

Università degli Studi Roma Tre

Dottorato in Fisica XX ciclo

**Correzioni radiative ai decadimenti
semileptonici dei mesoni K :
un'analisi completa nell'ambito della
teoria chirale**

Coordinatore
prof. Guido Altarelli

Relatore interno prof. Vittorio Lubicz

Relatore esterno dr. Gino Isidori

Andrea Marrocco

A.A.2007

Indice

Indice	1
1 Introduzione	3
2 V_{us} e il test di unitarietà della matrice CKM	5
2.1 Modello Standard e matrice CKM	5
2.2 Relazione di unitarietà	9
2.2.1 Stato attuale di $ V_{ud} $	12
2.3 Come si misura V_{us}	13
2.3.1 V_{us} dai decadimenti degli iperoni	14
2.3.2 V_{us} di decadimenti adronici del τ	15
2.3.3 V_{us} dal $K_{\mu 2}$	16
2.4 V_{us} dal K_{l3}	17
3 La teoria chirale	23
4 Calcolo delle correzioni virtuali	35
4.1 Correzioni virtuali per il decadimento $K^+ \rightarrow \pi^0 \ell^+ \nu$	36
4.2 Correzioni virtuali per il decadimento $K^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu$	60
5 Calcolo delle correzioni reali al decadimento del K^+	75
6 Calcolo delle correzioni reali al decadimento del K^0	85

7	Analisi	100
8	Conclusioni	103
	Bibliografia	106

Capitolo 1

Introduzione

Questo lavoro di tesi riguarda lo studio teorico dei decadimenti semileptonici dei mesoni K nell'ambito della cosiddetta Teoria Chirale o *Chiral Perturbation Theory* (CHPT). I decadimenti semileptonici dei kaoni hanno un ruolo importante nella comprensione della fisica del sapore, ed in particolare nell'estrazione dell'elemento $|V_{us}|$ della matrice di Cabibbo, Kobayashi e Maskawa (matrice CKM) che descrive il mescolamento dei quarks. La conoscenza di $|V_{us}|$, oltre ad essere estremamente importante dal punto di vista fenomenologico, è anche necessaria, assieme a quella di $|V_{ud}|$, per testare l'unitarietà di tale matrice. La principale rilevanza scientifica di questo lavoro di tesi risiede nel fornire uno strumento teorico per migliorare la determinazione di $|V_{us}|$ dai decadimenti semileptonici dei kaoni. Presenteremo infatti una stima accurata delle correzioni radiative dei decadimenti semileptonici nel canale del muone, che prima di questo lavoro erano note con scarsa precisione. Inoltre, grazie alla previsione del rapporto tra le rate del decadimento dei K in elettroni e quello dei K in muoni, in cui scompare la dipendenza da $|V_{us}|$, sarà possibile testare a posteriori la convergenza della CHPT in questo tipo di calcolo (ovvero l'accuratezza dello strumento teorico utilizzato per descrivere tali processi).

Il nostro studio ha riguardato i quattro decadimenti: $K \rightarrow \pi \ell \nu$ (dove $K = \{K^+, K^0\}$ e $\ell = \{\mu, e\}$) ed è consistito nel calcolo delle correzioni radiative alle larghezze di decadimento inclusive (ovvero con l'inclusione di fotoni reali). Nel caso in cui il leptone carico è un muone, questo studio risulta particolarmente difficile per la presenza di molte scale rilevanti: la massa del K, la massa del π , la massa del μ e la massa invariante dei leptoni. La strategia che abbiamo utilizzato per affrontare tale problema è stata quella di utilizzare la tecnica della regolarizzazione dimensionale per curare sia le divergenze ultraviolette che le divergenze infrarosse. Abbiamo così evitato di complicare ulteriormente il problema introducendo una nuova scala dimensionale per la regolarizzazione delle divergenze infrarosse, come invece effettuato in tutti i precedenti studi dei canali $K \rightarrow \pi e \nu$.

La Tesi è organizzata nel modo seguente. Nel primo capitolo abbiamo fornito una breve descrizione del modello standard e della matrice CKM, quindi abbiamo delineato il quadro

attuale del test di unitarietà di tale matrice, indicando lo stato odierno degli elementi di matrice V_{ud} e V_{us} . Abbiamo descritto brevemente le varie tecniche di misurazione di V_{us} soffermandoci infine sui processi K_{l3} . Nel secondo capitolo abbiamo presentato brevemente i concetti fondamentali e le basi su cui poggia la teoria chirale delle perturbazioni (CHPT), teoria effettiva che descrive le interazioni tra i mesoni a basse energie. Nel terzo capitolo siamo entrati nel merito del calcolo teorico dei decadimenti oggetto dello studio, sviluppando il settore delle correzioni virtuali per entrambi i canali di decadimento, K^+ e K^0 . Abbiamo descritto in maniera dettagliata il contributo di ciascun diagramma di Feynman rilevante ai fini del calcolo, sviluppando, in particolare, con la tecnica della regolarizzazione dimensionale gli integrali di loop. Siamo passati infine al calcolo della rate di decadimento. Nel quarto e nel quinto capitolo abbiamo presentato dettagliatamente il calcolo della rate di decadimento per i processi con emissione di fotone reale rispettivamente per K^+ e K^0 . Abbiamo evidenziato le strategie utilizzate per semplificare il calcolo e in particolare quella per l'estrazione delle divergenze infrarosse. Nel sesto capitolo abbiamo fornito i risultati del calcolo numerico rilevante per il processo $K^+ \rightarrow \pi^0 \mu \nu_\mu$, che prima di questo lavoro erano noto con scarsa precisione. Le conclusioni del lavoro svolto sono presentate nell'ultimo capitolo.

Capitolo 2

V_{us} e il test di unitarietà della matrice CKM

2.1 Modello Standard e matrice CKM

Il Modello Standard della fisica delle particelle è una teoria che descrive i componenti primi della materia e le loro interazioni. In natura esistono quattro forze fondamentali: la forza di gravità, la forza elettromagnetica, la forza nucleare debole e la forza nucleare forte. Di queste, solo tre sono di fatto considerate dal Modello Standard (MS): l'interazione elettromagnetica e quella debole, che sono descritte in maniera unitaria attraverso la teoria elettrodebole, e l'interazione forte descritta attraverso la cromodinamica quantistica (QCD). Entrambe sono teorie di campo, consistenti cioè sia con la meccanica quantistica che con la relatività speciale. In esse, l'interazione fra i campi di materia, che nel MS sono i leptoni e i quark, è regolata da un'opportuna simmetria locale, detta simmetria di gauge, e può essere interpretata in termini di scambio di bosoni che, per il loro ruolo, sono detti bosoni mediatori della forza o bosoni di gauge. Nel MS tali bosoni sono il fotone, che è il mediatore della forza elettromagnetica, i bosoni W^+ , W^- e Z , che sono i mediatori della forza nucleare debole, e otto gluoni che sono i mediatori della forza nucleare forte. Di questi, il fotone e i gluoni hanno massa nulla, mentre i tre bosoni dell'interazione debole hanno masse relativamente grandi. Ciò è dovuto al fatto che, in seguito alla rottura spontanea di simmetria, processo che genera nella lagrangiana i termini di massa per i campi che descrivono particelle massive e che porta a prevedere l'esistenza in natura di una o più particelle scalari di spin '0' dette particelle di Higgs, le uniche simmetrie che sopravvivono sono quella relativa alle interazioni forti e quella dell'elettrodinamica quantistica.

Nel Modello Standard la lagrangiana è basata sul gruppo di simmetria $SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ [4] che come dicevamo è spontaneamente rotto nel gruppo $SU(3)_C \otimes U(1)_{QED}$:

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y \xrightarrow{\text{SSB}} SU(3)_C \otimes U(1)_{QED} . \quad (2.1)$$

I campi di materia sono invece i leptoni e i quark che sono organizzati in tre famiglie [4]

$$\begin{bmatrix} \nu_e & u \\ e^- & d' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\mu & c \\ \mu^- & s' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \nu_\tau & t \\ \tau^- & b' \end{bmatrix}, \quad (2.2)$$

dove

$$\begin{bmatrix} \nu_l & q_u \\ l^- & q_d \end{bmatrix} \equiv \left(\begin{array}{c} \nu_l \\ l^- \end{array} \right)_L, \quad \left(\begin{array}{c} q_u \\ q_d \end{array} \right)_L, \quad l_R^-, \quad q_{uR}, \quad q_{dR} \quad (2.3)$$

Ciascuna di queste particelle ha la corrispondente antiparticella; ogni quark è presente in tre colori diversi e i campi left-handed sono doppietti di $SU(2)_L$.

Possiamo scrivere la lagrangiana come somma dei termini cinetici dei campi bosonici intermediari delle interazioni, dei termini cinetici e di interazione dei campi di materia fermionici con i campi di gauge e del termine di Higgs:

$$\mathcal{L}_{MS} = -\frac{1}{4} \sum_{A=1}^8 G_{\mu\nu}^A G^{A\mu\nu} - \frac{1}{4} \sum_{A=1}^3 F_{\mu\nu}^A F^{A\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu} + i\bar{\Psi}_L \not{D} \Psi_L + i\bar{\psi}_R \not{D} \psi_R + \mathcal{L}_{Higgs}. \quad (2.4)$$

In questa relazione la derivata covariante D_μ contiene i termini di interazione tra i leptoni, i quark e i bosoni di gauge con la rispettive costanti di accoppiamento (g per $SU(2)_L$, g' per $U(1)_Y$ e e_S per le interazioni forti)

$$D_\mu \psi_{L,R} := \left[\partial_\mu + ig \sum_{a=1}^3 t_{L,R}^a W_\mu^a + ig' \frac{1}{2} Y_{L,R} B_\mu + ie_S \sum_{b=1}^8 \bar{t}^b g_\mu^b \right] \psi_{L,R} \quad (2.5)$$

e t^a , $Y_{L,R}$ e \bar{t}^b sono i generatori delle simmetrie. Ciò a cui noi siamo interessati in questa trattazione è l'elemento $|V_{us}|$ della matrice CKM . Ci chiediamo allora come e perché nasce tale matrice all'interno del Modello Standard e quale è il suo ruolo e significato fisico. L'esistenza di tale matrice è dovuta al fatto che gli autostati deboli e quelli di massa dei quark non sono gli stessi. Essa è legata alle matrici unitarie di questo cambiamento di base. Per capire come nasce tale matrice consideriamo i termini di interazione dei quark con il campo di Higgs che conducono ai termini di massa per i quark [5]

$$\bar{\mathcal{L}}_m = -\lambda_d^{ij} \bar{\mathbf{Q}}_L^i d_R^j \Phi - \lambda_u^{ij} \epsilon^{ab} \bar{\mathbf{Q}}_{La}^i \phi_b^\dagger u_R^j \quad (2.6)$$

dove Φ e \mathbf{Q}_L^i sono rispettivamente il doppietto di Higgs responsabile della SSB e i doppietti left-handed di quark

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ v + H(x) \end{pmatrix} \quad (\text{Forma assunta nella gauge unitaria}), \quad (2.7)$$

$$\mathbf{Q}_L^i = \begin{pmatrix} u_L^i \\ d_L^i \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L \right) \quad (2.8)$$

e i parametri λ_u^{ij} e λ_d^{ij} sono in generale matrici complesse non Hermitiane. Come si può facilmente capire le masse dei quark sono legate al valore di aspettazione nel vuoto del doppietto

di Higgs e ai parametri λ . Vediamo come. Possiamo semplificare la forma dell'equazione 2.6 attraverso opportune rotazioni, indipendenti per i quark di tipo up, i quark di tipo down, left e right-handed. Il nostro obiettivo è di diagonalizzare le matrici λ_u e λ_d e lo facciamo definendo le matrici unitarie U_u e W_u in questo modo:

$$\lambda_u \lambda_u^\dagger = U_u D_u^2 U_u^\dagger, \quad \lambda_u^\dagger \lambda_u = W_u D_u^2 W_u^\dagger, \quad (2.9)$$

dove D_u^2 è una matrice diagonale con autovalori positivi. In maniera analoga definiamo le matrici U_d e W_d . Possiamo quindi sostituire λ_u e λ_d con

$$\begin{cases} \lambda_u = U_u D_u W_u^\dagger \\ \lambda_d = U_d D_d W_d^\dagger \end{cases} \quad (2.10)$$

dove D_u e D_d sono le matrici diagonali i cui elementi sono la parte positiva delle radici quadrate degli autovalori rispettivamente di D_u^2 e D_d^2 . Ora se effettuiamo il cambio di variabile per i quark right

$$u_R^i \longrightarrow W_u^{ij} u_R^j \quad d_R^i \longrightarrow W_d^{ij} d_R^j, \quad (2.11)$$

possiamo facilmente verificare che le matrici W scompaiono dalla teoria. Allo stesso modo, nella gauge unitaria, trasformando i campi left secondo la legge

$$u_L^i \longrightarrow U_u^{ij} u_L^j \quad d_L^i \longrightarrow U_d^{ij} d_L^j, \quad (2.12)$$

riusciamo ad eliminare le matrici U dai termini di accoppiamento con il campo di Higgs e a identificare i termini di massa dei quark con

$$m_u^i = \frac{1}{\sqrt{2}} D_u^{ii} v, \quad m_d^i = \frac{1}{\sqrt{2}} D_d^{ii} v. \quad (2.13)$$

Come dicevamo, le masse dei quark sono legate al valore di aspettazione del doppietto di Higgs nel vuoto e restano perciò ignote. Queste trasformazioni dei campi non interessano esclusivamente il settore di Higgs della lagrangiana, ma coinvolgono anche i termini di interazione debole. Infatti per la corrente che accoppia i quark ai bosoni W si ha

$$J^{\mu+} = \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu d_L^i \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \bar{u}_L^i \gamma^\mu (U_u^\dagger U_d)^{ij} d_L^j \quad (2.14)$$

Possiamo quindi affermare che le interazioni deboli legano i tre quark left di tipo *up* con una rotazione unitaria del tripletto di quark left di tipo *down*. La matrice unitaria di tale rotazione è

$$V = U_u^\dagger U_d = \begin{pmatrix} V_{ud} & V_{us} & V_{ub} \\ V_{cd} & V_{cs} & V_{cb} \\ V_{td} & V_{ts} & V_{tb} \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

è detta 'matrice di *Cabibbo-Kobayashi-Maskawa*' ed è una matrice complessa unitaria 3×3 costituita perciò da quattro parametri reali indipendenti: tre angoli e una fase, necessaria

quest'ultima per la violazione di CP nel Modello Standard. La parametrizzazione standard è quella che vede tale matrice espressa in funzione dei *seni* e dei *coseni* dei tre angoli Θ_{12} , Θ_{13} e Θ_{23} e di un parametro reale δ , che in virtù dei dati sperimentali sulla violazione di CP dai decadimenti dei K deve soddisfare la relazione $0 < \delta < \pi$. La matrice assume quindi la seguente forma:

$$V = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -s_{23}c_{12} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

I dati sperimentali mostrano che i parametri s_{13} e s_{23} sono rispettivamente dell'ordine di $O(10^{-3})$ e $O(10^{-2})$ e quindi con una buona approssimazione possiamo considerare $c_{13} = c_{23} = 1$. Di conseguenza i quattro parametri indipendenti sono

$$s_{12} = |V_{us}|, \quad s_{13} = |V_{ub}|, \quad s_{23} = |V_{cb}|, \quad \delta, \quad (2.17)$$

dove δ è legato in maniera univoca al parametro $|V_{ut}|$ in virtù del fatto che deve soddisfare la relazione $0 < \delta < \pi$. I primi tre parametri possono essere estratti dai decadimenti al tree-level mediati dalle transizioni $s \rightarrow u$, $b \rightarrow u$ e $b \rightarrow c$ rispettivamente, mentre il parametro δ può essere estratto dalle transizioni con violazione di CP o dai loop processes sensibili a $|V_{td}|$. Un'altra nota parametrizzazione è la cosiddetta 'parametrizzazione di Wolfenstein' in cui i vari elementi della matrice sono espressi come serie di potenza del parametro $\lambda = |V_{us}| = 0.22$:

$$V = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\lambda^2}{2} & \lambda & A\lambda^3(\rho - i\eta) \\ -\lambda & 1 - \frac{\lambda^2}{2} & A\lambda^2 \\ A\lambda^3(1 - \rho - i\eta) & -A\lambda^2 & 1 \end{pmatrix} + O(\lambda^4) \quad (2.18)$$

e dove i quattro parametri indipendenti sono

$$\lambda, \quad A, \quad \rho, \quad \eta. \quad (2.19)$$

A volte, nelle applicazioni fenomenologiche è richiesto un livello di accuratezza migliore ed è chiaro che, in tal caso, bisogna includere anche gli ordini $O(\lambda^4)$ o anche $O(\lambda^5)$ nell'espansione. Ciò può essere fatto in diversi modi che dipendono dalla definizione dei parametri introdotti. In letteratura esistono diversi set di definizione, ma tra questi il set di definizioni adottato dalla maggior parte degli autori è il seguente:

$$s_{12} = \lambda \quad s_{23} = A\lambda^2 \quad s_{13}e^{-i\delta} = A\lambda^3(\rho - i\eta) \quad (2.20)$$

a *tutti* gli ordini in λ , che lega quindi i parametri di Wolfenstein a quelli della parametrizzazione standard della matrice CKM. Dalla relazione 2.20 segue che

$$\rho = \frac{s_{13}}{s_{12}s_{23}} \cos \delta \quad \eta = \frac{s_{13}}{s_{12}s_{23}} \sin \delta \quad (2.21)$$

La 2.20 e la 2.21 rappresentano semplicemente il cambio di variabili dalla 2.17 alla 2.19. Se operiamo tale cambio di variabili nella 2.16 otteniamo la matrice CKM espressa in funzione

di (λ, A, ρ, η) che soddisfa esattamente le condizioni di unitarietà. Se espandiamo in potenze di λ fino all'ordine $\mathcal{O}(\lambda^4)$ ritroviamo la forma 2.18 della matrice CKM. Possiamo andare oltre nello sviluppo della serie di potenze in λ secondo le definizioni dei parametri nella 2.20 ottenendo

$$\hat{V} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4 & \lambda + \mathcal{O}(\lambda^7) & A\lambda^3(\varrho - i\eta) \\ -\lambda + \frac{1}{2}A^2\lambda^5[1 - 2(\varrho + i\eta)] & 1 - \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4(1 + 4A^2) & A\lambda^2 + \mathcal{O}(\lambda^8) \\ A\lambda^3(1 - \bar{\varrho} - i\bar{\eta}) & -A\lambda^2 + \frac{1}{2}A\lambda^4[1 - 2(\varrho + i\eta)] & 1 - \frac{1}{2}A^2\lambda^4 \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

dove

$$\bar{\varrho} = \varrho(1 - \frac{\lambda^2}{2}), \quad \bar{\eta} = \eta(1 - \frac{\lambda^2}{2}). \quad (2.23)$$

Il vantaggio di questo tipo di generalizzazione della parametrizzazione di Wolfenstein rispetto ad altre note in letteratura è l'assenza di significative correzioni a V_{us} , V_{cd} , V_{ub} e V_{cb} . Infatti, mentre V_{ub} rimane inalterato rispetto alla parametrizzazione originale, le correzioni per V_{us} , V_{cd} appaiono all'ordine $\mathcal{O}(\lambda^7)$ and $\mathcal{O}(\lambda^8)$ rispettivamente. La parametrizzazione di Wolfenstein evidenzia in maniera trasparente la gerarchia esistente tra i vari elementi della matrice CKM. Sperimentalmente sappiamo infatti che gli elementi sulla diagonale sono prossimi all'unità, mentre più ci si allontana dalla diagonale e più gli elementi diventano di ordini di grandezza più piccoli. Essa inoltre permette, insieme al triangolo unitario che abbiamo descritto nel paragrafo successivo, una rappresentazione geometrica trasparente della matrice CKM e consente di derivare diversi risultati analitici ed è anche estremamente utile nella fenomenologia dei decadimenti rari e della violazione della simmetria CP .

2.2 Relazione di unitarietà

La matrice CKM è una matrice complessa unitaria che soddisfa la relazione

$$V^\dagger V = I. \quad (2.24)$$

Quest'ultima corrisponde a una serie di relazioni che gli elementi della matrice CKM devono soddisfare. Tra queste, particolare interesse risiede nell'identità

$$V_{ud}V_{ub}^* + V_{cd}V_{cb}^* + V_{td}V_{tb}^* = 0. \quad (2.25)$$

Essa coinvolge contemporaneamente gli elementi V_{ub} , V_{cb} e V_{td} ed è per questo motivo fenomenologicamente rilevante in quanto essi sono attualmente oggetto di ricerca. Tale relazione può essere rappresentata graficamente nel piano complesso $(\bar{\varrho}, \bar{\eta})$ come un *triangolo unitario* (UT). Essendo la 2.25 invariante per trasformazioni di fase ne consegue che a tali trasformazioni corrisponde una rotazione del relativo triangolo unitario nel piano complesso, con gli angoli e i lati del triangolo che restano invariati. Essi sono quindi indipendenti dalla scelta della fase e sono perciò grandezze fisiche osservabili che possono essere misurate in opportuni esperimenti. Gli angoli e i lati del triangolo unitario sono legati ai moduli degli

elementi della matrice CKM e l'area di ciascun triangolo unitario è legata al parametro J_{CP} che misura la violazione di CP nel Modello Standard. Abbiamo infatti

$$J_{CP} = 2A_{\Delta} \quad (2.26)$$

dove A_{Δ} è l'area di uno dei triangoli unitari. Torniamo ora alla relazione 2.25. Il modulo del prodotto $V_{cd}V_{cb}^*$ sviluppato in potenze di λ vale

$$|V_{cd}V_{cb}^*| = A\lambda^3 + \mathcal{O}(\lambda^7). \quad (2.27)$$

Riscalando la relazione 2.25, dividendo tutto per $A\lambda^3$ possiamo rappresentarla nel piano complesso $(\bar{\varrho}, \bar{\eta})$ come viene mostrato nella figura 2.1 Possiamo ora scrivere alcune formule

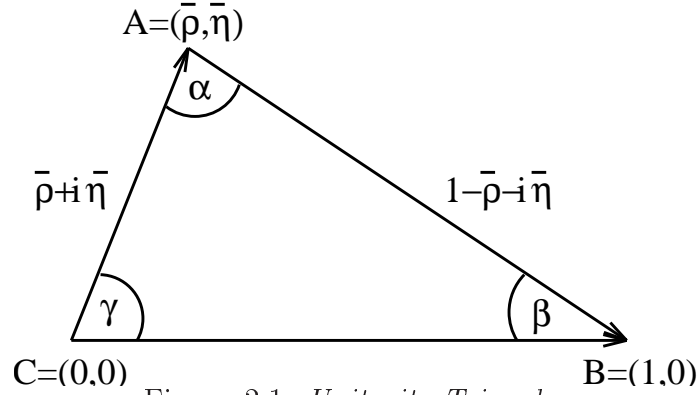


Figura 2.1: *Unitarity Triangle*.

utili che sono legate al triangolo unitario e alle grandezze fisiche ad esso associato:

- gli angoli del triangolo unitario espressi in funzione dei parametri $(\bar{\varrho}, \bar{\eta})$ assumono la forma

$$\sin(2\alpha) = \frac{2\bar{\eta}(\bar{\eta}^2 + \bar{\varrho}^2 - \bar{\varrho})}{(\bar{\varrho}^2 + \bar{\eta}^2)((1 - \bar{\varrho})^2 + \bar{\eta}^2)}, \quad (2.28)$$

$$\sin(2\beta) = \frac{2\bar{\eta}(1 - \bar{\varrho})}{(1 - \bar{\varrho})^2 + \bar{\eta}^2}, \quad (2.29)$$

$$\sin(2\gamma) = \frac{2\bar{\varrho}\bar{\eta}}{\bar{\varrho}^2 + \bar{\eta}^2} = \frac{2\varrho\eta}{\varrho^2 + \eta^2}. \quad (2.30)$$

- le lunghezze dei lati \overline{CA} e \overline{BA} , indicate rispettivamente con R_b e R_t , sono date da

$$R_b \equiv \frac{|V_{ud}V_{ub}^*|}{|V_{cd}V_{cb}^*|} = \sqrt{\bar{\varrho}^2 + \bar{\eta}^2} = (1 - \frac{\lambda^2}{2}) \frac{1}{\lambda} \left| \frac{V_{ub}}{V_{cb}} \right|, \quad (2.31)$$

$$R_t \equiv \frac{|V_{td}V_{tb}^*|}{|V_{cd}V_{cb}^*|} = \sqrt{(1 - \bar{\varrho})^2 + \bar{\eta}^2} = \frac{1}{\lambda} \left| \frac{V_{td}}{V_{cb}} \right|. \quad (2.32)$$

- gli angoli β e γ , coincidente quest'ultimo con il parametro δ , sono legati direttamente alla fase complessa degli elementi V_{td} e V_{ub} della matrice CKM attraverso la relazione

$$V_{td} = |V_{td}|e^{-i\beta}, \quad V_{ub} = |V_{ub}|e^{-i\gamma}. \quad (2.33)$$

- la relazione di unitarietà 2.25 può essere scritta in termini di $(R_b, R_t, \beta, \gamma)$ in questo modo

$$R_b e^{i\gamma} + R_t e^{-i\beta} = 1. \quad (2.34)$$

- l'angolo α può essere ottenuto tramite la relazione

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ. \quad (2.35)$$

La formula 2.34 mostra chiaramente come, conoscendo la coppia (R_t, β) possiamo determinare facilmente la coppia (R_b, γ) e viceversa.

Infatti dati (R_t, β) possiamo calcolare (R_b, γ) tramite le formule

$$R_b = \sqrt{1 + R_t^2 - 2R_t \cos \beta}, \quad \cot \gamma = \frac{1 - R_t \cos \beta}{R_t \sin \beta}. \quad (2.36)$$

e allo stesso modo dati (R_b, γ) possiamo calcolare la coppia (R_t, β) attraverso le formule

$$R_t = \sqrt{1 + R_b^2 - 2R_b \cos \gamma}, \quad \cot \beta = \frac{1 - R_b \cos \gamma}{R_b \sin \gamma}. \quad (2.37)$$

L'importanza del triangolo unitario risiede nel fatto che la sua conoscenza insieme con $|V_{us}|$ e $|V_{cb}|$ ci fornisce una completa descrizione della matrice CKM. In particolare, grazie alle relazioni fin qui menzionate, tra le quali 2.31 e 2.32, siamo in grado di stabilire se nel Modello Standard sono possibili processi con violazione di CP senza che essa sia rivelata direttamente. Infatti, grazie allo studio di alcuni decadimenti del B o grazie al mixing $B_d^0 - \bar{B}_d^0$ si è riusciti a stabilire un valore non nullo per il parametro $\bar{\eta}$ e ciò implica la presenza di processi con violazione di CP nel Modello Standard.

Oltre alla relazione 2.25 possiamo considerare anche un'altra relazione sempre legata alla unitarietà della matrice CKM:

$$|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2 + |V_{ub}|^2 = 1. \quad (2.38)$$

Sappiamo che i limiti più stringenti sulla grandezza degli elementi della matrice CKM sono estratti sperimentalmente dai processi semileptonici a bassa energia relativi alle transizioni $s \rightarrow u$ e $d \rightarrow u$. Attraverso l'analisi di questi decadimenti che forniscono informazioni quantitative sugli elementi $|V_{ud}|$ e $|V_{us}|$ possiamo provare la validità della relazione 2.38 con una precisione dell'0.1%. Essenziale per provare la validità della 2.38 è una ottima determinazione dei parametri $|V_{ud}|$ e $|V_{us}|$. Esistono diversi processi fisici che consentono di estrarre tali elementi di matrice, ma in particolare la migliore misurazione di $|V_{us}|$ si ottiene dai decadimenti semileptonici del K , mentre i migliori risultati su $|V_{ud}|$ si ottengono dalle

transizioni di Fermi super-allowed e in misura minore dai decadimenti beta dei neutroni e dei pioni. L'accuratezza raggiunta nella misura di questi due parametri è tale che il contributo di $|V_{ub}|^2 \approx 2 \times 10^{-5}$ nella relazione 2.38 può essere tranquillamente trascurato. Inoltre attualmente l'indeterminazione indotta nell'equazione (2.38) dai due elementi $|V_{ud}|$ e $|V_{us}|$ è comparabile ed è dell'ordine dello 0.1%. Di seguito descrivo brevemente lo stato attuale di $|V_{ud}|$ per passare poi all'analisi di $|V_{us}|$ soffermandomi in particolare sui decadimenti semileptonici del K .

2.2.1 Stato attuale di $|V_{ud}|$

Il valore di V_{ud} , come abbiamo già detto, può essere estratto dai decadimenti beta nucleari super-allowed $0^+ \rightarrow 0^+$, dai decadimenti beta dei neutroni $n \rightarrow pe\nu$ e dai decadimenti beta dei pioni $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$. Attualmente i decadimenti beta nucleari sono gli unici dai quali è possibile determinare V_{ud} con una indeterminazione migliore dello 0.05%. Gli ultimi due processi invece sono più promettenti nel lungo periodo in quanto sono affetti da una indeterminazione teorica minore. I decadimenti $0^+ \rightarrow 0^+$ super-allowed [16] al tree level hanno il vantaggio di riguardare solo la corrente debole vettoriale che è conservata nel limite $m_u = m_d$. Inoltre non sono rinormalizzati dalle interazioni forti a $q^2 = 0$. Sono perciò indicati per l'estrazione dell'elemento V_{ud} in quanto le correzioni dovute a $q^2 \neq 0$ e alla differenza di massa tra il quark *up* e il quark *down* ($m_u \neq m_d$) sono trascurabili. Nel 2004 il risultato estratto mediando i migliori nove dati dai decadimenti β super-allowed era

$$V_{ud} = 0.9740(1)(3)(4) \rightarrow 0.9740(5) \quad (2.39)$$

dove gli errori sono rispettivamente quello sperimentale, dalla teoria nucleare e dalle correzioni dei loop quantistici. Come possiamo vedere l'errore sperimentale è molto piccolo e mostra l'efficacia della procedura di media. Recenti sviluppi hanno condotto a un miglioramento nella determinazione di V_{ud} di quasi un fattore 2. Ciò è stato possibile principalmente grazie a nuovi studi sulle correzioni dovute ai loop quantistici ed in misura minore ad una rianalisi dei dati sperimentali. Si è ottenuto

$$V_{ud} = 0.97377(27) \quad (2005 \text{ value}) \quad (2.40)$$

dove si vede chiaramente il miglioramento sull'errore totale.

Come abbiamo detto, il secondo metodo per estrarre V_{ud} riguarda i decadimenti beta dei neutroni $n \rightarrow pe\nu$. Essi permettono una misurazione di tale parametro libera dagli effetti della struttura nucleare di decadimenti beta super-allowed. Fissando la costante di Fermi attraverso i decadimenti dei muoni, all'interno del Modello Standard, possiamo descrivere i decadimenti beta dei neutroni attraverso due parametri. Uno di essi è appunto V_{ud} e l'altro è il rapporto tra le costanti di accoppiamento assiale e vettoriale $\lambda = \frac{g_A}{g_V}$. La determinazione di V_{ud} si basa quindi su due input sperimentali: la vita media del neutrone e λ . La prima può essere scritta [16] come:

$$\tau_n = \frac{K}{|V_{ud}|^2 G_F^2 (1 + 3\lambda^2)(1 + \Delta_R) f^R} \quad , \quad (2.41)$$

dove $f^R = 1.71335(15)$ è il fattore dello spazio delle fasi, $\Delta_R = 0.0239(4)$ riguarda le correzioni radiative alla rate di decadimento del neutrone dipendenti dal modello e K è un'opportuna costante di normalizzazione [14]. Il parametro λ è invece legato al coefficiente dell'asimmetria βA_0 che descrive la correlazione tra lo spin del neutrone e il momento dell'elettrone. La relazione che lega A_0 a λ è [16]

$$A_0 = -2 \frac{\lambda(\lambda + 1)}{1 + 3\lambda^2}, \quad (2.42)$$

mentre la relazione finale che lega $|V_{ud}|^2$ ai parametri λ e alla vita media del neutrone è espressa dalla formula

$$|V_{ud}|^2 = \frac{(4908.7 \pm 1.9)s}{\tau_n(1 + 3\lambda^2)}. \quad (2.43)$$

Utilizzando i valori [16] $\tau_n = 885.7(7)s$ e $\lambda = 1.2720(18)$ otteniamo per l'elemento della matrice CKM

$$|V_{ud}| = 0.9730 \pm 0.0004 \pm 0.0012 \pm \pm 0.0002, \quad (2.44)$$

dove gli errori riguardano rispettivamente l'incertezza sperimentale sulla vita media del neutrone, l'asimmetria βA_0 e le correzioni radiative teoriche. Come si può vedere, l'errore dominante è quello sperimentale mentre, per quanto detto, la situazione è molto migliore dal punto di vista teorico.

Per ciò che riguarda l'estrazione di V_{ud} dai decadimenti beta dei pioni $\pi^+ \rightarrow \pi^0 e^+ \nu$, indicati anche come π_β e π_{e3} , possiamo dire che questi processi dal punto di vista teorico rappresentano un mezzo eccezionalmente chiaro e pulito per lo studio del mixing $u-d$ e quindi di V_{ud} . Studi recenti [19] e [20] delle correzioni radiative dimostrano che l'incertezza teorica sull'estrazione di V_{ud} per tali processi è sotto lo 0.05%. Altri studi [21] mostrano ulteriori miglioramenti nell'accuratezza teorica. L'incertezza maggiore viene dai dati sperimentali e i risultati ottenuti sono $V_{ud} = 0.9748(25)$ (metodo 1) e $0.9728(30)$ (metodo 2) [16], che come vediamo non sono molto competitivi ma sono in ottimo accordo con i risultati estratti dai decadimenti beta super-allowed.

2.3 Come si misura V_{us}

Abbiamo fin qui descritto i vari metodi per l'estrazione dell'elemento di matrice V_{ud} . Se analizziamo la relazione 2.38 e consideriamo che V_{ub} da un contributo trascurabile, appare chiaro che l'altro parametro importante da determinare al fine di testare l'unitarietà della matrice CKM è V_{us} . Il nostro studio ha per oggetto proprio quello di fornire uno strumento teorico per poter estrarre in una maniera indipendente tale elemento di matrice. Prima di analizzare il nostro lavoro, descriveremo brevemente i diversi metodi e i diversi processi fisici attraverso i quali estrarre V_{us} dai dati sperimentali. Essi sono: i decadimenti degli iperoni, i decadimenti adronici del τ e i decadimenti semileptonici del K . In questa sezione descriveremo brevemente i primi due insieme a un particolare decadimento semileptonico

del K (i decadimenti $K_{\mu 2}$), per passare poi nella sezione successiva a parlare in maniera più ampia dei processi K_{l3} .

2.3.1 V_{us} dai decadimenti degli iperoni

I decadimenti semileptonici degli iperoni (HSD), $B_1 \rightarrow B_2 + \ell^- + \bar{\nu}_\ell$, sono descritti dalla teoria $V - A$. L'ampiezza di transizione può essere scritta come [16, 23]

$$\mathcal{M}_0 = \frac{G_F V_{CKM}}{\sqrt{2}} [\bar{u}_\ell(l) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v_\nu(p_\nu)] [\bar{u}_{B_2}(p_2) W_\mu u_{B_1}(p_1)], \quad (2.45)$$

dove V_{CKM} sta per V_{ud} o V_{us} e

$$W_\mu = f_1(q^2) \gamma_\mu + \frac{f_2(q^2)}{M_1} \sigma_{\mu\nu} q^\nu + \frac{f_3(q^2)}{M_1} q_\mu + \left[g_1(q^2) \gamma_\mu + \frac{g_2(q^2)}{M_1} \sigma_{\mu\nu} q^\nu + \frac{g_3(q^2)}{M_1} q_\mu \right] \gamma_5. \quad (2.46)$$

In quest'ultima espressione, le quantità $f_i(q^2)$ e $g_i(q^2)$ sono dei fattori di forma che descrivono gli effetti dell'interazione forte non perturbativa a basse energie, mentre $q \equiv p_1 - p_2$ è il momento trasferito e M_1 è la massa dell'iperone che decade. La situazione sperimentale delle misurazioni di tali fattori di forma sono descritte nella Ref. [22]. Gli errori statistici di tali esperimenti sono piuttosto piccoli, e il maggior sforzo è stato profuso nella riduzione degli errori sistematici. Questi possono essere di due tipi: il primo dovuto a una carenza nell'apparecchiatura sperimentale, il secondo di natura teorica [23] comprende le correzioni radiative e le assunzioni teoriche per alcuni fattori di forma. Per quanto riguarda l'estrazione di V_{us} , i fit dei dati sperimentali, possono essere effettuati usando i tassi di decadimento e i coefficienti di correlazione spinoriale e angolare [24]. Ci sono infatti dati sufficienti provenienti da cinque decadimenti ($\Lambda \rightarrow pe^- \bar{\nu}_e$, $\Sigma^- \rightarrow ne^- \bar{\nu}_e$, $\Xi^- \rightarrow \Lambda e^- \bar{\nu}_e$, $\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 e^- \bar{\nu}_e$, and $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^+ e^- \bar{\nu}_e$) da rendere ciò possibile. Un set alternativo di dati è composto dai tassi di decadimento e dai valori misurati per il rapporto g_1/f_1 . Tuttavia, siccome quest'ultimo metodo ha a disposizione meno dati sperimentali, è conveniente utilizzare i molti coefficienti angolari invece di g_1/f_1 . Per estrarre l'elemento di matrice V_{us} possono essere effettuate diverse tipologie di analisi basate su assunzioni diverse. L'analisi fatta in Ref [22] trascura le correzioni quadratiche di rottura di simmetria (SB) di sapore $SU(3)$ nel fattore di forma vettoriale f_1 tenendone conto, per gli effetti maggiori, nel fattore di forma assiale g_1 usando i valori misurati del rapporto g_1/f_1 di tutti i processi elencati sopra, tranne il processo $\Xi^- \rightarrow \Sigma^0 e^- \bar{\nu}_e$. Il valore di V_{us} viene estratto separatamente per ogni decadimento e i risultati sono mediati ottenendo il valore $V_{us} = 0.2250 \pm 0.0027$ che è in ottimo accordo con la richiesta di unitarietà. Un'analisi simile è fatta in Ref. [25] usando questa volta i tassi di decadimento e i coefficienti di correlazione angolare ed effettuando un fit globale dei dati dei cinque decadimenti. Assumendo inizialmente $SU(3)$ esatta, l'analisi fornisce un valore $V_{us} = 0.2238 \pm 0.0019$, con un χ^2/dof attorno al valore 2.5. Quest'ultimo valore può indicare la presenza di correzioni di rottura di simmetria non trascurabili. Per questo motivo, ciò che è stato fatto, è stato di includere, come primo passo, le correzioni di SB in g_1 lasciando

inalterato f_1 ottenendo così il valore $V_{us} = 0.2230 \pm 0.0019$. Si è quindi passati a considerare le correzioni SB per entrambi i fattori di forma ottenendo per l'elemento di matrice CKM il valore $V_{us} = 0.2199 \pm 0.0026$ [25], che sebbene sia in accordo con il valore riportato dal Particle Data Group, non aiuta molto nel migliorare il test di unitarietà.

2.3.2 V_{us} di decadimenti adronici del τ

I decadimenti adronici del τ rappresentano un terreno molto pulito per testare la QCD a basse energie. Ad esempio, analizzando la funzione spettrale [26] del τ *non-strana* si ottiene una determinazione della costante di accoppiamento α_s molto competitiva. E' possibile inoltre, determinare la massa del quark strano che è un altro parametro fondamentale della QCD. In questo tipo di analisi però, la fonte principale di indeterminazione su tale massa è dovuta all'indeterminazione sul parametro $|V_{us}|$ ed è quindi utile determinare innanzitutto tale elemento di matrice. Sia il rapporto tra i tassi di decadimento adronico e leptonic

$$R_\tau \equiv \frac{\Gamma[\tau^- \rightarrow \text{hadrons}(\gamma)]}{\Gamma[\tau^- \rightarrow e^- \bar{\nu}_e \nu_\tau(\gamma)]}, \quad (2.47)$$

che i momenti superiori della distribuzione invariante di massa

$$R_\tau^{(k,l)} \equiv \int_0^{M_\tau^2} ds \left(1 - \frac{s}{M_\tau^2}\right)^k \left(\frac{s}{M_\tau^2}\right)^l \frac{dR_\tau}{ds} \quad (2.48)$$

possono essere calcolati attraverso l'OPE (operator product expansion)

$$R_\tau^{(k,l)} \equiv N_c S_{EW} \left\{ (|V_{ud}|^2 + |V_{us}|^2) [1 + \delta^{(k,l)(0)}] + \sum_{D \geq 2} [|V_{ud}|^2 \delta_{ud}^{(k,l)(D)} + |V_{us}|^2 \delta_{us}^{(k,l)(D)}] \right\}.$$

In questa formula, $S_{EW} = 1.0201 \pm 0.0003$ rappresenta le correzioni radiative elettrodeboli, mentre espressioni esplicite per $\delta_{ij}^{(k,l)(D)}$ e altre informazioni teoriche le possiamo trovare nella Ref. [27]. Il contributo dominante a R_τ è puramente perturbativo ed è racchiuso in $\delta^{(k,l)(0)}$ mentre i contributi agli ordini successivi, che dipendono dal sapore, sono soppressi. Tra questi, i più importanti dipendono da m_s^2 and $m_s \langle \bar{q}q \rangle$. Per ridurre le incertezze perturbative si può convenientemente analizzare l'osservabile della rottura di simmetria di sapore

$$\delta R_\tau^{(k,l)} \equiv \frac{R_{\tau,V+A}^{(k,l)}}{|V_{ud}|^2} - \frac{R_{\tau,S}^{(k,l)}}{|V_{us}|^2} = N_c S_{EW} \sum_{D \geq 2} \left[\delta_{ud}^{(k,l)(D)} - \delta_{us}^{(k,l)(D)} \right],$$

dove $R_{\tau,V+A}^{(k,l)}$ e $R_{\tau,S}^{(k,l)}$ sono definiti in Ref. [28]. In questa espressione, le maggiori incertezze parametriche provengono solo da m_s e da $|V_{us}|$. Idealmente, come spiegato in Ref [28], si possono determinare simultaneamente tali parametri dall'analisi sperimentale di diversi momenti. In assenza di una analisi simile, si può procedere come in [29], determinando $|V_{us}|$ dai momenti con la minore dipendenza da m_s , cioè il momento (0,0). Procedendo in questo

modo e utilizzando per la massa dello strange $m_s(2\text{GeV}) = (95 \pm 20)$ MeV nello schema \overline{MS} , in accordo con recenti calcoli sul reticolo, si trova $\delta R_{\tau,\text{th}}^{(0,0)} = 0.218 \pm 0.026$ che considerando [16]

$$|V_{us}|^2 = \frac{R_{\tau,S}^{(0,0)}}{\frac{R_{\tau,V+A}^{(0,0)}}{|V_{ud}|^2} - \delta R_{\tau,\text{th}}^{(0,0)}} \quad (2.49)$$

fornisce il risultato

$$|V_{us}| = 0.2208 \pm 0.0033_{\text{exp}} \pm 0.0009_{\text{th}} = 0.2208 \pm 0.0034, \quad (2.50)$$

dove si sono usati i valori $R_{\tau,V+A}^{(0,0)} = 3.469 \pm 0.014$ e $R_{\tau,S}^{(0,0)} = 0.167 \pm 0.0050$ in accordo a Ref [30]. E' interessante notare che l'indeterminazione teorica è molto piccola. Ciò è dovuto al fatto che le grandi cancellazioni tra i canali strano e non-strano portano ad avere un valore piccolo per $\delta R_{\tau,\text{th}}^{(0,0)}$, cosicché la sensibilità maggiore è relativa alla parte sperimentale. E' anche interessante notare che con il valore di $|V_{ud}|$ dato nelle sezioni precedenti si trova che la relazione di unitarietà 2.38 è violata solo al livello di 1.8σ . Per concludere, possiamo dire certamente che la determinazione di V_{us} dai decadimenti del τ comincia ad essere competitiva con la determinazione dello stesso dai decadimenti del K . Oltretutto, considerando che la fonte principale di incertezza è di origine sperimentale, ci si può aspettare che i dati provenienti da BaBar e Belle potranno ridurla in maniera significativa.

2.3.3 V_{us} dal $K_{\mu 2}$

Un metodo alternativo [16, 31] per ottenere una stima indipendente e competitiva di $|V_{us}|$, o meglio del rapporto $|V_{us}/V_{ud}|$, consiste nell'analisi delle ampiezze di decadimento inclusive dei processi $K^+ \rightarrow \mu^+ \nu(\gamma)$ e $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu(\gamma)$. Il rapporto può essere scritto come segue

$$\frac{\Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ \nu(\gamma))}{\Gamma(\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu(\gamma))} = \frac{V_{us}^2 F_K^2 M_\pi^3 (M_K^2 - M_\mu^2)^2}{V_{ud}^2 F_\pi^2 M_K^3 (M_\pi^2 - M_\mu^2)^2} \left[1 - \frac{\alpha}{\pi} (C_\pi - C_K) \right], \quad (2.51)$$

dove $F_{K,\pi}$ sono le costanti di decadimento del kaone e del pione, e $C_{K,\pi}$ parametrizza le correzioni elettrodeboli radiative-inclusive. Secondo la dettagliata analisi data in [62] si ha $C_\pi - C_K = 3.0 \pm 0.75$. Dal punto di vista teorico, invece, la vera sfida è rappresentata dal calcolo sul reticolo del rapporto F_K/F_π . A differenza di $f_+(0)$ che è protetto dal teorema di Ademollo-Gatto, la quantità $[F_K/F_\pi - 1]$ rompe l'invarianza $SU(3)$ già al primo ordine e ciò rende molto difficile la stima di tale rapporto ad un livello di accuratezza dell'1%. Tuttavia la MILC collaboration è riuscita ad ottenere tale risultato [33] giungendo al valore $F_K/F_\pi = 1.210 \pm 0.014$ che è in accordo con il risultato preliminare della loro nuova analisi $F_K/F_\pi = 1.198 \pm 0.003^{+0.016}_{-0.005}$ [34]. Sul versante sperimentale, l'indeterminazione maggiore è indotta dall'ampiezza di decadimento del kaone. KLOE ha recentemente effettuato una nuova misurazione del valore assoluto del rapporto di decadimento ottenendo $B(K^+ \rightarrow$

$\mu^+\nu(\gamma) = 0.6366 \pm 0.009 \pm 0.00015$ [16, 35]. Utilizzando questo risultato, la vita media del K^+ dal PDG e $V_{ud} = 0.9738 \pm 0.0003$ otteniamo

$$|V_{us}|_{K^+ \rightarrow \mu^+\nu(\gamma)} = 0.2223 \pm 0.0026 \quad (F_K/F_\pi = 1.210 \pm 0.014) , \quad (2.52)$$

$$|V_{us}|_{K^+ \rightarrow \mu^+\nu(\gamma)} = 0.2245_{-0.0031}^{+0.0011} \quad (F_K/F_\pi = 1.198 \pm 0.003_{-0.005}^{+0.016}) . \quad (2.53)$$

In entrambi i casi l'errore è dominato dall'incertezza su F_K/F_π mentre è trascurabile l'incertezza indotta da $|V_{ud}|$.

2.4 V_{us} dal K_{l3}

Abbiamo descritto in una rapida carrellata i vari metodi per l'estrazione di V_{us} e siamo giunti così ad esaminare i processi indicati con il nome K_{l3} , oggetto del nostro studio. Qui di seguito descriveremo gli aspetti teorici di tali decadimenti in dettaglio. Cominciamo con il riportare la master formula per questi processi, quella relativa alla rate di decadimento. Per tutti i canali K_{l3} ($K = K^\pm, K^0, \ell = \mu, e$), il tasso di decadimento Γ può essere scritto come segue [16]

$$\Gamma(K_{l3}[\gamma]) = \frac{G_F^2 S_{ew} M_K^5}{128\pi^3} C^K I^{K\ell}(\lambda_i) \times |V_{us} \times f_+^{K^0\pi^-}(0)|^2 \times \left[1 + 2\Delta_{SU(2)}^K + 2\Delta_{EM}^{K\ell} \right] . \quad (2.54)$$

In questa equazione, G_F è la costante di Fermi fissata dai decadimenti dei muoni, $S_{ew} = 1 + \frac{2\alpha}{\pi} \left(1 - \frac{\alpha_s}{4\pi}\right) \times \log \frac{M_Z}{M_\rho} + O\left(\frac{\alpha\alpha_s}{\pi^2}\right)$ è la correzione elettrodebole ai processi semileptonici di corrente carica, mentre C^K è un coefficiente di Clebsh-Gordan che vale 1 per i decadimenti kaonici neutri e vale $1/\sqrt{2}$ per quelli carichi. Infine $I^{K\ell}(\lambda_i)$ è un integrale sullo spazio delle fasi dipendente dai fattori di forma. Questi ultimi sono definiti attraverso la formula [16]

$$\langle \pi^j(p_\pi) | \bar{s}\gamma_\mu u | K^i(p_K) \rangle = f_+^{K^i\pi^j}(t) (p_K + p_\pi)_\mu + f_-^{K^i\pi^j}(t) (p_K - p_\pi)_\mu , \quad (2.55)$$

e nella regione fisica possono essere opportunamente parametrizzati come segue

$$f_0^{K^i\pi^j}(t) \equiv f_+^{K^i\pi^j}(t) + \frac{t}{M_K^2 - M_\pi^2} f_-^{K^i\pi^j}(t) , \quad (2.56)$$

$$f_{+,0}^{K^i\pi^j}(t) = f_+^{K^i\pi^j}(0) \left(1 + \lambda'_{+,0} \frac{t}{M_\pi^2} + \lambda''_{+,0} \frac{t^2}{M_\pi^4} + \dots \right) , \quad (2.57)$$

dove $t = (p_K - p_\pi)^2$. E' conveniente normalizzare i fattori di forma di tutti i canali a $f_+^{K^0\pi^-}(0)$, che è proprio il fattore utilizzato nella 2.54, e che indicheremo nel seguito semplicemente con $f_+(0)$. Nella master formula 2.54, restano da analizzare i termini $\Delta_{SU(2)}^K$ e $\Delta_{EM}^{K\ell}$ che dipendono dal canale di decadimento. Essi sono rispettivamente le correzioni di rottura di simmetria di isospin e le correzioni elettromagnetiche. Come vedremo, la conoscenza di tali termini, insieme a un controllo teorico dell'1% su $f_+(0)$, è fondamentale per giungere a una determinazione di V_{us} ad un livello di accuratezza dell'1%. Per analizzare più in

dettaglio i due termini di correzioni l'ambiente naturale per farlo è quello della teoria chirale delle perturbazioni (CHPT), che descriveremo più in dettaglio nel prossimo capitolo. Qui ci limitiamo ad affermare che essa è una teoria effettiva di bassa energia della QCD nella quale le ampiezze fisiche sono sistematicamente espresse in potenze del momento esterno dei bosoni pseudoscalari (π, K, η) e delle masse dei quark. Ad un certo ordine di espansione, la CHPT contiene un numero di accoppiamenti di bassa energia (LECs) non fissati dalla simmetria ma da determinare sperimentalmente attraverso delle osservabili. Fatta questa breve introduzione alla CHPT, torniamo ai termini di correzione. Gli effetti di rottura di isospin forte $O(m_u - m_d)$ furono studiati inizialmente all'ordine $O(p^4)$, come possiamo vedere nella Ref. [36], dove appaiono sia i contributi dai loop che dagli accoppiamenti LECs. Usando i valori aggiornati sulle masse dei quark e dei LECs rilevanti, come descritto nella Ref. [37], si ottengono i risultati riportati nella tabella 2.1. Anche le correzioni radiative sono studiate all'interno della CHPT fino all'ordine $e^2 p^2$ come descritto nelle Ref. [37, 38]. A questo ordine dell'espansione, le correzioni virtuali e quelle reali sono entrambe importanti. Le prime riguardano diagrammi di loop e diagrammi tree level con inserzione di LECs all'ordine $\mathcal{O}(e^2 p^2)$. Una stima di tali contributi la si trova in [40] dove alcune di queste inserzioni sono state calcolate con la tecnica nota come 'large- N_C technique' e altre attraverso un'analisi dimensionale. Le incertezze risultanti sono riportate nella Tabella 2.1 e come possiamo vedere esse non influenzano l'estrazione di V_{us} a un livello sensibile. Come abbiamo sottolineato, oltre alle correzioni virtuali è fondamentale considerare anche le correzioni reali ai fini del calcolo di $\Delta_{EM}^{K\ell}$. Bisogna cioè considerare i processi con emissione di fotone reale $K_{l3\gamma}$. Infatti solo la somma inclusiva dei tassi di decadimento di entrambi i processi (K_{l3} e $K_{l3\gamma}$) è libera dalle divergenze infrarosse a ogni ordine in α . Inoltre, il fattore di correzione dipende dalla definizione precisa del tasso di decadimento inclusivo. Nella Tabella 2.1 sono riportati i risultati per il tasso di decadimento totalmente inclusivo con la prescrizione dei '3-corpi' dove solo gli eventi radiativi consistenti con una cinematica a tre corpi sono tenuti in considerazione.

Esistono anche metodi alternativi allo strumento della CHPT per il calcolo delle correzioni radiative ai decadimenti K_{l3} . Una descrizione dettagliata di tale approccio la si può trovare nelle Ref. [39, 41]. All'interno di questi schemi, le divergenze ultraviolette sono regolarizzate tramite l'introduzione di un cutoff, scelto dell'ordine di 1 GeV e i risultati, come vediamo dalla Tabella 2.1, sono in buon accordo con quelli della teoria effettiva.

Nella Tabella 2.1 manca il dato riguardante il decadimento del mesone K^+ nel canale muonico. In realtà è stato presentato un risultato preliminare da Cirigliano durante la conferenza KAON '07, ma non esiste ancora un risultato definitivo pubblicato. Come abbiamo detto nell'introduzione le motivazioni principali per le quali esiste il risultato teorico per il canale elettronico ma non per il canale muonico risiedono nella presenza di molte scale rilevanti in quest'ultimo caso che complicano il calcolo. La massa del muone non è infatti trascurabile rispetto alle altre scale in gioco come accade invece per la massa dell'elettrone. Il nostro lavoro ha come scopo principale quello di fornire una stima teorica delle correzioni elettromagnetiche per il canale muonico attraverso il calcolo della rate inclusiva nell'ambito della regolarizzazione dimensionale. Sarà così possibile considerare i dati sperimentali

	$\Delta_{SU(2)}^K$ (%)		$\Delta_{EM}^{K\ell}$ (%)			
			3-body		full	
K_{e3}^+	2.31 ± 0.22	[36, 37]	-0.35 ± 0.16	[37]	-0.10 ± 0.16	[37]
K_{e3}^0		0	$+0.30 \pm 0.10$	[38]	$+0.55 \pm 0.10$	[38]
					$+0.65 \pm 0.15$	[39]
$K_{\mu 3}^+$	2.31 ± 0.22	[36, 37]				
$K_{\mu 3}^0$		0			$+0.95 \pm 0.15$	[39]

Tabella 2.1: Prospetto dei fattori di correzioni radiativi e di SU(2) per vari modi di decadimento K_{l3} . Nelle Refs. [36, 37, 38] i calcoli vengono svolti nel quadro della CHPT fino all'ordine $p^4, e^2 p^2$, mentre nella Ref. [39] si lavora all'interno di un modello adronico per le interazioni elettromagnetiche dei Kaoni.

provenienti dal settore muonico del decadimento, ottenendo così una stima indipendente di V_{us} .

Altro parametro la cui conoscenza è fondamentale è $f_+(0)$. All'interno della CHPT possiamo espanderlo in potenze della massa dei quark come segue

$$f_+(0) = 1 + f_{p^4} + f_{p^6} + \dots \quad (2.58)$$

Come possiamo vedere la prima correzione emerge all'ordine $\mathcal{O}(p^4)$ e il calcolo a un loop [36, 42] fornisce $f_{p^4} = -0.0227$ in termini di F_π , M_K e M_π , essenzialmente senza incertezza. Il termine di ordine p^6 riceve invece contributi dai diagrammi a due loop, dai diagrammi a un loop con inserzione di un vertice dalla Lagrangiana effettiva all'ordine p^4 e dai diagrammi di tree level con l'inserzione di due vertici dalla Lagrangiana all'ordine p^4 o una sola inserzione dalla Lagrangiana all'ordine p^6 [43, 44]:

$$f_{p^6} = f_{p^6}^{2\text{-loops}}(\mu) + f_{p^6}^{L_i \times \text{loop}}(\mu) + f_{p^6}^{\text{tree}}(\mu) \quad (2.59)$$

I singoli termini dipendono dalla scala di rinormalizzazione chirale μ ma la loro somma ne è indipendente. Se si fissa la scala μ al valore $\mu = M_\rho = 0.77$ GeV e si utilizza per i 10 accoppiamenti LECs L_i quelli riportati nella Ref. [45] otteniamo [44]

$$f_{p^6}^{2\text{-loops}}(M_\rho) = 0.0113, \quad f_{p^6}^{L_i \times \text{loop}}(M_\rho) = -0.0020 \pm 0.0005 \quad (2.60)$$

Per quanto riguarda il contributo al tree level, la sua forma esplicita in termini di L_5 [46] e di $C_{12,34}$ [47] è [48, 44]

$$f_{p^6}^{\text{tree}}(M_\rho) = 8 \frac{(M_K^2 - M_\pi^2)^2}{F_\pi^2} \left[\frac{(L_5^r(M_\rho))^2}{F_\pi^2} - C_{12}^r(M_\rho) - C_{34}^r(M_\rho) \right] \quad (2.61)$$

Il parametro $L_5^r(M_\rho)$ lo si può determinare fenomenologicamente a un livello tale da indurre su $f_{p^6}^{\text{tree}}(M_\rho)$ un'incertezza minore dell'1%. In linea di principio anche i parametri $C_{12,34}$ possono essere determinati fenomenologicamente. Come mostrato nella Ref. [44] la pendenza

λ_0 e la curvatura λ_0'' del fattore di forma scalare nei decadimenti $K_{\mu 3}$ sono dati da una combinazione di C_{12} e C_{34} . Per far sì che si ottengano dei valori tali da indurre su V_{us} un'incertezza dell'ordine dell'1%, è necessario misurare $\Delta\lambda_0 \sim 0.001$ e $\Delta\lambda_0'' \sim 0.0001$.

