$ è la matrice di rotazione che porta dal riferimento proprio dell'ultima sezione di ala in configurazione deformata, a quello pala[2], mentre $\mathbf{\Omega}_{tip_\wedge}^{\mathcal{R}_{w_{tip}}}$ è la matrice emisimmetrica associata al

[2]Per approfondimenti su questa e altre matrici di rotazione introdotte in seguito, vedasi appendice C.

prodotto vettore $\vec{\omega}_{w_{tip}} \times (\vec{x}_P - \vec{x}_H)$:

$$\mathbf{\Omega}_{tip_\wedge}^{\mathcal{R}_{w_{tip}}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z'} & \omega_{y'} \\ \omega_{z'} & 0 & -\omega_{x'} \\ -\omega_{y'} & \omega_{x'} & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.9}$$

Per quanto attiene la velocità del baricentro, essa è data da:

$$\vec{v}_{G_b} = \vec{v}_H + \vec{\omega}_b \times \vec{r}_{HG_b} \tag{5.10}$$

espressione che con l'ausilio della (5.5) diventa:

$$\vec{v}_{G_b} = \vec{v}_P + \vec{\omega}_b \times \vec{r}_{HG_b} + \vec{\omega}_{wtip} \times \vec{r}_{PH} \tag{5.11}$$

che mostra l'influenza del moto dell'ala, per via dei gradi di libertà dell'ultima sezione, sulla cinematica di pala. In componenti pala, la 5.10 diventa:

$$\mathbf{v}_{G_b}{}^{\mathcal{R}_b} = \mathbf{v}_H{}^{\mathcal{R}_b} + \mathbf{\Omega}_b^{\mathcal{R}_b}\, \mathbf{r}_{HG_b}^{\mathcal{R}_b} \tag{5.12}$$

Dall'espressione della velocità del baricentro risulta evidente l'influenza cinematica del moto di trascinamento dell'ala sulla cinematica (e dunque sulla dinamica) della pala per il tramite del termine $\mathbf{v}_H$.

La velocità angolare assoluta della pala $\vec{\omega}_b$, è ottenuta sommando la velocità angolare relativa rispetto al disco[3] $\vec{\omega}_{b_{rel}}$ e quella di trascinamento $\vec{\omega}_{w_{tip}}$ dovuta al moto del tip alare[4]. Pertanto in termini invarianti si ha:

$$\vec{\omega}_b = \vec{\omega}_{w_{tip}} + \vec{\omega}_{b_{rel}} \tag{5.13}$$

Usando la matrice di rotazione $\mathbf{R}_{bwtip}$, dalla (5.6) è ottenibile la $\boldsymbol{\omega}_{wtip}{}^{\mathcal{R}_b}$.

La velocità angolare relativa, in componenti pala, è invece data dalla sequenza dagli angoli di Eulero γ, ψ, β ed è espressa da:

$$\boldsymbol{\omega}_{rel}^{\mathcal{R}_b} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\beta} \\ \sin\beta(\dot{\gamma} + \Omega) \\ \cos\beta(\dot{\gamma} + \Omega) \end{array} \right\}. \tag{5.14}$$

[3]Qui entra il moto rigido di rotazione e la dinamica della pala nel moto relativo.

[4]Qui invece entra tutta la dinamica di ala.

5.1.4 Dinamica delle pale di rotore

Come si è visto nel paragrafo precedente le equazioni 5.5, 5.11 e 5.13 consentono di esprimere tutti gli elementi incogniti che compaiono nelle equazioni cardinali della dinamica del corpo rigido in funzione dei gradi di libertà del sistema ala/rotore.
Per la completa determinazione dei termini che compaiono nelle equazioni cardinali occorre esplicitare la sollecitazione esterna agente su ciascuna pala: essa è data dalla sovrapposizione dei carichi aerodinamici $(\mathbf{f}_{ab}, \mathbf{m}_{ab})$, del peso $(\mathbf{f}_{wb}, \mathbf{m}_{wb})$ e della reazione vincolare che l'albero esercita sulla pala $(\mathbf{f}_{rb}, \mathbf{m}_{rb})$

$$\mathbf{f}_b = \mathbf{f}_{ab} + \mathbf{f}_{wb} + \mathbf{f}_{rb} \tag{5.15}$$

$$\mathbf{m}_b = \mathbf{m}_{ab} + \mathbf{m}_{wb} + \mathbf{m}_{rb} \tag{5.16}$$

dove la sollecitazione dovuta al peso ha espressione

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{wb} = m_b \mathbf{g} \\ \\ \mathbf{m}_{wb} = \mathbf{r}_{HGb} \times \mathbf{f}_{wb} \end{cases} . \tag{5.17}$$

Per semplicità di notazione sono stati eliminate le indicazioni del sistema di riferimento nel quale sono intese le componenti dei vettori che compaiono nelle 5.15 e 5.17 sottintendendo che ci si riferisce al sistema di riferimento della pala i–esima.

Come detto, dalla prima equazione cardinale si ricavano le forze di reazione che l'albero esercita sulla pala: esse serviranno nel seguito per valutare le azioni che il rotore trasmette all'ala (meccanismo di trasferimento dei carichi dal rotore all'ala)

$$\mathbf{f}_{rb} = m_b \left(\dot{\mathbf{v}}_{G_b} + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_{G_b} \right) - \mathbf{f}_{wb} - \mathbf{f}_{ab} \tag{5.18}$$

Per quanto riguarda l'equazione dei momenti il momento di reazione è dato, nel sistema di riferimento pala, dalle due componenti di reazione delle molle di flappeggio e lag e dal momento vincolare m_θ che impedisce la torsione della pala:

$$\mathbf{m}_{rb}^{\mathcal{R}_b} = \begin{Bmatrix} -K_\beta \beta \\ m_\theta \\ -K_\gamma \gamma \end{Bmatrix} \tag{5.19}$$

In particolare il momento vincolare può essere calcolato dalla seconda componente della seconda equazione cardinale risolta rispetto a $\mathbf{m}_{rb}$.

In definitiva quindi partendo dalle 5.18 e 5.19 è possibile calcolare le forze e i momenti che il rotore trasmette all'ala. In particolare, tutte le componenti delle forze e dei momenti possono essere espresse in funzione dei gradi di libertà del sistema. Per quanto riguarda il contributo inerziale delle le forze si utilizzano le relazioni cinematiche 5.12 e 5.13 che consentono di esprimere la velocità del baricentro della pala e la velocità angolare della pala in funzione degli spostamenti elastici al tip alare e dei gradi di libertà elastici della pala. Naturalmente, nell'ottica di un'analisi di stabilità, tale procedura prevede di perturbare le espressioni citate attorno ad una configurazione di equilibrio e di mantenere solo i termini di ordine non superiore al primo. In questo modo per la parte inerziale dell'equazione 5.18 e per la seconda componente della seconda equazione cardinale risolta rispetto a $\mathbf{m}_{rb}$ (per ottenere il momento torcente) si ottiene un legame lineare con i gradi di libertà del sistema. Per quanto riguarda la parte inerziale dei momenti di flappeggio e lag essi sono già espressi in funzione dei gradi di libertà di pala (equazione 5.19). Infine la definizione del modello ROM per i carichi aerodinamici di rotore consente di esprimere anche il contributo delle $\mathbf{f}_{ab}$ e $\mathbf{m}_{ab}$ mediante una forma lineare in funzione dei gradi di libertà del sistema.

In conclusione, la dinamica del rotore è descritta da $2N_b$ equazioni differenziali in cui compaiono i gradi di libertà di ala (calcolati nell'ultima sezione) a causa del moto di trascinamento dell'ala; questo induce coefficienti tempo–varianti nelle equazioni nonostante esse siano state scritte in un riferimento solidale alla pala.

L'ultimo passo per la completa definizione della dinamica delle pale consiste nell'esplicitare i carichi aerodinamici $(\mathbf{f}_{ab}, \mathbf{m}_{ab})$ in funzione dei gradi di libertà del sistema ala-proprotor. Data la differente struttura del modello ROM basato sul solutore aerodinamico di Greenberg rispetto a quello basato sul metodo agli elementi di contorno, è necessario operare in modo diverso nei due casi per estrarre dal vettore dei carichi aerodinamici quelli da inserire nell'equazioni della dinamica di pala.

L'identificazione del modello ROM basato sul solutore di Greenberg (equazione 2.68) ha consentito di scrivere la seguente espressione per i carichi aerodinamici agenti sulla generica pala nel dominio

del tempo

$$\begin{cases} \mathbf{B}_{ak}(t) = \mathbf{D}_2(\psi_k)\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_1(\psi_k)\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_0(\psi_k)\,\mathbf{x} + c_1\,\rho\,\mathbf{C}\,\mathbf{r} \\ \\ \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\lambda}\,\left[\mathbf{A}\,\mathbf{r} + \mathbf{H}_1(\psi_k)\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_0(\psi_k)\,\mathbf{x}\right], \end{cases} \tag{5.20}$$

nella quale il vettore $\mathbf{B}_{ak}(t)$ è definito come

$$\mathbf{B}_{ak}(t) = \left\{ \begin{array}{c} F^x \\ F^z \\ M^z \\ M^x \\ M^y \end{array} \right\}^{\mathcal{R}_{bk}} . \tag{5.21}$$

Per il tipo di schematizzazione adottata per il rotore si è visto che le uniche equazioni necessarie a determinare la dinamica delle pale sono le equazioni del flappeggio e del lag; pertanto è necessario estrarre dal generico vettore $\mathbf{B}_{ak}(t)$ i momenti attorno all'asse x_b (flappeggio) e z_b (lag) premoltiplicandolo per la matrice

$$\mathbf{FF}_3 = \left[\begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right] \tag{5.22}$$

ottenendo quindi

$$\begin{cases} \mathbf{m}^{2D}_{ab\ k}(t) = \left\{ \begin{array}{c} M^{x_b} \\ M^{z_b} \end{array} \right\} = \mathbf{FF}_3\,\left[\mathbf{D}_2(\psi_k)\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_1(\psi_k)\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_0(\psi_k)\,\mathbf{x} + c_1\,\rho\,\mathbf{C}\,\mathbf{r}\right] \\ \\ \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\lambda}\,\left[\mathbf{A}\,\mathbf{r} + \mathbf{H}_1(\psi_k)\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_0(\psi_k)\,\mathbf{x}\right] \end{cases} . \tag{5.23}$$

Si noti che i momenti aerodinamici risultano espressi nel sistema di riferimento solidale alla pala k-esima. Inoltre, data la peculiarità del solutore aerodinamico utilizzato, lo stesso procedimento vale per tutte le pale, ciò che cambia è naturalmente il valore di ψ_k che compare nel legame cinematico tra velocità di sezione e gradi di libertà del sistema.

Utilizzando il modello ROM basato sul solutore aerodinamico BEM i momenti che devono essere utilizzati come forzanti della dinamica di pala vengono già calcolati su ogni pala e nel sistema di riferimento della pala che si sta considerando. In particolare, considerando un modo rigido per descrivere la deformazione della pala dovuta al flappeggio e uno per descrivere quella dovuta al

lag si ha che la parte elastica del vettore $\mathbf{e}(t)$ della 3.75 contiene $2 * N_b$ elementi relativi proprio ai momenti di flap e lag. Pertanto, definendo la matrice

$$\mathbf{FF}_3^{3D} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{5.24}$$

nella quale la partizione $\mathbf{0}$ ha dimensioni $[2 * N_b \times 6]$ mentre la partizione $\mathbf{I}$ ha dimensioni $[2 * N_b \times 2 * N_b]$, si ottengono i momenti desiderati nella forma

$$\begin{cases} \mathbf{m}_{ab}^{3D}(t) = \begin{Bmatrix} M^{x_{b1}} \\ M^{z_{b1}} \\ M^{x_{b2}} \\ M^{z_{b2}} \\ \dots \\ M^{x_{bN_b}} \\ M^{z_{bN_b}} \end{Bmatrix} = \mathbf{FF}_3^{3D} \left[\mathbf{D}_2(t)\, \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_1(t)\, \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_0(t)\, \mathbf{x} + c_1\, \rho\, \mathbf{C}\, \mathbf{r} \right] \\ \\ \dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\lambda} \left[\mathbf{A}\, \mathbf{r} + \mathbf{H}_1(t)\, \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_0(t)\, \mathbf{x} \right] \end{cases} . \tag{5.25}$$

5.2 Descrizione del modello aeroelastico dell'ala

5.2.1 Introduzione al modello strutturale di ala

Come accennato precedentemente, l'ala è rappresentata con un modello di continuo monodimensionale dotato di struttura (trave) con gradi di libertà nel piano (lag), fuori del piano (flap) e di torsione; in particolare le equazioni della dinamica strutturale sono ottenute dal modello non lineare di pala elastica hingeless di Hodges e Ormiston [5] in cui si annullano tutti gli effetti connessi alla velocità angolare e quindi al moto rotatorio di quest'ultima.

Di fatto l'ala è vista come una trave rettilinea, di materiale omogeneo ed isotropo a comportamento elastico lineare con caratteristiche di sezione in termini di massa e rigidezza uniformi lungo l'apertura [6]; a quanto detto si aggiungono le ipotesi di:

- assenza di svergolamento costruttivo[7]
- coincidenza tra i punti caratteristici di sezione[8]
- indeformabilità a taglio e warping nullo.

Le equazioni del moto che ne descrivono il comportamento dinamico sono accurate al second'ordine e valgono nell'ambito di moderati spostamenti; esse sono il risultato di un ordering scheme basato sull'ipotesi di considerare i quadrati delle rotazioni, la deformazione torsionale, ed i rapporti $\frac{c}{l_w}$ e $\frac{t}{l_w}$ trascurabili rispetto l'unitá, mentre tutti gli altri termini non lineari sono considerati nel modello. Il processo che conduce alla impostazione del problema elastico in termini di incognite di spostamento prevede i seguenti passi:

[5] Le equazioni di Hodge e Ormiston sono un modello ridotto rispetto quello di Hodges e Dowell che fa riferimento ad una pala avente una configurazione di riferimento svergolata, con angolo di precone costruttivo e caratteristiche di sezione in termini di massa e rigidezza variabili lungo l'apertura, in presenza di offset tra asse elastico, di massa e dei centroidi (tensile axis).

[6] Questa ipotesi é ragionevole se si pensa a quanto detto precedentemente circa le caratteristiche geometriche di un'ala di un tiltrotor; tuttavia nel seguito si terrá conto della presenza del pilone che nella zona terminale altera quanto ipotizzato.

[7] Si considera un calettamento di ala costante lungo l'apertura vista la lunghezza dell'ala in esame.

[8] Essendo l'ala il primo elemento del modello multicorpo che stiamo studiando, in prima approssimazione questa ipotesi consente di evitare eccessive complicazioni nella descrizione cinematica di tutta la catena

- scrittura delle equazioni dell'equilibrio per un concio di trave: esse sono ricavate facendo riferimento alla configurazione deformata e considerando l'equilibrio differenziale di un tratto infinitesimo di ala soggetto ad un campo di forze e momenti;
- scrittura delle azioni di contatto all'asse elastico in funzione degli sforzi σ e τ (relazioni di equivalenza);
- scrittura delle azioni di contatto in funzione delle deformazioni, e quindi degli spostamenti, mediante i legami costitutivi e le relzioni cinematiche.

5.2.2 Equazioni della dinamica strutturale

Seguendo il processo appena descritto e lasciando per il momento indicati i carichi aerodinamici agenti con L_u, L_v, L_w e M_ϕ, si ottengono le equazioni differenziali non lineari alle derivate parziali che, nell'ambito di moderati spostamenti, regolano il comportamento aeroelastico dell'ala (per i dettagli si veda [41]).

$$-T' = L_u \tag{5.26}$$

$$\begin{aligned} &-(Tv')' + \left[EI_{z'} - (EI_{z'} - EI_{y'})\sin^2(\Theta)\right] v'''' + (EI_{z'} - EI_{y'}) \left[\tfrac{sin2\Theta}{2} w'''' + \right. \\ &\left. - \sin 2\Theta(\phi v'')'' + \cos 2\Theta(\phi w'')''\right] + m_w \ddot{v} = L_v \end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned} &-(Tw')' + \left[EI_{y'} + (EI_{z'} - EI_{y'})\sin^2(\Theta)\right] w'''' + (EI_{z'} - EI_{y'}) \left[\tfrac{sin2\Theta}{2} v'''' + \right. \\ &\left. + cos2\Theta(\phi v'')'' + sin2\Theta(\phi w'')''\right] + m_w \ddot{w} = L_w \end{aligned} \tag{5.28}$$

$$(EI_{z'} - EI_{y'})[(w''^2 - v''^2)\frac{sin^2(\Theta)}{2} + v''w''\cos 2\Theta] - GJ\phi'' - {k_A}^2(T\phi')' + \\ +{m_w}{k_m}^2\ddot{\phi} = M_\phi \tag{5.29}$$

In queste equazioni L_u, L_v, L_w e M_ϕ indicano le proiezioni sulla terna *Oxyz* dei carichi aerodinamici per unitá di lunghezza agenti in configurazione deformata. Viene ora riportato un breve commento alle equazioni ottenute per enfatizzare gli accoppiamenti ed i termini non lineari, di natura strutturale, inclusi nel modello.

Innanzitutto si osservi come l'equilibrio nel piano influenzi quello fuori del piano per via dei termini non lineari $-(Tv')'$ e $-(Tw')'$ presenti nelle equazioni di lag e flap rispettivamente; un'altro tipo di accoppiamento elastico é quello tra flappeggio e lag per il tramite del calettamento Θ. I termini responsabili di ció sono lineari e proporzionali alla differenza tra le rigidezze flessionali della trave $(EI_{z'} - EI_{y'})$.

Altri termini non lineari intervengono nell'accoppiamento flessione-torsione e tensione-torsione tramite un coefficiente proporzionale a $(EI_{z'} - EI_{y'})$; in particolare nell'equazione di torsione i termini accoppianti dipendono dalla differenza dei quadrati e dai prodotti delle curvature delle deformate elastiche, mentre per quanto riguarda l'influenza della tensione, si puó dire che questa é trascurabile essendo piccolo il raggio polare di girazione della sezione. Ovviamente anche nelle equazioni di lag e flap si hanno i termini corrispettivi di questi accoppiamenti flesso-tenso-torsionali.

Nel presente lavoro tuttavia, le equazioni usate per modellizzare l'ala sono un sottoprodotto di quelle appena scritte; infatti sebbene in un sistema ala/rotore la presenza del rotore induca carichi assiali non trascurabili rispetto un'ala isolata, questi sono essenzialmente legati ai moti di flap e lag di pala attraverso le reazioni vincolati al mozzo, nonché alla trazione prodotta dal rotore per il tramite dei moti di flappeggio e lag di ala e quindi, in prima approssimazione, possono essere ritenuti trascurabili rispetto alle forze di taglio indotte dal rotore stesso. Inoltre viste le caratteristiche geometriche di una ala di un convertiplano è lecito supporre che la trave sia indeformabile assialmente e quindi in definitiva è possibile trascurare la dinamica assiale ovvero non considerare lo spostamento assiale come grado di libertà del sistema. Inoltre, nell'applicazione al tiltrotor considerato si assumerà una condizione di equilibrio nullo e pertanto i termini legati ai carichi assiali che compaiono nell'equazione di flappeggio saranno esattamente nulli. Quanto detto permette di

ridurre il problema differenziale al seguente:

$$\left[EI_{z'} - (EI_{z'} - EI_{y'})\sin^2(\Theta)\right] v'''' + (EI_{z'} - EI_{y'}) \left[\frac{sin2\Theta}{2} w'''' + \right.$$
$$\left. - sin2\Theta(\phi v'')'' + cos2\Theta(\phi w'')''\right] + m_w \ddot{v} = L_v \tag{5.30}$$

$$\left[EI_{y'} + (EI_{z'} - EI_{y'})\sin^2(\Theta)\right] w'''' + (EI_{z'} - EI_{y'}) \left[\frac{sin2\Theta}{2} v'''' + \right.$$
$$\left. + cos2\Theta(\phi v'')'' + sin2\Theta(\phi w'')''\right] + m_w \ddot{w} = L_w \tag{5.31}$$

$$(EI_{z'} - EI_{y'}) \left[(w''^2 - v''^2)\frac{sin^2(\Theta)}{2} + v'' w'' \cos 2\Theta\right] - GJ\phi'' +$$
$$+ m_w {k_m}^2 \ddot{\phi} = M_\phi \tag{5.32}$$

A queste equazioni vanno aggiunte le condizioni iniziali (IC_s) e le condizioni al contorno (BC_s); in particolare queste ultime sono quelle tipiche omogenee di una trave a sbalzo per quanto riquarda le condizioni geometriche alla radice, mentre al tip le condizioni al contorno naturali tengono conto della presenza del rotore che impone carichi di taglio e di momento; globalmente si hanno quindi BC_s non omogenee che, trattandosi di un problema aeroelastico per il sistema completo ale/rotore, dipendono dalla soluzione del problema stesso, ovvero dai gradi di libertà del sistema. Inoltre, a causa della presenza di contributi tempo–varianti nei carichi che il rotore scarica sull'ala, le condizioni al contorno variano da istante ad istante. Nel capitolo 6 si esporranno in dettaglio le metodologie ed i criteri seguiti per impostare la soluzione di un problema di questo tipo.

5.3 Meccanismo di trasferimento dei carichi tra rotore ed ala

Sulla base di quanto fin qui esposto, appare evidente come la cinematica dell'ala influenzi, per il tramite dell'ultima sezione su cui si pensa disposto l'albero, la cinematica e quindi la dinamica delle pale rotoriche.

L'effetto del rotore sull'ala invece, avviene attraverso le reazioni vincolari scaricate all'hub e riportate al centro elastico del tip alare. Di fatto si ha una interazione tra i *loops* aeroelastici di ala

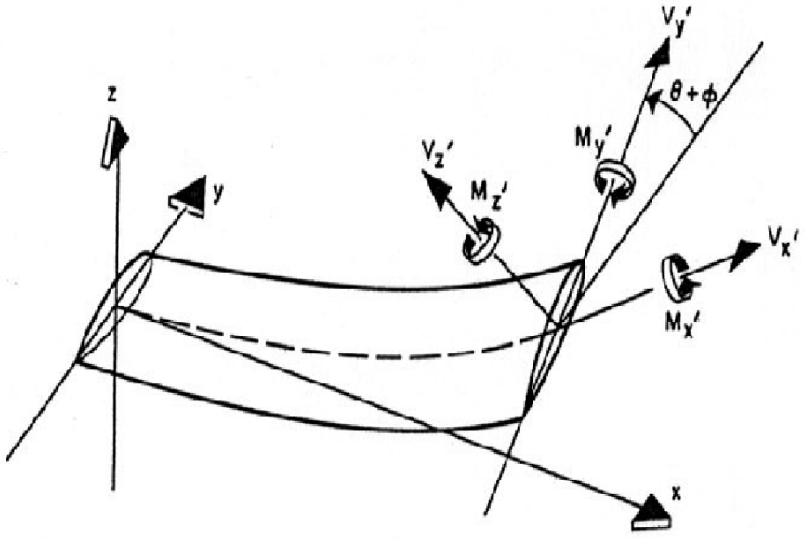

Figura 5.2: Tagli e momenti concentrati al tip dell'ala.

e rotore attraverso la cinematica di ala, ed il risultato di questa interazione è dato dalle reazioni vincolari al mozzo le quali generano carichi al tip alare che forzano la dinamica dell'ala.

Ragionando sul modello di trave biflesso-torsionale, si può dire che la dinamica di ala è forzata dalle condizioni al contorno che istante per istante impongono la presenza di tagli e momenti concentrati; in particolare queste forze sono di tipo *follower* visto che nel tempo seguono un legge dettata dalla dinamica del rotore trascinato dall'ala.

Prima di esaminare il problema da un punto di vista analitico è utile riportare i principali tipi di accoppiamento che insorgono tra ala e rotore a causa di moti indotti dalle pale rotoriche [9].

[9] Quanto riportato è ricavabile in base a semplici considerazioni fisiche, ed è vero in prima approssimazione a meno di ulteriori effetti.

Considerando $\psi = 0°$ nella condizione in cui la pala di riferimento è allineata con l'ala in posizione esterna, si ha:

- flap di pala $\Rightarrow \begin{cases} lag\, di\, ala\; se\; \psi = 0° \; e\; \psi = 180° \\ pitch\, di\, ala\; se\; \psi = 90° \; e\; \psi = 270° \\ lag + pitch\, di\, ala\; per\; qualsiasi\; altro\; \psi \end{cases}$
- lag di pala $\Rightarrow \;\; flap\, di\, ala\; \forall \psi$.

5.3.1 Impostazione del problema: equazioni dei carichi

Il modello analitico di trasferimento dei carichi è ottenibile sulla base delle espressioni fin qui ricavate; infatti dalle equazioni cardinali della dinamica del corpo rigido è possibile determinare le forze ed i momenti che la pala esercita sull'albero in corrispondenza del mozzo

$$\begin{cases} \mathbf{f}_{rb}^{bh} &= -m_b \left(\dot{\mathbf{v}}_{G_b} + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_{G_b}\right) + \mathbf{f}_{wb} + \mathbf{f}_{ab} \\ \mathbf{m}_{rb}^{bh} &= -[\mathbf{J}_b \dot{\boldsymbol{\omega}}_b + \boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{J}_b \boldsymbol{\omega}_b) + m_b \mathbf{r}_{HG_b} \times (\dot{\mathbf{v}}_H + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_H)] + \mathbf{m}_{wb} + \mathbf{m}_{ab} \end{cases} \tag{5.33}$$

Per semplificare la trattazione è conveniente ragionare in termini di componenti; infatti indicando con

$$\mathbf{S}^{(wtip)} = \left\{ \begin{array}{c} t_y \\ t_z \end{array} \right\}^{\mathcal{R}_i} \tag{5.34}$$

il vettore colonna che ha come componenti le azioni di contatto elastiche (si noti che la componente in direzione x non è stata considerata in quanto si è assunto che l'ala sia indeformabile in direzione assiale), nel riferimento solidale all'ultima sezione di ala, nella configurazione indeformata, e indicando con $\mathbf{S}_{in}^{(wtip)}$ e $\mathbf{S}_{ab}^{(wtip)}$ rispettivamente il contributo ai tagli (al tip) dovuto al trasferimento dei carichi inerziali e quello dei carichi aerodinamici di pala, si può scrivere

$$\mathbf{S}^{(wtip)} = \mathbf{S}_{in}^{(wtip)} + \mathbf{S}_{ab}^{(wtip)} \quad \forall t \tag{5.35}$$

dove si è trascurato l'effetto del peso.

Discorso analogo si può fare per quanto riguarda i momenti che il rotore trasferisce all'ala. In questo caso il momento complessivo deve tener conto anche del trasporto delle forze dal mozzo al centro elastico dell'ultima sezione alare. Il momento complessivo che il rotore trasmette all'ala sarà dunque

$$\mathbf{M}^{(wtip)} = \mathbf{m}_{rb}^{bh} + \mathbf{r}_{PH} \times \mathbf{f}_{rb}^{bh} \; . \tag{5.36}$$

Definendo con

$$\mathbf{M}^{(wtip)} = \left\{ \begin{array}{c} m_z \\ m_y \\ m_x \end{array} \right\}^{\mathcal{R}_i} \tag{5.37}$$

il vettore delle componenti del momento elastico al tip, rispetto alla terna solidale all'ultima sezione di ala indeformata e indicando con $\mathbf{M}_{in}^{(wtip)}$ e $\mathbf{M}_{ab}^{(wtip)}$ rispettivamente il contributo ai momenti al tip dovuto al trasferimento dei carichi inerziali e quello dei carichi aerodinamici di pala, si ottiene la seguente espressione del momento trasmesso all'ala e riportato al centro elastico :

$$\mathbf{M}^{(wtip)} = \mathbf{M}_{in}^{(wtip)} + \mathbf{M}_{ab}^{(wtip)} \quad \forall t. \tag{5.38}$$

In definitiva, raccogliendo $\mathbf{S}^{(wtip)}$ e $\mathbf{M}^{(wtip)}$ in un unico vettore colonna, l'accoppiamento con le equazioni della dinamica dell'ala richiede la determinazione dei seguenti carichi al tip

$$\mathbf{L}^{(wtip)} = \left\{ \begin{array}{c} t_y \\ t_z \\ m_z \\ m_y \\ m_x \end{array} \right\}^{\mathcal{R}_i} \tag{5.39}$$

nella quale l'ordine delle componenti è dovuto semplicemente ad esigenze legate all'implementazione numerica delle condizioni al contorno per le equazioni della dinamica di ala.

Le componenti del vettore $\mathbf{L}^{(wtip)}$ sono quelle che, utilizzando le relazioni costitutive tra sforzi e deformazioni e le relazioni cinematiche tra deformazioni e spostamenti, consentono di definire le condizioni al contorno, non omogenee, per le equazioni della dinamica di ala.

Per semplificare la trattazione nel seguito verrà separato il trattamento dei carichi inerziali di pala da quello dei carichi aerodinamici.

5.3.2 Trasferimento dei carichi inerziali

Il contributo inerziale ai tagli al tip in direzione y e z (figura 5.2) deriva direttamente dai termini inerziali dell'equazione 5.33, trascurando l'effetto del peso e avendo cura di esprimere tali termini nel riferimento ultima sezione indeformata e di estrarre solo le componenti che danno luogo ai tagli

desiderati; in particolare si ha

$$\mathbf{S}_{in}^{(wtip)} = \sum_{k=1}^{N_b} \left[-\mathbf{T}^T \, \mathbf{R}_{w_{tip}b_k} \, m_b (\dot{\mathbf{v}}_{G_{bk}} + \boldsymbol{\Omega}_{b_{k\wedge}} \, \mathbf{v}_{G_{bk}})^{\mathcal{R}_{b_k}} \right] \quad \forall t \tag{5.40}$$

Come si nota, nella 5.40 compare la cinematica del rotore che, per quanto visto in precedenza, risulta direttamente influenzata dal moto di trascinamento dell'ala, pertanto i contributi inerziali ai carichi al tip sono riconducibili alla deformazione dell'ala (e dunque agli spostamenti e alle rotazioni al tip) ed al moto relativo della pala, ovvero ai gradi di libertà del sistema completo.

Un discorso analogo si può fare per la sollecitazione di momento trasmessa dal rotore al tip alare; tuttavia va fatta una considerazione preliminare sul contributo aerodinamico di momento. Infatti, ragionando in componenti nel riferimento pala, esso contribuisce alle reazioni vincolari che la pala scarica sul mozzo, tramite i termini $-k_\beta\beta$, $-k_\gamma\gamma$ essendo forzante delle equazioni del moto; quindi questi due termini, tramite i gradi di libertà di flap e lag, tengono conto sia degli effetti inerziali che aerodinamici. Pertanto si è deciso di trasferire tali componenti del momento di reazione vincolare per il tramite dele molle di flappeggio e di lag piuttosto che esplicitando la seconda equazione cardinale rispetto ai momenti di reazione.

Per quanto riguarda la reazione che impedisce la torsione della pala, essa, come detto in precedenza, è ricavabile dalla seconda componente dell'equazione di Eulero, risolta rispetto $\mathbf{m}_{\mathrm{rb}}$; di fatto, separando i contributi inerziali ed aerodinamici, si puó scrivere:

$$m_\theta = m_{\theta inerz} + m_{\theta aero} \tag{5.41}$$

dove il primo termine é

$$m_{\theta inerz} = \left[\mathbf{J}_b \dot{\boldsymbol{\omega}}_b + \boldsymbol{\omega}_b \times (\mathbf{J}_b \boldsymbol{\omega}_b) + m_b \mathbf{r}_{HG_b} \times (\dot{\mathbf{v}}_H + \boldsymbol{\omega}_b \times \mathbf{v}_H) \right] \cdot \mathbf{j}_b \tag{5.42}$$

mentre il secondo sarà esplicitato nel prossimo paragrafo.

In definitiva si può dire che, in componenti pala, il contributo complessivo (inerziale ed aerodinamico) del momento trasmesso all'albero in corrispondenza del mozzo è :

$$\mathbf{m}_{rb}^{bh} = \left\{ \begin{array}{c} k_\beta\beta \\ -(m_{\theta inerz} + m_{\theta aero}) \\ k_\gamma\gamma \end{array} \right\}^{\mathcal{R}_{b_k}} \tag{5.43}$$

Il trattamento del contributo dovuto al momento torcente aerodinamico verrà trattato nel paragrafo successivo. Riportando tutto nel riferimento ultima sezione indeformata e riordinando le

componenti secondo la sequenza lag-flap-pitch mediante la matrice

$$\mathbf{G}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.44}$$

si ottiene il contributo (inerziale per quanto riguarda il contributo del momento torcente e totale per i contributi legati al flappeggio e al lag di pala) al momento trasmesso al tip

$$\mathbf{M}^{(wtip)} = \sum_{k=1}^{N_b} \left\{ \mathbf{T}^T \left[-\mathbf{R}_{w_{tip}b_k}\, \mathbf{m}_{rb_k}^{\mathcal{R}_{b_k}} - m_{bk} \mathbf{r}_{pH_\wedge}^{\mathcal{R}_{w_{tip}}} \mathbf{R}_{w_{tip}b_k} (\dot{\mathbf{v}}_{G_{b\,k}} + \mathbf{\Omega}_{b_{k\,\wedge}}\, \mathbf{v}_{G_{b\,k}})^{\mathcal{R}_{b_k}} \right] \right\} \quad \forall t. \tag{5.45}$$

5.3.3 Trasferimento dei carichi aerodinamici

Il calcolo dei carichi aerodinamici che il rotore trasferisce all'ala prevede procedure parzialmente differenti a seconda che il modello ROM utilizzato per la definizione dei carichi rotorici sia basato sul solutore aerodinamico di Greenberg o su quello agli elementi di contorno. Formalmente, in entrambi i casi il modello ROM viene identificato nella forma

$$\begin{cases} \mathbf{e}(t) &= \mathbf{D}_2(t)\, \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_1(t)\, \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_0(t)\, \mathbf{x} + \mathbf{C}\, \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{A}\, \mathbf{r} + \mathbf{H}_1(t)\, \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_0(t)\, \mathbf{x} \end{cases} . \tag{5.46}$$

Tuttavia, utilizzando il modello aerodinamico basato sulla teoria di Greenberg, il vettore $\mathbf{e}(t)$ di fatto contiene i carichi aerodinamici agenti sulla j–esima pala scritti in componenti rispetto al sistema di riferimento della pala stessa, quindi ha dimensione $[6 \times 1]$: in tal caso dunque le matrici $\mathbf{D}_i$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{A}$, e $\mathbf{H}_j$ sono da considerare relative alla singola pala, così come gli stati aggiunti $\mathbf{r}$. Nel caso del solutore BEM invece, la procedura di identificazione del modello ROM porta alla descrizione dei carichi al mozzo dovuti all'insieme di tutte le pale scritti in componenti rispetto alla pala 1 presa come riferimento e delle azioni aerodinamiche agenti sulla singola pala, pertanto $\mathbf{e}(t)$ avrà dimensioni $[6 + N_m * (N_b \times 1)]$. Si noti inoltre che nel caso di modello ROM/Greenberg il vettore $\mathbf{x}$ è definito come $\mathbf{x} = [v,\, w,\, \phi,\, w',\, v',\, \beta_j,\, \gamma_j]^{\mathrm{T}}$ quindi, oltre ai gradi di libertà di ala contiene i gradi di libertà della singola pala. Nel caso del solutore BEM l'identificazione del modello ROM ha portato alla definizione di un vettore $\mathbf{x}$ che invece contiene i gradi di libertà di tutte le pale, ovvero $\mathbf{x} = [v,\, w,\, \phi,\, w',\, v',\, \beta_1,\, \gamma_1,\, \ldots,\, \beta_{N_b},\, \gamma_{N_b}]^{\mathrm{T}}$.

Nel seguito verrà dapprima illustrata la procedura che riguarda il trasferimento dei carichi ottenuti

dal modello ROM basato sul solutore di Greenberg. Il calcolo dei carichi che derivano dal modello ROM/BEM verrà derivato come sottocaso di questa.

Come mostrato nel capitolo 2 il vettore dei carichi aerodinamici agenti sulla k–esima pala in componenti pala è espresso da

$$\mathbf{B}_{a_k}(t) = \left\{ \begin{array}{c} F^x \\ F^y \\ F^z \\ M^z \\ M^x \\ M^y \end{array} \right\}^{\mathcal{R}_{b_k}} . \tag{5.47}$$

con ovvio significato dei simboli. Si noti che è stata considerata anche una componente in direzione y_b: tale componente non viene fornita dal modello di Greenberg, tuttavia per ottenere una formulazione applicabile anche al modello ROM/BEM è stata inserita formalmente tra le componenti di $\mathbf{B}_a$.

Da questo vettore è necessario estrarre le tre forze ed il momento torcente che andranno a costituire il contributo aerodinamico ai tagli e momenti trasferiti al tip alare dovuto alla singola pala. Per il calcolo dei tagli che la pala trasmette al tip alare è sufficiente estrarre da $\mathbf{B}_{a_k}$ le tre forze F^x, F^y e F^z ed esprimerle nel riferimento ultima sezione; per i momenti, invece, occorre considerare il contributo dovuto al momento torcente aerodinamico ed i contributi dovuti al trasporto delle forze aerodinamiche di pala dal mozzo al centro elastico dell'ultima sezione di ala. Questi due passaggi possono essere trattati contestualmente.

Per estrarre da $\mathbf{B}_{a_k}$ tre forze ed il momento torcente occorre premoltiplicare per una matrice siffatta

$$\mathbf{F}_1 = \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \tag{5.48}$$

ottenendo un vettore contenente quattro componenti che sono F^x, F^y e F^z ed il momento torcente M^z espresse in componenti pala.

Il passo successivo consiste nell'esprimere tali componenti nel sistema di riferimento ultima sezio-

ne, per ottenere tre tagli e tre momenti al tip, mediante la matrice

$$\mathbf{R}^k_{wb}(\psi_k) = \begin{bmatrix} R^k_{0_{11}} & R^k_{0_{12}} & R^k_{0_{13}} & 0 \\ R^k_{0_{21}} & R^k_{0_{22}} & R^k_{0_{23}} & 0 \\ R^k_{0_{31}} & R^k_{0_{32}} & R^k_{0_{33}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R^k_{0_{12}} \\ 0 & 0 & 0 & R^k_{0_{22}} \\ 0 & 0 & 0 & R^k_{0_{32}} \end{bmatrix} \tag{5.49}$$

Tale matrice è tempo–variante in quanto in essa compaiono gli elementi $R^k_{0_{ij}}$ della matrice di rotazione $\mathbf{R}_{w_{tip}b}$ che conduce dal sistema di riferimento pala a quello ultima sezione deformata. Il pedice 0 fa riferimento al fatto che si tratta della $\mathbf{R}_{w_{tip}b}$ calcolata nella condizione di equilibrio, in modo da continuare ad avere una formulazione lineare.

Delle sei componenti che si ottengono, la seconda e la terza costituiscono il contributo aerodinamico ai tagli al tip in direzione rispettivamente y' e z', mentre per i momenti occorre considerare, oltre al momento torcente, anche il trasporto delle forze dal mozzo al tip alare. Pertanto occorre introdurre la matrice

$$\mathbf{r}^{ex}_{PH} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -r^{z'}_{PH} & -r^{y'}_{PH} & 1 & 0 & 0 \\ r^{z'}_{PH} & 0 & -r^{x'}_{PH} & 0 & 1 & 0 \\ -r^{y'}_{PH} & r^{x'}_{PH} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.50}$$

nella quale compaiono le componenti, nel riferimento ultima sezione deformata, del vettore $\vec{r}_{PH}$.

Occorre tener presente che le equazioni della dinamica di ala sono proiettate nel sistema di riferimento ala indeformata quindi occorrerebbe un ulteriore trasformazione utilizzando la matrice $\mathbf{T}$. Tuttavia, in considerazione del fatto che si sta impostando un'analisi di stabilità dell'equilibrio i carichi aerodinamici saranno espressi in termini perturbativi e dunque l'unico contributo della matrice $\mathbf{T}$ che non dà luogo a termini di ordine superiore al primo è quello dovuto alla matrice calcolata nella configurazione di equilibrio. In tal caso l'unica rotazione è quella dovuta al calettamento dell'ala. Risultando tale angolo tipicamente piccolo tale matrice può essere ragionevolmente considerata uguale alla matrice identità .

L'ultimo passo consiste nell'ordinare le 5 componenti ottenute nell'ordine $V_{y'}$, $V_{z'}$, $M_{z'}$, $M_{y'}$, $M_{x'}$

mediante la matrice

$$\mathbf{F}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.51}$$

e sommare i contributi di ciascuna pala tenendo conto dello sfasamento ψ_k in quanto ciascuna pala trasmette forze e momenti in ragione della sua posizione azimutale periodica nel tempo. In definitiva il contributo aerodinamico alla sollecitazione che la singola pala del rotore scarica sul tip alare può espressa nel modo seguente:

$$\mathbf{L}_{ab}^{(wtip)} = \left\{ \begin{array}{c} t_y \\ t_z \\ m_z \\ m_y \\ m_x \end{array} \right\} = \sum_{k=1}^{N_b} \mathbf{F}_2 \, \mathbf{r}_{PH}^{ex} \, \mathbf{R}_{wb}^{k} \, \mathbf{F}_1 \, \mathbf{B}_{a_k} \tag{5.52}$$

L'espressione 5.52 può facilmente essere riscritta in modo da separare i contributi che dipendono da $\ddot{\mathbf{x}}$, $\dot{\mathbf{x}}$, $\mathbf{x}$ e dall'insieme di tutti gli stati aggiunti relativi alle singole pale $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_k]^{\mathrm{T}}$ nella forma

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{L}_{ab}^{(wtip)} & = & \mathbf{M}(t)\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}(t)\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{C}(t)\,\mathbf{r} \\ \\ \dot{\mathbf{r}} & = & \mathbf{A}\,\mathbf{r} + \mathbf{H}_1(t)\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_0(t)\,\mathbf{x} \end{array} \right. \tag{5.53}$$

Si noti che, per arrivare all'espressione 5.53, il vettore $\mathbf{x}$ deve essere necessariamente definito come l'insieme completo dei gradi di libertà di ala e rotore, ovvero $\mathbf{x} = [v,\, w,\, \phi,\, w',\, v',\, \beta_1,\, \gamma_1,\, \ldots,\, \beta_{N_b},\, \gamma_{N_b}]^{\mathrm{T}}$. Le matrici $\mathbf{M}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{K}$ sono tempo–varianti ed hanno dimensioni $[5 \times (5 + N_m * N_b)]$, e la matrice $\mathbf{C}$ ha dimensioni $[5 \times (N_a * N_b)]$ e anch'essa dipende dal tempo. Le matrici che governano la dinamica degli $N_a * N_b$ stati aggiunti sono: $\mathbf{A}$ di dimensioni $[(N_a * N_b) \times (N_a * N_b)]$, si ottiene come matrice diagonale a blocchi utilizzando le $\mathbf{A}_k$; $\mathbf{H}_1$ e $\mathbf{H}_0$ sono tempo–varianti, hanno dimensioni $[(N_a * N_b) \times (5 + N_m * N_b)]$ e si ottengono dalla giustapposizione delle $\mathbf{H}_{1_k}$ e $\mathbf{H}_{0_k}$.

I carichi che il rotore trasferisce all'ala possono essere calcolati utilizzando il modello ROM basato sul solutore BEM seguendo una procedura molto simile alla precedente. In particolare il vettore

$\mathbf{e(t)}$ in questo caso è costituito da due partizioni

$$\mathbf{e} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{f}_H \\ \mathbf{f}_E \end{array} \right\} , \tag{5.54}$$

ovvero una partizione $\mathbf{f}_H$ che fornisce i carichi al mozzo scaricati da tutto il rotore ed espressi in componenti rispetto al sistema di riferimento della pala 1 (pala di riferimento) ed una $\mathbf{f}_E$ che raccoglie le forze generalizzate agenti su ciascuna pala.
Per poter ottenere $\mathbf{L}_{ab}^{(wtip)}$ in questo caso occorre estrarre i contributi ad $\mathbf{f}_H$ mediante la matrice

$$\mathbf{F}_1^{3D} = \left[\begin{array}{cc} \mathbf{F}_1 & \mathbf{0} \end{array} \right] \tag{5.55}$$

ed esprimerli nel sistema di riferimento ultima sezione deformata utilizzando la matrice $\mathbf{R}_{wb}^{k}(\psi_k)$ relativa alla pala di riferimento. Applicando il trasporto per quanto riguarda il calcolo dei momenti ed infine riordinando secondo quanto richiesto dalla scrittura delle equazioni della dinamica di ala, si ottiene (ricordando che in questo caso non occorre sommare sulle pale in quanto questa operazione è già parte della definizione del modello ROM):

$$\mathbf{L}_{ab}^{(wtip)} = \left\{ \begin{array}{c} t_y \\ t_z \\ m_z \\ m_y \\ m_x \end{array} \right\} = \mathbf{F}_2 \, \mathbf{r}_{PH}^{ex} \, \mathbf{R}_{wb}^{1} \, \mathbf{F}_1^{3D} \, \mathbf{e}(t) \; , \tag{5.56}$$

ovvero, in forma matriciale,

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \mathbf{L}_{ab}^{(wtip)} & = & \mathbf{M}(t)\,\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D}(t)\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{C}(t)\,\mathbf{r} \\ \\ \dot{\mathbf{r}} & = & \mathbf{A}\,\mathbf{r} + \mathbf{H}_1(t)\,\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_0(t)\,\mathbf{x} \end{array} \right. . \tag{5.57}$$

Come si può notare, indipendentemente dal solutore aerodinamico utilizzato, i carichi che il rotore trasferisce all'ala possono essere dunque espressi mediante la medesima forma matriciale.

5.3.4 Effetto del pilone

Nelle considerazioni fin qui svolte si è considerato il pilone come il mezzo di collegamento tra gradi di libertà di ala e rotore, per quanto attiene l'aspetto cinematico del problema, e come mezzo

attraverso cui riportare i carichi dall'hub al centro elastico del tip, per ciò che riguarda gli aspetti dinamici. Tuttavia occorre tener presente che il pilone di per se è rappresentativo di tutto ciò che è contenuto nella nacelle e quindi, è necessario considerare la sua presenza anche in termini inerziali; in particolare si devono far entrare nel modello le azioni di taglio e momento dovute all'inerzia, che sollecitano l'ala al contorno.

Indicando con $\overline{EG}_{py}$ l'offset tra centro elastico al tip e baricentro del pilone, e con I_{py_x} e I_{py_z} i momenti d'inerzia dell'albero attorno ad assi per il centro elastico e paralleli a quelli della terna ala indeformata, si hanno i seguenti carichi inerziali dovuti al moto dell'ala:

- Forze d'inerzia

$$F_{z_{ine}} = -M_{py}\ddot{w}_{tip} - M_{py}\overline{EG}_{py}\ddot{\phi}_{tip} \tag{5.58}$$

$$F_{y_{ine}} = -M_{py}\ddot{v}_{tip} \tag{5.59}$$

- Momenti inerziali

$$M_{x_{ine}} = -I_{py_x}\ddot{\phi}_{tip} - M_{py}\overline{EG}_{py}\ddot{w}_{tip}\cos\phi_{tip} + M_{py}\overline{EG}_{py}\ddot{v}_{tip}\sin\phi_{tip} \tag{5.60}$$

$$M_{y_{ine}} = (J_{b_{33}}\ddot{w}'_{tip} + J_{b_{33}}\ddot{\gamma}) \tag{5.61}$$

$$M_{z_{ine}} = -I_{py_z}\ddot{v}'_{tip} \tag{5.62}$$

dove il momento di flap, qui scritto per il contributo della singola pala, tiene conto del moto relativo di lag e della rotazione w' che trascina un rotore di momento d'inerzia equivalente attorno x_{sh} pari a $N_b Jb_{33}$.

Introducendo le terne

$$\mathbf{V}_{ine} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ F_{y_{ine}} \\ F_{z\,ine} \end{array} \right\} \tag{5.63}$$

e

$$\mathbf{M}_{ine} = \left\{ \begin{array}{c} M_{x\,ine} \\ M_{y\,ine} \\ M_{z\,ine} \end{array} \right\} \tag{5.64}$$

e trasformando le componenti nel riferimento solidale all'ultima sezione di ala deformata tramite la matrice $\mathbf{T}$, si ottengono i contributi dovuti al pilone da aggiungere alle (5.35) e (5.38) che dunque diventano:

$$\begin{aligned} &\mathbf{S}^{(wtip)} + \mathbf{S}_{in}^{(wtip)} - \mathbf{S}_{ab}^{(wtip)} - \mathbf{F}_1 \mathbf{V}_{\mathrm{ine}}^{(\mathrm{wtip})} = 0 \qquad \forall \mathrm{t} \\ &\mathbf{M}^{(wtip)} + \mathbf{M}_{in}^{(wtip)} - \mathbf{M}_{ab}^{(wtip)} - \mathbf{G}_1 \mathbf{M}_{\mathrm{ine}}^{(\mathrm{wtip})} = 0 \qquad \forall \mathrm{t} \end{aligned} \tag{5.65}$$

La generalizzazione a più pale è immediata se si considera che ogni pala rotorica esercita sull'ala un'azione del tipo di quelle riportate. È sufficiente, quindi, sommare il contributo di ciascuna pala con l'avvertenza che, passando da pala a pala, cambia la matrice $\mathbf{R}_{\mathrm{w_{tip}\,b}}$ che fa comparire l'angolo di sfasamento relativo alla pala in esame.

In dettaglio, si puó osservare che questa matrice dipende dall'azimuth della pala per il tramite di funzioni trascendenti del tempo date da $\sin(\Omega t - \psi)$, $\cos(\Omega t - \psi)$, con ψ pari a

$$\psi = \frac{2\pi}{N_b}(I_{bl} - 1) \qquad\qquad I_{bl} = 1, N_b \tag{5.66}$$

e che proprio in virtú di queste funzioni, le equazioni di contorno assumono una tempo varianza di tipo periodico.

5.3.5 Ordering scheme

Sulla base delle considerazioni svolte nei precedenti paragrafi, le equazioni che governano il comportamento aeroelastico di un velivolo tiltrotor in configurazione cruise mode, costituiscono un sistema integro-differenziale (nello spazio) non lineare, alle derivate parziali ed ordinarie; in particolare si riconoscono le tre equazioni alle derivate parziali a coefficienti variabili relative all'ala e quelle alle derivate ordinarie, a coefficienti tempo–varianti relative alle $2N_b$ equazioni delle pale rigide di rotore.

Così come nell'identificazione dei modelli ROM di ala è stato fatto un ordering scheme coerente

con una teoria di moderati spostamenti, la stessa cosa deve essere fatta per le rimanenti equazioni del problema, in modo da rendere l'analisi in questione complessivamente coerente e valevole al second'ordine. Occorre però osservare che al di là di questo fatto, di per se basato su considerazioni di coerenza, è assolutamente necessario ridurre le non linearità e quindi i termini in questione per le equazioni dei carichi e del rotore poiché, trattandosi di una catena multicorpo, le variabili cinematiche che in esse entrano sono quelle di tutto il sistema, rendendo di fatto il problema difficilmente gestibile analiticamente. In particolare questa procedura è stata applicata alla parte strutturale del modello aeroelastico di rotore e di ala noncheé ai contributi inerziali dei carichi che il rotore trasferisce all'ala.
Indicando con q il generico grado di libertà del problema, e richiamando il parametro di piccolezza ϵ introdotto nel (2.3.2), si sono fatte le seguenti assunzioni:

- $\frac{\partial}{\partial t} = \circ(1)$
- $\frac{\partial}{\partial x} = \circ(1)$
- $q = \circ(\epsilon)$
- $q' = \circ(\epsilon)$, $q'' = \circ(\epsilon)$, $q''' = \circ(\epsilon)$,
- $\dot{q} = \circ(\epsilon)$

Coerentemente con una teoria di ordine 2, nelle equazioni di contorno e in quelle di rotore sono stati ritenuti i termini di ordine uno e quelli di ordine due derivanti dai quadrati e dai prodotti dei gradi di libertà ; non sono invece stati considerati i termini tipo $\dot{q}^2$, $\dot{q}\ddot{q}$, $\ddot{q}^2$, $\dot{q}'\dot{q}$ e termini analoghi contenenti prodotti o quadrati delle derivate temporali dei gradi di libertà , perché, come mostrato successivamente, si è interessati ad effettuare una analisi aeroelastica lineare nelle perturbazioni.

Capitolo 6

Definizione e soluzione del problema aeroelastico per il sistema ala/rotore

In questo capitolo verrà illustrata la metodologia utilizzata per risolvere il problema aeroelastico relativo ad un tiltrotor in volo di crociera nella configurazione *airplane mode*.

La necessità di risolvere numericamente un problema aeroelastico continuo, come quello che caratterizza in generale il sistema ala/rotore, ha portato all'utilizzo della metodologia di discretizzazione spaziale su base modale che è stata illustrata nel capitolo 1. Come detto, l'approccio classico per la soluzione di questa tipologia di problemi si basa sull'espansione su base modale alla "Galërkin" dei gradi di libertà che descrivono la deformazione dei mezzi continui.
Data la natura del sistema in cui il rotore trasferisce all'ala delle sollecitazioni dovute alle reazioni vincolari che insorgono in corrispondenza del mozzo, le equazioni della dinamica dell'ala risulteranno forzate dai carichi rotorici nella forma di carichi distribuiti generalizzati ottenuti utilizzando le proprietà della funzione delta di Dirac.

Verrà dunque illustrata la struttura matriciale che assume il problema soffermandosi sul ruolo di ciascuno dei gradi di libertà del sistema ed in particolare sul ruolo che la dinamica degli stati aggiunti aerodinamici gioca nella definizione del problema aeroelastico.

Il sistema differenziale che si otterrà è del secondo ordine a coefficienti periodici e può essere ridotto in forma normale. Utilizzando le metodologie basate sulla teoria di Floquet–Lyapunov o sulla trasformazione multipala (si veda il capitolo 1) è possibile dunque studiarne la stabilità

mediante la determinazione degli autovalori.

6.1 Definizione del problema aeroelastico in forma modale per l'ala

Come detto, il metodo risolutivo adottato nel presente lavoro di tesi per l'analisi di stabilità aeroelastica del sistema tiltrotor è basato sull' applicazione del metodo di Galërkin. La definizione del problema aeroelastico verrà illustrata per le equazioni dell'ala. Analoga procedura può essere definita per le pale nel caso si consideri un modello di elasticità di pala di tipo distribuito.
A causa della particolare catena multibody studiata, che vede la presenza di un membro (il rotore) capace di scambiare forze e momenti con l'ala in corrispondenza del tip, le condizioni al contorno associate ai singoli elementi della catena del problema non sono né omogenee né assegnate a priori, nel senso che dipendono dalla soluzione del problema stesso; questo fatto impone una scelta sul modo di trattarle. La metodologia utilizzata prevede di trasformare il problema aeroelastico in un problema con condizioni al contorno omogenee, traducendo i carichi al tip dell'ala in forzanti nel campo. In questo modo le equazioni differenziali che governano il comportamento aeroelastico dell'ala sono forzate dai carichi aerodinamici e dalle forze ed i momenti che istante per istante il rotore esercita al centro elastico al tip; cosí facendo è come se per $x = L_w$ la trave (l'ala) fosse libera e quindi, nell' ottica del metodo di Galërkin, questo consente l'uso della base funzionale costituita dai modi naturali di vibrazione (in vacuo) di una trave omogenea isotropa incastrata alla radice e libera all'estremità .

Nel paragrafo 5.3 sono state ricavate le espressioni per i carichi $\mathbf{L}^{(wtip)}$ che il rotore trasferisce al tip dell'ala in termini di contributi inerziali e aerodinamici e di quelli inerziali dovuti alla presenza del pilone. Tali carichi sono espressi in componenti rispetto al sistema di riferimento ala indeformata quindi possono essere portati nel campo e accoppiati direttamente con le equazioni della dinamica strutturale di ala scritte nel paragrafo 5.2.2. Si può dunque definire completamente il problema aeroelastico per l'ala nel seguente modo

- **Equazione di lag**

$$\left[EI_{z'} - (EI_{z'} - EI_{y'})\sin^2(\Theta)\right] v'''' + (EI_{z'} - EI_{y'}) \left[\frac{sin2\Theta}{2} w'''' - sin2\Theta(\phi v'')'' + \right.$$

$$\left. + cos2\Theta(\phi w'')''\right] + m_w \ddot{v} = L_v + t_y\, \delta(x - L_w) - [m_z\, \delta(x - L_w)]' \tag{6.1}$$

- **Equazione di flap**

$$\left[EI_{y'} + (EI_{z'} - EI_{y'})\sin^2(\Theta)\right] w'''' + (EI_{z'} - EI_{y'}) \left[\frac{sin2\Theta}{2} v'''' + cos2\Theta(\phi v'')'' + \right.$$

$$\left. + sin2\Theta(\phi w'')''\right] + m_w \ddot{w} = L_w + t_z\, \delta(x - L_w) + [m_y\, \delta(x - L_w)]' \tag{6.2}$$

- **Equazione di Pitch**

$$(EI_{z'} - EI_{y'}) \left[(w''^2 - v''^2)\frac{sin^2(\Theta)}{2} + v'' w'' \cos 2\Theta\right] - GJ\phi'' + \tag{6.3}$$

$$+ m_w {k_m}^2 \ddot{\phi} = m_x\, \delta(x - L_w)$$

A questo punto si definisce la base funzionale opportuna per descrivere il campo di spostamenti incognito rappresentato da $v(x,t)$, $w(x,t)$ e $\phi(x,t)$. Le funzioni modali ortogonali scelte sono i modi naturali di vibrazione di una trave incastrata alla radice e libera all'estremità; tali funzioni sono note analiticamente (si veda [18]) saranno indicate con Ψ_j per quanto riguarda gli spostamenti di flappeggio e lag, e con Θ_j per quanto riguarda la torsione. Per definizione, tali funzioni devono soddisfare le seguenti condizioni al contorno omogenee in corrispondenza alla radice ($x = 0$) e all'estremità ($x = L_w$) dell'ala:

$$\begin{array}{l} \Psi_j(0) = 0 \quad \Theta_j(0) = 0 \quad {\Psi_j}'(0) = 0 \\ \Theta_j'(L_w) = 0 \quad \Psi_j''(L_w) = 0 \quad \Psi_j'''(l_w) = 0 \end{array} \tag{6.4}$$

Si riportano per completezza le espressioni delle funzioni modali scelte per la descrizione degli spostamenti elastici dell'ala

$$\begin{cases} \Psi_j(x) = \cosh(\beta_j x) - \cos(\beta_j x) - \alpha_j[\sinh(\beta_j x) - \sin(\beta_j x)] \\ \\ \Theta_j(x) = \sqrt{2}\sin(\gamma_j x) \end{cases} \tag{6.5}$$

Le funzioni modali definite vengono dunque utilizzate per approssimare il campo di spostamenti elastici seguendo un approccio basato sul metodo di Galërkin:

$$\begin{cases} v(x,t) & \cong & \sum_{j=1}^{N_l} \Psi_j(x) V_j(t) \\ \\ w(x,t) & \cong & \sum_{j=1}^{N_f} \Psi_j(x) W_j(t) \\ \\ \phi(x,t) & \cong & \sum_{j=1}^{N_t} \Theta_j(x) \phi_j(t) \ . \end{cases} \tag{6.6}$$

Definiti i criteri di scelta della base modale, le equazioni non lineari del moto dell'ala vengono trasformate in un sistema differenziale alle derivate ordinarie applicando il metodo di Galërkin con proiezione fatta sui modi elastici $\Psi_j(x)$ e $\Theta_j(x)$. Le $N_{tot} = (N_l + N_f + N_t)$ equazioni che ne discendono, non lineari, non omogenee ed a coefficienti periodici, vengono poi linearizzate facendo l'ipotesi di piccole perturbazioni attorno ad una condizione di equilibrio operativa, esprimendo le variabili modali come sovrapposizione di una parte all'equilibrio e di una perturbativa attorno all'equilibrio raggiunto, cioè :

$$\begin{cases} V_j(t) = V_{0\,j} + \Delta V_j(t) \\ \\ W_j(t) = W_{0\,j} + \Delta W_j(t) \\ \\ \phi_j(t) = \phi_{0\,j} + \Delta \phi_j(t) \end{cases} \ . \tag{6.7}$$

Si noti che, per quanto riguarda le forzanti aerodinamiche di ala, tale procedura è stata illustrata esplicitamente nei paragrafi 2.3.3 e 3.5 per i due solutori aerodinamici impiegati nel presente lavoro. Analogamente a quanto fatto per le variabili di ala, anche i gradi di libertà di rotore vengono viste come sovrapposizione di una parte all'equilibrio e di una perturbativa attorno all'equilibrio raggiunto, ovvero

$$\begin{gathered} \beta_k(t) = \beta_{0\,k} + \Delta \beta_k(t) \\ \\ \gamma_k(t) = \gamma_{0\,k} + \Delta \gamma_k(t) \end{gathered} \tag{6.8}$$

e dunque sostituite nelle equazioni della dinamica di ala e nei carichi che il rotore trasmette all'ala. Le equazioni non lineari dell'equilibrio, nelle incognite $V_{0\,j}$, $W_{0\,j}$, $\phi_{0\,j}$, si ricavano sostituendo nelle equazioni modali non lineari la sola parte stazionaria delle variabili lagrangiane, mentre quelle

perturbative si ottengono sostituendo le (6.7) nelle equazioni modali, sottraendo le equazioni dell' equilibrio, ed eliminando tutti i termini non lineari delle variabili perturbative. Il risultato di queste operazioni fornisce un set di N_{tot} equazioni differenziali alle derivate ordinarie, lineari, omogenee a coefficienti periodici e dipendenti dalla soluzione all'equilibrio, che consentono di studiare il moto dell'ala attorno alla configurazione di trimmaggio; va sottolineato che la tempo–varianza delle equazioni deriva esclusivamente dai carichi che il rotore trasferisce all'ala. Si noti che, in termini di spostamenti elastici, i carichi t_y, t_z, m_x, m_y, m_z, fanno comparire i gradi di libertà , e quindi le ampiezze modali, calcolati in corrispondenza ad $x = L_w$. Inoltre, per il trattamento di tali carichi occorre tener presenti le proprietà di cui gode la funzione di Dirac. In particolare, quando si proietta sul k-esimo modo elastico, si ha:

$$\begin{aligned} \int_0^{L_w} \delta^{'}(x - L_w)\Psi_k(x)dx &= -\Psi_k^{'}(L_w) \\ \int_0^{L_w} \delta(x - L_w)\Psi_k(x)dx &= \Psi_k(L_w) \end{aligned} \tag{6.9}$$

A queste equazioni si aggiungono le equazioni di rotore necessarie per chiudere il problema. Nel caso generale di rotore elastico esse saranno in numero pari a al prodotto del numero di variabili lagrangiane elastiche di rotore per il numero di pale $N_m * N_b$. Nel caso specifico è stato adottato un modello di rotore articolato dotato di due gradi di libertà quindi i modi elastici sono quelli relativi al flappeggio e al lag. Avendo ipotizzato di utilizzare un modello di elasticità a parametri concentrati in cui la pala è modellata come corpo rigido connesso al mozzo da molle che ne simulano l'elasticità , tali gradi di libertà sono proprio gli angoli β e γ di flappeggio e lag di pala.

In questo caso non si fa nessuna proiezione alla Galërkin per ottenere le equazioni della dinamica delle pale ma solo una sostituzione cinematica. Va osservato che per via del moto di trascinamento dell'ala, nelle $2N_b$ equazioni che ne descrivono la dinamica compaiono i gradi di libertà dell'ultima sezione di ala; anche qui, operando la sostituzione cinematica delle (6.7) e delle (6.8) e procedendo come fatto per l'ala, si ottengono $2N_b$ equazioni algebriche non lineari per l'equilibrio stazionario, ed un set di $2N_b$ ODE lineari(zzate) nelle variabili perturbative.

Quindi in sostanza, nota la configurazione di trim attorno a cui studiare la stabilità aerolastica del sistema tiltrotor, il moto perturbativo del sistema è governato da un sistema differenziale lineare alle derivate ordinarie, a coefficienti periodici di $N_{tot} + 2N_b$ equazioni, che può essere risolto con tecniche di integrazione numerica al passo o studiato mediante opportune tecniche di calcolo degli autovalori di sistemi periodici del primo ordine.

La determinazione della configurazione di equilibrio in volo orizzontale rettilineo uniforme esula dagli obiettivi del presente lavoro. In ogni caso è stata considerata la configurazione di equilibrio nulla che consente di confrontarsi con i risultati ottenuti in [20].

L'impostazione proposta si ripercuote naturalmente sulla struttura delle matrici aeroelastiche che si ottengono. Questo aspetto è oggetto del prossimo paragrafo.

6.2 Struttura delle matrici aeroelastiche

Procedendo in accordo con quanto detto nel precedente paragrafo, le equazioni modali perturbative che governano la dinamica del sistema formano un problema differenziale lineare a coefficienti periodici che, riscritto in forma matriciale, consente di fare utili considerazioni sulle interazioni aeroelastiche presenti nel sistema ala/rotore.

A tale scopo, indicando con $\mathbf{M}(\mathbf{x}_e, t)$, $\mathbf{D}(\mathbf{x}_e, t)$ e $\mathbf{K}(\mathbf{x}_e, t)$ le matrici di massa, smorzamento e rigidezza aeroelastiche generalmente dipendenti dal tempo e dalla soluzione di trim $\mathbf{x}_e$, con $\hat{\mathbf{C}}$ la matrice che tiene conto della presenza degli stati aggiunti $\mathbf{r}$ dovuti all'aerodinamica delle pale e dell'ala, si può scrivere:

$$\hat{\mathbf{M}}(\mathbf{x}_e, t)\,\ddot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{D}}(\mathbf{x}_e, t)\,\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{K}}(\mathbf{x}_e, t)\,\mathbf{q} - \hat{\mathbf{C}}(\mathbf{x}_e, t)\,\mathbf{r} = \mathbf{0} \tag{6.10}$$

dove, coerentemente con la scelta di disporre le equazioni secondo l'ordine lag, flap, pitch di ala, il vettore delle variabili perturbative di stato $\mathbf{q}$ assume la forma seguente:

$$\mathbf{q} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta V_i(t) \\ \Delta W_j(t) \\ \Delta \Phi_l(t) \\ \Delta \beta_k(t) \\ \Delta \gamma_k(t) \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q}^w \\ \\ \mathbf{q}^r \end{array} \right\} \tag{6.11}$$

con $i = 1, N_l$, $j = 1, N_f$, $l = 1, N_t$ e $k = 1, N_b$. Il vettore $\mathbf{r}$ raccoglie gli $N_a^w + N_a^r$ stati aggiunti relativi all'aerodinamica dell'ala e del rotore e dunque risulta partizionato nel modo seguente

$$\mathbf{r} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{r}^w \\ \\ \mathbf{r}^r \end{array} \right\} . \tag{6.12}$$

È interessante discutere la struttura che assumono le matrici aeroelastiche in modo da comprendere a fondo le interazioni di natura cinematica ed aerodinamica che intercorrono tra rotore ed ala. La struttura della generica matrice è del tipo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{ww} & \mathbf{wr} \\ \mathbf{rw} & \mathbf{rr} \end{bmatrix} . \tag{6.13}$$

I blocchi mostrati consentono di capire le diverse forme di interazione ala/rotore

- **Blocco ww**

  È tempo–variante, di dimensioni $[N_{tot} \times N_{tot}]$ e descrive l'effetto delle variabili modali di ala sulle equazioni della dinamica di ala. La presenza di coefficienti periodici in questo blocco è legata agli effetti dei carichi inerziali ed aerodinamici trasmessi dal rotore all'ala. La cinematica di ala, infatti, influenza quella di pala in misura variabile nel tempo e di questo risentono i carichi aerodinamici ed inerziali agenti sulle pale.

- **Blocco wr**

  Questo è di dimensioni $[N_{tot} \times 2N_b]$ e descrive l'effetto della dinamica del rotore sulla dinamica di ala. Questo blocco è di tipo tempo–variante, ed è rappresentativo della porzione di carico trasmessa all'ala per effetto del moto relativo delle pale rispetto al riferimento disco.

- **Blocco rw**

  È tempo–variante, di dimensioni $[2N_b \times N_{tot}]$ e descrive l'effetto della dinamica di ala sulle equazioni di rotore; questo blocco è presente per via dell'accoppiamento cinematico ala/rotore, dettato dal moto trascinamento (del tip) dell'ala.

- **Blocco rr**

  È tempo–invariante, di dimensioni $[2N_b \times 2N_b]$ e descrivendo l'effetto delle variabili di pala sulle equazioni di rotore, fa riferimento alla dinamica relativa al disco.

A conclusione di questa rassegna è importante sottolineare come la natura periodica del problema aeroelastico derivi esclusivamente dagli accoppiamenti di natura cinematica del rotore con l'ala; in altri termini il moto di trascinamento dell'ala influenza la dinamica del rotore (e dunque i carichi che esso trasmette al tip dell'ala) in misura variabile nel tempo. Un'ulteriore fonte di periodicità si

avrebbe se si considerasse l'intereferenza aerodinamica tra la scia rotorica e l'ala: in quel caso, infatti a seconda della posizione istantanea del rotore, la forma della scia rotorica risulterebbe diversa modificando dunque i carichi aerodinamici di pala. Questo aspetto è stato trascurato nel modello descritto. Una metodologia in grado di portare in conto tali effetti nell'ambito dello studio della stabilità è stata introdotta nel capitolo 4 e la sua integrazione con il presente modello aeroelastico verrà illustrata nei paragrafi successivi.

Un discorso specifico va fatto per la matrice $\hat{\mathbf{C}}$. Come detto, essa è presente per via degli stati aggiunti dovuti al particolare modello aerodinamico utilizzato per la descrizione dell'aerodinamica dell'ala e delle pale, ed assume una forma partizionata del tipo

$$\hat{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{C}}^{ww} & \hat{\mathbf{C}}^{wr} \\ \hat{\mathbf{C}}^{rw} & \hat{\mathbf{C}}^{rr} \end{bmatrix} \tag{6.14}$$

In particolare, ricordando quanto detto a proposito del trasferimento dei carichi da rotore ad ala, la caratterizzazione dei vari blocchi è la seguente:

- **Blocco** $\hat{\mathbf{C}}^{ww}$: ha dimensioni $[N_{tot} \times N_a^w]$ e descrive l'influenza degli stati aggiunti di ala (in numero pari agli N_a^w poli stabili della matrice $\mathbf{A}_w$) sulla dinamica di ala. Tale blocco deriva dalla identificazione del modello ROM per i carichi aerodinamici di ala e risulta tempo–invariante.

- **Blocco** $\hat{\mathbf{C}}^{wr}$: ha dimensioni $[N_{tot} \times N_a^r]$ e descrive l'influenza che gli N_a^r stati aggiunti di rotore, per il tramite dei carichi aerodinamici trasmessi al tip, hanno sulla dinamica di ala. Tale blocco risulta pertanto tempo–variante.

- **Blocco** $\hat{\mathbf{C}}^{rw}$: ha dimensioni $[2N_b \times N_a^w]$ e risulta identicamente nullo in quanto nel presente modello l'aerodinamica di ala non influenza l'aerodinamica di rotore e dunque gli stati aggiunti aerodinamici relativi all'ala non influenzano la dinamica delle pale.

- **Blocco** $\hat{\mathbf{C}}^{rr}$: ha dimensioni $[2N_b \times N_a^r]$ e descrive l'effetto diretto degli stati aggiunti di rotore sulla dinamica di rotore. Si tratta dunque di un blocco tempo–invariante.

Si noti che nel caso di accoppiamento del modello ROM per l'aerodinamica di ala con il solutore aerodinamico interazionale tramite la tecnica basata sul calcolo della velocità indotta descritto nel capitolo 4, il contributo aerodinamico alle matrici aeroelastiche di ala conterrà anche i termini

legati alle condizioni al contorno indotte dalla $\mathbf{v}_I$. Inoltre, il vettore degli stati aggiunti di ala sarà costituito dagli stati aggiunti di ala e da quelli $\mathbf{r}^{w^I}$ introdotti sviluppando in serie di Fourier la matrice delle condizioni al contorno indotte dal rotore sull'ala.

6.3 Dinamica degli stati aggiunti

In questo paragrafo si intende mostrare come gli stati aggiunti legati all'aerodinamica di ala e di rotore vengono inseriti nel sistema aeroelastico completo. Come mostrato in precedenza, essi vanno ad influenzare la dinamica di rotore ed ala per il tramite della matrice $\hat{\mathbf{C}}$.
Gli stati aggiunti di ala sono regolati dalla dinamica mostrata nei paragrafi 2.3.4 e 3.5.2 relativamente al modello ROM basato sul solutore aerodinamico di Greenberg e su quello BEM, rispettivamente. La forma generale delle equazioni che regolano la dinamica degli N_a^w stati aggiunti di ala è la seguente

$$\dot{\mathbf{r}}^w = \mathbf{A}^w \, \mathbf{r}^w + \mathbf{H}_0^w \, \mathbf{q}^w \ . \tag{6.15}$$

Per quanto attiene agli stati aggiunti relativi al rotore, partendo dalla forma 5.46

$$\dot{\mathbf{r}}^r \quad = \quad \mathbf{A}^r \, \mathbf{r}^r + \mathbf{H}_1^r(t) \, \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{H}_0^r(t) \, \mathbf{x} \tag{6.16}$$

ed esprimendo i gradi di libertà di ala (che compaiono nel vettore $\mathbf{x}$) sulla base dell'espansione modale illustrata in precedenza, si ottiene l'espressione che lega la dinamica degli stati aggiunti alla dinamica delle ampiezze modali $\mathbf{q}$

$$\dot{\mathbf{r}}^r \quad = \quad \mathbf{A}^r \, \mathbf{r}^r + \hat{\mathbf{H}}_1(t) \, \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{H}}_0(t) \, \mathbf{q}. \tag{6.17}$$

Si noti che il vettore $\mathbf{r}^r$ viene definito in modo diverso in base al solutore aerodinamico utilizzato: nel caso del solutore 2D esso sarà costruito disponendo in colonna i vettori degli stati aggiunti relativi alle singole pale; nel caso del solutore aerodinamico BEM, il vettore degli stati aggiunti si riferisce agli stati complessivi di rotore e dunque non occorre modificarlo in quanto già contiene tutti gli elementi necessari per la descrizione aerodinamica del rotore nel suo complesso e delle singole pale. Si noti inoltre che la dinamica degli stati aggiunti di rotore dipende anche dai gradi di libertà di ala per via del moto di trascinamento.

Indicando ora con $\mathbf{r}$ il vettore che raccoglie gli $N_a = N_a^w + N_a^r$ stati aggiunti di ala e rotore, si può dunque scrivere

$$\dot{\mathbf{r}} \quad = \quad \hat{\mathbf{A}} \, \mathbf{r} + \hat{\mathbf{B}}_1(t) \, \dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{B}}_0(t) \, \mathbf{q}. \tag{6.18}$$

La matrice $\hat{\mathbf{A}}$ ha dimensioni $[N_a \times N_a]$ e risulta partizionata nel seguente modo

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^w & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^r \end{bmatrix} \ . \tag{6.19}$$

Per quanto riguarda le matrici $\hat{\mathbf{B}}_i$, esse hanno dimensioni $[N_a \times (N_{tot}+2N_b)]$ e risultano partizionate come segue:

$$\hat{\mathbf{B}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{H}}_1^w & \hat{\mathbf{H}}_1^r \end{bmatrix} \quad , \quad \hat{\mathbf{B}}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{0_w} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{H}}_0^w & \hat{\mathbf{H}}_0^r \end{bmatrix} \quad . \tag{6.20}$$

Come si vede dalla struttura delle matrici la dinamica degli stati aggiunti è fortemente legata a quella dell'intero sistema ala/rotore. In particolare gli stati aggiunti di ala risentono esclusivamente della dinamica delle variabili di ala mentre gli stati aggiunti rotorici sono legati anche ai gradi di libertà di ala (oltre che a quelli di rotore) per via del moto di trascinamento dell'ala che influenza la cinematica del rotore e dunque i carichi aerodinamici su di esso agenti.

6.4 Sistema aeroelastico in forma normale

Per utilizzare le metodologie classiche per l'analisi della stabilità di un sistema di equazioni differenziali del secondo ordine, quale quello ottenuto per la descrizione del comportamento aeroelastico del sistema ala/rotore, è conveniente porre il sistema in forma normale.
Come si è visto, le equazioni modali perturbative, e le equazioni derivanti dagli stati aggiunti che governano la dinamica del sistema, costituiscono un problema differenziale lineare e a coefficienti periodici che, scritto in forma matriciale, assume la forma

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{M}}\,\ddot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{D}}\,\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{K}}\,\mathbf{z} - \hat{\mathbf{C}}\,\mathbf{r} = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{A}}\,\mathbf{r} + \hat{\mathbf{B}}_1\,\dot{\mathbf{q}} + \hat{\mathbf{B}}_0\,\mathbf{q} \end{cases} , \tag{6.21}$$

nella quale $\mathbf{q}$ è il vettore che contiene le N_{tot} variabili modali di ala e le $2N_b$ variabili di pala in termini perturbativi ed $\mathbf{r}$ contiene gli N_a stati aggiunti relativi al sistema completo. Ponendo

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{p} \tag{6.22}$$

il sistema può essere riscritto nella forma

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{p} = \mathbf{0} \\ \dot{\mathbf{p}} = -\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{D}}\,\mathbf{p} - \hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{K}}\,\mathbf{q} + \hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{C}}\,\mathbf{r} = 0 \\ \dot{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{A}}\,\mathbf{r} + \mathbf{B}_1\,\mathbf{p} + \mathbf{B}_0\,\mathbf{q} \end{cases} \tag{6.23}$$

che, in termini matriciali, diviene

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{q}} \\ \dot{\mathbf{p}} \\ \dot{\mathbf{r}} \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{K}} & -\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{D}} & -\hat{\mathbf{M}}^{-1}\hat{\mathbf{C}} \\ \hat{\mathbf{B}}_0 & \hat{\mathbf{B}}_1 & \hat{\mathbf{A}} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \\ \mathbf{r} \end{array} \right\} \tag{6.24}$$

In definitiva il sistema, nella forma di stato, è

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbb{A}(t)\mathbf{z} \tag{6.25}$$

nella quale $\mathbf{z}$ è il vettore delle variabili di stato che contiene i gradi di libertà del sistema, le loro derivate prime nel tempo e gli stati aggiunti relativi all'ala e alle N_b pale. In particolare la matrice di stato ha dimensioni $[2(N_{tot} + 2N_b) + N_a \times 2(N_{tot} + 2N_b) + N_a]$ e naturalmente il vettore delle variabili di stato è costituito da $2(N_{tot} + 2N_b) + N_a$ elementi.

Capitolo 7

Applicazioni e risultati

7.1 Validazione della procedura di identificazione del modello ROM di rotore

La validazione della procedura di indentificazione del modello ROM per il rotore è suddivisa in una sezione relativa alla approssimazione matriciale razionale dell'operatore aerodinamico introdotta nel capitolo 2.2.4 ed in una relativa al modello ROM completo.

Ai fini della validazione è stato considerato il rotore di un propeller in volo assiale dotato di tre pale, di raggio pari a $R = 3.97$m, velocità di crociera pari a $V_\infty = 25.7$m/s e velocità di rotazione $\Omega = 40.4$rad/s. Si tratta di una delle configurazioni analizzate in [20] ed in particolare è il rotore che presenta il minor passo di scia e dunque caratterizzato da significativi effetti sull'aerodinamica di pala dovuti alla vorticità di scia.

Semplificando le caratteristiche geometriche del rotore della Boeing considerato in [20], si è utilizzato un andamento lineare dell'angolo di collettivo della pala lungo l'apertura a partire da valori alla radice ed all'estremità pari rispettivamente a $\theta_r = 38.15°$ e $\theta_t = 5.15°$ (in modo da avere a $3/4$ dell'apertura palare lo stesso angolo di collettivo utilizzato in [20]), mentre si è assunta una lunghezza di corda costante pari a 0.478m. Questi dati sono stati utilizzati per definire la condizione di equilibrio del rotore. Si noti, per inciso, che il modello ROM identificato nel presente lavoro risente della condizione di equilibrio solo nella definizione del legame cinematico ma non nella metodologia che porta alla sua identificazione.

Il rotore considerato è stato schematizzato come un rotore dotato di pale elastiche incastrate in corrispondenza del mozzo. La deformazione delle pale è descritta utilizzando il primo modo di flessione della trave non rotante e dunque il moto perturbativo del sistema pilone/rotore è descritto da 9 gradi di libertà , 6 legati al moto del pilone ($\mathbf{q}^p$, ovvero i tre spostamenti dell'asse elastico all'estremità alare e le tre rotazioni rigide dell'ultima sezione attorno all'asse stesso) e 3 legati ai gradi di libertà elastici $\mathbf{q}^d$ (nel caso specifico di flappeggio) delle pale (uno per ciascuna pala).

L'applicazione considerata consente indirettamente una validazione del modello ROM sviluppato nel presente lavoro: infatti, per questa applicazione esso viene applicato considerando come gradi di libertà in ingresso alcuni dei moti elastici principali cui è soggetta l'ala di un sistema ala/rotore in cui il rotore è reso solidale all'ala per il tramite del pilone. In particolare verranno considerate le rotazioni dell'ultima sezione alare dovute alla deformazione di torsione e di lag.

7.1.1 Validazione della RMA per l'operatore aerodinamico di rotore

In questa sezione vengono presentati alcuni dei risultati relativi alla validazione dell'approssimazione razionale matriciale introdotta nel paragrafo 2.2.4 per eliminare la dipendenza trascendente dalla frequenza degli operatori aerodinamici introdotti nel presente lavoro. In particolare si fa qui riferimento all'operatore aerodinamico basato sul solutore BEM e identificato per rotori multipala dotati di pale elastiche (si veda capitolo 3). Considerando il sistema di riferimento solidale con la pala 1 (pala di riferimento), con origine nel mozzo, asse z allineato con l'asse di rotazione, ed asse y in direzione dell'apertura palare, la definizione dell'operatore aerodinamico ha consentito di identificare la funzione di trasferimento tra la componente x delle velocità generalizzate scritte nel sistema di riferimento $\mathcal{R}_{b_1}$ (corrispondente ad un moto di lag della pala) e la portanza che agisce sulla medesima pala. La figura 7.1 mostra il confronto tra la funzione di trasferimento ottenuta dal solutore aerodinamico e la sua approssimazione razionale ottenuta utilizzando 30 stati aggiunti aerodinamici (si ricorda che una rappresentazione esatta delle funzioni di trasferimento aerodinamiche necessiterebbe di un numero infinito di stati). Come si nota, nel range di frequenze esaminato, l'accordo tra le due curve è ottimo sia per quanto riguarda la parte reale della funzione di trasferimento, sia per quella immaginaria. Cio dimostra l'accuratezza della tecnica RMA utilizzata.

Nelle figure 7.2 e 7.3 sono mostrate le funzioni di trasferimento che legano la portanza sulla pala 1 ai due moti perturbativi di flessione delle pale 2 e 3 rispettivamente. Come si ricorderà , il

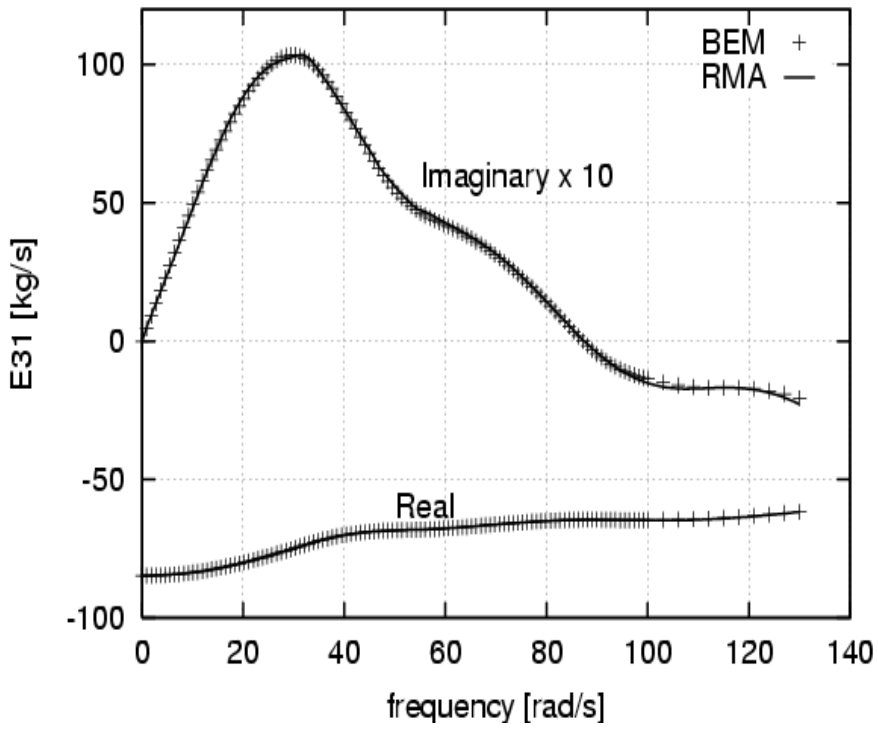

Figura 7.1: RMA della funzione di trasferimento tra $\mathbf{v}_x$ e la portanza sulla pala 1 (con 30 stati aggiunti aerodinamici).

modello aerodinamico utilizzato è infatti in grado di tener conto della presenza di tutte le pale e delle loro scie, pertanto i carichi aerodinamici agenti su una pala dipendono anche dalle condizioni al contorno (e dunque dal moto) delle altre pale. Anche in questo caso l'approssimazione RMA fornisce ottimi risultati. Si noti che le funzioni di trasferimento rappresentate nelle figure 7.2 e 7.3 mostrano un andamento oscillatorio in funzione della frequenza molto marcato. Ciò è dovuto alla presenza della vorticità rilasciata dalle pale 2 e 3, rispettivamente, che ha un'influenza significativa sui carichi agenti sulla pala 1: ciò è particolarmente evidente per le condizioni di volo considerate caratterizzate da un basso valore del coefficiente d'avanzo cosa che comporta una notevole vicinanza delle scie 2 e 3 alla pala 1. La capacità della RMA di catturare questo tipo di andamenti è ottenuta utilizzando un numero elevato di poli aerodinamici nell'approssimazione.

La stessa accuratezza mostrata si osserva per tutte le funzioni di trasferimento che costituiscono l'operatore aerodinamico $\mathbf{E}(s)$.

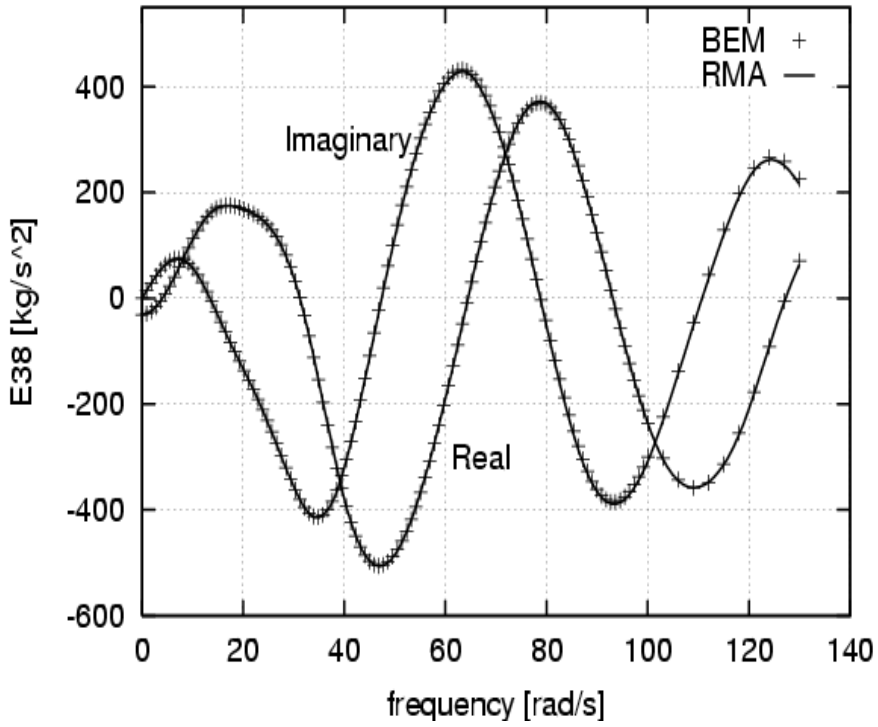

Figura 7.2: RMA della funzione di trasferimento tra q_2^d e la portanza sulla pala 1 (con 30 stati aggiunti aerodinamici).

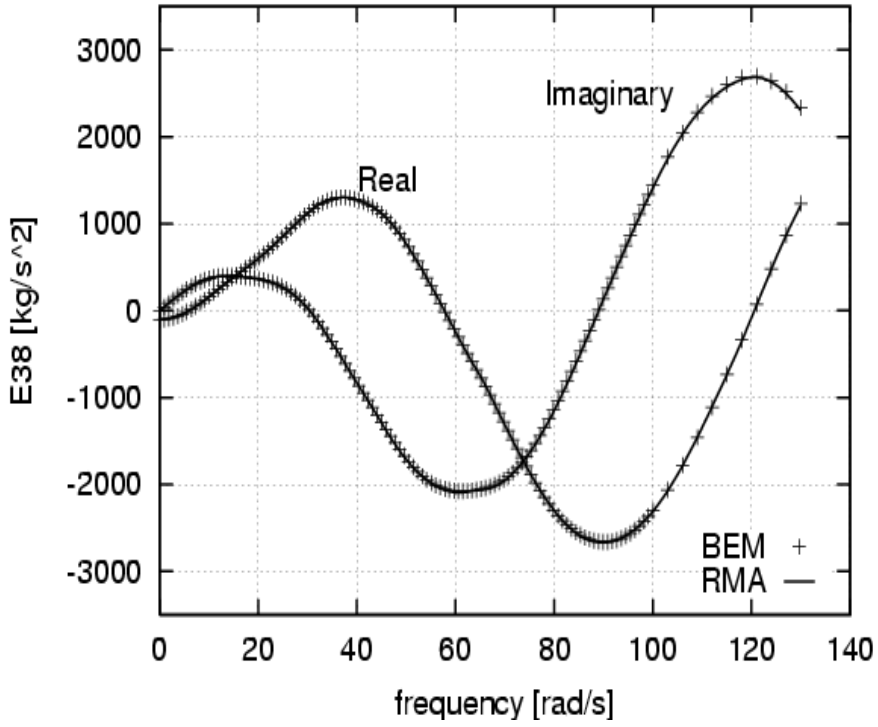

Figura 7.3: RMA della funzione di trasferimento tra q_3^d e la portanza sulla pala 1 (con 30 stati aggiunti aerodinamici).

7.1.2 Validazione della procedura di identificazione del modello ROM per il rotore

Partendo dalla approssimazione razionale matriciale delle funzioni di trasferimento e seguendo la procedura descritta nel paragrafo 3.4, è stato identificato il modello ROM per il rotore in esame. Per validare tale modello è stato considerato il caso realistico in cui il pilone è considerato solidale all'ultima sezione dell'ala di un velivolo tiltrotor. Tale ala può essere in generale soggetta a deformazioni elastiche di lag v, flappeggio w e di torsione ϕ. Utilizzando questi spostamenti in combinazione dei gradi di libertà di pala si determinano le variabili che rappresentano gli ingressi del modello ROM e dunque si possono calcolare le corrispondenti forze aerodinamiche perturbative agenti sul rotore.

In particolare sono stati considerati due differenti moti del sistema ala/pilone/rotore. Si noti che la scelta del particolare ingresso per il modello ROM è del tutto arbitraria e influenza esclusivamente la forma delle matrici che definiscono il legame cinematico (si veda il capitolo 3.4) e non la metodologia descritta per la sua identificazione. Il primo caso considerato è il moto perturbativo dovuto ad una combinazione del moto dell'ala e delle pale che, partendo da una condizione di riposo, tenda asintoticamente ad un comportamento armonico. Entrando nel dettaglio, la dinamica del sistema ala/pilone/rotore è descritta dalle seguenti espressioni per le derivate prime nel tempo dei gradi di libertà dell'ala (flappeggio w e torsione ϕ intesi all'estremità alare) e della pala

$$\dot{w}(t) = A_w \left(1 - e^{-\alpha_w\, t}\right) \sin(\omega_w\, t) \tag{7.1}$$

$$\dot{\phi}(t) = A_\phi \left(1 - e^{-\alpha_\phi\, t}\right) \sin(\omega_\phi\, t) \tag{7.2}$$

$$\dot{q}_j^d(t) = A_q \left(1 - e^{-\alpha_q\, t}\right) \sin\left[\omega_q\, t - (j-1)\frac{2\pi}{3}\right],$$

nella quale $j = 1, 2, 3$, $A_w = 0.8$m/s, $A_\phi = 0.17$rad/s, $A_q = 0.27$m/s, $\omega_w = \Omega/3$, $\omega_\phi = 1.5\Omega$, $\omega_q = 1.2\Omega$ e $\alpha_w = \alpha_\phi = \alpha_q = 1\ \mathrm{s}^{-1}$.