Un altro metodo per stimare $f_{p^6}^{\text{tree}}(M_\rho)$, descritto nella Ref. [49] è basato sulla large- N_C technique. Senza entrare nel dettaglio possiamo riportare il risultato ottenuto

$$f_{p^6}^{\text{tree}}(M_\rho) = -\frac{(M_K^2 - M_\pi^2)^2}{2M_S^4} \left(1 - \frac{M_S^2}{M_P^2}\right)^2 = -0.002 \pm 0.008_{1/N_C} \pm 0.002_{M_S} . \quad (2.62)$$

Quando combiniamo questo risultato con quello dei contributi di loop all'ordine p^6 [44], otteniamo $f_{p^6} = 0.007 \pm 0.012$, mentre se consideriamo anche i contributi all'ordine p^4 giungiamo al valore

$$f_+(0)_{\text{large-}N_C} = 0.984 \pm 0.012 , \quad (2.63)$$

che è sostanzialmente maggiore, anche se compatibile all'interno degli errori, rispetto alla vecchia stima data da Leutwyler Roos [42]

$$f_+(0)_{\text{Leutwyler-Roos}} = 0.961 \pm 0.008 , \quad (2.64)$$

che è stata per lungo tempo il valore di riferimento per $f_+(0)$ nell'estrazione di V_{us} .

Lo strumento attualmente più affidabile per la determinazione di $f_+(0)$ è quello dei calcoli sul reticolo [70]. Sebbene in linea di principio, ottenere per un fattore di forma un valore con un'accuratezza dell'ordine dell'1% è abbastanza complicato, nel caso di $f_+(0)$, ci troviamo in una situazione speciale. Infatti dai rapporti di opportune funzioni di correlazione si può isolare direttamente la quantità di rottura di simmetria $SU(3)$ [$f_+(0) - 1$], o ancora meglio la quantità [$f_+(0) - 1 - f_{p^4}$] che è l'unica fonte irriducibile di incertezza [50]. Come mostrato in Ref. [50] l'analisi si basata su tre principali punti:

1. *Valutazione del fattore di forma scalare $f_0(q^2)$ a $q^2 = q_{\text{max}}^2 = (M_K - M_\pi)^2$.* Il fattore di forma è estratto dal seguente doppio rapporto di elementi di matrice

$$\frac{\langle \pi | \bar{s}\gamma_0 u | K \rangle \langle K | \bar{u}\gamma_0 s | \pi \rangle}{\langle \pi | \bar{u}\gamma_0 u | \pi \rangle \langle K | \bar{s}\gamma_0 s | K \rangle} = \frac{(M_K + M_\pi)^2}{4M_K M_\pi} [f_0(q_{\text{max}}^2; M_K, M_\pi)]^2 , \quad (2.65)$$

dove tutti i mesoni sono a riposo. Il doppio rapporto e la configurazione cinematica permettono di ridurre la maggior parte delle incertezze sistematiche e permettono di raggiungere un'accuratezza statistica per $f_0(q_{\text{max}}^2)$ al di sotto dell'1%.

2. *Estrapolazione di $f_0(q_{\text{max}}^2)$ a $f_0(0) = f_+(0)$.* Valutando la dipendenza da q^2 del fattore di forma, quest'ultimo estrapolato da q_{max}^2 a $q^2 = 0$. Questa procedura è effettuata indipendentemente per vari set delle masse dei mesoni e usando diverse forme funzionali (lineari, quadratiche e polari) per la dipendenza da q^2 .

3. *Sottrazione dei logaritmi chirali ed estrapolazione chirale.* Il valore di $f_+(0)$ ottenuto deve essere ora estrapolato ai valori fisici di M_K e di M_π . Al fine di ridurre l'errore nell'estrapolazione viene considerato il seguente rapporto

$$R(M_K, M_\pi) = \frac{\Delta f}{(\Delta M^2)^2} \equiv \frac{1 + \hat{f}_{p^4}^q(M_K, M_\pi) - f_+(0; M_K, M_\pi)}{(M_K^2 - M_\pi^2)^2} . \quad (2.66)$$

In questa formula, $\hat{f}_{p^4}^q(M_K, M_\pi)$ rappresenta il contributo teorico di ordine $\mathcal{O}(p^4)$ che è valutato con una versione della CHPT corrispondente alla simulazione sul reticolo effettuata (ad esempio quenched CHPT o partially-quenched CHPT) Per costruzione, la formula (2.66) è finita nel limite di $SU(3)$ e non dipende da alcuna scala arbitraria di sottrazione. Estrapolando il valore di $R(M_K, M_\pi)$ ai valori fisici delle masse si ottiene dunque una stima di f^6 e di tutti i termini successivi nella (2.58). La prima stima di questo tipo è stata effettuata in Ref. [50], ottenendo

$$f_+(0)_{\text{Lattice-quenched}} = 0.960 \pm 0.005_{\text{stat}} \pm 0.007_{\text{syst}} , \quad (2.67)$$

che è in ottimo accordo con la vecchia stima di Leutwyler e Roos. Più recentemente delle simulazioni unquenched hanno confermato e migliorato tale risultato [71] . In particolare la stima più precisa e recente riportata in Ref [70] è

$$f_+(0) = 0.9609 \pm 0.0051 \quad (2.68)$$

ancora in ottimo accordo con la vecchia stima di Leutwyler e Roos.

Abbiamo così dato una descrizione dei vari elementi della master formula (2.54) senza però fornire le stime attuali dell'elemento di matrice V_{us} . Diciamo subito che nessun esperimento condotto fino ad oggi ha ancora misurato tutti gli input sperimentali richiesti per calcolare $|V_{us}|$ indipendentemente. Quello che possiamo riportare sono i valori medi [16] calcolati di $|V_{us}|f_+(0)$ per i decadimenti $K^+(e3)$, $K_L(e3)$, $K_L(\mu3)$, e $K_S(e3)$ usando gli input che descriveremo di seguito e riportare poi i dati più recenti in accordo a quanto descritto in [70]. Tre sono stati gli esperimenti che hanno contribuito alla misurazione dei rapporti di decadimento dei kaoni neutri: KTeV, NA48 e KLOE. Sono tre esperimenti diversi con le relative misurazioni affette da indeterminazioni sistematiche differenti. Una spiegazione dettagliata della strategia adottata per l'estrazione del prodotto $f_+(0)|V_{us}|$ la si può trovare nella Ref. [50]. Qui ci limitiamo a riportare i risultati conseguiti utilizzando i dati sperimentali sui decadimenti del K_L (sia nel canale elettronico che in quello muonico), del K^\pm e del K_S . A tal scopo, si fissa il valore di $S_{EW} = 1.023$ [52] ed si utilizzano per le correzioni radiative e di $SU(2)$ quelle riportate nella Tabelle 2.1. La media di tutte queste misurazioni fornisce il valore

$$f_+(0)|V_{us}| = 0.2173 \pm 0.0008 \quad (2.69)$$

che usando la stima di Leutwyler-Roos per $f_+(0)$ implica

$$|V_{us}|_{K_{e3}} = 0.2261 \pm 0.0021 \quad [f_+(0) = 0.961 \pm 0.008] . \quad (2.70)$$

Utilizzando invece il valore più recente riportato in Ref. [70], abbiamo

$$|V_{us}| = 0.2257(9)_{exp}(12)_{f_+(0)} \quad [f_+(0) = 0.9609 \pm 0.0051]. \quad (2.71)$$

Capitolo 3

La teoria chirale

La Teoria chirale delle perturbazioni (CHPT) [53] è il limite di bassa energia del Modello Standard, o anche la teoria quantistica effettiva che descrive le interazioni adroniche al di sotto della scala di rottura della simmetria chirale ($E \ll \Lambda_\chi \sim 1 \text{ GeV}$). Questa teoria fu fondata attraverso i lavori di Weinberg [54] e di Gasser e Leutwyler [17, 46] verso la fine degli anni '70 e i primi anni '80. Da allora ha conosciuto un notevole sviluppo teorico e di impieghi. Per capire le motivazioni che hanno portato all'elaborazione della CHPT torniamo ad analizzare il Modello Standard. In esso le interazioni tra i quark e i gluoni, descritte dalla Cromodinamica Quantistica (QCD), sono altamente non perturbative alle energie al di sotto della scala di rottura della simmetria chirale. Tutto ciò rende molto difficile una qualsiasi descrizione delle interazioni adroniche a basse energie in termini dei gradi di libertà partonici. D'altro canto, lo spettro della teoria è piuttosto semplice a basse energie. Sono presenti infatti solo otto particelle che formano l'ottetto di mesoni pseudoscalari: π , K e η . Sappiamo anche che a basse energie, i mesoni pseudoscalari interagiscono debolmente sia tra loro che con i nucleoni. Per quanto detto, ci si può quindi aspettare che la QCD possa essere trattata perturbativamente anche a basse energie se descritta in termini di un nuovo set di gradi di libertà: quello dei mesoni pseudoscalari. Questo è proprio lo scopo della CHPT. Avendo una limitazione intrinseca di energia ed essendo il limite di bassa energia di una teoria fondamentale, la Teoria Chirale delle Perturbazioni è un tipico esempio di teoria quantistica dei campi effettiva (EQFT). Il principio basilare di ogni teoria effettiva è che, in un dato range di energia, solo alcuni gradi di libertà sono rilevanti e devono perciò essere descritti da campi dinamici. Gli altri gradi di libertà possono essere integrati producendo degli effetti nascosti in dei coefficienti di operatori locali appropriati. All'interno di questo quadro, anche il Modello Standard può essere visto come una teoria effettiva. Tuttavia una differenza sostanziale tra le due risiede nel grado di rinormalizzabilità. In generale, il concetto di rinormalizzabilità intesa in senso classico, per una teoria effettiva non è vincolante [55]. Infatti, in questo caso, la teoria è valida fino a un certo limite Λ , e ciò che si fa è di espandere le ampiezze fisiche in potenze del rapporto E/Λ . Possiamo quindi imporre la condizione più debole che, per un certo $n > 0$, il numero di controtermini (che sono i coefficienti di

cui parlavamo prima) necessari a regolarizzare le ampiezze e che contribuiscono all'ordine $\mathcal{O}[(E/\Lambda)^n]$ sia finito. Questa richiesta è sufficiente per garantire un potere predittivo della teoria per energie $E < \Lambda$. Possiamo quindi dire che per le EQTF ciò che conta è che la rinormalizzabilità sia garantita ordine per ordine dell'espansione nell'energia. Tornando alla CHPT, il punto di partenza è la considerazione delle simmetrie di cui gode la lagrangiana di QCD trascurando le masse dei quark leggeri. La lagrangiana può essere scritta come [53]

$$\mathcal{L}_{QCD}^{(0)} = \sum_{q=u,d,s} \bar{q}\gamma^\mu \left(i\partial_\mu - g_s \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \right) q - \frac{1}{4} G_{\mu\nu}^a G^{a\mu\nu} + \mathcal{O}(\text{quark pesanti}). \quad (3.1)$$

E' facile verificare che oltre all'invarianza locale $SU(3)$ di colore, $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$ è invariante anche sotto il gruppo di trasformazioni $SU(N_f)_L \times SU(N_f)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$, dove N_f è il numero di quark non massivi. Tra esse, l'unica simmetria che sopravvive esattamente anche considerando la massa dei quark più leggeri è la $U(1)_V$ il cui generatore è il numero bariónico, mentre la simmetria $U(1)_A$ è rotta esplicitamente a livello quantistico dall'anomalia Abelian. Infine abbiamo il gruppo delle trasformazioni chirali $G = SU(3)_L \times SU(3)_R$ [53] che agisce come segue:

$$\psi_{L,R} \xrightarrow{G} g_{L,R} \psi_{L,R}, \quad \text{dove} \quad \psi = \begin{pmatrix} cu \\ d \\ s \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad g_{L,R} \in G. \quad (3.2)$$

Se l'operatore $\bar{\psi}\psi$ ha un valore di aspettazione non nullo nello stato di vuoto ($\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle \neq 0$), o in presenza di un condensato di quark non nullo, la simmetria chirale è spontaneamente rotta. Il sottogruppo che sopravvive in seguito alla rottura spontanea di G è $H = SU(3)_V \equiv SU(3)_{L+R}$ [53]. L'idea base della CHPT è che [53], nel limite chirale ($m_u = m_d = m_s = 0$ o, eventualmente, $m_u = m_d = 0$), i mesoni pseudoscalari sono i bosoni di Goldstone generati attraverso la rottura spontanea di G in H . In particolare, nel caso $SU(3)$ ($m_u = m_d = m_s = 0$) l'ottetto completo di mesoni pseudoscalari è identificato con i campi di Goldstone, mentre nel caso $SU(2)$ ($m_u = m_d = 0$) solo i tre mesoni π . Queste particelle leggere hanno i numeri quantici adatti per essere associati con i generatori di G/H , come richiesto dal teorema di Goldstone [53, 56]. Inoltre, dato che i campi di Goldstone possono sempre essere ridefiniti in modo che essi interagiscano solo attraverso gli accoppiamenti di derivata, questa ipotesi giustifica la bassa intensità delle interazioni dei mesoni pseudoscalari a bassa energia. Sappiamo tuttavia che se i mesoni fossero effettivamente dei bosoni di Goldstone, avrebbero massa rigorosamente nulla. Nella realtà ciò non accade a causa del fatto che i quark più leggeri non sono essi stessi privi di massa. Considerare direttamente i termini di massa nella Lagrangiana romperebbe esplicitamente la simmetria G , ma considerando che $m_{u,d,s} < \Lambda_\chi$ è naturale trattare tali termini come piccole perturbazioni. La ragionevolezza di tale ipotesi sta nel fatto che la massa dei mesoni pseudoscalari è molto inferiore alla tipica scala adronica anche se tale approssimazione funziona ovviamente meglio nel caso $SU(2)$ in cui [53] $M_\pi^2/M_\rho^2 \sim 0.03$ che nel caso $SU(3)$ in cui $M_\pi^2/M_\rho^2 \sim 0.4$. Possiamo quindi riassumere in questo modo le assunzioni base della CHPT:

1. Nel limite chirale la simmetria $SU(3)_L \times SU(3)_R$ della Lagrangiana di QCD è spontaneamente rotta nella simmetria $SU(3)_{L+R}$ e i mesoni pseudoscalari possono essere identificati con i bosoni di Goldstone corrispondenti.
2. I termini di massa dei quark leggeri possono essere trattati come una piccola perturbazione del limite chirale

In accordo a queste ipotesi, per descrivere le interazioni di QCD dei mesoni pseudoscalari è necessario costruire, in termini dei campi dei bosoni di Goldstone, la lagrangiana più generale possibile che sia invariante sotto il gruppo di trasformazioni G ed aggiungere ad essa i termini di rottura esplicita che trasformano linearmente sotto G [54]. La lagrangiana costruita in questo modo contiene necessariamente un numero infinito di operatori, ma come abbiamo già detto, solo un numero finito di essi contribuirà all'ordine $\mathcal{O}[(E/\Lambda_\chi)^n]$. Possiamo quindi ottenere un grado di precisione arbitrario per i processi che avvengono a $E < \Lambda_\chi$ considerando un numero sufficiente ma finito di accoppiamenti non fissati dalla simmetria ma attraverso i dati sperimentali. Come possiamo realizzare una Lagrangiana con questi requisiti? Partiamo dall'analisi della simmetria chirale. Indichiamo [53] con V_i i generatori di H e con A_i i restanti generatori di G . Ogni elemento di G può essere espresso in maniera univoca come $g = e^{\xi_i A_i} e^{\eta_i V_i}$ mentre i campi dei bosoni di Goldstone sono associati alle coordinate ξ_i dello spazio quoziente G/H . Per comprendere come queste coordinate trasformano sotto il gruppo G consideriamo l'azione di un elemento generico $g \in G$ su $u(\xi_i) = e^{\xi_i A_i}$ [53]:

$$g \in G \quad g e^{\xi_i A_i} = e^{\xi'_i(g,\xi) A_i} e^{\eta'_i(g,\xi) V_i} . \quad (3.3)$$

La trasformazione $u(\xi_i) \xrightarrow{G} u(\xi'_i)$ rappresenta una trasformazione non lineare del gruppo G ; non lineare in quanto V_i 's e A_i 's non commutano $[V_i, A_j] \sim A_k$. Come mostrato da Callan, Coleman, Wess e Zumino [57, 58] questa realizzazione non lineare fornisce lo strumento più generale per costruire operatori che trasformano linearmente sotto G in termini dei campi dei bosoni di Goldstone generati dalla rottura spontanea di simmetria di G in H . Nel caso in esame, un'informazione addizionale importante è fornita dall'automorfismo indotto su G dall'operatore parità P [$P : (A_i, V_i) \rightarrow (-A_i, V_i)$]. Possiamo quindi scrivere [53]

$$\begin{aligned} u(\xi_i) &\xrightarrow{G} g_R u(\xi_i) h^{-1}(g, \xi_i) = h(g, \xi_i) u(\xi_i) g_L^{-1} , \\ u(\xi_i)^\dagger &\xrightarrow{G} g_L u(\xi_i)^\dagger h^{-1}(g, \xi_i) = h(g, \xi_i) u(\xi_i)^\dagger g_R^{-1} , \end{aligned} \quad (3.4)$$

dove $h(g, \xi_i) = e^{\eta'(g,\xi_i) V}$. Abbiamo quindi tutto ciò che ci occorre per costruire operatori generici che trasformano linearmente sotto G , partendo dalla loro proiezione nello spazio H . Ad esempio, dato un generico campo Ψ che trasforma linearmente sotto H come $\Psi \xrightarrow{H} e^{\eta_i V_i} \Psi e^{-\eta_i V_i}$, nella realizzazione non lineare di G abbiamo

$$\Psi \xrightarrow{G} h(g, \xi_i) \Psi h^{-1}(g, \xi_i) . \quad (3.5)$$

Quindi, ogni prodotto del tipo $(u, u^\dagger) \times \Psi \times (u, u^\dagger)$ trasforma linearmente sotto G [53]:

$$\begin{aligned}
u\Psi u^\dagger &\xrightarrow{G} g_R(u\Psi u^\dagger)g_R^{-1}, \\
u^\dagger\Psi u &\xrightarrow{G} g_L(u^\dagger\Psi u)g_L^{-1}, \\
u\Psi u &\xrightarrow{G} g_R(u\Psi u)g_L^{-1}, \\
u^\dagger\Psi u^\dagger &\xrightarrow{G} g_L(u^\dagger\Psi u^\dagger)g_R^{-1}.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Partendo dalla derivata di u e di u^\dagger possiamo definire gli operatori seguenti [53]:

$$u_\mu = i(u^\dagger\partial_\mu u - u\partial_\mu u^\dagger) = iu^\dagger\partial_\mu Uu = u_\mu^\dagger, \tag{3.7}$$

$$\Gamma_\mu = \frac{1}{2}(u^\dagger\partial_\mu u + u\partial_\mu u^\dagger) = -\Gamma_\mu^\dagger. \tag{3.8}$$

Si può facilmente verificare che sia u_μ che la derivata covariante di Ψ ,

$$\nabla_\mu\Psi = \partial_\mu\Psi - [\Gamma_\mu, \Psi], \tag{3.9}$$

trasformano in accordo alla (3.5) e possiamo quindi costruire degli operatori che trasformano linearmente sotto G partendo da u_μ e da $\nabla_\mu\Psi$ allo stesso modo di u e u^\dagger .

Per costruire termini invarianti sotto il gruppo di trasformazioni G dato un generico operatore Q che trasforma come $Q \xrightarrow{G} g_L Q g_L^{-1}$ o come $Q \xrightarrow{G} g_R Q g_R^{-1}$ basta considerare la traccia di Q nello spazio dei sapori che indicheremo con $\langle Q \rangle$. La scelta delle coordinate nello spazio quoziente G/H non è unica e questa libertà indica che la parametrizzazione di u in termini dei mesoni pseudoscalari anch'essa non è unica. In quanto segue, noi adotteremo la parametrizzazione esponenziale nello spazio dei sapori 3×3 definita attraverso la formula [53]

$$\begin{aligned}
u^2 = U &= e^{i\sqrt{2}\Phi/F}, \\
\Phi &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_i \lambda_i \phi^i = \begin{bmatrix} \frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & \pi^+ & K^+ \\ \pi^- & -\frac{\pi^0}{\sqrt{2}} + \frac{\eta_8}{\sqrt{6}} & K^0 \\ K^- & \bar{K}^0 & -\frac{2\eta_8}{\sqrt{6}} \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{3.10}$$

dove η_8 indica il mesone η dell'ottetto. Il parametro F nell'equazione (3.10) è una costante dimensionale ($\dim[F] = \dim[\Phi]$) che, come vedremo, è legata alla costante di decadimento dei mesoni pseudoscalari.

Torniamo però alla costruzione della lagrangiana più generale possibile invariante rispetto a G . In assenza di campi esterni è impossibile costruire operatori invarianti non banali in termini di u e di u^\dagger senza considerare le loro derivate. E' facile vedere che occorrono almeno due derivate agenti su u o su u^\dagger per costruire una struttura non banale invariante sia sotto

le trasformazioni chirali che sotto la simmetria di Lorentz. Considerando solo due derivate tale struttura è unica [53]

$$\langle u_\mu u^\mu \rangle = \langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \rangle \quad (3.11)$$

e la Lagrangiana assume la forma

$$\tilde{\mathcal{L}}_S^{(2)} = \frac{F^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \rangle, \quad (3.12)$$

con il fattore $\frac{1}{4}$ tale da riprodurre il corretto termine cinetico dei campi senza spin. La Lagrangiana che abbiamo scritto è la realizzazione chirale della $\mathcal{L}_{QCD}^{(0)}$ all'ordine più basso nell'espansione nelle derivate. Espandendo $\tilde{\mathcal{L}}_S^{(2)}$ in potenze di Φ si ottiene una serie infinita di operatori per i quali i vari accoppiamenti sono tutti espressi in funzione di F [53]:

$$\tilde{\mathcal{L}}_S^{(2)} = \frac{F^2}{4} \langle \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger \rangle = \frac{1}{2} \langle \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi \rangle + \frac{1}{6F^2} \langle [\partial_\mu \Phi, \Phi] [\partial^\mu \Phi, \Phi] \rangle + \mathcal{O}(\Phi^6). \quad (3.13)$$

Da questa Lagrangiana possiamo quindi determinare l'ampiezza di ogni processo del tipo $\pi_1 \pi_2 \dots \pi_n \rightarrow \pi'_1 \pi'_2 \dots \pi'_m$ nel limite chirale. Per parametrizzare i termini di rottura indotti dalla massa dei quark e anche per generare in maniera sistematica le funzioni di Green delle correnti di quark è conveniente inserire delle opportune sorgenti esterne sia nella Lagrangiana di QCD che nella realizzazione chirale. Seguendo Gasser e Leutwyler [17, 46], introduciamo le sorgenti v_μ , a_μ , s e p che trasformano secondo la legge

$$\begin{aligned} r_\mu &= v_\mu + a_\mu & \xrightarrow{G} & g_R r_\mu g_R^{-1}, \\ l_\mu &= v_\mu - a_\mu & \xrightarrow{G} & g_L l_\mu g_L^{-1}, \\ s + ip & & \xrightarrow{G} & g_R (s + ip) g_L^{-1}, \\ s - ip & & \xrightarrow{G} & g_L (s - ip) g_R^{-1}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

e consideriamo la Lagrangiana

$$\mathcal{L}_{QCD}(v, a, s, p) = \mathcal{L}_{QCD}^{(0)} + \bar{\psi} \gamma^\mu (v_\mu + a_\mu \gamma_5) \psi - \bar{\psi} (s - ip \gamma_5) \psi. \quad (3.15)$$

In questo modo otteniamo i seguenti risultati [59]:

- Il funzionale generatore

$$e^{iZ(v,a,s,p)} = \int \mathcal{D}q \mathcal{D}\bar{q} \mathcal{D}G e^{i \int d^4x \mathcal{L}_{QCD}(v,a,s,p)} \quad (3.16)$$

è esplicitamente invariante sotto le trasformazioni chirali, ma la rottura esplicita di G può essere ottenuta direttamente calcolando le funzioni di Green, e cioè le derivate di $Z(v, a, s, p)$ calcolate a

$$v_\mu = a_\mu = p = 0 \quad s = M_q = \text{diag}(m_u, m_d, m_s). \quad (3.17)$$

- La simmetria globale G può essere estesa a simmetria locale modificando la legge di trasformazione per l_μ e per r_μ nel seguente modo

$$\begin{aligned} r_\mu &= v_\mu + a_\mu \xrightarrow{G} g_R r_\mu g_R^{-1} + i g_R \partial_\mu g_R^{-1} , \\ l_\mu &= v_\mu - a_\mu \xrightarrow{G} g_L l_\mu g_L^{-1} + i g_L \partial_\mu g_L^{-1} . \end{aligned} \quad (3.18)$$

La realizzazione chirale di $Z(v, a, s, p)$ all'ordine più basso nell'espansione nelle derivate è data dall'azione classica ottenuta da $\tilde{\mathcal{L}}_S^{(2)}$, dopo aver incluso le sorgenti esterne con termini invarianti sotto le trasformazioni chirali. Se consideriamo sorgenti con spin-1, ciò può essere ottenuto tramite la sostituzione minimale [53]

$$\partial_\mu U \rightarrow D_\mu U = \partial_\mu U - i r_\mu U + i U l_\mu \quad (3.19)$$

oppure, in linea di principio, introducendo nuovi operatori scritti in termini dei tensori [53]

$$\begin{aligned} F_L^{\mu\nu} &= \partial^\mu l^\nu - \partial^\nu l^\mu - i [l^\mu, l^\nu] , \\ F_R^{\mu\nu} &= \partial^\mu r^\nu - \partial^\nu r^\mu - i [r^\mu, r^\nu] . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Analizzando l'equazione (3.19) appare chiara la convenienza ad assegnare la stessa potenza alle derivate di u e alle sorgenti a^μ e v^μ , in modo tale che $D_\mu U$ diventi un termine omogeneo di primo ordine nell'espansione nelle derivate [53]:

$$\begin{aligned} U &\sim \mathcal{O}(p^0) , \\ u^\mu, a^\mu, v^\mu &\sim \mathcal{O}(p^1) , \\ F_{L,R}^{\mu\nu} &\sim \mathcal{O}(p^2) . \end{aligned} \quad (3.21)$$

Per quanto detto, i termini invarianti di Lorentz che contengono i tensori $F_{L,R}^{\mu\nu}$ sono almeno di ordine $\mathcal{O}(p^4)$ e perciò non compaiono all'ordine più basso. Per quanto riguarda le sorgenti con spin-0, la maniera naturale di assegnazione per il conteggio delle potenze è dato da [17, 46]:

$$s, p \sim \mathcal{O}(p^2) . \quad (3.22)$$

Come avremo modo di vedere, questa scelta è buona in quanto implica $M_\pi^2 \sim \mathcal{O}(p^2)$ e conduce alla formula per le masse di Gell-Mann-Okubo [60, 61]. Siamo ora in grado di scrivere la Lagrangiana più generale invariante sotto G , di ordine p^2 , che include mesoni pseudoscalari e sorgenti esterne [53]:

$$\mathcal{L}_S^{(2)} = \frac{F^2}{4} \langle D_\mu U D^\mu U^\dagger + \chi U^\dagger + U \chi^\dagger \rangle , \quad (3.23)$$

dove

$$\chi = 2B(s + ip) . \quad (3.24)$$

Come abbiamo detto, $\mathcal{L}_S^{(2)}$ è determinata completamente dalla simmetria chirale tranne le costanti di accoppiamento che devono essere fissate attraverso i dati sperimentali. Questi due

accoppiamenti sono legati a due parametri fondamentali della rottura spontanea della simmetria chirale: la costante di decadimento del pione F_π , definita da $\langle 0|\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi|\pi^+(p)\rangle = i\sqrt{2}F_\pi p^\mu$, e il condensato di quark $\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle$. Infatti possiamo verificare facilmente che abbiamo [53]

$$\langle 0|\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi|\pi^+(p)\rangle = \langle 0|\frac{\delta S^{(2)}}{\delta a_\mu}|\pi^+(p)\rangle = i\sqrt{2}F_\pi p^\mu , \quad (3.25)$$

$$\langle 0|\bar{\psi}\psi|0\rangle = -\langle 0|\frac{\delta S^{(2)}}{\delta s}|0\rangle = -F^2 B , \quad (3.26)$$

dove $S^{(2)}$ è l'azione

$$S^{(2)} = \int d^4x \mathcal{L}_S^{(2)} . \quad (3.27)$$

Le relazioni (3.25–3.26) sono strettamente valide solo nel limite chirale. Nella realtà, siccome $m_q \neq 0$, esse sono modificate da termini $\mathcal{O}(m_q^2) \sim \mathcal{O}(p^4)$. La costante di decadimento dei pioni è sperimentalmente determinata attraverso il processo $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu$ e si ha $F_\pi = 92.4$ MeV. Contrariamente alle costanti di decadimento, il condensato di quark non è direttamente legato a un'osservabile fisica. E' il prodotto $B \times m_q$ che può essere determinato dall'analisi sperimentale. Esso appare nel termine quadratico di $\mathcal{L}_S^{(2)}$ ed è perciò legato alle masse dei mesoni pseudoscalari [53]:

$$\begin{aligned} M_{\pi^+}^2 &= (m_u + m_d)B , \\ M_{K^+}^2 &= (m_u + m_s)B , \\ M_{K^0}^2 &= (m_d + m_s)B . \end{aligned} \quad (3.28)$$

L'equazione analoga per $M_{\eta_8}^2$ non è indipendente e dà luogo alla relazione

$$3M_{\eta_8}^2 = 4M_K^2 - M_\pi^2 , \quad (3.29)$$

che è la famosa formula della massa di Gell-Mann–Okubo di cui parlavamo in precedenza e che rappresenta un controllo a posteriori che le correzioni di ordine $\mathcal{O}(m_q^2)$ all'equazione (3.28) sono piccole e che l'assegnazione $s \sim \mathcal{O}(p^2)$ è consistente. Neanche il valore assoluto delle masse dei quark può essere determinato all'interno della CHPT, ma la relazione (3.28) fornisce informazioni importanti sui rapporti di tali masse. Oltre alle correzioni all'ordine $\mathcal{O}(m_q^2)$, la relazione (3.28) può essere modificata da effetti elettromagnetici che includeremo in seguito nella Lagrangiana chirale e che possono dipendere solo dalle cariche dei mesoni. Possiamo quindi scrivere [53]

$$\begin{aligned} M_{\pi^0}^2 &= (m_u + m_d)B + \mathcal{O}(m_q^2) , \\ M_{K^0}^2 &= (m_d + m_s)B + \mathcal{O}(m_q^2) , \\ M_{\pi^+}^2 &= (m_u + m_d)B + \alpha\Delta_{\text{e.m.}} + \mathcal{O}(m_q^2, \alpha m_q) , \\ M_{K^+}^2 &= (m_u + m_s)B + \alpha\Delta_{\text{e.m.}} + \mathcal{O}(m_q^2, \alpha m_q) . \end{aligned} \quad (3.30)$$

Trascurando le correzioni $\mathcal{O}(m_q^2, \alpha m_q)$ e usando i valori sperimentali delle masse dei mesoni pseudoscalari, dalle relazioni (3.30) otteniamo [53]

$$\frac{m_d - m_u}{m_d + m_u} = \frac{(M_{K^0} - M_{K^+}) - (M_{\pi^0} - M_{\pi^+})}{M_\pi^0} = 0.22 + 0.07 = 0.29 , \quad (3.31)$$

$$\frac{m_s}{m_d + m_u} = \frac{(M_{K^+} - M_{\pi^+}) + (M_{K^0} - M_{\pi^0})}{M_\pi^0} = 25 . \quad (3.32)$$

Analizzando le due equazioni, possiamo vedere come esse prevedano una differenza sensibile tra le masse dei tre quark leggeri con una conseguente violazione evidente della simmetria di isospin ($\sim 30\%$) e di $SU(3)$ [53]. Tuttavia, è noto, che entrambe le simmetrie, specialmente quella di isospin, sono di solito rispettate dalle interazioni forti. Ad esempio, considerando lo spettro dei mesoni vettoriali, l'isospin funziona a un livello dell'(1-2)% $[(M_\omega - M_\rho)/M_\rho \sim 1.5\%]$ mentre $SU(3)$ a un livello del (10-20)% $[(M_{K^*} - M_\rho)/M_\rho \sim 16\%]$ [53].

La ragione di ciò risiede nel fatto che sebbene le masse dei quark leggeri sono molto diverse tra loro, esse sono piccole rispetto alla scala di rottura della simmetria chirale. Possiamo infatti dedurre la seguente gerarchia [53]

$$\begin{aligned} \Lambda_\chi &\sim 10^3 \text{ MeV} , \\ m_s &\sim 10^2 \text{ MeV} , \\ m_d, m_u &\sim 10^1 \text{ MeV} . \end{aligned} \quad (3.33)$$

Le masse di tutti gli adroni leggeri, tranne quelli che dovrebbero essere i bosoni di Goldstone, restano diverse da zero anche nel limite chirale e dipendono in maniera dominante da Λ_χ . Le simmetrie di isospin e $SU(3)$ sono una conseguenza del fatto che $m_{u,d,s} \ll \Lambda_\chi$ e il fatto che sperimentalmente entrambe sono ben rispettate nel mondo adronico è un buon controllo a posteriori delle assunzioni base della CHPT.

Torniamo ora alla Lagrangiana all'ordine più basso. Per una trattazione completa degli effetti elettromagnetici nei decadimenti semileptonici dei pioni e dei kaoni, non solo gli pseudoscalari ma anche i fotoni e i leptoni leggeri devono essere inclusi come gradi di libertà dinamici nella Lagrangiana [62]. Il fotone A_μ e i leptoni l, ν ($l = e, \mu$) sono introdotti aggiungendo appropriati termini alle sorgenti esterne vettoriali e assiali v_μ e a_μ . A livello di quark, questa procedura corrisponde alla solita prescrizione dell'accoppiamento minimale nel caso dell'elettromagnetismo, e all'universalità di Cabibbo nel caso delle correnti deboli cariche [37, 62]:

$$\begin{aligned} l_\mu &= v_\mu - a_\mu - eQ_L^{\text{em}} A_\mu + \sum_\ell (\bar{\ell} \gamma_\mu \nu_{\ell L} Q_L^{\text{w}} + \bar{\nu}_{\ell L} \gamma_\mu \ell Q_L^{\text{w}\dagger}), \\ r_\mu &= v_\mu + a_\mu - eQ_R^{\text{em}} A_\mu. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Definiamo i campi di spurioni rappresentati dalle matrici 3×3 $Q_{L,R}^{\text{em}}, Q_L^{\text{w}}$ con le proprietà di trasformazione sotto il gruppo chirale [37, 62]:

$$Q_L^{\text{em,w}} \xrightarrow{G} g_L Q_L^{\text{em,w}} g_L^\dagger, \quad Q_R^{\text{em}} \xrightarrow{G} g_R Q_R^{\text{em}} g_R^\dagger. \quad (3.35)$$

Definiamo anche le matrici [37, 62]

$$\mathcal{Q}_L^{\text{em,w}} := uQ_L^{\text{em,w}}u^\dagger, \quad \mathcal{Q}_R^{\text{em}} := u^\dagger Q_R^{\text{em}}u \quad (3.36)$$

che trasformano secondo la legge [37, 62]

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_L^{\text{em,w}} &\xrightarrow{G} h(g, \varphi) \mathcal{Q}_L^{\text{em,w}} h(g, \varphi)^{-1}, \\ \mathcal{Q}_R^{\text{em}} &\xrightarrow{G} h(g, \varphi) \mathcal{Q}_R^{\text{em}} h(g, \varphi)^{-1}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Ciò che si fa è di identificare $Q_{L,R}^{\text{em}}$ con la matrice di carica dei quark [37, 62]

$$Q^{\text{em}} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & -1/3 \end{bmatrix}, \quad (3.38)$$

mentre

$$Q_L^{\text{w}} = -2\sqrt{2} G_F \begin{bmatrix} 0 & V_{ud} & V_{us} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

dove G_F è la costante di Fermi e V_{ud}, V_{us} sono gli elementi della matrice CKM. Con queste definizioni, la nostra Lagrangiana all'ordine più basso assume la forma [37, 62]

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{eff}} &= \frac{F_0^2}{4} \langle u_\mu u^\mu + \chi_+ \rangle + e^2 F_0^4 Z \langle \mathcal{Q}_L^{\text{em}} \mathcal{Q}_R^{\text{em}} \rangle \\ &\quad - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \sum_\ell [\bar{\ell}(i \not{\partial} + e \not{A} - m_\ell) \ell + \bar{\nu}_{\ell L} i \not{\partial} \nu_{\ell L}], \end{aligned} \quad (3.40)$$

dove

$$u_\mu = i[u^\dagger(\partial_\mu - ir_\mu)u - u(\partial_\mu - il_\mu)u^\dagger] \quad (3.41)$$

o anche

$$u_\mu = iu^\dagger D_\mu U u. \quad (3.42)$$

La rottura esplicita di simmetria è contenuta in $\chi_+ = u^\dagger \chi u^\dagger + u \chi^\dagger u$ dove χ la poniamo proporzionale alla matrice di massa dei quark [37]

$$\chi = 2B_0 \begin{bmatrix} m_u & 0 & 0 \\ 0 & m_d & 0 \\ 0 & 0 & m_s \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

Ai fini del nostro lavoro e per il calcolo che ci vede impegnati, includiamo nella Lagrangiana, i termini nell'espansione a bassa energia fino all'ordine p^4 , $(m_u - m_d)p^2$ e $e^2 p^2$.

L'azione più generale all'ordine successivo al principale può essere scritta come la somma di quattro termini: $\mathcal{L}_{p^4} + \mathcal{L}_{e^2 p^2} + \mathcal{L}_{\text{lept}} + \mathcal{L}_\gamma$.

La prima, \mathcal{L}_{p^4} , è la nota Lagrangiana di Gasser–Leutwyler [36] in presenza delle sorgenti esterne generalizzate secondo la formula (3.34)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{p^4} = & L_1 \langle u_\mu u^\mu \rangle^2 + L_2 \langle u_\mu u^\nu \rangle \langle u^\mu u_\nu \rangle \\
& + L_3 \langle u_\mu u^\mu u_\nu u^\nu \rangle + L_4 \langle u_\mu u^\mu \rangle \langle \chi_+ \rangle \\
& + L_5 \langle u_\mu u^\mu \chi_+ \rangle + L_6 \langle \chi_+ \rangle^2 + L_7 \langle \chi_- \rangle^2 \\
& + \frac{1}{4}(2L_8 + L_{12}) \langle \chi_+^2 \rangle + \frac{1}{4}(2L_8 - L_{12}) \langle \chi_-^2 \rangle \\
& - iL_9 \langle f_+^{\mu\nu} u_\mu u_\nu \rangle + \frac{1}{4}(L_{10} + 2L_{11}) \langle f_{+\mu\nu} f_+^{\mu\nu} \rangle \\
& - \frac{1}{4}(L_{10} - 2L_{11}) \langle f_{-\mu\nu} f_-^{\mu\nu} \rangle,
\end{aligned} \tag{3.44}$$

dove

$$\begin{aligned}
f_\pm^{\mu\nu} &= u F_L^{\mu\nu} u^\dagger \pm u^\dagger F_R^{\mu\nu} u, \\
F_L^{\mu\nu} &= \partial^\mu l^\nu - \partial^\nu l^\mu - i[l^\mu, l^\nu], \\
F_R^{\mu\nu} &= \partial^\mu r^\nu - \partial^\nu r^\mu - i[r^\mu, r^\nu].
\end{aligned} \tag{3.45}$$

Il secondo termine $\mathcal{L}_{e^2 p^2}$ descrive le interazioni dei fotoni dinamici con i gradi di libertà adronici [63, 64, 65] ed ha la forma

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{e^2 p^2} = & e^2 F_0^2 \left\{ \frac{1}{2} K_1 \langle (\mathcal{Q}_L^{\text{em}})^2 + (\mathcal{Q}_R^{\text{em}})^2 \rangle \langle u_\mu u^\mu \rangle \right. \\
& + K_2 \langle \mathcal{Q}_L^{\text{em}} \mathcal{Q}_R^{\text{em}} \rangle \langle u_\mu u^\mu \rangle \\
& - K_3 [\langle \mathcal{Q}_L^{\text{em}} u_\mu \rangle \langle \mathcal{Q}_L^{\text{em}} u^\mu \rangle + \langle \mathcal{Q}_R^{\text{em}} u_\mu \rangle \langle \mathcal{Q}_R^{\text{em}} u^\mu \rangle] \\
& + K_4 \langle \mathcal{Q}_L^{\text{em}} u_\mu \rangle \langle \mathcal{Q}_R^{\text{em}} u^\mu \rangle \\
& + K_5 \langle [(\mathcal{Q}_L^{\text{em}})^2 + (\mathcal{Q}_R^{\text{em}})^2] u_\mu u^\mu \rangle \\
& + K_6 \langle (\mathcal{Q}_L^{\text{em}} \mathcal{Q}_R^{\text{em}} + \mathcal{Q}_R^{\text{em}} \mathcal{Q}_L^{\text{em}}) u_\mu u^\mu \rangle \\
& + \frac{1}{2} K_7 \langle (\mathcal{Q}_L^{\text{em}})^2 + (\mathcal{Q}_R^{\text{em}})^2 \rangle \langle \chi_+ \rangle \\
& + K_8 \langle \mathcal{Q}_L^{\text{em}} \mathcal{Q}_R^{\text{em}} \rangle \langle \chi_+ \rangle \\
& + K_9 \langle [(\mathcal{Q}_L^{\text{em}})^2 + (\mathcal{Q}_R^{\text{em}})^2] \chi_+ \rangle \\
& + K_{10} \langle (\mathcal{Q}_L^{\text{em}} \mathcal{Q}_R^{\text{em}} + \mathcal{Q}_R^{\text{em}} \mathcal{Q}_L^{\text{em}}) \chi_+ \rangle \\
& - K_{11} \langle (\mathcal{Q}_L^{\text{em}} \mathcal{Q}_R^{\text{em}} - \mathcal{Q}_R^{\text{em}} \mathcal{Q}_L^{\text{em}}) \chi_- \rangle \\
& - iK_{12} \langle [(\widehat{\nabla}_\mu \mathcal{Q}_L^{\text{em}}) \mathcal{Q}_L^{\text{em}} - \mathcal{Q}_L^{\text{em}} \widehat{\nabla}_\mu \mathcal{Q}_L^{\text{em}} \\
& \quad - (\widehat{\nabla}_\mu \mathcal{Q}_R^{\text{em}}) \mathcal{Q}_R^{\text{em}} + \mathcal{Q}_R^{\text{em}} \widehat{\nabla}_\mu \mathcal{Q}_R^{\text{em}}] u^\mu \rangle \\
& + K_{13} \langle (\widehat{\nabla}_\mu \mathcal{Q}_L^{\text{em}}) (\widehat{\nabla}^\mu \mathcal{Q}_R^{\text{em}}) \rangle \\
& + K_{14} \langle (\widehat{\nabla}_\mu \mathcal{Q}_L^{\text{em}}) (\widehat{\nabla}^\mu \mathcal{Q}_L^{\text{em}}) \\
& \quad \left. + (\widehat{\nabla}_\mu \mathcal{Q}_R^{\text{em}}) (\widehat{\nabla}^\mu \mathcal{Q}_R^{\text{em}}) \right\},
\end{aligned} \tag{3.46}$$

dove

$$\begin{aligned}
\widehat{\nabla}_\mu \mathcal{Q}_L^{\text{em}} &= \nabla_\mu \mathcal{Q}_L^{\text{em}} + \frac{i}{2} [u_\mu, \mathcal{Q}_L^{\text{em}}] \\
&= u D_\mu \mathcal{Q}_L^{\text{em}} u^\dagger, \\
\widehat{\nabla}_\mu \mathcal{Q}_R^{\text{em}} &= \nabla_\mu \mathcal{Q}_R^{\text{em}} - \frac{i}{2} [u_\mu, \mathcal{Q}_R^{\text{em}}] \\
&= u^\dagger D_\mu \mathcal{Q}_R^{\text{em}} u,
\end{aligned} \tag{3.47}$$

con

$$\begin{aligned}
D_\mu \mathcal{Q}_L^{\text{em}} &= \partial_\mu \mathcal{Q}_L^{\text{em}} - i [l_\mu, \mathcal{Q}_L^{\text{em}}], \\
D_\mu \mathcal{Q}_R^{\text{em}} &= \partial_\mu \mathcal{Q}_R^{\text{em}} - i [r_\mu, \mathcal{Q}_R^{\text{em}}].
\end{aligned} \tag{3.48}$$

La presenza di leptoni virtuali fa sì che sia necessario aggiungere il termine ‘leptonico’ [62]

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{lept}} &= e^2 \sum_\ell \left\{ F_0^2 \left[X_1 \bar{\ell} \gamma_\mu \nu_{\ell L} \langle u^\mu \{ \mathcal{Q}_R^{\text{em}}, \mathcal{Q}_L^{\text{w}} \} \rangle \right. \right. \\
&\quad + X_2 \bar{\ell} \gamma_\mu \nu_{\ell L} \langle u^\mu [\mathcal{Q}_R^{\text{em}}, \mathcal{Q}_L^{\text{w}}] \rangle \\
&\quad + X_3 m_\ell \bar{\ell} \nu_{\ell L} \langle \mathcal{Q}_L^{\text{w}} \mathcal{Q}_R^{\text{em}} \rangle \\
&\quad + i X_4 \bar{\ell} \gamma_\mu \nu_{\ell L} \langle \mathcal{Q}_L^{\text{w}} \widehat{\nabla}^\mu \mathcal{Q}_L^{\text{em}} \rangle \\
&\quad \left. + i X_5 \bar{\ell} \gamma_\mu \nu_{\ell L} \langle \mathcal{Q}_L^{\text{w}} \widehat{\nabla}^\mu \mathcal{Q}_R^{\text{em}} \rangle + h.c. \right] \\
&\quad + X_6 \bar{\ell} (i \not{\partial} + e \not{A}) \ell \\
&\quad \left. + X_7 m_\ell \bar{\ell} \ell \right\}.
\end{aligned} \tag{3.49}$$

In $\mathcal{L}_{\text{lept}}$ consideriamo solo i termini quadratici nei campi leptonici e al più lineari in G_F . L’ultimo termine di cui dobbiamo tener conto è la Lagrangiana fotonica [62]

$$\mathcal{L}_\gamma = e^2 X_8 F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{3.50}$$

Gli accoppiamenti di bassa energia L_i , K_i , X_i presenti nelle Lagrangiane al secondo ordine sono divergenti eccetto L_3 , L_7 , K_7 , K_{13} , K_{14} e X_1 . La loro divergenza viene utilizzata per assorbire i poli dei diagrammi a un loop attraverso la rinormalizzazione

$$\begin{aligned}
L_i &= L_i^r(\mu) + \Gamma_i \Lambda(\mu), \quad i = 1, \dots, 12, \\
K_i &= K_i^r(\mu) + \Sigma_i \Lambda(\mu), \quad i = 1, \dots, 14, \\
X_i &= X_i^r(\mu) + \Xi_i \Lambda(\mu), \quad i = 1, \dots, 8,
\end{aligned} \tag{3.51}$$

dove, nello schema di rinormalizzazione dimensionale si ha

$$\Lambda(\mu) = \frac{\mu^{d-4}}{(4\pi)^2} \left\{ \frac{1}{d-4} - \frac{1}{2} [\ln(4\pi) + \Gamma'(1) + 1] \right\}. \tag{3.52}$$

I coefficienti Γ_i e Σ_i sono espressi in [36] e in [63] rispettivamente e il loro valore, se trascuriamo gli effetti all’ordine $\mathcal{O}(G_F^2)$, non è modificato dalla presenza di leptoni virtuali. I

coefficienti ‘leptonici’ Ξ_i sono stati determinati recentemente in [62] attraverso l’uso della tecnica super-heat-kernel [66]. Al fine di raccordare la nostra teoria effettiva al Modello Standard delle interazioni elettrodeboli e forte, è necessario specificare il significato fisico preciso del parametro G_F . In presenza dell’elettromagnetismo, questa identificazione è in qualche modo ambigua. Una ridefinizione di G_F del tipo [37]

$$G_F \rightarrow G_F(1 + e^2\delta) \quad (3.53)$$

induce il cambiamento [62]

$$\frac{F_0^2}{4} \langle u_\mu u^\mu \rangle \rightarrow \frac{F_0^2}{4} \langle u_\mu u^\mu \rangle - 2e^2\delta \sum_\ell \bar{\ell}(i\not{\partial} + e\not{A} - m_\ell)\ell, \quad (3.54)$$

che corrisponde a

$$X_6 \rightarrow X_6 - 2\delta, \quad X_7 \rightarrow X_7 + 2\delta. \quad (3.55)$$

Quindi alcuni contributi elettromagnetici possono sempre essere passati da X_6 a G_F o viceversa, mentre X_7 non entra in gioco in quanto non compare nelle quantità osservabili perché è sempre assorbito dalla rinormalizzazione delle masse dei leptoni carichi. Seguendo [62], identifichiamo G_F con la costante di decadimento dei muoni. All’ordine α , G_F può essere legata all’ampiezza di decadimento muonica misurata da [67]

$$\Gamma(\mu \rightarrow \text{all}) = \frac{G_F^2 m_\mu^5}{192\pi^3} f\left(\frac{m_e^2}{m_\mu^2}\right) \left[1 + \frac{\alpha}{2\pi} \left(\frac{25}{4} - \pi^2\right) + \mathcal{O}(\alpha^2)\right], \quad (3.56)$$

dove $f(x) = 1 - 8x - 12x^2 \ln x + 8x^3 - x^4$. Con questa scelta di G_F la correzione elettromagnetica di piccola distanza [52, 68] delle ampiezze delle correnti cariche semileptoniche è completamente contenuta nella costante di accoppiamento X_6 .

Capitolo 4

Calcolo delle correzioni virtuali

Iniziamo l'analisi dettagliata del calcolo delle correzioni radiative per i processi $K \rightarrow \pi \ell^+ \nu$. Abbiamo analizzato in dettaglio, per ciascun processo, i diagrammi di Feynman rilevanti, in particolare i diagrammi con scambio di fotoni virtuali che generano le divergenze ultraviolette ed infrarosse. Nel nostro lavoro, entrambe sono state curate attraverso la tecnica della regolarizzazione dimensionale. Essa è una strategia del tutto generale che non disturba le simmetrie presenti a differenza di altre tecniche di regolarizzazione.

Prima di passare ad analizzare singolarmente i due processi, riportiamo l'espressione generale dell'ampiezza di decadimento [37]. Considerando un processo del tipo

$$K(p_K) \rightarrow \pi(p_\pi) \ell^+(p_\ell) \nu_\ell(p_\nu) \quad (4.1)$$

l'ampiezza invariante possiamo scriverla secondo la formula [37]

$$\mathcal{M} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{us}^* l^\mu C \times \left[f_+^{K\pi}(t) (p_K + p_\pi)_\mu + f_-^{K\pi}(t) (p_K - p_\pi)_\mu \right], \quad (4.2)$$

dove $l^\mu = \bar{u}(p_\nu) \gamma^\mu (1 - \gamma_5) v(p_\ell)$, $C = \begin{cases} 1 & \text{for } K_{\ell 3}^0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{for } K_{\ell 3}^+ \end{cases}$ e il termine in parentesi quadra è l'elemento di matrice $\langle \pi(p_\pi) | V_\mu^{4-i5} | K(p_K) \rangle$ espresso in termini dei fattori di forma $f_\pm^{K\pi}(t)$ che dipendono solo dalla variabile $t = (p_K - p_\pi)^2$.

Per il settore virtuale del calcolo ci siamo quindi occupati di determinare, dall'analisi di ogni diagramma e attraverso lo sviluppo degli integrali di loop, i fattori di forma per entrambi i canali di decadimento. I risultati ottenuti sono stati confrontati con i risultati pubblicati da Cirigliano *et al.* [37] ottenendo, come vedremo, un perfetto accordo. A tal fine è stato necessario individuare un metodo per tradurre i nostri termini di divergenza infrarossa in quelli presenti in [37]. Infatti, mentre entrambi abbiamo curato le divergenze ultraviolette attraverso la tecnica della regolarizzazione dimensionale, le divergenze infrarosse sono state regolarizzate attraverso questa stessa tecnica nel nostro lavoro, ma introducendo una massa

per il fotone nel lavoro di Cirigliano *et al.* [37]. Attraverso l'identificazione

$$\ln\left(\frac{m_K m_\mu}{M_\gamma}\right) \rightarrow 2 \ln\left(\frac{m_K m_\mu}{4\pi\mu^2}\right) - \frac{4}{\epsilon} + 2\gamma \quad (4.3)$$

dove M_γ è la massa del fotone utilizzata in [37] e μ è la scala che si genera attraverso la regolarizzazione dimensionale, si ottiene un perfetto accordo tra i fattori di forma. Passiamo ora all'analisi dei contributi virtuali per ciascun processo di decadimento iniziando dal decadimento del K^+ .

4.1 Correzioni virtuali per il decadimento $K^+ \rightarrow \pi^0 \ell^+ \nu$

L'ampiezza di tale processo all'ordine zero, rappresentato nella Fig. 4.1 è facilmente calcolabile attraverso l'analisi della Lagrangiana di CHPT (3.40), in particolare del termine $\frac{F_0^2}{4} \langle u_\mu u^\mu \rangle$ espanso in funzione del campo Φ (3.10) in modo tale da ottenere direttamente l'espressione nei campi mesonici, ed è dato da

$$A_0 = \frac{iG_F \bar{V}_{us}}{2} \bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v. \quad (4.4)$$

Come si può facilmente verificare confrontando quest'ultima espressione con la più generale

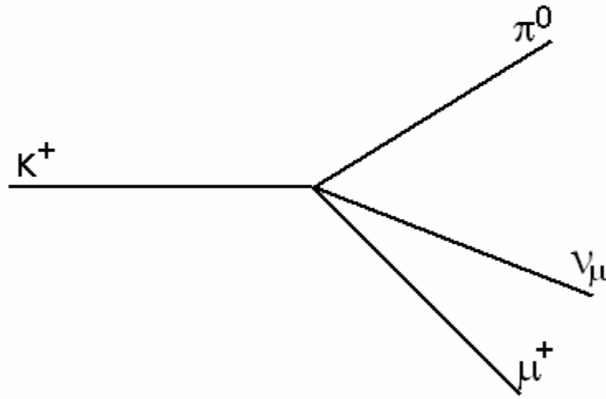


Figura 4.1: *Leading Order*

(4.2), all'ordine zero i fattori di forma sono semplicemente dati da $f_+^{K\pi}(t) = 1$ e $f_-^{K\pi}(t) = 0$. Quindi solo il fattore di forma positivo è non nullo già al leading order, mentre i primi contributi al fattore di forma negativo vengono perciò dagli ordini successivi in α . Per calcolare tali contributi procediamo nel nostro lavoro determinando i vertici fondamentali per costruire e determinare le ampiezze dei diagrammi che modificano i fattori di forma all'ordine α . Per fare ciò bisogna analizzare la Lagrangiana all'ordine zero per determinare i vertici in cui c'è emissione o assorbimento di un fotone da parte delle particelle cariche,

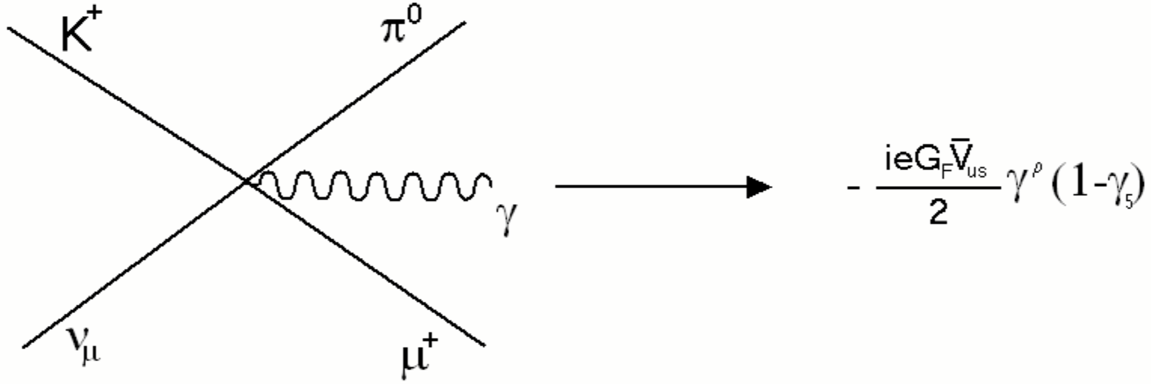


Figura 4.2: *Fotone emesso dal vertice*

Fig. (4.2) e Fig.(4.3), e le Lagrangiane agli ordini successivi, (3.44), (3.46) e (3.49), per determinare i vertici con i controtermini necessari ad assorbire le divergenze ultraviolette che emergono dai loop di fotoni, Fig. (4.4) e (4.5). I controtermini alle gambe esterne di Fig.(4.4) contribuiscono solo alla funzione $f_+^{K\pi}(t)$ in quanto non modificano la struttura del vertice in Fig.(4.1), mentre il diagramma in Fig. (4.5) fornisce contributi ad entrambi i fattori di forma in quanto ha una struttura al vertice completamente diversa. Partendo da questi vertici rilevanti, è facile stabilire che i diagrammi che producono effetti per i fattori di forma all'ordine α sono quelli riportati in Fig.(4.6). Sono dieci diagrammi compreso il leading order. Tra essi, per quanto detto in precedenza, i diagrammi contrassegnati dai numeri 3,4,5,6,7, tra i quali quelli di self energy delle particelle cariche e i controtermini delle gambe esterne, apportano contributi solo al fattore di forma positivo. Gli unici diagrammi che in linea di principio possono contribuire anche al fattore di forma negativo sono i diagrammi con lo scambio di fotone virtuale tra le particelle cariche e tra le gambe esterne e il vertice e dunque i diagrammi 2,8,9,10 di Fig.(4.6).