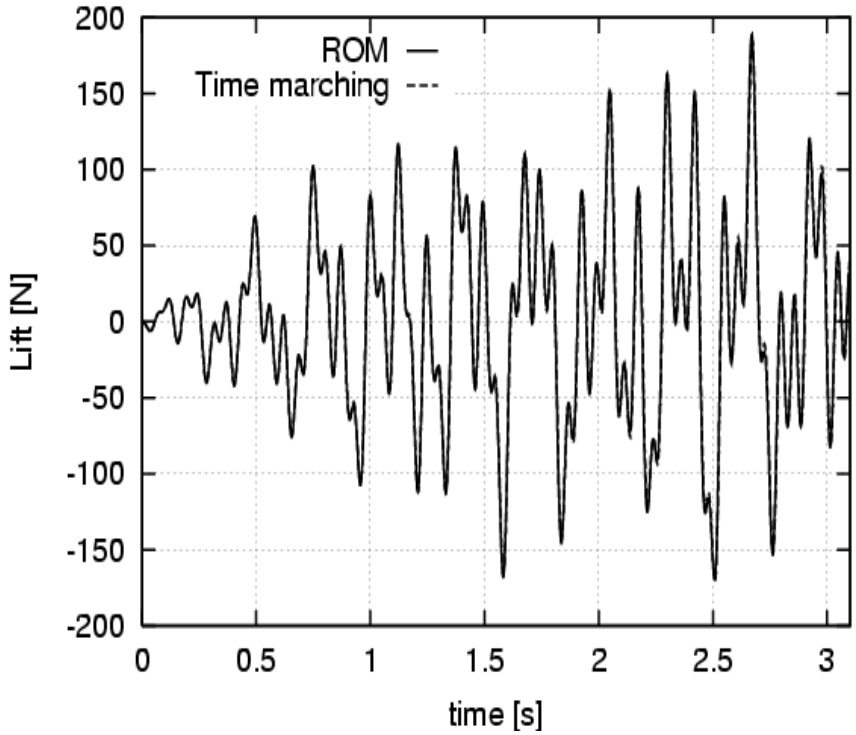

Figura 7.4: Andamento nel tempo della portanza sulla pala 1 dovuto al moto armonico del pilone e della pala

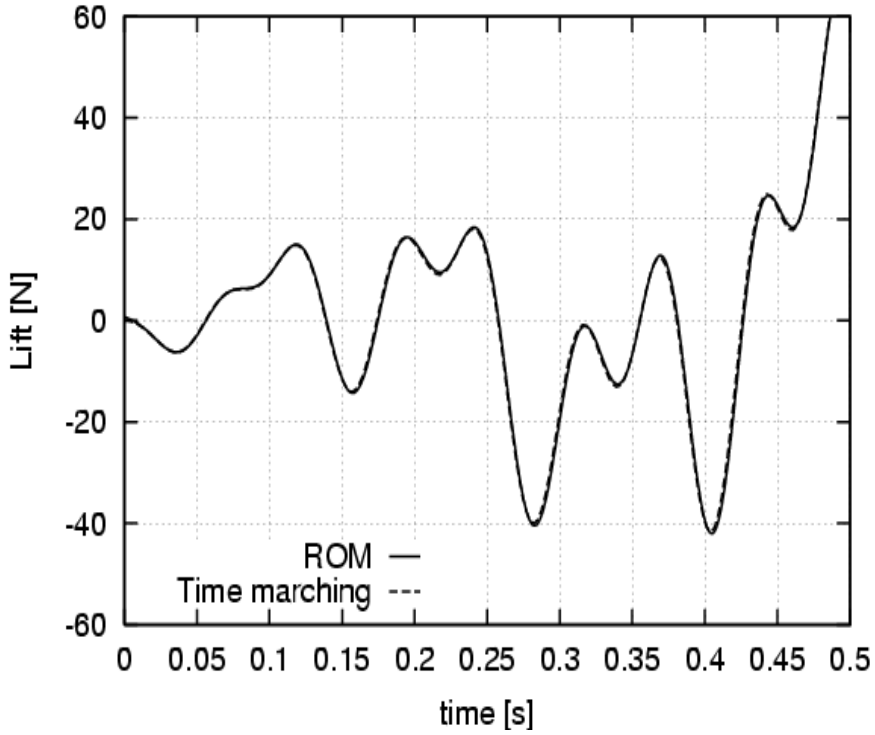

Figura 7.5: Andamento nel tempo della portanza sulla pala 1 dovuto al moto armonico dell'ala e della pala: dettaglio dell'evoluzione iniziale.

I carichi aerodinamici che nascono a seguito di tale moto perturbativo sono stati valutati applicando due diversi approcci. Da un lato è stata utilizzata la procedura che, partendo dall'operatore aerodinamico BEM nel dominio della frequenza, consente, attraverso l'approssimazione polinomiale (RMA), di ottenere il modello ROM per i carichi (si veda paragrafo 3.4). Come confronto è stata considerata la soluzione esatta che fornisce tali carichi mediante integrazione al passo nel tempo basata sulla stessa formulazione BEM. In figura 7.4 è mostrato l'andamento nel tempo della portanza che agisce sulla pala 1 calcolata utilizzando questi due approcci. Le due curve sono in ottimo accordo e ciò dimostra la capacità del modello ROM sviluppato di calcolare con accuratezza i carichi aerodinamici perturbativi agenti sul sistema. Ciò è confermato dalla figura 7.5, nella quale, cambiando la scala degli assi, è mostrata una finestra temporale che consente una analisi più dettagliata delle fasi iniziali della storia temporale della portanza.

Il modello ROM mostra la stessa ottima accuratezza nel valutare tutti i carichi aerodinamici inclusi nel modello. Come ulteriore esempio, in figura 7.6 è riportato il confronto tra le previsioni al passo nel tempo e quelle ottenute dal modello ROM per quanto riguarda il momento torcente aerodinamico agente sulla pala 1, calcolato rispetto a $c/2$. Anche in questo caso le differenze tra i due

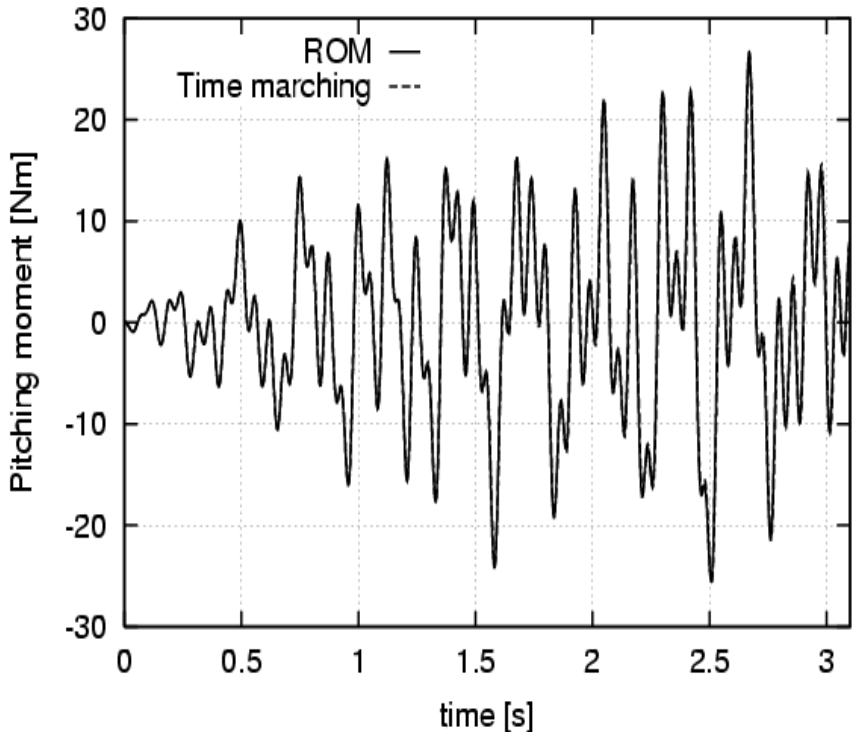

Figura 7.6: Andamento nel tempo del momento torcente di pala 1 dovuto al moto armonico dell'ala e della pala.

risultati non sono apprezzabili e dunque è confermata l'accuratezza del modello ROM sviluppato nel presente lavoro.

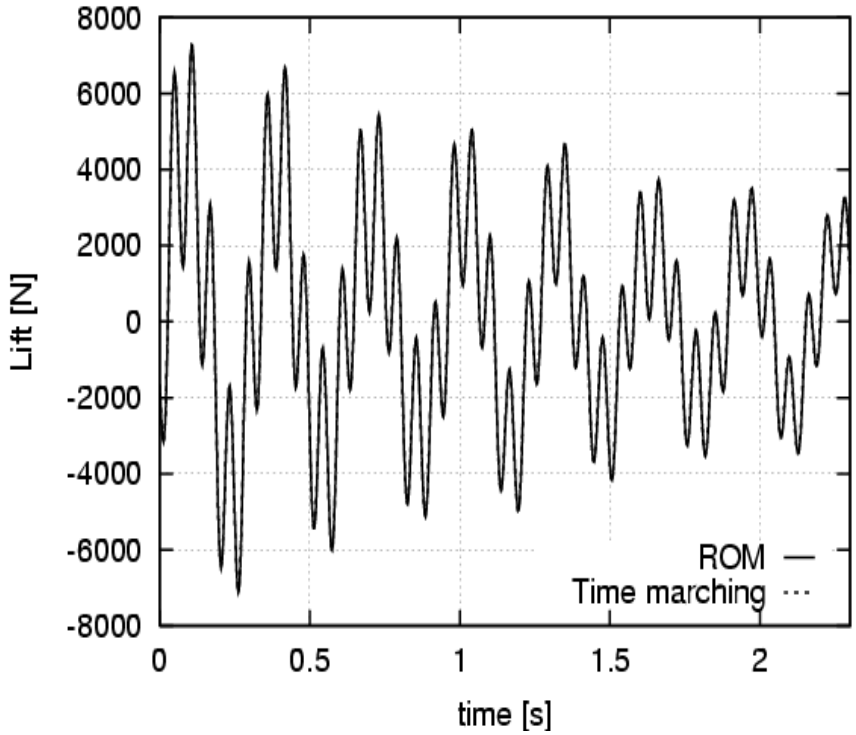

Figura 7.7: Andamento nel tempo della portanza di pala 1 dovuto al moto perturbativo smorzato dell'ala.

Il secondo moto perturbativo del sistema ala/pilone/rotore esaminato simula le oscillazioni smorzate di un'ala perturbata dalla sua condizione di equilibrio stabile. Le pale sono considerate rigidamente connesse al pilone quindi in questo caso l'operatore aerodinamico ha dimensioni minori rispetto al precedente in quanto sono esclusi i gradi di libertà elastici di pala. Questo comporta che la stessa qualità dell'approssimazione razionale matriciale vista in precedenza è stata ottenuta utilizzando solamente 20 poli (infatti le funzioni di trasferimento che coinvolgono i gradi di libertà di pilone hanno un andamento meno oscillatorio in funzione della frequenza rispetto a quelle che coinvolgono i gradi di libertà elastici delle pale). Il moto di ala considerato è dato dalle seguenti espressioni

$$w(t) = A_w\, e^{-\alpha_w\, t}\, \sin(\omega_w\, t)$$
$$\phi(t) = A_\phi\, e^{-\alpha_\phi\, t}\, \sin(\omega_\phi\, t),$$

nella quale $A_w = R/5$, $A_\phi = \pi/20$, $\alpha_w = 0.2\text{s}^{-1}$, $\alpha_\phi = 0.4\text{s}^{-1}$, mentre i valori di ω_w e ω_ϕ sono

gli stessi utilizzati nell'analisi precedentemente illustrata. La figura 7.7 mostra la storia temporale

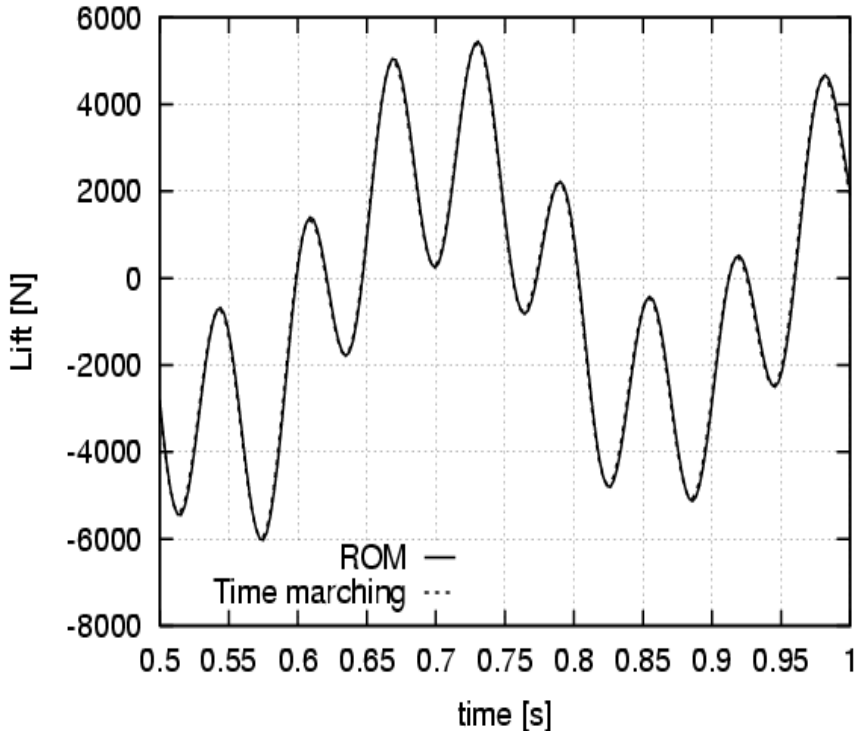

Figura 7.8: Andamento nel tempo della portanza di pala 1 dovuto al moto perturbativo smorzato dell'ala: dettaglio di una finestra temporale ridotta.

della portanza sulla pala 1 a seguito del moto perturbativo smorzato dell'ala: le previsioni ottenute con il modello ROM sono confrontate con quelle ottenute utilizzando il solutore nel dominio del tempo. Analogamente a quanto visto per il moto armonico, anche in questo caso di moto smorzato il modello ROM fornisce delle previsioni molto accurate e ciò è confermato dall'analisi di una finestra temporale ridotta del segnale mostrata in figura 7.8.

La capacità del modello ROM di fornire ottime previsioni dei carichi è confermata dalla figura 7.9, nella quale è riportato l'andamento del momento di flappeggio agente sulla pala 1 dovuto al moto armonico smorzato dell'ala.

Analoga metodologia di confronto è stata utilizzata per investigare la capacità del modello ROM di valutare i carichi aerodinamici agenti su tutte le pale del rotore. In figura 7.10 è riportata la storia temporale dei momenti di flappeggio agenti su ciascuna pala a seguito del moto perturbativo smorzato dell'ala. Per maggior chiarezza nella figura è riportata una finestra temporale ridotta; la curva relativa alla pala 1 è identficata mediante triangoli, quella della pala 2 con i quadrati e quella della

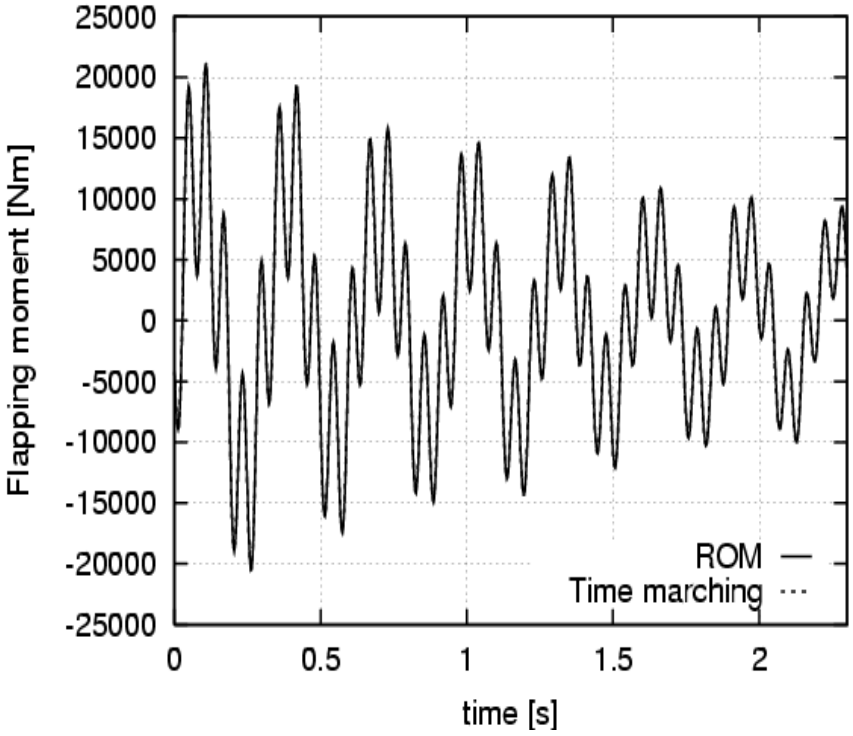

Figura 7.9: Andamento nel tempo del momento di flap di pala 1 dovuto al moto perturbativo smorzato dell'ala.

pala 3 con i pallini. Dalla figura risulta evidente che le previsioni ottenute utilizzando il modello ROM introdotto sono molto accurate per quanto riguarda il calcolo dei carichi agenti su tutte le pale del rotore. Da questa analisi è possibile comprendere come il moto perturbativo del pilone influenzi in misura diversa i carichi agenti sulle pale in base alla posizione azimutale di ciascuna di esse. Nel caso esaminato, per $t = 0$ l'ala è nella sua condizione di moto imperturbato (ovvero $w = 0$ e $\phi = 0$), la pala 1 è allineata con l'ala in posizione esterna e le altre pale sono disposte coerentemente con uno sfasamento di 120° rispetto alla prima. Queste differenze nel rapporto tra posizione della pala e moto del pilone generano carichi diversi sulle diverse pale in quanto, in corrispondenza alla stessa posizione angolare ciascuna pala è soggetta ad un moto perturbativo di trascinamento differente. Questo aspetto è chiarito in figura 7.11 nella quale sono mostrati i momenti di flappeggio agenti sulle pale ottenuti dal presente modello ROM in funzione della posizione angolare della pala corrispondente. Come si nota, il momento agente sulla pala 2 mostra un andamento piuttosto differente rispetto a quello agente sulle pale 1 e 3. Le similitudini che si riscontrano nei momenti di flappeggio agenti su pala 1 e 3 è una conseguenza specifica del tipo di moto perturbativo considerato. In realtà , se si elimina il moto di torsione dell'ala, i momenti di

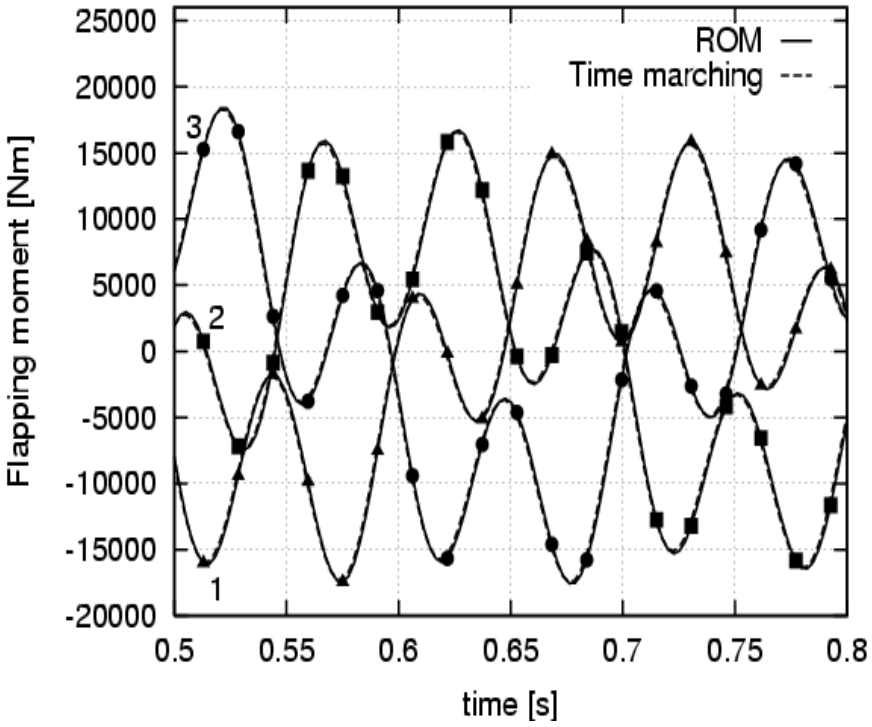

Figura 7.10: Andamento nel tempo dei momenti di flap agenti sulle pale dovuti al moto perturbativo smorzato dell'ala.

flappeggio di tutte le pale mostrano andamenti temporali piuttosto differenti, come mostrato nella figura 7.12, evidenziando quindi la dipendenza dei carichi aerodinamici di pala dalla relazione tra il moto del pilone ed il moto di ciascuna pala. Si noti che il periodo dei segnali temporali mostrati nelle figure 7.11 e 7.12 dipende sostanzialmente dal rapporto tra le frequenze del moto del pilone e la frequenza corrispondente alla velocità di rotazione della pala: ad esempio in figura 7.12 si hanno frequenze di oscillazione più basse per via della mancanza del moto di torsione di ala caratterizzato da una frequenza più alta.

Per il caso del moto di ala perturbativo smorzato è stata valutata la sensibilità della capacità di previsione del modello ROM all'accuratezza dell'approssimazione razionale matriciale. In particolare per gli scopi aeroelastici è opportuno ridurre i costi computazionali e dunque sarebbe auspicabile avere un numero ridotto di stati aggiunti aerodinamici. In quest'ottica è stato analizzato l'effetto indotto dalla riduzione del numero di poli aerodinamici sulle capacità del modello ROM di ottenere previsioni di carichi sufficientemente accurate. Come indice dell'accuratezza è stata scelta la norma in L_2 (calcolata nell'intervallo di tempo compreso tra $1\text{s} \leq t \leq 2$) della differenza tra i risultati ottenuti dal modello ROM e quelli ottenuti utilizzando l'approccio al passo nel tempo. In

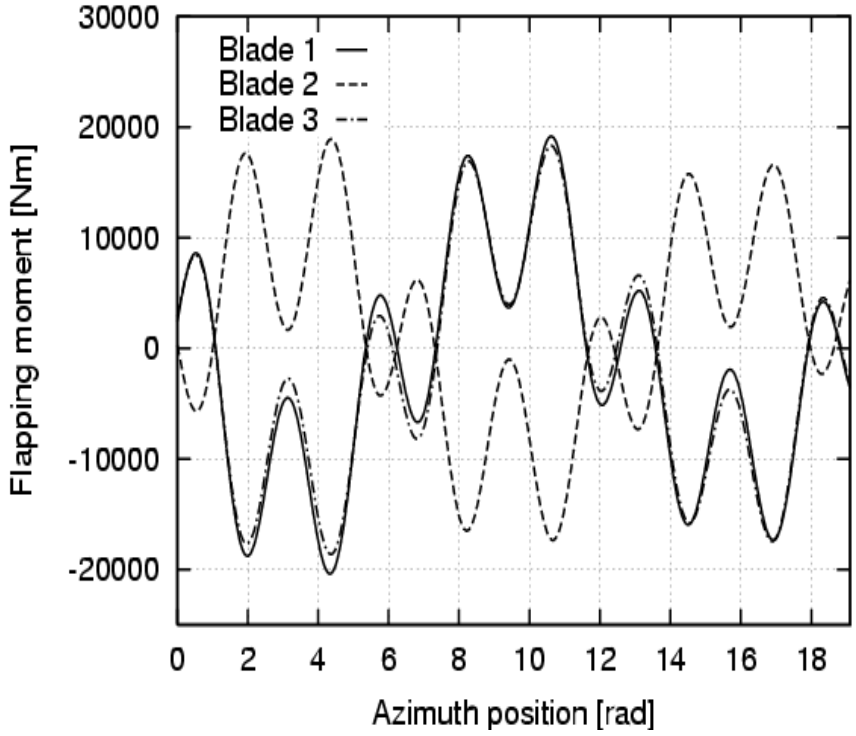

Figura 7.11: Momenti di flappeggio in funzione della posizione angolare di pala dovuti al moto perturbativo smorzato dell'ala (flappeggio e torsione).

particolare è stata considerata la norma L_2 relativa, ovvero ottenuta dividendo la norma L_2 per il valore quadratico medio del carico calcolato utilizzando l'approccio al passo nel tempo. La tabella 1 mostra i valori di tale indice di qualità al variare del numero di poli utilizzato per la RMA delle funzioni di trasferimento aerodinamiche. In particolare la tabella è stata completata prendendo in considerazione la portanza agente sulla pala 1 a seguito del moto perturbativo smorzato dell'ala.

Tabella 1 Indice di accuratezza del modello ROM

Poli	Norma L_2 relativa
5	0.122
8	0.100
12	0.031
20	0.018

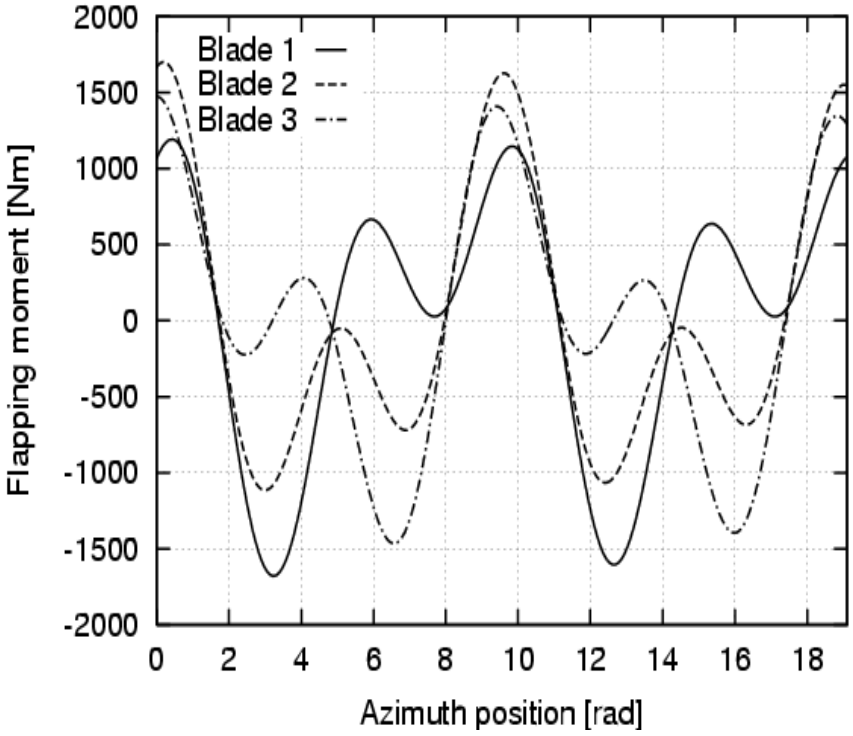

Figura 7.12: Momenti di flappeggio in funzione della posizione angolare di pala dovuti al moto perturbativo smorzato dell'ala (flappeggio).

Naturalmente all'aumentare del numero di stati aggiunti aerodinamici utilizzati, l'accuratezza del modello ROM migliora. Tuttavia è interessante osservare che l'accuratezza delle previsioni ottenute utilizzando tale modello rimane soddisfacente anche riducendo notevolmente il numero degli stati aggiunti. A scopo esemplificativo in figura 7.13 è riportata l'approssimazione della funzione di trasferimento tra $\mathbf{v}_x$ e la portanza sulla pala 1 ottenuta utilizzando 5 poli. Rispetto a quanto visto precedentemente si riscontrano delle discrepanze tra funzione esatta e funzione approssimante, tuttavia l'andamento globale sembra comunque discretamente catturato. L'influenza di tali discrepanze sui carichi aerodinamici calcolati utilizzando il modello ROM è mostrata in figura 7.14, nella quale è mostrato un dettaglio della storia temporale della portanza sulla pala 1. Come già indicato dal corrispondente valore della norma L_2 relativa, nonostante il numero ridotto di stati aggiunti aerodinamici utilizzati, i carichi calcolati utilizzando il modello ROM proposto rimangono in soddisfacente accordo rispetto a quelli ottenuti dall'approccio al passo nel tempo.

A scopo esemplificativo delle capacità applicative del modello ROM sviluppato è stato investigato un aspetto relativo ai rotori di velivoli tiltrotor tecnologicamente molto interessante per le ricadute che esso ha sul comportamento aeroelastico del sistema ala/rotore. Il sistema proprotor analizzato

finora utilizza un rotore di tipo *hinged* nel quale le pale sono vincolate al mozzo in modo tale da potersi muovere una indipendentemente dall'altra. Attualmente molti proprotor utilizzano rotori di tipo *gimbaled*, ovvero rotori nei quali le pale sono rigidamente connesse al mozzo ed il mozzo è connesso al pilone mediante un giunto elastico. Considerando un rotore di tipo *gimbaled* dotato di pale rigide si può descrivere il moto di flappeggio di pala 1 come

$$\dot{\beta}(t) = A_\beta \, (1 - e^{-\alpha_\beta \, t}) \sin \left[\, \omega_\beta \, t \, \right],$$

nella quale $A_\beta = 0.08$rad/s, $\omega_\beta = 1.1\Omega$, $\alpha_\beta = 0.2\text{s}^{-1}$. Naturalmente le pale 2 e 3 saranno dotate di un moto sfasato corrispondente. Il rotore utilizzato come confronto è dotato di pale rigide ognuna dotata di un moto di flappeggio attorno alla cerniera posta alla radice definita da

$$\dot{\beta}_j(t) = A_\beta \, (1 - e^{-\alpha_\beta \, t}) \sin \left[\omega_\beta \, t - (j-1) \frac{2\pi}{3} \right],$$

nella quale $j = 1, 2, 3$ e dunque il moto della pala 1 è esattamente lo stesso che nel caso di rotore *gimbaled*. In entrambi i casi il moto dell'ala è quello descritto nelle espressioni 7.1 e 7.2. Le fasi iniziali dell'andamento temporale della portanza sulle tre pale ottenuto, per le due differenti configurazioni, mediante il modello ROM presentato, sono illustrate in figura 7.15. Come si nota, mentre i carichi agenti sulla pala 1 hanno un andamento praticamente identico nei due casi (come è lecito aspettarsi data l'identicità del moto di pala 1 nelle due configurazioni), le pale 2 e 3 sono soggette a carichi molto diversi che daranno luogo a comportamenti aeroelastici diversi del sistema ala/rotore.

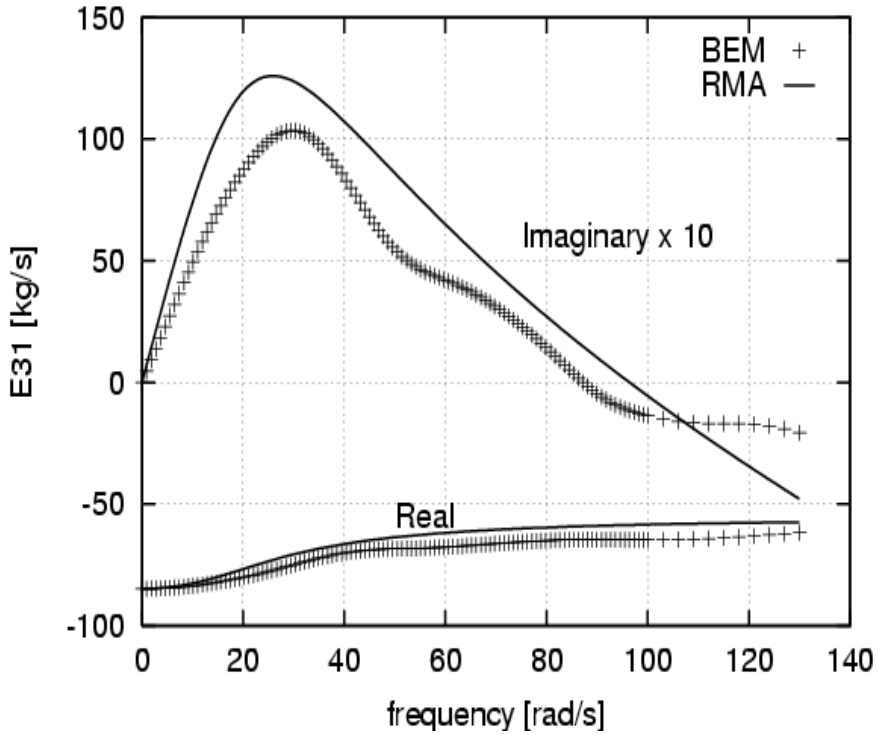

Figura 7.13: RMA della funzione di trasferimento tra $\mathbf{v}_x$ e la portanza sulla pala 1 (con 5 stati aggiunti aerodinamici)

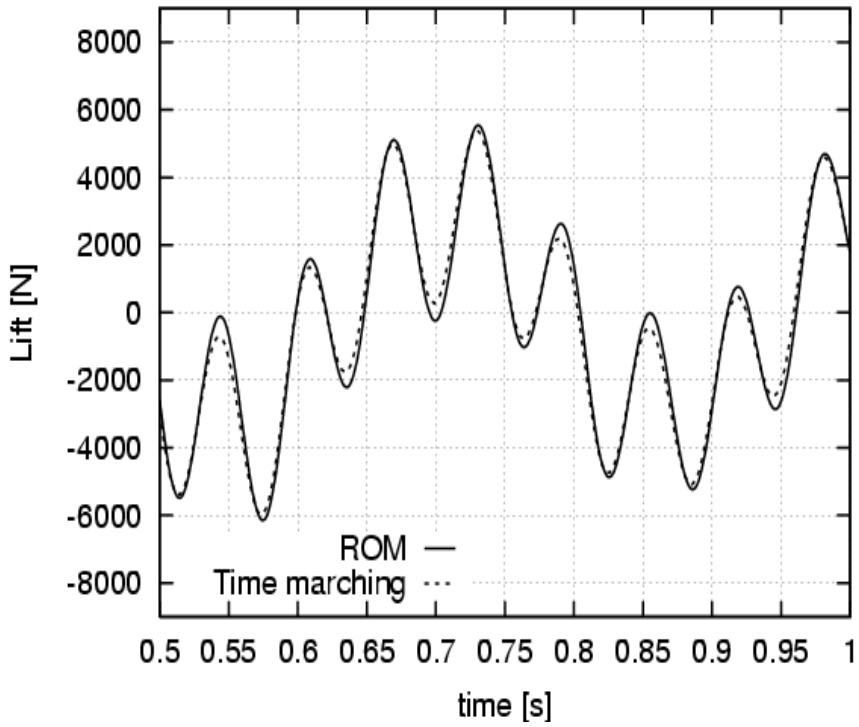

Figura 7.14: Andamento temporale della portanza sulla pala 1 dovuta al moto smorzato dell'ala. ROM identificato utilizzando una RMA con 5 poli.

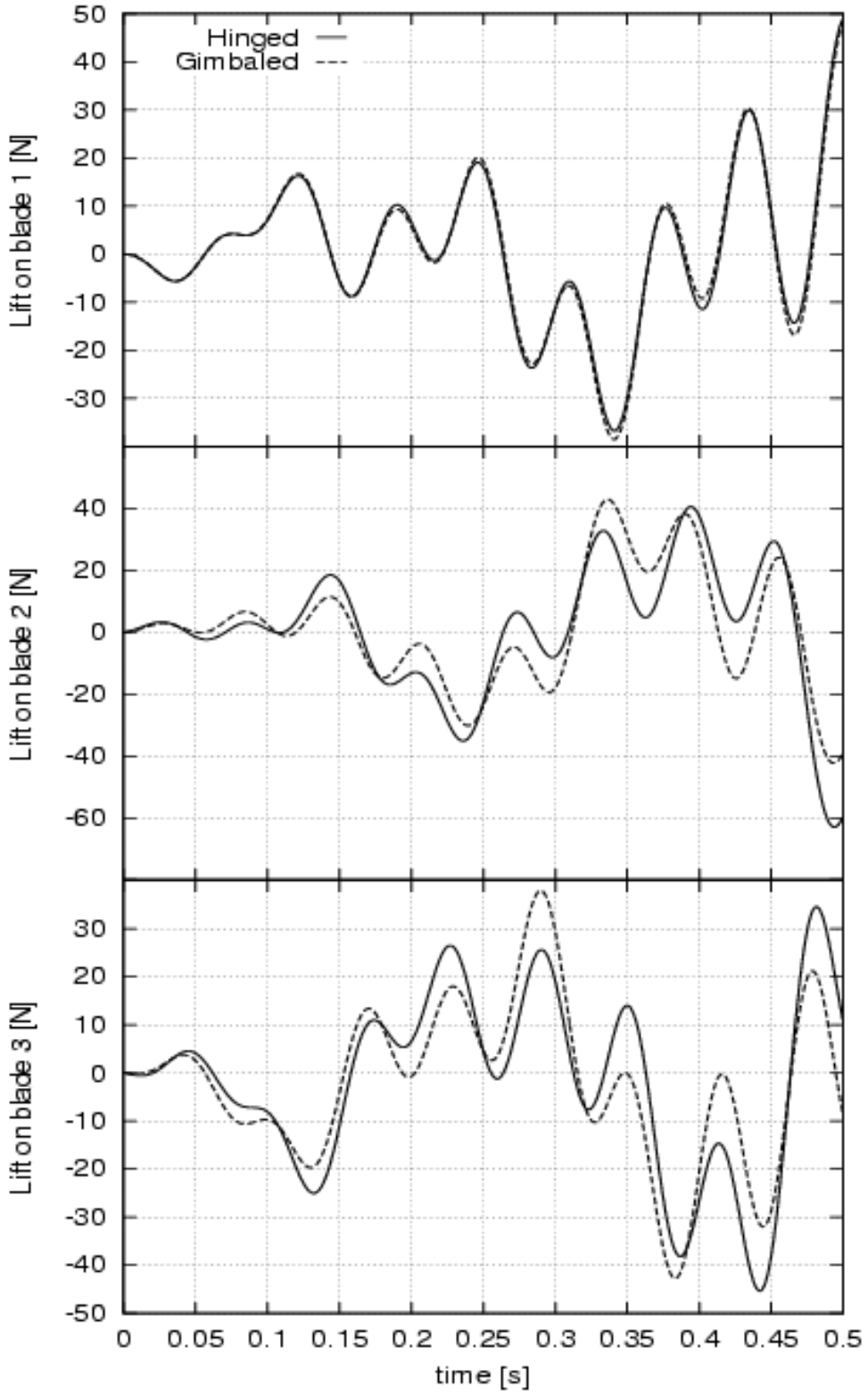

Figura 7.15: Andamento della portanza sulle pale del rotore. Confronto tra rotore *gimbaled* e *hinged*.

7.2 Validazione del modello aerodinamico interazionale

7.2.1 Validazione della tecnica di allineamento della scia rotorica: propeller isolato

In questo paragrafo saranno illustrati i principali risultati relativi alla validazione del solutore BEM nel dominio del tempo per quanto riguarda l'applicazione a propeller isolati in condizioni di flusso uniforme (per maggiori dettagli si rimanda a [11]).

Nell'ottica dello sviluppo del modello aerodinamico interazionale in cui parte rotante e fissa interagiscono tra loro, risulta infatti fondamentale poter catturare con accuratezza le caratteristiche del campo fluidodinamico che il rotore induce a valle. Particolare importanza ha dunque la validazione dell'algoritmo che, a partire dal campo di velocità a valle del rotore calcolato mediante il solutore BEM, consente di allineare la superficie della scia al campo fluidodinamico locale. Utilizzando tale metodologia è possibile ottenere la forma della scia come parte integrante della soluzione non lineare del problema potenziale (si veda capitolo 4).

Specificatamente, è stata selezionata un'elica navale quadripala (INSEAN E779A) in flusso uniforme per la quale sono disponibili i campi di velocità e di vorticità misurati mediante tecniche di tipo LDV (*Laser Doppler Velocimetry*) e PIV (*Particle Image Velocimetry*). Per la stessa elica sono anche disponibili i dati relativi ai carichi di spinta e coppia che essa genera.
In figura 7.16 è riportata la traccia delle scie rilasciate dalle pale di un'elica ottenuta su un piano parallelo all'asse di rotazione per tre differenti condizioni di lavoro. In particolare, le tracce della scia potenziale allineata al flusso locale mediante l'algoritmo iterativo descritto nel capitolo 4 sono riportate in nero (la scia potenziale è un dominio a spessore nullo, ovvero una superficie) e sono confrontate con il campo della turbolenza assiale ottenuto mediante una tecnica velocimetrica laser (PIV): tale campo risulta indicativo delle zone di concentrazione della vorticità nel campo ed è ottenuto come RMS della velocità assiale. Come si nota, il modello numerico di scia allineata si dimostra capace di individuare con buona approssimazione le tracce della scia rilasciata dalle pale fino a circa due diametri a valle dell'elica catturando aspetti quali l'arrotolamento del vortice di estremità e la contrazione della scia nella regione immediatamente a valle dell'elica. Un limite del presente modello è nella mancata modellazione dell flusso nella regione a valle del mozzo dell'elica. In tale zona non sono disponibili dati sperimentali per la mancanza di accesso ottico. In ogni

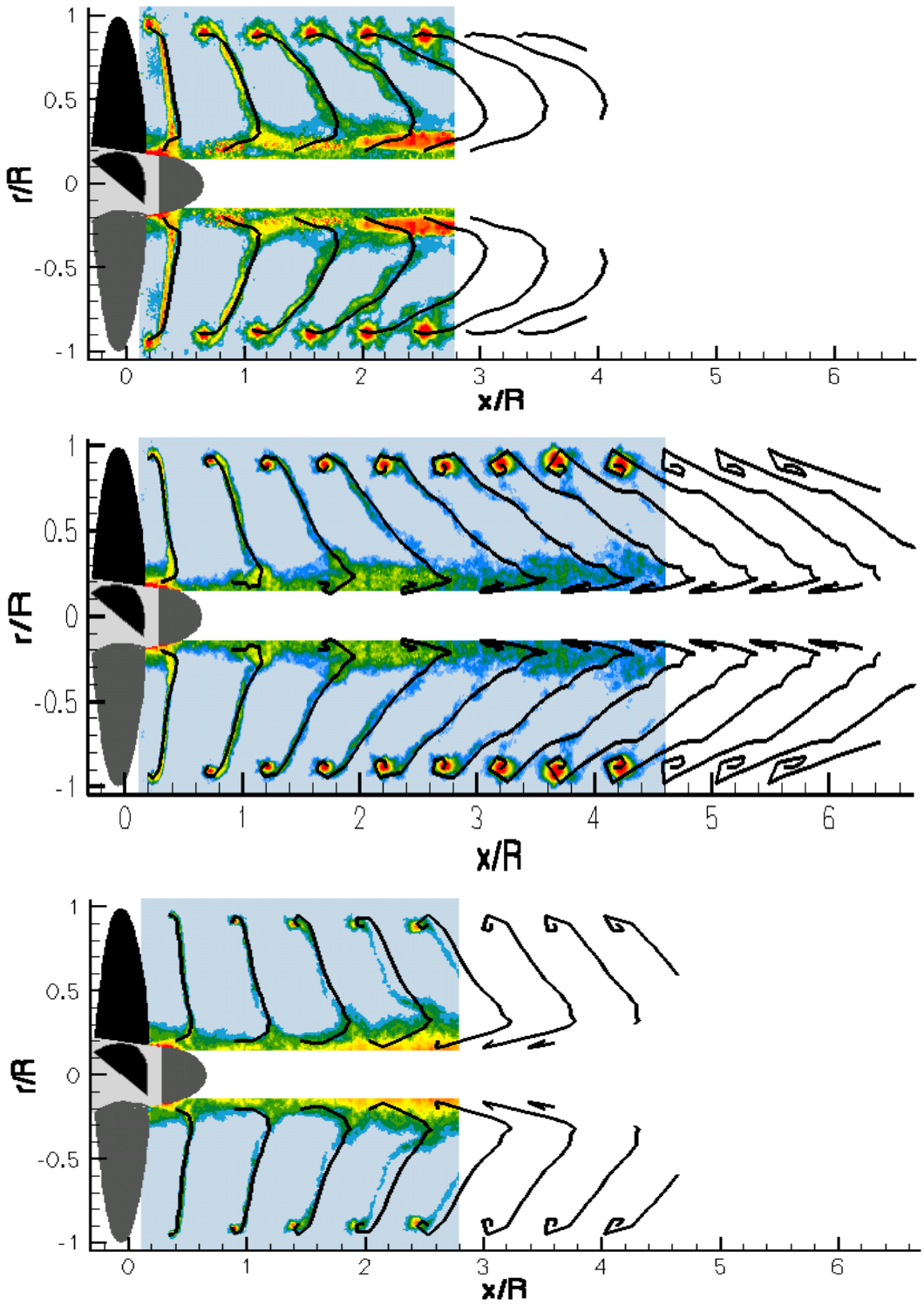

Figura 7.16: Livelli di turbolenza assiale misurati in un piano longitudinale a valle dell'elica confrontati con le previsioni numeriche delle tracce della scia (linee tratteggiate nere). Elica INSEAN E779A in condizioni di $J = 0.748$ (in alto), $J = 0.88$ (al centro), $J = 1.012$ (in basso).

caso si tratta di una zona dominata da fenomeni di turbolenza e di diffusione viscosa della vorticità che sono trascurati dal modello potenziale adottato nel presente lavoro. Questo spiega dunque il comportamento della forma della scia che mostra un arrotolamento non fisico in corrispondenza delle zone del mozzo. Analoghe considerazioni possono essere fatte osservando le tracce della scia

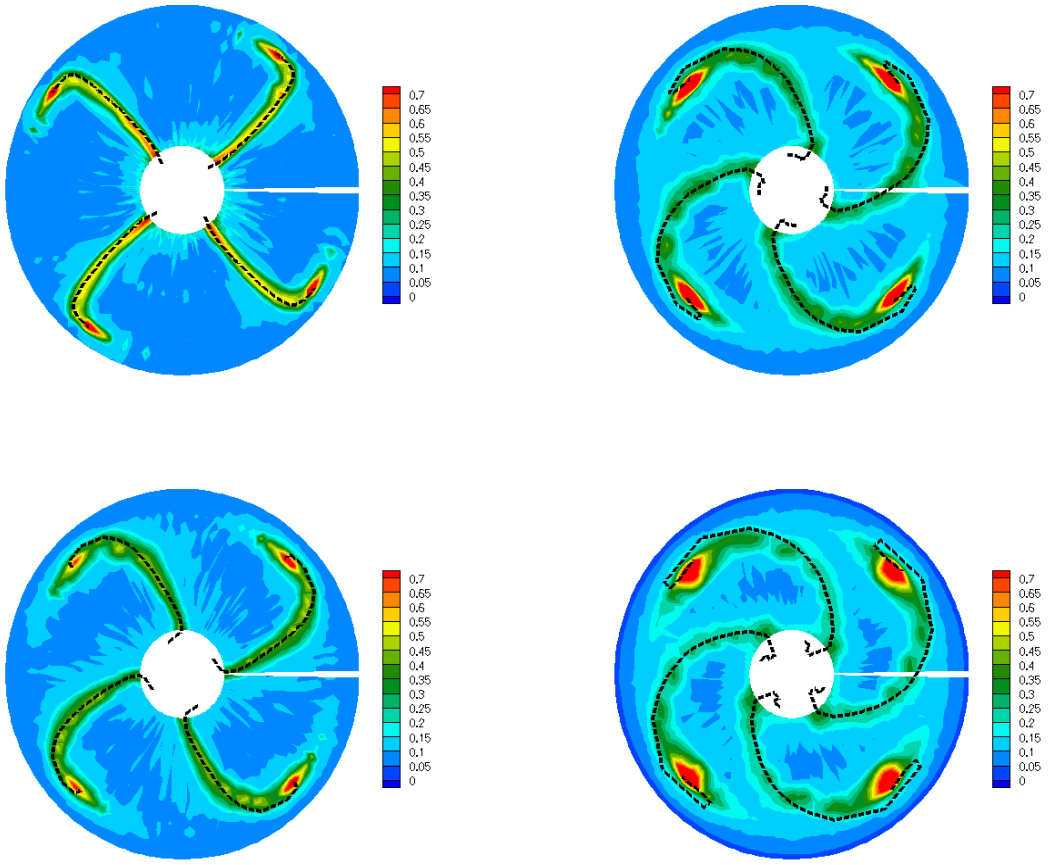

Figura 7.17: Livelli di turbolenza assiale misurati su piani trasversali a valle dell'elica confrontati con le previsioni numeriche delle tracce della scia (linee tratteggiate nere). Elica INSEAN E779A in condizioni di $J = 0.88$; piani trasversali a $x/R = 0.2$ (in alto a sinistra), $x/R = 0.65$ (in basso a sinistra), $x/R = 1.15$ (in alto a destra), e $x/R = 1.65$ (in basso a destra).

rotorica su piani trasversali posti a valle dell'elica. In particolare in figura 7.17 sono mostrate le mappe dei livelli di turbolenza della velocità assiale misurate con una tecnica LDV in corrispondenza a $J = 0.88$ e su quattro piani in posizione $x/R = 0.2, 0.65, 1.15, 1.65$. Tali livelli, come detto, danno una stima della posizione della scia vorticosa rilasciata dall'elica e dunque è possibile confrontarle con i risultati numerici ottenuti, per gli stessi piani, mediante la tecnica di allineamen-

to della scia (linee tratteggiate nere in figura). Come si nota, il modello numerico è in grado di catturare con buona accuratezza caratteristiche fondamentali della scia palare quali la distribuizone del passo in direzione radiale, l'arrotolamento in corrispondenza all'estremità e la contrazione della vena fluida. All'aumentare della distanza del piano dal disco dell'elica si notano alcune (ridotte) discrepanze tra previsioni numeriche e risultati sperimentali (piani a $x/R = 1.15, 1.65$): a tali distanze i fenomeni di diffusione viscosa, che non sono tenuti in conto dal presente modello potenziale, si fanno via via più determinanti nella dinamica della scia.

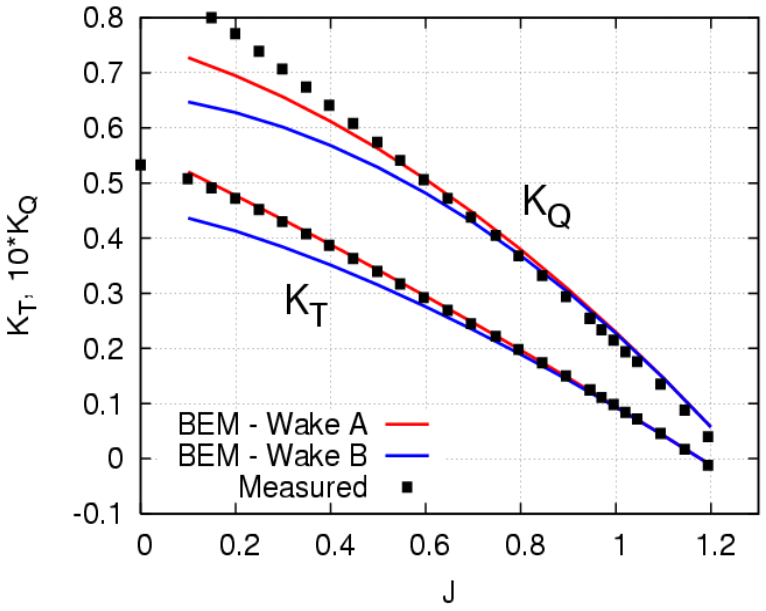

Figura 7.18: Curve dei coefficienti di spinta (K_T) e di coppia (K_Q) per un'elica quadripala (INSEAN E779A): predizioni numeriche (linee) confrontate con risultati sperimentali (simboli): confronto tra scia prescritta (B) e scia libera (A).

La vorticità rilasciata dalle pale dell'elica nella superficie di scia è legata alla generazione dei carichi sulle pale stesse. Pertanto l'inclusione della tecnica di allineamento di scia al campo nel solutore aerodinamico BEM consente di determinare con buona approssimazione le prestazioni dell'elica in flusso stazionario. Si definiscono i coefficienti di spinta e coppia secondo le

$$K_T = \frac{T}{\rho n^2 D^4} \tag{7.3}$$

$$K_Q = \frac{Q}{\rho n^2 D^5} \tag{7.4}$$

nelle quali T e Q rappresentano rispettivamente la spinta e la coppia generate dal propeller, n è il numero di giri al secondo che corrisponde alla velocità di rotazione dell'elica e D è il diametro. In figura 7.18 sono riportate le curve dei coefficienti di spinta e coppia al variare del coefficiente di avanzo $J = V_\infty/nD$ ottenute utilizzando un modello di scia prescritta elicoidale (modello B) e mediante la tecnica di allineamento (modello A). Le curve numeriche sono confrontate con risultati ottenuti da campagne di misurazione sperimentale. Come si nota, l'inclusione di un modello di scia libera consente di migliorare la previsione delle prestazioni soprattutto per bassi valori di J, in corrispondenza ai quali il passo della scia risulta molto basso e la sua deformazione indotta dal carico palare elevata: in queste condizioni la forma della scia allineata risulta piuttosto diversa da un semplice elicoide e ciò influenza in maniera determinante i carichi aerodinamici agenti sulle pale.

Infine è stata validata la capacità del solutore BEM di catturare le caratteristiche del campo di velocità indotto a valle del rotore. In figura 7.19 sono mostrati i campi di velocità assiale e radiale adimensionalizzati rispetto al flusso indisturbato calcolati lungo circonferenze di raggio fissato ($r/R = 0.7, 0.9$) in corrispondenza al piano a $x/R = 0.2$. Le previsioni numeriche (in rosso) sono confrontate con le misurazioni del campo di velocità ottenute mediante tecniche laser LDV e PIV (in blu e nero rispettivamente). Come si nota il modello è in grado di descrivere con buona approssimazione il campo di velocità assiale nelle regioni interpalari (dove il flusso è sostanzialmente potenziale), mentre non è in grado di descrivere il difetto di velocità dovuto alla porzione viscosa della scia che risulta evidente in corrispondenza di $\theta \cong 40$ nel caso a $r/R = 0.7$. Per quanto riguarda il campo di velocità radiale il modello mostra una sufficiente capacità di descrizione, pur evidenziando alcune discrepanze in corrispondenza a $r/R = 0.7$.

Analoghe considerazioni possono essere fatte per quanto riguarda i piani più lontani dal disco dell'elica. A scopo esemplificativo in figura 7.20 è riportato il confronto numerico/sperimentale per un piano posto a $x/R = 1.15$. Il modello si dimostra in grado di fornire con sufficiente approssimazione la stima dei campi di velocità pur evidenziando, come prevedibile, una minore accuratezza della previsione numerica rispetto a quanto visto per il piano più vicino al disco elica.

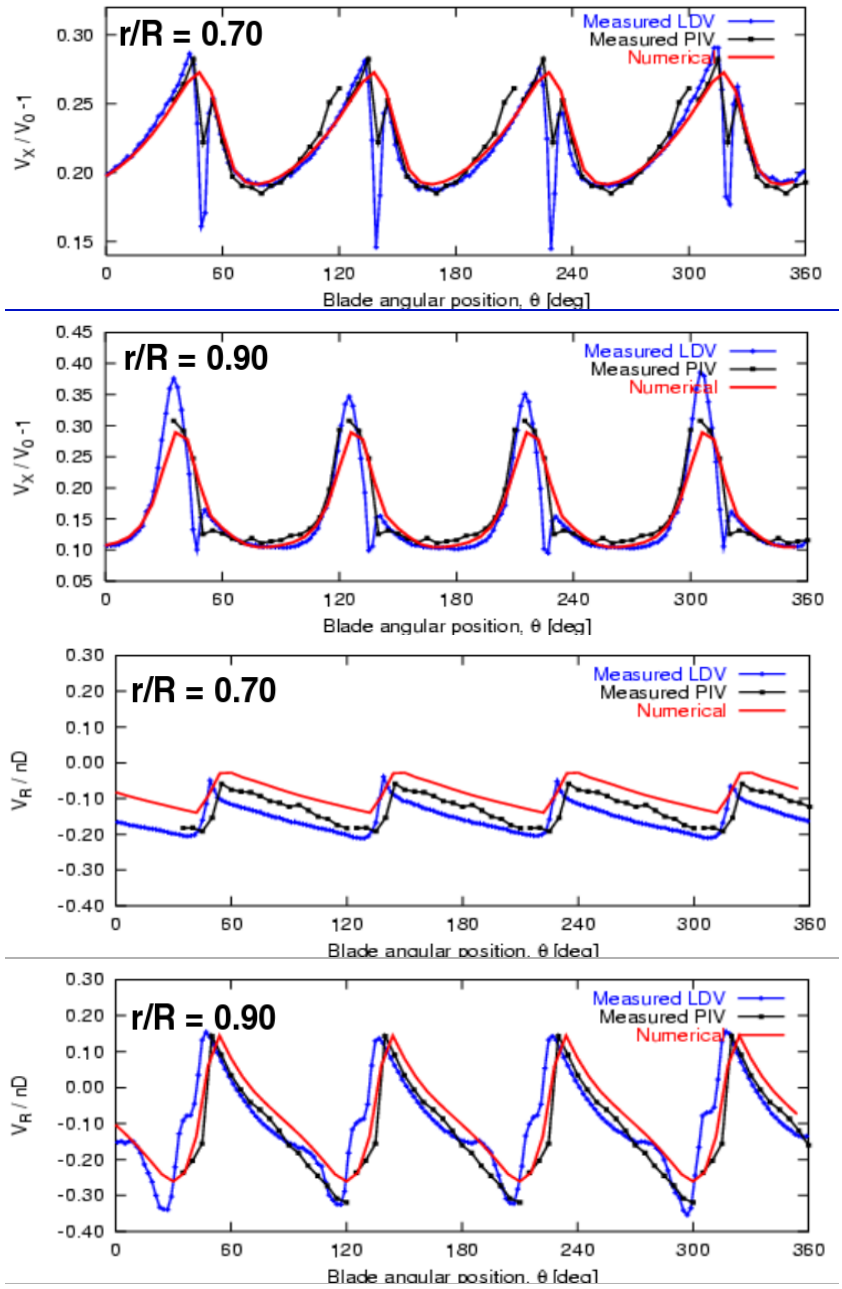

Figura 7.19: Campi di velocità assiale V_X e radiale V_R a valle dell'elica INSEAN E779A: previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.88$, sul piano a $x/R = 0.2$ e per $r/R = 0.7$ e $r/R = 0.9$.

7.2.2 Analisi idrodinamica di configurazioni elica/timone

Allo scopo di validare il solutore aerodinamico BEM sviluppato per la caratterizzazione del flusso non–stazionario attorno a configurazioni di tipo rotore/ala è stata presa in considerazione una tipica

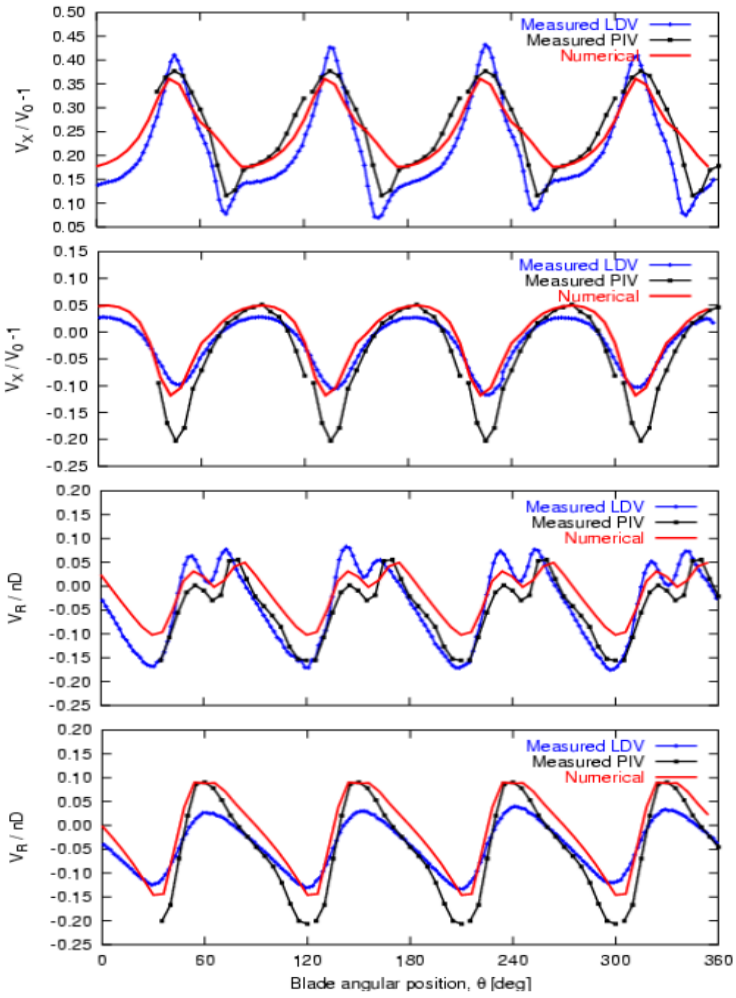

Figura 7.20: Campi di velocità assiale V_X e radiale V_R a valle dell'elica INSEAN E779A: previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.88$, sul piano a $x/R = 1.15$ e per $r/R = 0.7$ e $r/R = 0.9$.

configurazione navale caratterizzata da un timone che lavora nella scia di un'elica. Su questa configurazione la letteratura fornisce numerose e dettagliate campagne sperimentali. In particolare sono stati considerati due differenti casi test: il primo, basato sulla campagna di esperimenti illustrata in [27] si sofferma su grandezze locali e globali mediate su un periodo di rivoluzione dell'elica; il secondo esperimento (descritto in [5]) consente invece di investigare la capacità del modello proposto di catturare le caratteristiche non–stazionarie del campo fluidodinamico attorno a questo tipo di configurazione. Queste due diverse direzioni di indagine sono egualmente importanti per le configurazioni esaminate. Si consideri ad esempio il caso di un sistema elica/timone: la conoscenza

di grandezze mediate nel tempo quali la distribuzione di pressione sulla superficie del timone ed i carichi globali agenti sullo stesso consente di caratterizzare il sistema propulsivo dal punto di vista della sua efficienza e delle sue prestazioni globali (in particolare riguardo alle capacità del timone di far manovrare la nave sulla quale è installato); la possibilità di valutare le pressioni non–stazionarie che agiscono sul timone e dovute all'interazione con la scia rotorica risultano fondamentali per la progettazione delle parti meccaniche che saranno soggette a vibrazioni, per prevedere fenomeni cavitativi ed erosivi innescati dalla scia rotorica sulla superficie del timone, nonché per valutare le emissioni acustiche del sistema propulsivo.

Si è dunque dapprima considerata la configurazione sperimentata in [27] riportata in figura 7.21. Questo particolare caso test si riferisce ad una configurazione elica/timone sperimentata in galleria del vento e l'attività sperimentale condotta fornisce una approfondita descrizione dei campi di pressione sulla superficie del timone mediati sul periodo di rotazione nonché dati relativi ai carichi globali mediati agenti sull'elica e sul timone per diverse varianti della geometria di base e per varie condizioni di flusso. L'elica appartiene alla serie delle eliche di Wageningen, in particolare

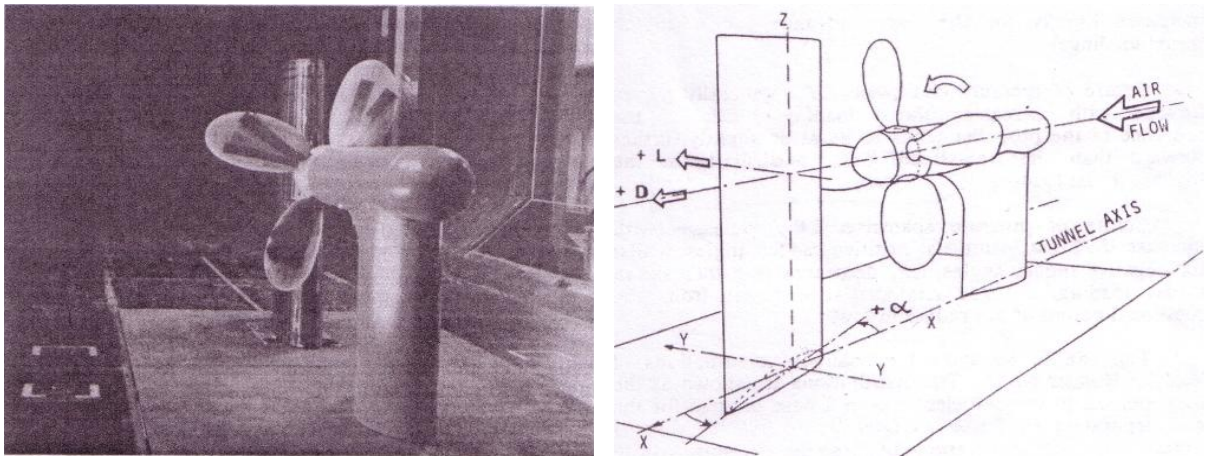

Figura 7.21: Configurazione dell'esperimento di Molland e Turnock (1992)

si tratta di una Wageningen B4.40 quadripala modificata, con un diametro $D = 800$mm. Il timone è a pianta rettangolare, con rapporto di allungamento $L/c = 1.5$ e caratterizzato da sezioni con profili NACA 0020. La configurazione che è stata presa in considerazione nel presente lavoro, tra quelle studiate in [27], è quella identificata con il numero 3. Per tale configurazione la distanza del timone dal disco dell'elica è pari a $x/D = 0.39$ e le condizioni di lavoro considerate sono $J = 0.35, 0.51, 0.94$.

In figura 7.22 è riportato un esempio della griglia di calcolo BEM utilizzata per la soluzione del problema attorno a questa configurazione (per chiarezza è stato eliminato il corpo che, posto al di sopra del timone, simula l'effetto di confinamento della parete della galleria del vento). Inoltre lo strut che sostiene il mozzo dell'elica e lo collega alla parete della galleria non è stato incluso nella simulazione per mancanza dei dati relativi alla sua geometria. Tuttavia si tratta di un corpo affusolato posto ad incidenza nulla pertanto è prevedibile che la scia rilasciata dal suo bordo d'uscita abbia effetti locali e piuttosto ridotti sulla distribuzione di pressione sul timone e sui carichi globali agenti su di esso.

Sono state dapprima prese in considerazione le prestazioni globali medie del timone. Tutte le

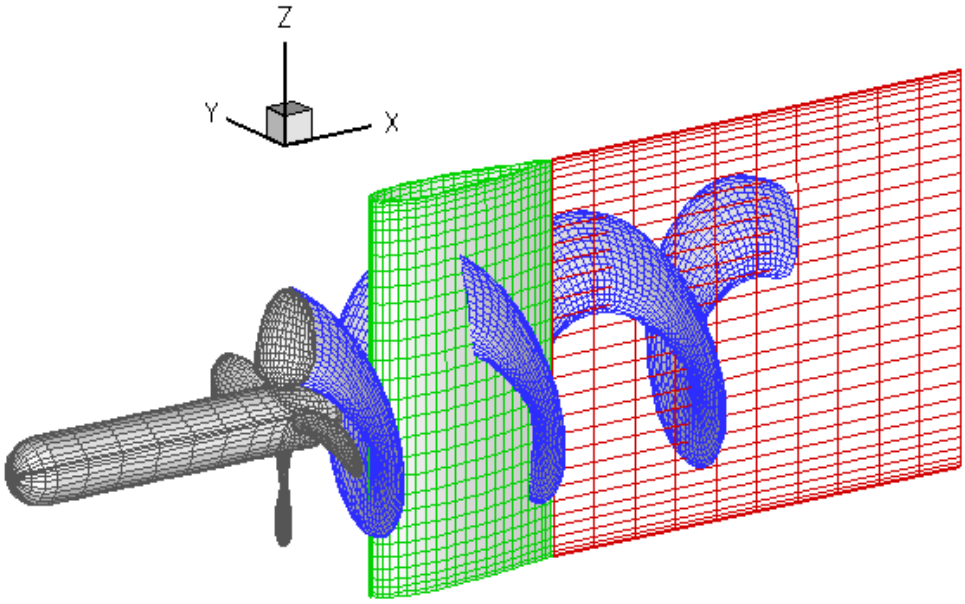

Figura 7.22: Esempio di discretizzazione a pannelli per la configurazione studiata in [27]. Sono mostrati: l'elica e la scia rilasciata da una sua pala, il mozzo ed il timone con relativa scia

simulazioni numeriche illustrate nel presente paragrafo sono state ottenute senza utilizzare l'algoritmo di allineamento della scia al flusso locale indotto dalla presenza dell'elica e del timone. Ciò comporta una notevole riduzione dell'onere computazionale pur garantendo, come si vedrà , una sufficiente accuratezza nel calcolo dei carichi globali agenti sul timone.

Le figure 7.23, 7.24, e 7.25, mostrano l'andamento del coefficiente di portanza del timone mediato

sul giro al variare dell'angolo di incidenza. In particolare i valori numerici sono stati ottenuti considerando i valori istantanei del C_L ottenuti mediante la soluzione al passo nel tempo secondo la metodologia basata sul solutore BEM illustrata nel capitolo 4, e facendone una media su un periodo di rivoluzione dell'elica. I corrispondenti risultati sperimentali di confronto sono invece ottenuti in [27] mediante una tecnica di filtraggio del segnale ottenuto dagli estensimetri.

Come si nota, il modello è in grado di valutare con sufficiente accuratezza il coefficiente di portanza medio. In particolare è correttamente previsto l'incremento della pendenza delle curve del C_L al diminuire del coefficiente d'avanzo: questo effetto è legato al fatto che, diminuendo J aumenta il carico palare e dunque il flusso che investe il timone risulta maggiormente accelerato con conseguente aumento della portanza sul timone a parità di incidenza.

È da notare che, in condizioni vicine a quelle di lavoro del sistema propulsivo ($J = 0.8$), il modello numerico è in grado di prevedere con buona approssimazione il coefficiente di portanza del timone (eccetto per alti angoli d'attacco, condizioni, queste, in cui si va verso lo stallo e dunque si è al di fuori dei limiti di applicabilità di un modello basato sull'ipotesi di flussi potenziali) mentre, per bassi valori di J, ovvero per alti valori del carico palare, le previsioni numeriche mostrano una tendenza a sottostimare il C_L del timone. Tuttavia è da notare che, in queste condizioni il flusso che investe il timone è caratterizzato da un alto contenuto energetico per via dell'elevato carico palare per cui i fenomeni legati alla separazione e allo stallo si hanno in corrispondenza di angoli di incidenza più elevati rispetto a quanto accade per alti valori del coefficiente d'avanzo. Pertanto il modello mantiene la capacità di fornire con sufficiente accuratezza le previsioni dei carichi per angoli maggiori per $J = 0.35$ rispetto a quanto non faccia per $J = 0.94$.

Allo scopo di valutare l'efficacia del modello per la simulazione numerica dell'impatto tra la scia rotorica e la superficie del timone, è stato valutato l'andamento del coefficiente di portanza medio in corrispondenza a $J = 0.51$ senza includere nella simulazione tale modello. In figura 7.26 è mostrato il confronto del risultato ottenuto con i corrispondenti risultati sperimentali. Come si può notare, rispetto alla figura 7.24 (nella quale il modello di impatto è stato utilizzato) le previsioni numeriche denotano un generale maggiore scostamento rispetto ai dati sperimentali indicando che una accurata modellazione dell'interazione scia/corpo è importante ai fini della previsione delle prestazioni del sistema elica/timone.

La capacità del modello interazionale proposto di valutare le prestazioni del sistema elica/timone è stata ulteriormente investigata comparando le curve del coefficiente di portanza medio per il timo-

ne isolato (ovvero in assenza dell'elica) e per il timone nella scia dell'elica nelle varie condizioni di lavoro. In figura 7.27 è mostrato l'incremento del C_L che, a parità di angolo di incidenza, si ha quando il timone lavora a valle dell'elica. In particolare in figura la quantità $C_{L_J} - C_{L_{isolated}}$ denota la differenza tra il valore del C_L in condizioni di flusso libero e quello che si ha quando il timone si trova a valle dell'elica. Confrontando tale incremento con quanto ottenuto dalle evidenze sperimentali si può concludere che il modello numerico si dimostra in grado di prevedere con sufficiente accuratezza l'incremento delle prestazioni del timone pur confermando una crescente inaccuratezza all'aumentare delle condizioni di carico dell'elica.

Dal punto di vista della valutazione delle capacità di manovra dell'unità sulla quale è installato il sistema elica/timone è molto importante valutare anche il coefficiente di momento attorno all'asse sul quale è incernierato il timone (che, per la configurazione in esame, si trova a circa un terzo della corda a partire del bordo d'attacco). In figura 7.28 è riportato l'andamento del C_{M_z} in funzione dell'angolo di incidenza. Il confronto tra le previsioni numeriche ed i dati misurati conferma che, per elevati valori del coefficiente di avanzo, il modello proposto denota una soddisfacente capacità di valutare i carichi agenti sul timone mentre l'accuratezza del modello diminuisce al diminuire di J, pur mantenendosi entro limiti accettabili. Inoltre, l'assenza della modellazione degli effetti di stallo è responsabile delle discrepanze che si hanno rispetto alle evidenze sperimentali per alti angoli di incidenza.

Per completare il quadro della caratterizzazione delle prestazioni medie del timone, nelle figure 7.29, 7.30 e 7.31 sono mostrati gli andamenti del coefficiente di resistenza del timone al variare dell'angolo di incidenza. Per la valutazione del coefficiente di resistenza ad incidenza nulla è stata utilizzata una correzione viscosa di lastra piana (basato sulla formula di Prandtl-Schlichting. Anche in questo caso il confronto con i dati sperimentali conferma che il modello proposto è in grado di catturare le prestazioni del sistema con una accuratezza che è buona per valori medio/alti di J e valori medio/bassi di α. Negli altri casi il modello mostra comunque una accuratezza sufficiente per la caratterizzazione del sistema propulsivo.

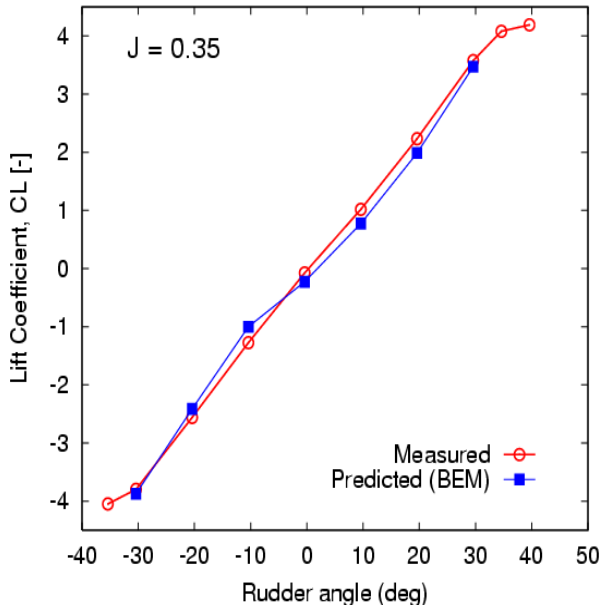

Figura 7.23: Coefficiente di portanza del timone dietro elica al variare dell'angolo di incidenza. Previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.35$.

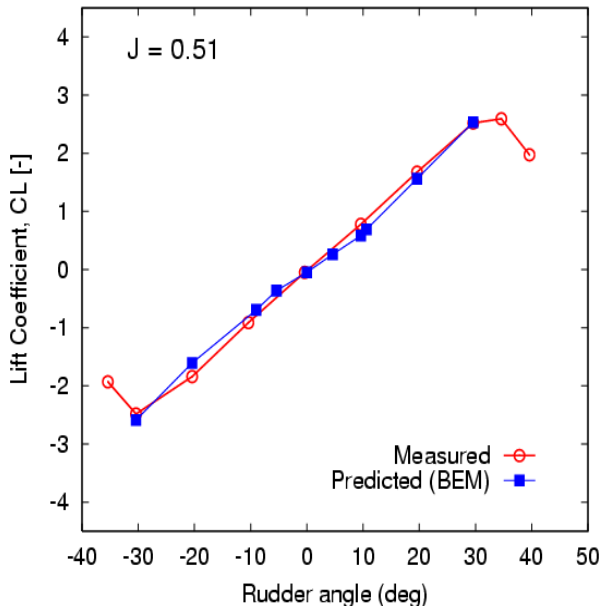

Figura 7.24: Coefficiente di portanza del timone dietro elica al variare dell'angolo di incidenza. Previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.51$.

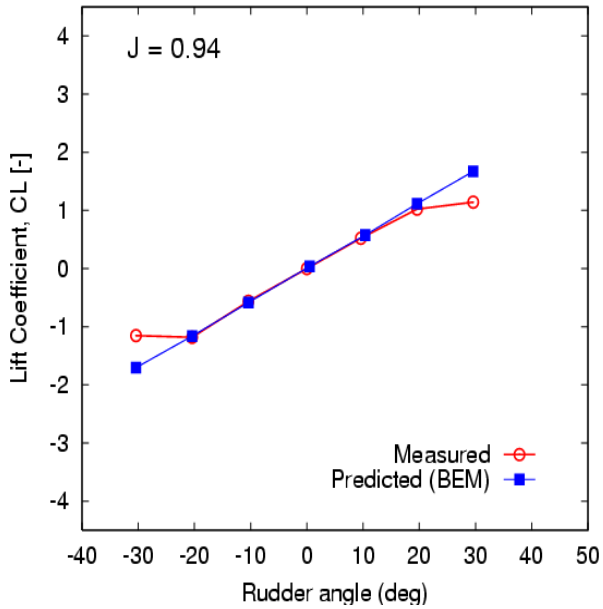

Figura 7.25: Coefficiente di portanza del timone dietro elica al variare dell'angolo di incidenza. Previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.94$.

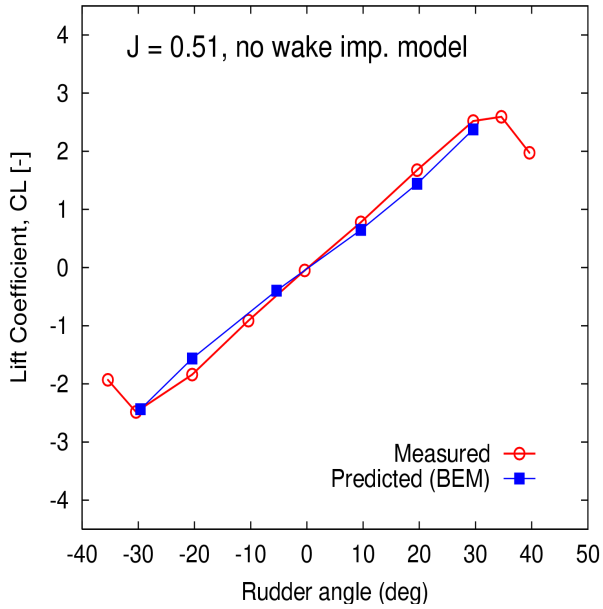

Figura 7.26: Coefficiente di portanza del timone dietro elica al variare dell'angolo di incidenza. Previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.51$ in assenza di modello numerico di impatto.

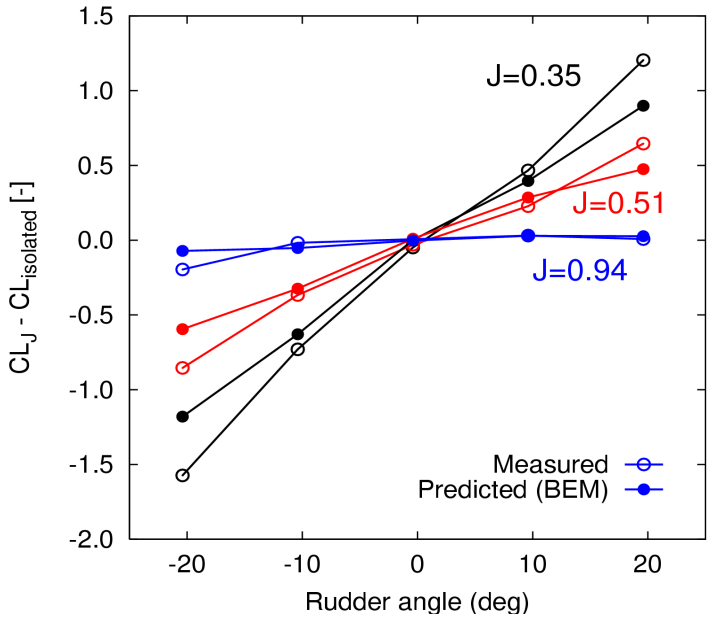

Figura 7.27: Coefficiente di portanza per il timone isolato e per il timone dietro elica al variare dell'angolo di incidenza. Previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.35$, $J = 0.51$ e $J = 0.94$.

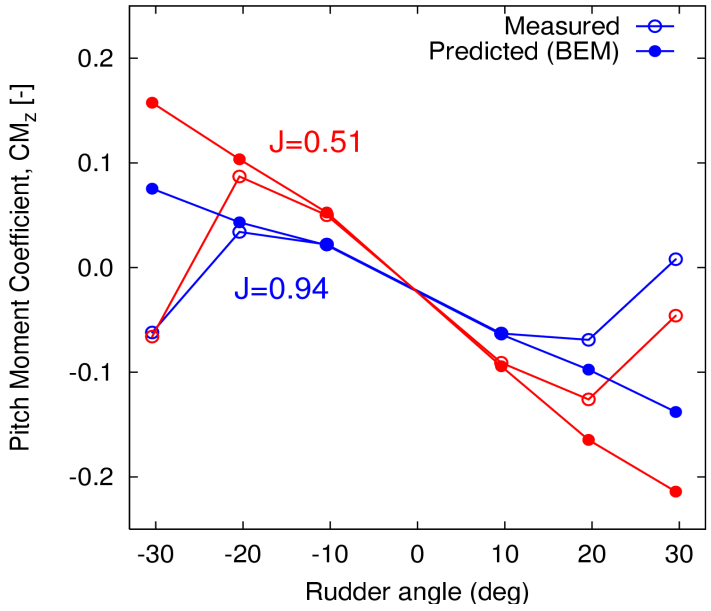

Figura 7.28: Coefficiente di momento del timone dietro elica al variare dell'angolo di incidenza. Previsioni numeriche confrontate con dati sperimentali per $J = 0.51$ e $J = 0.94$.

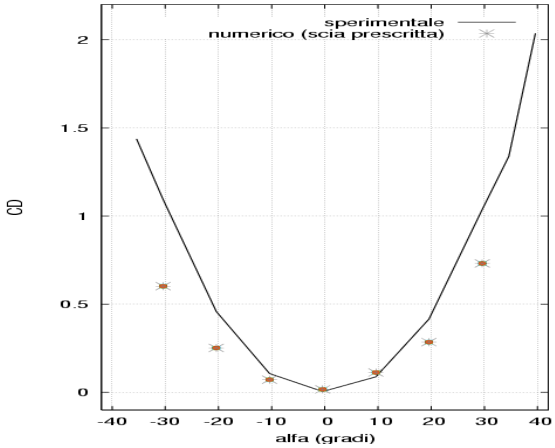

Figura 7.29: Coefficiente di resistenza per il timone nella scia dell'elica a $J = 0.35$.

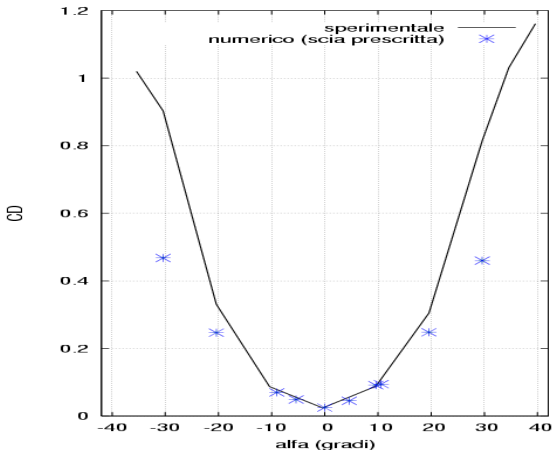

Figura 7.30: Coefficiente di di resistenza per il timone nella scia dell'elica a $J = 0.51$.

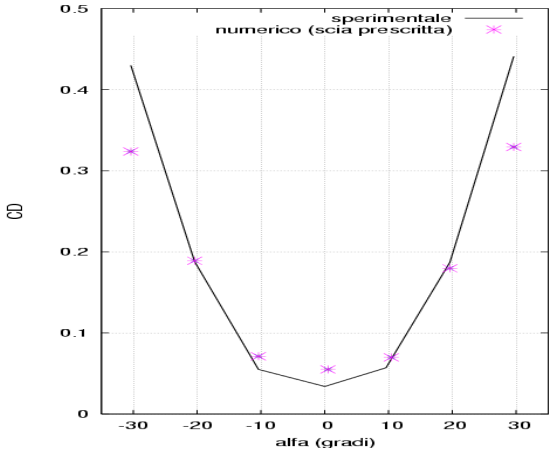

Figura 7.31: Coefficiente di resistenza per il timone nella scia dell'elica a $J = 0.94$.

La capacità del modello aerodinamico interazionale di descrivere le grandezze locali che caratterizzano il campo fluidodinamico attorno alla configurazione elica/timone è stata valutata considerando la distribuzione di pressione sulla superficie del timone mediata nel tempo. In particolare, dal punto di vista sperimentale, la distribuzione del coefficiente di pressione C_P in direzione della corda per 6 diverse posizioni lungo l'apertura, è stata misurata utilizzando dei trasduttori di pressione disposti secondo quanto illustrato in figura 7.32 e nella tabella 2 (si veda [27]).

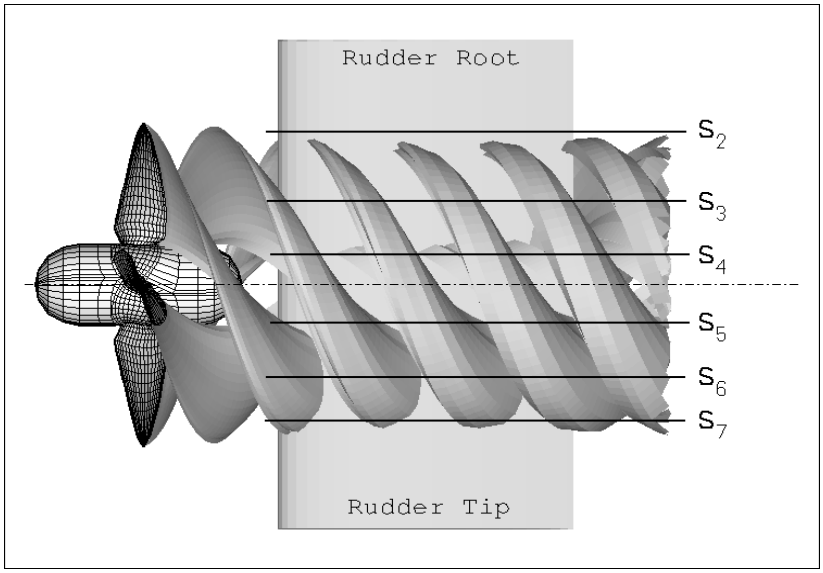

Figura 7.32: Posizione dei trasduttori di pressione sulla superficie del timone ([27]).

Tabella 2 Posizione dei trasduttori di pressione sul timone

Identificativo	s/L
S_3	0.33
S_4	0.44
S_5	0.58
S_6	0.69
S_7	0.78
S_8	0.81

Le figure che seguono illustrano l'analisi della distribuzione media di pressione sul timone condotta per differenti condizioni di coefficiente d'avanzo J e di angolo di incidenza α. La grandezza rappresentata sull'asse delle ordinate è l'opposto del coefficiente di pressione definito come

$$C_P = \frac{(p - p_\infty)}{1/2\rho V_\infty^2} \ .$$

In figura 7.33 sono riportati i risultati ottenuti per $J = 0.51$ e angolo di incidenza $\alpha = -20°$ (gli angoli si intendono positivi secondo la convenzione indicata in figura 7.21). Dove non diversamente specificato, la funzione di vorticità utilizzata (si veda capitolo 4) è simmetrica rispetto alla mezzeria del timone; inoltre, per ridurre l'onere computazionale non è stato incluso nelle simulazioni l'algoritmo che consente di allineare la scia al campo fluidodinamico locale.

Nelle figure da 7.34 a 7.39 vengono mostrati i confronti numerici/sperimentali per tre condizioni di lavoro ($J = 0.35$, $J = 0.51$ e $J = 0.94$) e per due differenti angoli di incidenza ($\alpha = -10$ e $\alpha = -20$). Anche in questi casi è stata utilizzata la stessa funzione esponenziale per simulare l'impatto tra la scia dell'elica ed il timone.
Da questa prima analisi si nota che per valori alti del coefficiente d'avanzo il modello è in grado di fornire previsioni di pressione sul timone con sufficiente accuratezza mostrando una tendenza alla sovrastima del coefficiente di pressione sul lato in depressione. Tuttavia, all'aumentare del carico palare la perturbazione indotta dalla scia rotorica sull'ala cresce e le discrepanze tra previsioni e dati misurati aumentano. Inoltre in alcuni casi si notano dei picchi di pressione non fisici al bordo d'uscita del timone: questo risultato deriva dal fatto che gli andamenti medi di pressione sono calcolati a partire da una soluzione al passo nel tempo quindi i picchi di pressione istantanei che si hanno sul timone possono poi riflettersi sul valor medio.

Nella figura 7.40 vengono mostrati i risultati dell'analisi delle pressioni mediate sul timone ottenuti utilizzando una funzione di vorticità asimmetrica per tener conto della diversa deformazione cui è soggetta la scia rotorica dai due lati del timone. La difficoltà di poter descrivere, utilizzando discretizzazioni che consentano di mantenere basso l'onere computazionale, con un numero sufficiente di pannelli la funzione non monotona che caratterizza la F_W asimmetrica è alla base dell'effetto negativo che la sua adozione ha nei riguardi della previsione della distribuzione di pressione sul timone.

Infine nella 7.41 vengono mostrati le distribuzioni di pressione mediate ottenute utilizzando tre diversi modelli per la definizione della scia rotorica. Nelle figure è stato indicato con pw il ri-

sultato ottenuto utilizzando una scia che tiene conto delle condizioni di avanzamento del sistema propulsivo ma non della presenza del timone: si tratta quindi di una scia di forma elicoidale il cui passo dipende solo dal coefficiente d'avanzo. La dicitura *fw as pw* indica una scia che tiene conto della deformazione indotta dal carico palare e non della presenza dell'ala. Tale forma di scia è stata ottenuta da una simulazione per l'elica isolata nelle medesime condizioni di lavoro. Essa è stata successivamente utilizzata come forma prescritta della scia nel solutore BEM interazionale; tale scia è stata denominata "pseudo libera". Infine con fw si è indicato il risultato in termini di distribuzione di pressione ottenuto includendo nel modello aerodinamico interazionale l'algoritmo che consente di allineare la scia al campo fluidodinamico locale indotto dalla presenza della configurazione completa elica/timone. Tale analisi è stata condotta per $J = 0.94$ ed in corrispondenza ad un angolo di incidenza pari a $\alpha = -20°$. Come si nota, tutti i modelli di scia utilizzati forniscono, per queste condizioni, andamenti della distribuzione di pressione piuttosto simili tra loro, con piccole differenze a favore dell'uno o dell'altro nei confronti del risultato sperimentale a seconda della sezione considerata. Di fatto, in queste condizioni di basso carico palare l'utilizzo di una semplice scia di forma elicoidale consente di ottenere una sufficiente accuratezza nella previsione della distribuzione di pressione sul timone mediata nel tempo. È prevedibile che l'utilizzo dell'algoritmo di allineamento della scia al campo indotto in condizioni di valori più bassi del coefficiente d'avanzo porti a risultati in maggior accordo con le evidenze sperimentali. Tuttavia la difficoltà di convergenza dell'algoritmo iterativo in presenza di impatto scia/timone in queste condizioni di alto carico palare dimostrano che ulteriori investigazioni sulla tecnica proposta per modellare l'interazione scia corpo nelle fasi di impatto sono ancora necessarie.