Analizziamo ora ciasun diagramma di Fig (4.6). Partiamo da quelli che non presentano loop e per i quali quindi è immediata la determinazione del contributo ai fattori di forma. Il leading order, Fig. (4.1) l'abbiamo già discusso in (4.95) e come abbiamo detto contribuisce solo al fattore di forma positivo. Altri diagrammi molto semplici sono quelli con i controtermini sulle gambe esterne. In particolare, quelli mesonici hanno contributi solo dalla Lagrangiana di ordine $\mathcal{O}(e^2 p^2)$ (3.46) e come si evince dalle ampiezze dei rispettivi vertici Fig. (4.4), si ha

$$A_{CoMe} = \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \left[-\frac{4}{3} (k_1 + k_2) - \frac{20}{9} (k_5 + k_6) \right] \bar{u} (\not{k}_k + \not{k}_\pi) (1 - \gamma_5) v. \quad (4.5)$$

Gli unici contributi alla gamba esterna muonica invece provengono dalla Lagrangiana \mathcal{L}_{lept} (3.49), in particolare dal termine proporzionale alla costante X_6 e fornisce come risultato

$$A_{CoMu} = \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \left[-\frac{1}{2} X_6 \right] \bar{u} (\not{k}_k + \not{k}_\pi) (1 - \gamma_5) v. \quad (4.6)$$

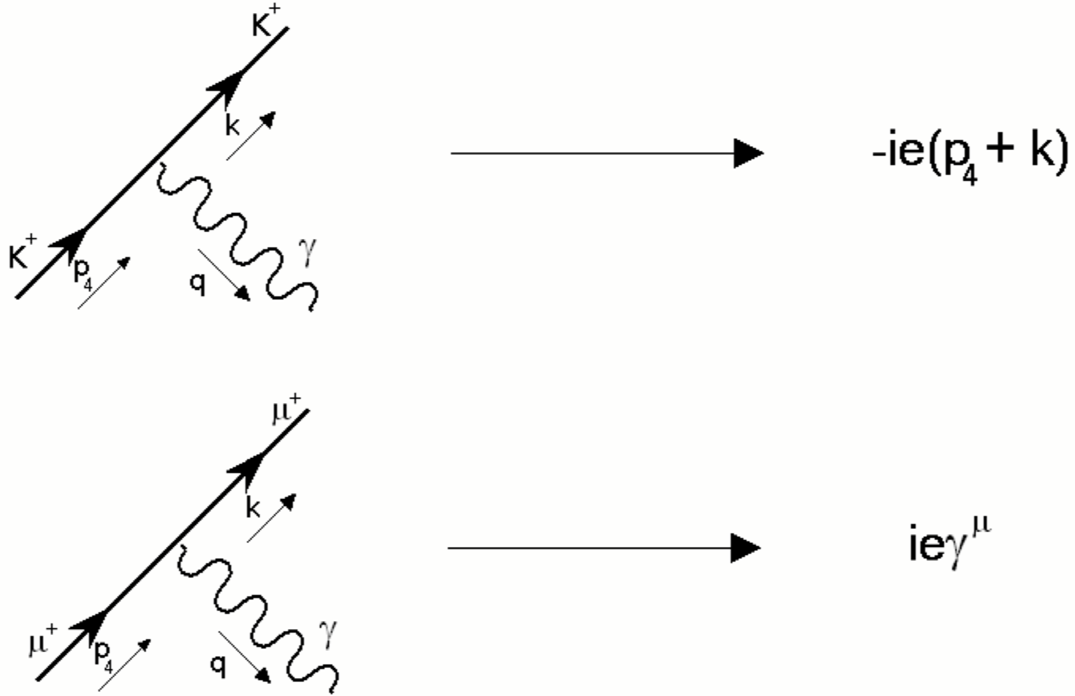


Figura 4.3: Vertici rilevanti dalla Lagrangiana (3.40)

Più complesso è invece il calcolo dei termini che contribuiscono al diagramma di Fig. (4.5). Esso ottiene contributi sia dalla Lagrangiana all'ordine $\mathcal{O}(e^2 p^2)$ che dalla Lagrangiana \mathcal{L}_{lept} . Analizzando attentamente i vari termini ottenuti dallo sviluppo in funzione dei campi mesonici presenti in Φ e delle loro derivate, si giunge alla seguente espressione finale per l'ampiezza di tale diagramma

$$\begin{aligned}
 A_{CoVe} = & \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \left[\frac{8}{3} (k_1 + k_2) + \frac{20}{9} (k_5 + k_6) + 2k_{12} - \frac{8}{3} X_1 \right] \bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v \quad (4.7) \\
 & + \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \left[4k_3 - 2k_4 - \frac{2}{3} (k_5 + k_6) + 2X_1 - 2X_2 + 3X_3 \right] \bar{u} (\not{p}_k - \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v.
 \end{aligned}$$

Fin qui il calcolo è abbastanza diretto. Più laborioso è invece l'analisi e il calcolo delle ampiezze dei diagrammi con scambio di fotone virtuale. In particolare, il diagramma che presenta maggiori difficoltà è quello in cui il fotone virtuale è scambiato tra le due particelle cariche K^+ e μ^+ (n°8 Fig.(4.6)). Il loop infatti contiene tre propagatori e come vedremo è conveniente adottare una particolare parametrizzazione di Feynman per i denominatori che permette di tenere le due variabili ausiliarie introdotte indipendenti l'una dall'altra con una evidente semplificazione del calcolo.

Tra i diagrammi rimanenti, ci occupiamo prima di quelli relativi alla self-energy delle particelle cariche iniziando dalla particella che decade: K^+ . L'ampiezza del diagramma in

$$\begin{array}{l}
\text{K}^+ \text{---} \bigcirc \text{---} \text{K}^+ \longrightarrow -\frac{8}{3} e^2 (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{p}_k^2 - \frac{20}{9} e^2 (\mathbf{k}_5 + \mathbf{k}_6) \mathbf{p}_k^2 \\
\text{\pi}^0 \text{---} \bigcirc \text{---} \text{\pi}^0 \longrightarrow -\frac{8}{3} e^2 (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{p}_\pi^2 - \frac{20}{9} e^2 (\mathbf{k}_5 + \mathbf{k}_6) \mathbf{p}_\pi^2 \\
\text{\mu}^+ \text{---} \bigcirc \text{---} \text{\mu}^+ \longrightarrow -e^2 \sum_6 \mathbf{p}_\mu
\end{array}$$

Figura 4.4: Controtermini delle gambe esterne

Fig. (4.7) assume la forma

$$S.E.K^+ = -ie^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \frac{(2p_k - q)^2}{q^2 (q^2 - 2p_k \cdot q + p_k^2 - m_k^2)} \quad (4.8)$$

dove μ è il parametro dimensionale che emerge in quanto stiamo integrando in $n \neq 4$ dimensioni. Per calcolare l'integrale si utilizza la nota tecnica della parametrizzazione di Feynman. Sappiamo infatti che un qualunque denominatore costituito da un numero n di fattori ripetuti ciascuno m_i volte può essere parametrizzato attraverso la formula [5]

$$\frac{1}{A_1^{m_1} A_2^{m_2} \dots A_n^{m_n}} = \int_0^1 dx_1 \dots \delta(\sum x_i - 1) \frac{\prod x_i^{m_i - 1}}{[\sum x_i A_i]^{\sum m_i}} \frac{\Gamma(m_1 + \dots + m_n)}{\Gamma(m_1) \dots \Gamma(m_n)} \quad (4.9)$$

che è del tutto generale e vale anche nel caso in cui m_i non sia un numero intero. Nel nostro caso (vedi equazione (4.8)) abbiamo un denominatore costituito solo da due fattori e quindi la (4.9) si riduce alla più semplice formula

$$\frac{1}{AB} = \int_0^1 dx \frac{1}{[xA + (1-x)B]^2}. \quad (4.10)$$

Quindi è sufficiente introdurre una sola variabile ausiliaria x sulla quale integrare. Ritornando ora al nostro calcolo e utilizzando l'espressione (4.10) per riscrivere il denominatore di (4.8) si ha

$$S.E.K^+ = -ie^2 \mu^{4-n} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \int_0^1 dx \frac{(2p_k - q)^2}{[q^2 - 2(1-x)p_k \cdot q + (1-x)p_k^2 - (1-x)m_k^2]^2}. \quad (4.11)$$

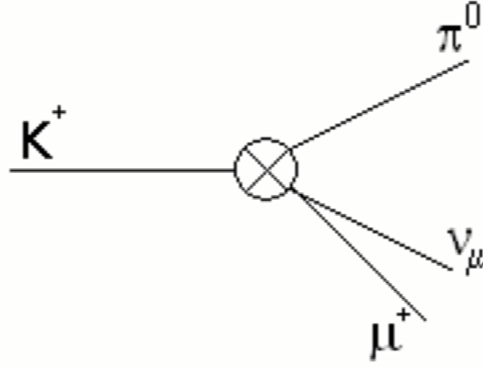


Figura 4.5: *Controtermini al vertice*

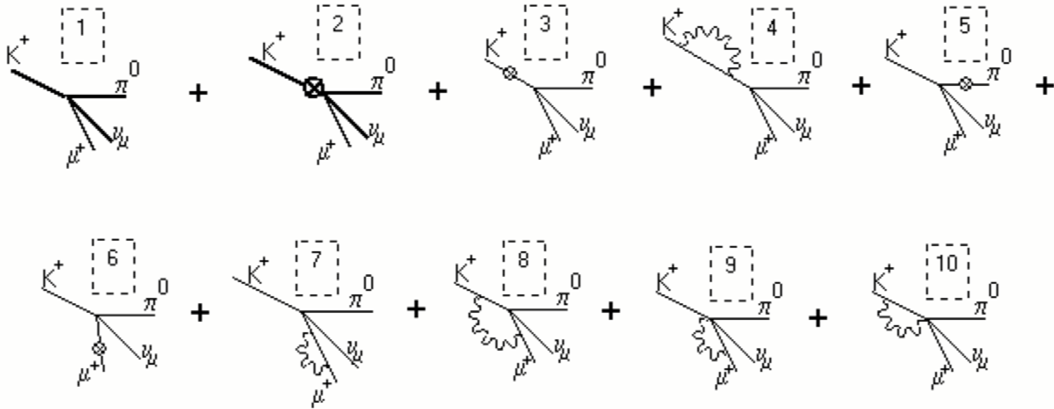


Figura 4.6: *Diagrammi per il calcolo delle correzioni virtuali nel decadimento del K+*

L'introduzione della variabile ausiliaria x ci permette di effettuare uno shift nel quadrimpulso q che semplifica la forma del denominatore e che ci consente di integrare facilmente sugli impulsi. Definiamo quindi

$$l = q - (1 - x) p_k \quad (4.12)$$

e sostituiamo in (4.11) ottenendo

$$S.E._{K^+} = -ie^2 \mu^{4-n} \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{((1+x)p_k - l)^2}{(l^2 - \Delta)^2} \quad (4.13)$$

dove $\Delta = (1-x)(m_k^2 - xp_k^2)$. Sviluppando il denominatore, abbiamo un polinomio in l e, per questioni di simmetria, è facile verificare che sopravviveranno solo i termini con potenze pari in l . L'integrazione può essere effettuata utilizzando le seguenti formule per gli integrali

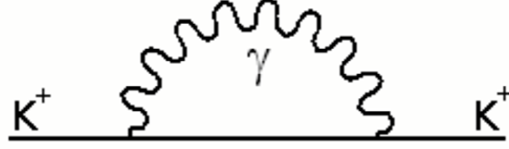


Figura 4.7: *Self-energy del K^+*

n -dimensionali:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{(l^2 - \Delta)^d} = \frac{(-1)^d i \Gamma(d - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma(d)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{d - \frac{n}{2}} \\ \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l^2}{(l^2 - \Delta)^d} = \frac{(-1)^{d-1} i n}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} 2} \frac{\Gamma(d - \frac{n}{2} - 1)}{\Gamma(d)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{d - \frac{n}{2} - 1} \\ \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l^\rho l^\sigma}{(l^2 - \Delta)^d} = \frac{(-1)^{d-1} i g^{\rho\sigma}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} 2} \frac{\Gamma(d - \frac{n}{2} - 1)}{\Gamma(d)} \left(\frac{1}{\Delta}\right)^{d - \frac{n}{2} - 1} \end{array} \right. \quad (4.14)$$

Abbiamo quindi

$$S.E._{K^+} = e^2 \mu^{4-n} \int_0^1 \left\{ (1+x)^2 p_k^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Delta^{2 - \frac{n}{2}}} - \frac{n}{2} \frac{\Gamma(1 - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Delta^{1 - \frac{n}{2}}} \right\} dx \quad (4.15)$$

che, utilizzando la definizione di Δ , possiamo riorganizzare come di seguito

$$S.E._{K^+} = e^2 \left(\frac{\mu^2}{m_k^2} \right)^{2 - \frac{n}{2}} \frac{m_k^2 \Gamma(2 - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^1 (1-x)^{\frac{n}{2} - 2} (1 - \xi x)^{\frac{n}{2} - 2} \left\{ (1+x)^2 \xi + \frac{n}{n-2} (1-x)(1 - \xi x) \right\} \quad (4.16)$$

dove $\xi = \frac{p_k^2}{m_k^2}$. Questa forma per $S.E._{K^+}$ ci permette di integrare facilmente sulla variabile x attraverso l'uso delle funzioni ipergeometriche. Tali funzioni, indicate con $F(a, b, c, \xi)$ sono definite da [69]

$$F(a, b, c, \xi) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 dx x^{b-1} (1-x)^{c-b-1} (1-\xi x)^{-a} \quad (4.17)$$

e godono delle due seguenti importanti proprietà

$$\begin{aligned} F(a, b, c, 1) &= \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} \\ \frac{d}{d\xi} F(a, b, c, \xi) &= \frac{ab}{c} F(a+1, b+1, c+1, \xi) \end{aligned} \quad (4.18)$$

che sono molto utili nel corso del calcolo. Tornando alla (4.16) e utilizzando la definizione

di (4.17) giungiamo all'espressione finale per la self-energy del K^+ data da

$$\begin{aligned}
S.E_{K^+} = & e^2 \left(\frac{\mu^2}{m_k^2} \right)^{2-\frac{n}{2}} \frac{m_k^2 \Gamma(2-\frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left\{ \frac{2\xi}{n-2} F\left(2-\frac{n}{2}, 1, \frac{n}{2}, \xi\right) + \right. \\
& + \frac{8\xi}{n(n-2)} F\left(2-\frac{n}{2}, 2, \frac{n}{2}+1, \xi\right) + \frac{16\xi}{n(n+2)(n-2)} F\left(2-\frac{n}{2}, 3, \frac{n}{2}+2, \xi\right) + \\
& \left. + \frac{2}{n-2} F\left(1-\frac{n}{2}, 1, \frac{n}{2}+1, \xi\right) \right\}. \quad (4.19)
\end{aligned}$$

Il contributo δZ della self-energy di una particella scalare di massa m all'ampiezza del decadimento si calcola attraverso la formula

$$\delta Z = \left[\frac{d}{dp^2} S.E. \right]_{p^2=m^2} = \left[\frac{1}{m^2} \frac{d}{d\xi} S.E. \right]_{\xi=1}. \quad (4.20)$$

Nel nostro caso, sfruttando le proprietà (4.18) otteniamo

$$\delta Z_{K^+} = 0 \quad (4.21)$$

che ci dice che la self-energy del K^+ non da alcun contributo all' ampiezza ed in particolare alla funzione $f_+^{K\pi}(t)$.

Un calcolo del tutto simile che procede lungo la stessa linea e adotta la stessa strategia si ha per la self-energy del muone Fig. 4.8. L'ampiezza del diagramma in Fig.4.8 è data da

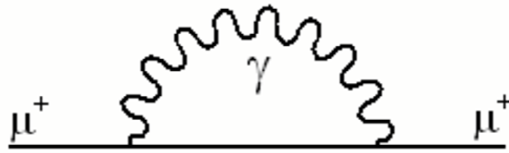


Figura 4.8: *Self-energy del μ^+*

$$S.E.\cdot_{\mu^+} = -ie^2 \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \frac{1}{q^2} \gamma^\rho \frac{\not{p}_\mu - \not{q} + m_\mu}{(p_\mu - q)^2 - m_\mu^2} \gamma_\rho \quad (4.22)$$

ed ha una struttura più complessa della precedente in quanto sono presenti le matrici di Dirac con la loro struttura algebrica. Tuttavia si procede esattamente come nel caso precedente introducendo la parametrizzazione di Feynman descritta in (4.10). Otteniamo quindi

$$S.E.\cdot_{\mu^+} = -ie^2 \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \frac{-(n-2) (\not{p}_\mu - \not{q}) + nm_\mu}{[q^2 - 2(1-x)p_\mu \cdot q + (1-x)p_\mu^2 - (1-x)m_\mu^2]^2} \quad (4.23)$$

che effettuando la trasformazione negli impulsi $l = q - (1 - x)p_\mu$ diventa

$$S.E._{\mu^+} = -ie^2 \int_0^1 dx \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{-(n-2)(x\not{p}_\mu - \not{l}) + nm_\mu}{[l^2 - \Delta]^2} \quad (4.24)$$

dove $\Delta = (1-x)(m_\mu^2 - xp_\mu^2)$. Per le stesse considerazioni di simmetria del caso precedente e per le formule (4.14) giungiamo all'espressione

$$S.E._{\mu^+} = e^2 \int_0^1 \left[-(n-2)x\not{p}_\mu + nm_\mu \right] \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Delta^{2 - \frac{n}{2}}} \quad (4.25)$$

che integrata in x ci fornisce l'espressione finale in termini delle funzioni ipergeometriche

$$S.E._{\mu^+} = e^2 \frac{m_\mu \Gamma(2 - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{\mu^2}{m_\mu^2} \right)^{2 - \frac{n}{2}} \left\{ \frac{2n}{n-2} F\left(2 - \frac{n}{2}, 1, \frac{n}{2}, \xi^2\right) - \frac{4\xi}{n} F\left(2 - \frac{n}{2}, 2, \frac{n}{2} + 1, \xi^2\right) \right\} \quad (4.26)$$

dove, questa volta, si ha $\xi = \frac{\not{p}_\mu}{m_\mu}$. Per le particelle fermioniche di spin $\frac{1}{2}$, il contributo della self-energy all'ampiezza di decadimento è dato, in maniera simile alla (4.20), dall'espressione

$$\delta Z = \left[\frac{d}{d\not{p}} S.E. \right]_{\not{p}=m} = \left[\frac{1}{m} \frac{d}{d\xi} S.E. \right]_{\xi=1}, \quad (4.27)$$

per cui, sempre grazie alle proprietà delle funzioni ipergeometriche (4.18), si giunge facilmente al risultato

$$\delta Z_{\mu^+} = e^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\Theta^{2 - \frac{n}{2}}}{r_\mu^{4-n}} \left[-\frac{n-1}{n-3} \right] \quad (4.28)$$

dove $\Theta = \frac{\mu^2}{m_k^2}$ e $r_\mu = \frac{m_\mu}{m_k}$.

Restano quindi da calcolare i contributi all'ampiezza di decadimento dei diagrammi con scambio di fotone virtuale tra le particelle cariche: n°8,9,10 di Fig. 4.6. Iniziamo con l'analizzare il diagramma con lo scambio di fotone virtuale tra il muone e il vertice la cui ampiezza può essere scritta nella forma

$$A_{V.\mu.} = \frac{e^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \frac{\bar{u} \gamma^\rho (1 - \gamma_5) (\not{h} + m_\mu) \gamma_\sigma v}{(h^2 - m_\mu^2) q^2}, \quad (4.29)$$

dove h è il quadrimpulso associato al fermione che si propaga nel loop e vale $h = q - p_\mu$. Sfruttando quindi le proprietà delle matrici di Dirac possiamo scrivere

$$A_{V.\mu.} = \frac{e^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \frac{\bar{u} (1 + \gamma_5) \left[-(n-2) (\not{q} - \not{p}_\mu) + m_\mu n \right] v}{q^2 (q^2 - 2p_\mu \cdot q + p_\mu^2 - m_\mu^2)} \quad (4.30)$$

che grazie alla parametrizzazione di Feynman (4.10) diventa

$$A_{V,\mu} = \frac{e^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \int_0^1 dx \frac{\bar{u} (1 + \gamma_5) [-(n-2) \not{q} + 2m_\mu] v}{[q^2 - 2(1-x)p_\mu \cdot q + (1-x)p_\mu^2 - (1-x)m_\mu^2]^2}. \quad (4.31)$$

Esattamente come prima, introducendo il nuovo quadrimpulso $l = q - (1-x)p_\mu$, considerando che per le equazioni del moto si ha

$$\not{l} v = -m_\mu v \quad (4.32)$$

e sfruttando le formule (4.14) rimaniamo con il seguente integrale nella variabile ausiliaria x

$$A_{V,\mu} = \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} m_\mu \bar{u} (1 + \gamma_5) v \left(\frac{\mu}{m_\mu} \right)^{4-n} \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_0^1 [2 + (n-2)(1-x)] (1-x)^{n-4} \quad (4.33)$$

che fornisce come risultato

$$A_{V,\mu} = \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \frac{\Theta^{2-\frac{n}{2}} \Gamma(2 - \frac{n}{2})}{r_\mu^{4-n}} \frac{n-1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} n-3} [m_\mu \bar{u} (1 + \gamma_5) v]. \quad (4.34)$$

Scritta in questo modo, tale ampiezza non ci da alcuna informazione su come essa contribuisca ai due fattori di forma. Per determinare i contributi a $f_+^{K\pi}(t)$ e a $f_-^{K\pi}(t)$ dobbiamo elaborare la struttura spinoriale di $I_{V,\mu}$ e a tal fine utilizziamo ancora l'equazione del moto dei campi spinoriali. Abbiamo infatti

$$\begin{aligned} m_\mu \bar{u} (1 + \gamma_5) v &= \bar{u} (1 + \gamma_5) (m_\mu v) = \\ &= -\bar{u} (1 + \gamma_5) \not{l} v = -\bar{u} \not{l} (1 - \gamma_5) v = \\ &= -\bar{u} (\not{p}_k - \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v \end{aligned} \quad (4.35)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la conservazione del quadrimomento

$$\not{p}_k = \not{p}_\mu + \not{p}_\pi + \not{p}_\nu \quad (4.36)$$

e la relazione

$$\bar{u} \not{p}_\nu = 0. \quad (4.37)$$

Il risultato ottenuto ci dice quindi che il diagramma appena analizzato contribuisce solo ed esclusivamente al fattore di forma negativo e possiamo scrivere

$$A_{V,\mu} = -\frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \frac{\Theta^{2-\frac{n}{2}} \Gamma(2 - \frac{n}{2})}{r_\mu^{4-n}} \frac{n-1}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} n-3} \left[\bar{u} (\not{p}_k - \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v \right]. \quad (4.38)$$

Passiamo quindi a calcolare il contributo del diagramma n° 10 di Fig.4.6 la cui ampiezza è data dalla formula:

$$A_{V,K} = -\mu^{4-n} \frac{e^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^n} \frac{\bar{u} (2\not{p}_k - \not{q}) (1 - \gamma_5) v}{q^2 (q^2 - 2p_k \cdot q + p_k^2 - m_k^2)}. \quad (4.39)$$

Anche in questo caso, si procede parametrizzando il denominatore, traslando il quadrimpulso q nel nuovo $l = q - (1 - x)p_k$, e infine integrando utilizzando le formule (4.14). Si ha quindi

$$A_{V.K} = -\frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \bar{u} \not{p}_k (1 - \gamma_5) v \left[\int_0^1 dx (1+x)(1-x)^{\frac{n}{2}-2} (1-x\xi)^{\frac{n}{2}-2} \right] \Theta^{2-\frac{n}{2}}, \quad (4.40)$$

che integrato nella variabile x fornisce come risultato

$$A_{V.K} = -\frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \Theta^{2-\frac{n}{2}} \frac{\Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \bar{u} \not{p}_k (1 - \gamma_5) v \quad \times \quad (4.41)$$

$$\left[\frac{2}{n-2} F\left(2 - \frac{n}{2}, 1, \frac{n}{2}, \xi\right) + \frac{4}{n(n-2)} F\left(2 - \frac{n}{2}, 2, \frac{n}{2} + 1, \xi\right) \right].$$

Se analizziamo la struttura spinoriale di $A_{V.K}$ ci accorgiamo che il diagramma in questione, contribuisce per metà al fattore di forma positivo e per metà al fattore di forma negativo. Infatti si ha

$$\begin{aligned} \bar{u} \not{p}_k (1 - \gamma_5) v &= \bar{u} \left[\not{p}_k + \frac{1}{2} \not{p}_\pi - \frac{1}{2} \not{p}_\pi \right] (1 - \gamma_5) v = \\ &= \frac{1}{2} \bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v + \frac{1}{2} \bar{u} (\not{p}_k - \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v \end{aligned} \quad (4.42)$$

dove si è fatto uso di un semplice trucco matematico.

Resta da calcolare il contributo del diagramma con scambio di fotoni tra il kaone che decade e il muone. Come già anticipavamo in precedenza, tale integrale di loop è il più complesso da calcolare per la presenza di tre propagatori. L'ampiezza di tale diagramma possiamo scriverla nella forma

$$A_{K.\mu} = \frac{e^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi - \not{q}) (1 - \gamma_5) (\not{p}_\mu - \not{q} - m_\mu) (2\not{p}_k - \not{q}) v}{q^2 (q^2 - 2p_\mu \cdot q) (q^2 - 2p_k \cdot q)}. \quad (4.43)$$

Come possiamo facilmente capire, le difficoltà maggiori risiedono sia nella struttura spinoriale più complessa del numeratore, che nella presenza di tre fattori al denominatore. Se usassimo la formula (4.9) per parametrizzarlo saremmo costretti ad introdurre due variabili ausiliare x e y , non più solo x come per i calcoli precedenti, non indipendenti tra loro. Ciò non avrebbe alcuna utilità perché complicherebbe ulteriormente la struttura dell'integrale. Si procede quindi adottando la seguente particolare parametrizzazione di Feynman che troviamo nel lavoro di Guberina, Peccei e Ruckl [69]

$$\frac{1}{abc} = 2 \int_0^1 x dx \int_0^1 dy \frac{1}{[a(1-x) + bxy + cx(1-y)]^3}. \quad (4.44)$$

Essa è particolarmente adatta al nostro caso perché permette di parametrizzare il denominatore a tre fattori introducendo due variabili ausiliarie del tutto indipendenti ottenendo

così una evidente semplificazione del calcolo. Grazie all'uso della (4.44), l'ampiezza (4.43) si trasforma in

$$A_{K,\mu} = \frac{e^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \int_0^1 2x dx \quad \times \quad (4.45)$$

$$\int_0^1 dy \frac{\bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi - \not{q}) (1 - \gamma_5) (\not{p}_\mu - \not{q} - m_\mu) (2\not{p}_k - \not{q}) v}{[(1-x)q^2 + xyq^2 - 2xyp_k \cdot q + x(1-y)q^2 - 2x(1-y)p_\mu \cdot q]^3}.$$

Definendo il nuovo quadrimpulso $l = q - xyp_k - x(1-y)p_\mu$, attraverso il cambio di variabile, e indicando con Δ la quantità

$$\Delta = 2x^2y(1-y)p_\mu \cdot p_k + x^2y^2m_k^2 + x^2(1-y)^2m_\mu^2 \quad (4.46)$$

giungiamo all'espressione

$$A_{K,\mu} = \frac{e^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \int_0^1 2x dx dy \int \frac{d^n l}{(2\pi)^4} \quad \times \quad (4.47)$$

$$\left[\frac{\bar{u} (1 + \gamma_5) (h_{12}\not{p}_\mu + h_{14}\not{p}_k - \not{l}) (h_{22}\not{p}_\mu + h_{24}\not{p}_k - \not{l}) (h_{32}\not{p}_\mu + h_{34}\not{p}_k - \not{l}) v}{[l^2 - \Delta]^3} + \right.$$

$$\left. - m_\mu \frac{\bar{u} (1 + \gamma_5) (h_{12}\not{p}_\mu + h_{14}\not{p}_k - \not{l}) (h_{32}\not{p}_\mu + h_{34}\not{p}_k - \not{l}) v}{[l^2 - \Delta]^3} \right]$$

dove le h_{ij} sono le seguenti funzioni di x e y :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_{12} = -(1 + x - xy) \\ h_{14} = 2 - xy \\ h_{22} = 1 - x + xy \\ h_{24} = -xy \\ h_{32} = -(x - xy) \\ h_{34} = 2 - xy. \end{array} \right. \quad (4.48)$$

Con un po di algebra di Dirac, sfruttando le equazioni del moto per i campi spinoriali e ricordando che per questioni di simmetria sono non nulli solo i termini con potenze pari di l , siamo in grado di semplificare la struttura dell'integrale riorganizzando appunto in potenze del quadrimpulso i denominatori di entrambe le parti dell'integrale separatamente.

Otteniamo infatti

$$\begin{aligned}
A_{K,\mu} = & \frac{e^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \int_0^1 2x dx dy \bar{u} (1 + \gamma_5) \left\{ F_1(x, y) \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{[l^2 - \Delta]^3} + \right. \\
& \left. + [(h_{34} + h_{14}) \not{p}_k - m_\mu (h_{12} + h_{32})] \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l^2}{[l^2 - \Delta]^3} + \right. \\
& \left. + \gamma^\rho (h_{24} \not{p}_k + h_{22} \not{p}_\mu) \gamma^\sigma \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l_\rho l_\sigma}{[l^2 - \Delta]^3} \right\} v - \frac{e^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} m_\mu \int_0^1 2x dx dy \bar{u} (1 + \gamma_5) \\
& \left\{ F_2(x, y) \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{1}{[l^2 - \Delta]^3} + \int \frac{d^n l}{(2\pi)^n} \frac{l^2}{[l^2 - \Delta]^3} \right\} v
\end{aligned} \tag{4.49}$$

dove abbiamo introdotto le due funzioni di x e y

$$\left\{ \begin{aligned}
F_1 = & -m_\mu^3 h_{12} h_{22} h_{32} + m_\mu^2 h_{12} h_{22} h_{34} \not{p}_k - 2 m_\mu h_{12} h_{24} h_{32} (p_k \cdot p_\mu) - m_\mu^2 h_{12} h_{24} h_{32} \not{p}_k \\
& - m_\mu m_k^2 h_{12} h_{24} h_{34} + m_\mu^2 h_{14} h_{22} h_{32} \not{p}_k + 2 h_{14} p_k h_{22} h_{34} (p_k \cdot p_\mu) + m_\mu m_k^2 h_{14} h_{22} h_{34} \\
& - m_\mu m_k^2 h_{14} h_{24} h_{32} + m_k^2 h_{14} h_{24} h_{34} \not{p}_k \\
F_2 = & m_\mu (h_{12} h_{34} - h_{14} h_{32}) \not{p}_k + m_\mu^2 h_{12} h_{32} + 2 h_{12} h_{34} (p_k \cdot p_\mu) \\
& + m_k^2 h_{14} h_{34}
\end{aligned} \right. \tag{4.50}$$

Possiamo quindi integrare sul quadrimpulso l sempre grazie alle formule (4.14) ed ottenere

$$\begin{aligned}
A_{K,\mu} = & \frac{e^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \int_0^1 2x dx dy \left[\frac{i}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma(3 - \frac{n}{2})}{\Gamma(3)} \Delta^{\frac{n}{2}-3} \right] \bar{u} (1 + \gamma_5) \\
& \left\{ -F_1(x, y) - \frac{n\Delta}{n-4} [(h_{34} + h_{14}) \not{p}_k - m_\mu (h_{12} + h_{32})] \right. \\
& \left. + \frac{2\Delta}{n-4} [h_{24} \not{p}_k - m_\mu h_{22}] + m_\mu F_2(x, y) + m_\mu \frac{n\Delta}{n-4} \right\} v.
\end{aligned} \tag{4.51}$$

Non resta quindi che organizzare opportunamente la (4.51) in funzione di x e di y in maniera tale da semplificare e rendere più diretto possibile il calcolo degli integrali rimasti. A tal fine fattorizziamo in x e in y il parametro Δ secondo l'espressione

$$\begin{aligned}
\Delta = & m_K^2 x^2 y^2 + x^2 (1 - y)^2 m_\mu^2 + 2 x^2 y (1 - y) (p_k \cdot p_\mu) = \\
= & m_\mu^2 x^2 (1 - \phi y) (1 - \xi y),
\end{aligned} \tag{4.52}$$

dove

$$\left\{ \begin{aligned}
\phi = & \frac{m_k^2 + m_\mu^2 - 2(p_k \cdot p_\mu)}{m_\mu^2 - (p_k \cdot p_\mu) - \sqrt{(p_k \cdot p_\mu)^2 - m_k^2 m_\mu^2}} \\
\xi = & \frac{m_k^2 + m_\mu^2 - 2(p_k \cdot p_\mu)}{m_\mu^2 - (p_k \cdot p_\mu) + \sqrt{(p_k \cdot p_\mu)^2 - m_k^2 m_\mu^2}},
\end{aligned} \right. \tag{4.53}$$

e raccogliamo in potenze di y , con i relativi coefficienti funzioni di x , i vari termini dell'ampiezza (4.51). Così facendo l'integrale assume la forma

$$\begin{aligned}
A_{K,\mu} &= \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{2(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma\left(3 - \frac{n}{2}\right)}{2} (m_k^2)^{\frac{n}{2}-3} (m_\mu^2)^{\frac{n}{2}-3} \\
&\int_0^1 2x dx \int_0^1 dy (x^2)^{\frac{n}{2}-3} (1 - \phi y)^{\frac{n}{2}} (1 - \xi y)^{\frac{n}{2}} \\
&\bar{u} (1 + \gamma_5) \left\{ \sum_{i=1}^4 cp_i(x) y^{i-1} \not{p}_k + \sum_{i=1}^4 cI_i(x) y^{i-1} \right\} v
\end{aligned} \tag{4.54}$$

dove le funzioni $cp_i(x)$ e $cI_i(x)$ sono così definite

$$\left\{ \begin{aligned}
cp_1(x) &:= 2x^{-1-\epsilon} \left(2m_\mu^2 x + 8Cx - 8C - 4m_\mu^2 x^2 + \frac{4(4-\epsilon)m_\mu^2 x^2}{\epsilon} \right) \\
cp_2(x) &:= 2x^{-1-\epsilon} \left(m_\mu^2 x^3 + 4m_K^2 x - 2m_\mu^2 x + 6m_\mu^2 x^2 - 8Cx^2 - \frac{(4-\epsilon)m_\mu^2 x^3}{\epsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2m_\mu^2 x^3}{\epsilon} - \frac{8(4-\epsilon)m_\mu^2 x^2}{\epsilon} + \frac{8(4-\epsilon)Cx^2}{\epsilon} \right) \\
cp_3(x) &:= 2x^{-1-\epsilon} \left(-2m_\mu^2 x^3 - 2m_\mu^2 x^2 + 6Cx^2 + 2Cx^3 - 4m_K^2 x^2 - \frac{4Cx^3}{\epsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{8(4-\epsilon)Cx^2}{\epsilon} + \frac{2(4-\epsilon)m_\mu^2 x^3}{\epsilon} + \frac{4(4-\epsilon)m_K^2 x^2}{\epsilon} + \frac{4(4-\epsilon)m_\mu^2 x^2}{\epsilon} + \frac{4m_\mu^2 x^3}{\epsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{2(4-\epsilon)Cx^3}{\epsilon} \right) \\
cp_4(x) &:= 2x^{-1-\epsilon} \left(m_\mu^2 x^3 - 2Cx^3 + m_K^2 x^3 - \frac{(4-\epsilon)m_\mu^2 x^3}{\epsilon} - \frac{2m_\mu^2 x^3}{\epsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(4-\epsilon)m_K^2 x^3}{\epsilon} - \frac{2m_K^2 x^3}{\epsilon} + \frac{2(4-\epsilon)Cx^3}{\epsilon} + \frac{4Cx^3}{\epsilon} \right)
\end{aligned} \right. \tag{4.55}$$

e

$$\left\{ \begin{aligned}
cI_1(x) &:= 2x^{-1-\epsilon} \left(-m_\mu^3 x^3 - 4m_\mu Cx + m_\mu^3 x^2 + 2m_\mu^3 x + 4m_\mu m_K^2 x \right. \\
&\quad \left. - 4m_\mu C + \frac{(4-\epsilon)m_\mu^3 x^2}{\epsilon} + \frac{(4-\epsilon)m_\mu^3 x^3}{\epsilon} - \frac{2m_\mu^3 x^2}{\epsilon} + \frac{2m_\mu^3 x^3}{\epsilon} \right) \\
cI_2(x) &:= 2x^{-1-\epsilon} \left(3m_\mu^3 x^3 - 2m_\mu^3 x^2 - 2m_\mu Cx^3 - 2m_\mu m_K^2 x + 6m_\mu Cx \right. \\
&\quad \left. - 2m_\mu^3 x - \frac{3(4-\epsilon)m_\mu^3 x^3}{\epsilon} - \frac{2(4-\epsilon)m_\mu^3 x^2}{\epsilon} - \frac{4m_\mu Cx^2}{\epsilon} + \frac{2(4-\epsilon)m_\mu Cx^3}{\epsilon} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4m_\mu^3 x^2}{\epsilon} + \frac{2(4-\epsilon)m_\mu Cx^2}{\epsilon} - \frac{6m_\mu^3 x^3}{\epsilon} + \frac{4m_\mu Cx^3}{\epsilon} \right) \\
cI_3(x) &:= 2x^{-1-\epsilon} \left(4m_\mu Cx^3 + m_\mu^3 x^2 - m_\mu m_K^2 x^2 - 3m_\mu^3 x^3 - m_\mu m_K^2 x^3 \right. \\
&\quad \left. + \frac{(4-\epsilon)m_\mu^3 x^2}{\epsilon} + \frac{(4-\epsilon)m_\mu m_K^2 x^2}{\epsilon} + \frac{3(4-\epsilon)m_\mu^3 x^3}{\epsilon} \right. \\
&\quad \left. - \frac{4(4-\epsilon)m_\mu Cx^3}{\epsilon} - \frac{8m_\mu Cx^3}{\epsilon} + \frac{4m_\mu Cx^2}{\epsilon} - \frac{2(4-\epsilon)m_\mu Cx^2}{\epsilon} + \frac{6m_\mu^3 x^3}{\epsilon} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(4-\epsilon)m_\mu m_K^2 x^3}{\epsilon} - 2\frac{m_\mu^3 x^2}{\epsilon} - \frac{2m_\mu m_K^2 x^2}{\epsilon} + \frac{2m_\mu m_K^2 x^3}{\epsilon} \right) \\
cI_4(x) &:= 2x^{-1-\epsilon} \left(-2m_\mu Cx^3 + m_\mu m_K^2 x^3 + m_\mu^3 x^3 - \frac{2m_\mu m_K^2 x^3}{\epsilon} - \frac{(4-\epsilon)m_\mu^3 x^3}{\epsilon} \right. \\
&\quad \left. + \frac{4m_\mu Cx^3}{\epsilon} - \frac{(4-\epsilon)m_\mu m_K^2 x^3}{\epsilon} - \frac{2m_\mu^3 x^3}{\epsilon} + \frac{2(4-\epsilon)m_\mu Cx^3}{\epsilon} \right)
\end{aligned} \right. \tag{4.56}$$

e dove $\epsilon = 4 - n$ e $C := p_k \cdot p_\mu$. Per calcolare l'integrale (4.54) espandiamo nel parametro ϵ tendendo i termini di ordine $\frac{1}{\epsilon}$ che parametrizzano le divergenze ultraviolette e infrarosse,

e i termini di ordine 0. Gli altri ordini in ϵ si annullano nel momento in cui, estratte le divergenze, si torna in $n = 4$ dimensioni. Abbiamo perciò

$$A_{k,\mu} = \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \bar{u} (1 + \gamma_5) \left\{ A(\phi, \xi) \not{p}_k + B(\phi, \xi) \right\} \quad (4.57)$$

che con l'uso delle equazioni del moto diventa

$$A_{k,\mu} = \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \bar{u} (1 + \gamma_5) \left\{ G(\phi, \xi) (\not{p}_k + \not{p}_\pi) + H(\phi, \xi) (\not{p}_k - \not{p}_\pi) \right\} \quad (4.58)$$

dove abbiamo separato il contributo al fattore di forma positivo e al fattore di forma negativo. Le due funzioni $G(\phi, \xi)$ e $H(\phi, \xi)$ sono piuttosto complesse e sono date da

$$\begin{aligned} G(\phi, \xi) := & \frac{(8\phi\xi^3 - 2\xi^3)\ln(1-\phi)m_K^2}{32\pi^2\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\epsilon m_\mu^2} - \frac{(2\phi^3\xi - 2\phi\xi^3 + 7\phi^2\xi^3 - 7\phi^3\xi^2)m_K^2}{32\pi^2\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\epsilon m_\mu^2} \\ & - \frac{75\phi^2\xi^3 - 15\phi\xi^3 + \pi^2\xi^3 + \pi^2\phi^3 - 8\pi^2\xi^3\phi^3 - 6\pi^2\xi^3\phi - 6\pi^2\xi^3\phi^2 + 9\pi^2\xi^3\phi^2 + 9\pi^2\xi^2\phi^3 - 75\phi^3\xi^2 + 15\phi^3\xi}{192\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} \\ & - \frac{(-8\phi^3\xi + 2\phi^3)\ln(1-\xi)m_K^2}{32\pi^2\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\epsilon m_\mu^2} - \frac{(12\phi\xi^3 - 18\phi^2\xi^3 - 2\xi^3 + 8\phi^3\xi^3)\ln(1-\phi)}{32\pi^2\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\epsilon} - \frac{(-8\phi^3\xi^3 - 12\phi^3\xi + 18\phi^3\xi^2 + 2\phi^3)\ln(1-\xi)}{32\pi^2\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\epsilon} \\ & - \frac{(-\xi^3 - 9\phi^2\xi^3 + 6\phi^3\xi - 9\phi^3\xi^2 + 8\phi^3\xi^3 - \phi^3 + 6\phi\xi^3) \left(\text{dilog}\left(-\frac{\xi}{\phi-\xi}\right) + \text{dilog}\left(-\frac{\phi(-1+\xi)}{\phi-\xi}\right) \right)}{32\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} \\ & - \frac{1}{192} \frac{(10\pi^2\xi^3\phi + 10\pi^2\xi\phi^3 - 8\pi^2\xi^2\phi^3 - 8\pi^2\xi^3\phi^3 - 120\phi^2\xi^3 + 30\phi\xi^3 - 30\phi^3\xi + 120\phi^3\xi^2 - 8\pi^2\xi^3\phi^2 - 2\pi^2\xi^3 - 2\pi^2\phi^3)C}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{192} \frac{(18\xi^3 + 12\phi^3\xi - 78\phi\xi^3 - 54\phi^3\xi^2 + 48\phi^3\xi^3 - 12\phi^2\xi + 54\phi^2\xi^3 - 6\phi\xi^2 + 60\xi^2\phi^2)\ln(1-\phi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{192} \frac{(-54\phi^3\xi^2 - 6\phi^3 + 24\phi^3\xi^3 + 36\phi^3\xi)\ln(1-\phi)\ln(1-\xi)}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} - \frac{1}{192} \frac{(-12\phi^3 + 60\phi^3\xi - 48\phi^3\xi^2 - 24\phi^3\xi^3)\ln(1-\xi)\ln(\Xi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{192} \frac{(-18\phi^3 - 54\phi^3\xi^2 - 48\phi^3\xi^3 - 12\phi\xi^3 + 6\phi^2\xi + 54\phi^2\xi^3 + 12\phi\xi^2 + 78\phi^3\xi - 60\xi^2\phi^2)\ln(1-\xi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{192} \frac{(-30\phi^3\xi + 24\phi^3\xi^2 + 12\phi^3\xi^3 + 6\phi^3)(\ln(1-\xi))^2 C}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} - \frac{1}{32} \frac{(4\phi\xi^3 - 4\phi^3\xi + 18\phi^3\xi^2 - 18\phi^2\xi^3)C}{\pi^2\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\epsilon m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{32} \frac{(-20\phi\xi^3 + 8\phi^3\xi^3 + 16\phi^2\xi^3 + 4\xi^3)\ln(1-\phi)C}{\pi^2\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\epsilon m_\mu^2} - \frac{1}{32} \frac{-2\phi\xi^3 + 11\phi^2\xi^3 - 11\phi^3\xi^2 + 2\phi^3\xi}{\pi^2\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\epsilon} \\ & - \frac{(8\phi^3\xi^2 + 2\xi^3 + 2\phi^3 + 8\phi^3\xi^3 - 10\phi^3\xi - 10\phi\xi^3 + 8\phi^2\xi^3) \left(\text{dilog}\left(-\frac{\xi}{\phi-\xi}\right) + \text{dilog}\left(-\frac{\phi(-1+\xi)}{\phi-\xi}\right) \right) C}{32\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{192} \frac{(-6\phi^3\xi + 30\phi^3\xi^3 - 9\xi^3 + 6\phi^2\xi - 24\xi^2\phi^2 + 3\phi\xi^2 + 3\phi^2\xi^3 + 21\phi^3\xi^2)\ln(1-\phi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(6\phi^3 - 24\phi^3\xi)\ln(1-\xi)\ln(\Xi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{192} \frac{(48\phi^3\xi^2 - 60\phi^3\xi + 12\phi^3 + 24\phi^3\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(1-\xi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{(12\xi^3 - 60\phi^3\xi - 60\phi\xi^3 + 48\phi^3\xi^3 + 48\phi^3\xi^2 + 48\phi^2\xi^3 + 12\phi^3)\ln(1-\phi)\ln\left(\frac{\phi}{\phi-\xi}\right)C}{192\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{192} \frac{(6\phi^3 - 24\phi^3\xi^3 + 54\phi^3\xi^2 - 36\phi^3\xi)\ln(1-\xi)\ln(\Xi)}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} - \frac{1}{192} \frac{(-6\xi^3 - 12\phi^3\xi^3 + 30\phi\xi^3 - 24\phi^2\xi^3)(\ln(1-\phi))^2 C}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{192} \frac{(21\phi^2\xi^3 - 6\phi\xi^3 - 21\phi^3\xi^2 + 6\phi^3\xi)\ln(\Xi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(24\phi\xi^3 - 6\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(\Xi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{(-54\phi^3\xi^2 + 36\phi\xi^3 + 36\phi^3\xi - 6\xi^3 - 6\phi^3 - 54\phi^2\xi^3 + 48\phi^3\xi^3)\ln\left(\frac{\phi}{\phi-\xi}\right)\ln\left(-\frac{\xi}{\phi-\xi}\right)}{192\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} \\ & - \frac{1}{32} \frac{(-16\phi^3\xi^2 + 20\phi^3\xi - 8\phi^3\xi^3 - 4\phi^3)\ln(1-\xi)C}{\pi^2\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\epsilon m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(24\phi^3\xi - 6\phi^3)\ln(1-\xi)m_K^2\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{192} \frac{(-33\phi^2\xi^3 + 6\phi\xi^3 - 6\phi^3\xi + 33\phi^3\xi^2)\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} - \frac{1}{192} \frac{(6\phi\xi^3 + 21\phi^3\xi^2 - 6\phi^3\xi - 21\phi^2\xi^3)m_K^2\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{192} \frac{(-24\phi^3\xi^3 + 54\phi^2\xi^3 + 6\xi^3 - 36\phi\xi^3)\ln(1-\phi)\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} - \frac{1}{192} \frac{(-54\phi^3\xi^2 - 6\phi^3 + 24\phi^3\xi^3 + 36\phi^3\xi)\ln(1-\xi)\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{192} \frac{(-54\phi^3\xi^2+54\phi^2\xi^3-12\phi\xi^3+12\phi^3\xi)C\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-30\phi^3\xi+6\phi\xi^3+9\phi^3-3\phi^2\xi+24\xi^2\phi^2-6\phi\xi^2-21\phi^2\xi^3-3\phi^3\xi^2)\ln(1-\xi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(24\phi^3\xi^3-54\phi^2\xi^3+36\phi\xi^3-6\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(\Xi)}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} - \frac{m_K^2(4\phi^3\xi-\phi^3+4\phi\xi^3-\xi^3)\left(\operatorname{dilog}\left(-\frac{\xi}{\phi-\xi}\right)+\operatorname{dilog}\left(-\frac{\phi(-1+\xi)}{\phi-\xi}\right)\right)}{32\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(3\xi^3-12\phi\xi^3)(\ln(1-\phi))^2m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} - \frac{(-54\phi^3\xi^2+36\phi\xi^3+36\phi^3\xi-6\xi^3-6\phi^3-54\phi^2\xi^3+48\phi^3\xi^3)\ln(1-\phi)\ln\left(\frac{\phi}{\phi-\xi}\right)}{192\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(15\phi^3\xi-15\phi\xi^3+45\phi^2\xi^3-45\phi^3\xi^2+\pi^2\xi^3+\pi^2\phi^3-4\pi^2\xi^3\phi-4\pi^2\xi\phi^3)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(12\phi^3\xi-3\phi^3)(\ln(1-\xi))^2m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} - \frac{m_K^2(24\phi^3\xi+24\phi\xi^3-6\phi^3-6\xi^3)\ln\left(\frac{\phi}{\phi-\xi}\right)\ln\left(-\frac{\xi}{\phi-\xi}\right)}{192\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(24\phi^3\xi-6\phi^3)\ln(1-\phi)\ln(1-\xi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} - \frac{m_K^2(24\phi^3\xi+24\phi\xi^3-6\phi^3-6\xi^3)\ln(1-\phi)\ln\left(\frac{\phi}{\phi-\xi}\right)}{192\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(48\phi^2\xi^3-60\phi\xi^3+24\phi^3\xi^3+12\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(\Xi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(-12\phi^3\xi+54\phi^3\xi^2-54\phi^2\xi^3+12\phi\xi^3)\ln(\Xi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(12\xi^3-60\phi^3\xi-60\phi\xi^3+48\phi^3\xi^3+48\phi^3\xi^2+48\phi^2\xi^3+12\phi^3)\ln\left(\frac{\phi}{\phi-\xi}\right)\ln\left(-\frac{\xi}{\phi-\xi}\right)C}{192\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-33\phi^3\xi^2+33\phi^2\xi^3-6\phi\xi^3+6\phi^3\xi)\ln(\Xi)}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} - \frac{1}{192} \frac{(3\xi^3+27\phi^2\xi^3-12\phi^3\xi^3-18\phi\xi^3)(\ln(1-\phi))^2}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-51\phi^2\xi^3-6\phi^3\xi+33\phi^3\xi^2+48\phi\xi^3+12\phi^3\xi^3-36\xi^2\phi^2-9\xi^3+6\phi^2\xi+3\phi\xi^2)\ln(1-\phi)}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(51\phi^3\xi^2-33\phi^2\xi^3-48\phi^3\xi+6\phi\xi^3-12\phi^3\xi^3+9\phi^3+36\xi^2\phi^2-3\phi^2\xi-6\phi\xi^2)\ln(1-\xi)}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(18\phi^3\xi-27\phi^3\xi^2+12\phi^3\xi^3-3\phi^3)(\ln(1-\xi))^2}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3} - \frac{1}{192} \frac{(60\phi\xi^3-24\phi^3\xi^3-12\xi^3-48\phi^2\xi^3)\ln(1-\phi)C\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(48\phi^3\xi^2-60\phi^3\xi+12\phi^3+24\phi^3\xi^3)\ln(1-\xi)C\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(6\xi^3-24\phi\xi^3)\ln(1-\phi)m_K^2\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\xi^3\phi^3m_\mu^2}
\end{aligned} \tag{4.59}$$

e

$$\begin{aligned}
H(\phi, \xi) & := -\frac{1}{192} \frac{(6\phi^3\xi-3\phi^3\xi^2-6\phi\xi^3+3\phi^2\xi^3)\gamma}{\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} + \frac{m_K^2(\phi\xi^3+\phi^3+\xi^3+\phi^3\xi)\left(\operatorname{dilog}\left(\frac{\phi}{\phi-\xi}\right)+\operatorname{dilog}\left(\frac{\xi(-1+\phi)}{\phi-\xi}\right)\right)}{32\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& + \frac{(2\phi^2\xi^3+2\phi^3\xi^2-2\phi^3-2\xi^3)\left(\operatorname{dilog}\left(\frac{\phi}{\phi-\xi}\right)+\operatorname{dilog}\left(\frac{\xi(-1+\phi)}{\phi-\xi}\right)\right)C}{32\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& + \frac{(-\phi^3\xi^2+2\phi^3\xi^3+\phi^3+\xi^3-\phi^3\xi-\phi^2\xi^3-\phi\xi^3)\left(\operatorname{dilog}\left(\frac{\phi}{\phi-\xi}\right)+\operatorname{dilog}\left(\frac{\xi(-1+\phi)}{\phi-\xi}\right)\right)}{32\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} - \frac{1}{32} \frac{2\phi\xi^3-\phi^2\xi^3-2\phi^3\xi+\phi^3\xi^2}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3\epsilon} \\
& -\frac{1}{32} \frac{(3\phi^2\xi^3-3\phi^3\xi^2+2\phi\xi^3-2\phi^3\xi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3\epsilon m_\mu^2} - \frac{1}{32} \frac{(2\phi^3\xi^3-2\phi^2\xi^3-2\phi\xi^3+2\xi^3)\ln(1-\phi)}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3\epsilon} \\
& -\frac{1}{32} \frac{(2\phi^3\xi+2\phi^3\xi^2-2\phi^3-2\phi^3\xi^3)\ln(1-\xi)}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3\epsilon} - \frac{1}{32} \frac{(2\phi\xi^3+2\xi^3)\ln(1-\phi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3\epsilon m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{32} \frac{(-2\phi^3-2\phi^3\xi)\ln(1-\xi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3\epsilon m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{32} \frac{(4\phi^3\xi-4\phi\xi^3+2\phi^3\xi^2-2\phi^2\xi^3)C}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3\epsilon m_\mu^2} - \frac{1}{32} \frac{(-4\xi^3+4\phi^2\xi^3)\ln(1-\phi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3\epsilon m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{32} \frac{(-4\phi^3\xi^2+4\phi^3)\ln(1-\xi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3\epsilon m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(21\phi^2\xi^3-3\phi^3\xi^2-18\phi^3\xi^3+9\xi^3+6\phi^3\xi-12\phi\xi^3+6\xi^2\phi^2-6\phi^2\xi-3\phi\xi^2)\ln(1-\phi)}{\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{2\pi^2\xi^3\phi^3+9\phi^3\xi^2+\pi^2\xi^3+15\phi\xi^3-9\phi^2\xi^3-15\phi^3\xi+\pi^2\phi^3-\pi^2\xi^2\phi^3-\pi^2\xi^3\phi-\pi^2\xi^3\phi^2-\pi^2\xi\phi^3}{\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(6\phi^3\xi+6\phi^3)\ln(1-\xi)m_K^2\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(-12\phi^2\xi^3+12\xi^3)\ln(1-\phi)C\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{192} \frac{(-6\phi^3\xi^3-6\xi^3+6\phi\xi^3+6\phi^2\xi^3)\ln(1-\phi)\gamma}{\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} - \frac{1}{192} \frac{(-6\phi^3\xi^2-6\phi^3\xi+6\phi^3\xi^3+6\phi^3)\ln(1-\xi)\gamma}{\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-12\phi^3\xi+12\phi\xi^3+6\phi^2\xi^3-6\phi^3\xi^2)C\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(-12\phi^3+12\phi^3\xi^2)\ln(1-\xi)C\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(9\phi^3\xi^2-6\phi\xi^3+6\phi^3\xi-9\phi^2\xi^3)m_K^2\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-6\phi\xi^3-6\xi^3)\ln(1-\phi)m_K^2\gamma}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(-6\phi^3\xi+6\phi\xi^3+9\phi^2\xi^3-9\phi^3\xi^2)\ln(\Xi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(-3\xi^3-3\phi\xi^3)(\ln(1-\phi))^2m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-6\phi^3\xi^3+6\phi^3\xi+6\phi^3\xi^2-6\phi^3)\ln(1-\xi)\ln(\Xi)}{\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} - \frac{1}{192} \frac{(-12\phi^3\xi^2+12\phi^3)\ln(1-\xi)\ln(\Xi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-12\phi^2\xi^3+12\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(1-\xi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(3\phi^3+3\phi^3\xi)(\ln(1-\xi))^2m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} - \frac{(12\phi^3-12\phi^2\xi^3-12\phi^3\xi^2+12\xi^3)\ln(\frac{\phi}{\phi-\xi})\ln(-\frac{\xi}{\phi-\xi})C}{192\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{C(12\phi^3-12\phi^2\xi^3-12\phi^3\xi^2+12\xi^3)\ln(1-\xi)\ln(-\frac{\xi}{\phi-\xi})}{192\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} - \frac{(6\phi^3-6\xi^3-6\phi\xi^3-6\phi^3\xi)\ln(\frac{\phi}{\phi-\xi})\ln(-\frac{\xi}{\phi-\xi})m_K^2}{192\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-6\phi^3-6\xi^3-6\phi\xi^3-6\phi^3\xi)\ln(1-\xi)\ln(-\frac{\xi}{\phi-\xi})m_K^2}{192\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(-6\phi^3\xi+6\phi\xi^3+3\phi^3\xi^2-3\phi^2\xi^3)\ln(\Xi)}{\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(12\phi^3\xi-12\phi\xi^3+6\phi^3\xi^2-6\phi^2\xi^3)\ln(\Xi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(6\xi^3+6\phi^3\xi^3-6\phi\xi^3-6\phi^2\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(\Xi)}{\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(6\xi^3+6\phi\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(\Xi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-6\phi\xi^3-6\phi^3\xi-9\phi^3+48\phi^3\xi^3+6\phi\xi^2+3\phi^2\xi-39\phi^3\xi^2-9\phi^2\xi^3+6\xi^2\phi^2)\ln(1-\xi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-6\phi^3\xi-6\phi^3)\ln(1-\xi)\ln(\Xi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(-18\xi^3-66\phi^2\xi^3-12\phi^3\xi+12\phi^2\xi+6\phi\xi^2+96\phi^3\xi^3-6\phi^3\xi^2+6\phi\xi^3)\ln(1-\phi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-3\phi^3\xi^3+3\phi^2\xi^3-3\xi^3+3\phi\xi^3)(\ln(1-\phi))^2}{\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} - \frac{1}{192} \frac{(-3\phi^3\xi^2-3\phi^3\xi+3\phi^3\xi^3+3\phi^3)(\ln(1-\xi))^2}{\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(3\phi^2\xi^3+18\phi^3\xi^3-6\phi\xi^3-9\phi^3-21\phi^3\xi^2+12\phi^3\xi-6\xi^2\phi^2+3\phi^2\xi+6\phi\xi^2)\ln(1-\xi)}{\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(30\phi^3\xi-30\phi\xi^3-12\phi^2\xi^3+12\phi^3\xi^2+2\pi^2\xi^3\phi^2+2\pi^2\xi^2\phi^3-2\pi^2\xi^3-2\pi^2\phi^3)C}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-6\phi^3+6\phi^3\xi^2)(\ln(1-\xi))^2C}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(-12\phi\xi^2-6\phi^3\xi-6\phi^2\xi+66\phi^3\xi^2+6\phi^2\xi^3-96\phi^3\xi^3+18\phi^3+12\phi\xi^3)\ln(1-\xi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-6\phi^3\xi^3-6\xi^3+6\phi\xi^3+6\phi^2\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(1-\xi)}{\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-6\phi^2\xi^3+6\xi^3)(\ln(1-\phi))^2C}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{192} \frac{(15\phi\xi^3-15\phi^3\xi-21\phi^3\xi^2+21\phi^2\xi^3+\pi^2\xi\phi^3+\pi^2\phi^3+\pi^2\xi^3+\pi^2\xi^3\phi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(6\phi\xi^3+9\xi^3+6\phi^3\xi-48\phi^3\xi^3-3\phi\xi^2-6\phi^2\xi+9\phi^3\xi^2+39\phi^2\xi^3-6\xi^2\phi^2)\ln(1-\phi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-6\phi\xi^3-6\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(1-\xi)m_K^2}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& -\frac{1}{192} \frac{(-12\xi^3+12\phi^2\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(\Xi)C}{\pi^2(\phi-\xi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} - \frac{(6\phi^3\xi^2+6\phi\xi^3-12\phi^3\xi^3+6\phi^2\xi^3-6\xi^3+6\phi^3\xi-6\phi^3)\ln(\frac{\phi}{\phi-\xi})\ln(-\frac{\xi}{\phi-\xi})}{192\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2} \\
& -\frac{(6\phi^3\xi^2+6\phi\xi^3-12\phi^3\xi^3+6\phi^2\xi^3-6\xi^3+6\phi^3\xi-6\phi^3)\ln(1-\xi)\ln(-\frac{\xi}{\phi-\xi})}{192\phi^3(\phi-\xi)\xi^3\pi^2}.
\end{aligned}$$