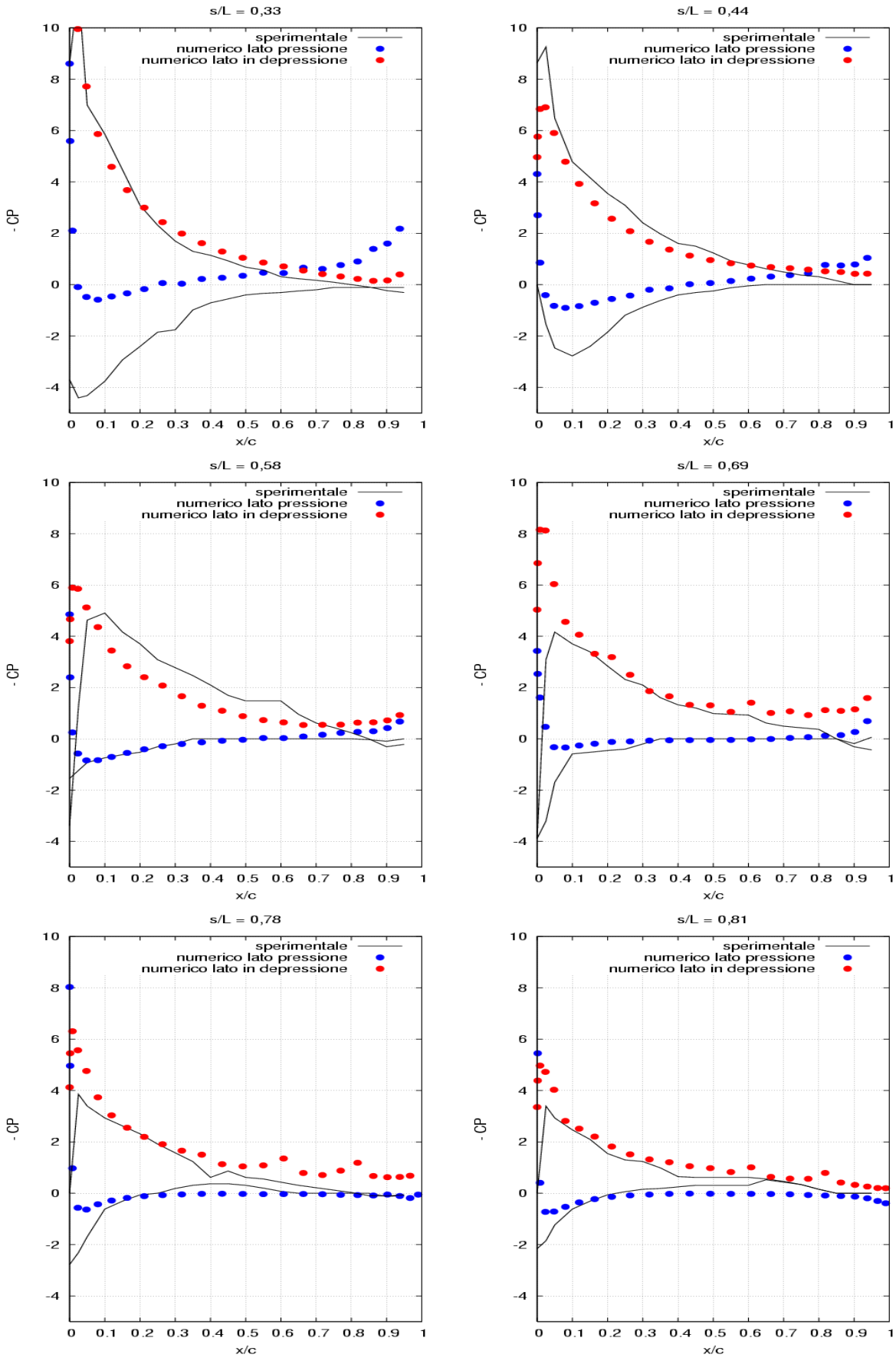

Figura 7.33: $J = 0,51, \alpha = -20$

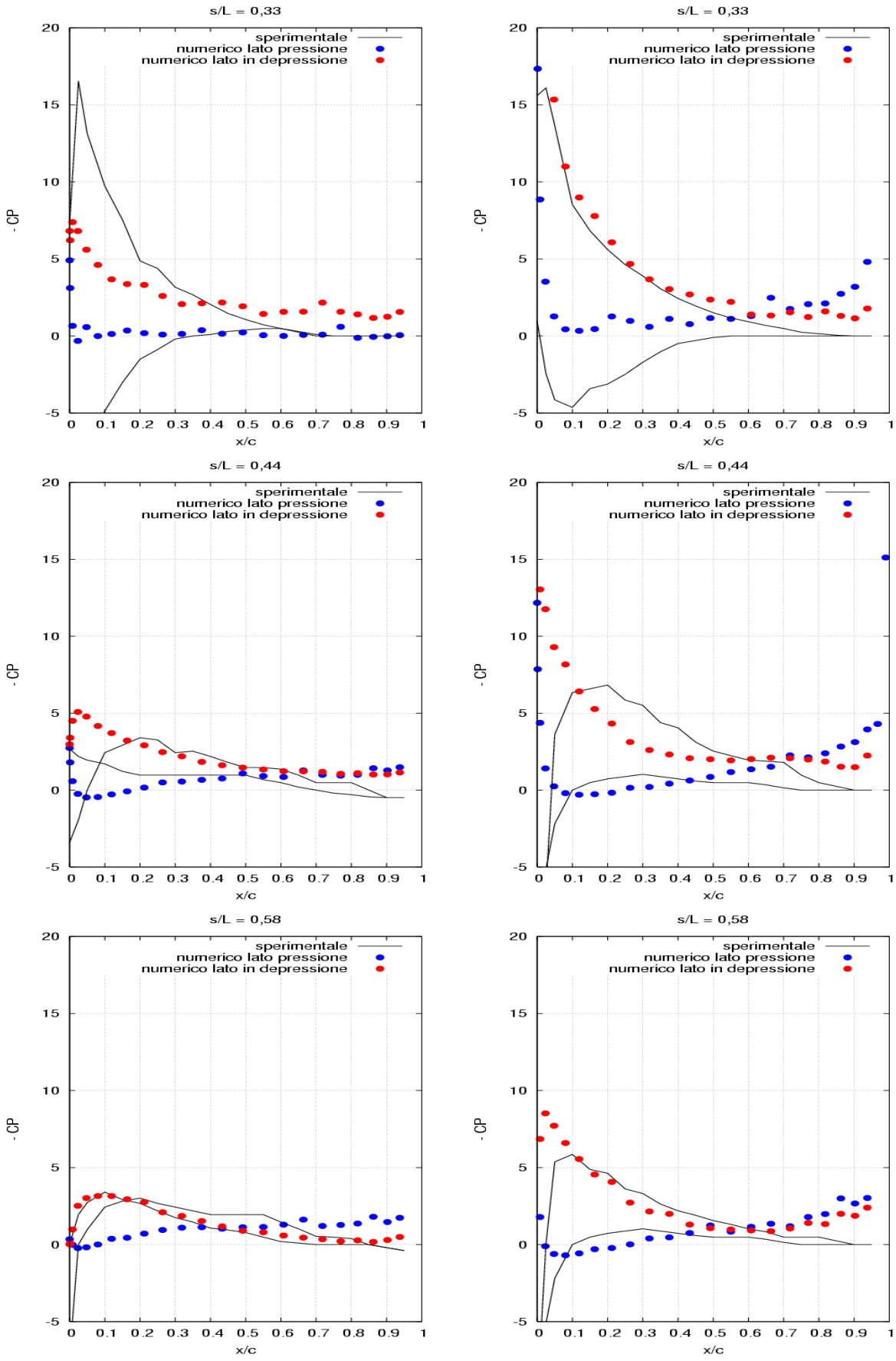

Figura 7.34: $J = 0.35$, $\alpha = -10$ (sinistra) e $\alpha = -20$ (destra) - I

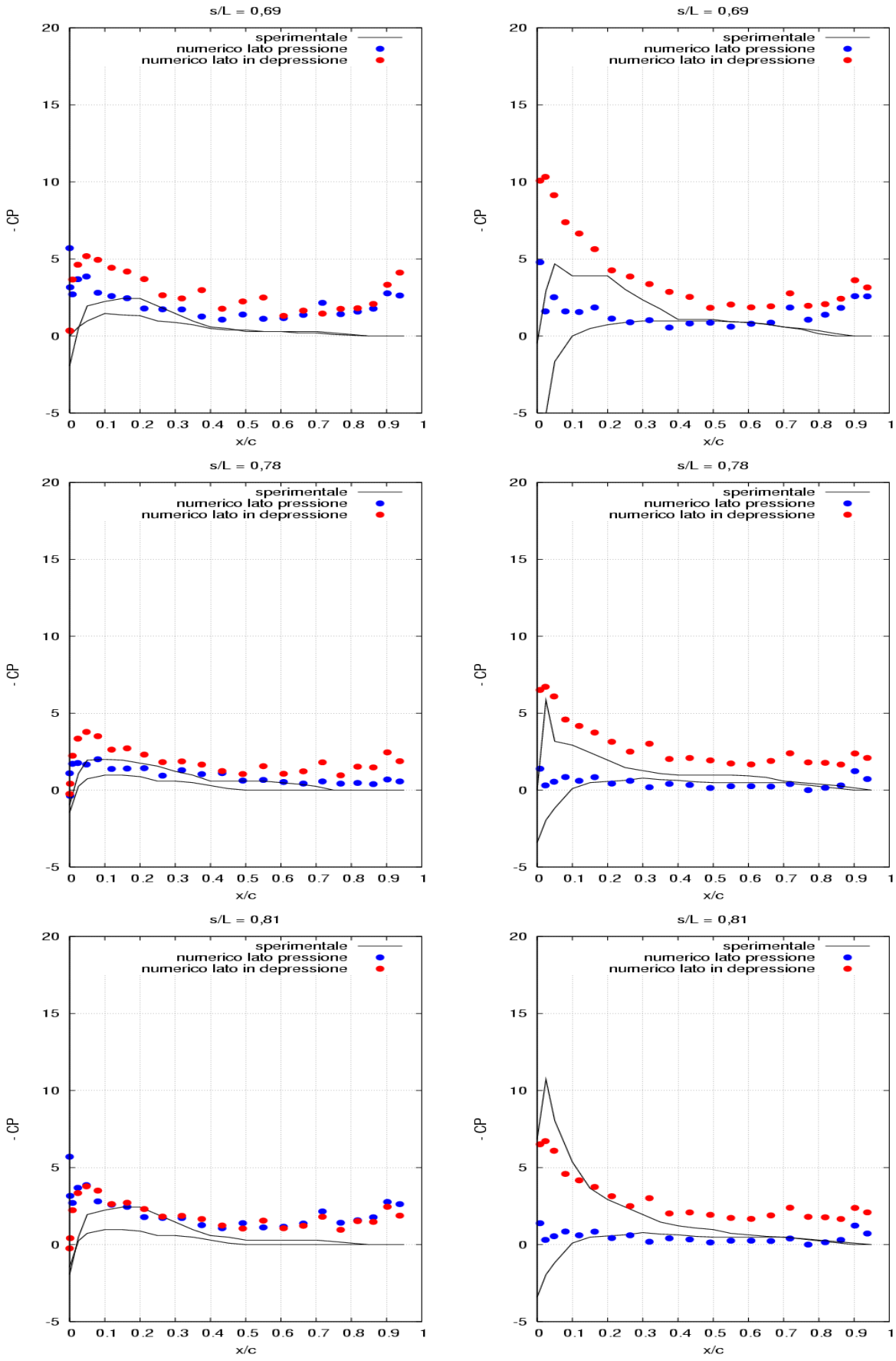

Figura 7.35: $J = 0.35$, $\alpha = -10$ (sinistra) e $\alpha = -20$ (destra) - II

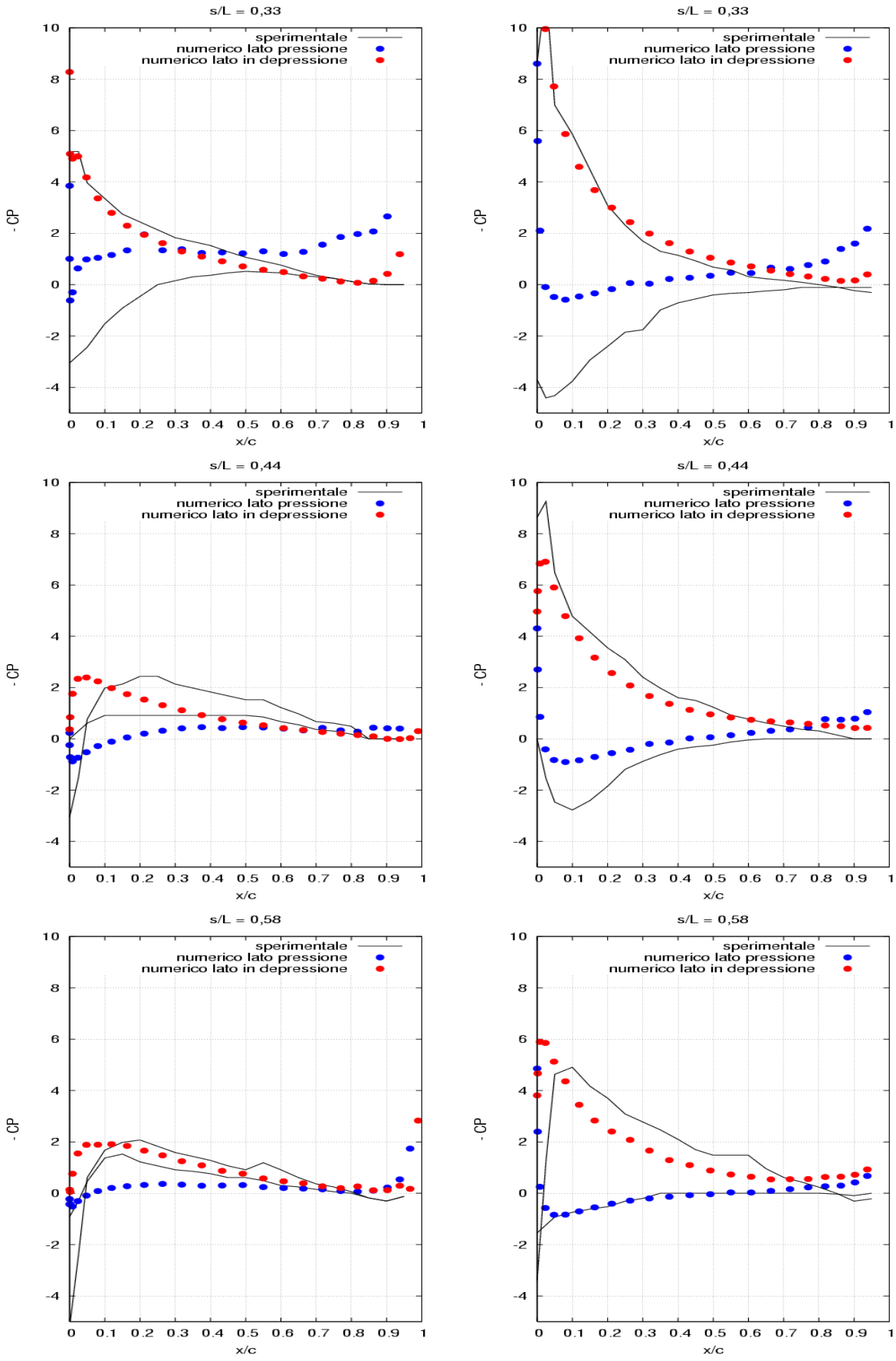

Figura 7.36: $J = 0.51$, $\alpha = -10$ (sinistra) e $\alpha = -20$ (destra) - I

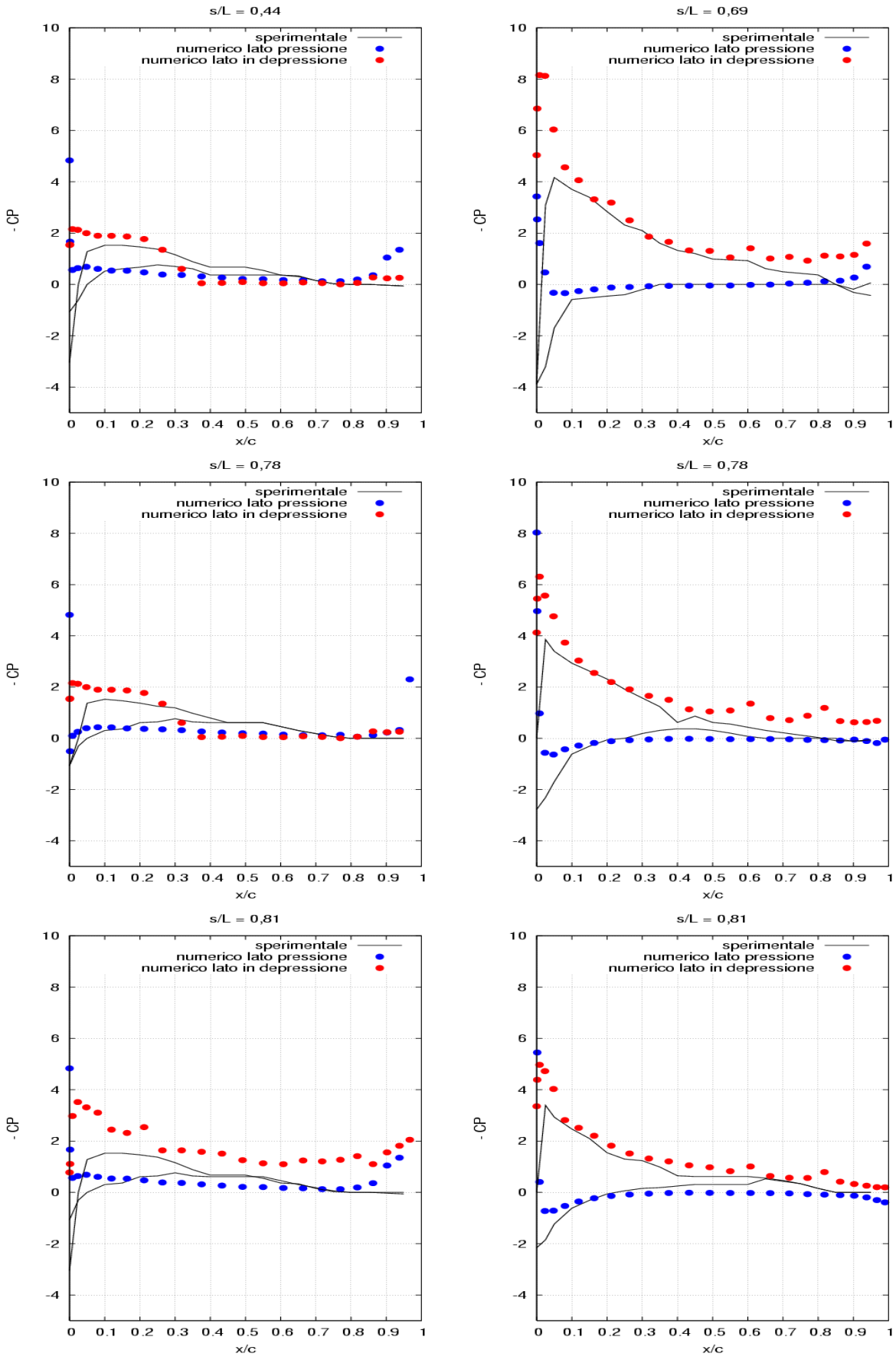

Figura 7.37: $J = 0.51$, $\alpha = -10$ (sinistra) e $\alpha = -20$ (destra) - II

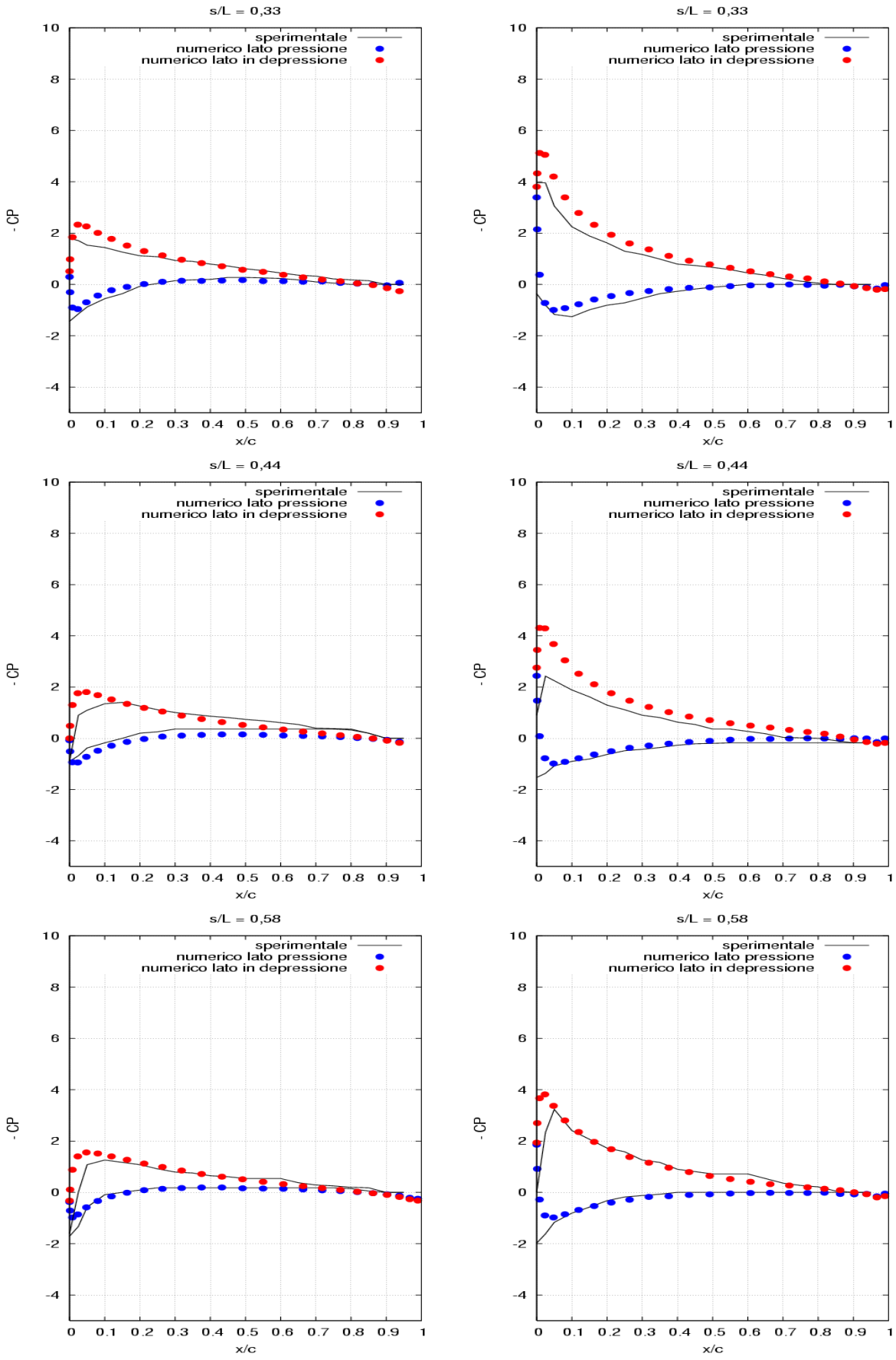

Figura 7.38: $J = 0.94$, $\alpha = -10$ (sinistra) e $\alpha = -20$ (destra) - I

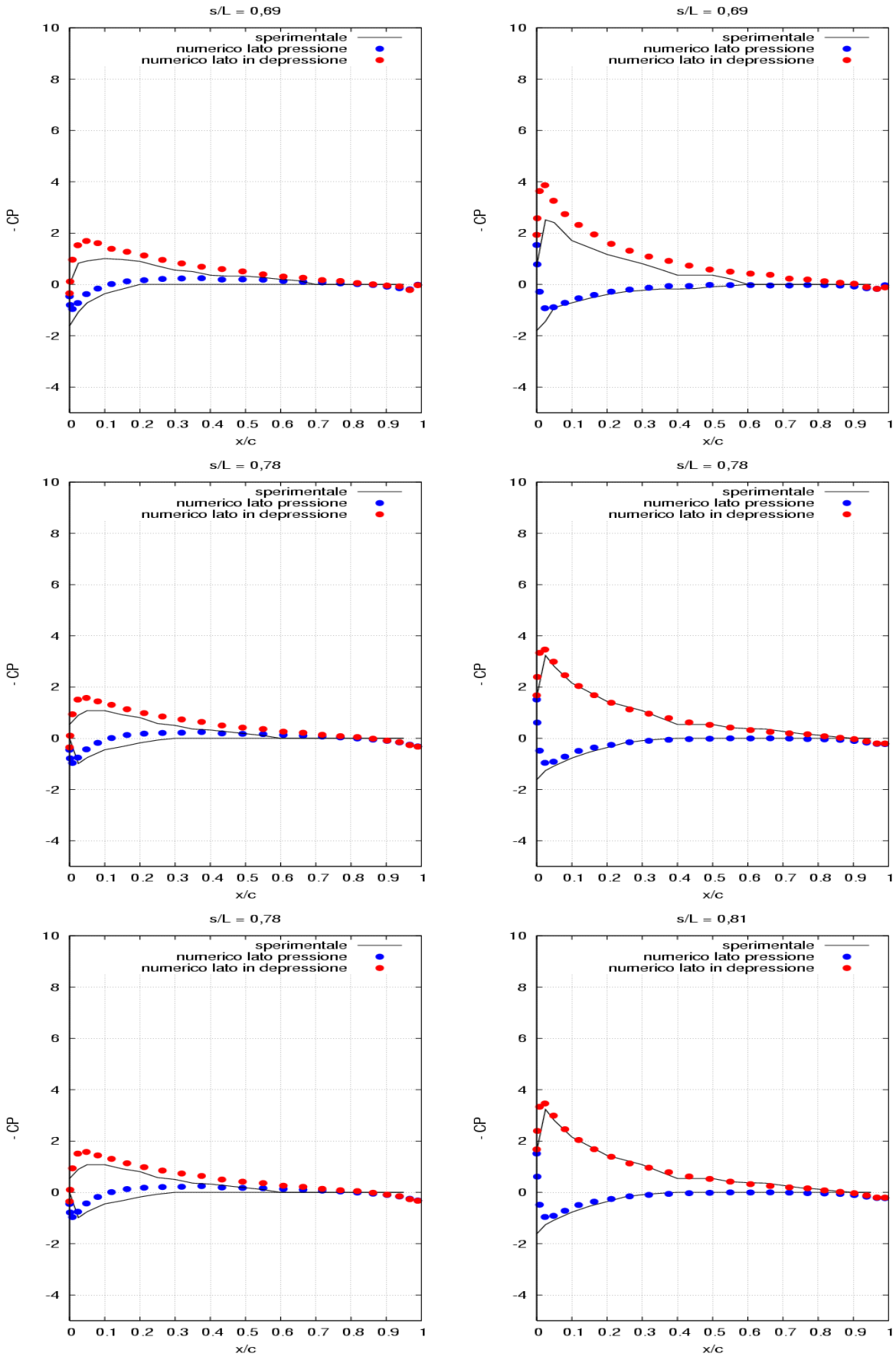

Figura 7.39: $J = 0.94$, $\alpha = -10$ (sinistra) e $\alpha = -20$ (destra) - II

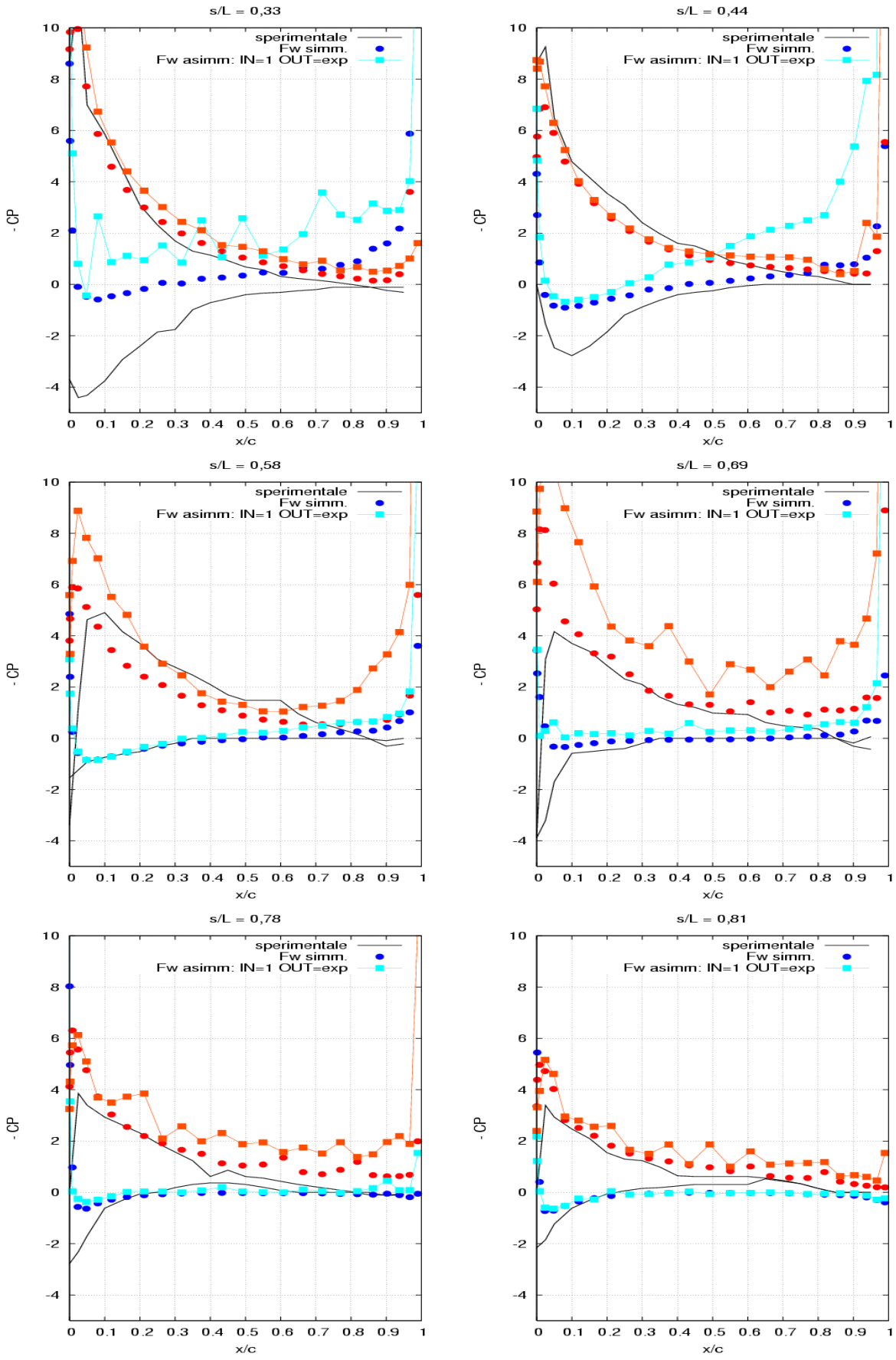

Figura 7.40: $J = 0.94$, $\alpha = -20$: confronto differenti funzioni di vorticità

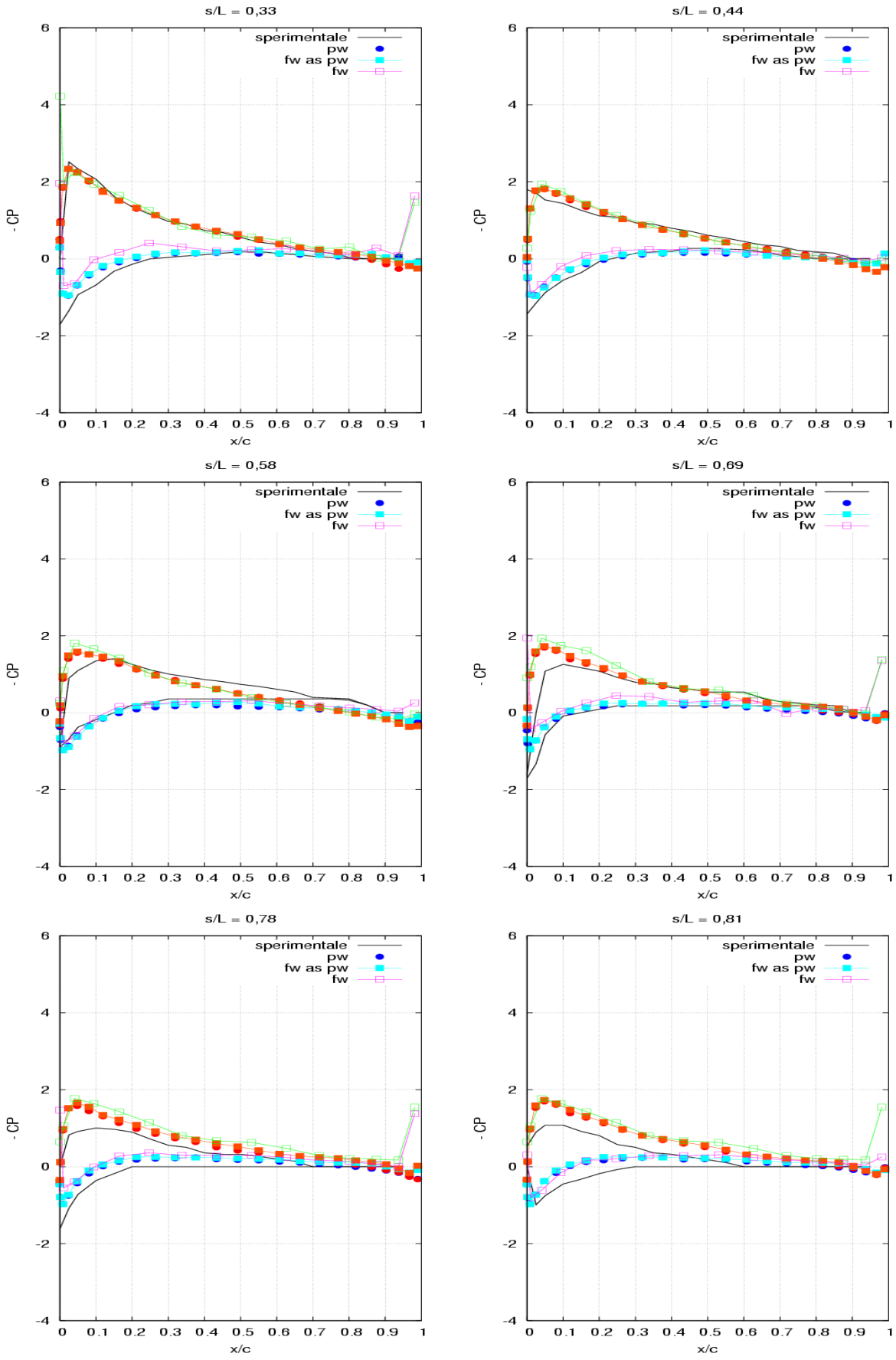

Figura 7.41: $J = 0.94$, $\alpha = -20$: confronto scia prescritta, scia pseudo-libera e scia libera

La capacità del modello aerodinamico interazionale di descrivere le caratteristiche non stazionarie del campo fluidodinamico attorno ad una configurazione elica/timone è stata validata utilizzando come confronto i dati dalla sperimentazione documentata in [5]. Nell'esperimento è stata utilizzata l'elica INSEAN E779A già utilizzata per validare l'algoritmo di scia libera per il rotore isolato. Per quanto riguarda il timone esso è a pianta rettangolare con profili NACA0020 (per dettagli ulteriori si veda [5]). In figura 7.42 è mostrata una fotografia della configurazione studiata nel tunnel idrodinamico. Le condizioni di lavoro del sistema corrispondono a $J = 0.88$. I dati sperimentali relativi

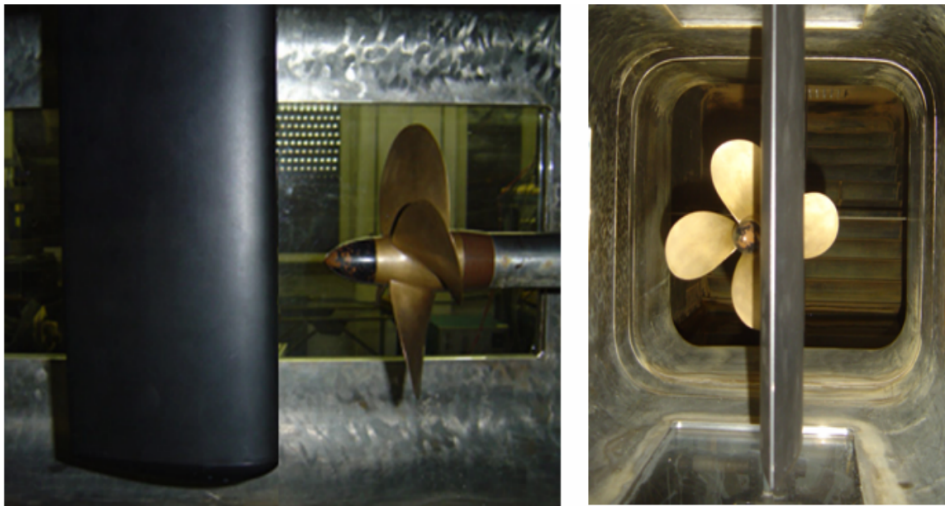

Figura 7.42: Fotografia della configurazione elica/timone sperimentata nel tunnel idrodinamico.

ai campi di velocità non–stazionari misurati su due piani trasversali immediatamente a monte e a valle del timone mediante tecniche LDV sono stati utilizzati per la validazione del modello interazionale. Allo scopo di limitare l'onere computazionale l'algoritmo di allineamento della scia rotorica non è stato utilizzato per ottenere i risultati che verranno mostrati.

Nelle figure 7.43, 7.44 e 7.45 (a sinistra) sono mostrate le mappe di livello della velocità assiale perturbativa misurate nel piano a monte del bordo d'attacco del timone. La posizione del timone è identificata dalla traccia grigia. Considerando tre posizioni angolari dell'elica in corrispondenza a $\theta = 0°$, $\theta = 30°$ e $\theta = 60°$ i risultati sperimentali sono confrontati con quelli ottenuti utilizzando il modello aerodinamico interazionale BEM introdotto nel presente lavoro. Tale confronto mostra che il modello numerico è in grado di descrivere qualitativamente le strutture del flusso evidenziate dai dati sperimentali. In particolare si osserva il difetto di velocità dovuto alla presenza del timone e le zone di accelerazione indotte dalla vorticità rilasciata dalle pale dell'elica. Tuttavia osservando

le figure 7.43, 7.44 e 7.45 (a destra), nelle quali è riportata la distribuzione della velocità assiale lungo una circonferenza di raggio $r = 0.7R$ nelle stesse posizioni angolari citate in precedenza, si notano delle discrepanze tra i dati sperimentali e le previsioni numeriche per quanto riguarda l'intensità della velocità. Il difetto di velocità indotto dal timone è evidente nelle posizioni angolari corrispondenti ad $\alpha = 50°$ e $\alpha = 310°$. I risultati numerici mostrano la tendenza a sovrastimare la perturbazione di velocità e questo può essere parzialmente legato al fatto che il campo di velocità indotto a valle dell'elica è fortemente influenzato dalla forma della scia. Nella configurazione in esame la scia risulterà deformata dalla presenza del timone in termini di passo e di arrotolamento del vortice di estremità . Il modello di scia utilizzato per ottenere i campi di velocità mostrati non tiene conto di tali deformazioni in quanto, allo scopo di ridurre l'onere computazionale, è stato utilizzata una scia elicoidale con passo fissato e dipendente solo dal coefficiente d'avanzo.

Le considerazioni svolte risultano maggiormente evidenti se si considerano gli analoghi confronti relativamente al piano di misura a valle del timone (figure 7.46, 7.47 e 7.48). In particolare su questo piano i dati sperimentali evidenziano un difetto di velocità dovuto alla scia rilasciata dal timone che i risultati numerici non mostrano. In questa zona del campo i fenomeni legati alla diffusione viscosa della vorticità e all'interazione tra la scia rotorica e la viscosità diffusa nella scia rilasciata dal timone risultano dominanti. Inoltre, il rilevante disallineamento dei campi di velocità sui due lati del timone dovuta all'interazione della scia rotorica con il timone e la sua scia mostrato dai risultati sperimentali non è correttamente previsto dal modello numerico. Un incremento dell'accuratezza delle previsioni numeriche è prevedibile includendo nelle simulazioni l'algoritmo che consente di deformare la scia rotorica in base al campo fluidodinamico locale. Tuttavia l'algoritmo iterativo di allineamento della scia in presenza di impatto scia/timone ha mostrato problemi di instabilità numeriche legate alle interazioni tra le singolarità distribuite sulla scia rotorica e quelle distribuite sulla superficie del timone, pertanto ulteriori investigazioni sulla tecnica proposta per modellare l'interazione scia corpo nelle fasi di impatto sono ancora necessarie. A titolo esemplificativo si riporta nelle figure 7.49 il risultato relativo alla deformazione della scia rotorica ottenuta, per la configurazione in esame, utilizzando il modello aerodinamico interazionale BEM. Si evidenzia la distorsione della scia dovuta al campo indotto dal timone man mano che essa si avvicina al bordo d'attacco. La zona di scia che corrisponde al bordo d'uscita del timone presenta le instabilità numeriche cui si è accennato. A scopo di confronto si riporta in figura 7.50 la deformazione della scia ottenuta nelle simulazioni numeriche e quella evidenziata dalla campagna sperimentale in [5].

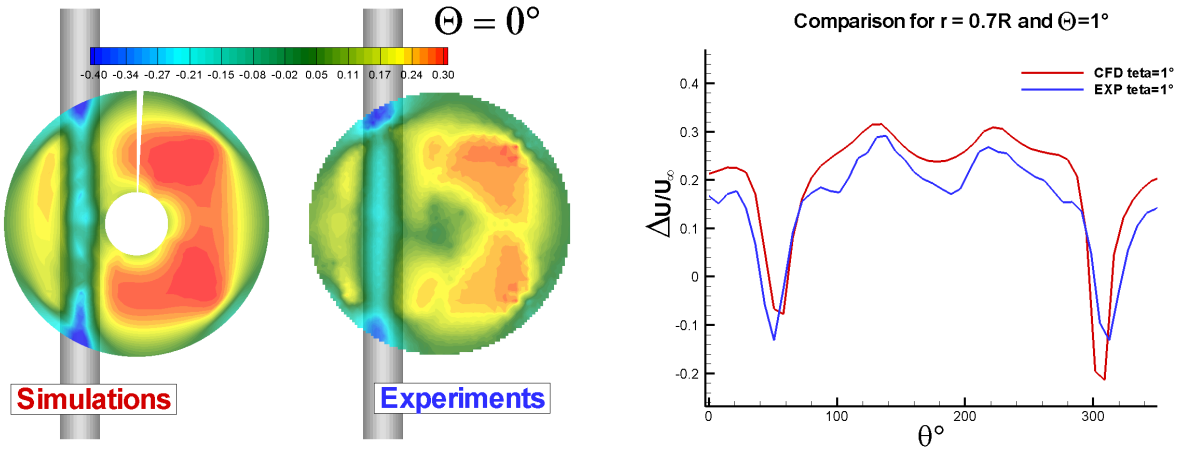

Figura 7.43: Distribuzione della componente assiale della perturbazione di velocità per $\theta = 0°$ (piano a monte).

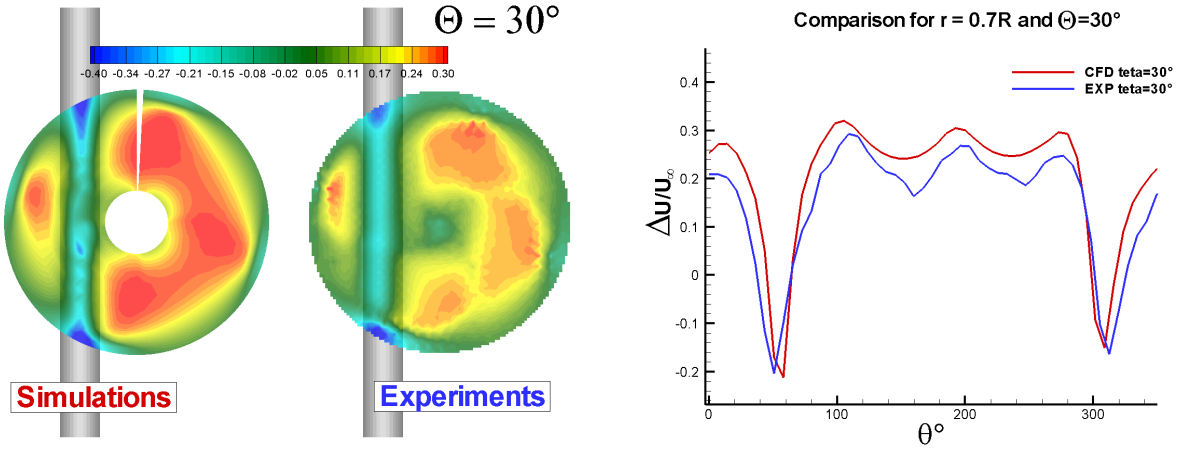

Figura 7.44: Distribuzione della componente assiale della perturbazione di velocità per $\theta = 30°$ (piano a monte).

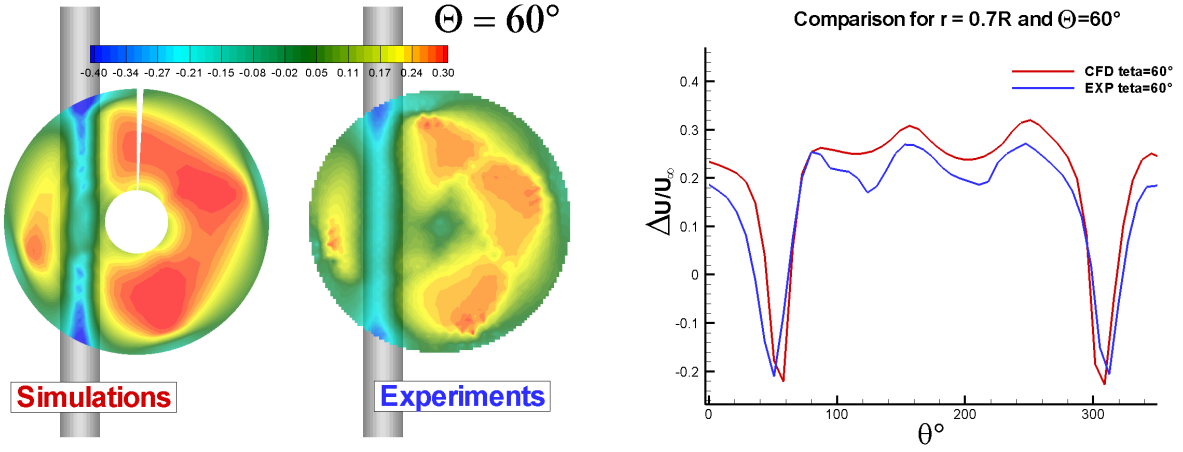

Figura 7.45: Distribuzione della componente assiale della perturbazione di velocità per $\theta = 60°$ (piano a monte).

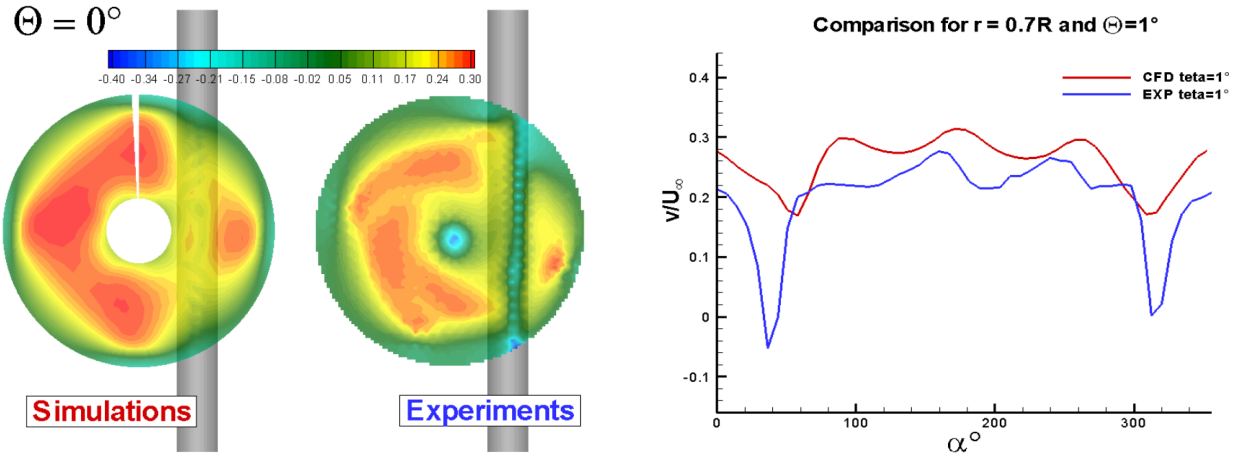

Figura 7.46: Distribuzione della componente assiale della perturbazione di velocità per $\theta = 0°$ (piano a valle).

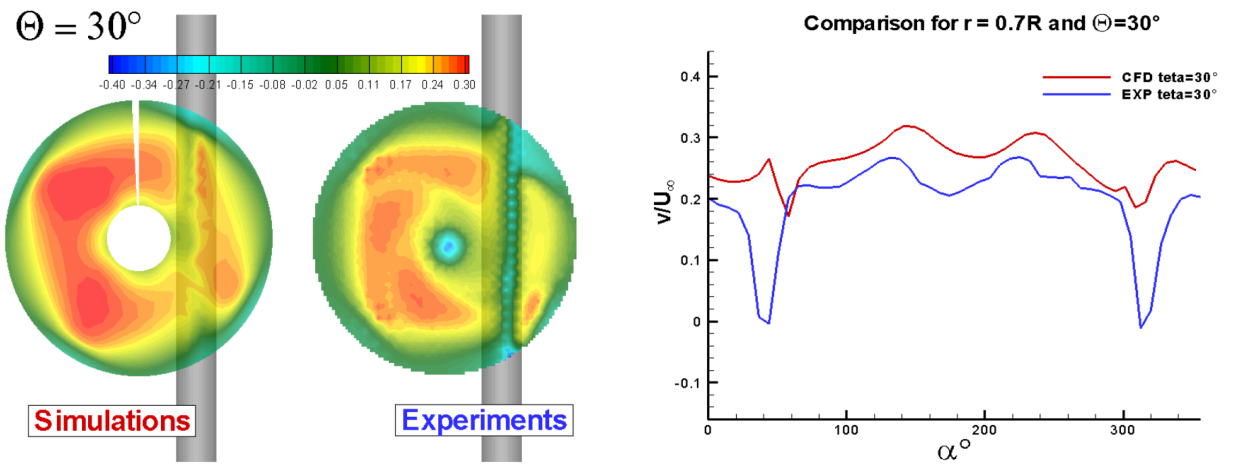

Figura 7.47: Distribuzione della componente assiale della perturbazione di velocità per $\theta = 30°$ (piano a valle).

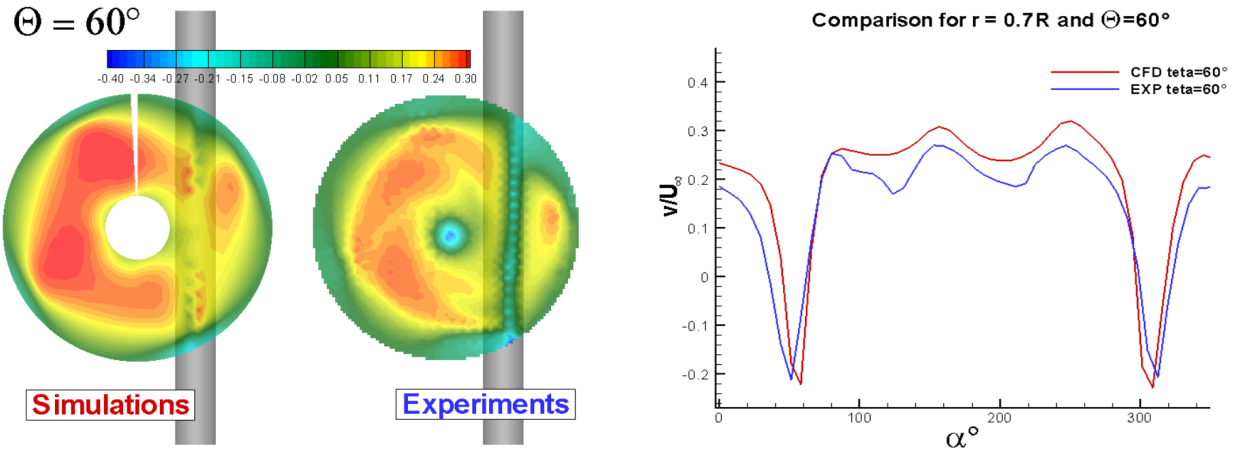

Figura 7.48: Distribuzione della componente assiale della perturbazione di velocità per $\theta = 60°$ (piano a valle).

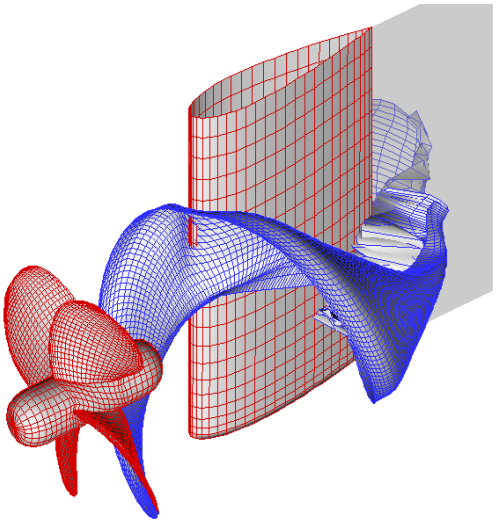

Figura 7.49: Interazione elica/timone: esempio della deformazione della scia rotorica indotta dal timone calcolata mediante il modello aerodinamico interazionale proposto.

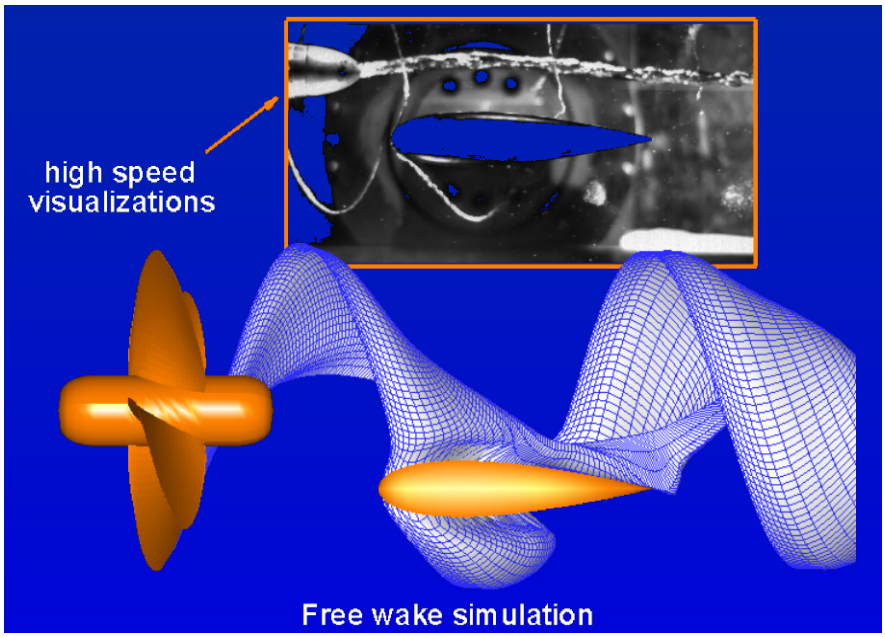

Figura 7.50: Interazione elica/timone: esempio della deformazione della scia rotorica indotta dal timone calcolata mediante il modello aerodinamico interazionale proposto. Confronto dei risultati numerici con la visualizzazione del vortice di estremità cavitante.

7.3 Applicazioni del modello aeroelastico per un sistema ala/rotore

Il modello aeroelastico sviluppato nel presente lavoro è stato applicato per studiare i margini di stabilità del sistema ala/rotore di un velivolo tiltrotor in volo di crociera in configurazione *airplane mode*.

In questa sezione verranno descritte ed analizzate due delle instabilità che tipicamente presentano i velivoli di questo tipo: il *whirl–flutter* e l'*air resonance*. Entrambi i fenomeni sono particolarmente critici dal punto di vista dei limiti di operatività che essi impongono agli attuali prototipi.

L'aspetto fondamentale su cui è incentrata la presente analisi è la comprensione dell'importanza della modellazione aerodinamica nello studio dei fenomeni di instabilità aeroelastica del sistema ala/pilone/rotore. I due modelli di ordine ridotto sviluppati nel presente lavoro per descrivere i carichi aerodinamici agenti sulle pale rotoriche e sull'ala sono basati su solutori aerodinamici di differente complessità e capacità modellistica. In particolare il modello ROM basato su un solutore bidimensionale, non–stazionario derivato dalla teoria di Greenberg, ed il modello identificato partendo da un solutore aerodinamico BEM tridimensionale ed anch'esso non–stazionario, sono stati utilizzati per comprendere l'effetto dell'evoluzione del modello aerodinamico sulla capacità del solutore aeroelastico di prevedere i margini di stabilità del sistema ala/rotore. Termine di paragone per i risultati ottenuti è un modello di aerodinamica bidimensionale, quasi stazionario (valido cioè per basse frequenze, ovvero nelle condizioni in cui si può assumere $\mathcal{C}(k) \cong 1$) ampiamente utilizzato in letteratura per questo tipo di applicazioni. Per quanto riguarda lo studio dell'*air resonance* si dispone anche di dati sperimentali.

Come si ricorderà dalle considerazioni dei capitoli 2 e 3, rispetto ai modelli aerodinamici quasi–stazionari, i modelli introdotti nel presente lavoro tengono conto degli effetti non–stazionari legati al rilascio di vorticità connesso con la generazione dei carichi aerodinamici. In un propeller tale vorticità viene convetta nella scia a valle ed al di sotto di ciascuna pala e forma un elicoide con asse parallelo all'asse di rotazione; il modello aerodinamico basato sulla teoria di Greenberg considera la scia potenziale come una linea vorticosa posta a valle del profilo, mentre il modello 3D basato sul metodo integrale di contorno consente di modellare completamente la superficie vorticosa elicoidale che rappresenta la scia. Naturalmente questa diversa approssimazione comporta delle differenze

nella valutazione dei carichi aerodinamici agenti sulle pale del rotore. A titolo esemplificativo si consideri un rotore in volo assiale dotato di tre pale rigidamente connesse al mozzo: in figura 7.51 si riporta l'andamento, in funzione della frequenza ridotta, della funzione di trasferimento tra la velocità angolare attorno all'asse x del riferimento pala 1 ed il momento di flappeggio agente sulla medesima pala. Le funzioni di trasferimento sono state calcolate utilizzando il modello di Greenberg ed il modello BEM per due diversi coefficienti di avanzo $\mu = V_\infty/\Omega R$. Come si nota, i due

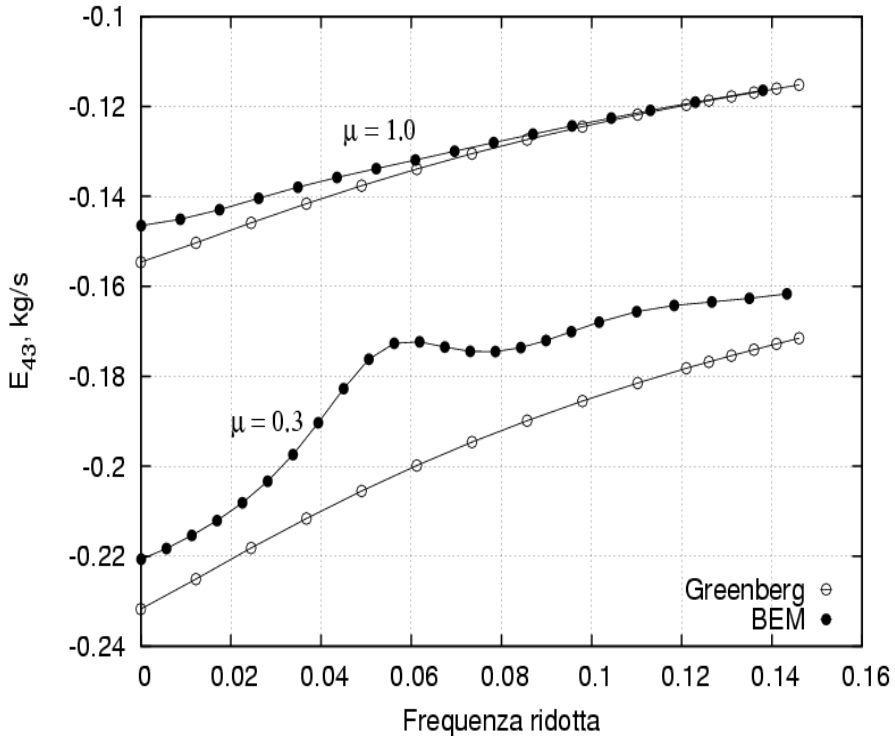

Figura 7.51: Funzione di trasferimento tra ω_1 ed il momento aerodinamico di flappeggio di pala (parte reale).

risultati tendono a coincidere per alti valori di μ, ma al diminuire del coefficiente di avanzamento, poiché le spire dell'elicoide della scia tendono ad avvicinarsi (in altri termini si riduce il passo della scia), l'effetto della vorticità al di sotto delle pale non è più trascurabile e dunque la funzione di trasferimento valutata con il solutore BEM mostra un andamento oscillatorio piuttosto diverso dall'andamento previsto dalla teoria di Greenberg.

Ciò che risulta interessante è ora capire come queste differenze nel calcolo dei carichi si riflettano sulle capacità di previsione dei margini di stabilità del sistema aeroelastico ala/rotore. In particolare nei paragrafi che seguono verranno trattati separatamente il *whirl–flutter* e l'*air resonance*.

7.3.1 Studio della stabilità al whirl–flutter di un sistema pilone/rotore

Il *whirl–flutter* è un fenomeno di instabilità aeroelastica che avviene ad alte velocità di crociera e dunque è uno delle limitazioni alle velocità massime che gli attuali prototipi di tiltrotor possono raggiungere. L'attività di ricerca su questo fenomeno ha mostrato che si tratta di una instabilità del sistema costituito dal rotore, dall'albero e dai cuscinetti che vincolano l'albero alla nacelle. Esso può essere di due tipi (si vedano, ad esempio, [32] e [19]): per propeller dotati di pale rigide il fenomeno è noto come *backward whirl mode* e nasce come un moto di precessione a bassa frequenza in cui l'albero ruota in senso opposto a quello di rotazione del rotore. Nel caso di rotori dotati di pale flessibili si possono avere in aggiunta fenomeni di vibrazione ad alta frequenza noti come *forward whirl mode*. Questo tipo di fenomeni può risultare in danneggiamenti del sistema pilone/rotore nel caso di instabilità , ma anche nel caso in cui il sistema non superi i limiti di stabilità danno luogo a vibrazioni che possono indurre fenomeni rottura per fatica meccanica nei cuscinetti.

In questa sezione verrà brevemente descritto il modello aeroelastico utilizzato per lo studio del *backward whirl–flutter* e saranno illustrati i principali risultati relativi all'analisi dei margini di stabilità . Il modello strutturale che è stato accoppiato con i modelli aerodinamici ROM introdotti nel presente lavoro è piuttosto semplice ma la ricerca bibliografica condotta consente di affermare che contiene tutti gli elementi che servono per caratterizzare il fenomeno. In particolare, seguendo quanto fatto in [20] è stato considerato un rotore costituito da pale modellate come corpi rigidi solidali all'albero (detto pilone). Non è stata considerata la presenza dell'ala ma il pilone è stato considerato libero di ruotare attorno ad un punto di pivot che è collocato ad una distanza fissata h dal mozzo. Il pilone è dunque dotato di due gradi di libertà *pitch* (α_x) e *yaw* (α_y) attorno all'asse x_{sh} e all'asse z_{sh} (si veda figura 7.52) che simulano la dinamica dei vincoli che sussistono, in un tiltrotor, tra albero motore e nacelle nonché le rotazioni elastiche che si hanno nella sezione alare in corrispondenza della quale è calettata la nacelle. In corrispondenza al punto di pivot sono state considerate delle molle dotate di rigidezza k_x per e k_y e degli smorzamenti strutturali C_x e C_y per simulare la dinamica delle strutture meccaniche che vincolano l'albero alla nacelle.

Il sistema considerato viene tipicamente indicato con il nome di proprotor.

In un sistema di riferimento fisso $Oxyz$ con origine nel punto di pivot ed asse z allineato con il pilone nella sua posizione di equilibrio in moto assiale, le equazioni linearizzate non–dimensionali

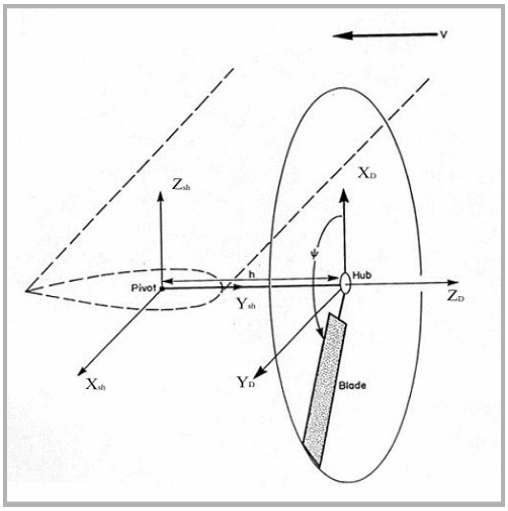

Figura 7.52: Schematizzazione del sistema pilone/rotore per lo studio della stabilità al whirl flutter di un velivolo tiltrotor.

che descrivono la dinamica perturbativa dei gradi di libertà del pilone sono

$$\mathbf{M}(\psi)\ddot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{C}(\psi)\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \mathbf{K}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{m}_{aer}(\psi, \boldsymbol{\alpha}) \tag{7.5}$$

nella quale $\boldsymbol{\alpha} = \{\alpha_y \ \ \alpha_x\}^T$ è il vettore dei gradi di libertà del pilone, ψ è la posizione azimutale del rotore (ovvero il tempo adimensionale), e $\mathbf{m}_{aer}$ è il vettore dei momenti calcolati rispetto al punto di pivot e generati dai carichi aerodinamici agenti sulle pale.

Nell'equazione 7.5, la matrice di massa, $\mathbf{M}$, e di smorzamento, $\mathbf{C}$, includono, oltre ai termini legati all'inerzia del pilone, anche i contributi inerziali dovuti alle pale e questi ultimi sono responsabili della loro dipendenza dal tempo: il moto delle pale risulta infatti influenzato dal moto di trascinamento del pilone in misura variabile nel tempo. Tuttavia, per rotori dotati di un numero di pale $N_b \geq 3$ la combinazione dei contributi dovuti a ciascuna pala è tale per cui entrambe le matrici diventano indipendenti dal tempo. In particolare, per $N_b = 2$, nella 7.5 si ha

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \bar{I}_y + 1 + \cos(2\psi) & -\sin(2\psi) \\ -\sin(2\psi) & \bar{I}_x + 1 - \cos(2\psi) \end{bmatrix}, \ \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_y - 2\sin(2\psi) & -2[1 + \cos(2\psi)] \\ 2[1 - \cos(2\psi)] & \bar{C}_x + 2\sin(2\psi) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \bar{K}_y & 0 \\ 0 & \bar{K}_x \end{bmatrix}$$

mentre, per $N_b \geq 3$, le matrici di massa e smorzamento divengono

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \bar{I}_y + 1 & 0 \\ 0 & \bar{I}_x + 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{C}_y & -2 \\ 2 & \bar{C}_x \end{bmatrix}.$$

Nelle precedenti, $\bar{K}_x, \bar{K}_y$ rappresentano le costanti elastiche adimensionali delle molle relative al moto del pilone attorno al punto di pivot, $\bar{C}_x, \bar{C}_y$ rappresentano i corrispondenti smorzamenti adimensionali, mentre $\bar{I}_x, \bar{I}_y$ sono i momenti di inerzia adimensionali del pilone rispetto all'asse x e y rispettivamente (in tali momenti di inerzia sono inclusi anche gli effetti inerziali del rotore considerato equivalente ad una massa puntiforme collocata in corrispondenza del mozzo).

I termini aerodinamici a secondo membro della 7.5 sono calcolati dalla somma dei contributi di forze e momenti agenti sulle singole pale, opportunamente sfasati per tener conto del differente angolo di azimuth ciascuna pala. Indicando con $\bar{M}_n^f$ e $\bar{M}_n^t$ i momenti aerodinamici di flappeggio e torsione (adimensionali) che agiscono sulla singola pala calcolati rispetto al mozzo, e con $\bar{F}_n$ la forza aerodinamica nel piano di rotazione che agisce sulla n–esima pala (si considera solo la componente ortogonale alla direzione radiale, trascurando i carichi aerodinamici in direzione radiale), il contributo aerodinamico alle equazioni della dinamica perturbativa del sistema pilone/rotore è dato da

$$\mathbf{m}_{aer}(\psi, \boldsymbol{\alpha}) = \left\{ \begin{array}{c} \sum_n^N \left[-\bar{M}_n^f(\psi, \boldsymbol{\alpha}) \cos(\psi) + \bar{M}_n^t(\psi, \boldsymbol{\alpha}) \sin(\psi) + \bar{F}_n(\psi, \boldsymbol{\alpha}) \bar{h} \sin(\psi) \right] \\ \sum_n^N \left[\bar{M}_n^f(\psi, \boldsymbol{\alpha}) \sin(\psi) + \bar{M}_n^t(\psi, \boldsymbol{\alpha}) \cos(\psi) + \bar{F}_n(\psi, \boldsymbol{\alpha}) \bar{h} \cos(\psi) \right] \end{array} \right\}, \quad (7.6)$$

nella quale $\bar{h} = h/R$, ed R è il raggio del rotore. I carichi aerodinamici di pala che compaiono nella 7.6 possono essere facilmente estratti come sottocaso dei modelli ROM 2D e 3D illustrati nel presente lavoro. Ulteriori dettagli sul modello possono essere trovati in [10].

Nel seguito verrà illustrata la campagna di analisi numeriche realizzate per chiarire i limiti ed i vantaggi dei differenti modelli aerodinamici descritti nel presente lavoro ai fini della previsione dei margini di stabilità al whirl–flutter di un sistema pilone/rotore. I risultati dell'analisi verranno presentati sotto forma di margini di stabilità nel piano $\bar{K}_x$, $\bar{K}_y$. La configurazione considerata è quello riportato in [20], per il quale i parametri strutturali sono $\bar{h} = 0.3$, $\bar{I}_x = 2$, $\bar{I}_y = 2$, $\bar{C}_x = 0$ e $\bar{C}_y = 0$.

Innanzitutto è stata condotta l'analisi di stabilità utilizzando il modello ROM basato sul solutore aerodinamico 2D, non–stazionario derivato dalla teoria di Greenberg. Come confronto è stato

considerato il risultato ottenuto mediante un classico modello 2D quasi–stazionario. È da notare che

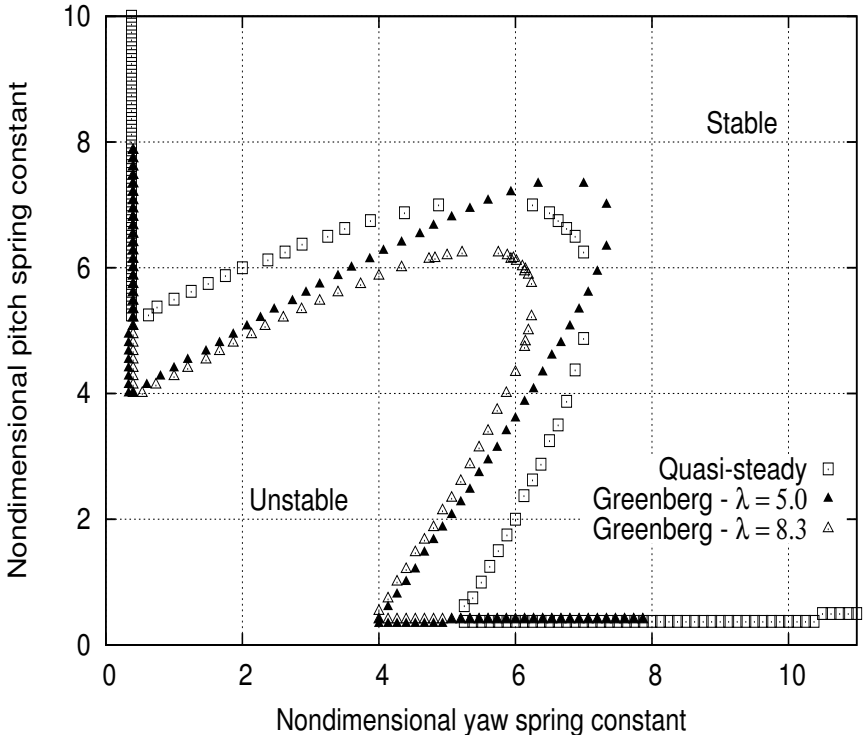

Figura 7.53: Margini di stabilità al whirl flutter: rotore tripala, $\mu = 1.0$.

i parametri richiesti dal solutore 2D quasi–stazionario per la completa definizione della condizione di volo e della configurazione sono il numero di Lock $\gamma = \rho\, a\, c\, R^4/I_b$ ed il coefficiente di avanzo $\mu = V_\infty/\Omega R$. Il solutore di Greenberg, invece, richiede anche la conoscenza dell'allungamento palare $\lambda = R/c$: si dimostra che ciò è dovuto alla presenza nella formulazione dei termini non–circolatori e alla $\mathcal{C}(k)$.

In figura 7.53 sono mostrati i margini di stabilità per un rotore dotato di tre pale nelle condizioni per cui $\gamma = 4$ e $\mu = 1.0$. I risultati ottenuti utilizzando il solutore 2D quasi–stazionario (coincidenti con quelli riportati in [20]) sono confrontati con quelli ottenuti utlizzando il modello ROM/Greenberg. In particolare, quest'ultimo è stato applicato considerando due valori per l'allungamento palare ($\lambda = 5$ e $\lambda = 8.3$). In particolare, il valore di $\lambda = 8.3$ corrisponde al proprotor della Boeing analizzato in [20]. Osservando la figura si nota che le curve che rappresentano i margini di stabilità al whirl–flutter sono caratterizzate da tre rami. È possibile dimostrare che, nel caso in cui il pilone abbia caratteristiche inerziali isotrope, il ramo centrale è costituito da una parabola con asse parallelo alla bisettrice del piano $\bar{K}_x$,$\bar{K}_y$; le coordinate del vertice della parabola dipendono dal coefficiente d'avanzo. La regione compresa tra questa parabola e gli assi corrisponde a confi-

gurazioni instabili. Gli altri due rami sono approssimativamente paralleli agli assi e definiscono le regioni corrispondenti a configurazioni che danno luogo a divergenza, ovvero ad un fenomeno di instabilità a frequenza nulla.
La figura 7.53 mostra che l'utilizzo di una formulazione basata su un solutore 2D quasi–stazionario sovrastima le regioni di instabilità rispetto a quanto si ottiene con un modello 2D non–stazionario (ottenendo in tal caso risultati conservativi) solo per i valori più elevati di λ.

La figura 7.54 mostra la previsione del comportamento aeroelastico nelle stesse condizioni di volo del caso precedente ma per un rotore dotato di due pale. In questo caso i margini di stabilità hanno un andamento differente in quanto può instaurarsi una condizione simile alla divergenza ma per frequenza pari alla frequenza di rotazione ($1/rev$): ciò determina gli altri due rami delle curve. Questo particolare comportamento è dovuto dalla mancanza di simmetria polare del rotore che dà luogo a termini inerziali periodici nel sistema 7.5. È da notare che l'utilizzo del solutore aerodinamico basato sulla teoria di Greenberg dà luogo a coefficienti tempo–varianti nelle matrici aeroelastiche indipendentemente dal numero di pale per via della presenza degli stati aggiunti; tuttavia, tali termini non alterano la forma dei margini di stabilità in quanto il modello aerodinamico non–stazionario induce una periodicità debole nel sistema aeroelastico quando $N_b \geq 3$.
Analogamente a quanto visto per il rotore tripala, il modello quasi–stazionario induce previsioni di regioni di instabilità più ampie rispetto al modello non–stazionario per i valori più elevati di λ mentre accade il contrario se si considerano bassi valori di allungamento palare.

Come ampiamente discusso nei capitoli precedenti, uno dei grandi vantaggi dei modelli di ordine ridotto è dato dalla possibilità di realizzare analisi aeroelastiche parametriche a costi computazionali molto ridotti. In particolare, dato che l'insorgere del whirl–flutter è strettamente legato al coefficiente d'avanzo del proprotor, è stata investigata l'influenza di questo parametro sui margini di stabilità . Le figure 7.55 e 7.56 mostrano le previsioni di stabilità per un rotore dotato di tre e due pale, rispettivamente, in condizioni di volo a $\mu = 0.3$. Come si nota confrontando questi risultati con quanto mostrato in precedenza, la riduzione del coefficiente d'avanzo da $\mu = 1.0$ a $\mu = 0.3$ produce una significativa riduzione delle regioni di instabilità evidenziando quindi che il whirl–flutter è un fenomeno di instabilità aeroelastica che può insorgere in condizioni di elevati valori di μ, ovvero, tipicamente, per alti valori della velocità di avanzamento del veicolo.
In questo caso entrambi i modelli aerodinamici utilizzati forniscono risultati molto simili con una

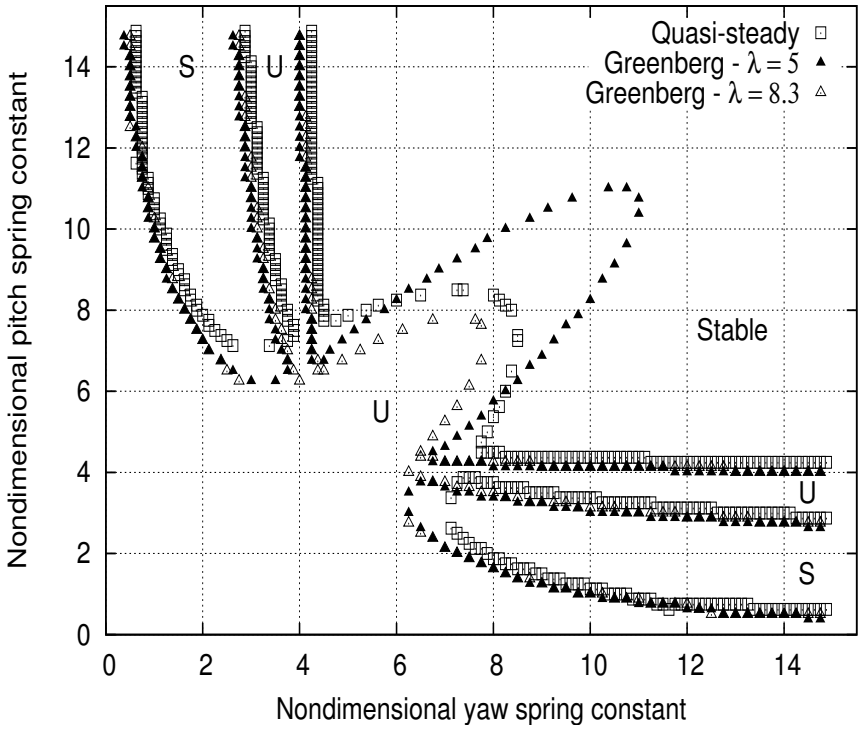

Figura 7.54: Margini di stabilità al whirl flutter: rotore bipala, $\mu = 1.0$.

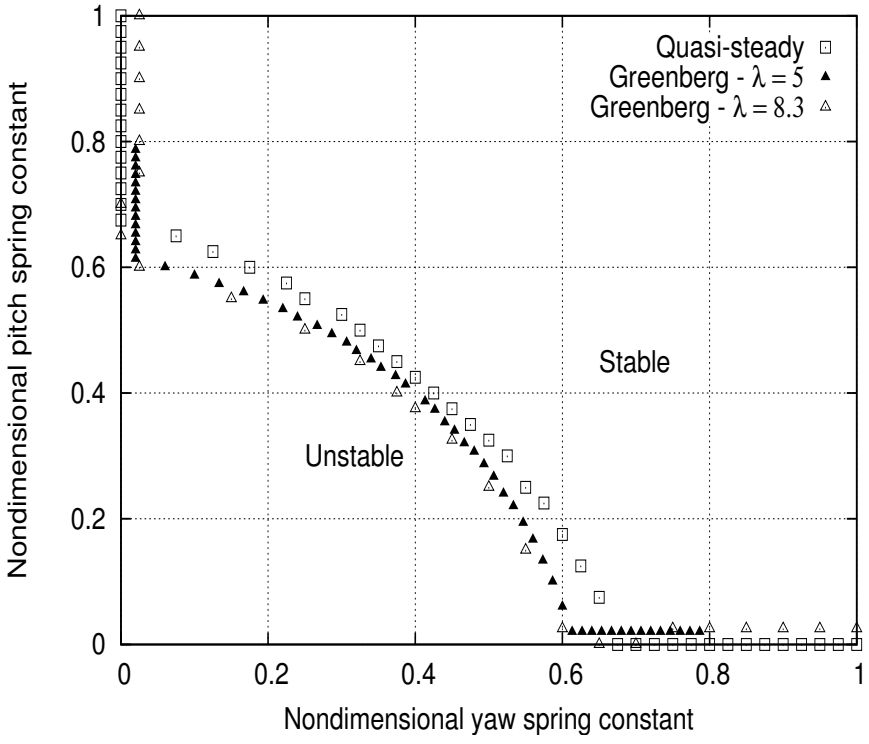

Figura 7.55: Margini di stabilità al whirl–flutter: rotore tripala, $\mu = 0.3$.

leggera tendenza del solutore 2D quasi–stazionario a sottostimare la divergenza $1/rev$ nel caso del

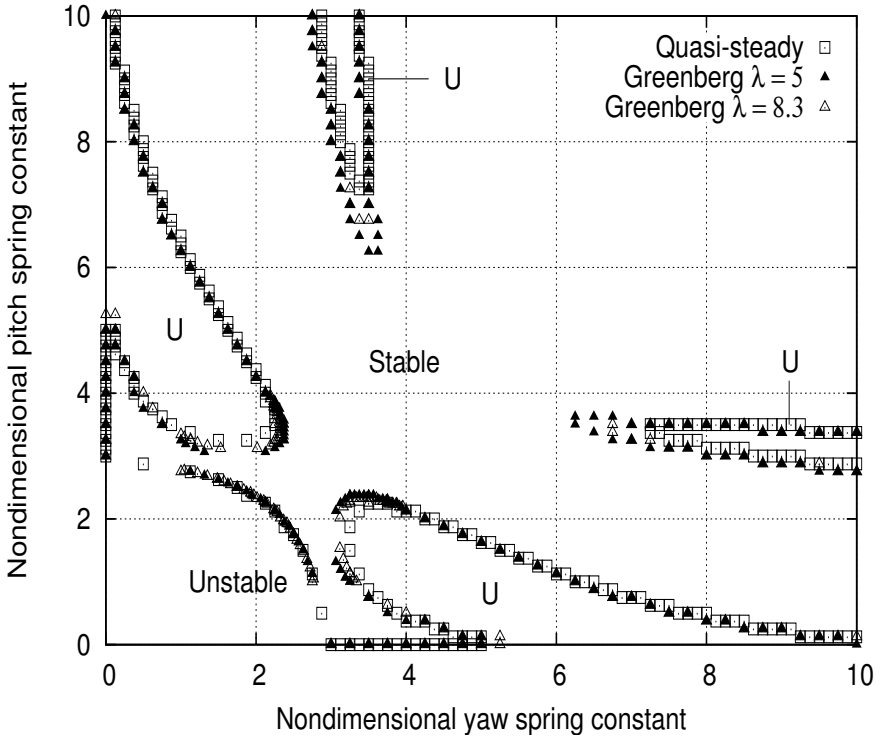

Figura 7.56: Margini di stabilità al whirl–flutter: rotor bipala, $\mu = 0.3$.

rotore bipala.

Nel seguito saranno illustrati i risultati ottenuti applicando il modello ROM basato sul solutore aerodinamico BEM descritto nel capitolo 3. Come detto, tale solutore tiene conto della tridimensionalità del flusso e della presenza di tutte le pale e delle rispettive scie che modificano il campo fludodinamico attorno al rotore. Come primo caso si considera una forma molto semplice di scia ottenuta come un elicoide con asse parallelo a quello di rotazione e passo fornito dal valore del coefficiente d'avanzo (in altri termini, la scia coincide con la superficie spazzata dal bordo d'uscita della pala durante il moto non perturbato).

In figura 7.57 sono confrontate le previsioni di stabilità per un rotore tripala caratterizzato da $\lambda = 8.3$ e $\mu = 1.0$. I margini ottenuti utilizzando il solutore BEM 3D non–stazionario sono confrontati con quelli ottenuti mediante i solutori 2D illustrati in precedenza. Lo stesso confronto è mostrato in figura 7.58 per un rotore bipala. Per queste configurazioni si nota che il solutore 2D non–stazionario generalmente sottostima le regioni di instabilità mentre il solutore 2D quasi–stazionario sottostima le instabilità per il rotore tripala ma fornisce risultati conservativi per il rotore bipala. Le figure 7.59 e 7.60 mostrano le analisi analoghe condotte per $\mu = 0.3$. Anche in questo caso l'uso di un

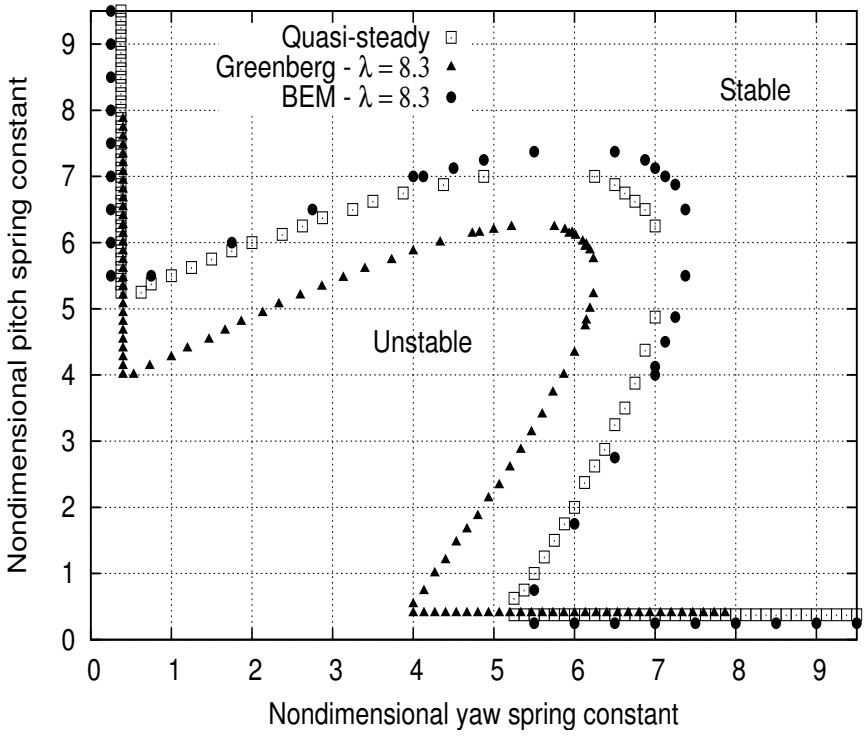

Figura 7.57: Margini di stabilità al whirl–flutter: rotore tripala, $\mu = 1.0$.

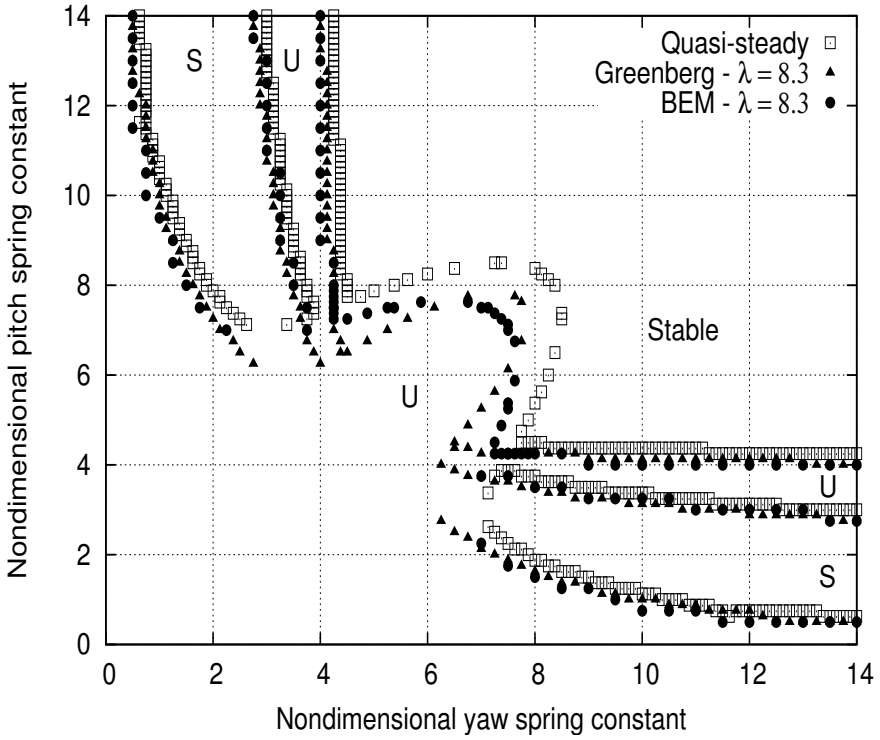

Figura 7.58: Margini di stabilità al whirl–flutter: rotor bipala, $\mu = 1.0$.

solutore aerodinamico 2D comporta la sottostima delle regioni di instabilità per il rotore tripala

rispetto a quanto previsto utilizzando il solutore BEM 3D non–stazionario, mentre, per quanto riguarda il rotore bipala tutti i modelli aerodinamici forniscono margini di stabilità simili.

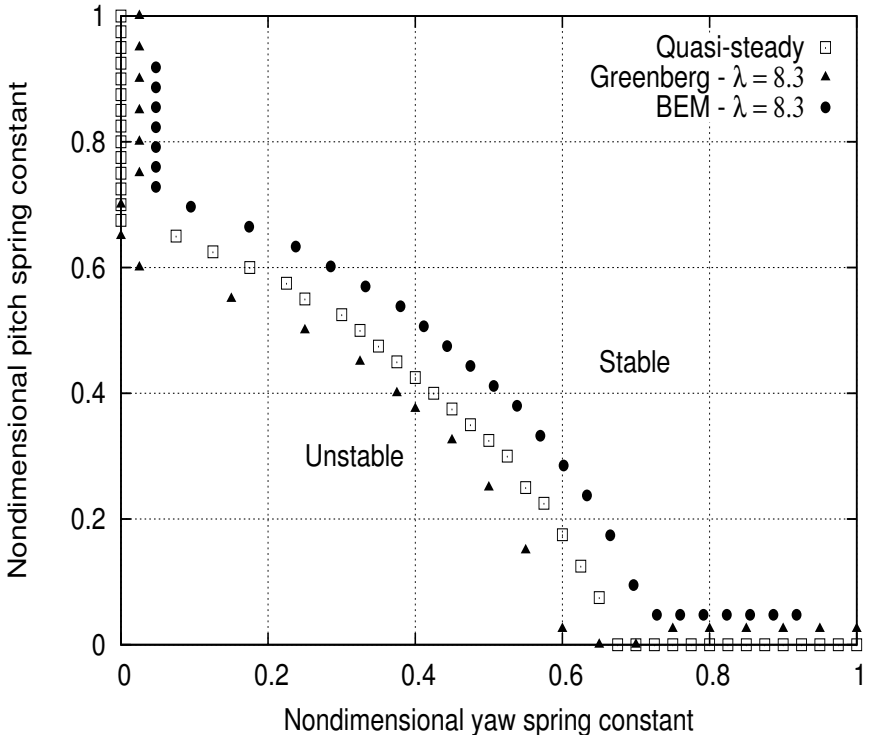

Figura 7.59: Margini di stabilità al whirl–flutter: rotore tripala, $\mu = 0.3$.

L'altro parametro importante ai fini del comportamento del proprotor rispetto al whirl–flutter è l'allungamento palare. Gli effetti di una variazione di tale parametro sui margini di stabilità sono stati investigati utilizzando i modelli aerodinamici di Greenberg e quello BEM (si ricordi che il solutore aerodinamico 2D quasi–stazionario non tiene conto degli effetti di λ). La figura 7.61 mostra i risultati per un rotore tripala con $\mu = 1.0$, $\lambda = 5$ and $\lambda = 8.3$ ottenuti con entrambi i modelli aerodinamici. Come si nota, un'aumento di λ comporta una riduzione delle regioni di instabilità ; tuttavia in tal caso aumenta la sottostima delle regioni instabili che risulta dall'utilizzo del solutore 2D. La figura 7.62 mostra la medesima analisi condotta per un rotore bipala. Anche in questo caso un aumento dell'allungamento palare comporta una riduzione delle regioni di instabilità , mentre le regioni di divergenza rimangono praticamente invariate. Si noti che il modello 2D fornisce una notevole sovrastima delle regioni di flutter nel caso di pale con basso allungamento. La significativa differenza tra i risultati ottenuti con il solutore 2D e con quello 3D per $\lambda = 5$ possono essere spiegati considerando il fatto che, per pale caratterizzate da basso allungamento palare gli effetti di tridimensionalità del flusso diventano predominanti.

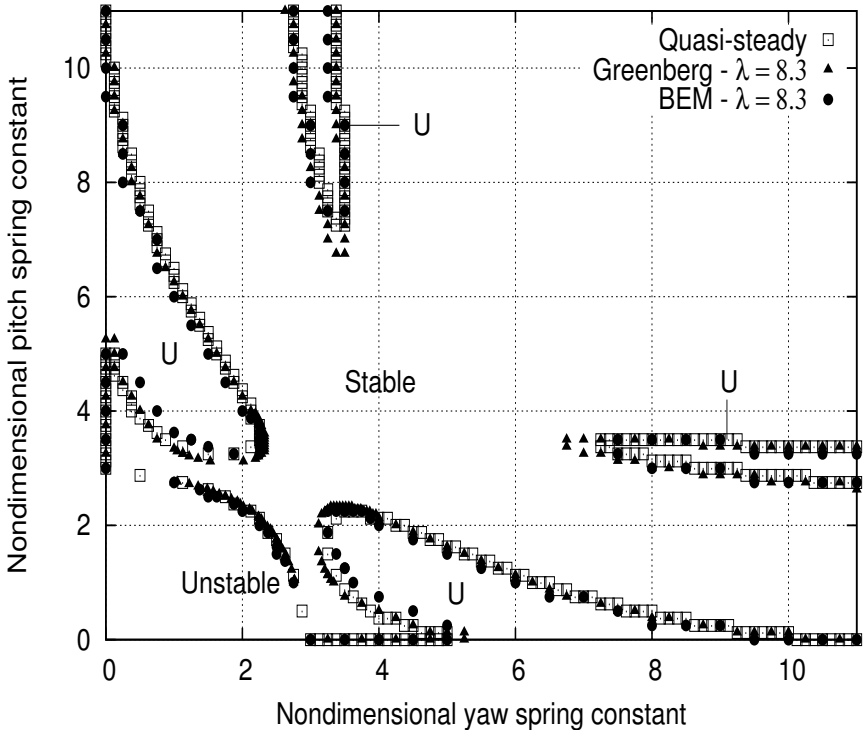

Figura 7.60: Margini di stabilità al whirl–flutter: rotor bipala, $\mu = 0.3$.

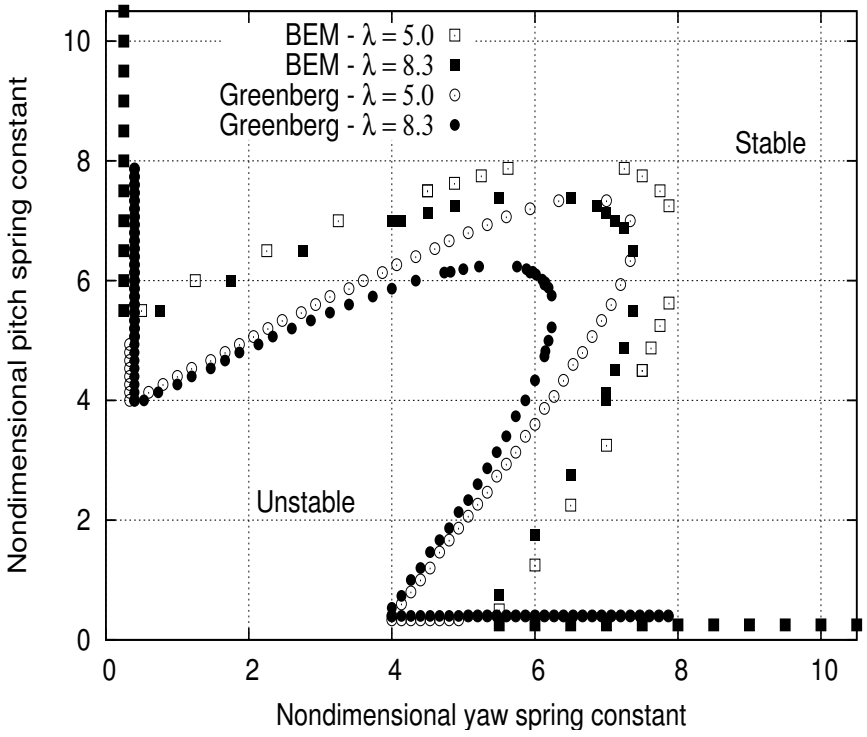

Figura 7.61: Margini di stabilità al whirl–flutter: effetto dell'allungamento palare nei modelli aerodinamici 2D e 3D per un rotore tripala, $\mu = 1.0$.