(4.60)

Abbiamo così calcolato l'ampiezza di ciascun diagramma e possiamo perciò determinare la struttura finale di ciascun fattore di forma per questo canale di decadimento. Prima di farlo però, introduciamo la nuova variabile X legata alle due variabili ϕ e ξ , che non sono tra

loro indipendenti, dalle relazioni

$$\begin{cases} \phi = 1 - \frac{X}{r_\mu} \\ \xi = \frac{r_\mu X - 1}{r_\mu X} \end{cases} \quad (4.61)$$

dove r_μ è sempre dato dal rapporto tra la massa del muone e la massa del kaone, per semplificare in maniera evidente l'espressione delle funzioni $G(X)$ e $H(X)$. Espresse in funzione di questa nuova variabile, esse assumono la forma

$$\begin{aligned} H(X) &:= \frac{3}{8} \frac{\alpha}{\pi \epsilon} + \frac{7}{16} \frac{\alpha}{\pi} - \frac{1}{4} \frac{(4X^2 r_\mu - 3r_\mu^2 X - 4X + 4r_\mu) \alpha \ln(r_\mu)}{(r_\mu X - 1)(-r_\mu + X)\pi} \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\alpha (X^2 r_\mu + r_\mu - 2X)(4X^2 r_\mu - 3r_\mu^2 X - 4X + 4r_\mu) \ln(X)}{\pi (-r_\mu + X)(X-1)(X+1)(r_\mu X - 1)r_\mu} - \frac{3}{16} \frac{\alpha \gamma}{\pi} + \frac{3}{16} \frac{\alpha \ln(\Theta)}{\pi} + \frac{3}{16} \frac{\alpha \ln(4\pi)}{\pi} \end{aligned} \quad (4.62)$$

e

$$\begin{aligned} G(X) &:= \frac{1}{8} \frac{\alpha (7X^2 + 8 \ln(X) - 7 + 8 \ln(X) X^2)}{\epsilon \pi (X-1)(X+1)} + \frac{\alpha (1+X^2) \operatorname{dilog} \frac{-r_\mu + X}{r_\mu (X-1)(X+1)} - \operatorname{dilog} \frac{(-r_\mu + X)X}{(X-1)(X+1)}}{2(X-1)(X+1)\pi} + \frac{15}{16} \frac{\alpha}{\pi} + \\ &\frac{7}{16} \frac{\alpha \ln(\Theta)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\alpha (1+X^2) \ln(X) \gamma}{(X-1)(X+1)\pi} - \frac{1}{4} \frac{(2r_\mu X^2 - 2X - 3r_\mu^2 X + 2r_\mu) \alpha \ln(r_\mu)}{(r_\mu X - 1)(-r_\mu + X)\pi} + \frac{1}{2} \frac{\alpha (1+X^2) \ln(X) \ln(\Theta)}{(X-1)(X+1)\pi} \\ &+ \frac{1}{4} \frac{\alpha (2r_\mu - 3r_\mu^2 X^3 - 2X^3 - 3r_\mu^2 X + 2r_\mu X^4 - 2X + 6r_\mu X^2) \ln(X)}{\pi (-r_\mu + X)(X-1)(X+1)(r_\mu X - 1)} - \frac{\alpha (1+X^2) \ln \frac{(-r_\mu + X)X}{(X-1)(X+1)} \ln(r_\mu)}{2(X-1)(X+1)\pi} + \frac{1}{4} \frac{\alpha (1+X^2) (\ln(r_\mu))^2}{(X-1)(X+1)\pi} + \\ &\frac{\alpha (1+X^2) \ln \frac{(-r_\mu + X)X}{(X-1)(X+1)} \ln(X)}{2(X-1)(X+1)\pi} - \frac{1}{2} \frac{\alpha (1+X^2) \ln(X) \ln(r_\mu)}{(X-1)(X+1)\pi} \\ &- \frac{1}{4} \frac{\alpha (1+X^2) (\ln(X))^2}{(X-1)(X+1)\pi} - \frac{7}{16} \frac{\alpha \gamma}{\pi} + \frac{7}{16} \frac{\alpha \ln(4\pi)}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\alpha (1+X^2) \ln(X) \ln(4\pi)}{(X-1)(X+1)\pi} \end{aligned} \quad (4.63)$$

che è notevolmente semplificata.

A questo punto abbiamo tutto ciò che occorre per determinare i fattori di forma che poi confronteremo con quelli presenti nel lavoro di Cirigliano *et al.* [37]. Consideriamo ciascun diagramma ed espandiamo ciascuna ampiezza nel parametro ϵ in maniera tale da mantenere solo i termini che non si annulleranno in 4 dimensioni. Abbiamo già detto che la self-energy del K^+ , eq. (4.21) non da contributo di alcun tipo ai fattori di forma. Per quanto riguarda gli altri diagrammi, è facile verificare che espandendo nel parametro ϵ , per la self-energy del muone si ha

$$A_{S.E.\mu} = \frac{iG_F \bar{V}_{us}}{2} l^\rho (p_k + p_\pi)_\rho \left\{ \frac{1}{2} \left[-\frac{3\alpha}{2\pi\epsilon} + \frac{1}{4} \frac{\alpha (6 \ln(r) - 6 \ln(2) - 3 \ln(\pi) - 4 - 3 \ln(\Theta) + 3 \gamma)}{\pi} \right] \right\}, \quad (4.64)$$

per lo scambio di fotone virtuale tra il muone e il vertice si ha

$$A_{V,\mu} = \frac{iG_F \bar{V}_{us}}{2} l^\rho (p_k - p_\pi)_\rho \left\{ -4\pi\alpha \left(\frac{3}{8\pi^2\varepsilon} + \frac{1}{4\pi^2} + \frac{3}{16} \frac{-\gamma + \ln(\Theta) - 2\ln(r) + \ln(4\pi)}{\pi^2} \right) \right\} \quad (4.65)$$

mentre per lo scambio di fotone virtuale tra il kaone e il muone abbiamo lo stesso contributo per il fattore di forma positivo e per quello negativo ed è dato da

$$A_{V,K} = \frac{iG_F \bar{V}_{us}}{2} l^\rho (p_k + p_\pi)_\rho \left\{ -\frac{1}{2} \left[4\pi\alpha \left(\frac{3}{16\pi^2\varepsilon} + \frac{7}{32\pi^2} + \frac{3}{32} \frac{-\gamma + \ln(\Theta) + \ln(4\pi)}{\pi^2} \right) \right] \right\} + \frac{iG_F \bar{V}_{us}}{2} l^\rho (p_k - p_\pi)_\rho \left\{ -\frac{1}{2} \left[4\pi\alpha \left(\frac{3}{16\pi^2\varepsilon} + \frac{7}{32\pi^2} + \frac{3}{32} \frac{-\gamma + \ln(\Theta) + \ln(4\pi)}{\pi^2} \right) \right] \right\}. \quad (4.66)$$

Considerando questi risultati per le ampiezze dei diagrammi con i loop, e considerando le espressioni per le ampiezze dei diagrammi con i controtermini riportati in precedenza, possiamo scrivere i risultati per i due fattori di forma. Abbiamo infatti

$$f_-(X) = -\frac{\alpha \ln(r) r X^2}{(rX-1)(-r+X)\pi} + \frac{3}{4} \frac{\alpha \ln(r) r^2 X}{(rX-1)(-r+X)\pi} + \frac{\alpha \ln(r) X}{(rX-1)(-r+X)\pi} - \frac{\alpha \ln(r) r}{(rX-1)(-r+X)\pi} - \frac{3\alpha \ln(X) X^3}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} + \frac{7}{2} \frac{\alpha r \ln(X) X^2}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} - \frac{3}{4} \frac{\alpha r^2 \ln(X) X}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} + \frac{\alpha r \ln(X) X^4}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} - \frac{3}{4} \frac{\alpha r^2 \ln(X) X^3}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} - \frac{3\alpha \ln(X) X}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} + \frac{\alpha r \ln(X)}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} + \frac{2\alpha \ln(X) X^2}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)r} - \frac{\alpha}{4\pi} + \frac{3}{2} \frac{\alpha \ln(r)}{\pi} - \frac{3}{4} \frac{\alpha \ln(\Theta)}{\pi} + 16\pi\alpha K_3 - 8\pi\alpha K_4 - \frac{8}{3}\pi\alpha K_5 - \frac{8}{3}\pi\alpha K_6 + 8\pi\alpha X_1 - 8\pi\alpha X_2 + 8\pi\alpha X_3 \quad (4.67)$$

e

$$f_+(X) = 1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(r) r X^2}{(rX-1)(-r+X)\pi} + \frac{3}{4} \frac{\alpha \ln(r) r^2 X}{(rX-1)(-r+X)\pi} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(r) X}{(rX-1)(-r+X)\pi} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(r) r}{(rX-1)(-r+X)\pi} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(\pi)}{\pi} + \frac{\alpha\gamma}{2\pi} + 8\pi\alpha K_{12} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) X^3}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} + \frac{3}{2} \frac{\alpha r \ln(X) X^2}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} - \frac{3}{4} \frac{\alpha r^2 \ln(X) X}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha r \ln(X) X^4}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} - \frac{3}{4} \frac{\alpha r^2 \ln(X) X^3}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) X}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha r \ln(X)}{\pi(-r+X)(-1+X)(1+X)(rX-1)} + \frac{\alpha \ln(X) X^2}{\varepsilon\pi(-1+X)(1+X)} + \frac{7\alpha X^2}{8\varepsilon\pi(-1+X)(1+X)} + \frac{\alpha \ln(X)}{\varepsilon\pi(-1+X)(1+X)} - \frac{7\alpha}{8\varepsilon\pi(-1+X)(1+X)} - \frac{3\alpha}{8\pi} + \frac{3}{4} \frac{\alpha \ln(r)}{\pi} - \frac{1}{8} \frac{\alpha \ln(\Theta)}{\pi} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \operatorname{dilog}\left(-\frac{1}{(-1+X)(1+X)} + \frac{X}{r(-1+X)(1+X)}\right)}{\pi(-1+X)(1+X)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln\left(\frac{(-r+X)X}{(-1+X)(1+X)}\right) \ln(X)}{\pi(-1+X)(1+X)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln\left(\frac{(-r+X)X}{(-1+X)(1+X)}\right) \ln(X) X^2}{\pi(-1+X)(1+X)} + \frac{1}{4} \frac{\alpha \ln(r)^2}{\pi(-1+X)(1+X)} + \frac{1}{4} \frac{\alpha \ln(r)^2 X^2}{\pi(-1+X)(1+X)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \gamma}{\pi(-1+X)(1+X)} - \frac{32}{3} \pi\alpha X_1 - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln\left(\frac{(-r+X)X}{(-1+X)(1+X)}\right) \ln(r) X^2}{\pi(-1+X)(1+X)} - \frac{1}{4} \frac{\alpha \ln(X)^2}{\pi(-1+X)(1+X)} - \frac{1}{4} \frac{\alpha \ln(X)^2 X^2}{\pi(-1+X)(1+X)}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \ln(\Theta)}{\pi(-1+X)(1+X)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \gamma X^2}{\pi(-1+X)(1+X)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \ln(\pi)}{\pi(-1+X)(1+X)} \\
& + \frac{\alpha \ln(X) X^2 \ln(2)}{\pi(-1+X)(1+X)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) X^2 \ln(\pi)}{\pi(-1+X)(1+X)} + \frac{\alpha \ln(X) \ln(2)}{\pi(-1+X)(1+X)} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \ln(\Theta) X^2}{\pi(-1+X)(1+X)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \ln(r)}{\pi(-1+X)(1+X)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \ln(r) X^2}{\pi(-1+X)(1+X)} - 2 \pi \alpha X_6 \\
& - \frac{15 \alpha}{8 \pi \varepsilon} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln\left(\frac{(-r+X)X}{(-1+X)(1+X)}\right) \ln(r)}{\pi(-1+X)(1+X)} - \frac{\alpha \ln(2)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \operatorname{dilog}\left(-\frac{Xr}{(-1+X)(1+X)} + \frac{X^2}{(-1+X)(1+X)}\right)}{\pi(-1+X)(1+X)} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\alpha X^2 \operatorname{dilog}\left(-\frac{1}{(-1+X)(1+X)} + \frac{X}{r(-1+X)(1+X)}\right)}{\pi(-1+X)(1+X)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha X^2 \operatorname{dilog}\left(-\frac{Xr}{(-1+X)(1+X)} + \frac{X^2}{(-1+X)(1+X)}\right)}{\pi(-1+X)(1+X)}
\end{aligned} \tag{4.68}$$

dove abbiamo già assorbito le divergenze infrarosse nella parte divergente dei controtermini secondo la (3.51) e la (3.52). Confrontando queste espressioni con i fattori di forma in [37] e usando le proprietà dei dilogaritmi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\pi^2}{6} - \ln(z) \ln(1-z) = \operatorname{Li}_2(z) + \operatorname{Li}_2(1-z) \\ \ln(1-x) \ln(1-y) = \operatorname{Li}_2\left(\frac{x}{1-y}\right) + \operatorname{Li}_2\left(\frac{y}{1-x}\right) - \operatorname{Li}_2(x) - \operatorname{Li}_2(y) - \operatorname{Li}_2\left(\frac{xy}{(1-x)(1-y)}\right) \end{array} \right. \tag{4.69}$$

si può facilmente verificare che esse coincidono nel momento in cui effettuiamo la trasformazione di cui parlavamo in (4.3). Abbiamo così conseguito un risultato importante utilizzando la sola tecnica della regolarizzazione dimensionale ottenendo un perfetto accordo con i risultati noti in letteratura.

A questo punto possiamo calcolare la rate di decadimento di questo processo. Sappiamo che essa, nella sua espressione generale assume la forma

$$d\Gamma = \frac{m_\mu m_\nu}{m_k} (2\pi)^n |\mathcal{M}|^2 d\Phi_m(p_k; p_\pi, p_\mu, p_\nu, q) \tag{4.70}$$

dove $d\Phi_m(p_k; p_\pi, p_\mu, p_\nu, q)$ è l'elemento dello spazio delle fasi che in generale, per un decadimento di una particella in m particelle assume la forma

$$d\Phi_m(P; p_1, \dots, p_m) = \delta^4\left(P - \sum_{i=1}^m p_i\right) \prod_{j=1}^m \frac{d^m p_j}{(2\pi)^{n-1} 2E_j}. \tag{4.71}$$

In quest'ultima formula le E_i e i p_i sono rispettivamente le energie e i quadrimpulsi delle particelle prodotto del decadimento, mentre la conservazione dell'energia e più in generale del quadrimpulso è riassunta nella delta di Dirac $\delta^4(P - \sum_{i=1}^m p_i)$. Nel caso in esame la rate di decadimento, in accordo alla (4.70) e all'espressione del modulo quadro del decadimento dato dalla (4.2) è

$$\begin{aligned}
d\Gamma = & \frac{(2\pi)^n m_\mu m_\nu G_F^2 |V_{us}|^2}{2m_k} \left| f_+(t) \bar{u}(\not{p}_k + \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v \right. \\
& \left. + f_-(t) \bar{u}(\not{p}_k - \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v \right|^2 d\Phi_3(p_k; p_\pi, p_\mu, p_\nu).
\end{aligned} \tag{4.72}$$

Per semplificare il calcolo della rate utilizziamo la tecnica matematica della separazione dello spazio delle fasi descritto dalla formula

$$d\Phi_3(p_k; p_\pi, p_\mu, p_\nu) = d\Phi_2(l; p_\pi, p_\nu) d\Phi_2(p_k; l, p_\mu) (2\pi)^{n-1} dl^2 \quad (4.73)$$

dove si è proceduto a separare un unico decadimento a tre corpi in due decadimenti a due corpi. La semplificazione consiste nel poter sfruttare delle formule generali che discendono solo da considerazioni di covarianza di Lorentz e che permettono di calcolare in maniera immediata e diretta l'integrale sul primo spazio delle fasi introdotto $d\Phi_2(l; p_\pi, p_\nu)$. Queste formule sono le seguenti

$$\left\{ \begin{array}{l} \int \frac{(2\pi)^n d^{n-1} p_1 d^{n-1} p_3 \delta^{(n)}(l-p_1-p_3)}{4(2\pi)^{n-1}(2\pi)^{n-1} E_1 E_3} = \frac{(l^2-m_1^2)^{n-3}}{2^{2n-4} \pi^{\frac{n-3}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2}) (l^2)^{\frac{n-2}{2}}} := G(l^2, n) \\ \int p_{1\mu} \frac{(2\pi)^n d^{n-1} p_1 d^{n-1} p_3 \delta^{(n)}(l-p_1-p_3)}{4(2\pi)^{n-1}(2\pi)^{n-1} E_1 E_3} = \frac{(l^2+m_1^2)}{2l^2} G(l^2, n) \mathbf{1}_\mu \\ \int p_{3\mu} \frac{(2\pi)^n d^{n-1} p_1 d^{n-1} p_3 \delta^{(n)}(l-p_1-p_3)}{4(2\pi)^{n-1}(2\pi)^{n-1} E_1 E_3} = \frac{(l^2-m_1^2)}{2l^2} G(l^2, n) \mathbf{1}_\mu \\ \int p_{3\mu} p_{1\nu} \frac{(2\pi)^n d^{n-1} p_1 d^{n-1} p_3 \delta^{(n)}(l-p_1-p_3)}{4(2\pi)^{n-1}(2\pi)^{n-1} E_1 E_3} = \frac{(l^2-m_1^2) \{[(n-2)l^2+nm_1^2]\mathbf{1}_\mu\mathbf{1}_\nu+(l^2-m_1^2)l^2\mathbf{g}_{\mu\nu}\}}{4(n-1)(l^2)^2} G(l^2, n) \\ \int p_{3\mu} p_{1\nu} p_{1\rho} \frac{(2\pi)^n d^{n-1} p_1 d^{n-1} p_3 \delta^{(n)}(l-p_1-p_3)}{4(2\pi)^{n-1}(2\pi)^{n-1} E_1 E_3} = \\ \frac{(l^2-m_1^2) G(l^2, n) \left\{ l^2(l^2+m_1^2)(l^2-m_1^2)\mathbf{g}_{\mu\nu}\mathbf{1}_\rho + l^2(l^2+m_1^2)(l^2-m_1^2)\mathbf{g}_{\mu\rho}\mathbf{1}_\nu - l^2(l^2-m_1^2)^2\mathbf{g}_{\nu\rho}\mathbf{1}_\mu + [(n-2)(l^2+m_1^2)^2+4m_1^4]\mathbf{1}_\mu\mathbf{1}_\nu\mathbf{1}_\rho \right\}}{8(n-1)(l^2)^3} \end{array} \right. \quad (4.74)$$

dove p_1 e m_1 corrispondono rispettivamente al quadrimpulso e alla massa del pione, mentre p_3 corrisponde al quadrimpulso del neutrino. Le formule (4.74) sono del tutto generali e valgono in un qualunque numero n di dimensioni. Prima di sfruttare tali formule elaboriamo il modulo quadro del decadimento. Possiamo quindi scrivere

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^n G_F^2 |V_{us}|^2}{4 m_k} \left\{ f_+^2 \mathbf{Tr} \left[\not{p}_\mu \not{p} \not{p}_\nu \not{p} \right] + 2f_+ f_- \mathbf{Tr} \left[\not{p}_\mu \not{Q} \not{p}_\nu \not{p} \right] + f_- \mathbf{Tr} \left[\not{p}_\mu \not{Q} \not{p}_\nu \not{Q} \right] \right\} \\ (2\pi)^{n-1} dl^2 d\Phi_2(l; p_\pi, p_\nu) d\Phi_2(p_k; , p_\mu, l) \quad (4.75)$$

dove

$$\left\{ \begin{array}{l} \not{Q} = (\not{p}_k - \not{p}_\pi) \\ \not{p} = (\not{p}_k + \not{p}_\pi). \end{array} \right. \quad (4.76)$$

Per giungere alla (4.75) si è fatto uso degli operatori di proiezione delle funzioni d'onda spinoriali definite da

$$\Lambda^\pm(p) = \frac{\pm\not{p} + m}{2m} \quad (4.77)$$

che possono essere scritte anche come

$$\Lambda_{\alpha\beta}^+(p) = \sum_{r=1}^2 u_{r\alpha}(p) \bar{u}_{r\beta}(p), \quad \Lambda_{\alpha\beta}^-(p) = - \sum_{r=1}^2 v_{r\alpha}(p) \bar{v}_{r\beta}(p) \quad (4.78)$$

e che generano le tracce delle matrici di Dirac. Per semplificare quest'ultime, invece, si è fatto uso delle seguenti proprietà delle stesse

1. la traccia di un numero dispari di matrici di Dirac è sempre nulla
2. per un numero pari di matrici si ha

$$\text{Tr} (\gamma^\alpha \gamma^\beta) = 4g^{\alpha\beta} \quad (4.79)$$

e

$$\text{Tr} (\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\gamma \gamma^\delta) = 4 (g^{\alpha\beta} g^{\gamma\delta} - g^{\alpha\gamma} g^{\beta\delta} + g^{\alpha\delta} g^{\beta\gamma}) \quad (4.80)$$

Possiamo ulteriormente elaborare la struttura delle tracce partendo dalle definizioni in (4.76) ottenendo così

$$\begin{aligned} d\Gamma = & \frac{G_F^2 |V_{us}|^2}{4 m_k} \left\{ [f_+^2 + 2f_+ f_- + f_-^2] \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_k \not{p}_\nu \not{p}_k] + 2 [f_+^2 - f_-^2] \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_k \not{p}_\nu \not{p}_\pi] \right. \\ & \left. + [f_+^2 - 2f_+ f_- + f_-^2] \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_\pi \not{p}_\nu \not{p}_\pi] \right\} (2\pi)^n dl^2 d\Phi_2(l; p_\pi, p_\nu) (2\pi)^{n-1} d\Phi_2(p_k; , p_\mu, l). \end{aligned} \quad (4.81)$$

Questa forma della rate differenziale ci permette di evidenziare la dipendenza reale dagli n -impulsi p_π e p_ν e di sfruttare quindi le relazioni (4.74) per integrare su di essi. Abbiamo infatti organizzato le tracce in maniera tale da raggrupparle in base alla presenza degli impulsi di queste due particelle neutre. Nella prima traccia infatti è presente solo p_ν , nella seconda invece compare anche la dipendenza da p_π e nella terza c'è la struttura più complessa con il prodotto di due p_π e di un p_ν . Per ciascun termine possiamo quindi utilizzare la formula appropriata tra quelle presenti in (4.74). Così facendo giungiamo all'espressione

$$\begin{aligned} d\Gamma = & \frac{G_F^2 |V_{us}|^2 (l^2 - m_\pi^2) G(n, l^2)}{8 m_k l^2} \left\{ [f_+^2 + 2f_+ f_- + f_-^2] \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_k \not{l} \not{p}_k] + 2 [f_+^2 - f_-^2] l^2 \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_k] \right. \\ & \left. + [f_+^2 - 2f_+ f_- + f_-^2] l^2 \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{l}] \right\} (2\pi)^{n-1} d\Phi_2(p_k; , p_\mu, l) dl^2 \end{aligned} \quad (4.82)$$

dove compare la dipendenza dell' n -vettore l . Scegliamo ora il sistema di riferimento a riposo per la particella che decade e definiamo gli n -vettori nella seguente maniera:

$$\begin{cases} p_k = (m_k, 0, \dots, 0) & p_\mu = (E_\mu, |\vec{p}_\mu|, 0, \dots, 0) \\ l = (E_l, -|\vec{p}_\mu|, 0, \dots, 0) \end{cases} \quad (4.83)$$

dove la parte spaziale del vettore l è opposta alla parte spaziale del vettore p_μ grazie alla presenza della delta di Dirac che ci permette di fissare le parti spaziali di tali vettori attraverso la relazione $\vec{l} = -\vec{p}_\mu$ e di integrare sulle variabili $d^{n-1}l$. Abbiamo infatti

$$d\Phi_2(p_k; p_\mu, l) = \frac{d^{n-1}p_\mu d^{n-1}l}{4(2\pi)^{2n-2} E_\mu E_l} \delta^{n-1}(\vec{p}_k - \vec{p}_\mu - \vec{l}) \delta(m_k - E_\mu - E_l) \quad (4.84)$$

che per quanto detto diventa

$$d\Phi_2(p_k; p_\mu, l) = \frac{d^{n-1}p_\mu}{4(2\pi)^{2n-2} E_\mu E_l} \delta(m_k - E_\mu - E_l). \quad (4.85)$$

La delta rimanente, che rappresenta la conservazione dell'energia, può essere utilizzata per fissare una delle due energie E_μ o E_l . La restante è determinata da considerazioni di carattere cinematico. Infatti, dalle relazioni (4.83), grazie alle leggi relativistiche, si ottengono facilmente le seguenti equazioni

$$\begin{cases} m_k = E_\mu + E_l \\ m_\mu^2 = E_\mu^2 - |\vec{p}|^2 \\ l^2 = E_l^2 - |\vec{p}|^2 \end{cases} \quad (4.86)$$

da cui, scegliendo ad esempio E_μ come parametro indipendente, segue immediatamente la relazione

$$E_l = \sqrt{l^2 - m_\mu^2 + E_\mu^2}. \quad (4.87)$$

Inserendo tale equazione nella delta di Dirac, otteniamo un vincolo per l'energia E_μ dal quale ricaviamo la relazione

$$m_k - E_\mu - \sqrt{l^2 - m_\mu^2 + E_\mu^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad E_\mu^* = \frac{m_k^2 + m_\mu - l^2}{2m_k}. \quad (4.88)$$

Per le proprietà della delta di Dirac possiamo quindi scrivere

$$\delta(m_k - E_\mu - E_l) = \frac{E_l}{m_k} \delta(E_\mu - E_\mu^*) \quad (4.89)$$

da cui segue che la nostra rate di decadimento, sostituendo $n = 4$ in quanto non ci sono altre divergenze oltre quelle presenti nelle funzioni $f_+(t)$ e $f_-(t)$, assume la forma

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 |V_{us}|^2 (l^2 - m_\pi^2) G(4, l^2) \Omega_3}{32 (2\pi)^3 l^2} \left[\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} \delta(E_\mu - E_\mu^*) |\overline{\mathcal{M}}|^2 dE_\mu \right] dr_u \quad (4.90)$$

dove

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = & \left\{ [f_+^2 + 2f_+f_- + f_-^2] \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_k \not{l} \not{p}_k] + 2 [f_+^2 - f_-^2] l^2 \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_k] \right. \\ & \left. + [f_+^2 - 2f_+f_- + f_-^2] l^2 \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{l}] \right\}, \end{aligned} \quad (4.91)$$

Ω_3 è l'angolo solido tridimensionale e la variabile r_U è legata alla variabile l^2 dalla relazione $l^2 = m_k^2 r_U$. Occorre quindi elaborare il coefficiente ciascuna traccia partendo dalle espressioni per i fattori su riportati. Dobbiamo fare attenzione a mantenere solo i termini di ordine α e a separare le parti divergenti da quelle finite. Allo stesso tempo dobbiamo calcolare le tracce presenti sulla base delle definizioni (4.83) e successivamente calcolare l'integrale sull'energia del muone sfruttando la presenza della delta di Dirac. Così facendo otteniamo come risultato per la parte divergente della rate differenziale

$$D_V^+(r_U) := \frac{(r_U - r_\pi)^2 m_k^5 |V_{us}|^2 G_F^2 \alpha (4 r_U^2 - r_\mu - 4 r_U + r_\mu^2 - 3 r_\mu r_U)}{128} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{1}{4}(1+r_\mu-r_U)^2 - r_\mu}}{\pi^4 r_U^2 \varepsilon} - \frac{(-1 - r_\mu + r_U) \ln \left(\frac{1}{2} \frac{1+r_\mu-r_U-2\sqrt{\frac{1}{4}(1+r_\mu-r_U)^2 - r_\mu}}{\sqrt{r_\mu}} \right)}{2\pi^4 r_U^2 \varepsilon} \right\} \quad (4.92)$$

mentre per la parte finita otteniamo

$$F_V^+(r_U) := \frac{m_k^5 G_F^2 V_{us}^2}{512} \left(- \frac{\alpha \text{Logaritmo1} \ln(r_U) (-1-r_\mu+r_U) (-r_\mu-4r_U+r_\mu^2-3r_\mu r_U+4r_U^2) (r_U-r_\pi)^2}{\pi^4 r_U^2} \right. \\ - \frac{\alpha \text{DILOG2} (-r_U+r_\pi)^2 (1+r_\mu-r_U) (-r_\mu-4r_U+r_\mu^2-3r_\mu r_U+4r_U^2)}{\pi^4 r_U^2} \\ + \frac{\alpha \ln(r_U) \sqrt{(1-2r_\mu-2r_U+r_\mu^2-2r_\mu r_U+r_U^2)} (-r_\mu-4r_U+r_\mu^2-3r_\mu r_U+4r_U^2) (r_U-r_\pi)^2}{\pi^4 r_U^2} \\ - \frac{(r_U-r_\pi)^2 \sqrt{(1-2r_\mu-2r_U+r_\mu^2-2r_\mu r_U+r_U^2)} (-r_\mu-4r_U+r_\mu^2-3r_\mu r_U+4r_U^2)}{\pi^3 r_U^2} \\ + \frac{\alpha \text{DILOG3} (-1-r_\mu+r_U) (-r_\mu-4r_U+r_\mu^2-3r_\mu r_U+4r_U^2) (r_U-r_\pi)^2}{\pi^4 r_U^2} \\ - \frac{\alpha \ln((1-2r_\mu-2r_U+r_\mu^2-2r_\mu r_U+r_U^2)) \sqrt{(1-2r_\mu-2r_U+r_\mu^2-2r_\mu r_U+r_U^2)} (r_U-r_\pi)^2 (-r_\mu-4r_U+r_\mu^2-3r_\mu r_U+4r_U^2)}{\pi^4 r_U^2} \\ + \frac{\alpha \text{Logaritmo1} \ln((1-2r_\mu-2r_U+r_\mu^2-2r_\mu r_U+r_U^2)) (-1-r_\mu+r_U) (-r_\mu-4r_U+r_\mu^2-3r_\mu r_U+4r_U^2) (r_U-r_\pi)^2}{\pi^4 r_U^2} \\ + \frac{\alpha \text{DILOG1} (r_U-r_\pi)^2 (-1-r_\mu+r_U) (-r_\mu-4r_U+r_\mu^2-3r_\mu r_U+4r_U^2)}{\pi^4 r_U^2} \\ - \frac{\alpha \text{Logaritmo1} (r_U-r_\pi)^2 (20 r_U^3 - 39 r_U^2 r_\mu - 40 r_U r_\mu^2 + 26 r_U r_\mu^2 + 22 r_\mu r_U + 20 r_U + 6 r_\mu^2 + r_\mu - 7 r_\mu^3)}{(\pi^4 r_U^2)} \\ - \frac{3 \alpha \text{Logaritmo1} \ln(\pi) (-1-r_\mu+r_U) (-r_\mu-4r_U+r_\mu^2-3r_\mu r_U+4r_U^2) (r_U-r_\pi)^2}{\pi^4 r_U^2} \\ - \frac{2 \alpha \ln(r_U-r_\pi) \sqrt{(1-2r_\mu-2r_U+r_\mu^2-2r_\mu r_U+r_U^2)} (-r_\mu-4r_U+r_\mu^2-3r_\mu r_U+4r_U^2) (-r_U+r_\pi)^2}{\pi^4 r_U^2} \\ - \frac{\frac{1}{4} \alpha \ln(r_\mu) (r_\mu-4r_U) (3r_\mu+1-r_U) \sqrt{(1-2r_\mu-2r_U+r_\mu^2-2r_\mu r_U+r_U^2)} (-r_U+r_\pi)^2}{\pi^4 r_U^2} \\ - \frac{\frac{1}{2} \alpha \text{Logaritmo1}^2 (-1-r_\mu+r_U) (-r_\mu-4r_U+r_\mu^2-3r_\mu r_U+4r_U^2) (r_U-r_\pi)^2}{\pi^4 r_U^2} \\ + \frac{\frac{1}{4} \alpha (r_U-r_\pi)^2 (76 r_U^2 - 63 r_\mu r_U - 76 r_U + 21 r_\mu^2 - 21 r_\mu) \sqrt{(1-2r_\mu-2r_U+r_\mu^2-2r_\mu r_U+r_U^2)}}{\pi^4 r_U^2} \\ - \frac{2 \alpha \text{Logaritmo1} \ln(r_U-r_\pi) (r_U-r_\pi)^2 (1+r_\mu-r_U) (-r_\mu-4r_U+r_\mu^2-3r_\mu r_U+4r_U^2)}{\pi^4 r_U^2} \\ + \frac{8 \alpha f_-^{EM-loc} \sqrt{(1-2r_\mu-2r_U+r_\mu^2-2r_\mu r_U+r_U^2)} r_\mu (r_U-r_\pi)^2 (3r_U-r_\mu+1)}{\pi^2 r_U^2} \\ - \frac{\frac{1}{8} \alpha \ln(r_\mu)^2 (r_U-r_\pi)^2 (1+r_\mu-r_U) (-r_\mu-4r_U+r_\mu^2-3r_\mu r_U+4r_U^2)}{\pi^4 r_U^2} \left. \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{3\alpha \ln(\pi) \sqrt{(1-2r_\mu-2r_{ll}+r_\mu^2-2r_\mu r_{ll}+r_{ll}^2)} (-r_\mu-4r_{ll}+r_\mu^2-3r_\mu r_{ll}+4r_{ll}^2) (r_{ll}-r_\pi)^2}{\pi^4 r_{ll}^2} \\
& + \frac{\frac{1}{6} \alpha (r_{ll}-r_\pi)^2 (1+r_\mu-r_{ll}) (-r_\mu-4r_{ll}+r_\mu^2-3r_\mu r_{ll}+4r_{ll}^2)}{\pi^2 r_{ll}^2} \\
& + \frac{\frac{1}{2} \alpha \text{Logaritmo1} \ln(r_\mu) (-1-r_\mu+r_{ll}) (-r_\mu-4r_{ll}+r_\mu^2-3r_\mu r_{ll}+4r_{ll}^2) (r_{ll}-r_\pi)^2}{\pi^4 r_{ll}^2} \\
& - \frac{3\alpha \text{Logaritmo1} (-r_{ll}+r_\pi)^2 (1+r_\mu-r_{ll}) (-r_\mu-4r_{ll}+r_\mu^2-3r_\mu r_{ll}+4r_{ll}^2) \gamma}{\pi^4 r_{ll}^2} \\
& - \frac{3\alpha (r_{ll}-r_\pi)^2 (-r_\mu-4r_{ll}+r_\mu^2-3r_\mu r_{ll}+4r_{ll}^2) \sqrt{(1-2r_\mu-2r_{ll}+r_\mu^2-2r_\mu r_{ll}+r_{ll}^2)} \gamma}{\pi^4 r_{ll}^2} \\
& - \frac{8\alpha f_+^{EM-loc} \sqrt{(1-2r_\mu-2r_{ll}+r_\mu^2-2r_\mu r_{ll}+r_{ll}^2)} (-r_{ll}+r_\pi)^2 (-r_\mu-4r_{ll}+r_\mu^2-3r_\mu r_{ll}+4r_{ll}^2)}{\pi^2 r_{ll}^2} \\
& - \frac{2\alpha \text{Logaritmo1} \text{Logaritmo2} (1+r_\mu-r_{ll}) (-r_\mu-4r_{ll}+r_\mu^2-3r_\mu r_{ll}+4r_{ll}^2) (-r_{ll}+r_\pi)^2}{\pi^4 r_{ll}^2} \\
& - \frac{6\alpha \text{Logaritmo1} \ln(2) (-1-r_\mu+r_{ll}) (-r_\mu-4r_{ll}+r_\mu^2-3r_\mu r_{ll}+4r_{ll}^2) (r_{ll}-r_\pi)^2}{\pi^4 r_{ll}^2} \\
& + \frac{6\alpha \ln(2) \sqrt{(1-2r_\mu-2r_{ll}+r_\mu^2-2r_\mu r_{ll}+r_{ll}^2)} (-r_\mu-4r_{ll}+r_\mu^2-3r_\mu r_{ll}+4r_{ll}^2) (-r_{ll}+r_\pi)^2}{\pi^4 r_{ll}^2}
\end{aligned} \tag{4.93}$$

dove

$$\left\{ \begin{aligned}
\text{Logaritmo1} &= \ln \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} r_\mu - \frac{1}{2} r_{ll} - \sqrt{\frac{1}{4} (1+r_\mu-r_{ll})^2 - r_\mu}}{\sqrt{r_\mu}} \right) \\
\text{Logaritmo2} &= \ln \left(1 - \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} r_\mu - \frac{1}{2} r_{ll} - \sqrt{\frac{1}{4} (1+r_\mu-r_{ll})^2 - r_\mu})^2}{r_\mu} \right) \\
\text{DILOG2} &= \text{dilog} \left(1 - \frac{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} r_\mu - \frac{1}{2} r_{ll} - \sqrt{\frac{1}{4} (1+r_\mu-r_{ll})^2 - r_\mu})^2}{r_\mu} \right) \\
\text{DILOG3} &= \text{dilog} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} r_\mu - \frac{1}{2} r_{ll} - \sqrt{\frac{1}{4} (1+r_\mu-r_{ll})^2 - r_\mu} \right) \\
\text{DILOG1} &= \text{dilog} \left(\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} r_\mu - \frac{1}{2} r_{ll} - \sqrt{\frac{1}{4} (1+r_\mu-r_{ll})^2 - r_\mu}}{r_\mu} \right) \\
f_-^{EM-loc} &= -\frac{1}{48} \frac{-96\pi^2 X_3 - 96\pi^2 X_I + 96\pi^2 K_4 + 9\ln(\Theta) - 192\pi^2 K_3 + 32\pi^2 K_5 + 96\pi^2 X_2 + 32\pi^2 K_6}{\pi^2} \\
f_+^{EM-loc} &= -\frac{1}{96} \frac{256\pi^2 X_I - 9\ln(\Theta) - 192\pi^2 K_{12} + 48\pi^2 X_6}{\pi^2}
\end{aligned} \right. \tag{4.94}$$

4.2 Correzioni virtuali per il decadimento $K^0 \rightarrow \pi^- \ell^+ \nu$

Nel canale neutro del decadimento procediamo esattamente come nel caso del decadimento del K^+ . L'ampiezza del processo all'ordine zero, rappresentato nella Fig.4.9, è data da

$$A_0 = \frac{iG_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v. \quad (4.95)$$

Anche in questo caso quindi, il fattore di forma negativo è nullo al leading order e ha con-

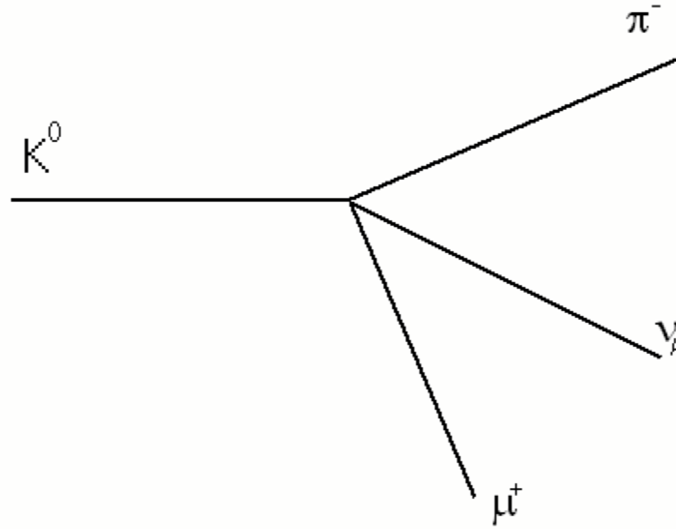


Figura 4.9: *Leading Order del decadimento del K^0*

tributi dai termini di correzione radiativa. Come prima, nelle Fig.4.10, 4.11 e 4.12 riportiamo i vertici rilevanti estratti dalla Lagrangiana chirale. Partendo da essi, è facile verificare che i diagrammi che daranno contributi all'ordine α per i fattori di forma sono quelli riportati nella figura Fig.4.13. Anche nel caso in esame, per la struttura dei diagrammi, i controtermini alle gambe esterne provvedono ad assorbire solo le divergenze ultraviolette presenti nel fattore di forma positivo, mentre le divergenze ultraviolette del fattore di forma negativo sono assorbite solo dalla parte divergente dei controtermini al vertice. I contributi dei primi sono calcolabili direttamente dalle ampiezze riportate nella Fig. 4.12 e si ha quindi

$$A_{CoPi} = \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \left[-\frac{4}{3} (k_1 + k_2) - \frac{10}{9} (k_5 + k_6) \right] \bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v, \quad (4.96)$$

per il pione,

$$A_{CoKa} = \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \left[-\frac{4}{3} (k_1 + k_2) - \frac{4}{9} (k_5 + k_6) \right] \bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v \quad (4.97)$$

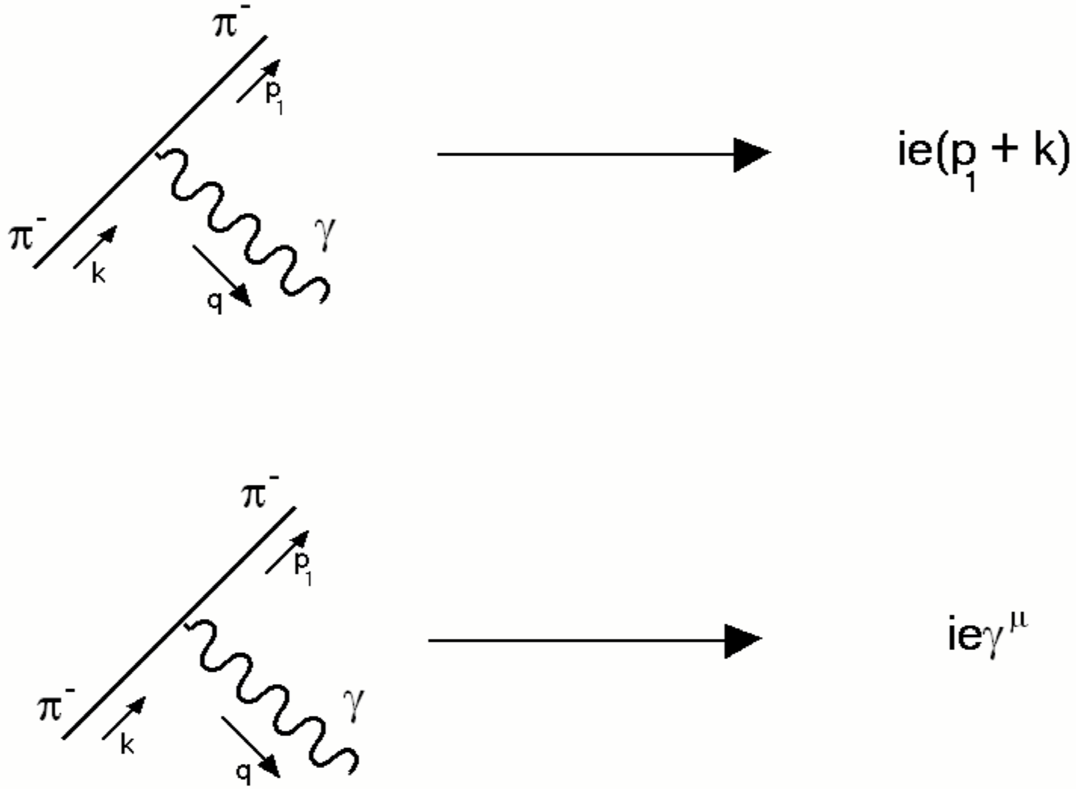


Figura 4.10: Vertici rilevanti con emissione di fotone

per il kaone e infine

$$A_{CoMu} = \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \left[-\frac{1}{2} X_6 \right] \bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v \quad (4.98)$$

per il muone.

I controtermini al vertice invece, generati dalla Lagrangiana di ordine $\mathcal{O}(e^2 p^2)$ (3.46) e dalla Lagrangiana \mathcal{L}_{lept} (3.49), contribuiscono ai fattori di forma attraverso l'ampiezza

$$A_{CoVe} = \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \left[-\frac{8}{3} (k_1 + k_2) - \frac{14}{9} (k_5 + k_6) + \frac{4}{3} X_1 \right] \bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v + \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \left[-\frac{2}{3} (k_5 + k_6) + 2X_1 + 2X_2 - 2X_3 \right] \bar{u} (\not{p}_k - \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v \quad (4.99)$$

L'analisi dei diagrammi con scambio di fotone virtuale è del tutto simile al caso precedente e si procede allo stesso modo. Si parametrizza il denominatore con il metodo di Feynman standard per i diagrammi meno complessi e si utilizza la parametrizzazione descritta in (4.44) per il diagramma con scambio di fotone tra le particelle cariche che emergono dal decadimento. In particolare, l'ampiezza della self-energy del pione è la stessa di (4.8) dove,

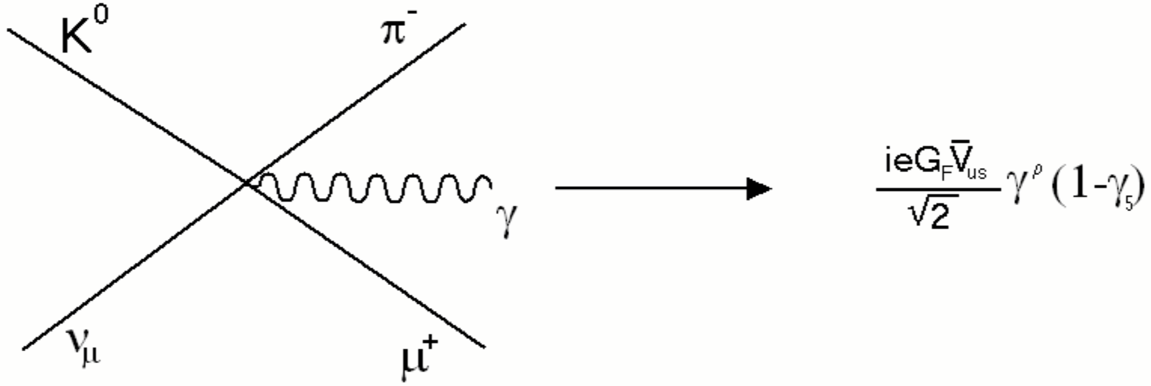


Figura 4.11: *Emissione del fotone dal vertice*

ovviamente, il quadrimpulso e la massa del kaone vanno sostituiti con quelli della particella in questione. Quindi il suo contributo ai fattori di forma è nullo come si evince dalla formula (4.21). Le stesse considerazioni valgono per la self-energy del muone. Si ha quindi

$$S.E._{\mu^+} = e^2 \frac{m_\mu \Gamma(2 - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \left(\frac{\mu^2}{m_\mu^2} \right)^{2 - \frac{n}{2}} \left\{ \frac{2n}{n-2} F\left(2 - \frac{n}{2}, 1, \frac{n}{2}, \xi^2\right) - \frac{4\xi}{n} F\left(2 - \frac{n}{2}, 2, \frac{n}{2} + 1, \xi^2\right) \right\} \quad (4.100)$$

che fornisce come risultato

$$\delta Z_{\mu^+} = e^2 \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{\Theta^{2 - \frac{n}{2}}}{r_\mu^{4-n}} \left[-\frac{n-1}{n-3} \right] \quad (4.101)$$

dove $\xi = \frac{\not{p}_\mu}{m_\mu}$.