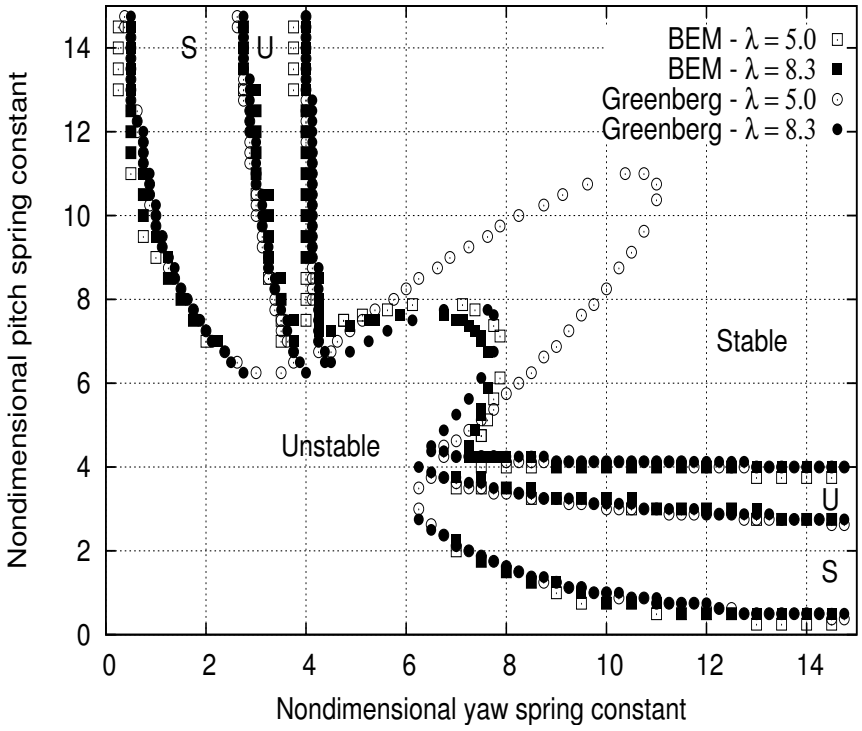

Figura 7.62: Margini di stabilità al whirl–flutter: effetto dell'allungamento palare nei modelli aerodinamici 2D e 3D per un rotore bipala, $\mu = 1.0$.

L'ultima analisi che è stata condotta per quanto riguarda il whirl–flutter è stata relativa all'introduzione nel solutore aerodinamico 3D BEM di una geometria di scia deformata ottenuta mediante un'analisi di scia libera del proprotor nella sua configurazione di volo in condizione di equilibrio. Tale analisi è stata condotta utilizzando il solutore BEM nel dominio del tempo descritto nel capitolo 4 (in figura 7.63 è riportata la scia ottenuta per una delle tre pale del rotore considerato). I margini di stabilità ottenuti per un rotore tripala sono mostrati nelle figure 7.64 per le condizioni di elevato coefficiente d'avanzo e 7.65 per bassi valori di λ. Questa analisi mostra che l'effetto di una geometria di scia deformata che tenga conto dell'effettivo carico palare è significativo e che l'utilizzo di una semplice forma elicoidale comporta la sottostima dell'estensione delle regioni di istabilità .

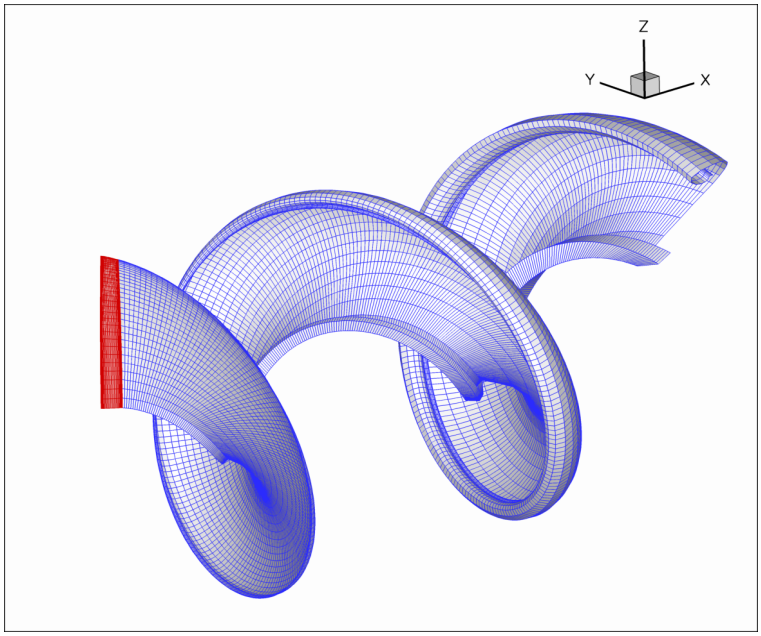

Figura 7.63: Esempio di geometria di scia ottenuta mediante tecnica di allineamento al flusso locale.

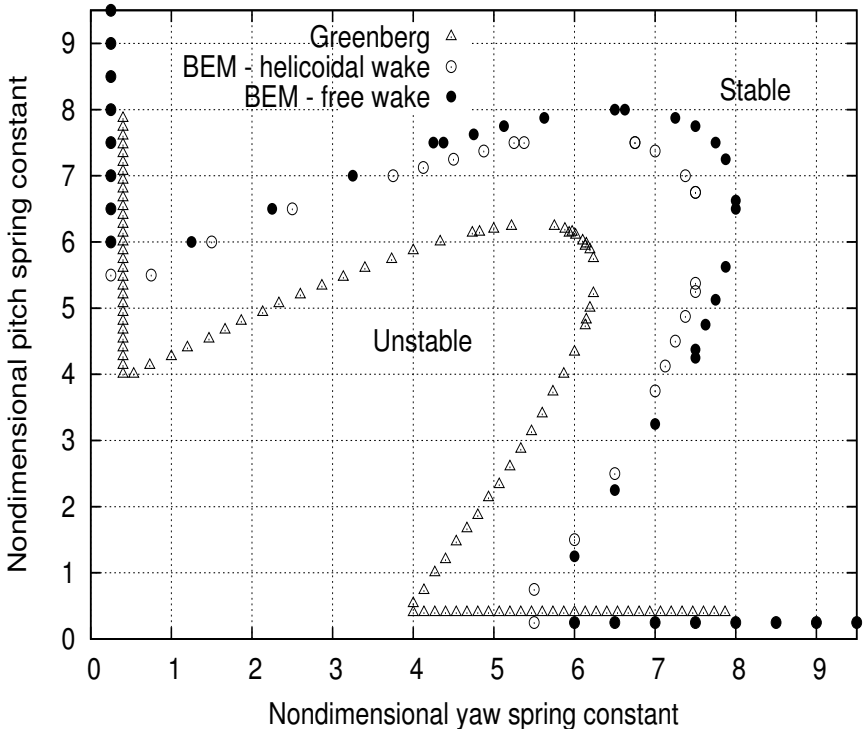

Figura 7.64: Margini di stabilità al whirl–flutter: effetto della forma della scia nel modello aerodinamico 3D per un rotore tripala, $\mu = 1.0$, $\lambda = 8.3$.

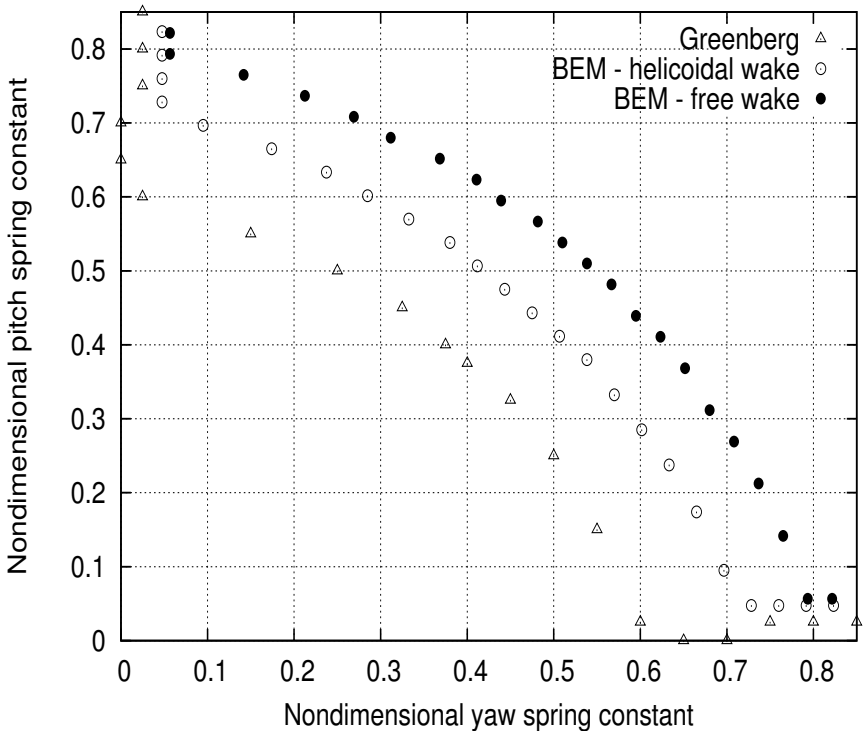

Figura 7.65: Margini di stabilità al whirl–flutter: effetto della forma della scia nel modello aerodinamico 3D per un rotore tripala, $\mu = 0.3$, $\lambda = 8.3$.

7.3.2 Valutazione dei margini di stabilità all'*air resonance* per un velivolo tiltrotor

L'*air resonance* è un fenomeno di instabilità aeroelastica tipica dei velivoli tiltrotor. Essa è sostanzialmente legata all'accoppiamento del moto elastico di flappeggio dell'ala con quello di lag delle pale infatti il modo che tipicamente da luogo all'instabilità è proprio il primo modo elastico di flappeggio dell'ala.

In questo paragrafo vengono mostrati i risultati ottenuti per l'analisi di stabilità del sistema ala/rotore. La configurazione considerata è quella corrispondente al rotore della Boeing descritto in [20]. Si tratta di un rotore di diametro pari a 3.97m dotato di pale incastrate al mozzo e calettato all'estremità di un'ala di lunghezza pari a 5.1m (si rimanda a [20] per i dettagli sulla configurazione). Per tale configurazione sono disponibili i dati relativi ai margini di stabilità ottenuti mediante sperimentazione in galleria del vento e quelli numerici risultanti dal modello introdotto da Johnson in [20].

L'analisi di stabilità è stata condotta utilizzando il modello aeroelastico definito nel presente la-

voro. In particolare, per quanto riguarda il calcolo dei carichi aerodinamici agenti su ala e rotore sono stati impiegati i modelli ROM 2D e 3D non–stazionari illustrati nei capitoli 2 e 3 e basati rispettivamente sulla teoria di Greenberg e su un solutore agli elementi di contorno per flussi potenziali. Le analisi numeriche compiute utilizzando per l'aerodinaica di ala e di rotore il solutore 2D quasi–stazionario ottenuto dalla teoria di Greenberg ponendo $\mathcal{C}(k) \cong 1$ sono state incluse come confronto. La procedura illustrata nel capitolo 4 che consente di tener conto nel modello aeroelastico degli effetti aerodinamici legati all'interazione della scia rotorica con la superficie dell'ala non è stata inclusa nelle simulazioni.

Innanzitutto è stata verificata l'equivalenza dinamica del sistema aeroelastico con il sistema ala/rotore sperimentato in galleria del vento calcolando le frequenze di vibrazione dell'ala in condizioni di volo di crociera a velocità 100 nodi e per una velocità angolare di rotore pari a 386 rpm e in assenza di smorzamento strutturale. Nella seguente tabella sono mostrate le frequenze di vibrazione relative al primo modo di flappeggio, lag e torsione di ala (rispettivamente ω_l, ω_f e ω_t) espresse in funzione della frequenza di rotazione $1/rev$. I risultati ottenuti mediante sperimentazione in galleria sono confrontati con i risultati ottenuti dal presente modello utilizzando per il rotore e per l'ala il modello aeorodinamico ROM basato sulla teoria di Greenberg.

Tabella 3 Frequenze aeroelastiche dell'ala

Modo	Calcolata	Misurata
Lag ω_l	0.35	0.36
Flappeggio ω_f	0.6	0.62
Torsione ω_t	1.4	1.43

Come si nota le previsioni numeriche dimostrano un buon accordo con le rilevanze sperimentali.

Successivamente l'analisi di stabilità è stata condotta utilizzando la trasformazione multipala per ricondurre il sistema aeroelastico del primo ordine a coefficienti periodici in uno equivalente a coefficienti costanti. Le condizioni di volo analizzate sono quelle di volo in crociera alla velocità di 50 nodi e 100 nodi. I margini di stabilità sono stati valutati individuando inizialmente l'autovalore più instabile al variare della velocità angolare Ω del rotore e per una fissata velocità di crociera. Tale

autovalore è stato identificato come quello che, tra quelli che descrivono la dinamica del sistema, si trova, nel piano di Gauss, più vicino all'asse immaginario: tale autovalore, infatti, è quello che caratterizza la dinamica della variabile di stato che risulta più persistente nel tempo (o eventualmente di quella che è instabile se l'autovalore presenta parte reale positiva). Le curve di stabilità sono state dunque ottenute valutando lo smorzamento più basso tra quelli calcolati mediante l'analisi agli autovalori, ovvero la parte reale cambiata di segno dell'autovalore più instabile. In figura

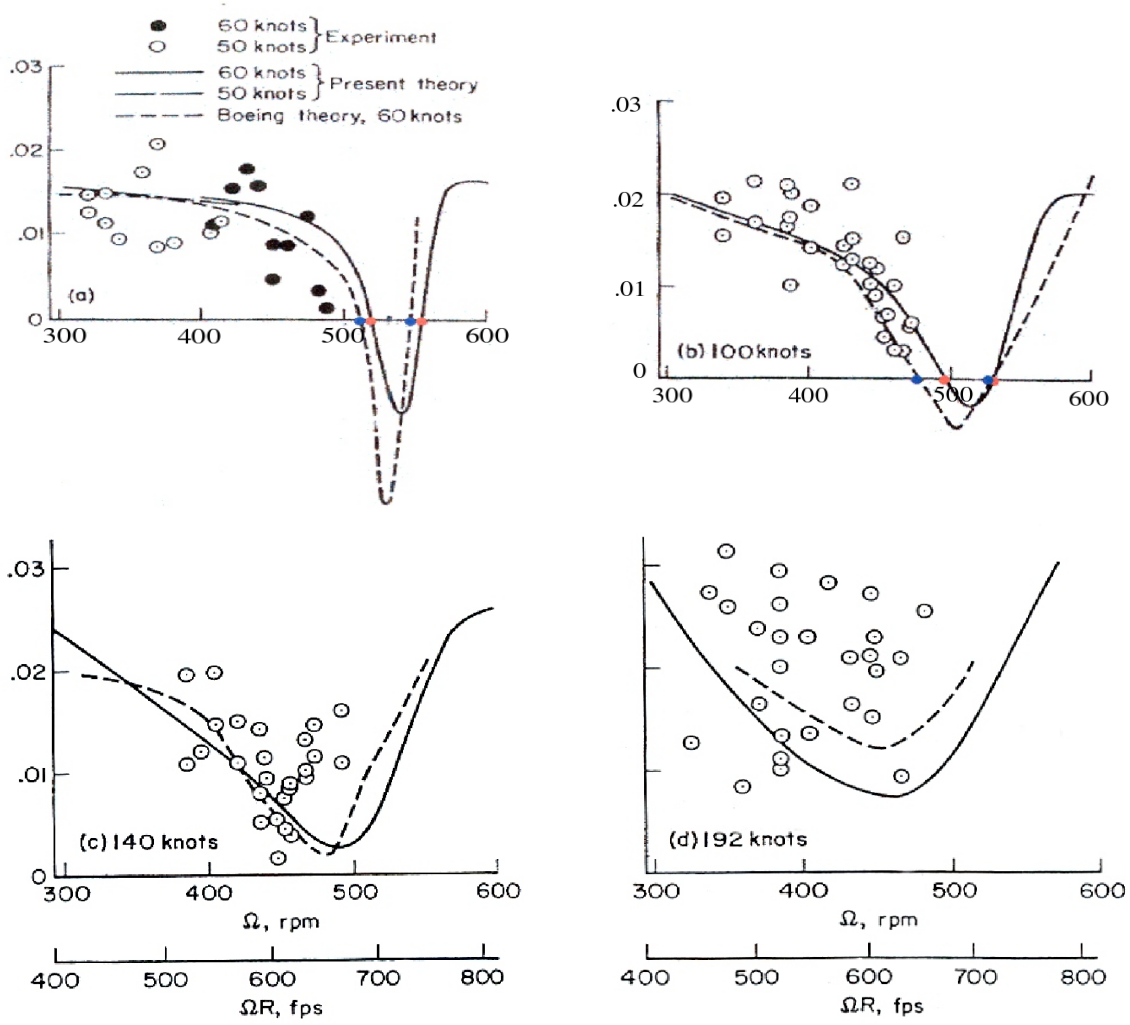

Figura 7.66: Air resonance del sistema ala/rotore: lacune di instabilità per diverse velocità di crociera Dati sperimentali confrontati con risultati numerici ottenuti in [20].

7.66 sono riportati i margini di stabilità del sistema al variare della velocità angolare del rotore e della velocità di crociera ottenuti in [20]. I risultati sperimentali sono confrontanti con l'andamento dello smorzamento adimensionale del primo modo di flappeggio di ala ottenuto mediante l'analisi

numerica condotta in [20]. I risultati mostrati si riferiscono alla condizione cosiddetta di *rotore windmilling* nella quale il motore è spento e non genera coppia ed il rotore è messo in movimento dal flusso d'aria della galleria del vento. Il modello aerodinamico di ala e rotore adottato in [20] è basato su una teoria 2D stazionaria.

Utilizzando il modello aeroelastico introdotto nel presente lavoro e adottando per la descrizione dei carichi aerodinamici di ala e di pala il modello quasi–stazionario derivato come caso particolare del modello ROM basato sulla teoria di Greenberg si ottengono le curve di stabilità mostrate in figura 7.67 nella quale lo smorzamento è dimensionale. Come si può notare esiste un buon accordo tra

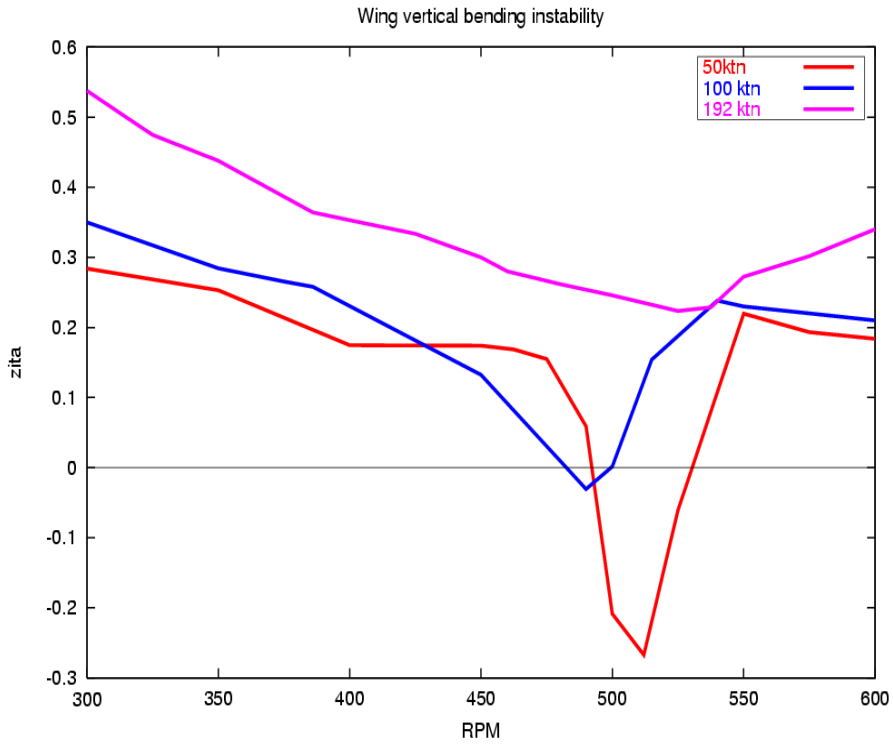

Figura 7.67: Air resonance del sistema ala/rotore: lacune di instabilità in diverse condizioni di volo ottenute mediante il modello aeroelastico introdotto nel presente lavoro.

i risultati numerici ottenuti nel presente lavoro e quelli mostrati nella figura 7.66 per velocità di crociera pari a 50 nodi e 100 nodi. In particolare a 50 nodi e 100 nodi il risultato numerico ottenuto utilizzando per l'ala ed il rotore il modello aerodinamico quasi–stazionario introdotto nel presente lavoro fornisce risultati che vanno nella direzione di un maggior accordo con le evidenze sperimentali. In corrispondenza ai 192 nodi lo smorzamento minimo predetto dal presente modello si ha in corrispondenza a valori più elevati di rpm rispetto ai dati sperimentali ed ai risultati numerici ottenuti in [20].

Considerando infine le condizioni *powered* in cui il motore fornisce la coppia motrice al rotore, sono stati calcolati i margini di stabilità utilizzando i modelli aerodinamici introdotti nel presente lavoro e confrontando i risultati con quanto ottenuto dalla teoria quasi–stazionaria.

Nelle figure 7.68 e 7.69 sono mostrati i margini di stabilità ottenuti utilizzando per il rotore e per l'ala il modello aerodinamico ROM basato sulla teoria 2D non–stazionaria di Greenberg. Il confronto con le curve ottenute, nelle medesime condizioni di volo con una aerodinamica di tipo quasi–stazionario mostra un sostanziale accordo delle previsioni dei margini di stabilità . Tuttavia, per quanto riguarda la curva a 50 nodi l'aerodinamica 2D non–stazionaria consente di individuare una lacuna di instabilità più marcata rispetto a quella evidenziata dall'aerodinamica quasi–stazionaria. Inoltre, per velocità di volo pari a 100 nodi, l'effetto aerodinamico stabilizzante previsto utilizzando il modello ROM/Greenberg risulta maggiore rispetto a quanto si ottiene con un'aerodinamica quasi–stazionaria per gran parte dello spettro di rpm investigati.

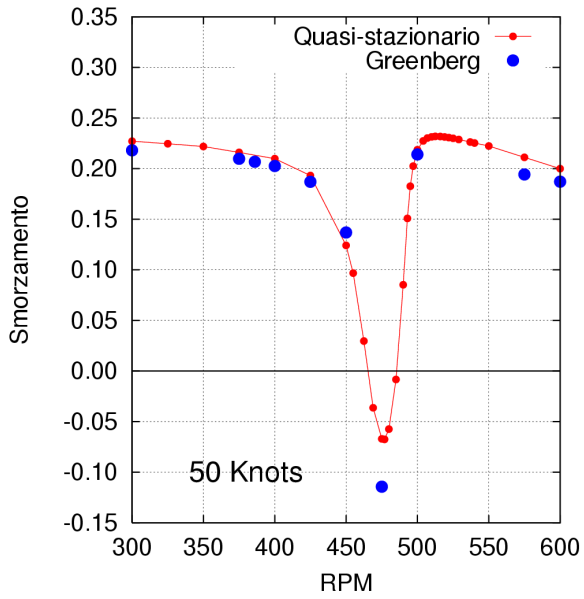

Figura 7.68: Air resonance del sistema ala/rotore: lacune di instabilità a 50 nodi. Modello aerodinamico ROM di ala e rotore basato sulla teoria di Greenberg.

Nelle figure 7.70 e 7.71 sono mostrati i margini di stabilità del sistema ala/rotore per 50 nodi e 100 nodi. Il risultato ottenuto con l'introduzione del modello aerodinamico ROM basato sul solutore BEM sul rotore e sull'ala è confrontato con le curve ottenute con il più semplice modello aerodinamico bidimensionale derivante dalla teoria di Greenberg e valido per basse frequenze (quasi

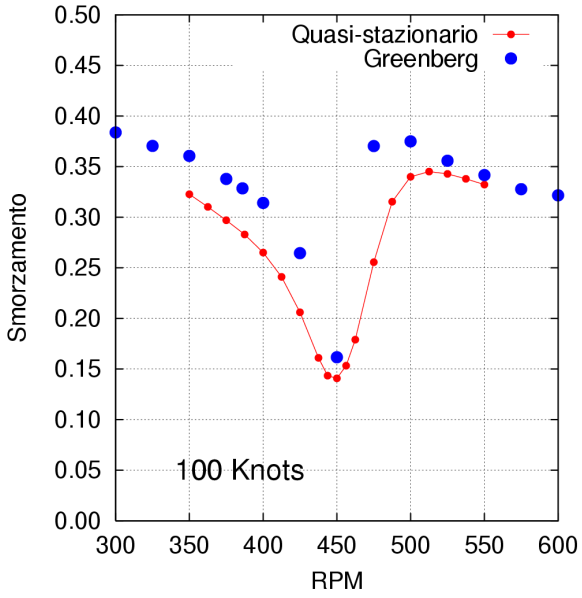

Figura 7.69: Air resonance del sistema ala/rotore: lacune di instabilità a 100 nodi. Modello aerodinamico ROM di ala e rotore basato sulla teoria di Greenberg.

stazionario).

Come si può notare, a velocità di crociera più elevate l'aerodinamica ha un effetto maggiormente smorzante rispetto a quello che accade per velocità di crociera pari a 50 nodi. Questa tendenza viene confermata anche utilizzando il modello ROM/BEM per ala e rotore così come è confermata la riduzione della lacuna di instabilità all'aumentare della velocità di avanzamento.

Si può notare che l'introduzione del modello ROM/BEM porta a previsioni di smorzamento significativamente differenti rispetto a quanto predetto utilizzando semplici modelli aerodinamici quasi–stazionari. In particolare per la curva a 50 nodi si nota una riduzione dello smorzamento per condizioni di volo a velocità di rotazione minori di 475 rpm. Per quanto riguarda l'analisi a 100 nodi il modello ROM/BEM fornisce valori più elevati di smorzamento prima della lacuna di instabilità, ma soprattutto prevede una lacuna di instabilità in corrispondenza a 450 rpm che non è presente nelle curve ottenute dal modello 2D quasi–stazionario.

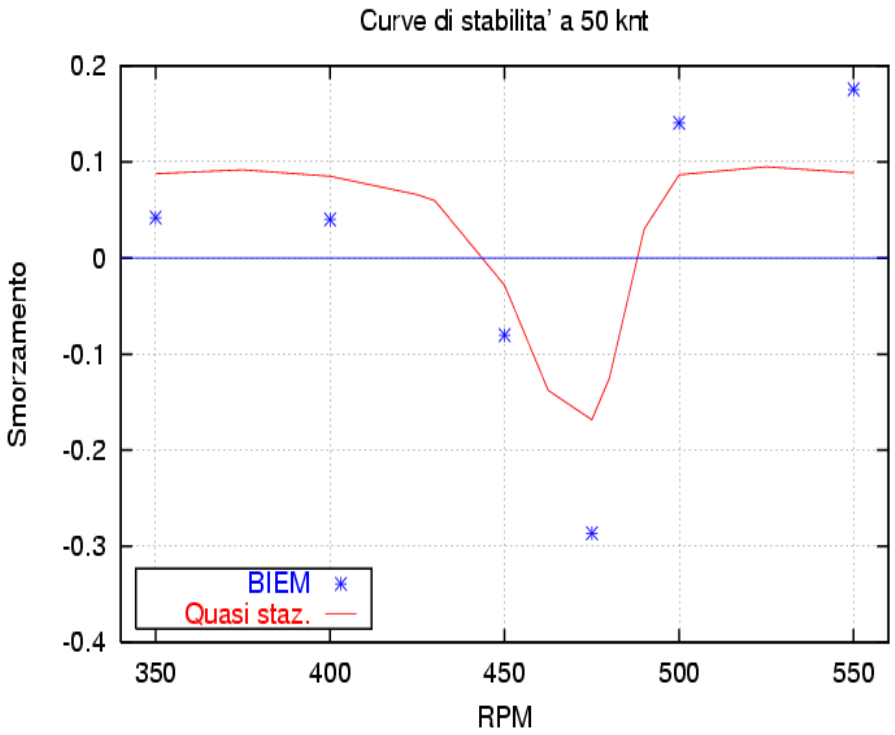

Figura 7.70: Air resonance del sistema ala/rotore: lacune di instabilità a 50 nodi. Modello aerodinamico ROM di ala e rotore basato sul solutore BEM.

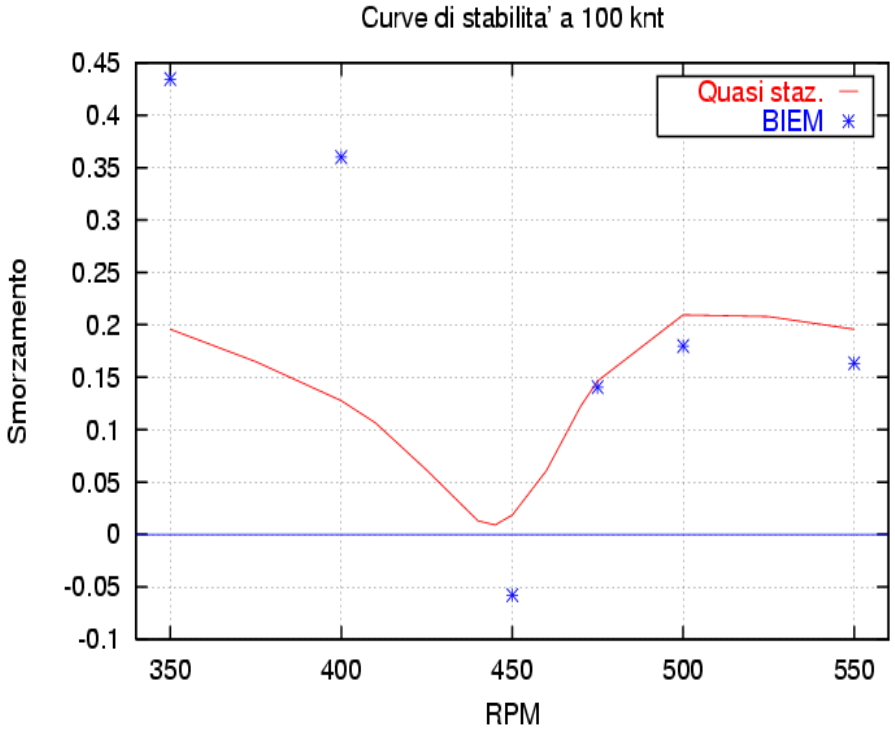

Figura 7.71: Air resonance del sistema ala/rotore: lacune di instabilità a 100 nodi. Modello aerodinamico ROM di ala e rotore basato sul solutore BEM.

Conclusioni

Il presente lavoro di tesi è stato incentrato sullo sviluppo di modelli teorici ed algoritmi numerici per l'analisi della stabilità aero/idrolastica di configurazioni aeronautiche o navali con propulsione ad elica nelle quali è presente una forte interazione aero/idrodinamica e strutturale tra parti fisse e rotanti del sistema.
In particolare sono state individuate in ambito aeronautico e navale due configurazioni che, dal punto di vista fluidodinamico e strutturale, sono caratterizzate da fenomenologie molto simili. In ambito aeronautico l'attenzione è stata rivolta al tiltrotor, un velivolo innovativo che coniuga alte velocità di crociera alla capacità di decollo e atterraggio verticale. Dal punto di vista navale è stato preso in considerazione un propulsore di tipo azimutale, detto pod, che in anni recenti sta sostituendo le tradizionali configurazioni elica/timone in molte applicazioni grazie alle sue caratteristiche di efficienza e flessibilità.
Le interazioni di carattere cinematico ed aerodinamico presenti nelle due configurazioni considerate consentono di indicare tali sistemi con la dicitura "sistemi ala/rotore".

Il lavoro è stato articolato lungo le due direttrici principali che concorrono alla definizione del modello aeroelastico del sistema ala/rotore.
Sono stati dunque sviluppati modelli aerodinamici che, coniugando accuratezza e bassi oneri computazionali, possano essere accoppiati con le equazioni della dinamica strutturale del sistema per studiarne la stabilità aero/idroelastica al variare di parametri costruttivi e condizioni di funzionamento. Le caratteristiche comuni alle due configurazioni considerate hanno consentito di sviluppare strumenti che, con le necessarie specializzazioni del caso, possono essere inquadrati in una trattazione unificata per sistemi di tipo rotore/ala fissa.
Il contributo maggiormente innovativo del presente lavoro consiste nello sviluppo di una metodo-

logia che consente di identificare un modello di ordine ridotto (ROM) per la descrizione dei carichi aerodinamici agenti sulle pale del rotore in funzione dei gradi di libertà del sistema. Il legame esplicito tra forze aerodinamiche e gradi di libertà consente di accoppiare direttamente il modello ROM alle equazioni della dinamica strutturale per definire il modello aeroelastico del rotore.

Sono stati dunque sviluppati solutori aerodinamici di complessità ed accuratezza crescenti e, per ciascuno di essi, è stato identificato il modello ROM corrispondente. Tali modelli sono caratterizzati da coefficienti periodici in quanto i carichi aerodinamici di rotore dipendono dal moto dell'ala alla quale è reso solidale dall'albero motore. Tuttavia la procedura sviluppata per l'identificazione dei modelli ROM richiede solo l'adozione di solutori aerodinamici scritti nel dominio della frequenza.

Una procedura analoga per l'identificazione del modello ROM per la descrizione dei carichi aerodinamici è stata sviluppata anche per l'ala.

I modelli aerodinamici non–stazionari adottati nel presente lavoro sono sostanzialmente basati su due solutori: uno basato sulla formulazione di Greenberg e uno valido per flussi potenziali attorno a corpi portanti derivato dalla soluzione dell'equazione di Laplace. La teoria bidimensionale di Greenberg per un profilo sottile in un flusso potenziale consente di tener conto della vorticità rilasciata solo a valle del profilo mentre il metodo delle equazioni integrali di contorno risolte mediante una metodologia BEM consente di tener conto degli effetti di tridimensionalità del flusso e della presenza della scia vorticosa elicoidale rilasciata da ciascuna delle pale del rotore. Gli effetti legati al rilascio di vorticità connessi con la generazione dei carichi aerodinamici introducono negli operatori aerodinamici di termini che dipendendono in maniera trascendente dalla frequenza la cui descrizione nel dominio del tempo richiederebbe un numero infinito di stati . L'introduzione di una approssimazione polinomiale di tali operatori consente di identificare il modello ROM mediante un numero finito (ovvero ridotto) di stati.

I modelli ROM descritti tengono conto dell'influenza che la cinematica di ala ha sull'aerodinamica di rotore e di quelle che i carichi aerodinamici di rotore hanno sulla dinamica di ala. Non si tiene conto degli effetti interazionali tra la scia rotorica e l'ala. In particolare, un aspetto affrontato nell'ambito del presente lavoro è quello legato alla distorsione della scia rotorica indotta dalla presenza dell'ala e agli effetti che tale interazione ha sui carichi aerodinamici agenti sull'ala. A tale scopo è stato sviluppato un terzo modello aerodinamico, scritto nel dominio del tempo, per poter descrivere, nell'ambito di un metodo agli elementi di contorno, i fenomeni aerodinamici le-

gati all'interazione della scia rotorica con la superficie dell'ala posta a valle. L'approccio seguito consente, ad ogni istante di tempo, di determinare la geometria della scia rilasciata dalle pale del rotore sulla base del campo di velocità indotto dalla presenza dell'ala e del rotore stesso. È stato inoltre sviluppato un algoritmo numerico in grado di tener conto di quelle porzioni di scia che, impattando sulla superficie dell'ala, inducono sulla stessa picchi di pressione variabili nel tempo.
Le informazioni relative agli effetti dell'aerodinamica interazionale sui carichi agenti sull'ala sono state sono utilizzate integrazione del modello aerodinamico ROM per l'ala. In particolare è stata introdotta una metodologia che, partendo dal campo di velocità indotta dal sistema completo ala/rotore calcolato utilizzando il modello aerodinamico interazionale, è in grado di integrare tale informazione nel modello ROM per la descrizione dei carichi aerodinamici agenti sull'ala.
Infine, accoppiando i modelli ROM per l'ala ed il rotore con le equazioni della dinamica strutturale ed utilizzando per la discretizzazione spaziale dei gradi di libertà del sistema un approccio basato sul metodo di Galërkin è stato possibile definire il sistema di equazioni che governano il comportamento aeroelastico del sistema ala/rotore. Riducendo in forma normale il sistema ottenuto è stato dunque possibile studiarne la stabilità mediante opportune tecniche basate sul calcolo degli autovalori per sistemi di equazioni differenziali del primo ordine a coefficienti periodici.
I modelli sviluppati nel presente lavoro sono stati validati mediante confronto con dati sperimentali e numerici disponibili in letteratura. In particolare la procedura di identificazione del modello ROM per i carichi aerodinamici di rotore è stata validata mediante confronto con un solutore BEM che, dato un ingresso corrispondente al moto dell'albero sul quale è calettato il rotore, è in grado di fornire la storia temporale dei carichi di pala risolvendo in maniera esatta le equazioni integrali di contorno per l'equazione di Laplace.

I modelli ROM per il sistema ala/rotore sono stati accoppiati con le equazioni della dinamica strutturale di ala e di rotore ed utilizzati, allo scopo di validarli, per lo studio dei margini di stabilità al *whirl flutter* e all'*air resonance* di un sistema ala/pilone/rotore rappresentativo del sistema costituito da nacelle, albero motore e rotore di un velivolo tiltrotor.
L'attività condotta e le applicazioni considerate per il modello aeroelastico del sistema ala/rotore hanno dimostrato che l'utilizzo di descrizioni aerodinamiche che siano in grado di tener propriamente in conto gli effetti di tridimensionalità del flusso e quelli legati al rilascio di vorticità legato alla generazione dei carichi aerodinamici sui corpi portanti risulta fondamentale per la previsione dei margini di stabilità dei sistemi presi in considerazione evidenziando il fatto che l'utilizzo di

modelli aerodinamici semplificati non sempre risulta conservativo. Lo strumento computazionale sviluppato nel presente lavoro ha consentito, e consentirà come ulteriore sviluppo futuro, di realizzare approfondite analisi parametriche delle condizioni di funzionamento del sistema e delle sue caratteristiche geometriche per comprendere, in fase di progettazione preliminare, l'effetto delle scelte progettuali sui margini di stabilità del sistema.

Per quanto riguarda il modello aerodinamico interazionale sono stati validati sia la tecnica di allineamento della scia rotorica sia la metodologia numerica introdotta per modellare gli impatti tra la scia stessa ed il corpo fisso posto a valle. L'algoritmo di allineamento della scia rotorica al campo fluidodinamico locale è stato validato mediante confronto con dati sperimentali disponibili in letteratura sia per configurazioni di tipo elica isolata che per configurazioni elica/timone nelle quali il timone, lavorando a valle dell'elica, rappresenta il corpo fisso che interagisce con la scia rotorica. Infine la capacità del modello interazionale di descrivere con accuratezza il campo fluidodinamico medio e quello non–stazionario attorno a configurazioni ala/rotore è stata investigata utilizzando come confronto dati relativi alla distribuzione di pressione sulla superficie del timone, carichi globali agenti sul timone e campi di velocità non–stazionari misurati a monte ed a valle del timone. I confronti delle previsioni numeriche con i dati sperimentali hanno mostrato una buona capacità del modello di catturare i fenomeni caratteristici dell'interazione elica/timone e di poter essere utilizzati come validi strumenti di previsione delle prestazioni di tali sistemi. La diminuzione dell'accuratezza della previsione numerica rispetto ai dati sperimentali all'aumentare del carico palare, ovvero della perturbazione indotta nel campo dall'elica, ha evidenziato la necessità di ulteriori investigazioni sulla tecnica proposta.

Infine, per quanto riguarda le applicazioni future del lavoro presentato, esse riguarderanno la validazione e successiva applicazione del modello di integrazione degli effetti interazionali nel modello ROM per l'ala. In particolare, nell'ambito dello studio della stabilità aeroelastica del sistema ala/rotore di un velivolo tiltrotor sarà importante valutare l'effetto dell'inclusione dell'aerodinamica interazionale sulla capacità del modello numerico di prevedere il comportamento aeroelastico del sistema.

Bibliografia

[1] Calcagni D., Modellazione teorica e numerica del flusso attorno ad un'elica navale all'interno di un tunnel idrodinamico, Tesi di Laurea in Ingegneria Meccanica, Università degli Studi di Roma Roma Tre, Anno Accademico 2002/02.

[2] Carlton, J.S., "Podded Propulsors: Some Design and Service Experience," The Motor Ship Marine Propulsion Conference, Copenhagen, Danimarca, 2002.

[3] Colombo C., Studio dell'interazione idrodinamica elica–timone attraverso il metodo agli elementi di contorno, Tesi di Laurea in Ingegneria Meccanica, Università degli Studi di Roma Roma Tre, Anno Accademico 2004/05.

[4] Deniset, F., Billard, J.-Y., Jaouen, R., "Fluctuating Pressure Distribution on Pod," Atti del *TPOD 2004 - First International Conference on Technological Advances in Podded Propulsion*, Newcastle upon Tyne, Gran Bretagna, Aprile 2004, pagg. 237-246.

[5] Felli, M., Greco, L., Colombo, C., Salvatore, F., Di Felice, F., Soave, M., "Experimental and Theoretical Investigations of Propeller–Rudder Interaction Phenomena", atti del *Twenty–Sixth ONR Symposium on Naval Hydrodynamics*, Roma, Italia, 17-22 Settembre 2006.

[6] Gennaretti, M., and Lisandrin, P., "Flap-Lag Rotor Dynamics and Aeroelastic Stability Using Finite-State Aerodynamics," *Proceedings of the 24th European Rotorcraft Forum*, AAAF, Marseilles, France, Sept. 1998, pp. DY.01.1-DY.01.11.

[7] Gennaretti, M., and Ponzi, C., "Finite-State Aerodynamic Modelling for Gust Load Alleviation of Wing-Tail Configurations," *The Aeronautical Journal,* Vol. 103, No. 1021, 1999, pp. 147-158.

[8] Gennaretti, M., and Iemma, U., “Aeroacoustoelasticity in state-space format using CHIEF regularization,” *Journal of Fluids and Structures*, Vol. 17, No. 7, 2003, pp. 983-999.

[9] Gennaretti, M., Greco, L., “A Time–Dependent Coefficient Reduced–Order Model for Unsteady Aerodynamics of Proprotors,” *Journal of Aircraft*, Vol. 42, No. 1, 2005, pagg. 138-147.

[10] Gennaretti, M., Greco, L., “Unsteady Aerodynamic Reduced–Order Models for the Analysis of Proprotor Whirl–flutter Instability,” atti dell’*International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics - IFASD 2005*, Monaco di Baviera, Germania, 28 GIugno - 1 Luglio 2005.

[11] Greco, L., Salvatore, F., Di Felice, F., “Validation of a Quasy–Potential Flow Model for the Analysis of Marine Propeller Wake,” atti del *Twenty–Fifth ONR Symposium on Naval Hydrodynamics*, St. John’s, Newfoundland, Canada, Agosto 2004.

[12] Greco, L., Colombo, C., Salvatore, F., Felli, M., “An Unsteady Inviscid–Flow Model to Study Podded Propulsors Hydrodynamics,” atti del *TPOD 2006 - Second International Conference on Technological Advances in Podded Propulsion*, Brest, Francia, 3-5 Ottobre 2006.

[13] Greenberg, J.M., “Airfoil in Sinusoidal Motion in a Pulsating Stream,” NACA TN-1326, 1947.

[14] Hathaway, E.L., e Gandhi, F.S., “Modeling Refinements in Simple Tiltrotor Whirl Flutter Analyses,” *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 48, No. 3, 2003, pagg. 186-198.

[15] Hoadley, S. T., and Karpel, M., “Application of Aeroservoelastic Modeling Using Minimum-State Unsteady Aerodynamic Approximations,” *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 14, No. 6, 1991, pp. 1267-1276.

[16] Hodges D.H., and Dowell E.H., Nonlinear Equation of Motion for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades, NASA TN D-7818, December 1974.

[17] Morino, L. and Gennaretti, M., “Boundary Integral Equation Methods for Aerodynamics”, in Atluri, S.N., “Computational Nonlinear Mechanics in Aerospace Engineering”, *AIAA Progress in Aeronautics and Astronautics*, Vol. 146, AIAA, Washington, DC, 1992, pp. 235-241.

[18] Hodges D.H., and Ormiston R.A., Stability of Elastic Bending and Torsion of Uniform Cantilever Rotor Blades in Hover with Variable Stuctural Coupling, NASA TN D-8192, April 1976

[19] Houbolt, J.C., and Reed, W.H., "Propeller–Nacelle Whirl Flutter," *Journal of the Aerospace Sciences*, Vol. 29, No. 3, 1962, pp. 333-346.

[20] Johnson, W., "Dynamics of Tilting Proprotor Aircraft in Cruise Flight," NASA Nota Tecnica TN D-7677, Maggio, 1974.

[21] Johnson, W., "Helicopter Theory," Dover Publications, Inc., New York, 1980.

[22] Karpel, M., "Design for the Active Flutter Suppression and Gust Alleviation Using State-Space Aeroelastic Modeling," *Journal of Aircraft*, Vol. 19, No. 3, 1982, pp. 221-227.

[23] Krasilnikov, V., Berg, A., e Oye, I.J., "Numerical Prediction of Sheet cavitation on Rudder and Podded Propellers Using Potential and Viscous Flow Solutions," Atti del *Fifth International Symposium on Cavitation*, Osaka, Giappone, Novembre 2003.

[24] Kunz, D.L., "Analysis of Proprotor Whirl Flutter: Review and Update," *Journal of Aircraft*, Vol. 42, No. 1, 2005, pagg. 172-178.

[25] Marshall, J.S., e Krishnamoorty, S., "Penetration of a Blade into a Vortex Core: Vorticity Response and Unsteady Blade Forces," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 306, 1996, pagg. 83-109.

[26] Marshall, J.S., e Krishnamoorty, S., "On the Instantaneous Cutting of a Columnar Vortex with non–zero Axial Flow," *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. 351, 1997, pagg. 41-74.