Anche per i diagrammi con scambio di fotone virtuale tra le particelle cariche emergenti e il vertice, dove ricordiamo si propaga il bosone di gauge carico, i risultati sono gli stessi di (4.38) e di (4.41) a parte un fattore $(-\sqrt{2})$. Si ha quindi

$$A_{V,\mu} = \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \frac{\Theta^{2 - \frac{n}{2}}}{r_\mu^{4-n}} \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{n-1}{n-3} \left[\bar{u} (\not{p}_k - \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v \right] \quad (4.102)$$

e

$$A_{V,K} = \frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \Theta^{2 - \frac{n}{2}} \frac{\Gamma(2 - \frac{n}{2})}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}} l^\rho \left[\frac{1}{2} (p_k + p_\pi)_\rho + \frac{1}{2} (p_k - p_\pi)_\rho \right] \left[\frac{2}{n-2} F\left(2 - \frac{n}{2}, 1, \frac{n}{2}, \xi\right) + \frac{4}{n(n-2)} F\left(2 - \frac{n}{2}, 2, \frac{n}{2} + 1, \xi\right) \right] \quad (4.103)$$

dove si ha sempre $l^\rho = \bar{u} \gamma^\rho (1 - \gamma_5) v$.

$$\begin{array}{ccc}
\pi^- \text{---} \otimes \text{---} \pi^- & \longrightarrow & -\frac{4}{3} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) - \frac{10}{9} (\mathbf{k}_5 + \mathbf{k}_6) \\
\\
K^0 \text{---} \otimes \text{---} K^0 & \longrightarrow & -\frac{4}{3} (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) - \frac{4}{9} (\mathbf{k}_5 + \mathbf{k}_6) \\
\\
\mu^+ \text{---} \otimes \text{---} \mu^+ & \longrightarrow & -\frac{1}{2} X_6
\end{array}$$

Figura 4.12: Controtermini delle gambe esterne nel decadimento K^0

Diverso è il caso del diagramma con scambio di fotone virtuale tra le particelle cariche emergenti dal decadimento. In esso infatti, sebbene la struttura spinoriale è la stessa, non è uguale la dipendenza dal quadrimpulso del loop q su cui integriamo. Ciò comporta delle differenze nel risultato finale dell'ampiezza anche se la strategia di calcolo è esattamente la stessa. Abbiamo infatti

$$A_{\pi,\mu} = -\frac{e^2 G_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \int \frac{d^n q}{(2\pi)^4} \frac{\bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi + \not{q}) (1 - \gamma_5) (\not{p}_\mu - \not{q} - m_\mu) (2\not{p}_\pi + \not{q}) v}{q^2 (q^2 - 2p_\mu \cdot q) (q^2 + 2p_\pi \cdot q)}. \quad (4.104)$$

che con la parametrizzazione di Feynman (4.44) e organizzando opportunamente il numeratore diventa

$$\begin{aligned}
A_{\pi,\mu} &= \frac{e^2 G_F \bar{V}_{us}}{2} \int_0^1 2x dx dy \int \frac{d^n l}{(2\pi)^4} \times \\
&\left[\frac{\bar{u} (1 + \gamma_5) (h_{12} \not{p}_\mu + h_{11} \not{p}_\pi + \not{l}) (h_{22} \not{p}_\mu + h_{21} \not{p}_\pi - \not{l}) (h_{32} \not{p}_\mu + h_{31} \not{p}_\pi + \not{l}) v}{[l^2 - \Delta]^3} + \right. \\
&\left. -m_\mu \frac{\bar{u} (1 + \gamma_5) (h_{12} \not{p}_\mu + h_{11} \not{p}_\pi + \not{l}) (h_{32} \not{p}_\mu + h_{31} \not{p}_\pi + \not{l}) v}{[l^2 - \Delta]^3} \right] \quad (4.105)
\end{aligned}$$

dove questa volta, il quadrimpulso l è legato a q dalla relazione $l = q + xyp_\pi - x(1-y)p_\mu$ e di conseguenza $\Delta = x^2 y^2 m_\pi^2 + x^2 (1-y)^2 m_\mu^2 - 2x^2 y (1-y) p_\pi \cdot p_\mu$. Le funzioni h_{ij} sono invece

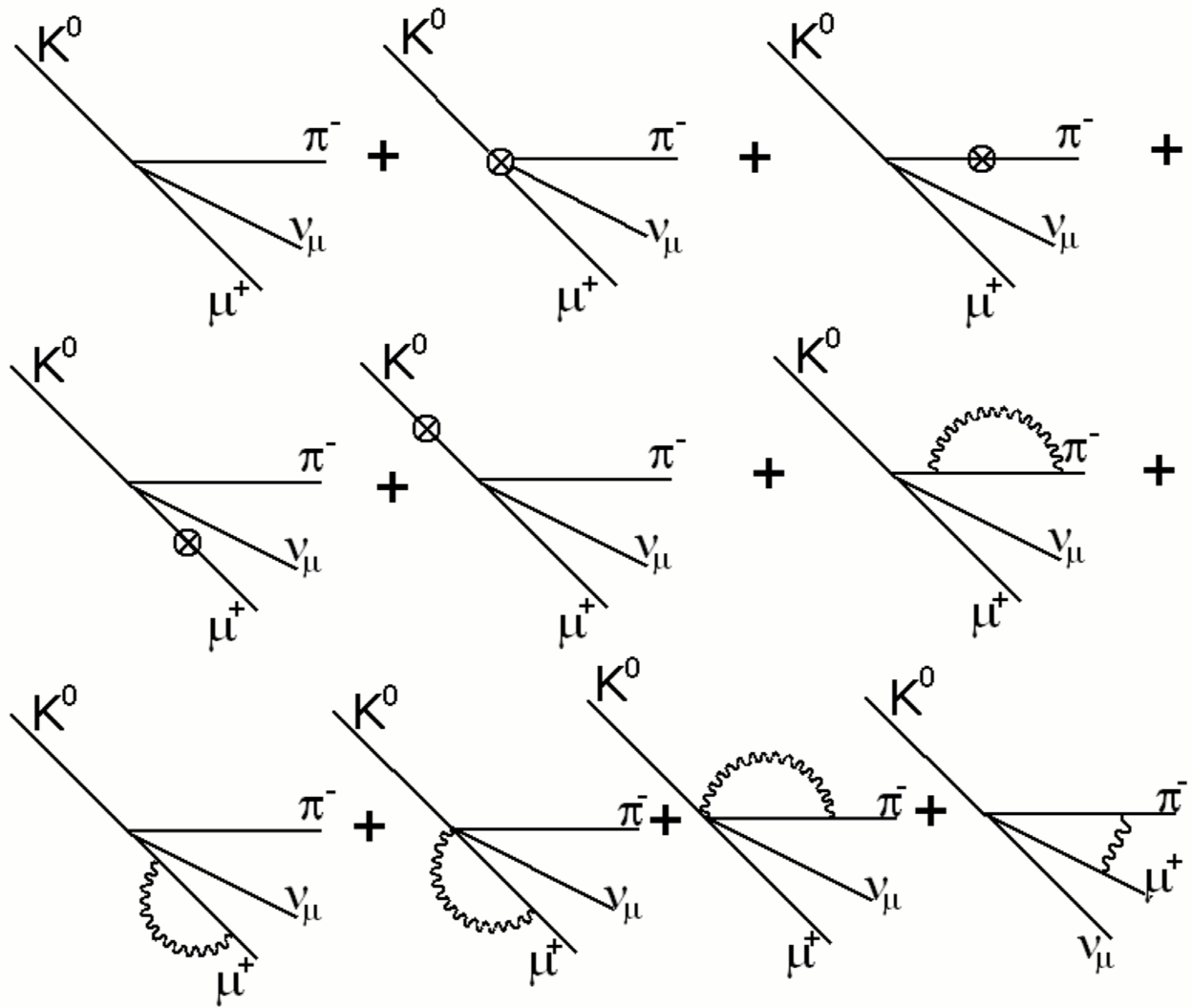


Figura 4.13: *Diagrammi rilevanti nel decadimento K^0*

date da

$$\begin{cases} h_{12} = (1 + x - xy) \\ h_{11} = 2 - xy \\ h_{22} = 1 - x + xy \\ h_{21} = xy \\ h_{32} = (x - xy) \\ h_{31} = 2 - xy \end{cases} \quad (4.106)$$

Anche in questo caso, utilizzando l'algebra di Dirac e le equazioni del moto per i campi spinoriali per elaborare il denominatore opportunamente e utilizzando le formule per gli

integrali dimensionali (4.14) si giunge all'espressione finale

$$A_{\pi,\mu} = -\frac{ie^2 G_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \bar{u} (1 + \gamma_5) \left\{ G(\phi, \xi) (\not{p}_k + \not{p}_\pi) + H(\phi, \xi) (\not{p}_k - \not{p}_\pi) \right\} \quad (4.107)$$

dove questa volta le funzioni $G(\phi, \xi)$ e $H(\phi, \xi)$ sono date da

$$\begin{aligned} G(\phi, \xi) = & -\frac{2\phi\xi^3 - 2\phi^3\xi - 11\phi^2\xi^3 + 11\phi^3\xi^2}{32\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3\varepsilon} - \frac{1}{32} \frac{(-7\phi^2\xi^3 + 7\phi^3\xi^2 + 2\phi\xi^3 - 2\phi^3\xi)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3\varepsilon m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{32} \frac{(-12\phi\xi^3 - 8\phi^3\xi^3 + 2\xi^3 + 18\phi^2\xi^3)\ln(1-\phi)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3\varepsilon} - \frac{1}{32} \frac{(12\phi^3\xi + 8\phi^3\xi^3 - 18\phi^3\xi^2 - 2\phi^3)\ln(1-\xi)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3\varepsilon} - \frac{1}{32} \frac{(-8\phi\xi^3 + 2\xi^3)\ln(1-\phi)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3\varepsilon m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{32} \frac{(8\phi^3\xi - 2\phi^3)\ln(1-\xi)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3\varepsilon m_\mu^2} - \frac{1}{32} \frac{(-18\phi^2\xi^3 + 18\phi^3\xi^2 + 4\phi\xi^3 - 4\phi^3\xi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3\varepsilon m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{32} \frac{(16\phi^2\xi^3 + 8\phi^3\xi^3 - 20\phi\xi^3 + 4\xi^3)\ln(1-\phi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3\varepsilon m_\mu^2} - \frac{1}{32} \frac{(20\phi^3\xi - 16\phi^3\xi^2 - 8\phi^3\xi^3 - 4\phi^3)\ln(1-\xi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3\varepsilon m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(10\phi\xi^3 - 2\xi^3 - 4\phi^3\xi^3 - 8\phi^2\xi^3)\ln(1-\phi)^2 C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} - \frac{1}{64} \frac{(-18\phi^2\xi^3 + 18\phi^3\xi^2 + 4\phi\xi^3 - 4\phi^3\xi)\ln(\Xi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(12\phi^3\xi + 8\phi^3\xi^3 - 18\phi^3\xi^2 - 2\phi^3)\ln(1-\xi)\ln(\Xi)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} - \frac{(-11\phi^3\xi^2 + 11\phi^2\xi^3 + 2\phi^3\xi - 2\phi^3\xi^3)\gamma}{64\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(2\phi^3 - 8\phi^3\xi)\ln(1-\xi)m_\pi^2\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} - \frac{1}{64} \frac{(-2\xi^3 + 8\phi\xi^3)\ln(1-\phi)m_\pi^2\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} - \frac{1}{64} \frac{(4\phi^3\xi^3 - 10\phi^3\xi + 8\phi^3\xi^2 + 2\phi^3)\ln(1-\xi)^2 C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(-2\phi^3 - 2\xi^3 + 8\phi^3\xi + 8\phi^3\xi^3)\ln(1-\xi)\ln(-\frac{\xi}{-\xi+\phi})m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(-20\phi^2\xi^2 - 4\phi\xi^3 + 26\phi^3\xi + 18\phi^2\xi^3 - 18\phi^3\xi^2 - 6\phi^3 - 16\phi^3\xi^3 + 4\phi\xi^2 + 2\phi^2\xi)\ln(1-\xi)C}{(\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2)} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(15\phi^3\xi^2 + 5\phi\xi^3 - 5\phi^3\xi - 15\phi^2\xi^3)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} - \frac{1}{64} \frac{(4\phi\xi^3 - \xi^3)\ln(1-\phi)^2 m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(-8\phi\xi^3 + 2\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(\Xi)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} - \frac{1}{64} \frac{(-4\phi^3\xi + \phi^3)\ln(1-\xi)^2 m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(-7\phi^2\xi^3 + 7\phi^3\xi^2 + 2\phi\xi^3 - 2\phi^3\xi)\ln(\Xi)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(-2\phi^3 + 12\phi^3\xi - 18\phi^3\xi^2 - 2\xi^3 + 16\phi^3\xi^3 - 18\phi^2\xi^3 + 12\phi\xi^3)\ln(1-\xi)\ln(-\frac{\xi}{-\xi+\phi})}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(-16\phi^3\xi^2 + 20\phi\xi^3 - 16\phi^3\xi^3 - 4\phi^3 - 4\xi^3 + 20\phi^3\xi - 16\phi^2\xi^3)\ln(1-\xi)\ln(-\frac{\xi}{-\xi+\phi})C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(-18\phi^2\xi^3 - 2\xi^3 + 12\phi\xi^3 + 8\phi^3\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(1-\xi)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} - \frac{1}{64} \frac{(-12\phi\xi^3 - 8\phi^3\xi^3 + 2\xi^3 + 18\phi^2\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(\Xi)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(8\phi^3\xi - 2\phi^3)\ln(1-\xi)\ln(\Xi)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} - \frac{1}{64} \frac{(-2\xi^3 + 8\phi\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(1-\xi)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(2\phi\xi^2 + \phi^2\xi + \phi^3\xi^2 - 2\phi\xi^3 + 10\phi^3\xi - 3\phi^3 + 7\phi^2\xi^3 - 8\phi^2\xi^2)\ln(1-\xi)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(-\phi\xi^2 - 2\phi^2\xi - 7\phi^3\xi^2 - 10\phi\xi^3 + 2\phi^3\xi + 3\xi^3 - \phi^2\xi^3 + 8\phi^2\xi^2)\ln(1-\phi)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(16\phi^2\xi^3 + 8\phi^3\xi^3 - 20\phi\xi^3 + 4\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(\Xi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(20\phi^2\xi^2 - 18\phi^3\xi^2 + 4\phi^3\xi + 18\phi^2\xi^3 + 16\phi^3\xi^3 - 26\phi\xi^3 + 6\xi^3 - 4\phi^2\xi - 2\phi\xi^2)\ln(1-\phi)C}{(\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2)} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(-2\phi^2\xi + 2\phi^3\xi - \phi\xi^2 + 17\phi^2\xi^3 - 11\phi^3\xi^2 - 16\phi\xi^3 + 12\phi^2\xi^2 + 3\xi^3 - 4\phi^3\xi^3)\ln(1-\phi)}{(\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3)} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(-16\phi^2\xi^3 + 20\phi\xi^3 - 8\phi^3\xi^3 - 4\xi^3)\ln(1-\phi)C\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(-18\phi^2\xi^3 - 2\xi^3 + 12\phi\xi^3 + 8\phi^3\xi^3)\ln(1-\phi)\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(18\phi^3\xi^2 + 2\phi^3 - 8\phi^3\xi^3 - 12\phi^3\xi)\ln(1-\xi)\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(4\phi^3\xi - 4\phi\xi^3 + 18\phi^2\xi^3 - 18\phi^3\xi^2)C\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(8\phi^3\xi^3 - 20\phi^3\xi + 16\phi^3\xi^2 + 4\phi^3)\ln(1-\xi)C\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\ & - \frac{1}{64} \frac{(2\phi^3\xi + 7\phi^2\xi^3 - 2\phi\xi^3 - 7\phi^3\xi^2)m_\pi^2\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{64} \frac{(20\phi^3\xi - 16\phi^3\xi^2 - 8\phi^3\xi^3 - 4\phi^3)\ln(1-\xi)\ln(\Xi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-16\phi^2\xi^3 + 20\phi\xi^3 - 8\phi^3\xi^3 - 4\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(1-\xi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(2\phi\xi^3 - 2\phi^3\xi - 11\phi^2\xi^3 + 11\phi^3\xi^2)\ln(\Xi)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(\phi^3 - 6\phi^3\xi + 9\phi^3\xi^2 - 4\phi^3\xi^3)\ln(1-\xi)^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} - \frac{1}{64} \frac{(\phi^2\xi + 16\phi^3\xi + 2\phi\xi^2 + 4\phi^3\xi^3 + 11\phi^2\xi^3 - 12\phi^2\xi^2 - 3\phi^3 - 2\phi\xi^3 - 17\phi^3\xi^2)\ln(1-\xi)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-9\phi^2\xi^3 + 6\phi\xi^3 + 4\phi^3\xi^3 - \xi^3)\ln(1-\phi)^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-40\phi^2\xi^3 + 40\phi^3\xi^2 + 10\phi\xi^3 - 10\phi^3\xi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} \\
& - \frac{-5\phi^3\xi + 5\phi\xi^3 - 25\phi^2\xi^3 + 25\phi^3\xi^2}{64\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{32} \frac{(9\phi^2\xi^3 + \xi^3 - 8\phi^3\xi^3 + \phi^3 - 6\phi^3\xi + 9\phi^3\xi^2 - 6\phi\xi^3)\left(\operatorname{dilog}\left(-\frac{\xi}{-\xi+\phi}\right) - \operatorname{dilog}\left(\frac{\xi(-1+\phi)}{-\xi+\phi}\right)\right)}{\pi^2(-\xi+\phi)\phi^3\xi^3} \\
& - \frac{1}{32} \frac{(\xi^3 - 4\phi^3\xi + \phi^3 - 4\phi\xi^3)\left(\operatorname{dilog}\left(-\frac{\xi}{-\xi+\phi}\right) - \operatorname{dilog}\left(\frac{\xi(-1+\phi)}{-\xi+\phi}\right)\right)m_\pi^2}{\pi^2(-\xi+\phi)\phi^3\xi^3m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{32} \frac{(-10\phi^3\xi - 10\phi\xi^3 + 8\phi^2\xi^3 + 8\phi^3\xi^2 + 2\phi^3 + 2\xi^3)\left(\operatorname{dilog}\left(-\frac{\xi}{-\xi+\phi}\right) - \operatorname{dilog}\left(\frac{\xi(-1+\phi)}{-\xi+\phi}\right)\right)C}{\pi^2(-\xi+\phi)\phi^3\xi^3m_\mu^2}
\end{aligned} \tag{4.108}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(\phi, \xi) & := -\frac{1}{64} \frac{(4\xi^3\phi^2 - 4\xi^2\phi^3 + 10\xi^3\phi - 10\xi\phi^3)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(13\xi^3\phi^2 + 3\xi^2\phi^3 + 2\xi^3\phi + 2\xi\phi^3 + 3\xi^3 - \xi^2\phi - 2\xi\phi^2 - 2\xi^2\phi^2 - 16\xi^3\phi^3)\ln(1-\phi)m_\pi^2}{(\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2)} - \frac{1}{64} \frac{(-2\phi^3 - 2\xi\phi^3)\ln(1-\xi)\ln(\Xi)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(2\xi^3\phi + 2\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(\Xi)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-2\xi^3\phi - 2\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(1-\xi)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{64} \frac{(\phi^3 + \xi\phi^3)\ln(1-\xi)^2m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(2\xi^3\phi + 2\xi^3\phi^2 - 2\xi^3\phi^3 - 2\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(1-\xi)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} - \frac{1}{64} \frac{(-2\xi^3 + 2\xi^3\phi^2)\ln(1-\phi)^2C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(2\phi^3 - 2\xi^2\phi^3)\ln(1-\xi)^2C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{64} \frac{(4\xi^3\phi^2 - 4\xi^3)\ln(1-\phi)\ln(1-\xi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(7\xi^3\phi^2 - 7\xi^2\phi^3 + 5\xi^3\phi - 5\xi\phi^3)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{64} \frac{(-\xi^3 - \xi^3\phi)\ln(1-\phi)^2m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-3\xi^3\phi^2 - 13\xi^2\phi^3 - 2\xi^3\phi - 2\xi\phi^3 - 3\phi^3 + 2\xi^2\phi + \xi\phi^2 + 2\xi^2\phi^2 + 16\xi^3\phi^3)\ln(1-\xi)m_\pi^2}{(\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2)} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(2\xi^3\phi^2 + 2\xi^3\phi - 2\xi^3 + 2\xi\phi^3 - 2\phi^3 + 2\xi^2\phi^3 - 4\xi^3\phi^3)\ln(1-\xi)\ln\left(-\frac{\xi}{-\xi+\phi}\right)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(2\xi^3 + 2\xi^3\phi^3 - 2\xi^3\phi^2 - 2\xi^3\phi)\ln(1-\phi)\ln(\Xi)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-4\phi^3 + 4\xi^2\phi^3)\ln(1-\xi)\ln(\Xi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-3\xi^3\phi^2 + 3\xi^2\phi^3 - 2\xi^3\phi + 2\xi\phi^3)m_\pi^2\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(4\xi^3\phi^2 - 4\xi^3)\ln(1-\phi)C\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} - \frac{1}{64} \frac{(2\xi^3\phi + 2\xi^3\phi^2 - 2\xi^3\phi^3 - 2\xi^3)\ln(1-\phi)\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-2\xi\phi^3 - 2\xi^2\phi^3 + 2\xi^3\phi^3 + 2\phi^3)\ln(1-\xi)\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-4\xi^2\phi^3 + 4\phi^3)\ln(1-\xi)C\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} - \frac{(\xi^3\phi^2 + 2\xi\phi^3 - \xi^2\phi^3 - 2\xi^3\phi)\gamma}{64\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(2\phi^3 + 2\xi\phi^3)\ln(1-\xi)m_\pi^2\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3m_\mu^2} + \frac{\xi^3\phi^2 + 2\xi\phi^3 - \xi^2\phi^3 - 2\xi^3\phi}{32\pi^2\xi^3(-\xi+\phi)\phi^3\varepsilon}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{32} \frac{(-3\xi^3\phi^2+3\xi^2\phi^3-2\xi^3\phi+2\xi\phi^3)m_\pi^2}{\pi^2\xi^3(-\xi+\phi)\phi^3\varepsilon m_\mu^2} + \frac{1}{32} \frac{(-r_{ll}+r_\mu+r_\pi+\beta z+2SQRTZETA\sqrt{r_{ll}})\ln(1-\phi)}{\pi^2\xi^3(-\xi+\phi)\phi^3\varepsilon} \\
& + \frac{1}{32} \frac{(-2\xi\phi^3-2\xi^2\phi^3+2\xi^3\phi^3+2\phi^3)\ln(1-\xi)}{\pi^2\xi^3(-\xi+\phi)\phi^3\varepsilon} \\
& + \frac{1}{32} \frac{(-2\xi^3\phi-2\xi^3)\ln(1-\phi)m_\pi^2}{\pi^2\xi^3(-\xi+\phi)\phi^3\varepsilon m_\mu^2} + \frac{1}{32} \frac{(2\phi^3+2\xi\phi^3)\ln(1-\xi)m_\pi^2}{\pi^2\xi^3(-\xi+\phi)\phi^3\varepsilon m_\mu^2} \\
& + \frac{1}{32} \frac{(4\xi^3\phi^2-4\xi^3)\ln(1-\phi)C}{\pi^2\xi^3(-\xi+\phi)\phi^3\varepsilon m_\mu^2} + \frac{1}{32} \frac{(-2\xi^3\phi^2+2\xi^2\phi^3-4\xi^3\phi+4\xi\phi^3)C}{\pi^2\xi^3(-\xi+\phi)\phi^3\varepsilon m_\mu^2} \\
& + \frac{1}{32} \frac{(-4\xi^2\phi^3+4\phi^3)\ln(1-\xi)C}{\pi^2\xi^3(-\xi+\phi)\phi^3\varepsilon m_\mu^2} - \frac{1}{32} \frac{(2\phi^3-2\xi^2\phi^3+2\xi^3-2\xi^3\phi^2)\left(\operatorname{dilog}\left(-\frac{\xi}{-\xi+\phi}\right)-\operatorname{dilog}\left(\frac{\xi(-1+\phi)}{-\xi+\phi}\right)\right)C}{\pi^2\xi^3(-\xi+\phi)\phi^3 m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{32} \frac{(\phi^3-\xi\phi^3-\xi^3\phi^2-\xi^3\phi-\xi^2\phi^3+2\xi^3\phi^3+\xi^3)\left(\operatorname{dilog}\left(-\frac{\xi}{-\xi+\phi}\right)-\operatorname{dilog}\left(\frac{\xi(-1+\phi)}{-\xi+\phi}\right)\right)}{\pi^2\xi^3(-\xi+\phi)\phi^3} \\
& - \frac{-3\xi^3\phi^2-5\xi\phi^3+3\xi^2\phi^3+5\xi^3\phi}{64\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-2\xi^2\phi^3+2\xi^3\phi^2+4\xi^3\phi-4\xi\phi^3)\ln(\Xi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(\phi^3+\xi^3\phi^3-\xi\phi^3-\xi^2\phi^3)\ln(1-\xi)^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} - \frac{1}{64} \\
& \frac{(22\xi^3\phi^2+2\xi^2\phi^3-2\xi^3\phi+4\xi\phi^3+6\xi^3-4\xi\phi^2-32\xi^3\phi^3-2\xi^2\phi)\ln(1-\phi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(4\xi^3\phi^2-4\phi^3-4\xi^3+4\xi^2\phi^3)\ln(1-\xi)\ln\left(-\frac{\xi}{-\xi+\phi}\right)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} - \frac{1}{64} \frac{(2\xi\phi^3-6\xi^3\phi^3+3\xi^3+7\xi^3\phi^2-\xi^2\phi-2\xi\phi^2+2\xi^2\phi^2-\xi^2\phi^3-4\xi^3\phi)\ln(1-\phi)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-\xi^3+\xi^3\phi-\xi^3\phi^3+\xi^3\phi^2)\ln(1-\phi)^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(\xi^2\phi^3+2\xi^3\phi-2\xi\phi^3-\xi^3\phi^2)\ln(\Xi)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-2\xi^3\phi^2+2\xi^2\phi^3-4\xi^3\phi+4\xi\phi^3)C\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-2\xi^3\phi-2\xi^3)\ln(1-\phi)m_\pi^2\gamma}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} - \frac{1}{64} \frac{(4\xi\phi^3+6\xi^3\phi^3-3\phi^3+\xi^3\phi^2+2\xi^2\phi+\xi\phi^2-2\xi^2\phi^2-7\xi^2\phi^3-2\xi^3\phi)\ln(1-\xi)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-2\xi^3\phi^2-22\xi^2\phi^3-4\xi^3\phi+2\xi\phi^3-6\phi^3+2\xi\phi^2+32\xi^3\phi^3+4\xi^2\phi)\ln(1-\xi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-2\phi^3-2\xi^3\phi^3+2\xi^2\phi^3+2\xi\phi^3)\ln(1-\xi)\ln(\Xi)}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(4\xi^3-4\xi^3\phi^2)\ln(1-\phi)\ln(\Xi)C}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(3\xi^3\phi^2-3\xi^2\phi^3+2\xi^3\phi-2\xi\phi^3)\ln(\Xi)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{64} \frac{(-2\xi^3-2\phi^3-2\xi\phi^3-2\xi^3\phi)\ln(1-\xi)\ln\left(-\frac{\xi}{-\xi+\phi}\right)m_\pi^2}{\pi^2\phi^3(-\xi+\phi)\xi^3 m_\mu^2} \\
& - \frac{1}{32} \frac{(\phi^3+\xi^3\phi+\xi\phi^3+\xi^3)\left(\operatorname{dilog}\left(-\frac{\xi}{-\xi+\phi}\right)-\operatorname{dilog}\left(\frac{\xi(-1+\phi)}{-\xi+\phi}\right)\right)m_\pi^2}{\pi^2\xi^3(-\xi+\phi)\phi^3 m_\mu^2}.
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Come prima, possiamo semplificare l'espressione di queste due funzioni introducendo la variabile X legata a ϕ e ξ dalle relazioni

$$\begin{cases} \phi = 1 - \frac{X}{r_\mu} \\ \xi = \frac{r_\mu X - 1}{r_\mu X} \end{cases} \tag{4.110}$$

dove questa volta, r_μ è il rapporto tra la massa del muone e del pione. Abbiamo quindi

$$H(X) = \frac{3\alpha}{8\pi\varepsilon} + \frac{3}{16} \frac{\alpha\ln(\Theta)}{\pi} + \frac{7\alpha}{16\pi} - \frac{3\alpha\gamma}{16\pi} - \frac{1}{4} \frac{(4X^2r-3r^2X-4X+4r)\alpha\ln(r)}{(rX-1)(-r+X)\pi}$$

$$+ \frac{1}{4} \frac{\alpha(X^2 r + r - 2X)(4X^2 r - 3r^2 X - 4X + 4r) \ln(X)}{\pi(-r+X)(X-1)(X+1)(rX-1)r} + \frac{3}{16} \frac{\alpha \ln(4\pi)}{\pi} \quad (4.111)$$

che è la stessa funzione del decadimento del K^+ , e

$$\begin{aligned} G(X) = & -\frac{1}{8} \frac{\alpha(-7+8\ln(X)+8\ln(X)X^2+7X^2)}{\varepsilon \pi(X-1)(X+1)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha(1+X^2) \operatorname{dilog}\left(\frac{rX-1}{(X-1)(X+1)}\right)}{\pi(X-1)(X+1)} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\alpha(1+X^2) \operatorname{dilog}\left(\frac{X^2}{-1+X^2} - \frac{X}{r(-1+X^2)}\right)}{\pi(X-1)(X+1)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha(1+X^2) \ln(X) \ln(\Theta)}{\pi(X-1)(X+1)} \\ & + \frac{1}{2} \frac{\alpha(1+X^2) \ln(X) \gamma}{\pi(X-1)(X+1)} - \frac{1}{4} \frac{\alpha(1+X^2) \ln(X)^2}{\pi(X-1)(X+1)} - \frac{7}{16} \frac{\alpha \ln(\Theta)}{\pi} - \frac{15\alpha}{16\pi} + \frac{7\alpha\gamma}{16\pi} \\ & + \frac{1}{4} \frac{(-2rX^2+2X+3r^2X-2r)\alpha \ln(r)}{(r-X)(rX-1)\pi} - \frac{1}{2} \frac{\alpha(1+X^2) \ln\left(\frac{rX-1}{(X-1)(X+1)}\right) \ln(r)}{\pi(X-1)(X+1)} \\ & - \frac{1}{4} \frac{\alpha(-2r+2X+2X^3+3r^2X^3+3r^2X-2rX^4-6rX^2) \ln(X)}{\pi(rX-1)(X-1)(X+1)(r-X)} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\alpha(1+X^2) \ln\left(\frac{rX-1}{(X-1)(X+1)}\right) \ln(X)}{\pi(X-1)(X+1)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha(1+X^2) \ln(X) \ln(r)}{\pi(X-1)(X+1)} \\ & + \frac{1}{4} \frac{\alpha(1+X^2) \ln(r)^2}{\pi(X-1)(X+1)} - \frac{7}{16} \frac{\alpha \ln(4\pi)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\alpha(1+X^2) \ln(X) \ln(4\pi)}{\pi(X-1)(X+1)} \end{aligned} \quad (4.112)$$

che invece differisce dal caso precedente.

I fattori di forma, per il canale neutro sono quindi:

$$\begin{aligned} f_-(X) := & \frac{3\alpha \ln(X) X^3}{\pi(-r+X)(X-1)(X+1)(rX-1)} - \frac{7}{2} \frac{\alpha r \ln(X) X^2}{\pi(-r+X)(X-1)(X+1)(rX-1)} \\ & - \frac{\alpha r \ln(X)}{\pi(-r+X)(X-1)(X+1)(rX-1)} - \frac{3}{2} \frac{\alpha \ln(r)}{\pi} + \frac{3}{4} \frac{\alpha \ln(\Theta)}{\pi} - \frac{8}{3} \pi \alpha K_5 \\ & - \frac{8}{3} \pi \alpha K_6 + \frac{\alpha \ln(r) r X^2}{(rX-1)(-r+X)\pi} + 8\pi \alpha X_2 - 8\pi \alpha X_3 + 8\pi \alpha X_1 + \frac{\alpha}{4\pi} \\ & + \frac{\alpha \ln(r) r}{(rX-1)(-r+X)\pi} - \frac{\alpha r \ln(X) X^4}{\pi(-r+X)(X-1)(X+1)(rX-1)} \\ & + \frac{3}{4} \frac{\alpha r^2 \ln(X) X^3}{\pi(-r+X)(X-1)(X+1)(rX-1)} + \frac{3}{4} \frac{\alpha r^2 \ln(X) X}{\pi(-r+X)(X-1)(X+1)(rX-1)} \\ & + \frac{3\alpha \ln(X) X}{\pi(-r+X)(X-1)(X+1)(rX-1)} - \frac{2\alpha \ln(X) X^2}{\pi(-r+X)(X-1)(X+1)(rX-1)r} \\ & - \frac{3}{4} \frac{\alpha \ln(r) r^2 X}{(rX-1)(-r+X)\pi} - \frac{\alpha \ln(r) X}{(rX-1)(-r+X)\pi} \end{aligned} \quad (4.113)$$

e

$$\begin{aligned} f_+(X) := & 1 + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln\left(\frac{rX-1}{(X-1)(X+1)}\right) \ln(X)}{\pi(X-1)(X+1)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln\left(\frac{rX-1}{(X-1)(X+1)}\right) \ln(X) X^2}{\pi(X-1)(X+1)} \\ & - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \ln(r) X^2}{\pi(X-1)(X+1)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \operatorname{dilog}\left(\frac{rX}{(X-1)(X+1)} - \frac{1}{(X-1)(X+1)}\right)}{\pi(X-1)(X+1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) r}{\pi (r X-1)(X-1)(X+1)(r-X)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) X}{\pi (r X-1)(X-1)(X+1)(r-X)} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) X^3}{\pi (r X-1)(X-1)(X+1)(r-X)} + \frac{3}{4} \frac{\alpha \ln(X) r^2 X^3}{\pi (r X-1)(X-1)(X+1)(r-X)} \\
& + \frac{3}{4} \frac{\alpha \ln(X) r^2 X}{\pi (r X-1)(X-1)(X+1)(r-X)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \gamma}{\pi (X-1)(X+1)} + \frac{3}{4} \frac{\alpha \ln(r)}{\pi} \\
& - \frac{1}{8} \frac{\alpha \ln(\Theta)}{\pi} + \frac{\alpha \ln(X) \ln(2)}{\pi (X-1)(X+1)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \ln(\pi)}{\pi (X-1)(X+1)} + \frac{\alpha \ln(X) X^2 \ln(2)}{\pi (X-1)(X+1)} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) X^2 \ln(\pi)}{\pi (X-1)(X+1)} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \gamma X^2}{\pi (X-1)(X+1)} + \frac{16}{3} \pi \alpha X_1 - \frac{3\alpha}{8\pi} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) r X^4}{\pi (r X-1)(X-1)(X+1)(r-X)} - \frac{3}{2} \frac{\alpha \ln(X) r X^2}{\pi (r X-1)(X-1)(X+1)(r-X)} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\alpha \operatorname{dilog}\left(\frac{X^2}{-1+X^2} - \frac{X}{r(-1+X^2)}\right) X^2}{\pi (X-1)(X+1)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \ln(\Theta)}{\pi (X-1)(X+1)} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \ln(\Theta) X^2}{\pi (X-1)(X+1)} - \frac{1}{4} \frac{\alpha \ln(r)^2}{\pi (X-1)(X+1)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(r) r}{(r-X)(r X-1)\pi} \\
& + \frac{1}{4} \frac{\alpha \ln(X)^2}{\pi (X-1)(X+1)} + \frac{1}{4} \frac{\alpha \ln(X)^2 X^2}{\pi (X-1)(X+1)} - \frac{1}{4} \frac{\alpha \ln(r)^2 X^2}{\pi (X-1)(X+1)} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(X) \ln(r)}{\pi (X-1)(X+1)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(r) r X^2}{(r-X)(r X-1)\pi} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(r) X}{(r-X)(r X-1)\pi} \\
& - \frac{3}{4} \frac{\alpha \ln(r) r^2 X}{(r-X)(r X-1)\pi} + 8\pi \alpha K_{12} - 2\pi \alpha X_6 - \frac{15\alpha}{8\pi\varepsilon} - \frac{\alpha \ln(2)}{\pi} - \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln(\pi)}{\pi} \\
& + \frac{\alpha \gamma}{2\pi} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \operatorname{dilog}\left(\frac{r X}{(X-1)(X+1)} - \frac{1}{(X-1)(X+1)}\right) X^2}{\pi (X-1)(X+1)} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\alpha \operatorname{dilog}\left(\frac{X^2}{-1+X^2} - \frac{X}{r(-1+X^2)}\right)}{\pi (X-1)(X+1)} - \frac{7\alpha}{8\varepsilon\pi(X-1)(X+1)} \\
& + \frac{7\alpha X^2}{8\varepsilon\pi(X-1)(X+1)} + \frac{\alpha \ln(X) X^2}{\varepsilon\pi(X-1)(X+1)} + \frac{\alpha \ln(X)}{\varepsilon\pi(X-1)(X+1)} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln\left(\frac{r X-1}{(X-1)(X+1)}\right) \ln(r)}{\pi (X-1)(X+1)} + \frac{1}{2} \frac{\alpha \ln\left(\frac{r X-1}{(X-1)(X+1)}\right) \ln(r) X^2}{\pi (X-1)(X+1)}
\end{aligned} \tag{4.114}$$

dove anche in questo caso, le divergenze ultraviolette sono state cancellate dalle parti divergenti dei controtermini. E' facile verificare che resta perfetto l'accordo con i risultati nel lavoro di Cirigliano *et al* [37] anche per i fattori di forma del canale neutro.

Passiamo quindi al calcolo della rate differenziale. Come nel caso precedente vale la formula generale per questa grandezza espressa dalla (4.70) che nel caso in esame si traduce nella formula

$$\begin{aligned}
d\Gamma = & \frac{(2\pi)^n m_\mu m_\nu G_F^2 |V_{us}|^2}{E_k} \left| f_+(t) \bar{u} \left(\not{p}_k + \not{p}_\pi \right) (1 - \gamma_5) v \right. \\
& \left. + f_-(t) \bar{u} \left(\not{p}_k - \not{p}_\pi \right) (1 - \gamma_5) v \right|^2 d\Phi_3(p_k; p_\pi, p_\mu, p_\nu)
\end{aligned} \tag{4.115}$$

dove compare non la massa della particella decadente, ma la sua energia E_k . Ciò dipende da una scelta differente del sistema di riferimento rispetto al caso precedente. Non siamo più, infatti, nel sistema a riposo per la particella che decade ma abbiamo scelto il sistema a riposo per la 'particella' virtuale descritta dal quadrimpulso l . Questa scelta è dovuta al fatto che nel caso in esame è necessario separare lo spazio delle fasi nel seguente modo

$$d\Phi_3(p_k; p_\pi, p_\mu, p_\nu) = d\Phi_2(l; p_\pi, p_\mu) d\Phi_2(p_k; l, p_\nu) (2\pi)^{n-1} dl^2 \tag{4.116}$$

ed integrare prima su $d\Phi_2(p_k; l, p_\nu)$. La necessità è legata a criteri di uniformità e omogeneità del calcolo virtuale con il calcolo della rate del processo con emissione di fotone reale in cui siamo obbligati, per ragioni dovute alla covarianza di Lorentz e alla struttura dell'ampiezza di decadimento, a separare lo spazio delle fasi tendendo assieme le particelle emergenti cariche, p_μ e p_π . Con questi accorgimenti possiamo procedere per il resto del calcolo seguendo la stessa strategia del decadimento del K^+ , giungendo all'espressione:

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 |V_{us}|^2}{2 E_k} \left\{ [f_+^2 + 2f_+f_- + f_-^2] \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_k \not{p}_\nu \not{p}_k] + 2 [f_+^2 - f_-^2] \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_k \not{p}_\nu \not{p}_\pi] \right. \\ \left. + [f_+^2 - 2f_+f_- + f_-^2] \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_\pi \not{p}_\nu \not{p}_\pi] \right\} (2\pi)^n dl^2 d\Phi_2(l; p_\pi, p_\mu) (2\pi)^{n-1} d\Phi_2(p_k; , p_\nu, l). \quad (4.117)$$

Come abbiamo detto, integriamo dapprima sulla coppia $d\Phi_2(p_k; l, p_\nu)$. Rispetto al caso precedente, questo calcolo è molto più semplice in quanto nelle tracce compare solo la dipendenza da p_ν e mai da l . Possiamo quindi usare solo la terza delle formule (4.74) modificata opportunamente secondo la formula

$$\int p_{3\mu} \frac{(2\pi)^n d^{n-1} p_1 d^{n-1} p_3 \delta^{(n)}(l - p_1 - p_3)}{4(2\pi)^{n-1} (2\pi)^{n-1} E_1 E_3} = \frac{(m_k^2 - m_l^2)}{2m_k^2} G(m_k^2, n) \mathbf{1}_\mu \quad (4.118)$$

dove $G(m_k^2, n) := \frac{(m_k^2 - m_l^2)^{n-3}}{2^{2n-4} \pi^{\frac{n-3}{2}} \Gamma(\frac{n-1}{2}) (m_k^2)^{\frac{n-2}{2}}}$. Così facendo otteniamo come risultato:

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 |V_{us}|^2 (m_k^2 - m_l^2) G(n, m_k^2)}{4 E_k m_k^2} \left\{ [f_+^2 + 2f_+f_- + f_-^2] m_k^2 \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_k] + 2 [f_+^2 - f_-^2] m_k^2 \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_\pi] \right. \\ \left. + [f_+^2 - 2f_+f_- + f_-^2] \mathbf{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_\pi \not{p}_k \not{p}_\pi] \right\} (2\pi)^{n-1} d\Phi_2(l; , p_\mu, p_\pi) dl^2 \quad (4.119)$$

A questo punto è necessario esplicitare la forma dell'elemento dello spazio delle fasi rimanente. Per fare ciò è necessario fissare il sistema di riferimento. Come abbiamo detto, scegliamo il rest frame della 'particella' l . Abbiamo quindi

$$\begin{cases} l = (m_l, 0, \dots, 0) & p_k = (E_k, |\vec{p}_k|, 0, \dots, 0) \\ p_\mu = (E_\mu, |\vec{p}_\mu| \cos \theta, |\vec{p}_\mu| \sin \theta, 0, \dots, 0) \\ p_\pi = (E_\pi, -|\vec{p}_\mu| \cos \theta, -|\vec{p}_\mu| \sin \theta, 0, \dots, 0) \end{cases} \quad (4.120)$$

dove la parte spaziale di p_π è fissata dalla delta di Dirac presente in $d\Phi_2(l; p_\mu, p_\pi)$. Questa parte del calcolo quindi, rispetto al decadimento del K^+ si complica, in quanto dobbiamo definire quattro n -vettori e non più tre. Dobbiamo infatti definire anche il vettore p_k . Fatta questa scelta, possiamo operare una rotazione nel piano $x - z$ in modo tale che i nostri

n -vettori assumano la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} l = (m_l, 0, \dots, 0) \quad p_\mu = (E_\mu, |\vec{p}_\mu|, 0, \dots, 0) \\ p_\pi = (E_\pi, -|\vec{p}_\mu|, 0, \dots, 0) \\ p_k = \left(\frac{m_k^2 + m_l^2}{2m_l}, \frac{m_k^2 - m_l^2}{2m_l} \cos \theta, -\frac{m_k^2 - m_l^2}{2m_l} \sin \theta, 0, \dots, 0 \right) \end{array} \right. \quad (4.121)$$

e sia quindi definita l'energia E_k del kaone in funzione delle masse delle particelle rimanenti. Anche in questo caso possiamo scrivere

$$d\Phi_2(l; p_\mu, p_\pi) = \frac{d^{n-1}p_\mu d^{n-1}p_\pi}{4(2\pi)^{2n-2} E_\mu E_\pi} \delta^{n-1}(\vec{l} - \vec{p}_\mu - \vec{p}_\pi) \delta(m_l - E_\mu - E_\pi) \quad (4.122)$$

che, integrando su $d^{n-1}p_\pi$, grazie alla presenza della delta di Dirac diventa

$$d\Phi_2(p_k; p_\mu, l) = \frac{d^{n-1}p_\mu}{4(2\pi)^{2n-2} E_\mu E_\pi} \delta(m_l - E_\mu - E_\pi). \quad (4.123)$$

Il vincolo sull'energia, rappresentato dalla delta di Dirac rimanente, può essere usato per fissare il valore dell'energia del muone in funzione delle masse delle particelle. Sappiamo infatti da considerazioni cinematiche che

$$E_\pi = \sqrt{m_\pi^2 + E_\mu^2 - m_\mu^2} \quad (4.124)$$

da cui, risolvendo una semplice equazione, si ha

$$E_\mu^* = \frac{m_l^2 + m_\mu - m_\pi^2}{2m_l}. \quad (4.125)$$

L'espressione finale della nostra rate è quindi data dalla formula

$$d\Gamma = \frac{G_F^2 |V_{us}|^2}{32(2\pi)^3} \frac{(m_k^2 - m_l^2)^2}{m_k^2(m_k^2 + m_l^2)} \sin \theta \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} \delta(E_\mu - E_\mu^*) |\overline{\mathcal{M}}|^2 dl^2 dE_\mu d\theta \quad (4.126)$$

dove

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 = & \left\{ [f_+^2 + 2f_+f_- + f_-^2] m_k^2 \mathbf{Tr} \left[\not{p}_\mu \not{p}_k \right] + 2[f_+^2 - f_-^2] m_k^2 \mathbf{Tr} \left[\not{p}_\mu \not{p}_\pi \right] + \right. \\ & \left. + [f_+^2 - 2f_+f_- + f_-^2] \mathbf{Tr} \left[\not{p}_\mu \not{p}_\pi \not{p}_k \not{p}_\pi \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.127)$$

In questo caso quindi dobbiamo integrare sia sull'energia del muone in maniera diretta grazie alla presenza della delta di Dirac, sia sull'angolo θ . Il risultato finale della parte divergente è dato dalla formula

$$D_V^0(r_U) := \frac{1}{128} \frac{(r_U^3 - 2r_U^2 r_\mu + 6r_U^2 - 5r_U r_\mu + r_U + r_\mu + r_U r_\mu^2 + r_\mu^2) \text{SQRT}(-1+r_U)^2 V_{us}^2 G_F^2 \alpha m_k^5}{r_U^{(3/2)} (1+r_U) \pi^4 \varepsilon}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{128} \frac{(r_{\mu}^3 - 2r_{\mu}^2 r_{\mu} + 6r_{\mu} r_{\mu}^2 - 5r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu} + r_{\mu} r_{\mu}^2 + r_{\mu}^2) (-r_{\pi} - r_{\mu} + r_{\mu}) (-1 + r_{\mu})^2 V_{us}^2 G_F^2 \alpha m_k^5 \ln \frac{1}{2} \frac{r_{\mu} - r_{\mu} - r_{\mu} + \text{SQRT}}{r_{\mu} \sqrt{\frac{r_{\mu}}{r_{\mu}}}}}{((1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)} \pi^4 \varepsilon)} \\
& - \frac{1}{128} \frac{(r_{\mu} + 1 + r_{\mu}^2 + r_{\mu} r_{\mu} + 6r_{\mu}) \text{SQRT}(-1+r_{\mu})^2 V_{us}^2 G_F^2 \alpha m_k^5 r_{\mu}}{r_{\mu}^{(3/2)} (1+r_{\mu}) \pi^4 \varepsilon} \\
& + \frac{1}{128} \frac{(r_{\mu} + 1 + r_{\mu}^2 + r_{\mu} r_{\mu} + 6r_{\mu}) (-r_{\pi} - r_{\mu} + r_{\mu}) (-1+r_{\mu})^2 V_{us}^2 G_F^2 \alpha m_k^5 \ln \frac{1}{2} \frac{r_{\mu} - r_{\mu} - r_{\mu} + \text{SQRT}}{r_{\mu} \sqrt{\frac{r_{\mu}}{r_{\mu}}}}}{((1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)} \pi^4 \varepsilon)} r_{\mu}
\end{aligned} \tag{4.128}$$

mentre per la parte finita abbiamo

$$\begin{aligned}
F_V^0(r_{\mu}) &= \frac{m_k^5 G_F^2 V_{us}^2 (r_{\mu} - 1)^2}{512} \\
& \left(\frac{(r_{\mu} - r_{\mu} - r_{\mu}) (r_{\mu} + 6r_{\mu}^2 + r_{\mu} - 5r_{\mu} r_{\mu} - r_{\pi} - 6r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^3 - 2r_{\mu} r_{\mu}^2 - r_{\mu}^2 r_{\mu} + r_{\mu}^2 - r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^2 r_{\mu} - r_{\mu} r_{\mu} r_{\mu}) \text{LOG}3^2 \alpha}{\pi^4 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}} \right. \\
& + \frac{(-r_{\mu} + r_{\mu} + r_{\mu}) (r_{\mu} + 6r_{\mu}^2 + r_{\mu} - 5r_{\mu} r_{\mu} - r_{\pi} - 6r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^3 - 2r_{\mu} r_{\mu}^2 - r_{\mu}^2 r_{\mu} + r_{\mu}^2 - r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^2 r_{\mu} - r_{\mu} r_{\mu} r_{\mu}) \text{LOG}3 \alpha \ln(\frac{r_{\mu}}{r_{\mu}})}{\pi^4 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}} \\
& + \frac{16 (r_{\mu} + 6r_{\mu}^2 + r_{\mu} - 5r_{\mu} r_{\mu} - r_{\pi} - 6r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^3 - 2r_{\mu} r_{\mu}^2 - r_{\mu}^2 r_{\mu} + r_{\mu}^2 - r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^2 r_{\mu} - r_{\mu} r_{\mu} r_{\mu}) \alpha F_{\text{sqrt}}(r_{\mu}) f_+^{EM-loc}}{\pi^2 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}} \\
& - \frac{6 (r_{\mu} + r_{\mu} r_{\mu} + 11r_{\mu} + 3r_{\mu}^2) (-r_{\mu} + r_{\mu}) \text{LOG}3 \alpha \gamma r_{\mu}}{r_{\mu}^{(3/2)} \pi^4 (1+r_{\mu})} \\
& + \frac{1}{4} \frac{(-r_{\mu} + r_{\mu} + r_{\mu}) (r_{\mu} + 6r_{\mu}^2 + r_{\mu} - 5r_{\mu} r_{\mu} - r_{\pi} - 6r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^3 - 2r_{\mu} r_{\mu}^2 - r_{\mu}^2 r_{\mu} + r_{\mu}^2 - r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^2 r_{\mu} - r_{\mu} r_{\mu} r_{\mu}) \alpha \ln(\frac{r_{\mu}}{r_{\mu}})^2}{\pi^4 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}} \\
& + \frac{2(2r_{\mu} r_{\mu}^3 + r_{\mu}^2 r_{\mu}^2 + 22r_{\mu}^2 r_{\mu} - 2r_{\mu} r_{\mu} r_{\mu}^2 - 15r_{\mu}^4 - 36r_{\mu}^3 - r_{\mu}^2 - 4r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^2) \text{LOG}3 \alpha r_{\mu}}{(\pi^4 r_{\mu}^{(5/2)} (1+r_{\mu}))} \\
& + \frac{2(-r_{\mu} + r_{\mu}) (18r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^2 r_{\mu} + 5r_{\mu} - 5r_{\mu}^3 - 18r_{\mu}^2 - r_{\mu}) \text{LOG}3 \alpha}{r_{\mu}^{(3/2)} \pi^4 (1+r_{\mu})} \\
& - \frac{4(-r_{\mu} + r_{\mu} + r_{\mu}) (-r_{\mu} - 6r_{\mu}^2 - r_{\mu} + 5r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu} + 6r_{\mu} r_{\mu} - r_{\mu}^3 + 2r_{\mu} r_{\mu}^2 + r_{\mu}^2 r_{\mu} - r_{\mu}^2 + r_{\mu} r_{\mu} - r_{\mu}^2 r_{\mu} + r_{\mu} r_{\mu} r_{\mu}) \text{LOG}3 \alpha \ln(1-r_{\mu})}{\pi^4 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}} \\
& - \frac{1}{2} \frac{(9+66r_{\mu}+13r_{\mu}^2) (r_{\mu} - r_{\mu}) \alpha F_{\text{sqrt}}(r_{\mu})}{\pi^4 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}} \\
& - \frac{2(-r_{\mu} + r_{\mu} + r_{\mu}) (-r_{\mu} - 6r_{\mu}^2 - r_{\mu} + 5r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu} + 6r_{\mu} r_{\mu} - r_{\mu}^3 + 2r_{\mu} r_{\mu}^2 + r_{\mu}^2 r_{\mu} - r_{\mu}^2 + r_{\mu} r_{\mu} - r_{\mu}^2 r_{\mu} + r_{\mu} r_{\mu} r_{\mu}) \text{LOG}3 \alpha \text{LOG}8}{\pi^4 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}} \\
& - \frac{2(-r_{\mu} + r_{\mu} + r_{\mu}) (r_{\mu} + 6r_{\mu}^2 + r_{\mu} - 5r_{\mu} r_{\mu} - r_{\pi} - 6r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^3 - 2r_{\mu} r_{\mu}^2 - r_{\mu}^2 r_{\mu} + r_{\mu}^2 - r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^2 r_{\mu} - r_{\mu} r_{\mu} r_{\mu}) \text{LOG}1 \text{LOG}6 \alpha}{\pi^4 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}} \\
& + \frac{1}{2} \frac{F_{\text{sqrt}}(r_{\mu}) (r_{\mu} + 2) (3r_{\mu} - 1) \alpha \ln(\frac{r_{\mu}}{r_{\mu}}) r_{\mu}^2}{r_{\mu}^{(5/2)} \pi^4 (1+r_{\mu})} \\
& + \frac{6(r_{\mu} - r_{\mu} - r_{\mu}) (r_{\mu} + 6r_{\mu}^2 + r_{\mu} - 5r_{\mu} r_{\mu} - r_{\pi} - 6r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^3 - 2r_{\mu} r_{\mu}^2 - r_{\mu}^2 r_{\mu} + r_{\mu}^2 - r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^2 r_{\mu} - r_{\mu} r_{\mu} r_{\mu}) \text{LOG}3 \alpha \ln(\pi)}{\pi^4 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}} \\
& - \frac{2(-r_{\mu} + r_{\mu} + r_{\mu}) (r_{\mu} + 6r_{\mu}^2 + r_{\mu} - 5r_{\mu} r_{\mu} - r_{\pi} - 6r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^3 - 2r_{\mu} r_{\mu}^2 - r_{\mu}^2 r_{\mu} + r_{\mu}^2 - r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^2 r_{\mu} - r_{\mu} r_{\mu} r_{\mu}) \text{DILOG}1 \alpha}{\pi^4 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}} \\
& + \frac{1}{2} \frac{(-9+61r_{\mu}+26r_{\mu}^2+13r_{\mu}+13r_{\mu} r_{\mu}) \alpha F_{\text{sqrt}}(r_{\mu}) r_{\mu}}{\pi^4 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}} \\
& - \frac{16 (r_{\mu} + 6r_{\mu}^2 + r_{\mu} - 5r_{\mu} r_{\mu} - r_{\pi} - 6r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^3 - 2r_{\mu} r_{\mu}^2 - r_{\mu}^2 r_{\mu} + r_{\mu}^2 - r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^2 r_{\mu} - r_{\mu} r_{\mu} r_{\mu}) F_{\text{sqrt}}(r_{\mu}) \alpha \ln(2)}{\pi^4 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}} \\
& - \frac{1}{2} \frac{F_{\text{sqrt}}(r_{\mu}) (6r_{\mu}^3 + 3r_{\mu}^2 r_{\mu} - 2r_{\mu} + 3r_{\mu} + 17r_{\mu}^2 - 3r_{\mu} r_{\mu}) \alpha \ln(\frac{r_{\mu}}{r_{\mu}}) r_{\mu}}{r_{\mu}^{(5/2)} \pi^4 (1+r_{\mu})} \\
& + \frac{4 (r_{\mu} + 6r_{\mu}^2 + r_{\mu} - 5r_{\mu} r_{\mu} - r_{\pi} - 6r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^3 - 2r_{\mu} r_{\mu}^2 - r_{\mu}^2 r_{\mu} + r_{\mu}^2 - r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^2 r_{\mu} - r_{\mu} r_{\mu} r_{\mu}) F_{\text{sqrt}}(r_{\mu}) \alpha \ln(1-r_{\mu})}{\pi^4 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}} \\
& - \frac{2(-r_{\mu} + r_{\mu} + r_{\mu}) (r_{\mu} + 6r_{\mu}^2 + r_{\mu} - 5r_{\mu} r_{\mu} - r_{\pi} - 6r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^3 - 2r_{\mu} r_{\mu}^2 - r_{\mu}^2 r_{\mu} + r_{\mu}^2 - r_{\mu} r_{\mu} + r_{\mu}^2 r_{\mu} - r_{\mu} r_{\mu} r_{\mu}) \text{DILOG}2 \alpha}{\pi^4 (1+r_{\mu}) r_{\mu}^{(3/2)}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{6(6r_{ll}-1+3r_{ll}^2) \text{LOG}3 \alpha \gamma r_{\mu}^2}{r_{ll}^{(3/2)} \pi^4 (1+r_{ll})} + \frac{6 \text{LOG}3 \alpha \gamma r_{\mu}^3}{r_{ll}^{(3/2)} \pi^4} \\
& - \frac{16 \alpha (r_{ll}^2-2r_{\mu} r_{ll}-r_{ll} r_{\pi}-r_{ll}-r_{\mu} r_{\pi}-r_{\mu}+r_{\pi}+r_{\mu}^2) F_{\text{sqrt}}(r_{ll}) f_{-}^{EM-loc}}{\pi^2 r_{ll}^{(3/2)}} \\
& + \frac{2(4r_{ll}^2 r_{\pi}+6r_{ll} r_{\pi}+2r_{\pi}+15r_{ll}^3+22r_{ll}^2-r_{ll}) \text{LOG}3 \alpha r_{\mu}^2}{\pi^4 r_{ll}^{(5/2)} (1+r_{ll})} \\
& - \frac{6(-r_{ll}-6r_{ll}^2-r_{\mu}+5r_{\mu} r_{ll}+r_{\pi}+6r_{ll} r_{\pi}-r_{ll}^3+2r_{\mu} r_{ll}^2+r_{ll}^2 r_{\pi}-r_{\mu}^2+r_{\mu} r_{\pi}-r_{\mu}^2 r_{ll}+r_{\mu} r_{ll} r_{\pi}) \alpha F_{\text{sqrt}}(r_{ll}) \gamma}{\pi^4 (1+r_{ll}) r_{ll}^{(3/2)}} - \frac{13}{2} \frac{r_{\mu}^2 F_{\text{sqrt}}(r_{ll}) \alpha}{r_{ll}^{(3/2)} \pi^4} \\
& - \frac{4(r_{ll}-r_{\mu}-r_{\pi}) (r_{ll}+6r_{ll}^2+r_{\mu}-5r_{\mu} r_{ll}-r_{\pi}-6r_{ll} r_{\pi}+r_{ll}^3-2r_{\mu} r_{ll}^2-r_{ll}^2 r_{\pi}+r_{\mu}^2-r_{\mu} r_{\pi}+r_{\mu}^2 r_{ll}-r_{\mu} r_{ll} r_{\pi}) \text{LOG}3 \text{LOG}4 \alpha}{\pi^4 (1+r_{ll}) r_{ll}^{(3/2)}} \\
& - \frac{2(-r_{ll}+r_{\mu}+r_{\pi}) (r_{ll}+6r_{ll}^2+r_{\mu}-5r_{\mu} r_{ll}-r_{\pi}-6r_{ll} r_{\pi}+r_{ll}^3-2r_{\mu} r_{ll}^2-r_{ll}^2 r_{\pi}+r_{\mu}^2-r_{\mu} r_{\pi}+r_{\mu}^2 r_{ll}-r_{\mu} r_{ll} r_{\pi}) \text{LOG}4 \text{LOG}5 \alpha}{\pi^4 (1+r_{ll}) r_{ll}^{(3/2)}} \\
& - \frac{2}{3} \frac{(r_{ll}-r_{\mu}-r_{\pi}) (r_{ll}+6r_{ll}^2+r_{\mu}-5r_{\mu} r_{ll}-r_{\pi}-6r_{ll} r_{\pi}+r_{ll}^3-2r_{\mu} r_{ll}^2-r_{ll}^2 r_{\pi}+r_{\mu}^2-r_{\mu} r_{\pi}+r_{\mu}^2 r_{ll}-r_{\mu} r_{ll} r_{\pi}) \alpha}{\pi^2 (1+r_{ll}) r_{ll}^{(3/2)}} \\
& + \frac{2(r_{ll}+6r_{ll}^2+r_{\mu}-5r_{\mu} r_{ll}-r_{\pi}-6r_{ll} r_{\pi}+r_{ll}^3-2r_{\mu} r_{ll}^2-r_{ll}^2 r_{\pi}+r_{\mu}^2-r_{\mu} r_{\pi}+r_{\mu}^2 r_{ll}-r_{\mu} r_{ll} r_{\pi}) F_{\text{sqrt}}(r_{ll}) \alpha \text{LOG}8}{\pi^4 (1+r_{ll}) r_{ll}^{(3/2)}} \\
& - \frac{6(r_{ll}+6r_{ll}^2+r_{\mu}-5r_{\mu} r_{ll}-r_{\pi}-6r_{ll} r_{\pi}+r_{ll}^3-2r_{\mu} r_{ll}^2-r_{ll}^2 r_{\pi}+r_{\mu}^2-r_{\mu} r_{\pi}+r_{\mu}^2 r_{ll}-r_{\mu} r_{ll} r_{\pi}) F_{\text{sqrt}}(r_{ll}) \alpha \ln(\pi)}{\pi^4 (1+r_{ll}) r_{ll}^{(3/2)}} \\
& - \frac{2(-r_{ll}+r_{\mu}+r_{\pi}) (r_{ll}+6r_{ll}^2+r_{\mu}-5r_{\mu} r_{ll}-r_{\pi}-6r_{ll} r_{\pi}+r_{ll}^3-2r_{\mu} r_{ll}^2-r_{ll}^2 r_{\pi}+r_{\mu}^2-r_{\mu} r_{\pi}+r_{\mu}^2 r_{ll}-r_{\mu} r_{ll} r_{\pi}) \text{LOG}2 \text{LOG}7 \alpha}{\pi^4 (1+r_{ll}) r_{ll}^{(3/2)}} \\
& - \frac{2(-r_{ll}+r_{\mu}+r_{\pi}) (r_{ll}+6r_{ll}^2+r_{\mu}-5r_{\mu} r_{ll}-r_{\pi}-6r_{ll} r_{\pi}+r_{ll}^3-2r_{\mu} r_{ll}^2-r_{ll}^2 r_{\pi}+r_{\mu}^2-r_{\mu} r_{\pi}+r_{\mu}^2 r_{ll}-r_{\mu} r_{ll} r_{\pi}) \text{DLOG}3 \alpha}{\pi^4 (1+r_{ll}) r_{ll}^{(3/2)}} \\
& + \frac{2(r_{ll}+6r_{ll}^2+r_{\mu}-5r_{\mu} r_{ll}-r_{\pi}-6r_{ll} r_{\pi}+r_{ll}^3-2r_{\mu} r_{ll}^2-r_{ll}^2 r_{\pi}+r_{\mu}^2-r_{\mu} r_{\pi}+r_{\mu}^2 r_{ll}-r_{\mu} r_{ll} r_{\pi}) F_{\text{sqrt}}(r_{ll})}{\pi^3 (1+r_{ll}) r_{ll}^{(3/2)}} \\
& - \frac{1}{2} \frac{F_{\text{sqrt}}(r_{ll}) (6r_{ll}-1+3r_{ll}^2) (-r_{ll}+r_{\pi}) \alpha \ln(\frac{r_{\mu}}{r_{\pi}})}{r_{ll}^{(3/2)} \pi^4 (1+r_{ll})} \\
& - \frac{2(4r_{ll}+5r_{ll}^2+1) \text{LOG}3 \alpha r_{\mu}^3}{\pi^4 r_{ll}^{(5/2)} (1+r_{ll})} \\
& - \frac{6(r_{ll}-r_{\pi})^2 (1+6r_{ll}+r_{ll}^2) \text{LOG}3 \alpha \gamma}{r_{ll}^{(3/2)} \pi^4 (1+r_{ll})} \\
& + \frac{16(-r_{ll}+r_{\mu}+r_{\pi}) (-r_{ll}-6r_{ll}^2-r_{\mu}+5r_{\mu} r_{ll}+r_{\pi}+6r_{ll} r_{\pi}-r_{ll}^3+2r_{\mu} r_{ll}^2+r_{ll}^2 r_{\pi}-r_{\mu}^2+r_{\mu} r_{\pi}-r_{\mu}^2 r_{ll}+r_{\mu} r_{ll} r_{\pi}) \text{LOG}3 \alpha \ln(2)}{\pi^4 (1+r_{ll}) r_{ll}^{(3/2)}}
\end{aligned}
\tag{4.129}$$

dove

$$\left\{ \begin{aligned}
DILOG1 &= \operatorname{dilog} \left(\frac{1}{2} \frac{r_\pi - r_\mu + r_u + \sqrt{r_u^2 - 2r_\mu r_u - 2r_u r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{r_\pi} \right) \\
DILOG2 &= \operatorname{dilog} \left(\frac{1}{2} \frac{r_\mu - r_\pi + r_u + \sqrt{r_u^2 - 2r_\mu r_u - 2r_u r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{r_\mu} \right) \\
DILOG3 &= \operatorname{dilog} \left(\frac{1}{4} \frac{(-r_\pi - r_\mu + r_u + \sqrt{r_u^2 - 2r_\mu r_u - 2r_u r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2})^2}{r_\pi r_\mu} \right) \\
LOG1 &= \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{-r_\pi - r_\mu + r_u + \sqrt{r_u^2 - 2r_\mu r_u - 2r_u r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{r_\mu} \right) \\
LOG2 &= \ln \left(1 + \frac{1}{2} \frac{-r_\pi - r_\mu + r_u + \sqrt{r_u^2 - 2r_\mu r_u - 2r_u r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{r_\pi} \right) \\
LOG3 &= \ln \left(\frac{1}{2} \frac{r_\pi + r_\mu - r_u - \sqrt{r_u^2 - 2r_\mu r_u - 2r_u r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{\sqrt{r_\pi} \sqrt{r_\mu}} \right) \\
LOG4 &= \ln \left(1 - \frac{1}{4} \frac{(-r_\pi - r_\mu + r_u + \sqrt{r_u^2 - 2r_\mu r_u - 2r_u r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2})^2}{r_\pi r_\mu} \right) \\
LOG5 &= \ln \left(\frac{1}{4} \frac{(-r_\pi - r_\mu + r_u + \sqrt{r_u^2 - 2r_\mu r_u - 2r_u r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2})^2}{r_\pi r_\mu} \right) \\
LOG6 &= \ln \left(-\frac{1}{2} \frac{-r_\pi - r_\mu + r_u + \sqrt{r_u^2 - 2r_\mu r_u - 2r_u r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{r_\mu} \right) \\
LOG7 &= \ln \left(-\frac{1}{2} \frac{-r_\pi - r_\mu + r_u + \sqrt{r_u^2 - 2r_\mu r_u - 2r_u r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{r_\pi} \right) \\
LOG8 &= \ln \left(\frac{r_u^2 - 2r_\mu r_u - 2r_u r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}{r_u} \right) \\
F_{\text{sqrt}}(r_u) &= \sqrt{r_u^2 - 2r_\mu r_u - 2r_u r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2} \\
f_-^{EM-loc} &= \frac{1}{48} \frac{-32\pi^2 K_5 - 32\pi^2 K_6 + 96\pi^2 X1 + 96\pi^2 X2 - 96\pi^2 X3 + 9\ln(\Theta)}{\pi^2} \\
f_+^{EM-loc} &= \frac{1}{96} \frac{9\ln(\Theta) + 192\pi^2 K_{12} - 48\pi^2 X6 + 128\pi^2 X1}{\pi^2}
\end{aligned} \right. \quad (4.130)$$

Capitolo 5

Calcolo delle correzioni reali al decadimento del K^+

Fino ad ora ci siamo occupati del calcolo delle correzioni radiative per entrambi i canali di decadimento: quello neutro, K^0 , e quello carico, K^+ . Sappiamo che per ragioni teoriche e sperimentali è necessario calcolare anche la rate di decadimento del processo con emissione di fotone reale. Dal punto di vista teorico è necessario in quanto solo la somma delle ‘rate’ di decadimento del processo a tre corpi e di quello con emissione di fotone reale è libera dalle divergenze infrarosse. Dal punto di vista sperimentale invece, i rivelatori di particelle non permettono di distinguere i processi con emissione di fotone reale soffice da quelli in cui non c’è emissione di fotone a causa dei limiti nella sensibilità dell’apparecchiatura. Dobbiamo quindi calcolare l’ampiezza e il relativo tasso di decadimento Γ dei processi $K^0 \rightarrow \pi^- \mu^+ \nu_\mu \gamma$ e $K^+ \rightarrow \pi^0 \mu^+ \nu_\mu \gamma$. Cominciamo dall’analisi di quest’ultimo processo.

Innanzitutto, in Fig. 5.1 riportiamo i diagrammi rilevanti che producono effetti all’ordine α e le ampiezze di ciascuno:

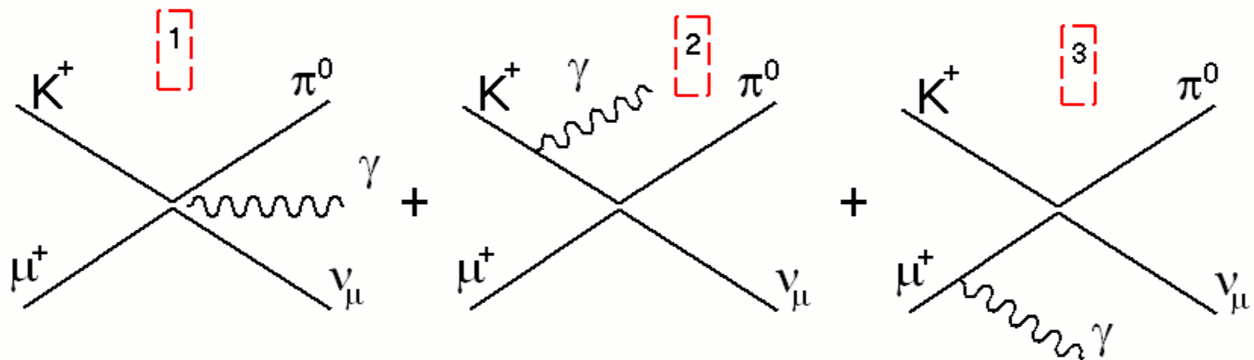


Figura 5.1: Diagrammi del decadimento $K^+ \rightarrow \pi^0 \mu^+ \nu_\mu \gamma$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = -\frac{ieG_F\bar{V}_{us}}{2} \bar{\epsilon}_\rho^r(q) \bar{u}\gamma^\rho(1-\gamma_5)v \\ A_2 = -\frac{ieG_F\bar{V}_{us}}{2} \frac{\bar{\epsilon}\cdot p_k}{q\cdot p_k} \bar{u}(\not{p}_k + \not{p}_\pi - \not{q})(1-\gamma_5)v \\ A_3 = \frac{ieG_F\bar{V}_{us}}{2} \frac{\bar{\epsilon}\cdot p_\mu}{q\cdot p_\mu} \bar{u}(\not{p}_k + \not{p}_\pi)(1-\gamma_5)v + \\ \quad \frac{ieG_F\bar{V}_{us}}{2} \frac{\bar{\epsilon}_\rho^r(q)}{2q\cdot p_\mu} \bar{u}(\not{p}_k + \not{p}_\pi)(1-\gamma_5)\not{q}\gamma^\rho v. \end{array} \right. \quad (5.1)$$

Dell'ampiezza totale del processo, che è data dalla somma delle singole ampiezze, interessa elaborare il modulo quadro $|\mathcal{M}|^2$ sommato sugli spin dei fermioni e sulla polarizzazione dei fotoni emergenti. Esso infatti è parte essenziale dell'integrando del tasso di decadimento Γ che nella sua forma differenziale in n -dimensioni è dato dall'espressione (4.70), dove nel nostro caso, il numero di particelle prodotto del decadimento è $m = 4$. Abbiamo quindi un elemento dello spazio delle fasi dato da (4.71) dove va sostituito appunto $m = 4$. L'elaborazione di $|\mathcal{M}|^2$ avviene ancora attraverso l'uso degli operatori di proiezione delle funzioni d'onda degli spinori definiti dalla (4.77) o anche dalla (4.78) e attraverso l'uso delle proprietà di anticommutazione delle matrici di Dirac. Si generano così delle tracce di matrici di Dirac che possono essere semplificate attraverso le proprietà delle stesse descritte dalle relazioni (4.79) e (4.80). Il risultato finale per il modulo quadro dell'ampiezza è quindi dato da una somma di tracce sulle matrici di Dirac contratte con i quadrimpulsi delle particelle coinvolte nel decadimento. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 = \frac{e^2 G_F^2 |V_{us}|^2}{8m_\mu m_\nu} & \left\{ (n-2) Tr [\not{p}_\mu \not{p}_\nu] - \frac{2}{q\cdot p_k} Tr [\not{p}_\mu \not{p}_k \not{p}_\nu \not{Q}] + \frac{2m_\mu^2}{p_\mu\cdot q} Tr [\not{p}_\nu \not{p}] + \right. \\ & - \frac{n-2}{2(p_\mu\cdot q)} Tr [\not{q} \not{p} \not{p}_\nu \not{p}] + \frac{2p_\mu\cdot p_k}{(q\cdot p_k)(q\cdot p_\mu)} Tr [\not{p}_\mu \not{Q} \not{p}_\nu \not{p}] - \frac{m_\mu^2}{(q\cdot p_\mu)^2} Tr [\not{p}_\mu \not{p} \not{p}_\nu \not{p}] + \\ & \left. - \frac{m_k^2}{(q\cdot p_k)^2} Tr [\not{p}_\mu \not{Q} \not{p}_\mu \not{Q}] \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

dove, come vedremo, gli ultimi due termini produrranno le divergenze infrarosse che cancelleranno quelle presenti nel settore virtuale del calcolo.

Per semplificare il calcolo della rate, si è adottata la stessa strategia della separazione dello spazio delle fasi adottata in precedenza. Nel decadimento radiativo possiamo usare la formula

$$d\Phi_4(p_k; p_\pi, p_\mu, p_\nu, q) = d\Phi_2(l; p_\pi, p_\nu) d\Phi_3(p_k; l, p_\mu, q) (2\pi)^{n-1} dl^2 \quad (5.3)$$

attraverso la quale si separa lo spazio delle fasi di un decadimento a quattro corpi in due spazi delle fasi di due decadimenti a due e a tre corpi. Per fare ciò è necessario introdurre un quadrimpulso l e una variabile ausiliaria l^2 che rappresenta la massa invariante della coppia di particelle (π^0, ν_μ) . La convenienza di tale separazione, esattamente come per il calcolo della rate del processo a tre corpi, risiede nel fatto che ora è possibile semplificare l'espressione della rate integrando in maniera semplice e diretta sullo spazio delle fasi che è

rappresentato da $d\Phi_2(l; p_\pi, p_\nu)$ grazie alle formule descritte in (4.74) dove p_1 e m_1 corrispondono rispettivamente sempre al quadrimpulso e alla massa del pione, mentre p_3 corrisponde al quadrimpulso del neutrino. L'utilizzo di tali formule semplifica di molto la forma della rate di decadimento in quanto ci permette di trasformare il nostro integrale sullo spazio delle fasi a 4 corpi in uno a tre corpi con in più la variabile l^2 . La prima cosa che facciamo è quindi quella di integrare su $d\Phi(l; p_\pi, p_\nu)$ sfruttando le formule (4.74). Ciò comporta una modifica del modulo quadro dell'ampiezza che non dipende più dai quadrimpulsi p_π e p_ν sui quali abbiamo integrato ma dal nuovo quadrimpulso introdotto $l = p_\pi + p_\nu$ e dalla massa invariante di questa coppia di particelle neutre. Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
|\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{e^2 G_F^2 |V_{us}|^2 (l^2 - m_\pi^2)^2 G(l^2, n)}{8m_\mu m_\nu} \left\{ (n-2) Tr [\not{p}_\mu \not{l}] - \frac{2 l^2}{q \cdot p_k} Tr [\not{p}_\mu \not{p}_k] + \right. \\
&- \frac{2}{q \cdot p_k} Tr [\not{p}_\mu \not{p}_k \not{l} (\not{p}_k - \not{q})] + \frac{2 m_\mu^2}{q \cdot p_\mu} Tr [\not{p}_\mu \not{l}] + \frac{8 m_\mu^2 l^2}{q \cdot p_\mu} - \frac{n-2}{2(q \cdot p_\mu)} Tr [\not{q} \not{p}_k \not{l} \not{p}_k] + \\
&- \frac{(n-2) l^2}{(q \cdot p_\mu)} Tr [\not{q} \not{p}_k] - \frac{(n-2) l^2}{2(q \cdot p_\mu)} Tr [\not{q} \not{l}] + \frac{2 p_\mu \cdot p_k}{(q \cdot p_k)(q \cdot p_\mu)} Tr [\not{p}_\mu (\not{p}_k - \not{q}) \not{l} \not{p}_k] + \\
&+ \frac{2 p_\mu \cdot p_k l^2}{(q \cdot p_k)(q \cdot p_\mu)} Tr [\not{p}_\mu (2\not{p}_k - \not{q})] + \frac{2 (p_\mu \cdot p_k) l^2}{(q \cdot p_k)(q \cdot p_\mu)} Tr [\not{p}_k \not{l}] - \frac{m_\mu^2}{(q \cdot p_\mu)^2} Tr [\not{p}_\mu \not{p}_k \not{l} \not{p}_k] + \\
&- \frac{2 m_\mu^2 l^2}{(q \cdot p_\mu)^2} Tr [\not{p}_\mu \not{p}_k] - \frac{m_\mu^2 l^2}{(q \cdot p_\mu)^2} Tr [\not{p}_\mu \not{l}] - \frac{m_k^2}{(q \cdot p_k)^2} Tr [\not{p}_\mu (\not{p}_k - \not{q}) \not{l} (\not{p}_k - \not{q})] + \\
&- \left. \frac{2 m_k^2 l^2}{(q \cdot p_k)^2} Tr [\not{p}_\mu (\not{p}_k - \not{q})] - \frac{m_k^2 l^2}{(q \cdot p_k)^2} Tr [\not{p}_\mu \not{l}] \right\}. \tag{5.4}
\end{aligned}$$

Calcolata la nuova espressione del modulo quadro, il passo successivo consiste nell'elaborare ulteriormente l'integrale (4.70). A tal scopo ci poniamo nel sistema di riferimento di riposo per la particella che decade e scegliamo i seguenti n-vettori

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{p}_k = (m_k, 0, \dots, 0) \quad \mathbf{p}_\mu = (E_\mu, |p_\mu|, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{q} = (E_\gamma, E_\gamma \cos \theta, E_\gamma \sin \theta, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{l} = (E_l, -|p_\mu| - E_\gamma \cos \theta, -E_\gamma \sin \theta, 0, \dots, 0) \end{array} \right. \tag{5.5}$$

dove θ è l'angolo tra il muone e il fotone e la parte spaziale dell'n-vettore $\vec{l} = \vec{p}_k - \vec{p}_\mu - \vec{q}$ è fissata dalla delta di Dirac presente in $d\Phi_3(p_k; l, p_\mu, q)$ come si evince dalla formula (4.71). Utilizziamo quindi $\delta^{n-1}(\vec{p}_k - \vec{p}_\mu - \vec{l} - \vec{q})$ per integrare su $d^{n-1}l$ rimanendo così solo il vincolo che esprime la conservazione dell'energia $\delta(m_k - E_\mu - E_l - E_\gamma)$.

La nostra rate di decadimento è quindi data dell'espressione

$$\Gamma = \frac{2m_\mu m_\nu}{2^{2n-2} \pi^{\frac{2n-1}{2}} m_k \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n-2}{2}\right)} \int_{m_\pi^2}^{(m_k - m_\mu)^2} dl^2 \int_{m_\mu}^{\frac{m_k^2 + m_\mu^2 - l^2}{2m_k}} dE_\mu (E_\mu^2 - m_\mu^2)^{\frac{n-3}{2}} \frac{A(E_\mu, l^2)^{n-3}}{[A(E_\mu, l^2) + l^2]^{\frac{n-3}{2}} C_+(E_\mu)} \int_0^1 \frac{x^{\frac{n-3}{2}} (1-x)^{\frac{n-3}{2}}}{\left(1 - \frac{2\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}}{C_+(E_\mu)} x\right)} dx \int_0^1 d\omega \delta\left(\omega - \frac{(1-x)}{\left(1 - \frac{2\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}}{C_+(E_\mu)} x\right)}\right) |\overline{\mathcal{M}}|^2 \quad (5.6)$$

dove

$$\begin{cases} A(E_\mu, l^2) = m_k^2 + m_\mu^2 - 2m_k E_\mu - l^2 \\ C_+(E_\mu) = m_k - E_\mu + \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} \\ C_-(E_\mu) = m_k - E_\mu - \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} \end{cases} \quad (5.7)$$

e le $\Gamma(\dots)$ sono le funzioni di Eulero. La formula della rate di decadimento è stata ottenuta attraverso un cambio di variabili: siamo passati dalla coppia di variabili (E_γ, θ) alla coppia (x, ω) in maniera tale che entrambe quest'ultime abbiano un range di variabilità da 0 a 1. Inoltre, la variabile ω è direttamente integrabile attraverso l'uso della delta di Dirac sull'energia, come appare chiaro dalla formula (5.6) mentre, l'integrale sulla variabile x genera le funzioni ipergeometriche ed è quindi risolvibile analiticamente. Il cambio di variabile adottato è

$$\begin{cases} E_\gamma = \frac{A(E_\mu, l^2)}{2C_+(E_\mu)} (1 + \xi x) \\ \cos \theta = 1 - 2\omega \end{cases} \quad (5.8)$$

che genera uno jacobiano della trasformazione dato dalla formula

$$\left| \frac{\partial(E_\mu, \theta)}{\partial(x, \omega)} \right| = \frac{A(E_\mu, l^2) \xi}{2 C_+(E_\mu)}. \quad (5.9)$$

Considerando che, grazie alle proprietà delle funzioni trigonometriche e per la definizione (5.8), si ha

$$\sin \theta = 2\omega^{\frac{1}{2}} (1 - \omega)^{\frac{1}{2}}, \quad (5.10)$$

è facile giungere alla relazione (5.6) partendo dalla definizione di rate differenziale espressa nella (4.70) e seguendo la strategia indicata finora.

Analizzando la formula (5.6), ci si può aspettare che, essendo le divergenze infrarosse legate alla mancanza di massa per il fotone, esse emergano nel momento in cui l'energia del fotone si annulla. Ci aspettiamo quindi che tali divergenze appaiano già nel momento

in cui integriamo sulla variabile x , legata all'energia del fotone, e che siano quindi nascoste nelle funzioni ipergeometriche. E' però facile verificare che questo ragionamento conduce a conclusioni sbagliate. Le funzioni ipergeometriche che emergono dall'integrazione sono tutte finite ed espandendole in ϵ si vede che partono dall'ordine zero in tale parametro. Tali divergenze sono quindi nascoste altrove. Se si analizza con maggiore precisione l'intero integrando della rate differenziale, ci si può rendere conto che esse sono generate dal fattore $A(E_\mu, l^2)$ ed emergono solo ed esclusivamente nel momento in cui si integra sull'energia E_μ del muone. Si vede infatti dalla definizione (5.7) che tale fattore si annulla nel momento in cui E_μ raggiunge il suo limite superiore di integrazione. Apparentemente ciò non crea alcun tipo di problema all'integrando in quanto il fattore $A(E_\mu, l^2)$ ha per esponente $n - 3$ che nel momento in cui torniamo nello spazio-tempo quadridimensionale, cioè poniamo $n = 4$, resta positivo. Quindi stando a numeratore nell'integrando, anche annullandosi non genera alcun tipo di divergenza. Il punto che non bisogna trascurare però è la presenza del modulo quadro dell'ampiezza. Esso è la somma di diversi termini tra i quali alcuni proporzionali a

$$|\mathcal{M}|^2 \propto \frac{1}{(q \cdot p_k)^2}, \frac{1}{(q \cdot p_\mu)^2}, \frac{1}{(q \cdot p_k)(q \cdot p_\mu)}. \quad (5.11)$$

Ognuno di questi prodotti scalari genera un fattore E_γ , secondo la scelta fatta in (5.5), e per le trasformazioni in (5.8) ciò si traduce in un fattore $A(E_\mu, l^2)$ a denominatore. Per tali termini del modulo quadro si ha allora un fattore totale nell'integrando dato da $A^{n-5}(E_\mu, l^2)$ che genera la divergenza nel momento in cui calcoliamo l'integrale sull'energia del muone.

Elaboriamo quindi, attorno a tale ragionamento, una strategia per estrarre le divergenze. La scelta più naturale consiste nell'effettuare una opportuna trasformazione di variabile. Consideriamo a tal fine solo i termini che, per quanto detto, sono in grado di generare le divergenze e soffermiamo la nostra attenzione sull'integrale nell'energia del muone. Abbiamo quindi

$$\int_{m_\mu}^{\frac{m_k^2 + m_\mu^2 - l^2}{2m_k}} dE_\mu k(n, E_\mu, l^2) A(E_\mu, l^2) f(n, E_\mu, l^2) \quad (5.12)$$

dove $f(n, E_\mu, l^2)$ racchiude il risultato dell'integrale in x mentre $k(n, E_\mu, l^2)$ racchiude tutti gli altri fattori presenti in (5.6). Definiamo quindi la nuova variabile z attraverso l'espressione

$$z = \frac{A(E_\mu, l^2)}{(m_k - m_\mu)^2 - l^2} \quad (5.13)$$

che sostituisce la variabile E_μ . Il nostro integrale (5.12) diventa quindi

$$\int_0^1 z^{-1-\epsilon} j(z, l^2, \epsilon) dz \quad (5.14)$$

in cui ϵ è sempre legato al parametro dimensionale n dalla relazione $n = 4 - \epsilon$. Questa forma per l'integrale è relativa a tutti i termini in cui sono presenti delle divergenze. La funzione

$j(z, l^2, \epsilon)$ è totalmente libera dalle divergenze, in quanto esse sono nascoste nel fattore $z^{-1-\epsilon}$, e possiamo quindi espanderla in funzione del parametro dimensionale ϵ ottenendo

$$\int_0^1 z^{-1-\epsilon} \left[j(z, l^2, 0) + \epsilon \frac{\partial j(z, l^2, \epsilon)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right] dz. \quad (5.15)$$

A questo punto possiamo utilizzare la tecnica della sottrazione per separare in maniera chiara i termini divergenti da quelli finiti e riscrivere nel seguente modo la formula precedente

$$-\frac{j(0, l^2, 0)}{\epsilon} + \int_0^1 \frac{j(z, l^2, 0) - j(0, l^2, 0)}{z} dz - \frac{\partial j}{\partial \epsilon}(0, l^2, 0). \quad (5.16)$$

Il primo termine, che parametrizza le divergenze infrarosse, e il secondo termine di quest'ultima formula provengono dall'ordine zero dello sviluppo di Taylor della (5.15). In particolare, il fattore $-\frac{1}{\epsilon}$ del primo termine è il risultato dell'integrale

$$\int_0^1 z^{-1-\epsilon} dz = -\frac{1}{\epsilon}, \quad (5.17)$$

mentre il secondo termine è dovuto alla tecnica di sottrazione e allo sviluppo in ϵ di $z^{-1-\epsilon}$. Dal primo ordine della (5.15) invece, tutto ciò che sopravvive è descritto da $-\frac{\partial j}{\partial \epsilon}(0, l^2, 0)$. Ciò è dovuto al fatto che tale termine parte già all'ordine ϵ per cui non produce contributi in $\frac{1}{\epsilon}$. Abbiamo infatti

$$\epsilon \int_0^1 z^{-1-\epsilon} \frac{\partial j(z, l^2, 0)}{\partial \epsilon} = \epsilon \left[\int_0^1 z^{-1-\epsilon} \frac{\partial j(0, l^2, 0)}{\partial \epsilon} + \text{Termine di sottrazione} \right] \quad (5.18)$$

e quindi per i motivi spiegati, i termini di sottrazione sono nulli perché di ordine ϵ .

Con questa strategia, siamo quindi riusciti ad estrarre le divergenze infrarosse che, in seguito ad opportune semplificazioni possiamo scrivere come

$$D_R^+(r_{ll}) := -\frac{(r_{ll} - r_\pi)^2 m_k^5 |V_{us}|^2 G_F^2 \alpha (4r_{ll}^2 - r_\mu - 4r_{ll} + r_\mu^2 - 3r_\mu r_{ll})}{128} \left\{ \frac{\sqrt{\frac{1}{4}(1+r_\mu-r_{ll})^2 - r_\mu}}{\pi^4 r_{ll}^2 \epsilon} - \frac{(-1-r_\mu+r_{ll}) \ln \left(\frac{1}{2} \frac{1+r_\mu-r_{ll}-2\sqrt{\frac{1}{4}(1+r_\mu-r_{ll})^2 - r_\mu}}{\sqrt{r_\mu}} \right)}{2\pi^4 r_{ll}^2 \epsilon} \right\} \quad (5.19)$$

che è esattamente uguale e contraria al totale delle divergenze infrarosse del settore virtuale come è necessario che sia. Per le parti finite abbiamo invece

$$F_R^+(r_{ll}, z) := \frac{m_k^5 \alpha G_F^2 V_{us}^2 (r_{ll} - r_\pi)^2}{512} \left(\frac{\beta (3\beta z - 2 + 4r_{ll}) \text{LOGARITMO}2(1-r_\mu-r_{ll}-\beta z - 2 \text{SQRTZETA}) r_\mu}{(1-r_\mu+r_{ll}+\beta z - 2 \text{SQRTZETA}) \pi^4 r_{ll}^2} \right)$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\beta \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu-r_{II}-\beta z-2 \text{SQRTZETA}) r_\mu^2}{(1-r_\mu+r_{II}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \pi^4 r_{II}^2} - \frac{(-1-r_\mu+r_{II})(-4r_{II}-3r_\mu r_{II}+4r_{II}^2-r_\mu+r_\mu^2)}{\pi^4 r_{II}^2} (\text{DILOG1}-\text{DILOG2}) \\
& - \frac{\beta(5r_{II}-1-2r_\mu) \text{LOGARITMO1} \text{SQRTZETA}}{r_{II}^2 \pi^4} \\
& + \frac{(1+r_\mu-r_{II})(-4r_{II}-3r_\mu r_{II}+4r_{II}^2-r_\mu+r_\mu^2)}{\pi^4 r_{II}^2} (\text{LOGARITMO3}-\text{LOGARITMO4}) \ln(r_{II}-r_\pi) \\
& - \frac{(1-r_\mu-r_{II}-\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \text{SQRTZETA} \text{LOGARITMO2}(2r_{II}-1+\beta z) \beta r_\mu}{\pi^4 r_{II}^2 (\beta z+r_{II})} \\
& + \frac{(-1-r_\mu+r_{II})(-4r_{II}-3r_\mu r_{II}+4r_{II}^2-r_\mu+r_\mu^2)}{\pi^4 r_{II}^2} (\text{LOGARITMO3}-\text{LOGARITMO4}) \ln(r_{II}) \\
& + \frac{(1+r_\mu-r_{II})(-4r_{II}-3r_\mu r_{II}+4r_{II}^2-r_\mu+r_\mu^2)}{\pi^4 r_{II}^2} (\text{LOGARITMO3}-\text{LOGARITMO4}) \ln(\beta) \\
& - \frac{(1+r_\mu-r_{II})(-4r_{II}-3r_\mu r_{II}+4r_{II}^2-r_\mu+r_\mu^2) \text{LOGARITMO2}}{\pi^4 r_{II}^2 z} - \frac{(-1-r_\mu+r_{II})(-4r_{II}-3r_\mu r_{II}+4r_{II}^2-r_\mu+r_\mu^2) \text{LOGARITMO1}}{\pi^4 r_{II}^2 z} \\
& + \frac{(-1-r_\mu+r_{II})(-4r_{II}-3r_\mu r_{II}+4r_{II}^2-r_\mu+r_\mu^2) \text{LOGARITMO5}}{\pi^4 r_{II}^2} \\
& - \frac{(-4r_{II}-3r_\mu r_{II}+4r_{II}^2-r_\mu+r_\mu^2) \text{LOGARITMO6} \text{SQRT}}{\pi^4 r_{II}^2} \\
& + \frac{\beta(2r_{II}-1+\beta z) \text{LOGARITMO2} \text{SQRTZETA} (1-r_\mu+r_{II}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) r_\mu}{\pi^4 r_{II}^2 (\beta z+r_{II})} \\
& - \frac{(-4r_{II}-3r_\mu r_{II}+4r_{II}^2-r_\mu+r_\mu^2) \text{LOGARITMO5} \text{SQRT}}{\pi^4 r_{II}^2} + \frac{(1+r_\mu-r_{II})(-4r_{II}-3r_\mu r_{II}+4r_{II}^2-r_\mu+r_\mu^2) \text{LOGARITMO6}}{\pi^4 r_{II}^2} + \\
& \frac{z^2 \text{LOGARITMO2} \beta^3}{\pi^4 r_{II}^2} - \frac{\text{SQRTZETA} \text{LOGARITMO2} (-1+r_{II}) r_\mu \beta}{r_{II}^2 \pi^4} \\
& - \frac{1}{8} \frac{(-2+2\beta^2 z^2+5r_{II}+5r_{II} \beta z+3r_{II}^2)(-1+r_{II}+\beta z)^2 z \beta^2}{(\beta z+r_{II}) r_{II}^2 \pi^4 \text{SQRTZETA}} \\
& - \frac{1}{4} \frac{z^3 (7-6r_{II}+6r_\mu) \text{SQRTZETA} (1-r_\mu+r_{II}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta^4}{(\beta z+r_{II})^2 \pi^4 r_{II}^2} + \frac{1}{8} \frac{(10+15r_{II}+14\beta z) z \beta^2 r_\mu^3}{(\beta z+r_{II}) r_{II}^2 \pi^4 \text{SQRTZETA}} \\
& + \frac{1}{8} \frac{z \beta^2 (-r_\mu+\beta z+r_{II})(-2r_\mu-2r_{II}-2\beta z+r_\mu^2-2r_\mu r_{II}-2r_\mu \beta z+r_{II}^2+2r_{II} \beta z+\beta^2 z^2)(1-r_\mu+r_{II}+\beta z-2 \text{SQRTZETA})^2}{\pi^4 r_{II}^2 (\beta z+r_{II})^2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{(1-r_\mu-r_{II}-\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \text{SQRTZETA} \text{LOGARITMO2} \beta r_\mu^2}{\pi^4 r_{II}^2 (\beta z+r_{II})} \\
& - \frac{1}{8} \frac{z(-1+8r_\mu^2-6r_{II}-23r_\mu r_{II}+15r_{II}^2+r_\mu) \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu+r_{II}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta^2}{(\beta z+r_{II}) \pi^4 r_{II}^2} \\
& - \frac{1}{4} \frac{\beta^3 z^2 \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu+r_{II}+\beta z-2 \text{SQRTZETA})(1-r_\mu-r_{II}-\beta z-2 \text{SQRTZETA})}{\pi^4 r_{II}^2 (\beta z+r_{II})^2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{z^3 (-11r_{II}+7r_\mu+12) \text{SQRTZETA} \beta^4}{(\beta z+r_{II})^2 \pi^4 r_{II}^2} \\
& - \frac{1}{4} \frac{z^2 (23r_{II}^2-90r_{II}+4r_\mu+7r_\mu^2-30r_\mu r_{II}+13) \text{SQRTZETA} \beta^3}{(\beta z+r_{II})^2 \pi^4 r_{II}^2} \\
& - \frac{1}{2} \frac{r_\mu (1-r_\mu-r_{II}-\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \text{SQRTZETA} (r_{II}+1) \beta}{(\beta z+r_{II}) r_{II}^2 \pi^4} \\
& + \frac{1}{2} \frac{(3\beta z+4r_{II})(-2r_\mu-2r_{II}-2\beta z+r_\mu^2-2r_\mu r_{II}-2r_\mu \beta z+r_{II}^2+2r_{II} \beta z+\beta^2 z^2) z \beta^2}{(\beta z+r_{II}) r_{II}^2 \pi^4 (1-r_\mu+r_{II}+\beta z-2 \text{SQRTZETA})} \\
& + \frac{1}{8} \frac{z^2 (36r_{II}-35r_{II}^2-8r_\mu^3+24r_{II} r_\mu^2+30r_\mu r_{II}-24r_\mu r_{II}^2+8r_{II}^3-9+6r_\mu+3r_\mu^2)(1-r_\mu+r_{II}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta^3}{(\beta z+r_{II})^2 \pi^4 r_{II}^2} \\
& + \frac{1}{8} \frac{z^2 (8r_\mu+1-11r_{II}) \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu+r_{II}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta^3}{(\beta z+r_{II}) \pi^4 r_{II}^2} + \frac{1}{8} \frac{z \beta^2 (16r_{II}+15\beta z) r_\mu^3}{\pi^4 r_{II}^2 (\beta z+r_{II})^2} \\
& + \frac{1}{8} \frac{\beta^3 z^2 \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu-r_{II}-\beta z-2 \text{SQRTZETA})^2}{\pi^4 r_{II}^2 (\beta z+r_{II})^2} + \\
& \frac{1}{4} \frac{(1-r_\mu-r_{II}-\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \text{SQRTZETA} \text{LOGARITMO2} (-8r_{II}+6r_{II}^2+8r_{II} \beta z+2-5\beta z+2\beta^2 z^2) \beta}{\pi^4 r_{II}^2 (\beta z+r_{II})} \\
& + \frac{(-2-2\beta z+9r_{II}-6\beta^2 z^2+10\beta^3 z^3+33\beta^2 z^2 r_{II}-2r_{II} \beta z+4r_{II}^2+36r_{II}^2 \beta z+13r_{II}^3) z \beta^2 r_\mu}{8((\beta z+r_{II}) r_{II}^2 \pi^4 \text{SQRTZETA})} \\
& - \frac{1}{4} \frac{(-1-r_\mu+r_{II})(3r_{II}^2-4r_\mu r_{II}-2r_{II}-1+r_\mu^2-2r_\mu) \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu+r_{II}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta}{(\beta z+r_{II}) \pi^4 r_{II}^2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{(r_{II}+1)(1+r_\mu-r_{II}) \text{SQRTZETA} (1-r_\mu+r_{II}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta}{(\beta z+r_{II})^2 r_{II} \pi^4} \\
& + \frac{1}{8} \frac{z^2 (-8r_\mu-1+11r_{II}) \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu-r_{II}-\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta^3}{(\beta z+r_{II}) \pi^4 r_{II}^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \frac{z^2 (-12r_\mu r_{u1} + 3r_\mu + 6r_{u1}^2 + 3 - 17r_{u1} + 6r_\mu^2) \text{SQRTZETA}(1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta^3}{(\beta z+r_{u1})^2 \pi^4 r_{u1}^2} \\
& - \frac{1}{8} \frac{z \beta^2 (-6r_{u1} + 14r_{u1}^2 - 7\beta z + 25r_{u1} \beta z + 11\beta^2 z^2) (-1+r_{u1}+\beta z)^2}{\pi^4 r_{u1}^2 (\beta z+r_{u1})^2} \\
& + \frac{1}{8} \frac{\beta^3 z^2 \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA})^2}{\pi^4 r_{u1}^2 (\beta z+r_{u1})^2} \\
& + \frac{1}{4} \frac{z^3 (6r_\mu^2 + 6r_\mu - 12r_\mu r_{u1} - 15r_{u1} + 6r_{u1}^2 + 7) (1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta^4}{(\beta z+r_{u1})^2 \pi^4 r_{u1}^2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{z^4 \text{SQRTZETA}(1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta^5}{\pi^4 r_{u1}^2 (\beta z+r_{u1})^2} \\
& + \frac{1}{4} \frac{(-1+r_{u1}) (1-2r_\mu - 2r_{u1} - 2\beta z + r_\mu^2 - 2r_\mu r_{u1} - 2r_\mu \beta z + r_{u1}^2 + 2r_{u1} \beta z + \beta^2 z^2) \beta (1-r_\mu-r_{u1}-\beta z-2 \text{SQRTZETA})}{(\beta z+r_{u1}) r_{u1}^2 \pi^4} \\
& - \frac{2(\beta z+r_{u1}) \beta (-5r_{u1} + 1 + 2r_\mu) \text{LOGARITMO1}}{(1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) r_{u1}^2 \pi^4} \\
& - \frac{1}{2} \frac{z \beta^2 r_\mu^4}{(\beta z+r_{u1}) r_{u1}^2 \pi^4 \text{SQRTZETA}} \\
& + \frac{z \beta^2 (4r_{u1} - 38r_{u1} \beta z - 16r_{u1}^2 + 125r_{u1}^2 \beta z + 44r_{u1}^3 + \beta z - 22\beta^2 z^2 + 118\beta^2 z^2 r_{u1} + 37\beta^3 z^3) r_\mu}{8(\pi^4 r_{u1}^2 (\beta z+r_{u1})^2)} \\
& - \frac{1}{8} \frac{z \beta^2 (26r_{u1} + 46r_{u1}^2 + 23\beta z + 87r_{u1} \beta z + 41\beta^2 z^2) r_\mu^2}{\pi^4 r_{u1}^2 (\beta z+r_{u1})^2} \\
& - \frac{1}{8} \frac{\beta^2 z (1-r_{u1} - 2\beta z + 2r_{u1}^2 + 3r_{u1} \beta z + \beta^2 z^2) \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu-r_{u1}-\beta z-2 \text{SQRTZETA}) r_\mu}{\pi^4 r_{u1}^2 (\beta z+r_{u1}) \text{SQRTZETA}} \\
& - \frac{1}{16} \frac{\beta^2 z (4+4\beta z + 5r_{u1}) \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) r_\mu^2}{\pi^4 r_{u1}^2 (\beta z+r_{u1}) \text{SQRTZETA}} \\
& + \frac{1}{16} \frac{\beta^2 z (4+4\beta z + 5r_{u1}) \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu-r_{u1}-\beta z-2 \text{SQRTZETA}) r_\mu^2}{\pi^4 r_{u1}^2 (\beta z+r_{u1}) \text{SQRTZETA}} \\
& + \frac{1}{8} \frac{\beta^2 z (1-r_{u1} - 2\beta z + 2r_{u1}^2 + 3r_{u1} \beta z + \beta^2 z^2) \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) r_\mu}{\pi^4 r_{u1}^2 (\beta z+r_{u1}) \text{SQRTZETA}} \\
& + \frac{1}{4} \frac{(-1-r_\mu+r_{u1}) (3r_{u1}^2 - 4r_\mu r_{u1} - 2r_{u1} - 1 + r_\mu^2 - 2r_\mu) \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu-r_{u1}-\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta}{(\beta z+r_{u1}) \pi^4 r_{u1}^2} \\
& - \frac{1}{2} \frac{z (43r_{u1} - 85r_{u1}^2 + 4r_{u1}^3 - 8r_\mu^2 + 8r_\mu - 8r_\mu r_{u1}^2 + 4r_{u1} r_\mu^2 + 33r_\mu r_{u1}) \text{SQRTZETA} \beta^2}{(\beta z+r_{u1})^2 \pi^4 r_{u1}^2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\beta (r_{u1}^3 + 2r_{u1}^2 \beta z - r_{u1} + \beta^2 z^2 r_{u1} + r_{u1} \beta z - \beta z) \text{SQRTZETA}(1-r_\mu-r_{u1}-\beta z-2 \text{SQRTZETA})}{\pi^4 r_{u1}^2 (\beta z+r_{u1})^2} \\
& + \frac{2(-4r_{u1} - 3r_\mu r_{u1} + 4r_{u1}^2 - r_\mu + r_\mu^2) (3z\gamma - 4z - 2) \text{SQRT}}{z r_{u1}^2 \pi^4} + \frac{1}{16} \frac{\beta^2 z (-1+r_{u1}+\beta z)^2 \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu-r_{u1}-\beta z-2 \text{SQRTZETA})}{r_{u1} \pi^4 (\beta z+r_{u1}) \text{SQRTZETA}} \\
& - \frac{1}{4} \frac{(-1+r_{u1}) (1-2r_\mu - 2r_{u1} + r_\mu^2 - 2r_\mu r_{u1} + r_{u1}^2) (1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta}{r_{u1} (\beta z+r_{u1})^2 \pi^4} \\
& - \frac{1}{4} \frac{z^3 \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta^4}{(\beta z+r_{u1}) \pi^4 r_{u1}^2} \\
& + \frac{2(-1-r_\mu+r_{u1}) (-4r_{u1} - 3r_\mu r_{u1} + 4r_{u1}^2 - r_\mu + r_\mu^2) (\text{LOGARITMO3} - \text{LOGARITMO4}) \ln(2)}{\pi^4 r_{u1}^2} \\
& + \frac{z(4r_\mu r_{u1} - 8r_{u1} + 14r_{u1}^2 + 11r_\mu r_{u1}^2 - 8r_{u1}^3 - 4r_\mu r_{u1}^3 + 1 + 6r_{u1}^2 r_\mu^2 - 4r_{u1} r_\mu^3 + 4r_\mu^2 - 3r_\mu + r_\mu^4 - 3r_\mu^3 + r_{u1}^4) (1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta^2}{4((\beta z+r_{u1})^2 \pi^4 r_{u1}^2)} \\
& + \frac{1}{8} \frac{z^4 (-8r_\mu - 9 + 8r_{u1}) (1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta^5}{(\beta z+r_{u1})^2 \pi^4 r_{u1}^2} \\
& + \frac{1}{4} \frac{z \beta^2 (-\beta z + \beta^2 z^2 - r_\mu + r_\mu^2 - r_{u1} - 2r_\mu \beta z + 2r_{u1} \beta z + r_{u1}^2 - 2r_\mu r_{u1}) \text{SQRTZETA}(1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA})^2}{\pi^4 r_{u1}^2 (\beta z+r_{u1})^2} \\
& + \frac{1}{4} \frac{z^3 \text{LOGARITMO2}(1-r_\mu-r_{u1}-\beta z-2 \text{SQRTZETA}) \beta^4}{(\beta z+r_{u1}) \pi^4 r_{u1}^2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{(3r_{u1} - 2 + 2\beta z - 4r_\mu) (1-2r_\mu - 2r_{u1} - 2\beta z + r_\mu^2 - 2r_\mu r_{u1} - 2r_\mu \beta z + r_{u1}^2 + 2r_{u1} \beta z + \beta^2 z^2) z \beta^2}{r_{u1}^2 \pi^4 \text{SQRTZETA}(1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA})} \\
& - \frac{3}{2} \frac{(1+r_\mu-r_{u1}) (-4r_{u1} - 3r_\mu r_{u1} + 4r_{u1}^2 - r_\mu + r_\mu^2) (\text{LOGARITMO3} - \text{LOGARITMO4}) \ln(\pi)}{\pi^4 r_{u1}^2} \\
& + \frac{1}{2} \frac{(1+r_\mu-r_{u1}) (-4r_{u1} - 3r_\mu r_{u1} + 4r_{u1}^2 - r_\mu + r_\mu^2) (\text{LOGARITMO3} - \text{LOGARITMO4}) \ln(\frac{1}{4}(1+r_\mu-r_{u1})^2 - r_\mu)}{\pi^4 r_{u1}^2} \\
& - \frac{1}{2} \frac{z(4+r_\mu r_{u1} + 9r_\mu - 12r_{u1}) \text{LOGARITMO2} \beta^2}{\pi^4 r_{u1}^2} \\
& + \frac{2 \text{LOGARITMO2} \beta r_\mu (\beta z+r_{u1}) (-1+r_{u1})}{(1-r_\mu+r_{u1}+\beta z-2 \text{SQRTZETA}) r_{u1}^2 \pi^4} - \frac{7}{4} \frac{z^4 \text{SQRTZETA} \beta^5}{\pi^4 r_{u1}^2 (\beta z+r_{u1})^2} \\
& + \frac{2(-17r_{u1} + 21r_{u1}^2 - 14r_\mu r_{u1} + 4r_\mu^2 - 4r_\mu) \text{SQRTZETA} \beta}{r_{u1} (\beta z+r_{u1})^2 \pi^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \frac{(1+r_\mu-r_u) \left(-4r_u-3r_\mu r_u+4r_u^2-r_\mu+r_\mu^2 \right) (3z\gamma-6z-2) (LOGARITMO3-LOGARITMO4)}{\pi^4 r_u^2 z} - \\
& \frac{1}{4} \frac{\beta \left(-8r_u+6r_u^2+8r_u \beta z+2-5\beta z+2\beta^2 z^2 \right) LOGARITMO2 SQRTZETA (1-r_\mu+r_u+\beta z-2 SQRTZETA)}{\pi^4 r_u^2 (\beta z+r_u)} \\
& - \frac{1}{2} \frac{(r_\mu r_u^2-r_u r_\mu^2-5r_\mu^2-18r_u^2+20r_u-7r_\mu+18r_\mu r_u-2) LOGARITMO2 \beta}{\pi^4 r_u^2} \\
& + \\
& \frac{1}{2} \frac{z (r_u^3+2r_\mu^2-r_\mu^3-3r_\mu r_u^2+3r_\mu r_u+3r_u r_\mu^2+1-6r_u^2) SQRTZETA (1-r_\mu+r_u+\beta z-2 SQRTZETA) \beta^2}{(\beta z+r_u)^2 \pi^4 r_u^2} \\
& + \frac{1}{4} \frac{z^5 (1-r_\mu+r_u+\beta z-2 SQRTZETA) \beta^6}{(\beta z+r_u)^2 \pi^4 r_u^2} - \frac{2z\beta^2 SQRTZETA}{r_u^2 \pi^4 (1-r_\mu+r_u+\beta z-2 SQRTZETA)} \\
& - \frac{2 \left(-4r_u-3r_\mu r_u+4r_u^2-r_\mu+r_\mu^2 \right) LOGARITMO6}{\pi^4 r_u (1-r_\mu+r_u+2 SQRT)} \\
& + \frac{1}{4} \frac{(-1-r_\mu+r_u) \left(-4r_u-3r_\mu r_u+4r_u^2-r_\mu+r_\mu^2 \right) LOGARITMO5^2}{\pi^4 r_u^2} \\
& + \frac{2 \left(-4r_u-3r_\mu r_u+4r_u^2-r_\mu+r_\mu^2 \right) \ln(1-2r_\mu-2r_u+r_\mu^2-2r_\mu r_u+r_u^2) SQRT}{r_u^2 \pi^4} \\
& + \frac{4 \left(-4r_u-3r_\mu r_u+4r_u^2-r_\mu+r_\mu^2 \right) \ln(r_u-r_\mu) SQRT}{r_u^2 \pi^4} \\
& - \frac{1}{2} \frac{(13r_u^2+4r_\mu^2-12r_u-r_\mu-1-13r_\mu r_u) LOGARITMO1 \beta}{\pi^4 r_u^2} \\
& - \frac{12 \left(-4r_u-3r_\mu r_u+4r_u^2-r_\mu+r_\mu^2 \right) \ln(2) SQRT}{r_u^2 \pi^4} - \frac{4 \left(-4r_u-3r_\mu r_u+4r_u^2-r_\mu+r_\mu^2 \right) \ln(r_u) SQRT}{r_u^2 \pi^4} \\
& - \frac{1}{16} \frac{\beta^2 z (-1+r_u+\beta z)^2 LOGARITMO2 (1-r_\mu+r_u+\beta z-2 SQRTZETA)}{r_u \pi^4 (\beta z+r_u) SQRTZETA} \\
& - \frac{1}{8} \frac{\beta^2 z LOGARITMO2 (1-r_\mu-r_u-\beta z-2 SQRTZETA) r_\mu^3}{\pi^4 r_u^2 (\beta z+r_u) SQRTZETA} + \frac{1}{8} \frac{\beta^2 z LOGARITMO2 (1-r_\mu+r_u+\beta z-2 SQRTZETA) r_\mu^3}{\pi^4 r_u^2 (\beta z+r_u) SQRTZETA} \\
& - \frac{1}{4} \frac{(-1-r_\mu+r_u) \left(-4r_u-3r_\mu r_u+4r_u^2-r_\mu+r_\mu^2 \right) LOGARITMO6^2}{\pi^4 r_u^2} - \frac{6 \left(-4r_u-3r_\mu r_u+4r_u^2-r_\mu+r_\mu^2 \right) \ln(\pi) SQRT}{r_u^2 \pi^4} + \\
& \frac{4 \left(-4r_u-3r_\mu r_u+4r_u^2-r_\mu+r_\mu^2 \right) SQRTZETA}{(\beta z+r_u)^2 \pi^4 z} \\
& + \frac{4 \left(-4r_u-3r_\mu r_u+4r_u^2-r_\mu+r_\mu^2 \right) \ln(\beta) SQRT}{r_u^2 \pi^4} - \frac{1}{2} \frac{\left(-4r_u-3r_\mu r_u+4r_u^2-r_\mu+r_\mu^2 \right) LOGARITMO5 (1-r_\mu-r_u-2 SQRT)}{\pi^4 r_u^2} \\
& + \frac{1}{8} \frac{z (-1+8r_\mu^2-6r_u-23r_\mu r_u+15r_u^2+r_\mu) LOGARITMO2 (1-r_\mu-r_u-\beta z-2 SQRTZETA) \beta^2}{(\beta z+r_u) \pi^4 r_u^2} \\
& - \frac{2(-1+r_u) \beta SQRTZETA (1-r_\mu-r_u-\beta z-2 SQRTZETA)}{r_u^2 \pi^4 (1-r_\mu+r_u+\beta z-2 SQRTZETA)} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\beta (2-8r_u-5\beta z+6r_u^2+9r_u \beta z+2\beta^2 z^2) LOGARITMO2 (1-r_\mu-r_u-\beta z-2 SQRTZETA)}{(1-r_\mu+r_u+\beta z-2 SQRTZETA) \pi^4 r_u^2} \\
& - \frac{1}{2} \frac{\beta LOGARITMO2 SQRTZETA (1-r_\mu+r_u+\beta z-2 SQRTZETA) r_\mu^2}{\pi^4 r_u^2 (\beta z+r_u)} \\
& - \frac{1}{2} \frac{z (5r_u-1-2r_\mu) LOGARITMO1 \beta^2}{\pi^4 r_u^2} \\
& - \frac{1}{8} \frac{(6+18\beta^2 z^2+15r_u+39r_u \beta z+21r_u^2+8\beta z) z \beta^2 r_\mu^2}{(\beta z+r_u) r_u^2 \pi^4 SQRTZETA} \Big)
\end{aligned}$$

(5.20)

dove

$$\left\{ \begin{array}{l}
SQRT = \sqrt{\frac{1}{4}(1+r_\mu-r_u)^2-r_\mu} \\
SQRTZETA = \sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u-\frac{1}{2}\left((1-\sqrt{r_\mu})^2-r_u\right)z\right)^2-r_\mu} \\
DILOG1 = \operatorname{dilog}\left(1+\frac{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u\right)^2-r_\mu}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r_\mu+\frac{1}{2}r_u-\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u\right)^2-r_\mu}}\right) \\
LOGARITMO1 = \ln\left(1+\frac{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u-\frac{1}{2}\left((1-\sqrt{r_\mu})^2-r_u\right)z\right)^2-r_\mu}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r_\mu+\frac{1}{2}r_u+\frac{1}{2}\left((1-\sqrt{r_\mu})^2-r_u\right)z-\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u-\frac{1}{2}\left((1-\sqrt{r_\mu})^2-r_u\right)z\right)^2-r_\mu}}\right) \\
LOGARITMO2 = \ln\left(1+\frac{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u-\frac{1}{2}\left((1-\sqrt{r_\mu})^2-r_u\right)z\right)^2-r_\mu}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u-\frac{1}{2}\left((1-\sqrt{r_\mu})^2-r_u\right)z-\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u-\frac{1}{2}\left((1-\sqrt{r_\mu})^2-r_u\right)z\right)^2-r_\mu}}\right) \\
LOGARITMO3 = \ln\left(1+\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}(1+r_\mu-r_u)^2-r_\mu}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r_\mu+\frac{1}{2}r_u-\sqrt{\frac{1}{4}(1+r_\mu-r_u)^2-r_\mu}}\right) \\
LOGARITMO4 = \ln\left(1+\frac{2\sqrt{\frac{1}{4}(1+r_\mu-r_u)^2-r_\mu}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u-\sqrt{\frac{1}{4}(1+r_\mu-r_u)^2-r_\mu}}\right) \\
LOGARITMO5 = \ln\left(1+\frac{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u\right)^2-r_\mu}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u-\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u\right)^2-r_\mu}}\right) \\
DILOG2 = \operatorname{dilog}\left(1+\frac{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u\right)^2-r_\mu}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u-\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u\right)^2-r_\mu}}\right) \\
LOGARITMO6 = \ln\left(1+\frac{2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u\right)^2-r_\mu}}{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}r_\mu+\frac{1}{2}r_u-\sqrt{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}r_\mu-\frac{1}{2}r_u\right)^2-r_\mu}}\right) \\
\beta = 1 - 2\sqrt{r_\mu} + r_\mu - r_u
\end{array} \right. \quad (5.21)$$

Capitolo 6

Calcolo delle correzioni reali al decadimento del K^0

Descriviamo ora il calcolo della rate differenziale di decadimento per i processi con emissione di fotone reale del canale neutro. I diagrammi rilevanti all'ordine α per questo tipo di decadimento sono riportati nella Fig. 6.1 e sono: il diagramma con emissione di fotone dalla particella carica del vertice, il diagramma con emissione di fotone dal pione e il diagramma con emissione di fotone dal leptone carico. Le ampiezze di ciascuno di tali diagrammi sono

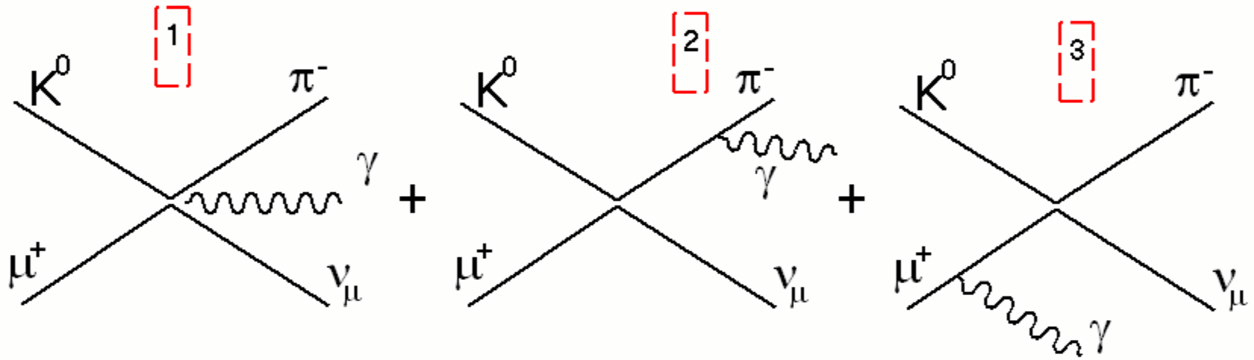


Figura 6.1: Diagrammi del decadimento $K^0 \rightarrow \pi^- \mu^+ \nu_\mu$

le seguenti:

$$\left\{ \begin{array}{l} A_1 = \frac{ieG_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \bar{\epsilon}_\rho^r(q) \bar{u} \gamma^\rho (1 - \gamma_5) v \\ A_2 = -\frac{ieG_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \frac{\bar{\epsilon} \cdot p_\pi}{q \cdot p_\pi} \bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi + \not{q}) (1 - \gamma_5) v \\ A_3 = \frac{ieG_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \frac{\bar{\epsilon} \cdot p_\mu}{q \cdot p_\mu} \bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) v + \\ \quad \frac{ieG_F \bar{V}_{us}}{\sqrt{2}} \frac{\bar{\epsilon}_\rho^r(q)}{2q \cdot p_\mu} \bar{u} (\not{p}_k + \not{p}_\pi) (1 - \gamma_5) \not{q} \gamma^\rho v. \end{array} \right. \quad (6.1)$$

Il primo passo importante è la determinazione del modulo quadro dell'ampiezza di decadimento sommato sugli spin dei fermioni e sulla polarizzazione dei fotoni emergenti. L'elaborazione di $|\mathcal{M}|^2$ avviene sempre attraverso l'uso degli operatori di proiezione delle funzioni d'onda spinoriali definite in (4.77) insieme con l'uso delle proprietà di anticommutazione delle matrici di Dirac. La semplificazione delle tracce che si generano, invece, avviene tramite le relazioni (4.79) e (4.80). Abbiamo quindi

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 = & \frac{e^2 G_F^2 |V_{us}|^2}{8m_\mu m_\nu} \left\{ 2(n-2) \text{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_\nu] + \frac{4}{q \cdot p_\pi} \text{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_\pi \not{p}_\nu \not{Q}] - \frac{4m_\mu^2}{p_\mu \cdot q} \text{Tr} [\not{p}_\nu \not{p}] + \right. \\
& - \frac{n-2}{(p_\mu \cdot q)} \text{Tr} [\not{q} \not{p} \not{p}_\nu \not{p}] + \frac{4p_\mu \cdot q}{(q \cdot p_\pi)(q \cdot p_\mu)} \text{Tr} [\not{p}_\mu \not{Q} \not{p}_\nu \not{p}] - \frac{2m_\mu^2}{(q \cdot p_\mu)^2} \text{Tr} [\not{p}_\mu \not{p} \not{p}_\nu \not{p}] + \\
& \left. - \frac{2m_\pi^2}{(q \cdot p_\pi)^2} \text{Tr} [\not{p}_\mu \not{Q} \not{p}_\nu \not{Q}] \right\}. \tag{6.2}
\end{aligned}$$

La strategia da adottare in questo caso è simile a quella utilizzata nel decadimento radiativo del kaone carico. Si procede infatti, alla separazione dello spazio delle fasi in maniera tale da semplificare il calcolo, ma lo si fa scegliendo un diverso accoppiamento di particelle rispetto al caso precedente. Ciò perché sono diverse le particelle neutre nei due decadimenti. E' necessario infatti non separare le due particelle cariche nei due elementi dello spazio delle fasi in cui si va a separare il principale. Ciò perché una eventuale separazione non permetterebbe di sfruttare le proprietà di invarianza di Lorentz dei prodotti scalari nei coefficienti delle tracce presenti in (6.2)

Per quanto detto quindi siamo costretti a separare $d\Phi_4$ nel seguente modo

$$d\Phi_4(p_k; p_\pi, p_\mu, p_\nu, q) = d\Phi_2(p_k; l, p_\nu) d\Phi_3(l; p_\pi, p_\mu, q) (2\pi)^{n-1} dl^2 \tag{6.3}$$

con la possibilità di integrare in maniera diretta sulle variabili $d\Phi_2(p_k; l, p_\nu)$ grazie alla relazione (4.118). In questo modo otteniamo

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 = & \frac{e^2 G_F^2 |V_{us}|^2 G(l^2, n) (m_k^2 - l^2)}{8m_\mu m_\nu m_k^2} \left\{ (n-2) \text{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_k] + \frac{2}{q \cdot p_\pi} \text{Tr} [\not{p}_\mu \not{p}_\pi \not{p}_k \not{Q}] + \right. \\
& - \frac{2m_\mu^2}{p_\mu \cdot q} \text{Tr} [\not{p}_k \not{p}] - \frac{n-2}{2(p_\mu \cdot q)} \text{Tr} [\not{q} \not{p} \not{p}_k \not{p}] + \frac{2p_\mu \cdot q}{(q \cdot p_\pi)(q \cdot p_\mu)} \text{Tr} [\not{p}_\mu \not{Q} \not{p}_k \not{p}] + \\
& \left. - \frac{m_\mu^2}{(q \cdot p_\mu)^2} \text{Tr} [\not{p}_\mu \not{p} \not{p}_k \not{p}] - \frac{m_\pi^2}{(q \cdot p_\pi)^2} \text{Tr} [\not{p}_\mu \not{Q} \not{p}_k \not{Q}] \right\}. \tag{6.4}
\end{aligned}$$

Come è facile notare, a differenza del caso precedente, questa parte del calcolo è molto semplice grazie al fatto che in ogni traccia compare un singolo quadrimpulso p_ν comune a tutte. Ciò fa sì che, secondo la (4.118) ci sia un unico fattore per ogni traccia e che quindi non cambi di molto la struttura del modulo quadro. Le difficoltà tuttavia si spostano nella parte successiva del calcolo, in quanto, oltre ai vettori l, p_μ, p_π e q presenti in $d\Phi_3(l; p_\pi, p_\mu, q)$

dobbiamo tenere in considerazione anche p_k , in quanto ancora presente nelle tracce della relazione (6.4), e ciò comporta inevitabilmente una maggiore complessità nella struttura dei quadrimpulsi stessi. Abbiamo infatti

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l} = (m_l, 0, \dots, 0) \quad \mathbf{p}_k = (E_k, |\vec{p}_k|, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{p}_\mu = (E_\mu, |\vec{p}_\mu| \cos \theta_\mu, |\vec{p}_\mu| \sin \theta_\mu, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{q} = (E_\gamma, E_\gamma \cos \theta_\gamma, E_\gamma \sin \theta_\gamma \cos \phi, E_\gamma \sin \theta_\gamma \sin \phi, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{p}_\pi = (E_\pi, -\vec{p}_\mu - \vec{q}) \end{array} \right. \quad (6.5)$$

dove abbiamo scelto il sistema di riferimento a riposo per la ‘particella’ l e abbiamo utilizzato la parte spaziale della delta di Dirac presente in $d\Phi_3$ per fissare la struttura spaziale dell’ n -impulso p_π .