[27] Molland, A.F., e Turnock, S.R., "Wind Tunnel Investigation of the Influence of Propeller Loading on Ship Rudder Performance," *Transactions of the Royal Institution of Naval Architects*, Vol. 135, 1992, pagg. 133-147.

[28] Moqin, H., "Propeller Wake Impingement on a Strut," Tesi di Dottorato, *Faculty of Engineering and Applied Science*, Memorial University of Newfoundland, 2006.

[29] Morino, L., Mastroddi, F., De Troia, R., Ghiringhelli, G.L., and Mantegazza, P., "Matrix fraction approach for finite-state aerodynamic modeling," *AIAA Journal* Vol. 33, No. 4, 1995, pp. 703-711.

[30] Nixon, M.W., "Aeroelastic Response and Stability of Tiltrotors with Elastically–Coopled Composite Rotor Blades," Tesi di Dottorato, University of Mayland, 1993.

[31] Nixon, M.W., Piatak, D.J., Corso, L.M., and Popelka, D.A., "Aeroelastic Tailoring for Stability Augmentation and Performance Enhancements of Tiltrotor Aircraft," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 45, No. 4, 2000, pagg. 270-279.

[32] Reed, W.H., and Bland, S.R., "An Analytical Treatment of Aircraft Propeller Procession Instability," NASA TN D-659, 1961.

[33] Salvatore, F., Greco, L., Calcagni, D., "Hydrodynamic Modelling of Unsteady Interactions among Podded Propulsors Components," atti dell'*International Conference on Fast Sea Transportation - FAST 2005*, San Pietroburgo, Russia, Giugno 2005.

[34] Sanchez–Caja, A., Ory, E., Salminen, E., e Pylkkanen, Y., "Simulation of Incompressible Viscous Flow Around a Tractor Thruster in Model and Full Scale," Atti dell'*Eight Symposium on Numerical Ship Hydrodynamics*, Seul, Corea, Vol. 1, Settembre 2003, pagg. 172-182.

[35] Sanchez–Caja, A., e Pylkkanen, Y., "On the Hydrodynamic Design of Podded Propulsors for Fast Commercial Vessels," Atti del *TPOD 2004 - First International Conference on Technological Advances in Podded Propulsion*, Newcastle upon Tyne, Gran Bretagna, Aprile 2004, pagg. 201-210.

[36] Serafini, J., "Modellazione Aeroelastica e Metodi Matematici per lo Studio di Stabilità di Rotori di Elicottero in Volo di Avanzamento," Tesi di Laurea in Ingegneria Meccanica, Università degli Studi di Roma Roma Tre, Anno Accademico 2004/05.

[37] Singh, B., e Chopra, I., "Whirl Flutter Stability of Two–Bladed Proprotor/Pylon Systems in High Speed Flight," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 48, No. 2, 2003, pagg. 99–107.

[38] Srinivas, V., Chopra, I., e Nixon, M.W., “Aeroelastic Analysis of Advanced Geometry Tiltrotor Aircraft,” *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 43, No. 3, 1998, pagg. 212-221.

[39] Srinivas, V., e Chopra, I., “Validation of a Comprehensive Aeroelastic Analysis for Tiltrotor Aircraft,” *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 43, No. 4, 1998, pagg. 333-341.

[40] Theodorsen, T.,“General Theory of Aerodynamic Instability and the Mechanism of Flutter,” NACA Report No.496, 1935.

[41] Testa C., Approccio modale per l’analisi aeroelastica di sistemi Tiltrotor, Tesi di Laurea in Ingegneria Aerospaziale, Università degli Studi di Roma La Sapienza, Anno Accademico 2000/01

Appendice A

Teoria di Floquet-Lyapunov

Si consideri un sistema dinamico descritto da equazioni differenziali ordinarie, a coefficienti tempo varianti, del primo ordine, nella forma

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} \tag{A.1}$$

La matrice $\mathbf{A}$ è funzione del tempo ed in particolare, in questa sede, si è interessati a matrici che siano periodiche, in quanto la matrice di stato che si ottiene per il sistema ala/rotor è di tipo periodico. In particolare deve valere la proprietà

$$\mathbf{A}(t+T) = \mathbf{A}(t) \qquad \forall t \tag{A.2}$$

dove T il periodo del sistema.
La soluzione del sistema A.1 può essere scritta nella forma

$$\mathbf{x}(t) = \phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) \tag{A.3}$$

in quanto, per un sistema lineare, la soluzione all'istante t è combinazione lineare dello stato iniziale (ovvero della soluzione all'istante t_0). La matrice $\phi(t, t_0)$ è detta matrice di transizione dello stato e, per definizione, essa gode delle seguenti proprietà :

- $\phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$
- $\phi(t_2, t_0) = \phi(t_2, t_1)\phi(t_1, t_0)$
- $\phi(t_1, t_0) = \phi^{-1}(t_0, t_1)$

delle quali la terza deriva dalle prime due ponendo nella seconda $t_2 = t_0$.

Sostituendo la A.3 nell'equazione differenziale del sistema si ottiene l'equazione differenziale per la matrice di stato nella forma

$$\dot{\phi} = \mathbf{A}\phi \tag{A.4}$$

con associate le condizioni iniziali $\phi(t_0, t_0) = \mathbf{I}$.

Quindi l'analisi di un sistema lineare si riconduce al problema di determinare la matrice di transizione dello stato: in generale infatti, anche nel caso di sistemi forzati la conoscenza di $\phi(t, t_0)$ consente, per il tramite dell'integrale di convoluzione, il calcolo della soluzione completa.

Per un sistema *tempo invariante* la matrice di stato all'istante t ha l'ulteriore proprietà di dipendere esclusivamente dalla differenza $t - t_0$ attraverso la relazione $\phi(t, t_0) = e^{\mathbf{A}(t,t_0)}$.

Ci si sofferma ora sul caso di sistemi a coefficienti *tempo varianti*, per i quali l'equazione differenziale per $\phi(t, t_0)$ si può scrivere nella forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\phi(t, t_0) \tag{A.5}$$

ed in particolare, per sistemi a coefficienti periodici, si ottiene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t + T, t_0) = \mathbf{A}(t + T)\phi(t + T, t_0) = \mathbf{A}(t)\phi(t + T, t_0) \tag{A.6}$$

Dall'ultima uguaglianza si deduce che $\phi(t + T, t_0)$ deve necessariamente essere combinazione lineare di $\phi(t, t_0)$ in quanto entrambe sono soluzioni della stessa equazione. In altri termini

$$\phi(t + T, t_0) = \phi(t, t_0)\mathbf{C} \tag{A.7}$$

nella quale con $\mathbf{C}$ si indica una matrice costante che dipende dalle caratteristiche del sistema.

Il **teorema di Floquet** consente di scrivere la generica soluzione del sistema A.1 nella forma

$$\mathbf{x}(t, t_0) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{B}t} \tag{A.8}$$

che, applicata alla matrice di transizione dello stato, conduce alla

$$\phi(t, 0) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{B}t} \tag{A.9}$$

o più in generale

$$\phi(t, t_0) = \mathbf{P}(t)e^{\mathbf{B}(t-t_0)}\mathbf{P}^{-1}(t_0) \tag{A.10}$$

dove $\mathbf{B}$ anch'essa una matrice costante definita come:

$$\mathbf{C} = e^{\mathbf{B}T} \tag{A.11}$$

La matrice $\mathbf{P}$ risulta essere periodica; infatti, ponendo $t_0 = 0$ e $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$, si ha

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(t+T) &= \phi(t+T,0)e^{-\mathbf{B}(t+T)} \\ &= \phi(t,0)\mathbf{C}e^{-\mathbf{B}T}e^{-\mathbf{B}t} \\ &= \phi(t,0)e^{-\mathbf{B}t} \\ &= \mathbf{P}(t) \end{aligned} \tag{A.12}$$

pertanto $\mathbf{P}$ è periodica di periodo T con condizioni iniziali $\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}$.

Si è quindi stabilito che la soluzione di sistema lineare periodico assume la forma di un fattore esponenziale (che decade o cresce nel tempo dipendentemente dalla matrice costante $\mathbf{B}$) moltiplicato per un fattore puramente periodico. In altri termini, il risultato della teoria di Floquet–Lyapunov è che tutte le informazioni relative al comportamento dinamico di un sistema lineare periodico del primo ordine sono contenute nella matrice $\mathbf{B}$ (ed in particolare nei suoi autovalori per quel che riguarda l'analisi della stabilità del sistema stesso).

Di fatto, quindi, l'analisi della stabilità di un sistema a coefficienti periodici può essere ricondotta allo studio su un sistema a coefficienti costanti equivalente. In particolare, un corollario del teorema di Floquet afferma che esiste un cambiamento di base, caratterizzato da una matrice non singolare e periodica, che trasforma il sistema A.1 in un sistema a coefficienti costanti; ovvero, dato il sistema

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}(t)\,\mathbf{x} \tag{A.13}$$

esiste una cambiamento di base

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{y}(t) \tag{A.14}$$

che lo trasforma nel sistema

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{B}\mathbf{y} \tag{A.15}$$

a coefficienti costanti, la cui soluzione :

$$\mathbf{y}(t) = e^{\mathbf{B}t}\mathbf{y}_0 \tag{A.16}$$

con y_0 condizione iniziale.

Per utilizzare queste conclusioni nell'ambito dell'analisi di stabilità occorre un approfondimento

sulla matrice $\mathbf{C}$ e sul metodo adottato per calcolarla.

Si consideri la matrice delle soluzioni *fondamentali* $\mathbf{X}(t)$, ovvero una matrice in cui ciascuna colonna rappresenta il vettore delle risposte $\mathbf{x}(t)$ ad ognuna delle condizioni iniziali *fondamentali* (ovvero le colonne della matrice identità $\mathbf{I}$): si definisce *matrice monodroma* la matrice non singolare $\mathbf{C}$ associata alla matrice delle soluzioni *fondamentali* $\mathbf{X}(t)$ mediante la relazione

$$\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)\mathbf{C} \tag{A.17}$$

che si ottiene ricordando che la A.7 vale anche per $\mathbf{x}(t)$, se si impongono condizioni iniziali *fondamentali*. Inoltre, si può dimostrare che la matrice $\mathbf{C}$ può sempre essere scritta nella forma

$$\mathbf{C} = e^{\mathbf{B}T} \tag{A.18}$$

Dall'equazione A.7 scritta per $t = t_0$ si ottiene

$$\phi(t_0 + T, t_0) = \phi(t_0, t_0)\mathbf{C} = \mathbf{C} \tag{A.19}$$

e quindi, ponendo $t_0 = 0$, si ha

$$\mathbf{C} = \phi(T) = \mathbf{X}(T) \tag{A.20}$$

in quanto la matrice di transizione dello stato coincide con $\mathbf{X}(t)$ se si impongono condizioni iniziali *fondamentali* per $\mathbf{x}(t)$.

Dal punto di vista operativo, nota la matrice $\mathbf{A}(t)$ di dimensione n, si calcola, tramite integrazione al passo, la risposta $\mathbf{x}(t)$ ad una condizione iniziale $\mathbf{x}(0)$ *fondamentale* (ovvero una colonna di $\mathbf{I}$); il procedimento viene ripetuto per n volte ed in tal modo si costruisce $\mathbf{X}(t)$. Infine, utilizzando i valori di $\mathbf{x}(T)$ ottenuti per le diverse condizioni iniziali, si costruisce la matrice $\mathbf{C}$.

Il calcolo della matrice monodroma è la chiave per lo studio della stabilità di sistemi a coefficienti periodici. Infatti, come si è visto, il teorema di Floquet consente di capire il comportamento dinamico di un sistema di questo tipo semplicemente analizzando gli autovalori della matrice $\mathbf{B}$; poiché essa è legata alla matrice $\mathbf{C}$, risulta utile trovare un analogo legame tra gli autovalori di $\mathbf{B}$ e quelli di $\mathbf{C}$ in modo che l'analisi si riconduca allo studio degli autovalori di $\mathbf{C}$.

Dall'equazione $\phi(t + T, t_0) = \phi(t, t_0)\mathbf{C}$ segue che $\phi(t + NT, t_0) = \phi(t, t_0)\mathbf{C}^N$; in altri termini, tutte le informazioni sulla soluzione del sistema sono contenute nella matrice di transizione dello stato in un singolo periodo. Infatti anche la matrice $\mathbf{C}$ è espressa in funzione di ϕ in un periodo (equazione A.19).

Sia ora Θ la matrice degli autovalori di $\mathbf{C}$ e $\mathbf{S}$ la corrispondente matrice modale tale che $\mathbf{C} = \mathbf{S}\Theta\mathbf{S}^{-1}$. Si ha quindi che

$$\mathbf{C}^N = \mathbf{S}\Theta^N\mathbf{S}^{-1} \tag{A.21}$$

dalla quale discende che, se il sistema è instabile, ovvero se la matrice di transizione dello stato cresce indefinitamente nel tempo, deve accadere che, detti $|\theta_i|$ gli autovalori di Θ, risulti $|\theta_i| > 1$ $\forall i$.

Nella forma più convenzionale A.16, gli autovalori del sistema sono gli autovalori della matrice $\mathbf{B}$. Sia dunque Λ la matrice degli autovalori di $\mathbf{B}$ e $\mathbf{S}$ la corrispondente matrice modale ($\mathbf{C}$ e $\mathbf{B}$ hanno gli stessi autovettori): dalla definizione $\mathbf{C} = e^{\mathbf{B}t}$ segue che il legame tra Θ e Λ è

$$\Theta = e^{\Lambda T} \tag{A.22}$$

o equivalentemente:

$$\Lambda = \frac{1}{T}\ln\Theta \tag{A.23}$$

Dal momento che gli autovalori della matrice $\mathbf{C}$ sono reali o complessi coniugati allora i corrispondenti autovalori di $\mathbf{B}$ possono essere espressi nella forma:

$$\lambda = \frac{1}{T}(\ln|\theta| + j\angle\theta) + n\frac{2\pi}{T}j \tag{A.24}$$

La condizione di instabilit del sistema si traduce allora nelle due condizioni equivalenti:

$$|\theta_i| > 1 \qquad Re(\lambda_i) > 0 \tag{A.25}$$

Nelle figure si possono vedere le regioni di stabilit nel piano di Gauss per θ_i e per λ_i

É interessante notare che nei sistemi periodici si presenta un tipo di instabilità che nei sitemi a coefficienti costanti non esiste. Come si vede, nelle figure è anche riportato un possibile luogo delle radici per sistemi periodici: la separazione dei rami, che per un sistema a coefficienti costanti può verificarsi solo sull'asse reale, per sistemi periodici può verificarsi per frequenza diversa da zero.
Da quanto esposto appare evidente il parallelo tra l'analisi di stabilità di sistemi a coefficienti costanti e di sistemi a coefficienti variabili nel tempo: tuttavia è opportuno sottolineare che, per questi ultimi, l'analisi è subordinata alla possibilità di calcolare, imponendo diverse condizioni iniziali, la soluzione del sistema in corrispondenza al periodo T.

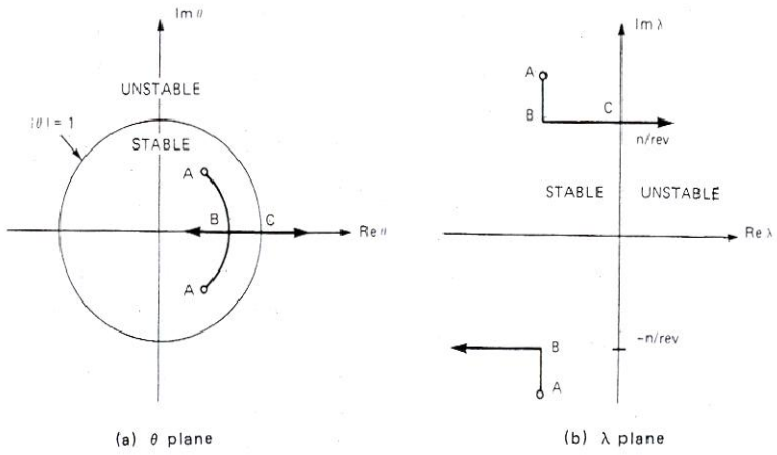

Figura A.1: Piano di Gauss.

Per quanto riguarda la parte immaginaria dell'autovalore, legata come detto alla frequenza, vale la relazione

$$Im(\lambda) = j(\frac{\angle\theta}{T} + \frac{1}{T}2n\pi) \tag{A.26}$$

ovvero ad un autovalore θ corrispondono infiniti autovalori λ aventi una frequenza base (legata a quella di θ) a cui vengono sommati dei multipli della frequenza giro. Ciò risulta comprovato dall'analisi dello spettro in frequenza della risposta del sistema nel tempo.

Questo aspetto rende l'utilizzo della teoria di Floquet delicato quando si renda necessario conoscere le frequenze proprie del sistema al variare delle condizioni di funzionamento per motivi legati, per esempio, alla scelta degli attuatori opportuni per il dimensionamento dei sistemi di controllo, al dimensionamento di tutte le componenti del sistema per evitare fenomeni di risonanza, etc.

Appendice B

Flussi potenziali incomprimibili

B.1 Equazione di Laplace

Nell'ipotesi di flusso *incomprimibile* e *non viscoso* le equazioni che governano il flusso sono l'equazione di continuità

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{B.1}$$

e l'equazione di Eulero (bilancio della quantità di moto)

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p \tag{B.2}$$

dove

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \tag{B.3}$$

indica la derivata sostanziale, ovvero la derivata nel tempo fatta seguendo il moto del punto materiale.

Si supponga ora che il campo fluidodinamico sia *inizialmente irrotazionale* (per esempio fluido a riposo all'istante $t = 0$): allora il teorema di Kelvin comporta che il campo rimanga irrotazionale (e quindi *potenziale*) anche per $t > 0$.

Si noti che il teorema di Kelvin non vale per le particelle di fluido che entrano in contatto con la superficie del corpo $\mathcal{S}_B$; infatti, per tali punti, non è possibile definire un circuito materiale che rimanga nel fluido in ogni istante: essi formano, a valle del corpo, una superficie chiamata *scia* ($\mathcal{S}_W$).

Per i punti che appartengono alla scia, il flusso non può definirsi potenziale: in altri termini, esiste

vorticità nella scia ed essa comporta una discontinuità nel potenziale. Questo conduce, come si vedrà nel seguito, ad una formulazione integrale della scia come strato di doppiette o, in modo equivalente, come uno strato di vortici.

Prima di proseguire occorre porre l'accento su due considerazioni.
Il risultato appena enunciato è in accordo con il cosiddetto paradosso di D'Alambert, secondo il quale, la risultante delle forze aerodinamiche agenti su un corpo immerso in un flusso potenziale stazionario è nulla: in altri termini un flusso potenziale stazionario non genera né portanza, né resistenza. Per estendere quindi la formulazione potenziale al caso di corpi portanti è necesario ammettere la presenza di vorticità nel campo: tale vorticità è concentrata nella scia.
Infine è necessario distinguere il concetto di sci,a introdotta per i flussi potenziali, dall'accezione comune della parola "scia". Dal punto di vista fisico la scia è , nel caso di flussi viscosi, una zona di spessore diverso da zero nella quale è trasportata la vorticità che si genera sulla superficie del corpo. Nel caso in esame, si assume che la scia sia una superficie (ovvero un dominio di spessore nullo) costituita dalle particelle di fluido che sono entrate in contatto con la superficie del corpo.

È possibile dunque introdurre una funzione potenziale per la velocità ϕ tale che:

$$\mathbf{v} = \nabla\phi \qquad \forall\, \mathbf{x} \notin \mathcal{S}_B \cup \mathcal{S}_W \tag{B.4}$$

La funzione ϕ è una funzione di punto e del tempo che risulta monodroma nel caso di domini semplicemente connessi (p.es. il campo fluidodinamico tridimensionale attorno ad un oggetto) come quello del problema preso in esame in questo lavoro. Combinando l'equazione di continuità con la 3.1 si ottiene la seguente equazione di Laplace

$$\nabla^2\phi = 0 \qquad \forall\, \mathbf{x} \notin \mathcal{S} \tag{B.5}$$

dove $\mathcal{S}$ indica una superficie che circonda il corpo e la scia.

B.2 Condizioni al contorno

Per completare la formulazione del problema in termini di potenziale è necessario aggiungere le condizioni al contorno sul corpo e sulla scia. Nel seguito si assume un sistema di riferimento

solidale all'aria indisturbata, detto sistema di riferimento aria.

Il corpo viene considerato impermeabile quindi la condizione al contorno su $\mathcal{S}_B$ è

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_B) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{B.6}$$

con $\mathbf{v}_B$ velocità dei punti della superficie del corpo. Ricordando la definizione della velocità del fluido (B.4) si ottiene

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n} \qquad \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{S}_B \tag{B.7}$$

Inoltre è necessario fornire una condizione al contorno all'infinito (o meglio su una superficie sferica di raggio infinito definita come contorno del dominio fluidodinamico). Poiché si è scelto un sistema di riferimento solidale con l'aria indisturbata la condizione richiesta è

$$\mathbf{v}_\infty = O(\| \mathbf{x} \|^{-\alpha}) \qquad (\alpha > 1) \tag{B.8}$$

ovvero si impone che il campo fluidodinamico sia *evanescente*. Naturalmente anche in questo caso dalla condizione al contorno sulla velocità si risale a quella sul potenziale, che di fatto è la variabile incognita del problema:

$$\phi = 0 \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{S}_\infty \tag{B.9}$$

Le condizioni al contorno sulla scia si ottengono dai prinicipi di conservazione della massa e della quantità di moto attraverso una superficie di discontinuità . Come detto in precedenza, infatti, il potenziale è definito nei punti che si trovano sulle due facce della scia, ma non nei punti che ad essa appartengono, pertanto la scia rappresenta una superficie di discontinuità per il potenziale.

Il potenziale soddisfa l'equazione di Laplace quindi le condizioni al contorno richieste sono su ϕ e $\partial\phi/\partial n$ nei punti di $\mathcal{S}_W$ (problema di Neumann).

L'equazione di conservazione della massa attraverso una superficie di discontinuità fornisce

$$\Delta[\rho(v_N - v_\mathcal{S})] = 0 \tag{B.10}$$

nella quale $\Delta f = f_2 - f_1$ indica la discontinuità attraverso la superficie, mentre $v_N = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ è la componente normale alla superficie della velocità $\mathbf{v}$ e $v_\mathcal{S}$ è la velocità della superficie (che per definizione è in direzione della normale $\mathbf{n}$).

Analogamente, applicando il principio di conservazione della quantità di moto attraverso una superficie di discontinuità , si ottiene la condizione

$$\Delta[\rho(v_N - v_\mathcal{S})\mathbf{v} + p\mathbf{n}] = 0 \tag{B.11}$$

che, combinata con la B.10, conduce alla

$$\rho(v_N - v_{\mathcal{S}})\Delta\mathbf{v} + \Delta p\mathbf{n} = 0 \tag{B.12}$$

Poiché il flusso è incomprimibile risulta $\Delta v_{\mathcal{S}} = 0$, ovvero i punti appartenenti alle due facce della superficie di scia hanno la stessa velocità (condizione di inseparabilità della scia). Ciò implica $\Delta v_N = 0$. Osservando la componente normale dell'equazione B.12 si ha dunque

$$\Delta p = 0 \tag{B.13}$$

e quindi la B.12 diventa

$$\rho(v_N - v_{\mathcal{S}})\Delta\mathbf{v} = 0 \tag{B.14}$$

L'equazione trovata può avere due soluzioni: la soluzione banale $\Delta\mathbf{v} = 0$ (ovvero il flusso è continuo e dunque la superficie che si sta considerando non è una superficie di discontinuità), oppure la soluzione

$$v_N = v_{\mathcal{S}} \tag{B.15}$$

che indica che il flusso non compenetra la scia (condizione di impenetrabilità della scia).

Concludendo si può affermare che, se esiste una superficie di discontinuità in un flusso incomprimibile, non viscoso, dovranno essere soddisfatte le due condizioni

$$\begin{cases} \Delta p = 0 \\ \\ v_N = v_{\mathcal{S}} \end{cases} \tag{B.16}$$

Tali condizioni, nel caso di flussi potenziali, devono essere espresse in termini di potenziale sulla scia.

La seconda equazione delle B.16 implica che

$$\Delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) = 0 \tag{B.17}$$

La condizione al contorno sul potenziale, invece, si ottiene dalla prima delle B.16 utilizzando il teorema di Bernoulli scritto nel sistema di riferimento aria indisturbata:

$$\frac{\partial\phi_2}{\partial t} - \frac{\partial\phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2}v_2^2 - \frac{1}{2}v_1^2 + \frac{p_2}{\rho} - \frac{p_1}{\rho} = 0 \tag{B.18}$$

dove 1 e 2 indicano le due facce della scia. Si ottiene quindi

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} - \frac{\partial \phi_1}{\partial t} + \frac{1}{2} v_2^2 - \frac{1}{2} v_1^2 = 0 \tag{B.19}$$

Poichè risulta $v_2^2 - v_1^2 = (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1)$ in definitiva si ha

$$\frac{D_w}{Dt} (\Delta \phi) = 0 \tag{B.20}$$

nella quale

$$\frac{D_w}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_w \cdot \nabla \tag{B.21}$$

indica la derivata sostanziale fatta seguendo un punto della scia, ovvero (per definizione) un punto che si muove con velocità

$$\mathbf{v}_w = \frac{1}{2} (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \tag{B.22}$$

La condizione B.20 indica che il $\Delta \phi$ rimane costante nel tempo, seguendo un punto della scia, ed uguale al valore che aveva quando tale punto ha lasciato il *trailing edge*. In altri termini

$$\Delta \phi(\mathbf{x}_W, t) = \Delta \phi(\mathbf{x}_{TE}, t - \tau) \tag{B.23}$$

dove τ è il tempo necessario affinché il punto materiale di scia venga convetto dal bordo di uscita alla posizione che occupa all'istante t.

Per calcolare il valore del $\Delta \phi(\mathbf{x}_{TE})$ si introduce l'ulteriore assunzione che non esistano vortici concentrati al *trailing edge* ma che il vortice presente all'avviamento al bordo di uscita venga trasportato nel campo. Questa ipotesi è confortata non solo dal paradosso di D'Alambert (infatti se non ci fosse voricità nel campo la risultante delle forze agenti sul corpo sarebbe nulla) ma anche dal confronto, con dati sperimentali, di risultati numerici ottenuti ipotizzando il trasporto della vorticità nel campo ([17]).

Questa assunzione implica che il $\Delta \phi$ sia continuo al *trailing edge*. Infatti la scia viene descritta come uno strato di doppiette di intensità $\Delta \phi$; l'equivalenza tra doppiette e vortici implica che se esistesse una discontinuità nell'intensità delle doppiette allora necessariamente dovrebbe esserci un vortice concentrato.

In termini matematici, detto $\mathbf{x}_U$ un punto sulla superficie superiore del corpo, $\mathbf{x}_L$ un punto su quella inferiore, $\mathbf{x}_W$ un punto della scia e $\mathbf{x}_{TE}$ un punto sul *trailing edge*, la condizione enunciata di traduce nella

$$\lim_{\mathbf{x}_W \to \mathbf{x}_{TE}} \Delta \phi(\mathbf{x}_W) = \lim_{\mathbf{x}_U \to \mathbf{x}_{TE}} \phi(\mathbf{x}_U) - \lim_{\mathbf{x}_L \to \mathbf{x}_{TE}} \phi(\mathbf{x}_L) \tag{B.24}$$

B.3 Problema di Neumann

Quanto detto nei precedenti paragrafi conduce alla formalizzazione del cosiddetto **problema di Neumann esterno per l'equazione di Laplace** esteso al caso di flussi portanti (ovvero con presenza di scia):

$$\begin{cases} \nabla^2\phi = 0 & \forall\, \mathbf{x} \notin \mathcal{S}_B \cup \mathcal{S}_W \\ \frac{\partial\phi}{\partial n} = \mathbf{v}_B \cdot \mathbf{n} & \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{S}_B \\ \phi = 0 & \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{S}_\infty \\ \left.\begin{array}{l} \Delta\left(\frac{\partial\phi}{\partial n}\right) = 0 \\ \\ \frac{D_W}{Dt}\left(\Delta\phi\right) = 0 \end{array}\right\} & \forall\, \mathbf{x} \in \mathcal{S}_W \end{cases} \tag{B.25}$$

Nel caso di domini semplicemente connessi il potenziale è una funzione monodroma, pertanto la soluzione del problema di Neumann esterno esiste ed è unica.

Noto il potenziale infine è possibile risalire alla pressione nei punti del campo mediante il teorema di Bernoulli scritto rispetto al sistema di riferimento aria:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2}v^2 + \frac{p}{\rho} = \frac{p_\infty}{\rho} \tag{B.26}$$

Appendice C

Matrici di rotazione

Di seguito vengono riportate le matrici di rotazione usate per trasformare le componenti di un vettore da una terna all'altra.

Si indica con R_{AB} la matrice di rotazione che, applicata ad un vettore scritto in componenti nel riferimento B, fornisce un vettore in componenti riferimento A ovvero

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{R}_{AB}\mathbf{v}_B \tag{C.1}$$

Matrice R_{DRb}

Descrive la rotazione dal sistema di riferimento disco-rotante a quello pala. Si ottiene utilizzando gli angoli di Eulero nella sequenza costituita dalle due rotazioni γ, β:

$$\mathbf{R}_\gamma = \begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{C.2}$$

$$\mathbf{R}_\beta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\beta & -\sin\beta \\ 0 & \sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \tag{C.3}$$

e dunque si ha

$$\mathbf{R}_{DRb} = \mathbf{R}_\gamma \mathbf{R}_\beta \tag{C.4}$$

Matrice R_{Ddr}

Descrive la rotazione dal sistema di riferimento disco-rotante a quello disco:

$$\mathbf{R}_{\psi} = \begin{bmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{C.5}$$

Matrice R_{shD}

Descrive la rotazione dal riferimento disco a quello albero

$$\mathbf{R}_{\mathrm{shD}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{C.6}$$

Matrice R_{wtipsh}

Descrive la rotazione dal riferimento albero a quello solidale all'ultima sezione di ala in configurazione deformata:

$$\mathbf{R}_{\mathrm{wtipsh}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\Theta & \sin\Theta \\ 0 & -\sin\Theta & \cos\Theta \end{bmatrix} \tag{C.7}$$

Tenendo presenti queste matrici si può ottenere la matrice che descrive la rotazione dal sistema di riferimento pala a quello dell'ultima sezione in configurazione deformata:

$$\mathbf{R}_{w_{tip}b} = \mathbf{R}_{wtipsh}\mathbf{R}_{shD}\mathbf{R}_{Ddr}\mathbf{R}_{DRb} \tag{C.8}$$

Sulla base di quanto riportato è possibile effettuare la trasformazione delle componenti di un vettore da una terna all'altra, combinando opportunamente le matrici di rotazione sopra illustrate.

Appendice D

Descrizione cinematica per l'ala

Il sistema di riferimento adottato nel codice BEM differisce da quello utilizzato nel lavoro di Hodges e Ormiston per tre rotazioni di cui la prima attorno all'asse z di meno novanta gradi rappresentata dalla matrice $\mathbf{R}_{-90}$, la seconda attorno all'asse x dell'angolo di precone (β_{pr}) rappresentata dalla matrice $\mathbf{R}_{pr}$ e la terza attorno all'asse z dell'angolo di sweep (β_{sw}) rappresentata dalla matrice $\mathbf{R}_{sweep}$.

Risulta quindi possibile esprimere un vettore, di cui si conoscano le componenti nell sistema di riferimento di H&O, nel sistema di coordinate relativo al codice BEM tramite la matrice di rotazione

$$\mathbf{R}_{rot} = \mathbf{R}_{sweep}\mathbf{R}_{pr}\mathbf{R}_{-90} \tag{D.1}$$

La relazione risulta quindi del tipo

$$\mathbf{x}|_{BEM} = \mathbf{R}_{rot}\,\mathbf{x}|_{H\&O} \tag{D.2}$$

L'esigenza di utilizzare la matrice $\mathbf{T}$ per la ricostruzione della geometria dell'ala è stata illustrata descrivendo il modello aerodinamico BEM per l'ala. Essa può essere espressa nel sistema di riferimento che è utilizzato nel modello aerodinamico BEM. Utilizzando la matrice di rotazione ricavata, è possibile dalla relazione

$$\mathbf{x}|'_{H\&O} = \mathbf{T}^T\,\mathbf{x}|_{H\&O} \tag{D.3}$$

in cui $\mathbf{x}|'_{H\&O}$ indica il vettore ruotato attraverso la $\mathbf{T}^T$, ottenere un'espressione del tipo

$$\mathbf{x}|'_{BEM} = \mathbf{R}_{rot}\,\mathbf{x}|'_{H\&O} = \mathbf{R}_{rot}\,\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{x}|_{H\&O} = \mathbf{R}_{rot}\,\mathbf{T}^{\mathrm{T}}\,\mathbf{R}^{\mathrm{T}}_{rot}\,\mathbf{x}|_{BEM} = \mathbf{T}^*\,\mathbf{x}|_{BEM} \tag{D.4}$$

Si è arrivati così alla formulazione della $\mathbf{T}$ nel riferimento adottato nel codice BEM:

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{R}_{rot}\,\mathbf{T}^T\,\mathbf{R}^T_{rot}\ . \tag{D.5}$$

Le matrici $\mathbf{R}_{sweep}$, $\mathbf{R}_{pr}$ e $\mathbf{R}_{-90}$ vengono di seguito riportate; per le prime due si è utilizzato uno sviluppo troncato al primo ordine nella considerazione che gli angoli di sweep (β_{sw}) e di precone (β_{pr}) siano piccoli

$$\mathbf{R}_{sweep} = \begin{bmatrix} cos(\beta_{sw}) & -sin(\beta_{sw}) & 0 \\ sin(\beta_{sw}) & cos(\beta_{sw}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{D.6}$$

$$\mathbf{R}_{pr} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\beta_{pr}) & -sin(\beta_{pr}) \\ 0 & sin(\beta_{pr}) & cos(\beta_{pr}) \end{bmatrix} \tag{D.7}$$

$$\mathbf{R}_{-90} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\ . \tag{D.8}$$

Un'ultima differenza di rilievo tra la $\mathbf{T}^T$ e la $\mathbf{T}^*$ risiede nella dipendenza della $\mathbf{T}^T$ dall'angolo di passo (θ), dipendenza che risulta al contrario assente nella $\mathbf{T}^*$. Il motivo di tale diversità è da imputare alla differente impostazione dei due codici. In quello aerodinamico, infatti, la rotazione rigida dell'angolo di passo è inclusa nella parte di programma atta alla costruzione della geometria indeformata della pala, pertanto non deve essere ripetuta nella costruzione della geometria deformata.

D.1 La matrice $\mathbf{M}_{eq}$

La matrice $\mathbf{M}_{eq}$ contiene in sè la dipendenza della deformazione dalle variabili cinematiche (v, w, ϕ, v' e w')

$$\mathbf{d}_p|_{pert} = \mathbf{M}_{eq} \left\{ \begin{array}{c} v \\ w \\ \phi \\ v' \\ w' \end{array} \right\} \tag{D.9}$$

La sua espressione si può ricavare da

$$\mathbf{M}_{eq} \left\{ \begin{array}{c} v \\ w \\ \phi \\ v' \\ w' \end{array} \right\} = \hat{\mathbf{r}}^* + \left\{ \begin{array}{c} -v + \beta_{pc}\beta_{sw} w \\ -\beta_{sw} v - \beta_{pc} w \\ w \end{array} \right\} \tag{D.10}$$

dove

$$\hat{\mathbf{r}}^* = \mathbf{R}_{rot} \left(\mathbf{T}|^{\mathrm{T}}_{pert}\right)_{lin} \mathbf{R}^{\mathrm{T}}_{rot} \left(\mathbf{x}_{p0} - \mathbf{x}_{e0}\right)$$

se esprimiamo la $\left(\mathbf{T}|_{pert}\right)^{\mathrm{T}}_{lin}$ mediante la formulazione compatta

$$\left[\begin{array}{ccc} \bar{\mathbf{T}}^l_{(1,1)v'} v' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(1,1)w'} w' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(1,1)\phi} \phi & \bar{\mathbf{T}}^l_{(1,2)v'} v' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(1,2)w'} w' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(1,2)\phi} \phi & \bar{\mathbf{T}}^l_{(1,3)v'} v' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(1,3)w'} w' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(1,3)\phi} \phi \\ \bar{\mathbf{T}}^l_{(2,1)v'} v' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(2,1)w'} w' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(2,1)\phi} \phi & \bar{\mathbf{T}}^l_{(2,2)v'} v' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(2,2)w'} w' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(2,2)\phi} \phi & \bar{\mathbf{T}}^l_{(2,3)v'} v' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(2,3)w'} w' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(2,3)\phi} \phi \\ \bar{\mathbf{T}}^l_{(3,1)v'} v' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(3,1)w'} w' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(3,1)\phi} \phi & \bar{\mathbf{T}}^l_{(3,2)v'} v' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(3,2)w'} w' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(3,2)\phi} \phi & \bar{\mathbf{T}}^l_{(3,3)v'} v' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(3,3)w'} w' + \bar{\mathbf{T}}^l_{(3,3)\phi} \phi \end{array} \right]$$

in cui un generico elemento $\bar{\mathbf{T}}^l_{(i,j)}$ rappresenta l'elemento (i,j) della matrice $\left(\mathbf{T}|_{pert}\right)_{lin}$ nel riferimento del codice aerodinamico. Con l'apice l ed il trattino ($\bar{\mathbf{T}}^l_{(i,j)}$) si è indicato che si tratta della matrice linearizzata di perturbazione. Gli elementi di tale matrice sono di seguito riportati per completezza

$$\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(1,1)} = -v'_{eq}\bar{v}' - w'_{eq}\bar{w}'$$

$$\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(1,2)} = -cos\left(\theta + \phi_{eq}\right)\bar{v}' - sin\left(\theta + \phi_{eq}\right)\bar{w}' + \left[-w'_{eq}cos\left(\theta + \phi_{eq}\right) + v'_{eq}sin\left(\theta + \phi_{eq}\right)\right]\bar{\phi}$$

$$\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(1,3)} = sin\left(\theta + \phi_{eq}\right)\bar{v}' - cos\left(\theta + \phi_{eq}\right)\bar{w}' + \left[v'_{eq}cos\left(\theta + \phi_{eq}\right) + w'_{eq}sin\left(\theta + \phi_{eq}\right)\right]\bar{\phi}$$

$$\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(2,1)} = \bar{v}'$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(2,2)} = &\left[-\left(1 - \tfrac{v^{2\,'}_{eq}}{2}\right)sin\left(\theta + \phi_{eq} + v'_{eq}w'_{eq}\right)w'_{eq} - v'_{eq}cos\left(\theta + \phi_{eq} + v'_{eq}w'_{eq}\right)\right]\bar{v}' + \\ &+\left[-\left(1 - \tfrac{v^{2\,'}_{eq}}{2}\right)sin\left(\theta + \phi_{eq} + v'_{eq}w'_{eq}\right)v'_{eq}\right]\bar{w}' + \left[-\left(1 - \tfrac{v^{2\,'}_{eq}}{2}\right)sin\left(\theta + \phi_{eq} + v'_{eq}w'_{eq}\right)\right]\bar{\phi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(2,3)} = &\left[-\left(1 - \tfrac{v^{2\,'}_{eq}}{2}\right)cos\left(\theta + \phi_{eq} + v'_{eq}w'_{eq}\right)w'_{eq} + v'_{eq}sin\left(\theta + \phi_{eq} + v'_{eq}w'_{eq}\right)\right]\bar{v}' + \\ &+\left[-\left(1 - \tfrac{v^{2\,'}_{eq}}{2}\right)cos\left(\theta + \phi_{eq} + v'_{eq}w'_{eq}\right)v'_{eq}\right]\bar{w}' + \left[-\left(1 - \tfrac{v^{2\,'}_{eq}}{2}\right)cos\left(\theta + \phi_{eq} + v'_{eq}w'_{eq}\right)\right]\bar{\phi}\end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(3,1)} = \bar{w}'$$

$$\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(3,2)} = -w'_{eq}sin\left(\theta + \phi_{eq}\right)\bar{w}' + \left[\left(1 - \tfrac{w^{2\,'}_{eq}}{2}\right)cos\left(\theta + \phi_{eq}\right)\right]\bar{\phi}$$

$$\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(3,3)} = -w'_{eq}cos\left(\theta + \phi_{eq}\right)\bar{w}' - \left[\left(1 - \tfrac{w^{2\,'}_{eq}}{2}\right)sin\left(\theta + \phi_{eq}\right)\right]\bar{\phi}$$

Il generico elemento viene poi scomposto nelle tre componenti $\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(i,j)v'}$, $\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(i,j)w'}$ e $\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(i,j)\phi}$. Possiamo ora finalmente esprimere la $\mathbf{M}_{eq}$ mediante la seguente forma

$$\mathbf{M}_{eq} = \begin{bmatrix} -1 & \beta_{sw}\beta_{pc} & \mathbf{M}_{eq(1,3)} & \mathbf{M}_{eq(1,4)} & \mathbf{M}_{eq(1,5)} \\ -\beta_{sw} & -\beta_{pc} & \mathbf{M}_{eq(2,3)} & \mathbf{M}_{eq(2,4)} & \mathbf{M}_{eq(2,5)} \\ 0 & 1 & \mathbf{M}_{eq(3,3)} & \mathbf{M}_{eq(3,4)} & \mathbf{M}_{eq(3,5)} \end{bmatrix}$$

in cui

$$
\begin{aligned}
\mathbf{M}_{eq(1,3)} &= (x_{p0}-x_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(1,1)\phi} + (y_{p0}-y_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(1,2)\phi} + (z_{p0}-z_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(1,3)\phi} \\
\mathbf{M}_{eq(1,4)} &= (x_{p0}-x_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(1,1)v'} + (y_{p0}-y_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(1,2)v'} + (z_{p0}-z_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(1,3)v'} \\
\mathbf{M}_{eq(1,5)} &= (x_{p0}-x_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(1,1)w'} + (y_{p0}-y_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(1,2)w'} + (z_{p0}-z_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(1,3)w'} \\
\mathbf{M}_{eq(2,3)} &= (x_{p0}-x_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(2,1)\phi} + (y_{p0}-y_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(2,2)\phi} + (z_{p0}-z_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(2,3)\phi} \\
\mathbf{M}_{eq(2,4)} &= (x_{p0}-x_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(2,1)v'} + (y_{p0}-y_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(2,2)v'} + (z_{p0}-z_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(2,3)v'} \\
\mathbf{M}_{eq(2,5)} &= (x_{p0}-x_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(2,1)w'} + (y_{p0}-y_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(2,2)w'} + (z_{p0}-z_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(2,3)w'} \\
\mathbf{M}_{eq(3,3)} &= (x_{p0}-x_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(3,1)\phi} + (y_{p0}-y_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(3,2)\phi} + (z_{p0}-z_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(3,3)\phi} \\
\mathbf{M}_{eq(3,4)} &= (x_{p0}-x_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(3,1)v'} + (y_{p0}-y_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(3,2)v'} + (z_{p0}-z_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(3,3)v'} \\
\mathbf{M}_{eq(3,5)} &= (x_{p0}-x_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(3,1)w'} + (y_{p0}-y_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(3,2)w'} + (z_{p0}-z_{e0})\bar{\mathbf{T}}^{l}_{(3,3)w'}
\end{aligned}
$$

D.2 La matrice $\mathbf{N}$

La matrice $\mathbf{N}$, come detto, contiene i modi (noti analiticamente) della trave incastrata e rappresenta il legame tra le variabili cinematiche (v, w, ϕ, v' e w') e quelle lagrangiane (ampiezze modali). La sua espressione, basandosi sull'espansione modale delle variabili cinematiche

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}(\bar{x},\bar{t}) &= \sum_i v_i(\bar{t})\Psi_i(\bar{x}) \\
\mathbf{w}(\bar{x},\bar{t}) &= \sum_i w_i(\bar{t})\Psi_i(\bar{x}) \\
\phi(\bar{\mathbf{x}},\bar{\mathbf{t}}) &= \sum_i \phi_i(\bar{t})\Theta_i(\bar{x}) \\
\mathbf{v}'(\bar{x},\bar{t}) &= \sum_i v_i(\bar{t})\Psi'_i(\bar{x}) \\
\mathbf{w}'(\bar{x},\bar{t}) &= \sum_i w_i(\bar{t})\Psi'_i(\bar{x})
\end{aligned}
$$

in cui $\bar{t} = \Omega t$, è del tipo

$$\left\{\begin{array}{c} v(\bar{x},\bar{t}) \\ w(\bar{x},\bar{t}) \\ \phi(\bar{x},\bar{t}) \\ v'(\bar{x},\bar{t}) \\ w'(\bar{x},\bar{t}) \end{array}\right\} = \mathbf{N}(\bar{x})\mathbf{q}(\bar{t}) =$$

$$= \begin{bmatrix} \Psi_1 & \Psi_2 & \cdots & \Psi_{N_{lag}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Psi_1 & \Psi_2 & \cdots & \Psi_{N_{flap}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \Theta_1 & \Theta_2 & \cdots & \Theta_{N_{tors}} \\ \Psi'_1 & \Psi'_2 & \cdots & \Psi'_{N_{lag}} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \Psi'_1 & \Psi'_2 & \cdots & \Psi'_{N_{flap}} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \left\{\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_{Nlag} \\ w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_{Nflap} \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \vdots \\ \phi_{Ntors} \end{array}\right\}$$

Appendice E

Metodo numerico di integrazione al passo

L'integrazione del sistema differenziale di equazioni perturbative, è stata ottenuta utilizzando l'algoritmo di Crank-Nicholson il quale gode della proprietá di essere di ordine due, ed incondizionatamente stabile. Per fare questo, si è messo il sistema aeroelastico in forma normale, ovvero si è individuata la matrice di stato del problema.
In definitiva il sistema aeroelastico, al primo ordine, è rappresentato da:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Y}} = \mathbf{A}\mathbf{Y} \\ \\ \mathbf{Y}(t_0) = \mathbf{Y}_0 \end{cases} \tag{E.1}$$

con **A**(t)= **A**(t+T), data la tempo varianza periodica, e

$$\mathbf{Y} = \begin{Bmatrix} \Delta\mathbf{X} \\ \Delta\dot{\mathbf{X}} \end{Bmatrix} \tag{E.2}$$

Detto questo si riporta lo schema di integrazione al passo, che deriva dalla generalizzazione dell' espressione:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})] \tag{E.3}$$

valevole per la soluzione numerica del problema [1]:

$$\begin{cases} y^{'}(x) = f(x, y(x)) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{E.4}$$

Lo schema a cui si fà riferimento è :

$$\frac{\mathbf{Y}_n - \mathbf{Y}_{n-1}}{\Delta t} = \frac{1}{2}[\mathbf{A}_n\mathbf{Y}_n + \mathbf{A}_{n-1}\mathbf{Y}_{n-1}] \tag{E.5}$$

[1] Di Cauchy

che consente di ricavare il vettore di stato al passo temporale (attuale) n-esimo tramite la relazione:

$$\mathbf{Y}_n = [\mathbf{I} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}_n]^{-1}[\frac{\Delta t}{2}\mathbf{A}_{n-1}\mathbf{Y}_{n-1} + \mathbf{Y}_{n-1}] \tag{E.6}$$