La nostra rate di decadimento può quindi essere scritta come

$$d\Gamma = \frac{e^2 G_F^2 |V_{us}|^2 (m_k^2 - l^2) G(l^2, n)}{2E_k 2m_k^2} (2\pi)^{n-1} dl^2 d\Phi_3(l; p_\pi, p_\mu, q) H(l^2, E_\mu, E_\gamma) \quad (6.6)$$

dove

$$\begin{aligned} H(l^2, E_\mu, E_\gamma) = & \left\{ (n-2) Tr [\not{p}_\mu \not{p}_k] + \frac{2}{q \cdot p_\pi} Tr [\not{p}_\mu \not{p}_\pi \not{p}_k \not{Q}] + \right. \\ & - \frac{2m_\mu^2}{p_\mu \cdot q} Tr [\not{p}_k \not{p}] - \frac{n-2}{2(p_\mu \cdot q)} Tr [\not{q} \not{p} \not{p}_k \not{p}] + \frac{2p_\mu \cdot q}{(q \cdot p_\pi)(q \cdot p_\mu)} Tr [\not{p}_\mu \not{Q} \not{p}_k \not{p}] + \\ & \left. - \frac{m_\mu^2}{(q \cdot p_\mu)^2} Tr [\not{p}_\mu \not{p} \not{p}_k \not{p}] - \frac{m_\pi^2}{(q \cdot p_\pi)^2} Tr [\not{p}_\mu \not{Q} \not{p}_k \not{Q}] \right\} \quad (6.7) \end{aligned}$$

e $d\Phi_3$, per le scelte fatte in (6.5), è dato da

$$\begin{aligned} d\Phi_3(l; p_\pi, p_\mu, q) = & \frac{dl^2 (\sin \theta_\mu)^{n-3} d\theta_\mu |\vec{p}_\mu|^{n-2} d|\vec{p}_\mu| (\sin \theta_\gamma)^{n-3} (\sin \phi)^{n-4} d\theta_\gamma d\phi E_\gamma^{n-3} dE_\gamma}{8 (2\pi)^{2n-2} E_\mu E_\pi} \cdot \\ & \delta(m_l - E_\mu - E_\pi - E_\gamma) d\Omega_{n-2} d\Omega_{n-3}. \quad (6.8) \end{aligned}$$

Eseguiamo ora il seguente cambio di variabili al fine di semplificare la struttura di p_μ e di q :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_\mu = \theta_\mu \\ \theta_\gamma = \arctan \left(\frac{\sqrt{\sin^2 \alpha \sin^2 \beta + (\cos \theta_\mu \sin \alpha \cos \beta + \sin \theta_\mu \cos \alpha)^2}}{\cos \theta_\mu \cos \alpha - \sin \theta_\mu \sin \alpha \cos \beta} \right) \\ \phi = \arctan \left(\frac{\sin \alpha \sin \beta}{\cos \theta_\mu \sin \alpha \cos \beta - \sin \theta_\mu \cos \alpha} \right) \end{array} \right. \quad (6.9)$$

ottenendo così per gli n -vettori la nuova espressione

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{l} = (m_l, 0, \dots, 0) \quad \mathbf{p}_\mu = (E_\mu, |\vec{p}_\mu|, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{q} = (E_\gamma, E_\gamma \cos \alpha, E_\gamma \sin \alpha, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{p}_k = \left(\frac{m_k^2 + l^2}{2m_l}, \frac{m_k^2 - l^2}{2m_l} \cos \theta_\mu, -\frac{m_k^2 - l^2}{2m_l} \sin \theta_\mu \cos \beta, \frac{m_k^2 - l^2}{2m_l} \sin \theta_\mu \sin \beta, 0, \dots, 0 \right) \\ \mathbf{p}_\pi = (E_\pi, -\vec{p}_\mu - \vec{q}) \end{array} \right. \quad (6.10)$$

Considerando ora le trasformazioni (6.9) e considerando che lo Jacobiano di tali trasformazioni è

$$\left| J \left(\frac{\partial (\theta_\mu, \theta_\gamma, \phi)}{\partial (\theta_\mu, \alpha, \beta)} \right) \right| = \frac{\sin \alpha}{[\sin \theta_\gamma]_{(\theta_\mu, \alpha, \beta)}} \quad (6.11)$$

è facile verificare che l'elemento dello spazio delle fasi non cambia la sua struttura, ma diventa semplicemente funzione delle nuove variabili introdotte α e β . Abbiamo infatti

$$d\Phi_3(l; p_\pi, p_\mu, q) = \frac{dl^2 (\sin \theta_\mu)^{n-3} d\theta_\mu |\vec{p}_\mu|^{n-2} d|\vec{p}_\mu| (\sin \alpha)^{n-3} d\alpha (\sin \beta)^{n-4} d\beta E_\gamma^{n-3} dE_\gamma}{8 (2\pi)^{2n-2} E_\mu E_\pi} \delta(m_l - E_\mu - E_\pi - E_\gamma) d\Omega_{n-2} d\Omega_{n-3}. \quad (6.12)$$

Come dicevamo in precedenza, la delta presente in quest'ultima espressione può essere utilizzata per fissare il coseno dell'angolo α . Dalle relazioni (6.10), infatti, si ottiene facilmente

$$E_\pi = \sqrt{m_\pi^2 + E_\gamma^2 + E_\mu^2 - m_\mu^2 + 2\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} E_\gamma \cos \alpha} \quad (6.13)$$

in cui l'energia del pione è funzione dell'energia del muone, dell'angolo α e dell'energia del fotone. Tale relazione, inserita nell'argomento della delta, ci permette di giungere al nostro scopo. Prima di fare ciò, tuttavia, come nel caso precedente, effettuiamo un cambio di variabili. Introduciamo le due variabili x e ω in sostituzione dell'energia del fotone e del coseno dell'angolo α rispettivamente. Esse avranno un range di variabilità da 0 a 1 e ci permetteranno di indirizzare il calcolo della rate sugli stessi binari del calcolo del decadimento radiativo del K^+ . Il cambio di variabili è definito da

$$\left\{ \begin{array}{l} E_\gamma = \frac{A}{2C_+} \left(1 + \frac{2\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}}{C_-} x \right) = \frac{A}{2C_+} (1 + \xi x) \\ \cos \alpha = 1 - 2\omega \end{array} \right. , \quad (6.14)$$

molto simile al caso precedente, dove però ora

$$\left\{ \begin{array}{l} A(E_\mu) = l^2 + m_\mu^2 - m_\pi^2 - 2m_l E_\mu \\ C_+(E_\mu) = m_l - E_\mu + \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} \\ C_-(E_\mu) = m_l - E_\mu - \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} \end{array} \right. \quad (6.15)$$

mentre lo jacobiano è dato dalla relazione

$$\left| J \left(\frac{\partial (E_\gamma, \alpha)}{\partial (x, \omega)} \right) \right| = \frac{A \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}}{C_+ C_- \omega^{\frac{1}{2}} (1 - \omega)^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.16)$$

Possiamo quindi utilizzare la delta, in cui ora non abbiamo più $\cos \alpha$ ma la nuova variabile ω per determinare quest'ultima. Abbiamo infatti

$$\delta \left(m_l - E_\mu - E_\gamma - \sqrt{m_\pi^2 + E_\gamma^2 + E_\mu^2 - m_\mu^2 + 2\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} E_\gamma (1 - 2\omega)} \right) \quad (6.17)$$

da cui, risolvendo rispetto a ω otteniamo

$$\bar{\omega} = \frac{C_+ x}{C_- (1 + \xi x)}, \quad \Rightarrow \quad (1 - \bar{\omega}) = \frac{1 - x}{1 + \xi x}. \quad (6.18)$$

Per le proprietà della delta possiamo quindi scrivere

$$\delta(m_l - E_\mu - E_\gamma - E_\pi) = \frac{E_\pi}{2\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} E_\gamma} \delta(\bar{\omega} - \omega). \quad (6.19)$$

Siamo quindi ora in grado di scrivere l'espressione completa per la rate di decadimento considerando che, per ragioni relative alla cinematica, le variabili l^2 ed E_μ variano rispettivamente nel range

$$\begin{cases} (m_\mu + m_\pi)^2 \leq l^2 \leq m_k^2 \\ m_\mu \leq E_\mu \leq \frac{l^2 + m_\mu^2 - m_\pi^2}{2m_l}. \end{cases} \quad (6.20)$$

Anche in questo caso, il primo importante passo è quello di estrarre le divergenze infrarosse che dovranno cancellarsi con quelle provenienti dalla rate del decadimento a tre corpi. Esattamente come nel caso precedente, è possibile verificare che esse sono nascoste nel fattore $A(E_\mu, l^2)$. Tale termine infatti si annulla nel momento in cui l'energia del muone assume il valore corrispondente al suo limite superiore di integrazione. La struttura del modulo quadro del decadimento (6.7) fa sì che, per alcune tracce, in particolare le ultime tre, l'annullarsi del fattore $A(E_\mu, l^2)$ faccia divergere l'integrale. E' opportuno però elaborare una strategia simile a quella adottata nel calcolo radiativo del decadimento del K^+ che prevedeva una opportuna trasformazione di coordinate che facesse passare della variabile E_μ alla variabile z in maniera tale da rendere immediata l'estrazione dei termini divergenti. Operiamo quindi una trasformazione simile alla (5.13). Si ha quindi

$$z = \frac{A(E_\mu, l^2)}{(m_l - m_\mu)^2 - m_\pi^2} \quad (6.21)$$

con la nuova variabile z definita tra 0 e 1. Concentrando la nostra attenzione sui termini divergenti, possiamo quindi scrivere, come nel caso precedente

$$\int_0^1 z^{-1-\epsilon} \left[j(z, l^2, 0) + \epsilon \frac{\partial j(z, l^2, \epsilon)}{\partial \epsilon} \Big|_{\epsilon=0} \right] dz \quad (6.22)$$

che grazie alla tecnica della sottrazione diventa

$$-\frac{j(0, l^2, 0)}{\epsilon} + \int_0^1 \frac{j(z, l^2, 0) - j(0, l^2, 0)}{z} dz - \frac{\partial j}{\partial \epsilon}(0, l^2, 0) \quad (6.23)$$

dove la funzione $j(z, l^2, n)$ riassume l'integrando completo, a parte il fattore $z^{-1-\epsilon}$, dei singoli termini. Abbiamo quindi espanso in ϵ la funzione $j(z, l^2, n)$, in quanto priva di divergenze, prima di separarla in un termine indipendente da z e nel termine rimanente. Per il primo abbiamo utilizzato l'equazione (5.14) ottenendo così le divergenze cercate, mentre i termini restanti sono invece tutti finiti.

Per poter confrontare le divergenze ottenute con quelle del decadimento a tre corpi, è necessario elaborare la rate di decadimento. L'espressione finale per tale grandezza, è data da

$$d\Gamma = \frac{\pi^{\frac{n}{2}} \alpha G_F^2 |V_{us}|^2 (m_k^2 - l^2)^{n-2} (E_\mu^2 - m_\mu^2)^{\frac{n-3}{2}} [(m_l - m_\mu)^2 - m_\pi^2] A^{n-3}}{2^{2n-3} m_k^{n-2} (2\pi)^{2n-2} (m_k^2 + l^2) (C_- C_+)^{\frac{n}{2}-1} \Gamma(\frac{n}{2} - \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{n}{2} - 1) \Gamma(\frac{n}{2} - \frac{3}{2})} \cdot \left[(\sin \theta)^{n-3} (\sin \beta)^{n-4} x^{\frac{n}{2}-2} (1-x)^{\frac{n}{2}-2} \right] \cdot \overline{H}(l^2, z, x, \omega) \, d\mathbf{x} \, d\beta \, d\theta \, dz \, dl^2 \quad (6.24)$$

dove $\overline{H}(l^2, E_\mu, x, \omega)$ è la funzione in (6.7) espressa nelle nuove variabili. In questa espressione, l'integrale nella variabile ω è stato già svolto con l'ausilio della delta di Dirac, mentre gli integrali sugli angoli θ e β possono essere fatti in maniera analitica espandendo il risultato in funzione del parametro ϵ . Non ci sono infatti difficoltà dovute a eventuali presenze degli angoli stessi al denominatore in alcuno dei termini del modulo quadro dell'ampiezza. Analiticamente possono essere calcolati anche gli integrali nella variabile x . Essi producono come risultato delle funzioni ipergeometriche non divergenti esattamente come nel caso precedente. Il risultato finale per le divergenze infrarosse è dato da

$$\begin{aligned} D_R^0(r_U) := & -\frac{1}{128} \frac{(r_U^3 - 2r_U^2 r_\mu + 6r_U^2 - 5r_U r_\mu + r_U + r_\mu + r_U r_\mu^2 + r_\mu^2) \text{SQRT}(-1+r_U)^2 V_{us}^2 G_F^2 \alpha m_k^5}{r_U^{(3/2)} (1+r_U) \pi^4 \epsilon} \\ & + \frac{1}{128} \frac{(r_U^3 - 2r_U^2 r_\mu + 6r_U^2 - 5r_U r_\mu + r_U + r_\mu + r_U r_\mu^2 + r_\mu^2) (-r_\pi - r_\mu + r_U) (-1+r_U)^2 V_{us}^2 G_F^2 \alpha m_k^5 \ln \frac{1}{2} \frac{r_U - r_\mu - r_\pi + \text{SQRT}}{r_\pi \sqrt{\frac{r_\mu}{r_\pi}}}}{((1+r_U) r_U^{(3/2)} \pi^4 \epsilon)} \\ & + \frac{1}{128} \frac{(r_\mu + 1 + r_U^2 + r_U r_\mu + 6r_U) \text{SQRT}(-1+r_U)^2 V_{us}^2 G_F^2 \alpha m_k^5 r_\pi}{r_U^{(3/2)} (1+r_U) \pi^4 \epsilon} \\ & - \frac{1}{128} \frac{(r_\mu + 1 + r_U^2 + r_U r_\mu + 6r_U) (-r_\pi - r_\mu + r_U) (-1+r_U)^2 V_{us}^2 G_F^2 \alpha m_k^5 \ln \frac{1}{2} \frac{r_U - r_\mu - r_\pi + \text{SQRT}}{r_\pi \sqrt{\frac{r_\mu}{r_\pi}}}}{((1+r_U) r_U^{(3/2)} \pi^4 \epsilon)} r_\pi \end{aligned} \quad (6.25)$$

che è esattamente opposto a quelle provenienti dal settore virtuale. Abbiamo quindi ottenuto un risultato importante: la perfetta cancellazione dei termini divergenti. Il risultato finito è invece dato da

$$\begin{aligned}
F_R^0(r_{ll}, z) &:= \frac{m_k^5 G_F^2 V_{us}^2 \alpha (r_{ll}-1)^2}{512} \\
&\left(- \frac{(r_{ll}-r_\mu-r_\pi) (-5 r_{ll} r_\mu + 6 r_{ll}^2 - 6 r_{ll} r_\pi + r_{ll}^3 - 2 r_{ll}^2 r_\mu - r_{ll}^2 r_\pi + r_{ll} + r_\mu - r_\pi + r_{ll} r_\mu^2 - r_{ll} r_\mu r_\pi + r_\mu^2 - r_\mu r_\pi)}{\pi^4 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll})} \text{LOG5 LOG7} \right. \\
&+ \frac{\text{LOG3 } z^3 (2 r_\pi^2 + 2 r_{ll} r_\pi^2 + 32 r_{ll} r_\pi + 3 r_{ll}^3 + 7 r_{ll}^2) \beta^4 r_\mu}{(r_\pi+z\beta)^4 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
&- \frac{\text{LOG3 } r_\pi^4 z (-r_{ll} r_\pi + 27 r_{ll}^2 - r_\pi - 5 + 50 r_{ll}) \beta^2 r_\mu^2}{(r_\pi+z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
&+ \frac{\text{LOG3 } r_\pi^3 z^2 (-55 r_{ll}^2 r_\pi - 42 r_{ll} r_\pi^2 - 235 r_{ll} r_\pi + 152 r_{ll}^2 + 48 r_{ll}^3 - 42 r_\pi^2) \beta^3 r_\mu}{(r_\pi+z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
&+ \frac{\text{LOG3 } z^5 \beta^6 r_\mu^3}{(r_\pi+z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} \pi^4} - \frac{\text{LOG3 } z^4 (-r_{ll} + 1 + 14 r_\pi + 14 r_{ll} r_\pi) \beta^5 r_\mu^2}{(r_\pi+z\beta)^5 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
&- \frac{\text{LOG3 } z^5 (r_{ll}^2 + 144 r_{ll} r_\pi^2 - 12 r_{ll} r_\pi - 14 r_{ll}^3 r_\pi - 78 r_{ll}^2 r_\pi + 27 r_{ll}^2 r_\pi^2 + 21 r_\pi^2 + 6 r_{ll}^3 + r_{ll}^4) \beta^6}{((r_\pi+z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
&- \frac{\text{LOG3 } z^5 (-5 r_\pi - 5 r_{ll} r_\pi + 3 r_{ll}^2 + 6 r_{ll} - 1) \beta^6 r_\mu^2}{(r_\pi+z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
&+ \frac{\text{LOG3 } r_\pi z^2 (5 r_{ll} r_\pi^3 - 56 r_{ll} r_\pi^2 + 57 r_{ll}^2 r_\pi - 24 r_{ll}^2 r_\pi^2 + 21 r_{ll}^3 r_\pi - 12 r_{ll}^3 - 4 r_{ll}^4 + 5 r_\pi^3) \beta^3}{((r_\pi+z\beta)^4 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
&+ \frac{\beta^7 z^6 \text{LOG3}}{(r_\pi+z\beta)^4 \pi^4 r_{ll}^{(3/2)}} \\
&+ \frac{(r_\mu - r_{ll} + r_\pi) (5 r_{ll} r_\mu - 6 r_{ll}^2 + 6 r_{ll} r_\pi - r_{ll}^3 + 2 r_{ll}^2 r_\mu + r_{ll}^2 r_\pi - r_{ll} - r_\mu + r_\pi - r_{ll} r_\mu^2 + r_{ll} r_\mu r_\pi - r_\mu^2 + r_\mu r_\pi) \text{DILOG2}}{(\pi^4 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}))} \\
&- \frac{\text{LOG3 } r_\pi^3 z (4 - 34 r_{ll} + 11 r_{ll} r_\pi + 11 r_\pi - 18 r_{ll}^2) \beta^2 r_\mu^2}{(r_\pi+z\beta)^5 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
&+ \frac{\text{LOG3 } z^5 (24 r_{ll} r_\pi + 5 r_{ll} r_\mu r_\pi + 6 r_\pi + 5 r_\mu r_\pi - 2 r_{ll} - 3 r_\mu^2 + 3 r_{ll}^2 r_\mu - 3 r_{ll} r_\mu^2 - 6 r_{ll}^2 + 2 r_{ll}^2 r_\pi + 15 r_{ll} r_\mu) \beta^6}{((r_\pi+z\beta)^5 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
&+ \frac{(r_{ll} - r_\mu - r_\pi) (-5 r_{ll} r_\mu + 6 r_{ll}^2 - 6 r_{ll} r_\pi + r_{ll}^3 - 2 r_{ll}^2 r_\mu - r_{ll}^2 r_\pi + r_{ll} + r_\mu - r_\pi + r_{ll} r_\mu^2 - r_{ll} r_\mu r_\pi + r_\mu^2 - r_\mu r_\pi) \text{LOG5}^2}{\pi^4 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll})} \\
&+ \frac{\text{LOG3 } r_\pi^5 (r_\mu - r_{ll} + r_\pi) F_5(r_{ll}) \beta}{(r_\pi+z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} - \frac{\text{LOG3 } z^7 (2 r_\mu + 1 + 6 r_{ll} + 2 r_{ll} r_\mu + r_{ll}^2) \beta^8}{(r_\pi+z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
&- \frac{\text{LOG3 } r_\pi^3 z (-87 r_{ll} r_\pi + 58 r_{ll}^2 - r_{ll} r_\pi^2 - 27 r_{ll}^2 r_\pi - r_\pi^2 + 18 r_{ll}^3) \beta^2 r_\mu}{(r_\pi+z\beta)^5 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
&+ \frac{\text{LOG3 } r_\pi^2 z (32 r_{ll} r_\pi + 7 r_{ll} r_\pi^2 + 35 r_{ll}^2 + 15 r_{ll}^3 + 7 r_\pi^2) \beta^2 r_\mu}{(r_\pi+z\beta)^4 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
&- \frac{\text{LOG3 } z^4 r_\pi (50 r_{ll}^2 r_\pi^2 + 255 r_{ll} r_\pi^2 - 30 r_{ll} r_\pi + 33 r_{ll}^3 + 35 r_\pi^2 - 40 r_{ll}^3 r_\pi - 210 r_{ll}^2 r_\pi + 5 r_{ll}^2 + 6 r_{ll}^4) \beta^5}{((r_\pi+z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
&- \frac{\text{LOG3 } r_\pi^4 z (7 r_\pi + 60 r_{ll} r_\pi + 13 r_{ll}^2 r_\pi - 5 r_{ll} - 9 r_{ll}^3 - 42 r_{ll}^2) (-r_{ll} + r_\pi) \beta^2}{(r_\pi+z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
&+ \frac{\text{LOG3 } z^6 (r_{ll} r_\mu + 3 r_{ll} + 1 + r_\mu) \beta^7}{(r_\pi+z\beta)^5 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
&+ \frac{\text{LOG3 } r_\pi^2 z (-r_{ll} + r_\pi) (r_\pi^2 + r_{ll} r_\pi^2 - 28 r_{ll} r_\pi - 10 r_{ll}^2 r_\pi + 15 r_{ll}^2 + 5 r_{ll}^3) \beta^2}{(r_\pi+z\beta)^4 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
&+ \frac{4 F_{SQRTz} \text{LOG3 } r_\pi^3 (r_\mu - r_{ll} + r_\pi) (-r_{ll}^2 + r_{ll} r_\mu + r_\mu - 3 r_{ll}) \beta}{(r_\pi+z\beta)^4 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
&- \frac{2 F_{SQRTz} z (8 r_{ll} r_\mu r_\pi - 4 r_{ll} r_\mu + r_{ll} r_\mu^2 + r_\pi^2 - 2 r_{ll}^2 r_\mu - 4 r_{ll} r_\pi + 3 r_{ll}^2 + r_{ll}^3 + 8 r_\mu r_\pi + r_{ll} r_\pi^2 + r_\mu^2 - 2 r_{ll}^2 r_\pi) \beta^2}{((r_\pi+z\beta)^2 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
&- \frac{4 r_\mu^3 \beta^2 z r_\pi \text{LOG3}}{\pi^4 r_{ll}^{(3/2)} (r_\pi+z\beta)^3} + \frac{16 r_\mu^3 \beta^3 z^2 r_\pi^3 \text{LOG3}}{\pi^4 r_{ll}^{(3/2)} (r_\pi+z\beta)^6} \\
&+ \frac{2 (r_{ll} - r_\mu - r_\pi) (-5 r_{ll} r_\mu + 6 r_{ll}^2 - 6 r_{ll} r_\pi + r_{ll}^3 - 2 r_{ll}^2 r_\mu - r_{ll}^2 r_\pi + r_{ll} + r_\mu - r_\pi + r_{ll} r_\mu^2 - r_{ll} r_\mu r_\pi + r_\mu^2 - r_\mu r_\pi) \text{LOG3}}{r_{ll}^{(3/2)} \pi^4 (1+r_{ll}) z} \\
&+ \frac{1}{2} \frac{\beta^5 \text{LOG3 } z^4}{(r_\pi+z\beta)^2 \pi^4 r_{ll}^{(3/2)}} \\
&+ \frac{4 z^4 F_{SQRTz} \text{LOG3} (2 r_{ll} r_\pi + 2 r_\pi + r_{ll} r_\mu + r_\mu - 2 r_{ll} - r_{ll}^2) \beta^5}{(r_\pi+z\beta)^4 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} \frac{z F_{FR1F5}(r_{II}) F_{SQRTz} \beta^2}{(r_{\pi}+z\beta)^3 r_{II}^{(5/2)} \pi^4 (1+r_{II})} + \frac{1}{8} \frac{\beta^6 F_{SQRTz} LOG3 z^5}{(r_{\pi}+z\beta)^2 \pi^4 r_{II}^{(7/2)}} - \frac{1}{32} \frac{F_{SQRTz} LOG3 z^3 \beta^4 r_{\mu}^3}{(r_{\pi}+z\beta)^3 r_{II}^{(7/2)} \pi^4} \\
& + \frac{1}{4} \frac{r_{\mu}^3 \beta^3 F_{SQRTz} LOG3 z^2}{\pi^4 r_{II}^{(7/2)} (r_{\pi}+z\beta)^2} - \frac{1}{16} \frac{r_{\mu}^4 \beta^3 z^2 LOG3 F_{SQRTz}}{\pi^4 r_{II}^{(7/2)} (r_{\pi}+z\beta)^3} \\
& + \frac{2 LOG3 z^4 r_{\pi} (-35 r_{\pi}^2 - 115 r_{II} r_{\pi} - 35 r_{II} r_{\pi}^2 + 9 r_{II}^3 - 25 r_{II}^2 r_{\pi} + 31 r_{II}^2) \beta^5 r_{\mu}}{(r_{\pi}+z\beta)^6 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4} \\
& - \frac{r_{\mu}^2 \beta^4 z^3 LOG3}{\pi^4 r_{II}^{(3/2)} (r_{\pi}+z\beta)^3} + \frac{LOG3 z^3 \beta^4 r_{\mu}^3}{(r_{\pi}+z\beta)^4 r_{II}^{(3/2)} \pi^4} \\
& - \frac{LOG3 r_{\pi}^2 z^3 (55 r_{II}^2 r_{\pi}^2 + 270 r_{II} r_{\pi}^2 - 60 r_{II}^3 r_{\pi} - 300 r_{II}^2 r_{\pi} + 14 r_{II}^4 + 10 r_{II}^2 + 35 r_{\pi}^2 - 40 r_{II} r_{\pi} + 72 r_{II}^3) \beta^4}{((r_{\pi}+z\beta)^6 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4)} \\
& + \frac{LOG3 r_{\pi}^3 z^2 (5 r_{II} r_{\pi} - 90 r_{II} - 48 r_{II}^2 + 5 r_{\pi} + 10) \beta^3 r_{\mu}^2}{(r_{\pi}+z\beta)^6 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4} \\
& - \frac{LOG3 r_{\pi}^3 z^2 (10 r_{II}^2 + 21 r_{\pi}^2 - 50 r_{II}^3 r_{\pi} + 171 r_{II} r_{\pi}^2 - 240 r_{II}^2 r_{\pi} + 36 r_{II}^2 r_{\pi}^2 - 30 r_{II} r_{\pi} + 78 r_{II}^3 + 16 r_{II}^4) \beta^3}{((r_{\pi}+z\beta)^6 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4)} \\
& + \frac{(r_{II} - r_{\mu} - r_{\pi}) (-5 r_{II} r_{\mu} + 6 r_{II}^2 - 6 r_{II} r_{\pi} + r_{II}^3 - 2 r_{II}^2 r_{\mu} - r_{II}^2 r_{\pi} + r_{II} + r_{\mu} - r_{\pi} + r_{II} r_{\mu}^2 - r_{II} r_{\mu} r_{\pi} + r_{\mu}^2 - r_{\mu} r_{\pi}) DIALOG1}{\pi^4 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II})} \\
& + \frac{LOG3 r_{\pi}^2 z^2 (-24 r_{II}^3 r_{\pi} + 36 r_{II}^3 + 6 r_{II}^4 + 15 r_{\pi}^2 + 20 r_{II}^2 r_{\pi}^2 + 105 r_{II} r_{\pi}^2 - 20 r_{II} r_{\pi} - 132 r_{II}^2 r_{\pi} + 6 r_{II}^2) \beta^3}{((r_{\pi}+z\beta)^5 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4)} \\
& + \frac{LOG3 z^6 (-14 r_{\mu} r_{\pi} - 7 r_{\pi} - 45 r_{II} r_{\pi} - 14 r_{II} r_{\mu} r_{\pi} - 8 r_{II}^2 r_{\pi} + r_{II} r_{\mu}^2 + 12 r_{II}^2 + r_{\mu}^2 - 15 r_{II} r_{\mu} + 2 r_{II} + 2 r_{II}^3 - 3 r_{II}^2 r_{\mu}) \beta^7}{((r_{\pi}+z\beta)^6 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4)} \\
& - \frac{LOG3 z^5 (42 r_{\pi}^2 + 42 r_{II} r_{\pi}^2 + 19 r_{II}^2 r_{\pi} + 91 r_{II} r_{\pi} - 3 r_{II}^3 - 11 r_{II}^2) \beta^6 r_{\mu}}{(r_{\pi}+z\beta)^6 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4} \\
& + \frac{LOG3 z^3 (10 r_{II} r_{\pi}^3 - 54 r_{II} r_{\pi}^2 - 26 r_{II}^2 r_{\pi}^2 + 33 r_{II}^2 r_{\pi} + 13 r_{II}^3 r_{\pi} + 10 r_{\pi}^3 - 3 r_{II}^3 - r_{II}^4) \beta^4}{(r_{\pi}+z\beta)^4 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4} \\
& + \frac{1}{4} \frac{z^2 (86 r_{II} r_{\pi} + 3 r_{II} r_{\pi}^2 + 29 r_{II}^3 - 16 r_{II} + 77 r_{II}^2 - 2 r_{\pi} + 3 r_{\pi}^2 + 88 r_{II}^2 r_{\pi}) F_{SQRTz} \beta^3 r_{\mu}}{(r_{\pi}+z\beta)^3 r_{II}^{(5/2)} \pi^4 (1+r_{II})} \\
& + \frac{1}{32} \frac{F_{SQRTz} LOG3 z (r_{\pi} + r_{II} r_{\pi} + 5 r_{II} + r_{II}^2) (-r_{II} + r_{\pi})^2 (r_{\pi} + r_{II})^3 \beta^2}{(r_{\pi}+z\beta)^3 r_{II}^{(7/2)} (1+r_{II}) \pi^4 r_{\mu}} \\
& + \frac{2 F_{SQRTz} z (-6 r_{II} r_{\mu} r_{\pi} + r_{\pi}^2 + r_{II}^3 - 2 r_{II}^2 r_{\mu} + r_{II} r_{\mu}^2 + r_{\mu}^2 + 3 r_{II}^2 - 6 r_{\mu} r_{\pi} - 4 r_{II}^2 r_{\pi} - 4 r_{II} r_{\mu} - 10 r_{II} r_{\pi} + r_{II} r_{\pi}^2) \beta^2}{((r_{\pi}+z\beta)^2 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4)} \\
& + \frac{2 LOG3 z^4 (-2 r_{II}^2 + 5 r_{\pi}^2 + 5 r_{II} r_{\pi}^2 + 9 r_{II}^2 r_{\pi} + 39 r_{II} r_{\pi}) \beta^5 r_{\mu}}{(r_{\pi}+z\beta)^5 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4} \\
& + \frac{1}{16} \frac{F_{SQRTz} LOG3 z^6 (-r_{II} r_{\mu} + 3 r_{II} r_{\pi} + r_{II}^2 + 3 r_{II} + 3 r_{\pi} - r_{\mu}) \beta^7}{(r_{\pi}+z\beta)^3 r_{II}^{(7/2)} r_{\mu} (1+r_{II}) \pi^4} \\
& - \frac{1}{16} \frac{F_{SQRTz} LOG3 z (r_{\pi} + 3 r_{II}^2 + r_{II} r_{\pi} + 5 r_{II}) \beta^2 r_{\mu}^4}{(r_{\pi}+z\beta)^3 r_{II}^{(7/2)} (1+r_{II}) \pi^4} \\
& + \frac{2 F_{sqr}(r_{II}) F_{Log2}(r_{II}, z) (-5 r_{II} r_{\mu} + 6 r_{II}^2 - 6 r_{II} r_{\pi} + r_{II}^3 - 2 r_{II}^2 r_{\mu} - r_{II}^2 r_{\pi} + r_{II} + r_{\mu} - r_{\pi} + r_{II} r_{\mu}^2 - r_{II} r_{\mu} r_{\pi} + r_{\mu}^2 - r_{\mu} r_{\pi})}{r_{II}^{(3/2)} z (1+r_{II}) \pi^4} \\
& + \frac{2 (r_{II} - r_{\mu} - r_{\pi}) (-5 r_{II} r_{\mu} + 6 r_{II}^2 - 6 r_{II} r_{\pi} + r_{II}^3 - 2 r_{II}^2 r_{\mu} - r_{II}^2 r_{\pi} + r_{II} + r_{\mu} - r_{\pi} + r_{II} r_{\mu}^2 - r_{II} r_{\mu} r_{\pi} + r_{\mu}^2 - r_{\mu} r_{\pi}) LOG2 LOG5}{\pi^4 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II})} \\
& - \frac{1}{2} \frac{r_{\mu}^2 \beta^2 F_{SQRTz} (3 r_{II}^2 + 23 r_{II} r_{\pi} + r_{II} - r_{\pi}^2) z}{(r_{\pi}+z\beta)^3 \pi^4 r_{II}^{(5/2)}} \\
& - \frac{2 r_{\pi}^2 r_{\mu} (-r_{II} r_{\mu} + 5 r_{II} + r_{II} r_{\pi} + r_{\pi} - r_{\mu} + r_{II}^2) LOG3 \beta}{(r_{\pi}+z\beta)^2 (1+r_{II}) r_{II}^{(3/2)} \pi^4} \\
& + \frac{2 F_{SQRTz} LOG3 z^5 (-7 r_{II}^2 r_{\pi} - 39 r_{II} r_{\pi} - 6 r_{\pi} + r_{II} + r_{\mu} - 2 r_{II}^2 r_{\mu} + r_{\mu}^2 + r_{II} r_{\mu}^2 + r_{II}^3 + 6 r_{II}^2 - 5 r_{II} r_{\mu}) \beta^6}{((r_{\pi}+z\beta)^6 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4)} \\
& + \frac{2 LOG3 r_{\pi}^3 z (5 r_{II}^2 r_{\pi} + 24 r_{II} r_{\pi} + 3 r_{\pi} - 15 r_{II}^2 - 2 r_{II} - 3 r_{II}^3) (-r_{II} + r_{\pi}) \beta^2}{(r_{\pi}+z\beta)^5 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4} \\
& - \frac{4 F_{SQRTz} r_{\pi} (r_{\mu} + 2 r_{\mu}^2 - 9 r_{II} r_{\mu} - r_{\pi} + 9 r_{II}^2 + r_{II} + 2 r_{II}^3 - 2 r_{II}^2 r_{\pi} - 4 r_{II}^2 r_{\mu} + 2 r_{II} r_{\mu}^2 - 9 r_{II} r_{\pi}) \beta}{(r_{\pi}+z\beta)^2 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4} \\
& - \frac{2 LOG3 r_{\pi}^2 (-r_{II}^2 + r_{II} r_{\mu} + r_{\mu} - 3 r_{II}) (r_{II}^2 - 2 r_{II} r_{\mu} - 2 r_{II} r_{\pi} + r_{\pi}^2 + r_{\mu}^2) \beta}{(r_{\pi}+z\beta)^3 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4} \\
& \frac{1}{2} \frac{LOG3 z^3 (18 r_{II} r_{\pi}^2 + 18 r_{\pi}^2 - 25 r_{II}^2 r_{\pi} - 30 r_{II} r_{\pi} + 3 r_{\pi} + 10 r_{II}^3 + r_{II} + 27 r_{II}^2) \beta^4}{(r_{\pi}+z\beta)^3 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4} \\
& + \frac{2 F_{SQRTz} LOG3 z^4 (5 r_{\pi} + 4 r_{\mu} r_{\pi} + 4 r_{II} r_{\mu} r_{\pi} + 21 r_{II} r_{\pi} - r_{\mu} - 3 r_{II}^2 + 2 r_{II}^2 r_{\pi} - r_{II} + r_{II} r_{\mu}) \beta^5}{(r_{\pi}+z\beta)^5 r_{II}^{(3/2)} (1+r_{II}) \pi^4} \\
& + \frac{4 (r_{II} r_{\mu} r_{\pi} + 5 r_{II} r_{\mu} + r_{\mu} r_{\pi} + 6 r_{II} r_{\pi} + r_{II}^2 r_{\pi} + r_{II}^2 r_{\mu} - r_{II} - 6 r_{II}^2 + r_{\pi} - r_{II}^3) LOG3 \beta}{r_{II}^{(3/2)} \pi^4 (1+r_{II})} \\
& - \frac{1}{2} \frac{z^3 (-9 r_{II}^2 r_{\pi} - 9 r_{II} r_{\pi} + 3 r_{\pi}^2 - 46 r_{II}^2 - 9 r_{II}^3 - 5 r_{II} + 3 r_{II} r_{\pi}^2) F_{SQRTz} \beta^4}{(r_{\pi}+z\beta)^3 r_{II}^{(5/2)} \pi^4 (1+r_{II})}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{8} \frac{r_\mu^3 \beta^2 F_{SQRTz} (-8r_{ll} + r_\pi - 1) z}{(r_\pi + z \beta)^3 \pi^4 r_{ll}^{(5/2)}} \\
& + \frac{1}{32} \frac{F_{SQRTz} LOG3 z (14r_{ll} r_\pi + 10r_{ll}^2 r_\pi + 15r_{ll}^3 + 35r_{ll}^2 - r_\pi^2 - r_{ll} r_\pi^2) \beta^2 r_\mu^3}{(r_\pi + z \beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& + \frac{1}{16} \frac{F_{SQRTz} LOG3 z^2 (r_{ll} - r_\pi) (r_{ll}^3 + 3r_{ll}^2 - 2r_{ll} r_\pi - 12r_{ll} r_\pi - 3r_{ll} r_\pi^2 - 3r_\pi^2) (r_\pi + r_{ll})^2 \beta^3}{(r_\pi + z \beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4 r_\mu} \\
& - \frac{1}{4} \frac{z^2 (5+3r_{ll}) LOG3 F_{SQRTz} \beta^3 r_\mu^2}{r_{ll}^{(5/2)} (r_\pi + z \beta)^2 \pi^4 (1+r_{ll})} \\
& + \frac{F_{SQRTz} LOG3 z (-12r_\pi^3 r_{ll}^2 + 55r_{ll}^4 + 532r_{ll}^4 r_\pi - r_\pi^4 - 478r_{ll}^2 r_\pi^2 + 1068r_{ll}^3 r_\pi - r_{ll} r_\pi^4 - 20r_{ll} r_\pi^3 - 454r_{ll}^3 r_\pi^2 + 15r_{ll}^5) \beta^2 r_\mu}{32((r_\pi + z \beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
& + \frac{F_{SQRTz} LOG3 z^3 (-3r_{ll} r_\pi^2 - 51r_{ll}^2 r_\pi + 49r_{ll}^4 + 3r_{ll}^2 r_\pi^2 + 8r_{ll}^2 + 127r_{ll}^3 - 5r_{ll} r_\pi^3 - 63r_{ll}^3 r_\pi - 5r_\pi^3) \beta^4}{8((r_\pi + z \beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
& - \frac{4 F_{SQRTz} z (-2r_\pi + r_\mu + r_{ll} + 6r_{ll}^2 + r_{ll}^3 + r_\mu^2 + r_{ll} r_\mu^2 - 2r_{ll}^2 r_\mu - 3r_{ll}^2 r_\pi - 5r_{ll} r_\mu - 15r_{ll} r_\pi) \beta^2}{(r_\pi + z \beta)^2 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& + \frac{2 LOG1 F_{sqt}(r_{ll}) (-5r_{ll} r_\mu + 6r_{ll}^2 - 6r_{ll} r_\pi + r_{ll}^3 - 2r_{ll}^2 r_\mu - r_{ll}^2 r_\pi + r_{ll} + r_\mu - r_\pi + r_{ll} r_\mu^2 - r_{ll} r_\mu r_\pi + r_\mu^2 - r_\mu r_\pi)}{r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& - \frac{LOG3 z^2 (12r_\pi^3 + 3r_\pi^2 + 12r_{ll} r_\pi^3 - 33r_{ll}^2 r_\pi^2 + 2r_{ll} r_\pi - 54r_{ll} r_\pi^2 + 28r_{ll}^3 r_\pi + 78r_{ll}^2 r_\pi - 4r_{ll}^4 - 12r_{ll}^3) \beta^3}{2((r_\pi + z \beta)^3 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}))} \\
& - \frac{(r_{ll} - r_\mu - r_\pi) (-5r_{ll} r_\mu + 6r_{ll}^2 - 6r_{ll} r_\pi + r_{ll}^3 - 2r_{ll}^2 r_\mu - r_{ll}^2 r_\pi + r_{ll} + r_\mu - r_\pi + r_{ll} r_\mu^2 - r_{ll} r_\mu r_\pi + r_\mu^2 - r_\mu r_\pi) LOG4 LOG5}{r_{ll}^{(3/2)} \pi^4 (1+r_{ll})} \\
& + \frac{1}{4} \frac{z (r_\pi + r_{ll}) (2r_{ll}^3 + r_{ll}^2 r_\pi + 8r_{ll}^2 - r_{ll} r_\pi - r_{ll} r_\pi^2 - r_\pi^2) LOG3 F_{SQRTz} \beta^2 r_\mu}{(r_\pi + z \beta)^2 r_{ll}^{(7/2)} \pi^4 (1+r_{ll})} \\
& - \frac{1}{8} \frac{z F_6(r_{ll}) LOG3 F_{SQRTz} \beta^2}{(r_\pi + z \beta)^2 r_{ll}^{(7/2)} \pi^4 (1+r_{ll})} \\
& - \frac{LOG3 r_\pi z (3r_{ll} r_\pi^3 - 19r_{ll}^2 r_\pi^2 + 3r_\pi^3 + 26r_{ll}^3 r_\pi - 8r_{ll}^4 + r_\pi^2 - 24r_{ll}^3 - 42r_{ll} r_\pi^2 + r_{ll} r_\pi + 75r_{ll}^2 r_\pi) \beta^2}{2((r_\pi + z \beta)^3 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
& + \frac{1}{4} \frac{\beta^5 F_{SQRTz} (r_{ll}^2 + 6r_{ll} r_\mu - 4r_\mu r_\pi + r_\mu^2 + 2r_\pi - 5r_\pi^2) z^4}{(r_\pi + z \beta)^3 \pi^4 r_\mu r_{ll}^{(5/2)}} \\
& + \frac{4r_\mu^3 \beta^3 z^2 r_\pi LOG3}{\pi^4 r_{ll}^{(3/2)} (r_\pi + z \beta)^4} \\
& - \frac{1}{8} \frac{F_{SQRTz} LOG3 z^4 (-2r_{ll}^2 r_\pi + 5r_\pi^2 + 2r_{ll} r_\pi + 5r_{ll} r_\pi^2 + 21r_{ll}^3 + 17r_{ll}^2) \beta^5}{(r_\pi + z \beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& - \frac{6 LOG3 r_\pi^2 z^2 (4r_\pi + 1 - 3r_{ll}^2 + 4r_{ll} r_\pi - 6r_{ll}) \beta^3 r_\mu^2}{(r_\pi + z \beta)^5 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& - \frac{4r_\pi^2 (-5r_{ll} r_\mu + 6r_{ll}^2 - 6r_{ll} r_\pi + r_{ll}^3 - 2r_{ll}^2 r_\mu - r_{ll}^2 r_\pi + r_{ll} + r_\mu - r_\pi + r_{ll} r_\mu^2 - r_{ll} r_\mu r_\pi + r_\mu^2 - r_\mu r_\pi) F_{SQRTz}}{(r_\pi + z \beta)^2 r_{ll}^{(3/2)} \pi^4 (1+r_{ll}) z} \\
& - \frac{4 F_{SQRTz} LOG3 z^3 r_\pi F_{12}(r_{ll}) \beta^4}{(r_\pi + z \beta)^5 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& - \frac{1}{8} \frac{F_{SQRTz} LOG3 z^2 (41r_{ll}^2 - 3r_\pi^2 - 3r_{ll} r_\pi^2 - 2r_{ll}^2 r_\pi + 37r_{ll}^3 - 6r_{ll} r_\pi) \beta^3 r_\mu^2}{(r_\pi + z \beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& - \frac{6r_\mu^3 \beta^2 z r_\pi^3 LOG3}{\pi^4 r_{ll}^{(3/2)} (r_\pi + z \beta)^5} - \frac{1}{8} \frac{\beta^2 F_{SQRTz} (-1+r_\pi) (r_{ll} - r_\pi)^2 (r_\pi + r_{ll})^2 z}{(r_\pi + z \beta)^3 r_\mu \pi^4 r_{ll}^{(5/2)}} \\
& + \frac{4 LOG2 F_{sqt}(r_{ll}) (5r_{ll} r_\mu - 6r_{ll}^2 + 6r_{ll} r_\pi - r_{ll}^3 + 2r_{ll}^2 r_\mu + r_{ll}^2 r_\pi - r_{ll} - r_\mu + r_\pi - r_{ll} r_\mu^2 + r_{ll} r_\mu r_\pi - r_\mu^2 + r_\mu r_\pi)}{(r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
& + \frac{2 F_{SQRTz} LOG3 r_\pi^3 z^2 (-74r_{ll} r_\mu + 16r_{ll} r_\mu^2 - 32r_{ll}^2 r_\mu + 78r_{ll}^2 + 16r_{ll}^3 + 16r_\mu^2 + 10r_\mu + 10r_{ll} - 120r_{ll} r_\pi - 25r_{ll}^2 r_\pi - 15r_\pi) \beta^3}{((r_\pi + z \beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
& + \frac{1}{2} \frac{r_\mu \beta^4 (12r_{ll} - 13r_\pi + 1) z^3 LOG3}{\pi^4 r_{ll}^{(3/2)} (r_\pi + z \beta)^3} \\
& - \frac{1}{8} \frac{z^2 F_{SQRTz} \beta^3 r_\mu^3}{(r_\pi + z \beta)^3 r_{ll}^{(5/2)} \pi^4} + \frac{2 LOG4 F_{sqt}(r_{ll}) (-5r_{ll} r_\mu + 6r_{ll}^2 - 6r_{ll} r_\pi + r_{ll}^3 - 2r_{ll}^2 r_\mu - r_{ll}^2 r_\pi + r_{ll} + r_\mu - r_\pi + r_{ll} r_\mu^2 - r_{ll} r_\mu r_\pi + r_\mu^2 - r_\mu r_\pi)}{r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& - \frac{z^2 (-9r_{ll} r_\pi^2 - 9r_{ll}^2 r_\pi^2 + 2r_{ll} r_\pi^3 + 8r_{ll}^2 - 26r_{ll} r_\pi + 7r_{ll}^4 - 34r_{ll}^3 r_\pi - 188r_{ll}^2 r_\pi + 47r_{ll}^3 + 2r_\pi^3) F_{SQRTz} \beta^3}{2((r_\pi + z \beta)^3 r_{ll}^{(5/2)} \pi^4 (1+r_{ll}))} \\
& - \frac{4r_\pi^3 (-5r_{ll} r_\mu + 6r_{ll}^2 - 6r_{ll} r_\pi + r_{ll}^3 - 2r_{ll}^2 r_\mu - r_{ll}^2 r_\pi + r_{ll} + r_\mu - r_\pi + r_{ll} r_\mu^2 - r_{ll} r_\mu r_\pi + r_\mu^2 - r_\mu r_\pi) F_{SQRTz}}{r_{ll}^{(3/2)} (r_\pi + z \beta)^3 \pi^4 (1+r_{ll}) z} \\
& + \frac{1}{4} \frac{\beta^4 F_{SQRTz} (-r_{ll}^2 + 3r_{ll}^2 r_\pi + 3r_\pi^2 - 5r_\pi^3) z^3}{r_\mu \pi^4 r_{ll}^{(5/2)} (r_\pi + z \beta)^3} \\
& + \frac{LOG5 F_{Log1}(r_{ll}, z) (-5r_{ll} r_\mu + 6r_{ll}^2 - 6r_{ll} r_\pi + r_{ll}^3 - 2r_{ll}^2 r_\mu - r_{ll}^2 r_\pi + r_{ll} + r_\mu - r_\pi + r_{ll} r_\mu^2 - r_{ll} r_\mu r_\pi + r_\mu^2 - r_\mu r_\pi) (r_{ll} - r_\mu - r_\pi)}{r_{ll}^{(3/2)} z \pi^4 (1+r_{ll})} \\
& - \frac{2 LOG3 r_\pi z^3 (13r_{ll} r_\pi - 7r_{ll} - 3r_{ll}^2 + 13r_\pi + 2) \beta^4 r_\mu^2}{(r_\pi + z \beta)^5 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{4} \frac{z(3r_u^2+9r_u+3r_u r_\pi+5r_\pi) \text{LOG3 } F_{SQRTz} \beta^2 r_\mu^2}{r_u^{(5/2)} (r_\pi+z\beta)^2 \pi^4 (1+r_u)} + \frac{1}{2} \frac{r_\mu^2 \beta^4 F_{SQRTz} z^3}{\pi^4 r_u^{(5/2)} (r_\pi+z\beta)^3} \\
& - \frac{\text{LOG3 } z^3 (13r_u r_\pi+13r_\pi+5r_u+3r_u^2) \beta^4 r_\mu^2}{(r_\pi+z\beta)^4 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& - \frac{(r_u-r_\mu-r_\pi) (-5r_u r_\mu+6r_u^2-6r_u r_\pi+r_u^3-2r_u^2 r_\mu-r_u^2 r_\pi+r_u+r_\mu-r_\pi+r_u r_\mu^2-r_u r_\mu r_\pi+r_\mu^2-r_\mu r_\pi)}{\pi^4 r_u^{(3/2)} (1+r_u)} \text{LOG1 LOG5} \\
& + \frac{\text{LOG3 } r_\pi z (-r_\pi+12r_u^2-r_u r_\pi+20r_u) \beta^2 r_\mu^2}{(r_\pi+z\beta)^3 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& - \frac{\text{LOG3 } r_\pi z^2 (21r_\pi+21r_u r_\pi+12r_u^2+20r_u) \beta^3 r_\mu^2}{(r_\pi+z\beta)^4 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& - \frac{\text{LOG3 } z^5 (-5r_\pi-5r_u r_\pi+3r_u^2+r_u r_\mu+r_\mu+5r_u) \beta^6}{(r_\pi+z\beta)^4 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& + \frac{\text{LOG3 } z^4 (10r_u^2 r_\pi^2-10r_u r_\pi-4r_u^3 r_\pi+15r_\pi^2+3r_u^3+r_u^2+75r_u r_\pi^2-42r_u^2 r_\pi) \beta^5}{(r_\pi+z\beta)^5 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& - \frac{\text{LOG3 } r_\pi^4 (r_\mu-r_u+r_\pi) (r_\mu+2r_\mu^2-9r_u r_\mu-r_\pi+9r_u^2+r_u+2r_u^3-2r_u^2 r_\pi-4r_u^2 r_\mu+2r_u r_\mu^2-9r_u r_\pi)}{(r_\pi+z\beta)^5 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \beta \\
& + \frac{\text{LOG3 } z^4 r_\pi (10r_\pi+5-18r_u^2+10r_u r_\pi-35r_u) \beta^5 r_\mu^2}{(r_\pi+z\beta)^6 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& - \frac{\text{LOG3 } r_\pi^2 z^2 (-5r_\pi^2-168r_u r_\pi-48r_u^2 r_\pi-5r_u r_\pi^2+66r_u^2+18r_u^3) \beta^3 r_\mu}{(r_\pi+z\beta)^5 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& + \frac{\text{LOG3 } z^4 (10r_\pi^2+10r_u r_\pi^2-2r_\mu r_\pi-26r_u r_\pi-14r_u^2 r_\pi-2r_u r_\mu r_\pi+7r_u^2-3r_u r_\mu^2+8r_u r_\mu+3r_u^3-3r_\mu^2) \beta^5}{((r_\pi+z\beta)^4 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4)} \\
& + \frac{\text{LOG3 } r_\pi^4 z (-23r_u^2 r_\pi-14r_u r_\pi^2+27r_u^3-14r_\pi^2+83r_u^2-95r_u r_\pi) \beta^2 r_\mu}{(r_\pi+z\beta)^6 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& + \frac{2 \text{LOG3 } r_\pi^3 (-r_u^2+r_u r_\mu+r_\mu-3r_u) (r_u^2-2r_u r_\mu-2r_u r_\pi+r_\mu^2-2r_\mu r_\pi+r_\pi^2) \beta}{(r_\pi+z\beta)^4 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& + \frac{1}{32} \frac{(r_u-r_\mu+r_\pi+z\beta)^2 z^2 (-3r_\mu^2-6r_u r_\mu+2r_\mu+2r_u-2r_\pi-4r_u r_\pi+3r_\pi^2+r_u^2) (r_\mu-r_u+r_\pi+z\beta)^2 \beta^3}{(r_\pi+z\beta)^3 r_u^{(5/2)} F_{SQRTz} r_\mu \pi^4} \\
& + \frac{4 F_{SQRTz} z^2 (-r_u r_\pi+2r_u-r_\pi-2r_u r_\mu+r_u^2-2r_\mu) \beta^3}{(r_\pi+z\beta)^2 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} - \frac{3}{2} \frac{\beta^6 z^5 \text{LOG3}}{(r_\pi+z\beta)^3 \pi^4 r_u^{(3/2)}} \\
& + \frac{4 F_{SQRTz} \text{LOG3 } z^2 r_\pi F_{10}(r_u) \beta^3}{(r_\pi+z\beta)^4 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} + \frac{14r_\mu^3 \beta^4 z^3 r_\pi^2 \text{LOG3}}{\pi^4 r_u^{(3/2)} (r_\pi+z\beta)^6} \\
& - \frac{4 F_{SQRTz} z^2 (-r_\pi+r_u^2+2r_u+2r_\mu-r_u r_\pi+2r_u r_\mu) \beta^3}{(r_\pi+z\beta)^2 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& 4 F_{SQRTz} r_\pi (3r_u r_\pi+r_u^2 r_\pi+2r_u^2 r_\mu+4r_u r_\mu+r_\mu r_\pi-r_\mu^2+r_u r_\mu r_\pi-r_u^3-r_u r_\mu^2-3r_u^2) \beta \\
& \quad \quad \quad (r_\pi+z\beta)^2 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4 \\
& - \frac{1}{2} \frac{\beta^4 \text{LOG3} (r_u-3r_\pi+1-r_\mu) z^3}{(r_\pi+z\beta)^2 \pi^4 r_u^{(3/2)}} \\
& - \frac{2 F_{SQRTz} \text{LOG3 } r_\pi^5 (-2r_u^3+9r_u r_\pi+4r_u^2 r_\mu+r_\pi-r_\mu-r_u+9r_u r_\mu+2r_u^2 r_\pi-9r_u^2-2r_\mu^2-2r_u r_\mu^2)}{(r_\pi+z\beta)^6 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& + \frac{2 \text{LOG3 } r_\pi z^3 (10r_\pi^2+60r_u r_\pi^2-54r_u^2 r_\pi+10r_u^2 r_\pi^2-10r_u r_\pi+9r_u^3-8r_u^3 r_\pi+2r_u^2+r_u^4) \beta^4}{((r_\pi+z\beta)^5 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4)} \\
& + \frac{z^3 (3r_u^2 r_\pi+6r_u^2+3r_\pi^2+4r_u^3-2r_u r_\mu+3r_u r_\pi^2-3r_u r_\mu r_\pi-3r_\mu r_\pi+9r_u r_\pi) \text{LOG3 } F_{SQRTz} \beta^4}{4((r_\pi+z\beta)^2 r_u^{(7/2)} \pi^4 (1+r_u))} \\
& + \frac{1}{2} \frac{\beta^5 (7r_u-12r_\pi-1-3r_\mu) z^4 \text{LOG3}}{(r_\pi+z\beta)^3 \pi^4 r_u^{(3/2)}} \\
& - \frac{\beta^2 z (r_u-r_\mu+r_\pi+z\beta)^2 F_1(r_u) (r_\pi+r_u r_\pi-r_\mu+z\beta+5r_u-r_u r_\mu+r_u z\beta+r_u^2) F_2(r_u) (-r_\mu+r_u-r_\pi-z\beta) \text{LOG3}}{128(\pi^4 (1+r_u) r_u^{(7/2)} (r_\pi+z\beta)^3 r_\mu F_{SQRTz})} \\
& + \frac{2 F_{SQRTz} \text{LOG3 } z^5 (r_u r_\mu+3r_u+1+r_\mu) \beta^6}{(r_\pi+z\beta)^5 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& - \\
& \frac{1}{2} \frac{\text{LOG3 } z^2 (21r_u r_\pi^2+21r_\pi^2-2r_\pi-32r_u^2 r_\pi-34r_u r_\pi+28r_u^2+12r_u^3) \beta^3 r_\mu}{(r_\pi+z\beta)^3 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& - \frac{4r_\pi (-2r_u^2 r_\pi-2r_\pi-2r_\mu r_\pi-2r_u r_\mu r_\pi-12r_u r_\pi+r_u+r_u r_\mu^2-5r_u r_\mu+6r_u^2+r_u^3-2r_u^2 r_\mu+r_\mu+r_\mu^2) F_{SQRTz} \beta}{((r_\pi+z\beta)^2 r_u^{(3/2)} \pi^4 (1+r_u))} \\
& - \frac{8\beta r_\pi^2 r_\mu F_{SQRTz}}{(r_\pi+z\beta)^2 \pi^4 r_u^{(3/2)}} + \frac{2 \text{LOG3 } z^2 (-r_u r_\pi-r_\pi+5r_u+3r_u^2) \beta^3 r_\mu^2}{(r_\pi+z\beta)^3 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& + \frac{4 \text{LOG3 } r_\pi z^2 (2r_\pi^2+12r_u r_\pi+7r_u^2+2r_u r_\pi^2+3r_u^3) \beta^3 r_\mu}{(r_\pi+z\beta)^4 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4} \\
& - \frac{2 \text{LOG3 } r_\pi z^3 \beta^4 r_\mu^3}{(r_\pi+z\beta)^5 r_u^{(3/2)} \pi^4} + \frac{2 F_{SQRTz} \text{LOG3 } r_\pi^2 z F_9(r_u) \beta^2}{(r_\pi+z\beta)^4 r_u^{(3/2)} (1+r_u) \pi^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} \frac{z^4 (-r_\mu + 3r_{ll} + 2r_{ll} r_\pi + r_{ll}^2 + 2r_\pi - r_{ll} r_\mu) \text{LOG3 } F_{\text{SQRT}_z} \beta^5}{(r_\pi + z\beta)^2 r_{ll}^{(7/2)} \pi^4 (1+r_{ll})} \\
& - \frac{1}{16} \frac{F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } z^2 F_8(r_{ll}) \beta^3}{(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} - \frac{4 F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } r_\pi^2 (-r_{ll}^2 + r_{ll} r_\mu + r_\mu - 3r_{ll}) (r_\mu - r_{ll} + r_\pi) \beta}{(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& + \frac{2 F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } r_\pi^4 z (5r_{ll} + 5r_\mu - 18r_{ll}^2 r_\mu - 11r_{ll}^2 r_\pi + 9r_\mu^2 + 9r_{ll} r_\mu^2 - 6r_\pi + 9r_{ll}^3 + 42r_{ll}^2 - 41r_{ll} r_\mu - 51r_{ll} r_\pi) \beta^2}{((r_\pi + z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
& - \frac{1}{8} \frac{F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } z (69r_{ll}^3 r_\pi + 5r_{ll}^4 - r_\pi^3 - 3r_{ll} r_\pi^2 - r_{ll} r_\pi^3 + 15r_{ll}^3 + 73r_{ll}^2 r_\pi - r_{ll}^2 r_\pi^2) \beta^2 r_\mu^2}{(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& - \frac{1}{16} \frac{F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } z F_7(r_{ll}) \beta^2}{(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} - \frac{4r_\pi^2 F_3(r_{ll}) F_{\text{SQRT}_z} \beta}{r_{ll}^{(3/2)} (r_\pi + z\beta)^3 \pi^4 (1+r_{ll})} \\
& - \frac{1}{8} \frac{\beta^7 F_{\text{SQRT}_z} z^6}{(r_\pi + z\beta)^3 \pi^4 r_\mu r_{ll}^{(5/2)}} + \frac{1}{6} \frac{(-5r_{ll} r_\mu + 6r_{ll}^2 - 6r_{ll} r_\pi + r_{ll}^3 - 2r_{ll}^2 r_\mu - r_{ll}^2 r_\pi + r_{ll} r_\mu^2 - r_{ll} r_\mu r_\pi + r_\mu^2 - r_\mu r_\pi) (r_\mu - r_{ll} + r_\pi)}{\pi^2 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll})} \\
& + \frac{1}{32} \frac{(2r_\mu - 1 + r_\pi) (r_{ll} - r_\mu + r_\pi + z\beta)^2 z (r_{ll}^2 - 2r_{ll} r_\mu - 2r_{ll} r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2) (r_\mu - r_{ll} + r_\pi + z\beta)^2 \beta^2}{r_{ll}^{(5/2)} F_{\text{SQRT}_z} r_\mu (r_\pi + z\beta)^3 \pi^4} \\
& - \frac{2 \text{LOG3 } r_\pi z^3 (-5r_{ll} r_\pi^2 - 81r_{ll} r_\pi - 21r_{ll}^2 r_\pi + 15r_{ll}^2 + 3r_{ll}^3 - 5r_\pi^2) \beta^4 r_\mu}{(r_\pi + z\beta)^5 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& + \frac{1}{32} \frac{z^4 (r_{ll} - r_\mu + r_\pi + z\beta)^2 (r_\mu - r_{ll} + r_\pi + z\beta)^2 \beta^5}{r_{ll}^{(5/2)} F_{\text{SQRT}_z} r_\mu (r_\pi + z\beta)^3 \pi^4} \\
& + \frac{2 \text{LOG3 } r_\pi^2 z^3 (-35r_\pi^2 - 35r_{ll} r_\pi^2 - 35r_{ll}^2 r_\pi - 155r_{ll} r_\pi + 69r_{ll}^2 + 21r_{ll}^3) \beta^4 r_\mu}{(r_\pi + z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& - \frac{2 F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } r_\pi^4 (r_\mu + 2r_\mu^2 - 9r_{ll} r_\mu - r_\pi + 9r_{ll}^2 + r_{ll} + 2r_{ll}^3 - 2r_{ll}^2 r_\pi - 4r_{ll}^2 r_\mu + 2r_{ll} r_\mu^2 - 9r_{ll} r_\pi) \beta}{(r_\pi + z\beta)^5 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} + \frac{9r_\mu^3 \beta^2 z r_\pi^4 \text{LOG3}}{\pi^4 r_{ll}^{(3/2)} (r_\pi + z\beta)^6} \\
& + \frac{F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } z^2 (-9r_{ll}^2 r_\pi^2 + 139r_{ll}^3 - r_{ll} r_\pi^3 - 15r_{ll} r_\pi^2 - r_\pi^3 - 131r_{ll}^3 r_\pi + 69r_{ll}^4 - 143r_{ll}^2 r_\pi) \beta^3 r_\mu}{8(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& - \frac{1}{2} \frac{r_\mu^2 \beta^3 F_{\text{SQRT}_z} (7r_{ll} - 2r_\pi) z^2}{\pi^4 r_{ll}^{(5/2)} (r_\pi + z\beta)^3} \\
& + \frac{1}{16} \frac{F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } z^2 (5r_{ll}^2 - r_\pi + 7r_{ll} - r_{ll} r_\pi) \beta^3 r_\mu^3}{(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& + \frac{4 F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } r_\pi^2 z^3 (36r_{ll}^2 + 7r_{ll}^3 + 7r_\mu^2 + 5r_\mu + 5r_{ll} - 75r_{ll} r_\pi - 15r_{ll}^2 r_\pi - 10r_\pi - 33r_{ll} r_\mu + 7r_{ll} r_\mu^2 - 14r_{ll}^2 r_\mu) \beta^4}{((r_\pi + z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
& - \frac{z r_\pi (r_\mu - r_{ll} - r_\pi^2 + 7r_\mu r_\pi - r_{ll}^2 + 8r_{ll}^2 r_\mu - 8r_{ll} r_\mu^2 + r_\pi - 8r_\mu^2 + 2r_{ll} r_\pi + 7r_{ll} r_\mu r_\pi - r_{ll} r_\pi^2 + r_{ll}^2 r_\pi + 41r_{ll} r_\mu) \text{LOG3 } \beta^2}{2((r_\pi + z\beta)^2 (1+r_{ll}) r_{ll}^{(3/2)} \pi^4)} \\
& + \frac{2 F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } z^4 r_\pi (-20r_{ll}^2 r_\pi - 105r_{ll} r_\pi + 5r_{ll} + 5r_\mu + 6r_\mu^2 + 6r_{ll}^3 - 15r_\pi + 33r_{ll}^2 + 6r_{ll} r_\mu^2 - 12r_{ll}^2 r_\mu - 29r_{ll} r_\mu) \beta^5}{((r_\pi + z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
& + \frac{1}{8} \frac{F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } z^4 (5r_{ll} r_\pi^3 - r_{ll}^3 r_\pi - 3r_{ll}^3 + 5r_\pi^3 + 5r_{ll}^2 r_\pi^2 + 15r_{ll} r_\pi^2 + 3r_{ll}^2 r_\pi - r_{ll}^4) \beta^5}{(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4 r_\mu} \\
& - \frac{6r_\mu^3 \beta^3 z^2 r_\pi^2 \text{LOG3}}{\pi^4 r_{ll}^{(3/2)} (r_\pi + z\beta)^5} \\
& - \frac{3}{16} \frac{F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } z^3 (r_{ll} r_\pi^2 + 37r_{ll}^2 + 6r_{ll}^2 r_\pi + 33r_{ll}^3 + 10r_{ll} r_\pi + r_\pi^2) \beta^4 r_\mu}{(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& + \frac{2 \text{LOG3 } r_\pi^2 z^3 (5 + 5r_\pi - 21r_{ll}^2 - 40r_{ll} + 5r_{ll} r_\pi) \beta^4 r_\mu^2}{(r_\pi + z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& - \frac{1}{4} \frac{z^2 (3r_\pi + 3r_{ll} r_\pi + 7r_{ll} + 3r_{ll}^2) (-r_{ll} + r_\pi) \text{LOG3 } F_{\text{SQRT}_z} \beta^3 r_\mu}{(r_\pi + z\beta)^2 r_{ll}^{(7/2)} \pi^4 (1+r_{ll})} \\
& + \frac{6r_\mu^3 \beta^5 r_\pi z^4 \text{LOG3}}{\pi^4 r_{ll}^{(3/2)} (r_\pi + z\beta)^6} + \frac{5r_\mu^3 \beta^2 z r_\pi^2 \text{LOG3}}{\pi^4 r_{ll}^{(3/2)} (r_\pi + z\beta)^4} \\
& + \frac{2 F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } z^3 (6r_{ll} r_\pi^2 + 6r_\pi^2 + 8r_{ll} r_\mu r_\pi + 8r_\mu r_\pi - 8r_{ll}^2 r_\pi - 18r_{ll} r_\pi + r_{ll} r_\mu^2 + r_\mu^2 - 4r_{ll} r_\mu - 2r_{ll}^2 r_\mu + 3r_{ll}^2 + r_{ll}^3) \beta^4}{((r_\pi + z\beta)^4 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
& + \frac{1}{8} \frac{F_{\text{SQRT}_z} \text{LOG3 } z^3 (3r_{ll} r_\pi + 3r_{ll} + r_{ll}^2 + 3r_\pi) \beta^4 r_\mu^2}{(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} + \frac{1}{32} \frac{\beta^8 z^7 \text{LOG3 } F_{\text{SQRT}_z}}{(r_\pi + z\beta)^3 \pi^4 r_\mu r_{ll}^{(7/2)}} \\
& - \frac{1}{8} \frac{\beta^6 F_{\text{SQRT}_z} (5r_\pi + 2r_\mu - 1) z^5}{(r_\pi + z\beta)^3 \pi^4 r_\mu r_{ll}^{(5/2)}} + \frac{2z (r_{ll}^2 + r_{ll} r_\mu + 1 + 6r_{ll} + r_\mu) \text{LOG3 } \beta^2}{r_{ll}^{(3/2)} \pi^4 (1+r_{ll})} \\
& - \frac{1}{8} \frac{\beta^3 F_{\text{SQRT}_z} (r_\pi + r_{ll}) (r_{ll} - r_\pi) (r_{ll}^2 + 4r_\pi - 5r_\pi^2) z^2}{r_\mu \pi^4 r_{ll}^{(5/2)} (r_\pi + z\beta)^3} - \frac{2\beta^4 F_{\text{SQRT}_z} z^3}{(r_\pi + z\beta)^2 \pi^4 r_{ll}^{(3/2)}} \\
& + \frac{2z r_\pi (3r_{ll}^2 - r_\pi + 3r_{ll} r_\mu - r_{ll} r_\pi + 13r_{ll} + 3r_\mu + 2) F_{\text{SQRT}_z} \beta^2}{(r_\pi + z\beta)^2 r_{ll}^{(3/2)} \pi^4 (1+r_{ll})} \\
& - \frac{5 \text{LOG3 } r_\pi^2 z (3r_{ll} r_\pi + 3r_{ll}^2 + 3r_\pi + 5r_{ll}) \beta^2 r_\mu^2}{(r_\pi + z\beta)^4 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& + \frac{1}{32} \frac{(r_{ll} - r_\mu + r_\pi + z\beta)^2 z^3 (-1 + 3r_\pi - 2r_{ll}) (r_\mu - r_{ll} + r_\pi + z\beta)^2 \beta^4}{(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(5/2)} F_{\text{SQRT}_z} r_\mu \pi^4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{8} \frac{F_{SQRTz} LOG3 z^4 (r_\pi + 3r_{ll}^2 + r_{ll} r_\pi + 5r_{ll}) \beta^5 r_\mu}{(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} - \\
& \frac{1}{2} \frac{LOG3 r_\pi z (-29r_{ll} r_\pi + 56r_{ll}^2 - r_\pi + 15r_{ll} r_\pi^2 - 28r_{ll}^2 r_\pi + 15r_\pi^2 + 24r_{ll}^3) \beta^2 r_\mu}{(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& + \frac{1}{4} \frac{z F_4(r_{ll}) F_{SQRTz} \beta^2 r_\mu}{(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(5/2)} \pi^4 (1+r_{ll})} + \frac{1}{8} \frac{r_\mu^2 \beta^5 z^4 LOG3 F_{SQRTz}}{\pi^4 r_{ll}^{(7/2)} (r_\pi + z\beta)^3} - \frac{1}{4} \frac{r_\mu^4 \beta^2 F_{SQRTz} z}{(r_\pi + z\beta)^3 \pi^4 r_{ll}^{(5/2)}} \\
& + \frac{F_{SQRTz} LOG3 z^3 (r_\pi + r_{ll})(15r_{ll} r_\pi^3 + 15r_\pi^3 + 45r_{ll} r_\pi^2 + 5r_{ll}^2 r_\pi^2 - 11r_{ll}^3 r_\pi - 27r_{ll}^2 r_\pi - 9r_{ll}^3 - r_{ll}^4) \beta^4}{32((r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} (1+r_{ll}) \pi^4 r_\mu)} \\
& - \frac{z^2(4r_{ll} r_\pi + 2r_{ll} r_\mu r_\pi - 3r_{ll} r_\pi^2 - 3r_\pi^2 + 2r_\mu r_\pi + 2r_{ll}^2 r_\pi + 2r_\pi + r_\mu - 4r_{ll} r_\mu^2 - r_{ll} - 4r_\mu^2 - r_{ll}^2 + 4r_{ll}^2 r_\mu + 21r_{ll} r_\mu) LOG3 \beta^3}{2((r_\pi + z\beta)^2 (1+r_{ll}) r_{ll}^{(3/2)} \pi^4)} \\
& - \frac{F_{SQRTz} LOG3 z^5 (-15r_{ll} r_\pi^2 + 10r_\mu r_\pi + r_\mu^2 + 2r_{ll} r_\mu - 10r_{ll}^2 r_\pi - 15r_\pi^2 + 10r_{ll} r_\mu r_\pi + r_{ll} r_\mu^2 - 3r_{ll}^2 - 2r_{ll}^2 r_\mu + r_{ll}^3 - 30r_{ll} r_\pi) \beta^6}{32((r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} r_\mu (1+r_{ll}) \pi^4)} \\
& + \frac{1}{4} \frac{z(4r_{ll} + 2r_{ll}^2 + r_\pi + r_{ll} r_\pi) LOG3 F_{SQRTz} \beta^2 r_\mu^3}{r_{ll}^{(7/2)} (r_\pi + z\beta)^2 \pi^4 (1+r_{ll})} + \frac{4 F_{SQRTz} z^2 (6r_{ll} + 1 + r_{ll}^2) \beta^3}{(r_\pi + z\beta)^2 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& + \frac{2\beta^3 F_{SQRTz} (r_{ll} - 2r_\pi + r_\mu) z^2}{(r_\pi + z\beta)^2 \pi^4 r_{ll}^{(3/2)}} - \frac{2r_\mu^3 \beta^3 z^2 LOG3}{\pi^4 r_{ll}^{(3/2)} (r_\pi + z\beta)^3} \\
& - \frac{2 F_{SQRTz} LOG3 z^6 (6r_{ll} + 1 + r_{ll}^2) \beta^7}{(r_\pi + z\beta)^6 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} - \frac{4 F_{SQRTz} LOG3 r_\pi^2 z^2 F_{FR4C10}(r_{ll}) \beta^3}{(r_\pi + z\beta)^5 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} \\
& - \frac{2 F_{SQRTz} LOG3 r_\pi^3 z F_{11}(r_{ll}) \beta^2}{(r_\pi + z\beta)^5 r_{ll}^{(3/2)} (1+r_{ll}) \pi^4} + \frac{2\beta^6 z^5 LOG3 F_{SQRTz}}{(r_\pi + z\beta)^4 \pi^4 r_{ll}^{(3/2)}} + \frac{1}{32} \frac{F_{SQRTz} LOG3 z \beta^2 r_\mu^5}{(r_\pi + z\beta)^3 r_{ll}^{(7/2)} \pi^4} \\
& - \frac{1}{8} \frac{z LOG3 F_{SQRTz} \beta^2 r_\mu^4}{r_{ll}^{(7/2)} (r_\pi + z\beta)^2 \pi^4} + \frac{1}{4} \frac{r_\mu \beta^4 F_{SQRTz} (28r_{ll} + 3r_\pi - 1) z^3}{\pi^4 r_{ll}^{(5/2)} (r_\pi + z\beta)^3} \\
& - \frac{z^2(-9r_{ll} r_\pi^2 - 12r_{ll}^2 r_\pi - 8r_{ll}^3 r_\pi + 4r_{ll}^2 + r_{ll}^4 - 3r_{ll}^2 r_\pi^2 - 2r_{ll} r_\pi^3 - 2r_\pi^3 + 7r_{ll}^3) LOG3 F_{SQRTz} \beta^3}{4((r_\pi + z\beta)^2 r_{ll}^{(7/2)} \pi^4 (1+r_{ll}))}
\end{aligned}$$

(6.26)

dove

$$\left\{ \begin{aligned}
& DILOG1 = \operatorname{dilog} \left(\frac{ru - r_\mu - r_\pi + \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{ru - r_\mu - r_\pi - \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}} \right) \\
& LOG1 = \ln \left(\frac{\frac{1}{2} ru - r_\mu + r_\pi - \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{\sqrt{ru}} \right) \\
& LOG2 = \ln \left(\frac{\frac{1}{2} \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{\sqrt{ru}} \right) \\
& LOG3 = \ln \left(1 + \frac{2 \sqrt{\left(\frac{1}{2} ru + \frac{1}{2} r_\mu - \frac{1}{2} r_\pi - \frac{1}{2} ((\sqrt{ru} - \sqrt{r_\mu})^2 - r_\pi) z\right)^2 - ru r_\mu}}{\frac{1}{2} ru - \frac{1}{2} r_\mu - \frac{1}{2} r_\pi - \frac{1}{2} ((\sqrt{ru} - \sqrt{r_\mu})^2 - r_\pi) z} - \sqrt{\left(\frac{1}{2} ru + \frac{1}{2} r_\mu - \frac{1}{2} r_\pi - \frac{1}{2} ((\sqrt{ru} - \sqrt{r_\mu})^2 - r_\pi) z\right)^2 - ru r_\mu}} \right) \\
& DILOG2 = \operatorname{dilog} \left(\frac{2 \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{ru - r_\mu - r_\pi + \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}} \right) \\
& LOG4 = \ln \left(\frac{\frac{1}{2} ru - r_\mu + r_\pi + \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{\sqrt{ru}} \right) \\
& LOG5 = \ln \left(\frac{ru - r_\mu - r_\pi + \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{ru - r_\mu - r_\pi - \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}} \right) \\
& LOG6 = \ln \left(\frac{ru - r_\mu - r_\pi + \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{ru - r_\mu - r_\pi - \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}} \right) \\
& LOG7 = \ln \left(\frac{2 \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}}{ru - r_\mu - r_\pi - \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}} \right) \\
& \beta = (\sqrt{ru} - \sqrt{r_\mu})^2 - r_\pi \\
& F_{SQRTz}(ru, z) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} ru + \frac{1}{2} r_\mu - \frac{1}{2} r_\pi - \frac{1}{2} ((\sqrt{ru} - \sqrt{r_\mu})^2 - r_\pi) z\right)^2 - ru r_\mu} \\
& F_{\text{sqrt}}(ru) = \sqrt{ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi + r_\pi^2}
\end{aligned} \right. \tag{6.27}$$

e anche

$$\left\{ \begin{array}{l}
F_{FR1F5}(ru) = 2ru^3 - 6r_\pi^3 ru^2 - 90ru r_\pi^2 + ru r_\pi^4 - 6ru r_\pi^3 - 98ru^3 r_\pi^2 + 286ru^3 r_\pi + ru^5 \\
\quad + 46ru^4 r_\pi + 48ru^2 r_\pi + r_\pi^4 + 3ru^4 - 572ru^2 r_\pi^2 \\
F_8(ru) = -260ru^4 r_\pi - 32ru^2 r_\pi + 102ru^2 r_\pi^2 + 4ru r_\pi^3 + 126ru^3 r_\pi^2 + 5r_\pi^4 - 700ru^3 r_\pi \\
\quad + 205ru^4 - 4r_\pi^3 ru^2 + 69ru^5 + 5ru r_\pi^4 \\
F_7(ru) = 34r_\pi^3 ru^2 + ru r_\pi^5 + 133ru^5 r_\pi + 3ru^6 + 42ru^3 r_\pi^3 + 13ru^5 + ru r_\pi^4 - ru^2 r_\pi^4 \\
\quad - 226ru^4 r_\pi^2 - 16ru^2 r_\pi^2 - 638ru^3 r_\pi^2 + r_\pi^5 + 397ru^4 r_\pi \\
F_{FR4C10}(ru) = -5r_\pi - 2r_\mu r_\pi - 2ru r_\mu r_\pi - 33ru r_\pi + 3r_\mu + 18ru^2 - 6ru^2 r_\pi + 3ru \\
\quad - 15ru r_\mu + 3r_\mu^2 - 6ru^2 r_\mu + 3ru r_\mu^2 + 3ru^3 \\
F_{Log1}(ru, z) = -3z \ln(\pi) + 2z \ln((\sqrt{ru} - \sqrt{r_\mu})^2 - r_\pi) + 2z \ln(\frac{1}{16} - \frac{1}{16} ru) + 3\gamma z + 4z \ln(2) \\
\quad - 3z - 2 \\
F_{Log2}(ru, z) = 5z + 2 - 3\gamma z - 4z \ln(2) - 2z \ln(\frac{1}{16} - \frac{1}{16} ru) - 2z \ln((\sqrt{ru} - \sqrt{r_\mu})^2 - r_\pi) \\
\quad + 3z \ln(\pi) \tag{6.28} \\
F_1(ru) = ru^2 - 2ru r_\mu - 2ru r_\pi - 2ru z \%1 + r_\mu^2 - 2r_\mu r_\pi - 2r_\mu z \%1 + r_\pi^2 + 2r_\pi z \%1 \\
\quad + z^2 \%1^2 \\
\quad \%1 := (\sqrt{ru} - \sqrt{r_\mu})^2 - r_\pi \\
F_2(ru) = r_\mu^2 - 2ru r_\mu - 4r_\mu z \%1 - 4r_\mu r_\pi + ru^2 - z^2 \%1^2 - r_\pi^2 - 2r_\pi z \%1 \\
\quad \%1 := (\sqrt{ru} - \sqrt{r_\mu})^2 - r_\pi \\
F_3(ru) = -4r_\pi + 3r_\mu + 3ru + 3ru r_\mu^2 - 4r_\mu r_\pi + 3r_\mu^2 - 4ru^2 r_\pi - 15ru r_\mu - 4ru r_\mu r_\pi \\
\quad - 6ru^2 r_\mu + 3ru^3 + 18ru^2 - 24ru r_\pi \\
F_4(ru) = 7ru^3 - 48ru r_\pi + 4ru^4 + r_\pi^3 + 108ru^2 r_\pi^2 + 93ru^3 r_\pi + 107ru r_\pi^2 + ru r_\pi^3 + 3ru^2 \\
\quad - r_\pi^2 + 237ru^2 r_\pi \\
F_5(ru) = 2r_\mu^2 + 2ru r_\mu^2 - 9ru r_\mu - 4ru^2 r_\mu + r_\mu - 2r_\mu r_\pi - 2ru r_\mu r_\pi - 9ru r_\pi - 2ru^2 r_\pi \\
\quad + 9ru^2 + 2ru^3 - r_\pi + ru
\end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
F_6(r_u) = -8r_u^3 r_\pi^2 - r_u r_\pi^4 + 2r_u^4 r_\pi - 2r_\pi^3 r_u^2 - 12r_u^2 r_\pi^2 + 8r_u^2 r_\pi + 14r_u^3 r_\pi - 6r_u r_\pi^3 \\
\qquad \qquad \qquad + r_u^5 - r_\pi^4 + 5r_u^4 \\
F_{10}(r_u) = 2r_u^3 + 6r_u r_\mu r_\pi + 2r_u r_\mu^2 - 8r_u r_\mu - 4r_u^2 r_\mu + 2r_\pi^2 + 6r_\mu r_\pi - 6r_u^2 r_\pi - 15r_u r_\pi \\
\qquad \qquad \qquad + 2r_u r_\pi^2 + 2r_\mu^2 + 6r_u^2 \\
F_9(r_u) = 5r_u r_\mu^2 + 5r_\mu^2 + 8r_\mu r_\pi - 20r_u r_\mu + 8r_u r_\mu r_\pi - 10r_u^2 r_\mu - 22r_u r_\pi + 15r_u^2 \\
\qquad \qquad \qquad - 8r_u^2 r_\pi + 5r_u^3 + r_\pi^2 + r_u r_\pi^2 \qquad (6.29) \\
F_{11}(r_u) = 4r_\mu - 5r_\pi + 30r_u^2 - r_\mu r_\pi - 8r_u^2 r_\pi + 4r_u - 28r_u r_\mu - 39r_u r_\pi - r_u r_\mu r_\pi + 6r_\mu^2 \\
\qquad \qquad \qquad - 12r_u^2 r_\mu + 6r_u r_\mu^2 + 6r_u^3 \\
F_{12}(r_u) = -5r_\pi - 3r_\mu r_\pi - 3r_u r_\mu r_\pi - 27r_u r_\pi + 2r_\mu + 9r_u^2 - 4r_u^2 r_\pi + 2r_u - 6r_u r_\mu + r_\mu^2 \\
\qquad \qquad \qquad - 2r_u^2 r_\mu + r_u r_\mu^2 + r_u^3
\end{array} \right.$$

Capitolo 7

Analisi

Abbiamo finora calcolato i fattori di forma per entrambi i canali di decadimenti confrontando i risultati con quelli noti in letteratura pubblicati in Cirigliano *et al.* Ref. [37] ottenendo un perfetto accordo. Abbiamo quindi proceduto al calcolo delle rate differenziali per entrambi i decadimenti, quello a tre corpi $K \rightarrow \pi \ell^+ \nu$ e quello radiativo $K \rightarrow \pi \ell^+ \nu \gamma$ ottenendo un importante risultato rappresentato dalla perfetta cancellazione delle divergenze infrarosse nella somma della rate dei due processi. Il tutto è stato svolto nell'ambito della regolarizzazione dimensionale per curare sia le divergenze ultraviolette che le divergenze infrarosse.

Discuteremo ora il calcolo numerico della correzione totale nel canale $K^+ \rightarrow \pi^0 \mu^+ \nu_\mu$ che fino ad ora è nota con scarsa precisione (vedi Tabella 2.1). In generale la rate fisica misurabile è data da

$$\Gamma_{fisica} = \Gamma(K^+ \rightarrow \pi^0 l \nu_l) + \Gamma(K^+ \rightarrow \pi^0 l \nu_l \gamma) = \int dr_u F_V(r_u) + \int dr_u \int dz F_R(r_u, z) \quad (7.1)$$

dove $F_V(r_u)$ e $F_R(r_u, z)$ sono definite in (4.93) e (5.20) rispettivamente. Prima di integrare abbiamo separato nella funzione $F_V(r_u)$ il contributo all'ordine zero in α e il contributo al primo ordine per poter calcolare le correzioni elettromagnetiche percentuali. La base di partenza è la formula riportata in (2.54) e ciò che abbiamo calcolato è la grandezza $\Delta_{EM}^{K l}$. Abbiamo integrato, a tal scopo, sulle variabili r_u e z , la prima legata alla massa invariante della coppia di particelle neutre del decadimento mentre la seconda all'energia del muone o dell'elettrone. Il range di variabilità delle variabili di integrazione è dato da

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ r_\pi \leq r_u \leq (1 - \sqrt{r_l})^2 \end{cases} \quad (7.2)$$

dove

$$\begin{cases} r_\pi = \frac{m_\pi^2}{m_k^2} \\ r_l = \frac{m_l^2}{m_k^2} \end{cases} \quad (7.3)$$

Calcoliamo quindi le correzioni elettromagnetiche percentuali per il canale muonico mettendo a zero i controtermini. Poniamo quindi nella funzione (4.93)

$$\begin{cases} f_+^{EMloc} = 0.000580 \\ f_-^{EMloc} = -0.0286 \end{cases} \quad (7.4)$$

Il risultato finale è dato dalla somma delle correzioni virtuali e di quelle reali secondo la formula

$$\delta_{EM} = 2 \Delta_{EM}^{K l} = \delta_{EM_V} + \delta_{EM_R} \quad (7.5)$$

dove possiamo vedere in che modo il nostro risultato è legato a quello riportato nella master formula (2.54). I risultati che otteniamo dalla semplice integrazione numerica senza considerare i controtermini sono riassunti nello schema qui sotto:

$$\begin{cases} \delta_{EM_V}^{(\mu)} = 1.23\% \\ \delta_{EM_R}^{(\mu)} = -1.50\% \end{cases} \quad (7.6)$$

da cui per la (7.5) si ha

$$\Delta_{EM}^{(\mu)} = -0.14\% \quad (7.7)$$

Questo risultato è in accordo perfetto con quanto presentato preliminarmente da Cirigliano alla conferenza KAON'07 [73] Per stimare l'errore indotto dalla presenza dei controtermini procediamo esattamente come Cirigliano in [37] basandoci su considerazioni legate all'analisi dimensionale ottenendo

$$\Delta_{EM}^{(\mu)} = (-0.14 \pm 0.16)\%. \quad (7.8)$$

Abbiamo proceduto allo stesso modo per la determinazione delle correzioni elettromagnetiche del canale neutro $K^0 \rightarrow \pi^- \mu^+ \nu_\mu$. Similmente al caso precedente la formula generale della rate fisica misurabile è data da

$$\begin{aligned} \Gamma_{fisica} &= \Gamma(K^0 \rightarrow \pi^- l \nu_l) + \Gamma(K^0 \rightarrow \pi^- l \nu_l \gamma) = \\ &= \int dr_u F_V^0(r_u) + \int dr_u \int dz F_R^0(r_u, z) \end{aligned} \quad (7.9)$$

dove adesso le funzioni $F_V^0(r_u)$ e $F_R^0(r_u, z)$ sono date rispettivamente da (4.129) e da (6.26). Il range di variabilità delle variabili di integrazione ora è rappresentato da

$$\begin{cases} 0 \leq z \leq 1 \\ (\sqrt{r_\mu} + \sqrt{r_\pi})^2 \leq r_u \leq 1 \end{cases} \quad (7.10)$$

dove ancora una volta abbiamo

$$\begin{cases} r_\pi = \frac{m_\pi^2}{m_k^2} \\ r_\mu = \frac{m_\mu^2}{m_k^2}. \end{cases} \quad (7.11)$$

Calcoliamo le correzioni elettromagnetiche ponendo ancora una volta uguali a zero i controtermini. Ciò comporta che nella funzione (4.129) si abbia

$$\begin{cases} f_+^{EMloc} = 0.000580 \\ f_-^{EMloc} = -0.0171 \end{cases} \quad (7.12)$$

da cui, per integrazione numerica, otteniamo

$$\begin{cases} \delta_{EMV}^{(\mu)} = 4.44\% \\ \delta_{EMR}^{(\mu)} = -4.17\% \end{cases} \quad (7.13)$$

Grazie alla (7.5) possiamo affermare che la relativa correzione elettromagnetica percentuale è data da

$$\Delta_{EM}^{(\mu)} = 0.14\%. \quad (7.14)$$

Anche in questo caso per stimare l'indeterminazione dovuta alla presenza dei controtermini procediamo come Cirigliano [37] ottenendo

$$\Delta_{EM}^{(\mu)} = (0.14 \pm 0.16)\%. \quad (7.15)$$

Tale risultato è in accordo al limite con una stima elaborata in Ref [39] riportata in Tabella 2.1. C'è da dire però che quest'ultimo risultato non è stato ottenuto nell'ambito della Teoria Chirale delle Perturbazioni ma attraverso delle tecniche di approssimazione, di cui non sappiamo molto, basate su un modello adronico per le interazioni elettromagnetiche. I due risultati non sono quindi, in linea di principio, direttamente confrontabili.

Capitolo 8

Conclusioni

Questo lavoro ha riguardato il calcolo delle correzioni radiative ai decadimenti $K \rightarrow \pi \ell \nu$ nell'ambito della CHPT. I decadimenti semileptonici dei mesoni K giocano un ruolo importante nella comprensione della fisica del sapore. Particolarmente importante è il loro ruolo come strumento per l'estrazione dell'elemento $|V_{us}|$ della matrice di Cabibbo, Kobayashi e Maskawa (detta matrice CKM), la quale descrive il mescolamento dei quarks. L'importanza della conoscenza di tale elemento di matrice è di duplice natura: fenomenologica e teorica. Infatti, la conoscenza di $|V_{us}|$, assieme a quella di $|V_{ud}|$, è necessaria per testare l'unitarietà della matrice CKM . La possibile rilevanza scientifica del lavoro risiede nell'aver fornito una stima per le correzioni elettromagnetiche ai decadimenti semileptonici del mesone K carico nel canale muonico. Come si evince dalla Tabella 2.1, infatti, manca proprio il dato relativo alla stima delle correzioni elettromagnetiche del decadimento in questione. Esistono delle stime preliminari presentate alla conferenza KAON'07 da Cirigliano [73] ma mancano ancora dei dati pubblicati. Le ragioni di tale mancanza sono da attribuire, come già detto, alla presenza di molte scale rilevanti che rendono il calcolo più complesso rispetto al caso dell'elettrone in cui la massa del leptone è trascurabile rispetto a quella delle altre particelle del processo. In tal senso abbiamo scelto di eseguire l'intero calcolo adottando la tecnica della regolarizzazione dimensionale per curare sia le divergenze ultraviolette che le divergenze infrarosse. Essa, infatti, oltre a presentare dei vantaggi del tutto generali in quanto è una tecnica che non disturba le simmetrie presenti, nel caso in esame può essere d'aiuto perché, nonostante causi inevitabilmente l'intruduzione di una scala di energia μ ulteriore, non lo fa in maniera tale da complicare il calcolo degli integrali di loop come invece accade utilizzando altre tecniche di regolarizzazione. Un altro importante contributo è dato dalla previsione del rapporto tra le rate del decadimento del K in elettroni e quello del K in muoni. In esso infatti scompare la dipendenza da $|V_{us}|$ e ciò rende possibile testare la convergenza della CHPT in questo tipo di calcolo e con esso, quindi, l'accuratezza dello strumento teorico utilizzato per descrivere tali processi.

Il lavoro si è sviluppato attraverso diversi passaggi. Innanzitutto ci siamo occupati del calcolo dei fattori di forma per entrambi i canali di decadimento attraverso lo sviluppo degli

integrali di loop associati ai diagrammi con scambio di fotoni virtuali e attraverso la determinazione dei diagrammi con i controtermini avvenuta analizzando direttamente gli ordini successivi della lagrangiana chirale. Per quanto riguarda lo scambio dei fotoni virtuali si è adoperata la parametrizzazione standard di Feynman per elaborare gli integrali di loop legati alla self-energy delle particelle cariche o allo scambio di fotoni tra le particelle cariche esterne e il vertice. Una diversa parametrizzazione è stata invece adoperata per determinare il contributo a ciascun fattore di forma del diagramma con scambio di fotoni virtuali tra le particelle cariche esterne. In tal caso, infatti, la presenza di più propagatori rendeva controproducente, ai fini della semplificazione del calcolo, l'uso della parametrizzazione standard di Feynman (4.9) comportando la necessità di usare la parametrizzazione alternativa riportata in (4.44). Ottenuti i contributi di ciascun diagramma, abbiamo quindi potuto determinare le espressioni finali dei fattori di forma che abbiamo confrontato con le espressioni note in letteratura [37] ottenendo un accordo completo. Tenendo conto che i risultati presenti in letteratura sono stati ottenuti utilizzando una tecnica di regolarizzazione delle divergenze infrarosse differente dalla nostra, questo raggiunto e qui riportato è stato un primo risultato importante. Il passo successivo è stato il calcolo delle rate di tale processi in cui erano presenti ancora le divergenze infrarosse, mentre quelle ultraviolette erano state assorbite dalla parte divergente dei controtermini. E' stato necessario effettuare tale calcolo in n -dimensioni al fine di considerare tutti i contributi finiti. Tale necessità è dovuta alla presenza delle divergenze infrarosse nei fattori di forma descritte da termini proporzionali al fattore dimensionale $1/\epsilon$, dove $n = 4 - \epsilon$. Tali termini, infatti, generano contributi finiti quando sono moltiplicati con i termini di ordine ϵ provenienti dallo spazio delle fasi. Ottenuta l'espressione finale della rate differenziale per il settore virtuale, siamo passati ad occuparci dei processi con emissione dei fotoni reali calcolandone innanzitutto il modulo quadro dell'ampiezza che sta alla base dell'espressione della rate di decadimento. Il calcolo è stato effettuato stando bene attenti ad utilizzare le regole giuste relative all'algebra di Dirac in n -dimensioni al fine di giungere all'espressione corretta per la somma delle tracce delle matrici di Dirac contratte con i quadrimpulsi delle particelle esterne. Ottenuta l'espressione finale e semplificata per il modulo quadro dell'ampiezza di decadimento ci siamo occupati del calcolo della rate. In questo tipo di decadimenti è fondamentale considerare i processi con emissione di fotoni reali in quanto la grandezza fisica di interesse è data dalla somma delle rate di decadimento dei processi a tre corpi e dei relativi processi radiativi. Infatti solo tale somma è libera dalle divergenze infrarosse, presenti a causa del fatto che i fotoni sono particelle non massive. Un risultato importante conseguito in questo settore del calcolo è stata la perfetta cancellazione delle parti divergenti provenienti dal calcolo delle rate per i due processi. Siamo perciò rimasti con le rate di decadimento differenziali completamente finite e ciò ci ha permesso di passare al calcolo delle correzioni elettromagnetiche al decadimento del mesone K carico attraverso l'integrazione numerica. Il primo passo è stato quello di separare il contributo di ordine zero e quello di ordine "1" in α nella rate di decadimento relativa al settore virtuale al fine di poter calcolare le correzioni elettromagnetiche percentuali dei due settori. Siamo quindi passati al calcolo delle correzioni elettromagnetiche percentuali del canale muonico avendo fissato inizialmente a zero il contributo dei controtermini. Il risultato ottenuto è riportato nell'equazione (7.7) e il relativo errore è stato stimato seguendo il lavoro di Cirigliano [37]. Il

risultato finale conseguito è quello riportato in (7.8) ed è in perfetto accordo con il risultato preliminare presentato da Cirigliano alla conferenza KAON'07 [73]. Allo stesso modo siamo giunti al risultato per le correzioni elettromagnetiche del canale neutro del decadimento. Il risultato ottenuto è riportato in (7.15) e come già spiegato è solo al limite in accordo con una stima riportata nella Tabella (2.1) che però non è stata ottenuta nell'ambito della CHPT ma attraverso tecniche di approssimazione all'interno di un modello adronico per le interazioni elettromagnetiche dei Kaoni. Il nostro risultato non è quindi direttamente confrontabile con quest'ultimo.

Bibliografia

- [1] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 531 (1963).
- [2] M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49**, 652 (1973).
- [3] L. Wolfenstein, *Phys. Rev. Lett.* **51**, 1945 (1983).
- [4] A.Pich, The Standard Model of Electroweak Interactions
Updated version of the lectures given at the 2006 European School of High Energy Physics (Aronsborg, Sweden, 18 June - 1 July 2006) and at the 4th CERN - CLAF School of High Energy Physics (Vina del Mar, Chile, 18 February - 3 March 2007)
- [5] M.E.Peskin, D.V.Schroeder,
An Introduction to Quantum Field Theory Westview ABP
- [6] PARTICLE DATA GROUP, *Phys. Lett.* **239 B** (1990) 1.
- [7] L. WOLFENSTEIN, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 1945.
- [8] A. J. Buras, M. E. Lautenbacher and G. Ostermaier, *Phys. Rev. D* **50** (1994) 3433 [arXiv:hep-ph/9403384].
- [9] A.D. Sakharov, *Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **5**, 32 (1967) [*JETP Lett.* **5**, 24 (1967)].
- [10] L. L. Chau and W. Y. Keung, *Phys. Rev. Lett.* **53** (1984) 1802.
- [11] L. Wolfenstein, *Phys. Rev. Lett.* **51** (1983) 1945.
- [12] J. Charles *et al.* [CKMfitter Group], *Eur. Phys. J. C* **41** (2005) 1 [arXiv:hep-ph/0406184].
- [13] B. Winstein and L. Wolfenstein, *Rev. Mod. Phys.* **65** (1993) 1113.
- [14] M. Battaglia *et al.*, arXiv:hep-ph/0304132.
- [15] A. J. Buras, F. Parodi and A. Stocchi, *JHEP* **0301** (2003) 029 [arXiv:hep-ph/0207101].
- [16] E. Blucher *et al.*, arXiv:hep-ph/0512039.
- [17] J. Gasser and H. Leutwyler, *Ann. Phys.* **158** (1984) 142.

- [18] B. Moussallam, Nucl. Phys. B **504**, 381 (1997) [hep-ph/9701400].
- [19] W. Jaus, Phys. Rev. D **63**, 053009 (2001).
- [20] V. Cirigliano, M. Knecht, H. Neufeld and H. Pichl, Eur. Phys. J. C **27** 255 (2003).
- [21] W. J. Marciano and A. Sirlin, hep-ph/0510099.
- [22] N. Cabibbo, E. C. Swallow and R. Winston, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **53** (2003) 39 [arXiv:hep-ph/0307298].
- [23] A. Garcia, P. Kielanowski and A. . (. Bohm, Lect. Notes Phys. **222** (1985) 1.
- [24] S. Eidelman *et al.* [Particle Data Group Collaboration], Phys. Lett. B **592**, 1 (2004).
- [25] R. Flores-Mendieta, Phys. Rev. D **70** (2004) 114036 [arXiv:hep-ph/0410171].
- [26] R. Barate *et al.* [ALEPH Collaboration], Eur. Phys. J. C **4** (1998) 409.
- [27] A. Pich and J. Prades, JHEP **9910** (1999) 004 [arXiv:hep-ph/9909244].
- [28] E. Gamiz, M. Jamin, A. Pich, J. Prades and F. Schwab, JHEP **0301** (2003) 060 [arXiv:hep-ph/0212230].
- [29] E. Gamiz, M. Jamin, A. Pich, J. Prades and F. Schwab, Phys. Rev. Lett. **94** (2005) 011803 [arXiv:hep-ph/0408044].
- [30] G. Abbiendi *et al.* [OPAL Collaboration], Eur. Phys. J. C **35** (2004) 437 [arXiv:hep-ex/0406007].
- [31] W. J. Marciano, Phys. Rev. Lett. **93** (2004) 231803 [arXiv:hep-ph/0402299].
- [32] M. Knecht, H. Neufeld, H. Rupertsberger and P. Talavera, Eur. Phys. J. C **12** (2000) 469 [arXiv:hep-ph/9909284].
- [33] C. Aubin *et al.* [MILC Collaboration], Phys. Rev. D **70** (2004) 114501 [arXiv:hep-lat/0407028].
- [34] C. Bernard *et al.* [MILC Collaboration], PoS **LAT2005** (2006) 025 [arXiv:hep-lat/0509137].
- [35] F. Ambrosino *et al.* [KLOE Collaboration], Phys. Lett. B **632** (2006) 76 [arXiv:hep-ex/0509045].
- [36] J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **250** (1985) 517.
- [37] V. Cirigliano, M. Knecht, H. Neufeld, H. Rupertsberger and P. Talavera, Eur. Phys. J. C **23** (2002) 121 [hep-ph/0110153].
- [38] V. Cirigliano, H. Neufeld and H. Pichl, Eur. Phys. J. C **35** (2004) 53 [hep-ph/0401173].

- [39] T. C. Andre, arXiv:hep-ph/0406006.
- [40] B. Moussallam, Nucl. Phys. B **504** (1997) 381 [arXiv:hep-ph/9701400].
- [41] V. Bytev, E. Kuraev, A. Baratt and J. Thompson, Eur. Phys. J. C **27** (2003) 57 [Erratum-ibid. C **34** (2004) 523] [arXiv:hep-ph/0210049].
- [42] H. Leutwyler and M. Roos, Z. Phys. C **25**, 91 (1984).
- [43] P. Post and K. Schilcher, Eur. Phys. J. C **25** (2002) 427 [arXiv:hep-ph/0112352].
- [44] J. Bijnens and P. Talavera, Nucl. Phys. B **669** (2003) 341 [arXiv:hep-ph/0303103].
- [45] G. Amoros, J. Bijnens and P. Talavera, Nucl. Phys. B **602** (2001) 87 [arXiv:hep-ph/0101127].
- [46] J. Gasser and H. Leutwyler, Nucl. Phys. B **250** (1985) 465.
- [47] J. Bijnens, G. Colangelo and G. Ecker, JHEP **9902** (1999) 020 [arXiv:hep-ph/9902437].
- [48] J. Bijnens, G. Colangelo and G. Ecker, Phys. Lett. B **441** (1998) 437 [arXiv:hep-ph/9808421].
- [49] V. Cirigliano, G. Ecker, M. Eidemuller, R. Kaiser, A. Pich and J. Portoles,
- [50] D. Becirevic *et al.*, Nucl. Phys. B **705** (2005) 339 [arXiv:hep-ph/0403217].
- [51] T. Alexopoulos *et al.* [KTeV Collaboration], Phys. Rev. D **70** (2004) 092007 [arXiv:hep-ex/0406003].
- [52] A. Sirlin, Nucl. Phys. B **196** (1982) 83.
- [53] G. Colangelo and G. Isidori, arXiv:hep-ph/0101264.
- [54] S. Weinberg, Physica A **96** (1979) 327.
- [55] H. Georgi, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. **43** (1993) 209.
- [56] J. Goldstone, Nuovo Cim. **19** (1961) 154.
- [57] C. G. . Callan, S. R. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev. **177** (1969) 2247.
- [58] S. R. Coleman, J. Wess and B. Zumino, Phys. Rev. **177** (1969) 2239.
- [59] G. Ecker, Prog. Part. Nucl. Phys. **35** (1995) 1 [arXiv:hep-ph/9501357].
- [60] M. Gell-Mann, *Phys. Rev.* **106** (1957) 1296.
- [61] S. Okubo, Prog. Theor. Phys. **27** (1962) 949.

- [62] M. Knecht, H. Neufeld, H. Rupertsberger and P. Talavera, Eur. Phys. J. C **12** (2000) 469 [arXiv:hep-ph/9909284].
- [63] R. Urech, Nucl. Phys. B **433** (1995) 234 [arXiv:hep-ph/9405341].
- [64] H. Neufeld and H. Rupertsberger, Z. Phys. C **68** (1995) 91.
- [65] H. Neufeld and H. Rupertsberger, Z. Phys. C **71** (1996) 131 [arXiv:hep-ph/9506448].
- [66] H. Neufeld, J. Gasser and G. Ecker, Phys. Lett. B **438** (1998) 106 [arXiv:hep-ph/9806436].
- [67] T. Kinoshita and A. Sirlin, Phys. Rev. **113** (1959) 1652.
- [68] W. J. Marciano and A. Sirlin, Phys. Rev. Lett. **71** (1993) 3629.
- [69] B. Guberina, R. D. Peccei and R. Ruckl, Nucl. Phys. B **171** (1980) 333.
- [70] D. J. Antonio *et al.*, arXiv:hep-lat/0702026.
- [71] T.Kaneko, talk presented at KAON '07 (Frascati, 21-25 May, 2007), <http://www.lnf.infn.it/conference/kaon07/>
- [72] J. Bijnens and J. Prades, Nucl. Phys. B **490** (1997) 239 [arXiv:hep-ph/9610360].
- [73] V.Cirigliano, talk presented at KAON '07 (Frascati, 21-25 May, 2007), <http://www.lnf.infn.it/conference/kaon07/>